

SAMMLUNG VIEWEG

**TAGESFRAGEN AUS DEN GEBIETEN
DER NATURWISSENSCHAFTEN
UND DER TECHNIK**

Heft 78

**Theorie des
Entmagnetisierungsfaktors
und der Scherung von
Magnetisierungskurven**

Von

Joseph Würschmidt



SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg“

- Heft 16. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Anwendung der Quantenhypothese in der kinetischen Theorie der festen Körper und der Gase. In elementarer Darstellung.* 2. erweiterte Auflage. Mit 5 Abbildungen. M. 4,50.
- Heft 17. Dr. Hans Witte-Wolfenbüttel: *Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik.* Eine allgemeinverständliche Entwicklung des raumzeitlichen Relativitätsgedankens bis zum Relativitätsprinzip der Trägheitssysteme. 3. Aufl. Mit 18 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 18. Dr. Erich Hupka-Tsingtau: *Die Interferenz der Röntgenstrahlen.*
- Heft 19. Prof. Dr. Robert Kremann-Graz: *Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässrigen Lösungen.* Mit 20 Abbildungen. M. 2,50.
- Heft 20. Dr. Erik Liebreich-Berlin: *Rost und Rostschutz.* Mit 22 Abbild. M. 3,25.
- Heft 21. Prof. Dr. Bruno Glatzel-Berlin: *Elektrische Methoden der Momentenphotographie.* Mit dem Bild des Verfassers und 51 Abbildungen. M. 4,—.
- Heft 22. Prof. Dr. med. et phil. Carl Oppenheimer: *Stoffwechselfermente.* M. 2,50.
- Heft 23. Dr. Alfred Wegener-Hamburg: *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane.* 3. gänzlich umgearbeitete Auflage, erschien als Bd. 66 unserer Sammlung „Die Wissenschaft“.
- Heft 24. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Die Härtung der Fette.* 2. vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 5 Abbild. M. 6,—.
- Heft 25. Prof. Dr. A. Wassmuth-Graz: *Grundlagen und Anwendungen der statistischen Mechanik.* 2. Auflage. Mit 4 Abbildungen. M. 4,—.
- Heft 26. Dr. A. Lipschütz-Bern: *Zur allgemeinen Physiologie des Hungers.* Mit 39 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 27. Prof. Dr. C. Doelter-Wien: *Die Farben der Mineralien, insbesondere der Edelsteine.* Mit 2 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 28. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Neuere Gerbemethoden und Gerbetheorien.* M. 4,50.
- Heft 29. Dr. Erik Hägglund-Bergvik (Schweden): *Die Sulfitablauge und ihre Verarbeitung auf Alkohol.* 2. Auflage. Mit 6 Abbild. und einer Tafel. M. 3,50.
- Heft 30. Dr. techn. M. Vidmar-Laibach: *Moderne Transformatorentragen.* Mit 10 Abbildungen.
- Heft 31. Dr. Heinr. Faßbender-Berlin: *Die technischen Grundlagen der Elektromedizin.* Mit 77 Abbildungen. M. 4,—.
- Heft 32/33. Prof. Rudolf Richter-Karlsruhe: *Elektrische Maschinen mit Wicklungen aus Aluminium, Zink und Eisen.* Mit 51 Abbildungen. M. 6,—.
- Heft 34. Oberger. Carl Beckmann-Berlin-Lankwitz: *Haus- und Geschäfts-Telephonanlagen.* Mit 78 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 35. Dr. Aloys Müller-Bonn: *Theorie der Gezeitenkräfte.* Mit 17 Abb. M. 3,—.
- Heft 36. Prof. Dr. W. Kummer-Zürich: *Die Wahl der Stromart für größere elektrische Bahnen.* Mit 7 Abbildungen. M. 2,50.
- Heft 37. Dr. Reinhold Rieke-Charlottenburg: *Die Arbeitsmethoden der Silikatchemie.* 2. Auflage. Mit 4 Abbildungen. M. 3,50.
- Heft 38. Prof. Dr. A. Einstein: *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. (Gemeinverständlich.)* 14. Auflage. (61.—65. Tausend.) Mit 4 Fig. M. 3,—.
- Heft 39/40. Dr. Richard Grammel-Danzig: *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges.* Mit 83 Abbildungen. M. 5,—.
- Heft 41/42. Ingenieur Georg Duffing-Berlin: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz u. ihre technische Bedeutung.* Mit 23 Abb. M. 4,75.
- Heft 43. Dr. Robert Schwarz-Freiburg i. Br.: *Feuerteste und hochfeuerfeste Stoffe.* 2. vermehrte Auflage. Mit 10 Abbild. M. 2,—.
- Heft 44. Dr. Iwan Döry: *Einphasenbahnmotoren.* Mit 75 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 45. Prof. Dr. K. Fajans, *Radioaktivität und die neueste Entwicklung der Lehre von den chemischen Elementen.* 4. Auflage. Mit 11 Abb. u. 14 Tab. M. 5,—.
- Heft 46. Dr. Bruno Alexander-Katz, *Quarzglas und Quarzgut.* Mit 43 Abb. M. 2,50.
- Heft 47. Prof. Dr. G. Berndt, *Radioaktive Leuchtfarben.* Mit 28 Abbildungen im Text und auf 1 Lichtdrucktafel. M. 4,—.
- Heft 48. Dr. R. Fürth, *Schwankungserscheinungen in der Physik.* Mit 5 Abb. M. 3,50.

Theorie des Entmagnetisierungsfaktors und der Scherung von Magnetisierungskurven

Von

Joseph Würschmidt



Mit 31 Abbildungen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Herausgeber dieses Heftes:
Geh. Reg.-Rat Prof. Dr.-Ing. e. h. K. Scheel, Berlin

ISBN 978-3-663-03105-5 ISBN 978-3-663-04294-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-04294-5

Alle Rechte vorbehalten

VORWORT.

Während meiner Tätigkeit in der physikalischen Abteilung der Versuchsanstalt der Firma Fr. Krupp-Essen wurde ich vor die Aufgabe gestellt, die Magnetisierungskurven von ferromagnetischem Material aufzustellen, wobei wegen der großen Zahl der zu untersuchenden Proben die Herstellung von Ellipsoiden nicht in Betracht kam, sondern man sich auf die einfacher herzustellende Form von Kreiszyllindern beschränken mußte. Da andererseits die Verwendung von Apparaten mit Weicheisenteilen wegen der Notwendigkeit, auch die sogenannte Anfangspermeabilität zu messen, nicht zulässig war, blieb als Methode nur die ballistische, angewandt auf Proben ohne Joch, eventuell die magnetometrische. Einer brieflichen Anregung von Herrn Geheimrat Prof. Dr. Gumlich folgend, hatte ich mich bereits vor einigen Jahren mit der Nachprüfung der für verschiedene Dimensionsverhältnisse geltenden Werte des Entmagnetisierungsfaktors bei Verwendung der ballistischen Methode befaßt; die bekannte Tatsache, daß dieser ballistische Entmagnetisierungsfaktor nur innerhalb eines gewissen Bereiches einigermaßen konstant ist, gab dann den Anlaß, die Frage des Entmagnetisierungsfaktors auch theoretisch zu behandeln. So ergab sich der im folgenden durchgeführte Versuch, die bei freien Polen, beim homogen magnetisierten Stabe, beim Kreisring, Ellipsoid und Kreiszyllinder auftretenden Verhältnisse unter dem einheitlichen Gesichtspunkt zu behandeln, der sich aus der Aufgabe ergibt, für alle diese theoretisch oder praktisch wichtigen Fälle die Größe des Entmagnetisierungsfaktors zu ermitteln. Dementsprechend werden in der ersten Hälfte des vorliegenden Bändchens vielfach bekannte Dinge behandelt, die

sonst in den üblichen Lehr- und Handbüchern des Magnetismus sich an vielen Stellen zerstreut finden; die zweite Hälfte bietet die Anwendung auf den praktisch wichtigen Kreiszyylinder. Auf die vorliegende Literatur wurde nur insoweit sie unmittelbar mit dem Gegenstand zusammenhängt und sie experimentelle Unterlagen bietet, eingegangen; im übrigen sei hier besonders auf das Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus verwiesen. Meinem Mitarbeiter, Herrn Dr. Stäblein, sei für mannigfache Unterstützung auch an dieser Stelle bestens gedankt.

Essen, Phys. Abteil. d. Versuchsanst. von Friedr. Krupp A.-G.
im Mai 1925.

J. Würschmidt.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Das homogene Magnetfeld	1
2. Magnetische Induktion und Magnetisierung	4
3. Pole, Polstärke, magnetisches Moment und Feld eines Polpaares	5
a) Feld in großer Entfernung	8
b) Erste Hauptlage	9
c) Zweite Hauptlage	11
d) Feld nahe der Längsachse des Polpaares	11
4. Der homogene magnetische Zylinder	13
5. Der Entmagnetisierungsfaktor	16
6. Der Entmagnetisierungsfaktor des magnetischen Kreisringes	17
7. Der Entmagnetisierungsfaktor des Ellipsoids	20
a) Feld außerhalb des Ellipsoids	20
b) Feld an der Oberfläche des Ellipsoids	24
c) Feld im Innern des Ellipsoids.	27
8. Das Brechungsgesetz der Kraftlinien und der Induktionslinien (Feldstärke, Induktion und Permeabilität)	32
9. Die Magnetisierungskurve und ihre Scherung beim Ellipsoid	40
10. Die Scherung der Magnetisierungskurve beim Kreiszyylinder	42
a) Die Messungen von R. Mann und C. Benedicks	43
b) Die Messungen von C. Benedicks und C. L. B. Shuddemagen	45
c) Die Messungen von J. Würschmidt	47
11. Der ballistische Entmagnetisierungsfaktor beim Kreiszyylinder	50
a) Magnetisierung in der Form $J = J_0 \left(1 - \frac{x^n}{a^n}\right)$	53
b) Magnetisierung in der Form $J = J_0 \left(1 - c_n \frac{x^n}{a^n}\right)$	60
c) Magnetisierung in der Form	
$J = J_0 \left(1 - c_2 \frac{x^2}{a^2} - c_3 \frac{x^3}{a^3} - c_4 \frac{x^4}{a^4} - \dots\right)$	63
12. Die Magnetisierung bei der ballistischen und bei der magnetometrischen Methode	66
13. Die Abhängigkeit des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors beim Kreiszyylinder von der Magnetisierung	69

	Seite
14. Theorie des Entmagnetisierungsfaktors beim Kreiszyylinder als Funktion der Suszeptibilität und der Form	75
15. Numerische Auswertung der Integralgleichung für die Verteilung der Magnetisierung im Kreiszyylinder.	88
a) Verteilung und Entmagnetisierungsfaktor für $\kappa = \infty$	88
b) Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors vom Dimensionsverhältnis.	99
c) Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors von der Suszeptibilität	101
d) Abhängigkeit der Magnetisierungsverteilung von der Suszeptibilität. Mittlere Magnetisierung	106
e) Rechnerische Ermittlung der Scherungskurven für eine gegebene Magnetisierungskurve.	108
Anhang. Auswertung der Integrale	113

1. Das homogene Magnetfeld.

Um die magnetischen Eigenschaften eines Körpers, der sich unter gewöhnlichen Verhältnissen als unmagnetisch erweist, zu messen, bringt man ihn in ein „magnetisches Feld“ und untersucht dann nach irgend einer Methode die Veränderungen im magnetischen Verhalten des Körpers, die hierdurch hervorgerufen werden. Da wir es bei allen Körpern mit Gebilden endlicher Abmessungen zu tun haben, muß das magnetische Feld homogen, d. h. für alle Punkte des Körpers, für ein bestimmtes endliches Gebiet, von gleicher Größe und Richtung sein. Das magnetische Feld eines natürlichen oder künstlichen Magnets besitzt diese Eigenschaft nicht; wir können aber ein derartiges homogenes Magnetfeld dadurch herstellen, daß wir einen Draht aus einem elektrizitätsleitenden Material, etwa einem Metall, zu einer im Verhältnis zu ihrer Länge engen Spule gleichmäßig wickeln und einen elektrischen Strom durch die Spule schicken. Bezeichnen wir mit l die Spulenlänge, mit r den mittleren Spulenhalmradius, mit a die Entfernung des Punktes, für den die Stärke des magnetischen Feldes gesucht ist, vom benachbarten Spulende, ferner mit n die Zahl der Windungen pro Zentimeter und mit i die Stromstärke (in Ampere), so ist¹⁾ die Feldstärke \mathfrak{H} gegeben durch

$$\mathfrak{H} = 0,2 \pi i n \left[\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} + \frac{l - a}{\sqrt{r^2 + (l - a)^2}} \right] \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

oder

$$\mathfrak{H} = 0,4 \pi i n \cdot f \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1a)$$

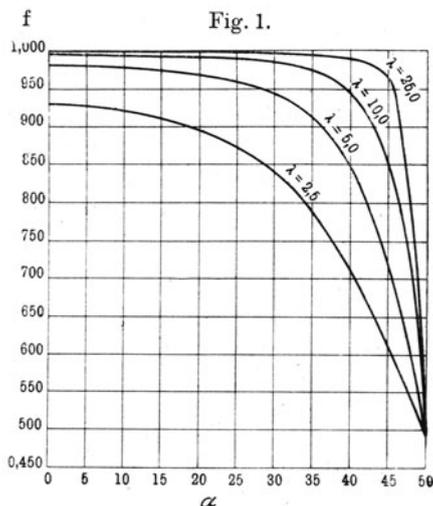
wobei f ein Zahlenfaktor ≤ 1 ist. Solange f nicht merklich verschieden von 1 ist, ist das Feld \mathfrak{H} homogen.

Bezeichnen wir den von der Spulenmitte aus in Bruchteilen der ganzen Spulenlänge gemessenen Abstand des betreffenden Feldpunktes mit α , d. h. setzen wir $\frac{l - a}{l} = \alpha$, ferner das Verhältnis der Spulenlänge l zum Spulendurchmesser $2r$ mit λ , so er-

¹⁾ F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 12. Aufl. 1915, S. 535.

geben sich die in Tabelle 1 für verschiedene α und λ mitgeteilten Werte von f .

Die Tabelle 1 und die ihr entsprechende Fig. 1 zeigen, daß das Feld am Spulenende etwa halb so groß als in der Spulen-



mitte ist, ferner daß für enge Spulen, d. h. solche, deren Länge mindestens das Zehnfache ihres Durchmessers beträgt, das Feld

Tabelle 1.

α	$\lambda = 2,5$	$\lambda = 5,0$	$\lambda = 10,0$	$\lambda = 25$
0	0,929	0,981	0,995	0,999
5	0,927	0,980	0,995	0,999
10	0,922	0,978	0,994	0,999
15	0,912	0,976	0,992	0,999
20	0,897	0,970	0,992	0,999
25	0,874	0,960	0,990	0,998
30	0,839	0,943	0,986	0,997
35	0,787	0,913	0,974	0,996
40	0,714	0,851	0,946	0,990
45	0,611	0,716	0,853	0,964
50	0,496	0,498	0,500	0,500

in der Spulenmitte ziemlich homogen ist, indem es von der Mitte bis zu $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{3}{4}$ der Spulenlänge ($\lambda = 25$) um weniger als 1 Proz. abnimmt ($f > 0,990$).

Um die unter 1 Proz. liegenden Abweichungen bequem abschätzen zu können, wurden die Werte von f für die in Betracht kommenden Dimensionsverhältnisse λ und Feldpunkte α genauer berechnet. Vgl. Tabelle 2 und Fig. 2.

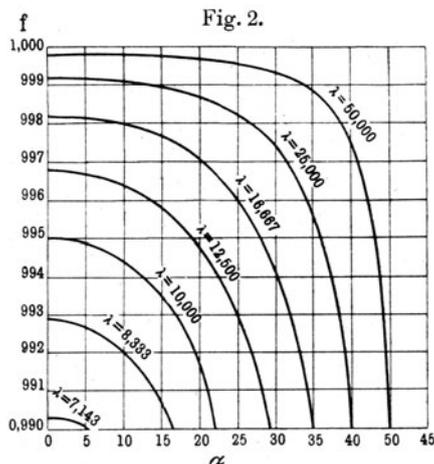


Tabelle 2.

α	$\lambda = 50,000$	$\lambda = 25,000$	$\lambda = 16,667$	$\lambda = 12,500$	$\lambda = 10,000$	$\lambda = 8,333$	$\lambda = 7,143$
0	0,9998	0,9992	0,9982	0,9968	0,9950	0,9929	0,9903
5	0,9998	0,9992	0,9981	0,9967	0,9949	0,9927	0,9901
10	0,9998	0,9991	0,9980	0,9963	0,9944	0,9920	—
15	0,9997	0,9990	0,9976	0,9958	0,9935	0,9907	—
20	0,9997	0,9987	0,9971	0,9948	0,9917	—	—
25	0,9996	0,9982	0,9960	0,9930	—	—	—
30	0,9993	0,9974	0,9941	—	—	—	—
35	0,9989	0,9955	0,9900	—	—	—	—
40	0,9975	0,9902	—	—	—	—	—
45	0,9903	—	—	—	—	—	—
50	—	—	—	—	—	—	—

Ist somit für eine bestimmte Spule das Verhältnis $\frac{l}{2r} = \lambda$ gegeben, so kann man hieraus ablesen, wie lange die zu untersuchende Probe im Verhältnis zur Spulenlänge höchstens sein darf, damit der Fehler in der Homogenität des Feldes nicht größer als ein gewisser Betrag, z. B. 1 Proz., wird.

Die Stärke des magnetischen Feldes einer Spule ist also unter den gegebenen Voraussetzungen mit hinreichender Genauigkeit bestimmt durch die Gleichung

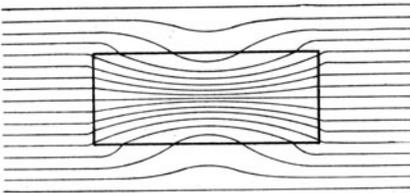
$$\mathfrak{H} = 0,4 \pi \cdot n \cdot i \dots \dots \dots (1b)$$

die Richtung ergibt sich aus der bekannten Uhrzeigerregel. Bildlich dargestellt können wir uns die Stärke eines Feldes \mathfrak{H} durch sogenannte „Kraftlinien“ denken, indem einem Felde von der Stärke \mathfrak{H} ebenso viele die Flächeneinheit senkrecht durchsetzende Kraftlinien entsprechen. Ein homogenes Feld ist somit durch ein Bündel äquidistanter, geradliniger Kraftlinien dargestellt.

2. Magnetische Induktion und Magnetisierung.

Ein in ein homogenes Feld gebrachter magnetischer Körper ruft nun im allgemeinen eine Störung der Homogenität in seiner Umgebung hervor; außerdem ist auch der Verlauf der Kraftlinien im Innern des Körpers im allgemeinen nicht mehr gleichmäßig.

Fig. 3.



Um anzudeuten, daß in dem Körper eine als magnetische Induktion bezeichnete Veränderung des magnetischen Zustandes vor sich gegangen ist, bezeichnen wir die in dem Körper verlaufenden Linien als „Induktionslinien“. Es kann

nun ein Doppeltes eintreten: entweder hat der Körper die Eigenschaft, die Kraftlinien des ursprünglichen Feldes gewissermaßen in sich hineinzuziehen, so daß im Innern eine „Verdichtung“ der Linien stattfindet; ein Beispiel für diesen Fall gibt Fig. 3, die einen derartigen stabförmigen Körper in einem vorher homogenen Feld darstellt¹⁾; oder es verlaufen im Innern des Körpers weniger Linien als vorher, d. h. es tritt eine Verkleinerung der Liniendichte ein. Im Falle eines unmagnetischen und unmagnetisierbaren Körpers tritt natürlich keinerlei Störung des Feldes ein. Die Dichte der Induktionslinien im Körper, die Induktion \mathfrak{B} , ist an den verschiedenen Stellen des Körpers verschieden; ist der

¹⁾ Mit gütiger Erlaubnis des Verf. entnommen aus Auerbach, Moderne Magnetik (Barth, 1921), S. 68.

Stab sehr lang im Verhältnis zu seinem Querschnitt, so ist aber im mittleren Teile des Körpers \mathfrak{B} sowohl längs der Achse als auch über den Querschnitt des Körpers als konstant anzusehen. Wir setzen

$$\mathfrak{B} = \mu \cdot \mathfrak{H} \dots \dots \dots (2)$$

und bezeichnen μ als die Permeabilität des Körpers. Ist $\mathfrak{B} > \mathfrak{H}$, so ist $\mu > 1$; der Körper wird als paramagnetisch, oder wenn μ nicht nur wenig, sondern bedeutend größer als Eins ist, als ferromagnetisch bezeichnet. $\mathfrak{B} < \mathfrak{H}$ oder $\mu < 1$ entspricht einem diamagnetischen Körper.

Für para- und diamagnetische Körper ist die wenig von Eins verschiedene Größe μ unabhängig von der Feldstärke \mathfrak{H} , also (bei konstanter Temperatur) eine Konstante; für ferromagnetische Körper hängt sie, wie wir später sehen werden, in komplizierter Weise von der Feldstärke ab.

In bestimmten, später zu besprechenden Fällen ist es zweckmäßig, den magnetischen Zustand eines Körpers nicht durch die Induktion \mathfrak{B} , sondern durch die Differenz $\mathfrak{B} - \mathfrak{H}$ zu kennzeichnen; aus formalen Gründen wählt man den 4π -ten Teil dieser Größe und bezeichnet ihn als die „Magnetisierung“ \mathfrak{J} . Es ist also

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi} \dots \dots \dots (3)$$

und nach (2)

$$\mathfrak{J} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathfrak{H} = \kappa \mathfrak{H} \dots \dots \dots (4)$$

wenn wir die Größe $\frac{\mu - 1}{4\pi} = \kappa$ setzen. κ wird als die Suszeptibilität des Körpers bezeichnet; sie ist für ferro- und paramagnetische Körper positiv, für diamagnetische negativ.

3. Pole, Polstärke, magnetisches Moment und Feld eines Polpaares.

Während nun für para- und diamagnetische Körper die durch ein Feld \mathfrak{H} erzeugte Induktion bzw. Magnetisierung, wie erwähnt, proportional diesem Felde \mathfrak{H} verläuft, d. h. bei wieder abnehmendem Felde für $\mathfrak{H} = 0$ wieder verschwindet, beobachten wir bei den ferromagnetischen Körpern ein anderes Verhalten: ein in einer Spule längs seiner Achse magnetisierter Eisenstab z. B. behält

auch für das zu Null gewordene äußere Spulenfeld noch eine gewisse Magnetisierung \mathfrak{M} , die wir als remanente Magnetisierung bezeichnen wollen; er ist zu einem Dauermagnet geworden; je nach den magnetischen Eigenschaften des Materials ist diese Erscheinung mehr oder minder ausgeprägt. Mittels einer den Magnet knapp umschließenden sogenannten Induktionsspule, die mit einem ballistischen Galvanometer verbunden ist und von der Mitte des Magnets rasch über eines seiner Enden abgezogen wird, läßt sich die Zahl der durch die Mitte des Magnets laufenden Induktionslinien \mathfrak{F} ($= 4\pi \mathfrak{M} \cdot q$), der sogenannte Induktionsfluß, und daraus die remanente Magnetisierung \mathfrak{M} leicht bestimmen.

Sein remanenter Magnetismus äußert sich jedoch noch in anderer Weise, nämlich dadurch, daß er auf andere in seine Nähe gebrachte magnetische Körper gewisse Kräfte ausübt. Mittels eines zweiten in seiner Mitte befestigten und sonst frei beweglichen Magnets können wir an jeder Stelle des Raumes in seiner Umgebung die Richtung der ausgeübten Kraft feststellen; in irgend einer Ebene, etwa der Horizontalebene, geschieht dies in bekannter Weise auch mittels Eisenfeilspänen. Man sieht, daß die „Kraftlinien“ von dem einen Ende des Stabes strahlenförmig ausgehen und in gleicher Weise in das andere Ende einmünden, wobei zunächst noch unbestimmt ist, welches die Eintritts- und welches die Austrittsstelle ist. Im Grenzfall eines sehr dünnen Magnetstabes kann man diese Stellen als punktförmig betrachten und bezeichnet sie dann als die „Pole“ des Magnets. Ist der Stab sehr lang, so verlaufen an jedem Pol die Kraftlinien nahezu radial, d. h. der Einfluß des anderen Poles kann vernachlässigt werden. Da diese Verhältnisse für jede durch den Pol gelegte Ebene gelten, so folgt daraus, daß die magnetische Kraft um einen Magnetpol mit der Entfernung nach demselben Gesetz sich ändert, wie etwa die Schwerkraft oder elektrische Kraft, d. h. es muß hier das Gesetz des umgekehrten Quadrates der Entfernung gelten (Coulombsches Gesetz).

Ein isolierter Pol möge nun von dem einen Magnetpol unseres Stabes in einer gewissen Entfernung mit einer gewissen Kraft abgestoßen werden; bringt man ihn in die gleiche Entfernung von dem anderen Pol, so wird er mit der gleichen Kraft angezogen. Man schreibt deshalb beiden Polen des Magnets die

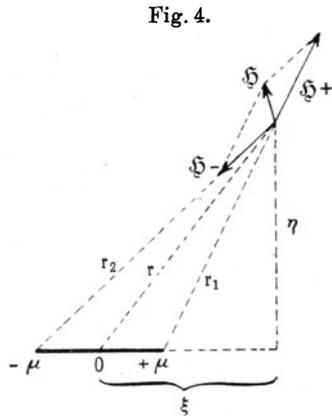
gleiche „Polstärke“ zu, gibt diesen Polstärken jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen¹⁾. Der Versuch zeigt dann, daß Pole gleichen Vorzeichens sich abstoßen, solche ungleichen Vorzeichens sich anziehen²⁾. Nach dem Coulombschen Gesetz $\mathfrak{P} = \frac{m_1 m_2}{r^2}$

hat ein Pol dann die Polstärke Eins, wenn er (im Vakuum) auf den gleich starken Pol in der Entfernung Eins (1 cm) die Kraft Eins (1 Dyne) ausübt. Die Kraft, die ein Pol m auf den positiven Einheitspol im Abstand r ausübt, bezeichnet man als seine Feldstärke an der Stelle des Einheitspoles; es ist also

$$\mathfrak{S} = \frac{m}{r^2} \dots \dots (5)$$

d. h. die Kraftlinien eines positiven Poles verlaufen radial von ihm nach außen.

Ist nicht ein einzelner Pol m , sondern ein im Abstand $2l$ voneinander befindliches Polpaar $m, -m$ gegeben, so können wir die Feldstärke in einem Punkte P (Koordinaten ξ, η bezüglich des zu m und $-m$ symmetrisch gelegenen Koordinatenanfangspunktes) folgendermaßen finden (Fig. 4):



Kraft, die der Pol m auf den Einheitspol P ausübt: $\mathfrak{S}^+ = \frac{m}{r_1^2}$,

„ „ „ „ $-m$ „ „ „ „ $\mathfrak{S}^- = -\frac{m}{r_2^2}$.

Die Resultante $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ + \mathfrak{S}^-$ (geometrische Addition) ergibt sich dann nach dem Kräfteparallelogramm.

Zerlegen wir \mathfrak{S}^+ und \mathfrak{S}^- in ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen und addieren diese, so erhalten wir für die Komponenten der resultierenden Kraft \mathfrak{S} :

¹⁾ Den positiven Magnetpol bezeichnet man auch willkürlich als „Nord“-pol, da er bei einem frei beweglichen Magnet sich ungefähr nach der Nordrichtung infolge des magnetischen Feldes der Erde einstellt.

²⁾ Konsequenterweise wäre dann der in der Nähe des geographischen Nordpoles der Erde befindliche magnetische Pol als magnetischer „Südpol“ zu bezeichnen.

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{m(\xi - l)}{[\eta^2 + (\xi - l)^2]^{3/2}} - \frac{m(\xi + l)}{[\eta^2 + (\xi + l)^2]^{3/2}}, \\ H &= \frac{m\eta}{[\eta^2 + (\xi - l)^2]^{3/2}} - \frac{m\eta}{[\eta^2 + (\xi + l)^2]^{3/2}}, \\ H^2 &= H_x^2 + H_y^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

Wir betrachten nun verschiedene wichtige Sonderfälle.

a) Feld in großer Entfernung (l klein gegen ξ).

In diesem Falle ergibt sich:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{m(\xi - l)}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2l\xi}{\eta^2 + \xi^2}\right) - \frac{m(\xi + l)}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{2l\xi}{\eta^2 + \xi^2}\right), \\ H_y &= \frac{m\eta}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{2l\xi}{\eta^2 + \xi^2}\right) - \frac{m\eta}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{2l\xi}{\eta^2 + \xi^2}\right), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{2ml}{(\eta^2 + \xi^2)^{3/2}} + \frac{6ml\xi^2}{(\eta^2 + \xi^2)^{5/2}}, \\ H_y &= \frac{6ml\eta\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{5/2}}, \end{aligned}$$

oder, wenn wir den Abstand $OP = r (= \sqrt{\eta^2 + \xi^2})$ setzen und für den Ausdruck $2ml$ als Abkürzung M einführen:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{M}{r^3} \left(1 - 3 \frac{\xi^2}{r^2}\right), \\ H_y &= \frac{3M}{r^5} \xi \eta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Demnach sind die Komponenten der Feldstärke außer von den Koordinaten des betreffenden Punktes nur noch von dem Produkt aus Polabstand und Polstärke, d. h. der Größe M , abhängig. Man bezeichnet $M = 2lm$ als das magnetische Moment des Polpaares.

Zwei wichtige Spezialfälle ergeben sich aus (7) sofort, wenn man einmal $\eta = 0$ (I), dann $\xi = 0$ (II) setzt, d. h. wenn man die Feldstärken auf den Koordinatenachsen berechnet. Man findet

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } H_I &= (H_x)_I = \frac{2M}{\xi^3} & (H_y)_I &= 0, \\ \text{II. } H_{II} &= (H_x)_{II} = -\frac{M}{\eta^3} & (H_y)_{II} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

d. h. in beiden Fällen ist die Feldstärke parallel zur Achse des Polpaares gerichtet, jedoch ist sie im ersten Fall nach rechts, im zweiten Fall nach links gerichtet, wenn der + Pol wie in obiger Figur rechts vom - Pol liegt, ferner ist sie im ersten Falle doppelt so groß als im zweiten. Man bezeichnet diese beiden Fälle als die erste bzw. zweite Gaußsche Hauptlage.

Wir wollen nun die Fälle der beiden Hauptlagen auch für den Fall betrachten, daß der Polabstand $2l$ nicht zu vernachlässigen ist.

b) 1. Hauptlage.

Für den Fall, daß der Punkt P sich zwischen den beiden Polen befindet, haben die von diesen auf ihn ausgeübten Kräfte die gleiche Richtung, nämlich nach links (negativ). Es ist dann

$H_I = -m \left(\frac{1}{(l-\xi)^2} + \frac{1}{(l+\xi)^2} \right)$. Ist aber der Punkt P rechts von $+m$, so ist die resultierende Kraft die Differenz der beiden Kräfte und nach rechts gerichtet (positiv), und es gilt $H_I = m \left(\frac{1}{(\xi-l)^2} - \frac{1}{(\xi+l)^2} \right)$. Für großes ξ muß der Wert in den durch Gleichung (8), I gegebenen übergehen. Es gilt also:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } \xi < l: H_I &= -m \left(\frac{1}{(l-\xi)^2} + \frac{1}{(l+\xi)^2} \right) = -\frac{M}{2l^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\left(1 + \frac{\xi}{l}\right)^2} \right] = -\frac{M}{l^3} \left[1 + 3\frac{\xi^2}{l^2} + 5\frac{\xi^4}{l^4} + \dots \right], \\ \text{für } \xi > l: H_I &= m \left[\frac{1}{(\xi-l)^2} - \frac{1}{(\xi+l)^2} \right] = \frac{M}{2l\xi^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{l}{\xi}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{\xi}\right)^2} \right] = \frac{2M}{\xi^3} \left[1 + 2\frac{l^2}{\xi^2} + 3\frac{l^4}{\xi^4} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} (9)$$

Für die numerische Auswertung setzen wir $M = 1$ und $l = 1$, d. h. die Polstärke $m = \frac{1}{2}$ und erhalten die Werte von Tabelle 3. In der letzten Spalte sind unter $\frac{2M}{\xi^3}$ die Werte beigefügt, die sich nach Gl. (8), I ergeben, die Übereinstimmung ist für $\xi > 5$ eine gute.

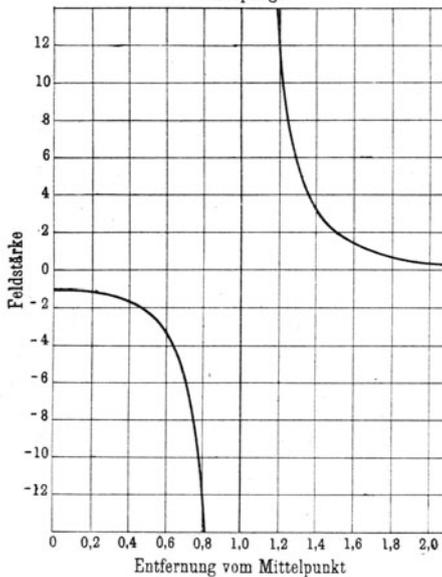
Tabelle 3.

ξ	H_I	ξ	H_I	$\frac{2M}{\xi^3}$
0	— 1,000 0	1,1	49,887	—
0,1	— 1,030 5	1,2	12,397	—
0,2	— 1,128 5	1,5	1,920	—
0,3	— 1,316 3	2,0	0,444 5	0,250 0
0,4	— 1,643 9	5	0,017 36	0,016 00
0,5	— 2,222 2	10	0,002 041	0,002 000
0,6	— 3,320 3	20	0,000 251 3	0,000 250 0
0,7	— 5,729	50	0,000 016 01	0,000 016 00
0,8	— 12,654	100	0,000 002 00	0,000 002 00
0,9	— 50,139			

Während also außerhalb des Polpaares auf der Achse ein positives, mit der Entfernung von einem Pol rasch abnehmendes

Fig. 5.

1. Hauptlage



Feld vorhanden ist, ist das Feld zwischen den beiden Polen negativ und nimmt bei Annäherung an die Pole nach beiden Seiten erst langsam, dann stärker ab (Fig. 5).

c) 2. Hauptlage.

Für den Fall der 2. Hauptlage ergibt sich aus (6)

$$\left. \begin{aligned} H_{II} = H_x &= \frac{-2ml}{(\eta^2 + l^2)^{3/2}} = -\frac{M}{R^3}, \\ H_y &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

wenn wir den Abstand des Punktes von jedem der beiden Pole mit R bezeichnen. Demnach ist die Feldstärke auf der y -Achse stets nach links gerichtet (negativ), d. h. nach dem negativen Pol hin. Für $\eta = 0$, d. h. für den Nullpunkt, erreicht sie ihren Höchstwert $H = -\frac{M}{l^3}$, d. h. den Wert, der sich auch aus (7) für $\xi = 0$ ergibt. Tabelle 4 enthält die Werte von $-H$ für verschiedene η , unter $-\frac{M}{\eta^3}$ sind noch die nach (8), II berechneten Näherungswerte beigefügt.

Tabelle 4.

η	$-H$	η	$-H$	$-\frac{M}{\eta^3}$
0	1,000 00	1,0	0,353 55	—
0,1	0,985,20	1,1	0,304 38	—
0,2	0,942 86	1,2	0,262 37	—
0,3	0,878 72	1,5	0,170 68	—
0,4	0,800 40	2,0	0,089 442	0,125
0,5	0,715 53	5	0,007 543 0	0,008 00
0,6	0,630 50	10	0,000 985 20	0,001 00
0,7	0,549 81	20	0,000 124 53	0,000 125 00
0,8	0,476 14	50	0,000 007 995 2	0,000 008 00
0,9	0,410 66	100	0,000 003 999 86	0,000 001 06

Es zeigt sich (vgl. Fig. 6), daß die Feldstärke zuerst sehr langsam, dann rascher, dann wieder langsamer und langsamer von dem negativen Höchstwert -1 gegen Null hin wächst.

d) Feld nahe der Längsachse des Polpaares.

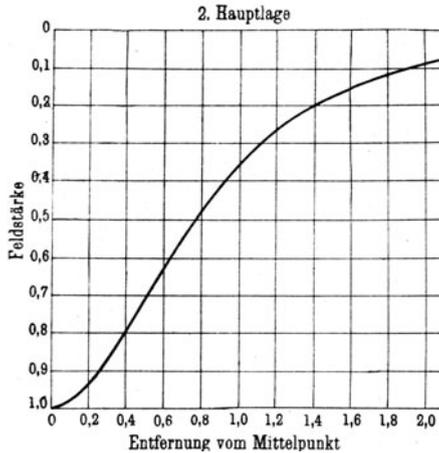
Von besonderem Interesse mit Rücksicht auf die späteren Betrachtungen ist die Beschaffenheit des Feldes in der Nähe der Längsachse des Polpaares. Setzt man in Gleichung (6) η sehr klein, d. h. nimmt man an, daß η sowohl gegen $l - \xi$ als auch

gegen $l + \xi$ verschwindend ist, so ergibt sich auch für kleines η der Fall der 1. Hauptlage, d. h. die Gleichung (10); natürlich darf man nicht allzu nahe an den Pol herangehen, da dort die Bedingung $l - \xi \gg \eta$ nicht mehr erfüllt ist.

Es ist also das Feld in der Nähe der Längsachse noch gleich demjenigen in der Längsachse selbst.

Um die Größe des bei dieser Vernachlässigung gemachten Fehlers abschätzen zu können, sind in der Tabelle 5 für $\eta = 0,02$ die Komponenten H_x und H_y genau nach Gleichung (6) berechnet,

Fig. 6.



ferner ist H_I nach Gleichung (8), I bzw. Tabelle 3 nochmals beigefügt und die Differenz $H_I - H_x$ angegeben; endlich ist in der letzten Spalte der Fehler in Prozenten von H_x berechnet.

Man sieht, daß die Komponente H_y bis zu $\xi = 0,8$ bedeutend kleiner als die Komponente H_x ist, daß somit die wahre Feldrichtung nur um einen sehr kleinen Winkel von der Achsenrichtung abweicht, ferner daß die Differenz $H_I - H_x$ bis nahe an den Pol verschwindend gering ist.

Die näherungsweise Berechnung gibt also, von der unmittelbaren Polnähe abgesehen, ein genügend richtiges Bild des Feldes.

Das Feld zwischen den beiden Polen in der Nähe der Achse wird also durch die linke Kurve der Fig. 4, die streng für die Achse selbst gilt, mit hinreichender Annäherung dargestellt.

Tabelle 5.

ξ	H_y	$-H_x$	$-H_I$	$H_I - H_x$	Proz.
0	0,000 000	0,999 39	1,000 00	0,000 6	0,06
0,1	0,006 198	1,029 83	1,030 5	0,000 7	0,07
0,2	0,013 728	1,127 60	1,128 5	0,000 9	0,08
0,3	0,024 569	1,314 92	1,316 3	0,001 4	0,11
0,4	0,042 577	1,641 62	1,643 9	0,002 3	0,14
0,5	0,076 846	2,217 31	2,222 2	0,004 9	0,22
0,6	0,153 23	3,308 7	3,320 3	0,011 6	0,35
0,7	0,365 87	5,691 6	5,729	0,037	0,64
0,8	1,229 8	12,469	12,654	0,185	1,5
0,9	9,427 1	47,282	50,139	2,857	5,7

Das wichtigste Ergebnis der Überlegungen des vorliegenden Abschnitts ist so zusammenzufassen: Ein magnetisches Polpaar erzeugt in seiner Achse und in nächster Nähe derselben ein magnetisches Feld, das zwischen den beiden Polen negativ, d. h. nach dem negativen Pol hin gerichtet ist. Sein Minimum hat dieses Feld in der Mitte, von da aus wächst es nach beiden Seiten erst langsam, dann, bei Annäherung an die Pole, rascher.

4. Der homogen magnetisierte Zylinder.

Der eben behandelte Fall eines Polpaares stellt einen in der Natur nicht vorkommenden Idealfall dar, der aber einigermaßen durch einen dünnen magnetisierten Zylinder angenähert wird, wenn auch die „Pole“, wie sich später zeigen wird, nicht ganz an den Enden liegen. Eine zweite Annäherung, die besser als der Begriff des Polpaares dem ausgedehnten materiellen magnetischen Körper entspricht, sei gegeben durch einen homogen längs seiner Achse magnetisierten Kreiszyylinder von der Länge $2a$ und dem Durchmesser $2b$. Die „homogene“ Magnetisierung besagt, daß in dem Körper die Magnetisierungs- bzw. Induktionslinien parallel der Achse verlaufen. Die Zahl der Magnetisierungslinien pro Quadratcentimeter sei \mathfrak{J}^1 ; ist das äußere homogene, magnetisierende Feld $\mathfrak{H} = 0$, so ist nach Gleichung (3) die Zahl der Induktionslinien pro Quadratcentimeter $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J}$. Diese Linien, die im Magnet z. B. von links nach rechts verlaufen, treten an der rechten

¹⁾ Wir könnten die Magnetisierung auch als eine remanente Magnetisierung \mathfrak{M} betrachten, da wir von einem äußeren Felde \mathfrak{H} absehen.

Endfläche als „Kraftlinien“ aus dem magnetischen Material heraus; dieses äußere Kraftlinienfeld ist natürlich nicht mehr homogen, indem die Kraftlinien zunächst mehr und mehr divergieren und sich umbiegen. In der Äquatorialachse laufen alle Kraftlinien von rechts nach links, d. h. in negativer Richtung; im weiteren Verlauf konvergieren sie wieder und münden zuletzt in die linke Polfläche ein. Mit anderen Worten, man erhält das bekannte durch Eisenfeilspäne realisierbare Bild des Kraftlinienverlaufs.

Einer homogenen Magnetisierung \mathfrak{J} entsprechen also $4\pi\mathfrak{J}$ an der Nordpolfläche des Magnets ihren Ausgang nehmende Kraftlinien pro Quadratcentimeter, die an der Südpolfläche wieder einmünden. Nun hatten wir oben einen punktförmigen Pol der Stärke m betrachtet; in der Entfernung Eins ist die Feldstärke nach dem Coulombschen Gesetz $\mathfrak{H} = m$, also für einen Pol der Stärke $1 : \mathfrak{H} = 1$; damit nun die Feldstärke numerisch gleich der Zahl der von dem Pol ausgehenden und die Flächeneinheit durchsetzenden Kraftlinien ist, so müssen wir, da die Fläche der Einheitskugel 4π ist, von einem Einheitspol 4π Kraftlinien im ganzen ausgehen lassen. Also gehen von einem Pol m im ganzen $4\pi m$ Kraftlinien aus. Erweitern wir nun den bisherigen Begriff des punktförmigen magnetischen Poles dahin, daß wir uns jeden Quadratcentimeter einer Oberfläche q eines magnetischen Körpers mit „freiem Magnetismus“ m (Flächendichte) belegt denken, so gehen von jedem Quadratcentimeter $4\pi m$ Kraftlinien aus.

Lassen wir nun jeder Magnetisierungslinie \mathfrak{J} eine Flächenbelegung m entsprechen, die ebenso groß wie der absolute Betrag von \mathfrak{J} ist, so gelangen wir zu der Vorstellung: Im Mündungspunkt einer jeden \mathfrak{J} -Linie liegt eine nordmagnetische Menge 1, im Ursprungspunkt jeder \mathfrak{J} -Linie eine süd magnetische Menge 1¹⁾; von der magnetischen Flächendichte m gehen $4\pi m$ Kraftlinien aus, die mit gleicher Dichte bei der Belegung $-m$ wieder einmünden. Im Innern des magnetischen Körpers verlaufen $4\pi m = 4\pi|\mathfrak{J}|$ Induktionslinien pro Quadratcentimeter, die vom Südpol zum Nordpol laufen.

Für die Wirkung nach außen kam bei dem Polpaar das sogenannte magnetische Moment M in Betracht. Übertragen wir diesen Begriff auf den Zylinder, so ist, da die Flächendichte

1) Vgl. Handwörterbuch d. Naturwissenschaften VI, S. 587.

$m = |\mathfrak{J}|$, und die Endfläche $q = b^2\pi$, die Polstärke gegeben durch $|\mathfrak{J}| \cdot b^2\pi$, ferner, da die Länge des Zylinders $2a$, ergibt sich für das magnetische Moment

$$M = |\mathfrak{J}| b^2\pi \cdot 2a = |\mathfrak{J}| \cdot V \dots \dots \dots (11)$$

wenn V das Volumen des Zylinders darstellt.

Es ist also

$$J = \frac{M}{V} \dots \dots \dots (11a)$$

d. h. der absolute Betrag der „Magnetisierung“ des Zylinders ist gleich dem magnetischen Moment der Volumeneinheit.

Was nun die Verteilung des „Feldes“ betrifft, so können wir ohne nennenswerten Fehler bei dünnen Stäben — und nur für solche trifft ja unsere Voraussetzung der homogenen Magnetisierung einigermaßen zu — uns die Flächenbelegung auf den beiden Achsenpunkten konzentriert denken.

Ist die Magnetisierung \mathfrak{J} , so ist der gesamte freie Magnetismus der rechten Endfläche $\delta = J \cdot b^2\pi$, wir haben also nur in Gleichung (6) m durch δ zu ersetzen. Da nun $2l \cdot \delta = 2l \cdot b^2\pi J = V \cdot J$ ist, so erhalten wir nach Gleichung (11) wieder das magnetische Moment M , und zwar jetzt des Zylinders.

Das Feld in der unmittelbaren Nähe des Zylinders, aber noch außerhalb desselben, erhalten wir, wenn wir in Gleichung (8), I m durch δ , bzw. M durch $V \cdot J$, l durch a ersetzen.

Es ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} H &= -\frac{V \cdot J}{a^3} \left[1 + 3 \frac{\xi^2}{a^2} + 5 \frac{\xi^4}{a^4} + \dots \right] \\ &= -\frac{2 a b^2 \pi J}{a^3} \left[1 + 3 \frac{\xi^2}{a^2} + 5 \frac{\xi^4}{a^4} + \dots \right] \\ &= -2 \pi \frac{b^2}{a^2} J \left[1 + 3 \frac{\xi^2}{a^2} + 5 \frac{\xi^4}{a^4} + \dots \right]; \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

das Feld ist also proportional der Magnetisierung J und wie im obigen Falle noch von der Entfernung vom Mittelpunkt abhängig. Der Proportionalitätsfaktor ist gleich 2π -mal dem Quadrat des Dimensionsverhältnisses $\frac{b}{a}$, das wir im folgenden stets mit β bezeichnen wollen.

Von besonderem Interesse ist der Wert der Feldstärke unmittelbar an dem Zylinder auf der Äquatorialachse, d. h. für $\xi = 0$; er beträgt $H_0 = -2\pi \beta^2 J$.

Im Innern des Zylinders ist für jedes ξ die gleiche Feldstärke vorhanden, wie an seiner Oberfläche, d. h. überall ein negatives Feld, das mit der Annäherung an die „Pole“ wächst.

5. Der Entmagnetisierungsfaktor.

Wir haben bisher keine Voraussetzung darüber gemacht, in welcher Weise der Magnetismus in unserem Zylinder ursprünglich erzeugt wurde, ebensowenig wie wir untersuchten, ob die vorausgesetzte homogene Magnetisierung in der Natur überhaupt möglich ist. Zur Erzeugung von Magnetisierung ist aber nach Abschnitt 1 das Vorhandensein eines magnetischen Feldes \mathfrak{H} notwendig, das wir von jetzt ab, da es ein äußeres Feld ist, als \mathfrak{H}_a bezeichnen wollen. Ist nun infolge der Anwesenheit des äußeren Feldes \mathfrak{H}_a , das wir als homogen ansehen können, eine Magnetisierung \mathfrak{J} vorhanden, so erzeugt andererseits diese Magnetisierung ein entgegengesetzt gerichtetes magnetisches Feld, dessen Größe, wenn die Magnetisierung homogen ist, durch Gleichung (12) an jedem Punkte bestimmt ist, und das wir vereinfacht schreiben wollen:

$$\mathfrak{H}_e = -N\mathfrak{J} \dots \dots \dots (13)$$

Dieses Feld wird der Wirkung des ursprünglichen Feldes entgegen wirken, so daß das resultierende Gesamtfeld sein wird:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_a + \mathfrak{H}_e = \mathfrak{H}_a - N\mathfrak{J} \dots \dots \dots (14)$$

Man bezeichnet aus diesem Grunde das Feld \mathfrak{H}_e als das „entmagnetisierende“ Feld und den Faktor N als den „Entmagnetisierungsfaktor“.

In dem vorliegenden Falle einer homogenen Magnetisierung eines Zylinders ist N , wie gezeigt, vom Orte abhängig und hat seinen kleinsten Wert $2\pi\beta^2$ in der Mitte, d. h. auf der Äquatorialachse; das Feld \mathfrak{H}_e ist ihm proportional, folglich ist das Gesamtfeld \mathfrak{H} nicht konstant, sondern nimmt von der Mitte nach beiden Seiten zu ab. Hieraus ergibt sich, daß auch die Magnetisierung nicht homogen sein kann, sondern weiter von der Mitte entfernt geringer sein muß. Damit erhebt sich bereits die im folgenden zu lösende Aufgabe, erstens eine Körperform zu finden, für die N konstant und somit die Magnetisierung homogen ist, zweitens aber für eine gegebene Körperform, z. B. einen Zylinder, die Art der Magnetisierung zu finden, die einem Gleichgewichtszustand entspricht.

Die Größe des Entmagnetisierungsfaktors und seine Abhängigkeit vom Orte muß in jedem Falle erst gesucht werden; allgemein aber können wir die Gültigkeit von Gleichung (13) bzw. (14) annehmen und wollen von jetzt ab unter „Feld“ das wahre, d. h. das innere Feld in dem magnetischen Körper verstehen. Dies gilt naturgemäß auch für Gleichung (2) bis (4); es ist also

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \mu \mathfrak{H}_a - \mu N \mathfrak{J} = \mu \mathfrak{H}_a - \mu N \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi} \quad (15)$$

und
$$\mathfrak{J} = \kappa \mathfrak{H} = \kappa \mathfrak{H}_a - \kappa N \mathfrak{J} \quad (16)$$

6. Der Entmagnetisierungsfaktor des magnetischen Kreisringes.

Der in Abschnitt 4 behandelte Fall eines homogen magnetisierten Zylinders ist im Falle eines unendlich langen oder praktisch eines sehr langen Zylinders gegeben. Dann können wir aber die Wirkung des freien Magnetismus auf den Endflächen vernachlässigen; der unendlich lange Zylinder besitzt also den Entmagnetisierungsfaktor Null. Ist er bei dem äußeren Felde Null unmagnetisch und wird in ein Feld \mathfrak{H}_a gebracht, so gilt

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}_a \quad (2)$$

$$\mathfrak{J} = \kappa \mathfrak{H}_a \quad (4)$$

wobei μ bzw. κ durch seine magnetischen Eigenschaften bestimmt ist. Ist er bei dem äußeren Felde Null bereits ein Magnet, so ist

$$\mathfrak{B}_0 = 4\pi \mathfrak{M}$$

für

$$\mathfrak{H}_a = 0.$$

Legt man nun ein äußeres Feld \mathfrak{H}_a an, so entsteht zu der bereits vorhandenen Magnetisierung \mathfrak{M} eine induzierte Magnetisierung \mathfrak{J} und es ist:

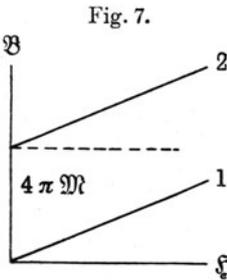
$$\mathfrak{B} = \mu' \mathfrak{H}_a + 4\pi \mathfrak{M} \quad (17)$$

$$\mathfrak{J} = \kappa' \mathfrak{H}_a \quad (18)$$

Die Erweiterung der Gleichung (2) in die Form (17) ist in allen Fällen, wo für $\mathfrak{H} = 0$ eine remanente Magnetisierung \mathfrak{M} vorhanden ist, angebracht; allerdings ist damit die Permeabilität μ' anders definiert. In vielen Fällen, d. h. bei para- und diamagnetischen Körpern, ferner auch mit gewissen Einschränkungen bei ferromagnetischen Körpern, ist μ eine Konstante, d. h. Gleichung (2) wird durch eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade dar-

gestellt (vgl. Fig 7, 1.) Auch in dem Falle einer remanenten Magnetisierung \mathcal{M} ist nun vielfach die Abhängigkeit der Induktion \mathfrak{B} von der Feldstärke \mathfrak{H} durch eine Gerade (2. in Fig. 7) darstellbar, d. h. $\mathfrak{B} = \mu' \mathfrak{H} + 4 \pi \mathcal{M}$; die Konstante μ' definiert man jetzt zweckmäßigerweise als Permeabilität.

Genau so wie ein unendlich langer Zylinder verhält sich ein geschlossener Kreisring, da auch hier keine freien Magnetismen auftreten; es gelten auch hier die Gleichungen (17) und (18).



Ist der Ring an einer Stelle geschlitzt, und ist die Breite des Luftschlitzes l_1 klein gegenüber der Länge des magnetischen Ringkörpers l_m , so können wir annehmen, daß die von der positiven Belegung des Magnets zu seiner negativen gehenden, in dem Schlitz verlaufenden Kraftlinien noch einigermaßen homogen sind, ferner können wir für weitaus

den größten Teil des Ringes das von den beiden freien Belegungen hervorgerufene Feld vernachlässigen (ξ und η groß gegen l_1), d. h. die Magnetisierung im Ringe noch größtenteils als homogen betrachten.

Bezeichnen wir alle im Innern des Ringes geltenden Größen mit dem Index m , die im Luftschlitz geltenden mit dem Index l , so gilt, wenn wir jetzt wieder μ an Stelle von μ' schreiben:

$$\mathfrak{B}_m = \mu \mathfrak{H}_m + 4 \pi \mathcal{M} \dots \dots \dots (17 a)$$

und

$$\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}_l = \mathfrak{H}_l \dots \dots \dots (17 b)$$

da die Induktionslinien des Innern sich im Luftraum als Kraftlinien fortsetzen.

Ferner folgt aus dem Satze, daß sich durch Herumführen des Einheitspoles in dem Felde keine Arbeit gewinnen läßt, die Gleichung

$$\mathfrak{H}_m l_m + \mathfrak{H}_l l_1 = \mathfrak{H}_a (l_m + l_1) \dots \dots \dots (19)$$

worin \mathfrak{H}_a die Stärke eines den ganzen Ring umgebenden homogenen Spulenfeldes bedeutet.

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_m &= \frac{4 \pi \mathcal{M} + \mu \mathfrak{H}_a (1 + \alpha)}{1 + \alpha \mu}, \\ \mathfrak{H}_m &= \frac{-\alpha \cdot 4 \pi \mathcal{M} + \mathfrak{H}_a (1 + \alpha)}{1 + \alpha \mu}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

wenn man $\frac{l_l}{l_m}$ mit α bezeichnet; d. h. die im Innern vorhandene Induktion ist kleiner, als wenn der Ring geschlossen ist. Ebenso ist das im Innern des Ringes vorhandene Feld kleiner als das äußere Feld \mathfrak{H}_a , mit anderen Worten, im Innern des Ringes ist ein „entmagnetisierendes Feld“ vorhanden; seine Größe ist nach (14)

$$\mathfrak{H}_e = \mathfrak{H}_a - \mathfrak{H}_m = \frac{\alpha}{1 + \alpha \mu} [4 \pi \mathfrak{M} + (\mu - 1) \mathfrak{H}_a].$$

Andererseits ist die Magnetisierung im Innern gegeben durch

$$\mathfrak{J}_m = \frac{\mathfrak{B}_m - \mathfrak{H}_m}{4 \pi} = \frac{1}{4 \pi} \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha \mu} [4 \pi \mathfrak{M} + (\mu - 1) \mathfrak{H}_a],$$

d. h. es ist

$$\mathfrak{H}_e = \frac{\alpha}{1 + \alpha} 4 \pi \mathfrak{J}_m$$

oder

$$\mathfrak{H}_e = N \mathfrak{J}_m \dots \dots \dots (21)$$

wenn wir die Konstante $\frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot 4 \pi$ mit N bezeichnen.

Für den homogen magnetisierten Kreisring mit kleinem Luftschlitz ist also der Entmagnetisierungsfaktor eine nur von den Dimensionen, d. h. der Breite des Luftschlitzes l_l und der Länge der Kreisringachse l_m abhängige Konstante.

Ist im besonderen das äußere Feld $\mathfrak{H}_a = 0$, so vereinfachen sich die Gleichungen (20) zu:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_m &= \frac{4 \pi \mathfrak{M}}{1 + \alpha \mu}, \\ \mathfrak{H}_m &= \frac{-\alpha 4 \pi \mathfrak{M}}{1 + \alpha \mu}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20 a)$$

für N ergibt sich natürlich der gleiche Wert.

Auch wenn über die Abhängigkeit der Induktion \mathfrak{B}_m von der wahren Feldstärke \mathfrak{H}_m nichts bekannt ist, d. h. wenn wir nicht annehmen, daß μ eine Konstante ist, ergibt sich der gleiche konstante Wert für den Entmagnetisierungsfaktor N . Setzt man nämlich allgemein

$$\mathfrak{B}_m = f(\mathfrak{H}_m),$$

so folgt aus (19) und (17 b)

$$\mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}_a(1 + \alpha) - \mathfrak{H}_l \alpha = \mathfrak{H}_a(1 + \alpha) - \alpha f$$

und es ist nach (14) und (3)

$$\begin{aligned} \frac{N}{4\pi} &= \frac{\mathfrak{S}_a - \mathfrak{S}_m}{\mathfrak{B}_m - \mathfrak{S}_m} = \frac{\mathfrak{S}_a - \mathfrak{S}_a(1 + \alpha) + \alpha f}{f - \mathfrak{S}_a(1 + \alpha) + \alpha f} \\ &= \frac{\alpha(f - \mathfrak{S}_a)}{(1 + \alpha)(f - \mathfrak{S}_a)} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \end{aligned}$$

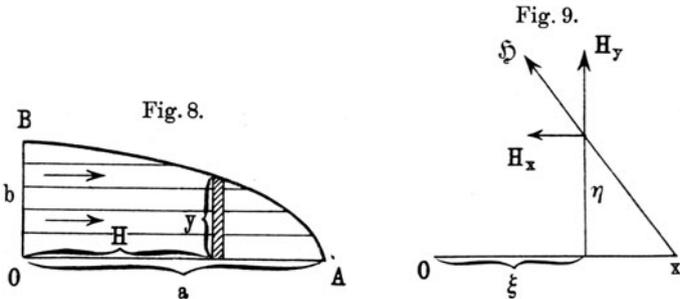
wie oben.

7. Der Entmagnetisierungsfaktor des Ellipsoids.

Wir betrachten nun ein nach seiner großen Achse homogen magnetisiertes Ellipsoid, d. h. wir setzen voraus, es sei die homogene Magnetisierung möglich, und fragen nach der Beschaffenheit des Feldes. Die große Achse des Ellipsoids sei a , die kleine Achse b ; das Achsenverhältnis $\frac{b}{a}$, das eine kleine Zahl sein soll, bezeichnen wir mit β . Die Magnetisierung im Innern sei \mathfrak{S} ; die Magnetisierungslinien mögen wieder von links nach rechts laufen.

a) Feld außerhalb des Ellipsoids.

Da die Magnetisierung nach Voraussetzung homogen sein soll, so laufen die Magnetisierungslinien im Innern des Ellipsoids



einander parallel. Durch die Äquatorebene OB (Fig. 8) laufen $b^2\pi J$ -Linien, durch eine Ebene an der Stelle x laufen $y^2\pi J$ -Linien oder, da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{y^2}{\beta^2} = a^2 \dots \dots \dots (22)$$

ist die Zahl dieser Linien

$$N_x = J\beta^2\pi(a^2 - x^2) \dots \dots \dots (23)$$

folglich ist die Zahl der zwischen x und $x + dx$ auf die Ellipsoidoberfläche auftreffenden Linien

$$-dN_x = 2J\beta^2\pi x dx \dots \dots \dots (24)$$

Diese Zahl gibt nach obigem den freien Magnetismus an, mit dem wir uns die Oberfläche des Ellipsoids zwischen x und $x + dx$ belegt denken müssen.

Auf einen an der Stelle ξ, η befindlichen positiven Einheitspol übt ein freier Magnetismus δ , der sich an der Stelle x befindet, eine abstoßende Kraft aus (vgl. Fig. 9):

$$\Delta \xi = \frac{\delta}{\eta^2 + (x - \xi)^2} \cdot \dots \dots \dots (25)$$

ihre Komponenten nach den Achsen sind

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_x &= - \frac{\delta \cdot (x - \xi)}{[\eta^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}}, \\ \Delta H_y &= \frac{\delta \cdot \eta}{[\eta^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Denken wir uns nunmehr den oben gefundenen freien, zwischen x und $x + dx$ vorhandenen freien Magnetismus auf der Achse vereinigt, so geben die Gleichungen (26) die Wirkung dieses freien Magnetismus $\delta = 2J\beta^2\pi x dx$ auf den Punkt ξ, η . Die Gesamtwirkung aller auf dem Ellipsoid vorhandenen freien Magnetismen erhalten wir, wenn wir über das Ellipsoid, d. h. von $-a$ bis $+a$ integrieren. Es ist also

$$H_x = - \int_{-a}^{+a} \frac{2J\beta^2\pi x(x - \xi) dx}{[\eta^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}} = - 2J\beta^2\pi \int_{-a}^{+a} \frac{x(x - \xi) dx}{[\eta^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}},$$

$$H_y = \int_{-a}^{+a} \frac{2J\beta^2\pi \eta x dx}{[\eta^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}} = 2J\beta^2\pi \eta \int_{-a}^{+a} \frac{x dx}{[\eta^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}}.$$

Die Ausführung der Integration liefert dann (vgl. Tabelle am Schluß des Buches Nr. 1 und 2):

$$\left. \begin{aligned} H_x &= - 2J\beta^2\pi \left[\frac{-a}{\sqrt{(a - \xi)^2 + \eta^2}} - \frac{a}{\sqrt{(a + \xi)^2 + \eta^2}} \right. \\ &\quad \left. + \lg \frac{a - \xi + \sqrt{(a + \xi)^2 + \eta^2}}{-a - \xi + \sqrt{(a + \xi)^2 + \eta^2}} \right], \\ H_y &= 2J\beta^2\pi \eta \left[\frac{\xi}{\eta^2} \left(\frac{a - \xi}{\sqrt{(a - \xi)^2 + \eta^2}} + \frac{a + \xi}{\sqrt{(a + \xi)^2 + \eta^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(a - \xi)^2 + \eta^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a + \xi)^2 + \eta^2}} \right]. \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

Wir untersuchen nun, wie oben, die wichtigsten Sonderfälle. a klein gegen ξ . Wir betrachten gleich die beiden Gaußschen Hauptlagen. Für die erste Gaußsche Hauptlage ist $\eta = 0$, und die Gleichungen (26) werden einfach zu

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_x &= + \frac{\delta}{(\xi - x)^2}, \\ \Delta H_y &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

Also ist (vgl. Integraltafel Nr. 3):

$$\left. \begin{aligned} H_x &= 2J\beta^2\pi \int_{-a}^{+a} \frac{x dx}{(\xi - x)^2} = 2J\beta^2\pi \left[\frac{x}{\xi - x} + \lg(\xi - x) \right]_{-a}^{+a} \\ &= 2J\beta^2\pi \left[\frac{a}{\xi - a} + \frac{a}{\xi + a} - \lg \frac{\xi + a}{\xi - a} \right] \\ &= 2J\beta^2\pi \left[\frac{a}{\xi} \left(1 + \frac{a}{\xi} + \frac{a^2}{\xi^2} + \frac{a^3}{\xi^3} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{\xi} \left(1 - \frac{a}{\xi} + \frac{a^2}{\xi^2} - \frac{a^3}{\xi^3} + \dots \right) - 2 \left(\frac{a}{\xi} + \frac{1}{3} \frac{a^3}{\xi^3} + \dots \right) \right] \\ &= 2J\beta^2\pi \left[\frac{4}{3} \frac{a^3}{\xi^3} \right] = 2J \cdot \frac{4}{3} a b^2 \pi \cdot \frac{1}{\xi^3} \\ &= 2JV \cdot \frac{1}{\xi^3} = \frac{2M}{\xi^3}, \end{aligned} \right\} (29)$$

wenn man als magnetisches Moment M des Ellipsoids die Größe $M = J \cdot V$ einführt.

Für die zweite Hauptlage ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_x &= - \frac{\delta \cdot x}{(\eta^2 + x^2)^{3/2}}, \\ \Delta H_y &= \frac{\delta \cdot \eta}{(\eta^2 + x^2)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

Also ist, s. Gleichung (31) a. f. S. (vgl. Integraltafel Nr. 4):

Es ergeben sich also beim Ellipsoid die gleichen Beziehungen wie bei einem Polpaar, wenn man das magnetische Moment des Ellipsoids als Produkt aus Volumen und Magnetisierung definiert¹⁾.

Wenn wir uns das Ellipsoid durch einen homogen magnetisierten Zylinder ersetzt denken, der die gleiche Magnetisierung

¹⁾ Vgl. Handbuch d. El. u. d. Magn. IV, 231.

$$\begin{aligned}
 H_x = {}^1) H_{II} &= -2 J \beta^2 \pi \int_{-a}^{+a} \frac{x^2 dx}{(\eta^2 + x^2)^{3/2}} \\
 &= -2 J \beta^2 \pi \left[\lg \left(x + \sqrt{x^2 + \eta^2} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} \right]_{-a}^{+a} \\
 &= -2 J \beta^2 \pi \left[\lg \left(\frac{a}{\eta} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{\eta^2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \lg \left(-\frac{a}{\eta} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{\eta^2}} \right) - \frac{2a}{\sqrt{a^2 + \eta^2}} \right] \\
 &= -2 J \beta^2 \pi \left[\lg \left\{ 1 + \frac{a}{\eta} \left(1 + \frac{a}{2\eta} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \lg \left\{ 1 - \frac{a}{\eta} \left(1 - \frac{a}{2\eta} \right) \right\} - \frac{2a}{\eta} \left(1 - \frac{a^2}{2\eta^2} \right) \right] \\
 &= -2 J \beta^2 \pi \left[\frac{a}{\eta} \left(1 + \frac{a}{2\eta} \right) - \frac{1}{2} \frac{a^3}{\eta^2} \left(1 + \frac{a}{\eta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \frac{a^3}{\eta^3} \left(1 + \frac{3a}{2\eta} \right) + \frac{a}{\eta} \left(1 - \frac{a}{2\eta} \right) + \frac{1}{2} \frac{a^3}{\eta^2} \left(1 - \frac{a}{\eta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} \frac{a^3}{\eta^3} \left(1 - \frac{3a}{2\eta} \right) - \frac{2a}{\eta} \left(1 - \frac{a^2}{2\eta^2} \right) \right] \\
 &= -2 J \beta^2 \pi \left[\frac{2a}{\eta} - \frac{a^3}{\eta^3} + \frac{2}{3} \frac{a^3}{\eta^3} - \frac{2a}{\eta} + \frac{a^3}{\eta^3} \right] \\
 &= -2 J \beta^2 \pi \frac{2}{3} \frac{a^3}{\eta^3} = -J.V. \frac{1}{\eta^3} = -\frac{M^2}{\eta^3}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

und einen Halbmesser gleich der kleinen Achse des Ellipsoids besitzt, so ist, wenn wir seine Länge mit $2 a_0$ bezeichnen, nach (11)

und wegen $M = V.J = \frac{4}{3} a b^2 \pi J$

$$M = J. b^2 \pi . 2 a_0 = \frac{4}{3} a b^2 \pi J;$$

oder

$$a_0 = \frac{2}{3} a \dots \dots \dots \tag{33}$$

1) Da, wie weiter unten gezeigt wird, $H_y = 0$ wird.

2) Für H_y ergibt sich:

$$H_y = +2 J \beta^2 \pi \eta \int_{-a}^{+a} \frac{x dx}{(\eta^2 + x^2)^{3/2}} = 2 J \beta^2 \pi \eta \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} \right]_{-a}^{+a} = 0 \tag{32}$$

d. h. die einem homogen magnetisierten Ellipsoid (a, b) entsprechenden „Pole“ sind im Abstand $\pm \frac{2}{3}a$ von seiner Mitte anzunehmen, wobei ihre Polstärke gleich der Magnetisierung des Ellipsoids mal $b^2\pi$ ist.

b) Feld an der Oberfläche des Ellipsoids.

Die Größe und Richtung des Feldes unmittelbar an der Oberfläche des Ellipsoids ergibt sich, wenn wir in den Gleichungen (27) den Punkt ξ, η der Bedingung

$$\frac{\xi_0^2}{a^2} + \frac{\eta_0^2}{b^2} = 1$$

genügen lassen. Gleichzeitig wollen wir von den Stellen in unmittelbarer Nähe der Enden absehen, d. h. wir setzen voraus, daß η klein gegen $a - \xi$ ist. Dann ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -2J\beta^2\pi \left[\lg \frac{a - \xi + (a - \xi) \left(1 + \frac{\eta^2}{2(a - \xi)^2}\right)}{-a - \xi + (a + \xi) \left(1 + \frac{\eta^2}{2(a + \xi)^2}\right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a}{(a - \xi) \left(1 + \frac{\eta^2}{2(a - \xi)^2}\right)} - \frac{a}{(a + \xi) \left(1 + \frac{\eta^2}{2(a + \xi)^2}\right)} \right] \\ &= -2J\beta^2\pi \left[\lg \frac{2(a - \xi) \cdot 2(a + \xi)}{\eta^2} - \frac{a}{a - \xi} - \frac{a}{a + \xi} \right] \\ &= -4J\beta^2\pi \left[\lg \frac{2\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\eta} - \frac{a^2}{a^2 - \xi^2} \right] \\ &= -4J\beta^2\pi \left[\lg \frac{2}{\beta} - 1 - \frac{\xi_0^2}{a^2 - \xi_0^2} \right] \\ &= -4J\beta^2\pi \left[\lg \frac{2}{\beta} - 1 - \beta^2 \frac{\xi_0^2}{\eta_0^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} H_y &= 2J\beta^2\pi \eta \left[\frac{\xi}{\eta^2} + \frac{\xi}{\eta^2} - \frac{1}{a - \xi} - \frac{1}{a + \xi} \right] \\ &= 2J\beta^2\pi \left[\frac{2\xi}{\eta} - \frac{2a\eta}{a^2 - \xi^2} \right] \\ &= 4J\beta^2\pi \frac{\xi_0}{\eta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Wir setzen nun die von den Ortskoordinaten unabhängige Größe:

$$-4 J \beta^2 \pi \left[\lg \frac{2}{\beta} - 1 \right] = (H_x)_0 \dots \dots \dots (36)$$

Dann lautet das Ergebnis

$$\left. \begin{aligned} H_x &= (H_x)_0 + 4 J \pi \beta^4 \frac{\xi_0^2}{\eta_0^2} \\ H_y &= 4 J \pi \beta^2 \frac{\xi_0}{\eta_0} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

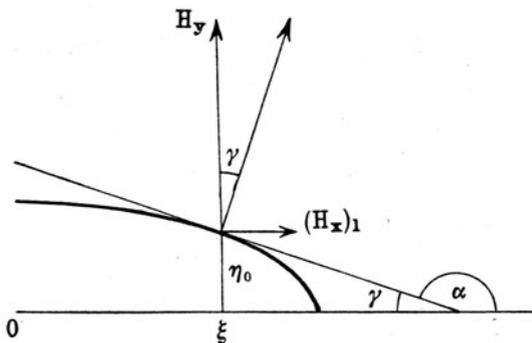
Die x -Komponente der Feldstärke ist also gleich der negativen an der Stelle $\eta_0 = 0$ vorhandenen Feldstärke $(H_x)_0$ plus einer Feldstärke $(H_x)_1 = 4 \pi J \beta^4 \frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}$, die y -Komponente ist

$$H_y = 4 \pi J \beta^2 \frac{\xi_0}{\eta_0};$$

sie ist für $\xi_0 = 0$ verschwindend. Bildet man das Verhältnis $\frac{(H_x)_1}{H_y}$, so ergibt sich

$$\frac{(H_x)_1}{H_y} = \beta^2 \frac{\xi_0}{\eta_0} \dots \dots \dots (38)$$

Fig. 10.



Andererseits ist, da $\eta^2 = \beta^2 (a^2 - \xi^2)$,

$$tg \alpha = \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_0 = -\beta^2 \frac{\xi_0}{\eta_0} = -tg (180^\circ - \alpha) = -tg \gamma$$

(Fig. 10), wenn α der Winkel ist, den die Tangente an die Ellipse (a, b) im Punkte ξ_0, η_0 mit der positiven x -Achse bildet. Da wir die Punkte nahe den Endpunkten der Ellipse ausgeschlossen haben, so ist $tg \gamma \sim \gamma$; also $(H_x)_1 = 4 \pi J \gamma^2$ und $H_y = 4 \pi J \gamma$. Somit setzen sich die Feldstärken $(H_x)_1$ und H_y zu einer Resultante

zusammen, die jeweils auf der Oberfläche des Ellipsoids senkrecht steht. Ihre Größe beträgt

$$H_n = \sqrt{(H_x)_1^2 + H_y^2} = 4\pi J \cdot \gamma \quad \dots \quad (39)$$

Außerdem aber ist an jedem Punkte der Ellipsoidoberfläche noch die negative, also „entmagnetisierende“ Feldstärke

$$(H_x)_0 = -4J\beta^2\pi \left[\lg \frac{2}{\beta} - 1 \right]$$

vorhanden.

Das das homogen magnetisierte Ellipsoid umgebende Feld ist also an der Oberfläche des Ellipsoids nur von der Magnetisierung \mathfrak{J} desselben und von seinem Dimensionsverhältnis β abhängig. Um einen Überblick über seine Größe zu geben, sind in der folgenden Tabelle 6 die Werte der Komponente H_n für verschiedene Stellen des Ellipsoids $a:b = 50:1$ berechnet; die Zahlen unter x_0 bedeuten Bruchteile der halben großen Achse a . Der Wert von $(H_x)_0$ beträgt

$$(H_x)_0 = -4\pi J \cdot 0,00144 \dots \dots \dots (40)$$

Tabelle 6.

x_0	H_n	x_0	H_n
0	0,000 00	0,5	0,011 55
0,1	0,002 01	0,6	0,015 00
0,2	0,004 08	0,7	0,019 60
0,3	0,006 29	0,8	0,026 67
0,4	0,008 73	0,9	0,041 30

Daß die Winkel γ sehr klein sind, sieht man ohne weiteres, wenn man sich die natürlichen Abmessungen des Ellipsoids vorstellt; selbst für $x_0 = 0,9$ beträgt der Winkel noch nicht $2\frac{1}{2}^\circ$.

Von besonderem Interesse ist der Wert von $(H_x)_0 = -4\pi J \cdot 0,00144 = -0,0181 J$; da wir oben allgemein gefunden haben, daß wir ein „entmagnetisierendes“ Feld $\mathfrak{H}_e = N\mathfrak{J}$ setzen können, so können wir schon jetzt N als den Entmagnetisierungsfaktor des Ellipsoids einführen und ihm für $\beta = \frac{1}{50}$ den Wert 0,0181 zuschreiben.

c) Feld im Innern des Ellipsoids.

Wenn wir das Feld im Innern des Ellipsoids berechnen wollen, ist die oben gemachte Annahme, daß wir uns den freien Magnetismus auf der Achse konzentriert denken, natürlich unzulässig. Für einen auf der Achse gelegenen Punkt ist es aus Symmetriegründen ohne weiteres klar, daß die auf der Ellipsoidoberfläche verteilten magnetischen Belegungen keine Feldkomponente H_y hervorrufen werden. — Für den Mittelpunkt des Ellipsoids ergibt sich die Wirkung der zwischen x und $x + dx$ auf der Oberfläche befindlichen freien Magnetisierung δ einfach zu (Fig. 11):

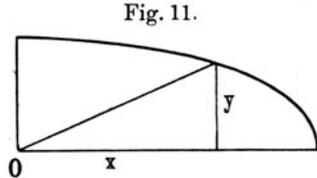


Fig. 11.

$$\Delta H_0 = - \frac{\delta}{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (41)$$

und die x -Komponente dieses Wertes ist

$$(\Delta H_0)_x = - \frac{\delta \cdot x}{[x^2 + y^2]^{3/2}} \dots \dots \dots (42)$$

Die Gesamtwirkung aller freien Magnetismenmengen ist demnach

$$(H_0)_x = - \int_{-a}^{+a} \frac{\delta \cdot x}{[x^2 + y^2]^{3/2}} = - 2 \pi J \beta^2 \int_{-a}^{+a} \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \dots \dots (43)$$

wobei x und y einem Ellipsenpunkt entsprechen, d. h. der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

genügen müssen. Drückt man y durch x aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (H_0)_x &= - 2 \pi J \beta^2 \int_{-a}^{+a} \frac{x^2 dx}{[x^2 + \beta^2(a^2 - x^2)]^{3/2}} \\ &= - 2 \pi J \beta^2 \int_{-a}^{+a} \frac{x^2 dx}{[e^2 x^2 + b^2]^{3/2}}, \end{aligned}$$

wenn wir die Exzentrizität e durch die Gleichung

$$e^2 = 1 - \beta^2 \dots \dots \dots (44)$$

eingeführen. Nach Integrationstafel Nr. 5 findet man dann:

$$\begin{aligned}
 (H_0)_x &= -2\pi J\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg (ex + \sqrt{e^2 x^2 + b^2}) - \frac{1}{e^2} \frac{x}{\sqrt{e^2 x^2 + b^2}} \right] \Bigg|_{-a}^{+a} \\
 &= -2\pi J\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{ea + \sqrt{e^2 a^2 + b^2}}{-ea + \sqrt{e^2 a^2 + b^2}} - \frac{2}{e^2} \frac{a}{\sqrt{e^2 a^2 + b^2}} \right] \\
 &= -2\pi J\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} - \frac{2}{e^2} \right] \\
 &= -4\pi J \frac{1-e^2}{e^2} \left[\frac{1}{2e} \lg \frac{1+e}{1-e} - 1 \right].
 \end{aligned} \tag{45}$$

Ist, wie oben vorausgesetzt, b klein gegen a , so ist, da $e^2 = 1 - \beta^2$:

$$\begin{aligned}
 e &\sim 1 - \frac{\beta^2}{2} \\
 \frac{1+e}{1-e} &\sim \frac{2}{\beta^2} = \frac{4}{\beta^2}.
 \end{aligned}$$

Also

$$(H_x)_0 = -4\pi J\beta^2 \left[\lg \frac{2}{\beta} - 1 \right],$$

d. h. man erhält den gleichen Wert wie an der Oberfläche des Ellipsoids in der Äquatorebene [vgl. Gleichung (36)].

Für einen auf der Längsachse an der Stelle ξ gelegenen Punkt ergibt sich in analoger Weise:

$$\begin{aligned}
 H_x &= -2J\pi\beta^2 \int_{-a}^{+a} \frac{x(x-\xi)dx}{[(x-\xi)^2 + \beta^2(a^2 - x^2)]^{3/2}} \\
 &= -2J\pi\beta^2 \int_{-a}^{+a} \frac{x(x-\xi)dx}{[x^2 e^2 - 2x\xi + c^2]^{3/2}},
 \end{aligned}$$

wenn wir $\xi^2 + b^2 = c^2$ setzen.

Die Integration liefert, s. Gleichung (46) a. f. S. (vgl. Integraltafel Nr. 6):

D. h. es ergibt sich an jeder Stelle ξ der gleiche Wert wie an der Stelle $\xi = 0$, oder die Feldstärke ist längs der Achse vom Orte unabhängig.

Wir haben also gefunden, daß die negative Feldstärke im Mittelpunkt des Ellipsoids den gleichen Wert hat, wie an der Ellipsoidoberfläche in der Äquatorialebene, ferner, daß sie längs

$$\begin{aligned}
 H_x &= -2J\pi\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \left(ex - \frac{\xi}{e} + \sqrt{e^2 x^2 - 2x\xi + c^2} \right) \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{e^2} \frac{1}{\sqrt{e^2 x^2 - 2x\xi + c^2}} \left\{ (1-e^2) \frac{\xi^2 x - c^2 \xi}{c^2 e^2 - \xi^2} - x \right\} \right]_a^+ \\
 &= -2J\pi\beta^2 \left[\frac{1}{e^2} \lg \frac{ea - \frac{\xi}{e} + \sqrt{e^2 a^2 - 2a\xi + \xi^2 + b^2}}{-ea - \frac{\xi}{e} + \sqrt{e^2 a^2 + 2a\xi + \xi^2 + b^2}} \right. \\
 &+ \frac{1}{e^2} \frac{1}{\sqrt{e^2 a^2 - 2a\xi + \xi^2 + b^2}} \left\{ (1-e^2) \frac{\xi^2 a - c^2 \xi}{c^2 e^2 - \xi^2} - a \right\} \\
 &- \left. \frac{1}{e^2} \frac{1}{\sqrt{e^2 a^2 + 2a\xi + \xi^2 + b^2}} \left\{ (1-e^2) \frac{-\xi^2 a - c^2 \xi}{c^2 e^2 - \xi^2} + a \right\} \right] \\
 &= -2J\pi\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{a - \xi + ea - \frac{\xi}{e}}{a + \xi - ea - \frac{\xi}{e}} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{e^2} \frac{1}{a - \xi} (1-e^2) \xi \frac{\xi a - c^2}{c^2 e^2 - \xi^2} - \frac{1}{e^2} \frac{1}{a + \xi} (1-e^2) \xi \frac{-\xi a - c^2}{c^2 e^2 - \xi^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a}{e^2} \frac{1}{a - \xi} - \frac{a}{e^2} \frac{1}{a + \xi} \right] \quad (46) \\
 &= -2J\pi\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} + \frac{1}{e^2} (1-e^2) \xi \frac{1}{c^2 e^2 - \xi^2} \left(\frac{\xi a - c^2}{a - \xi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{-\xi a - c^2}{a + \xi} \right) - \frac{a}{e^2} \left(\frac{1}{a - \xi} + \frac{1}{a + \xi} \right) \right] \\
 &= -2J\pi\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} + \frac{1}{e^2} (1-e^2) \xi \frac{1}{c^2 e^2 - \xi^2} \right. \\
 &\quad \left. \frac{\xi a^2 - c^2 a + \xi^2 a - c^2 \xi + \xi a^2 + c^2 a - \xi^2 a - c^2 \xi}{a^2 - \xi^2} - \frac{a}{e^2} \frac{2a}{a^2 - \xi^2} \right] \\
 &= -2J\pi\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} + \frac{1}{e^2} (1-e^2) 2\xi^2 \frac{1}{c^2 e^2 - \xi^2} \frac{a^2 - c^2}{a^2 - \xi^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2a^2}{e^2 (a^2 - \xi^2)} \right] \\
 &= -2\pi J\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{e^2} \frac{2\xi^2}{a^2 - \xi^2} \frac{a^2 - c^2 - e^2 a^2 + e^2 c^2}{c^2 e^2 - \xi^2} - \frac{2a^3}{e^2 (a^2 - \xi^2)} \right] \\
 &= -2\pi J\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} + \frac{1}{e^2} \frac{2\xi^2}{a^2 - \xi^2} \cdot 1 - \frac{2a^2}{e^2 (a^2 - \xi^2)} \right] \\
 &= -2\pi J\beta^2 \left[\frac{1}{e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} - \frac{2}{e^2} \right] = -4\pi J\beta^2 \left[\frac{1}{2e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} - \frac{1}{e^2} \right].
 \end{aligned}$$

der Achse konstant ist, endlich, daß sie sich an irgend einem Punkte der Oberfläche aus einer zum Ellipsoid senkrechten Komponente, deren Größe eine Funktion des Ortes ist, und der gleichen, überall konstanten Feldstärke $(H_x)_0$ zusammensetzt.

Daß diese Feldstärke $(H_x)_0$ auch für einen beliebigen Punkt innerhalb des Ellipsoids den gleichen konstanten Wert hat, soll, da zu weitführend, nicht eigens nachgewiesen werden. Aus der Konstanz längs der Längsachse und im Mittelpunkt und auf der Oberfläche in der Äquatorialebene ergibt sich die allgemeine Konstanz als einfache Konsequenz, besonders wenn man bedenkt, daß die zur Oberfläche senkrechte Komponente eine unmittelbare Folge der freien magnetischen Ladungen auf der Oberfläche ist.

Da die Feldstärke im Ellipsoid vom Orte unabhängig ist, ist dies auch für den Entmagnetisierungsfaktor N der Fall. Die Größe dieses konstanten Entmagnetisierungsfaktors ist somit

$$N = + 4 \pi \beta^2 \left[\frac{1}{2e^3} \lg \frac{1+e}{1-e} - \frac{1}{e^2} \right] (47)$$

wenn $\beta = \frac{b}{a}$ das Achsenverhältnis und $e = \sqrt{1 - \beta^2}$ die Exzentrizität des Ellipsoids ist. Ist das Achsenverhältnis β sehr klein, d. h. das Ellipsoid langgestreckt, so kann Gleichung (47) durch

$$N = + 4 \pi \beta^2 \left[\lg \frac{2}{\beta} - 1 \right] (48)$$

ersetzt werden.

Besonders beachtenswert ist, daß bei der Ableitung von (47) keinerlei Vernachlässigungen eingeführt wurden, d. h. diese Gleichung streng gilt. Bei der Berechnung der Feldstärke an der Oberfläche dagegen war die freie Belegung auf der Achse konzentriert gedacht, was nur bei langgestreckten Ellipsoiden zulässig ist, infolgedessen erhielt man die für langgestreckte Ellipsoide geltende Formel (48).

Bringt man also ein magnetisierbares Ellipsoid in ein homogenes äußeres Feld \mathfrak{H}_a , so entsteht in ihm eine Magnetisierung \mathfrak{J} ; diese Magnetisierung, die wir zunächst als homogen voraussetzen, bewirkt infolge der freien magnetischen Ladungen auf der Ellipsoidoberfläche eine entmagnetisierende Kraft $\mathfrak{H}_e = -N\mathfrak{J}$, die überall im Ellipsoid konstant ist, da N konstant ist. Folglich ist

die wahre Feldstärke im Ellipsoid nicht mehr gleich der äußeren Feldstärke \mathfrak{S}_a , sondern

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_a - N\mathfrak{J},$$

also gleichfalls konstant. Da also die wahre (innere) Feldstärke vom Orte unabhängig, d. h. von konstanter Größe ist, so wird sie auch eine konstante, vom Orte unabhängige Magnetisierung, also eine homogene Magnetisierung hervorrufen. Die Voraussetzung der homogenen Magnetisierung, die durch ein äußeres Feld \mathfrak{S} bewirkt werden soll, ist also beim Ellipsoid erfüllt, im Gegensatz zum Zylinder, bei dem die Voraussetzung der homogenen Magnetisierung zu einem örtlich veränderlichen Entmagnetisierungsfaktor, und damit zu einem gleichfalls örtlich veränderlichen wahren Felde führte, das keine homogene Magnetisierung hervorbringen kann.

Gewöhnlich¹⁾ erhält man das Ergebnis, daß ein Ellipsoid durch ein homogenes Feld gleichförmig magnetisiert wird, aus Potentialbetrachtungen unter Anwendung von elliptischen bzw. (bei der Kugel) Kugelfunktionen; nachträglich berechnet man dann aus der Auswertung der elliptischen Integrale den Entmagnetisierungsfaktor; die Formel für diesen ist natürlich die gleiche, die sich oben ergab.

Tabelle 7.

β	N	N'	β	N	N'
$\frac{1}{10}$	0,255	0,251	$\frac{1}{55}$	0,0154	
$\frac{1}{15}$	0,135	0,134	$\frac{1}{60}$	0,0132	
$\frac{1}{20}$	0,0848	0,0845	$\frac{1}{65}$	0,0115	
$\frac{1}{25}$	0,0587	0,0585	$\frac{1}{70}$	0,0101	
			$\frac{1}{75}$	0,0090	
$\frac{1}{30}$	0,0432		$\frac{1}{80}$	0,0080	
$\frac{1}{35}$	0,0333		$\frac{1}{85}$	0,0072	
$\frac{1}{40}$	0,0266		$\frac{1}{90}$	0,0065	
$\frac{1}{45}$	0,0217		$\frac{1}{95}$	0,0059	
$\frac{1}{50}$	0,0181		$\frac{1}{100}$	0,0054	

¹⁾ Vgl. z. B. Handb. d. El. u. d. Magn. IV, S. 148 ff.; hier auch Literaturangaben.

Wir geben in der vorstehenden Tabelle¹⁾ die Werte der Entmagnetisierungsfaktoren für eine Reihe der üblichsten Dimensionsverhältnisse $\frac{b}{a} = \beta$; hierbei sind unter N die nach der genauen Formel, unter \bar{N} die nach der Näherungsformel berechneten Werte angegeben.

Die Übereinstimmung ist somit für die gewöhnlich vorkommenden Dimensionsverhältnisse vollkommen genügend.

8. Das Brechungsgesetz der Kraftlinien und der Induktionslinien. (Feldstärke, Induktion und Permeabilität.)

Die Durchführung der Rechnung für das Ellipsoid hatte ergeben, daß im Innern ein konstantes Feld $-N\mathfrak{J}$, außen auf

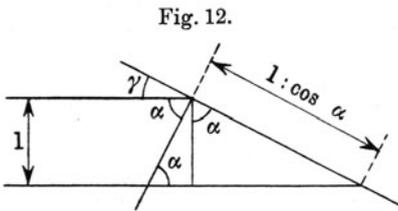


Fig. 12.

seiner Oberfläche außerdem noch ein örtlich variables, zu dieser senkrecht es Feld tritt. Die Größe dieses Feldes war zu $H_r = 4\pi J \cdot \gamma$ gefunden worden²⁾, d. h. es ist gleich dem 4π -fachen der Oberflächendichte des freien

Magnetismus in dem betreffenden Punkte. Dies ergibt sich auch aus folgender Überlegung. Der gesamte freie Magnetismus auf dem Ellipsoid zwischen x und $x + dx$ war nach Gleichung (24)

$$-dN_x = 2J\beta^2\pi x dx.$$

Teilt man diese Größe durch die Zonenfläche $df = 2y\pi dx$

$= 2y\pi dx \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$, so erhält man die Flächendichte

$$\varrho = \frac{-dN_x}{df} = J \sin \gamma,$$

oder für kleine γ $\varrho = J \cdot \gamma$. H_r ist also gleich $4\pi\varrho$.

Das Ergebnis ist auch mit unserer Vorstellung von S. 14 im Einklang, daß im Mündungspunkt einer jeden J -Linie eine nordmagnetische Menge Eins usw. liegt; bilden die J -Linien mit der

¹⁾ Vgl. ebenda S. 151, oder auch Handb. d. Phys. V, S. 143 oder Handwörterbuch der Naturw. VI, S. 567; für $\beta = 1/25$ ist in all diesen Werken fälschlich 0,0579 angegeben. Bei E. Gumlich, Leitfaden der magnetischen Messungen, S. 9 findet sich der richtige Wert 0,0587.

²⁾ Gleichung (39); wir wählen hier statt n den Index r .

Grenzfläche einen Winkel γ (den wir jetzt auch als endlich voraussetzen wollen) oder mit der Normalen zur Fläche einen Winkel $\alpha = 90^\circ - \gamma$, so gehen, wenn im Innern gerade J -Linien im cm^2 verlaufen, von der Oberfläche $1 : \cos \alpha$ (Fig. 12) $4\pi J$ Kraftlinien, also von der Oberfläche Eins $4\pi J \cos \alpha$ Kraftlinien aus.

Ist also bei einem beliebigen Körper im Innern unmittelbar an der Oberfläche ein Feld $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_a - N\mathfrak{J}$ vorhanden, wobei N durch alle freien Ladungen sich bestimmt und im Einzelfall erst zu suchen ist, auch von Ort zu Ort variabel sein kann, so kommt zu diesem Felde außen an der Oberfläche noch das Zusatzfeld, das senkrecht zur Oberfläche steht und dessen Größe $H_r = 4\pi J \cdot \cos \alpha$ ist.

Bezeichnet man die Größe des innern Feldes mit H , die des äußern mit H' (vektoriell: $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}_r$), so sind die entsprechenden Komponenten normal (n) und tangential (t) zur Oberfläche:

$$\left. \begin{aligned} H_n &= H \cos \alpha & H'_n &= H' \cos \alpha' = H \cos \alpha + 4\pi J \cos \alpha \\ H_t &= H \sin \alpha & H'_t &= H' \sin \alpha' = H \sin \alpha, \end{aligned} \right\} (49)$$

d. h. die Normalkomponente der Feldstärke springt beim Durchgang durch die Fläche um $4\pi J \cos \alpha$, die Tangentialkomponente geht stetig über.

Aus (49) ergibt sich:

$$\text{tg } \alpha' = \text{tg } \alpha \frac{H}{H + 4\pi J}$$

oder, da nach Definition (Gleichung 3) $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{S}$ und (Gleichung 2) $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{S}$:

$$\mu \text{tg } \alpha' = \text{tg } \alpha \dots \dots \dots (50)$$

Diese Gleichung stellt somit das Brechungsgesetz der magnetischen Kraftlinien dar, zugleich auch, da die Induktionslinien im Innern des Körpers in gleicher (oder entgegengesetzter Richtung) wie die Kraftlinien verlaufen, im Äußeren mit ihnen nach Richtung und Größe identisch sind, auch das Brechungsgesetz der magnetischen Induktionslinien.

Aus (49) folgt ferner:

$$H'_n - H_n = 4\pi J \cos \alpha$$

oder

$$\frac{H'_n}{H_n} = 1 + \frac{4\pi J \cos \alpha}{H_n} = 1 + \frac{4\pi J \cos \alpha}{H \cos \alpha} = \frac{H + 4\pi J}{H} = \frac{B}{H} = \mu, \quad (51)$$

d. h. die Normalkomponente von \mathfrak{H} beträgt außen das μ -fache ihres Wertes innen.

Bezeichnet man die Induktion im Innern analog mit \mathfrak{B} , im Äußern mit \mathfrak{B}' , so gelten folgende Beziehungen:

1. Da die Induktionslinien keine freien Enden besitzen, so muß die Zahl der Induktionslinien, die auf ein Oberflächenelement auftreffen und die von ihm nach außen weitergehen, gleich sein, also ist

$$B \cos \alpha = B' \cos \alpha' \dots \dots \dots (52)$$

oder

$$B_n = B'_n \dots \dots \dots (52a)$$

2. Im Äußern sind Induktionslinien und Kraftlinien identisch, also

$$\mathfrak{B}' = \mathfrak{H}' \dots \dots \dots (53)$$

Folglich ist, da nach (49) $H' \sin \alpha' = H \sin \alpha$

$$\left. \begin{aligned} B'_t &= B' \sin \alpha' = H' \sin \alpha' = H \sin \alpha \\ B_t &= B \sin \alpha = (H + 4\pi J) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots (54)$$

Gleichung (52) besagt, daß bei der Induktion die Normalkomponente stetig übergeht, Gleichung (54), daß die Tangentialkomponente einen Sprung von $-4\pi J \sin \alpha$ erfährt. Da also

$$B'_t - B_t = -4\pi J \sin \alpha,$$

so folgt auch

$$\frac{B'_t}{B_t} = 1 - \frac{4\pi J \sin \alpha}{B_t} = 1 - \frac{(B - H) \sin \alpha}{B \sin \alpha} = \frac{1}{\mu} \dots \dots (55)$$

d. h. die Tangentialkomponente von \mathfrak{B} ist außen der μ te Teil ihres Wertes innen.

Wir können nun Richtung und Größe von Feldstärke und Induktion zu beiden Seiten einer Oberfläche eines magnetischen Körpers für alle möglichen vorkommenden Fälle untersuchen.

Es sei ein äußeres Feld \mathfrak{H}_a gegeben, dem wir alle möglichen Werte von Null anfangend, auch negative, geben wollen. Die in einem Körper auftretende Magnetisierung \mathfrak{J} werde experimentell bestimmt, etwa mittels der Wirkungen des Körpers auf eine Magnetnadel in größerer Entfernung, ein sogenanntes Magnetometer, vgl. oben. Für ein Ellipsoid ist, wie gezeigt, J überall dasselbe ($= \frac{M}{V}$), für einen beliebigen Körper würde man einen Mittelwert erhalten.

Geht man vom Werte $\mathfrak{H}_a = 0$ aus, für den der Körper unmagnetisch sei, also $J = 0$, so ist für diesen Fall μ unbestimmt; für eine kleine Kraft $\mathcal{A}\mathfrak{H}_a$ wird eine positive Magnetisierung $\mathcal{A}\mathfrak{B}$ beobachtet, die, wie die Erfahrung zeigt, stets kleiner als $\frac{\mathcal{A}\mathfrak{H}_a}{N}$ ist, mit anderen Worten, die wahre Feldstärke $\mathcal{A}\mathfrak{H}$ ist positiv, folglich ist auch $\mathcal{A}\mathfrak{B}$ und damit μ positiv. Den Grenzwert von $\left(\frac{\mathcal{A}\mathfrak{B}}{\mathcal{A}\mathfrak{H}}\right)_{\mathfrak{H}=\mathfrak{H}=0} = \mu_0$ bezeichnet man als die Anfangspermeabilität. Da für kleine $\mathcal{A}\mathfrak{H}$ μ ziemlich konstant verläuft, kann μ_0 leicht bestimmt werden. Im allgemeinen ist μ bei wachsendem \mathfrak{H} veränderlich, indem es von dem Anfangswert zuerst mehr und mehr zunimmt, ein Maximum erreicht, dann langsamer und langsamer abnimmt; dies macht sich in der Weise geltend, daß J immer langsamer und langsamer wächst und für große \mathfrak{H} einem Grenzwert J_∞ sich mehr und mehr nähert. Ist das anfängliche μ klein, so tritt das Wachsen anfangs weniger stark hervor.

Wir zeichnen in folgenden Figuren die Größe und Richtung von Feldstärke und Induktion für verschiedene Werte von μ ; dabei wird der Winkel zwischen der Richtung von \mathfrak{H} und der Oberfläche stets zu $\text{arc sin } \frac{3}{5}$ gewählt. \mathfrak{H} wird stets in gleicher Größe gezeichnet, um einen Vergleich zu haben; die Figuren könnten demnach auch als zu gleichem \mathfrak{H} und zu Material verschiedener Permeabilität μ gehörig betrachtet werden.

Fig. 13 enthält die Fälle, in denen μ eine positive ganze Zahl zwischen 5 und 1 ist. Für $\mu = 5$ z. B. ist der Winkel α' schon klein gegenüber α ; man ersieht ohne weiteres, daß für größere μ der Winkel α' sehr klein wird, d. h. daß \mathfrak{H}' und \mathfrak{B}' für einigermaßen große μ nahezu senkrecht zur Oberfläche verlaufen. Für $\mu < 5$ wird der Winkel α' größer, um für $\mu = 1$ ebensogroß wie α zu werden. Dieser Fall — die Induktionslinien durchsetzen die Grenzfläche ohne eine Brechung zu erfahren — ist erstens dann vorhanden, wenn der Körper vollständig unmagnetisch ist („Luftellipsoid“), dann ist $J = 0$; zweitens aber in der Grenze dann, wenn der Körper sich im Sättigungszustand befindet, d. h. für $\mathfrak{H}_a = \infty$ oder $J = J_\infty$.

Lassen wir jetzt die äußere Feldstärke vom Werte $\mathfrak{H}_a = \infty$ an wieder abnehmen, so zeigt die Erfahrung, daß die Magneti-

Fig. 13.

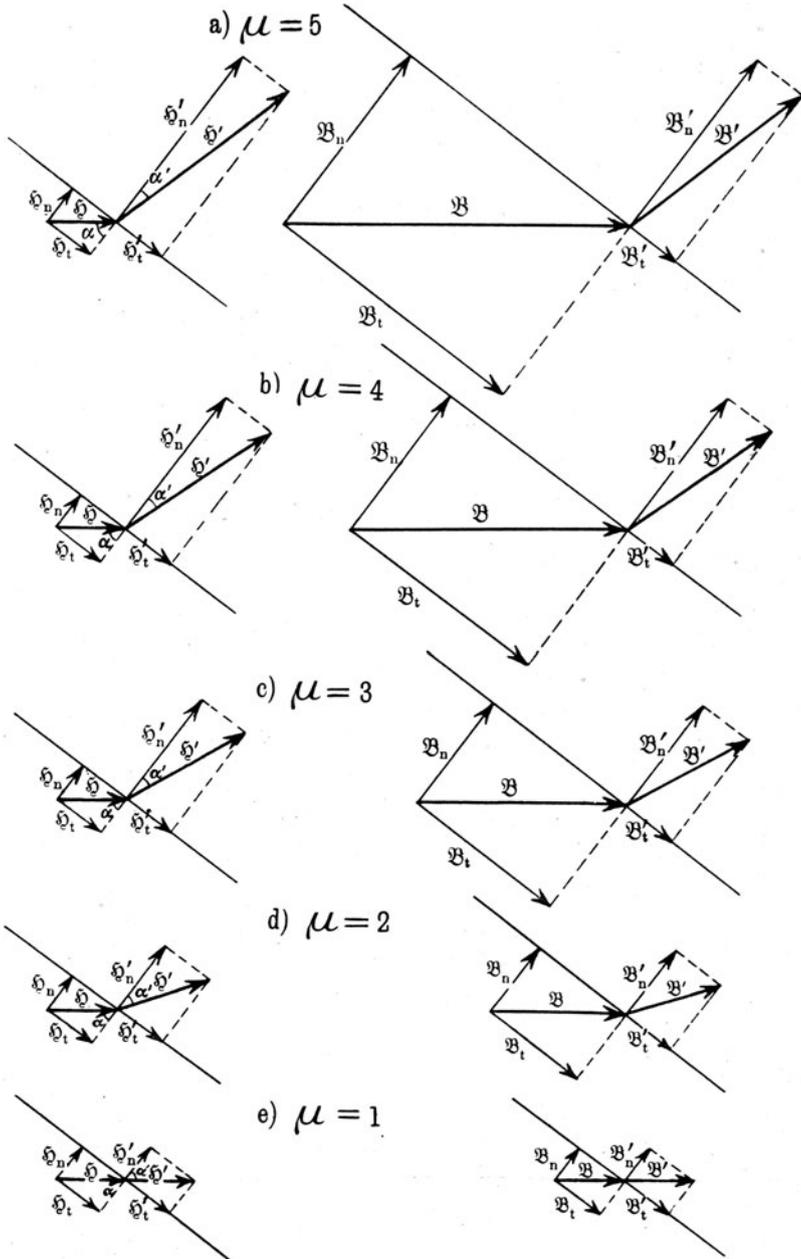
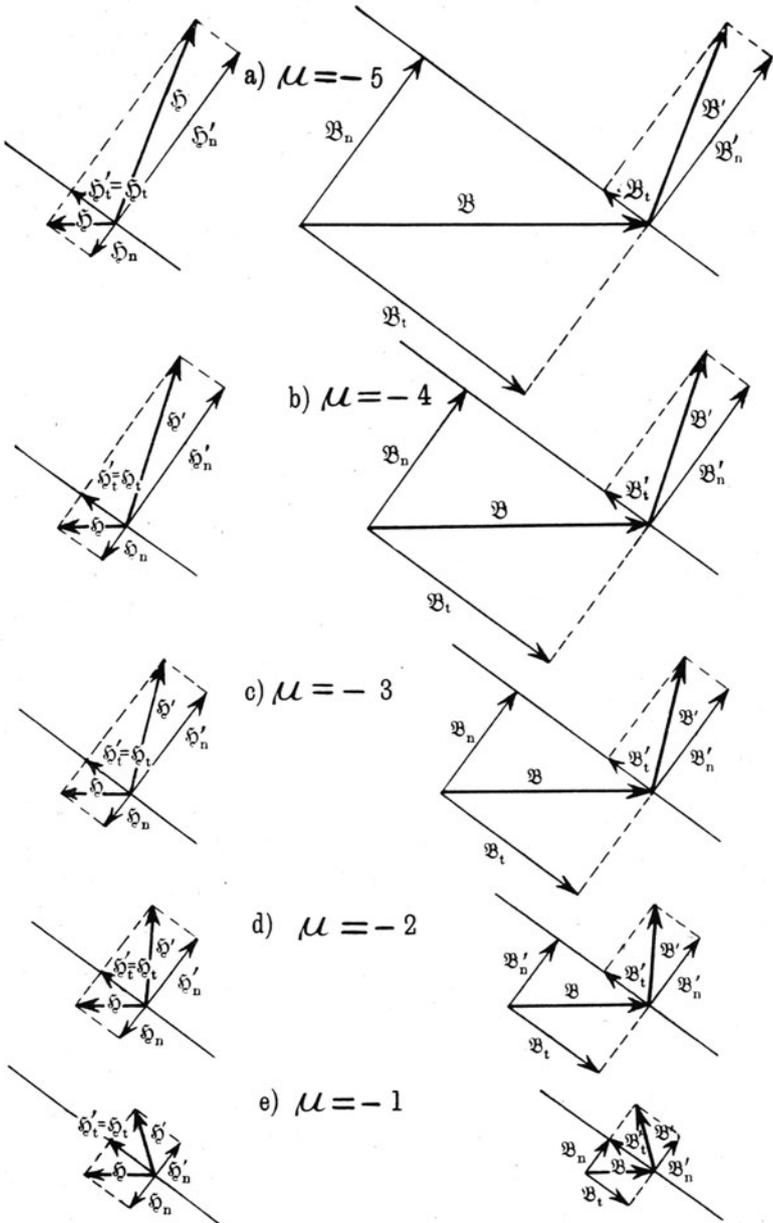


Fig. 14.



sierung größer bleibt, als sie beim Ansteigen für das entsprechende \mathfrak{H}_a war (Hysterese). Während beim Aufwärtsgehen stets die Bedingung $\mathfrak{J} < \frac{\mathfrak{H}_a}{N}$ erfüllt war, tritt jetzt für ein bestimmtes \mathfrak{H}_a der Fall ein, daß $\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{H}_a}{N}$, mit anderen Worten, die wahre Feldstärke $\mathfrak{H} = 0$ oder $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J}$ oder auch $\mu = \infty$. Man bezeichnet den Wert der Induktion bzw. der 4π -fachen Magnetisierung, der bei $\mathfrak{H} = 0$ noch vorhanden ist, als „wahre Remanenz“ (\mathfrak{B}_r). Die Kraftlinien entspringen also für diesen Fall genau senkrecht zur Oberfläche.

Läßt man die äußere Feldstärke \mathfrak{H}_a weiter abnehmen, so ist $\mathfrak{J} > \frac{\mathfrak{H}_a}{N}$ oder \mathfrak{H} negativ bzw. $\mathfrak{B} < 4\pi\mathfrak{J}$, jedoch noch positiv, also μ negativ, und zwar solange \mathfrak{H} eine kleine Zahl ist, ist μ eine große negative Zahl. Die Feldstärke im Innern ist für alle negativen μ also negativ, während die Induktion noch positiv ist; die Folge ist, daß die Kraft- bzw. Induktionslinien außen nach der linken Seite hin, vom Einfallslot aus betrachtet, verlaufen. Für $\mu = -5$ bis -1 ist der Verlauf in Fig. 14 dargestellt.

In diesem Bereich tritt auch der Fall auf, für den \mathfrak{H}_a den Nullwert passiert. Dann ist $\mathfrak{H} = -N\mathfrak{J}$, $\mathfrak{B} = (4\pi - N)\mathfrak{J}$, oder

$$\mu = 1 - \frac{4\pi}{N}.$$

Der Wert von \mathfrak{B} , für welchen dies der Fall ist, also $\mathfrak{H}_a = 0$, wird als „scheinbare Remanenz“ bezeichnet.

Fig. 14 zeigt, daß die Induktionslinien immer mehr vom Lot gebrochen werden, je mehr sich μ dem Werte -1 nähert. Im letzteren Falle besteht Gleichheit zwischen den beiden Winkeln.

Nimmt \mathfrak{H}_a weiter ab, so wird der Winkel α' größer als der Winkel α ; zuletzt wird der Fall erreicht, für den $\alpha' = 90^\circ$, dann ist $\mu = 0$, also $\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{H} = -4\pi\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{H}_a = (N - 4\pi)\mathfrak{J}$. In diesem Falle ist also wohl noch eine positive Magnetisierung vorhanden, jedoch keine Induktion mehr im Innern. Da eine Magnetisierung vorhanden ist, tritt auch noch eine Oberflächenbelegung auf; diese kompensiert dann gerade die Normalkomponente der Feldstärke, so daß die Normalkomponente der Feldstärke außen zu Null wird. Die Feldstärke verläuft also außen tangential. Entsprechendes gilt von der Induktion im Äußern.

Weiterhin nimmt mit abnehmendem \mathfrak{H}_a \mathfrak{J} noch weiter ab und die freie Ladung genügt nicht mehr, die Normalkomponente der Feldstärke zu kompensieren, d. h. die Normalkomponente der äußeren Feldstärke ist gleichfalls nach innen gerichtet, und damit verläuft auch \mathfrak{S} selbst nach innen. Vgl. Fig. 15 (\mathfrak{S} ist hier doppelt so groß gezeichnet, $\mu = 1/2$).

Zuletzt wird $\mathfrak{J} = 0$, nämlich für $\mathfrak{H}_a = \mathfrak{S} = \mathfrak{B}$ oder $\mu = 1$; es tritt keine freie Ladung auf; die Kraftlinien und ebenso die Induktionslinien laufen ohne Störung durch die Oberfläche; das Bild entspricht der Fig. 13e, jedoch mit umgekehrter Richtung. Man bezeichnet die Feldstärke \mathfrak{S}_c , für die die Magnetisierung gerade ver-
schwindet, als Koerzitivkraft.

Bei weiterem Fallen von \mathfrak{H}_a , d. h. Steigen nach der negativen Seite, hat \mathfrak{J} gleichfalls das negative Vorzeichen, und es gelten die Verhältnisse von Fig. 13, indem μ zuerst langsam, dann schneller von 1 an wächst, ein Maximum erreicht, abnimmt und gegen den Wert 1 konvergiert (für $\mathfrak{H}_a = -\infty$).

Läßt man dann \mathfrak{H}_a wieder wachsen, so wiederholen sich (mit entgegengesetztem Vorzeichen) die oben behandelten Fälle.

Besonderes Interesse verdient nach diesen Ausführungen der Fall $\mu = 1$, der drei verschiedenen magnetischen Zuständen entsprechen kann, nämlich:

1. unmagnetischer und unmagnetisierbarer Körper:
(stets $\mathfrak{J} = 0$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}_a$),
2. magnetisch gesättigter Körper:
($\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\infty$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}_a = \infty$),
3. endlicher, nichtgeschlossener magnetischer Körper ohne freie Belegung:
($\mathfrak{J} = 0$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{H}_a = \mathfrak{B} = \mathfrak{S}_c$).

Es sei hier nochmals betont, daß für einen beliebigen Körper die Größe des Entmagnetisierungsfaktors N nicht bekannt und von Punkt zu Punkt verschieden ist. Da dies infolgedessen auch für \mathfrak{S} , \mathfrak{B} und \mathfrak{J} der Fall ist, gelten die vorstehenden Betrachtungen stets nur für den betreffenden Punkt. Für den ganzen

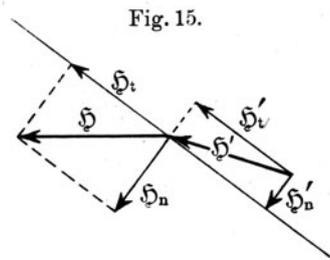


Fig. 15.

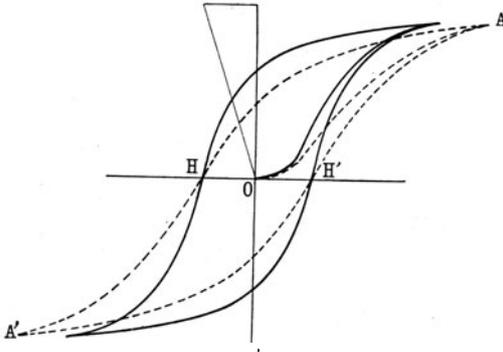
Körper könnte man höchstens Mittelwerte der genannten Größen betrachten.

Für das Ellipsoid dagegen, bei dem N konstant ist, gilt dies auch von \mathfrak{J} , \mathfrak{B} und \mathfrak{J} ; diese Größen, ebenso auch z. B. \mathfrak{J}_c und \mathfrak{B} , sind für den ganzen Körper hier wohldefiniert.

9. Die Magnetisierungskurve und ihre Scherung beim Ellipsoid.

Da es bisher nicht gelungen ist, die Abhängigkeit der Magnetisierung oder der Induktion von der (inneren oder äußeren) Feldstärke bei den ferromagnetischen Körpern analytisch in ein-

Fig. 16.



facher Weise darzustellen, begnügt man sich, dieselbe in Kurvenform für jedes untersuchte Material wiederzugeben. Hat man die Werte \mathfrak{J} für alle möglichen \mathfrak{J}_a bei einem Ellipsoid gegebener Form, etwa nach der oben erwähnten magnetometrischen Methode, bestimmt, so stellt man die sogenannte Magnetisierungskurve her, indem man \mathfrak{J} oder, aus technischen Gründen, besser $4\pi\mathfrak{J}$ als Funktion von \mathfrak{J}_a für alle möglichen Werte von \mathfrak{J}_a , anfangend vom unmagnetischen Zustand ($\mathfrak{J} = 0$) und $\mathfrak{J}_a = 0$ bis zu $\mathfrak{J}_a = \infty$ zunehmen, dann indem man \mathfrak{J}_a von ∞ bis $-\infty$ abnehmen, endlich wieder von $-\infty$ bis ∞ zunehmen läßt. Ein Beispiel einer solchen Magnetisierungskurve ist in Fig. 16 gegeben; der Ast OA wird als Neu- (oder jungfräuliche) Kurve bezeichnet, AHA als absteigender, $A'H'A$ als aufsteigender Ast

Die so erhaltene Kurve (in der Figur punktiert gezeichnet) stellt jedoch noch gar nicht die für das Material charakteristische

Abhängigkeit der Magnetisierung von der wahren Feldstärke \mathfrak{H} dar, da als unabhängige Variable die äußere Feldstärke \mathfrak{H}_a gewählt wurde, und der zu einem bestimmten \mathfrak{H}_a gehörige Wert von \mathfrak{J} bzw. $4\pi\mathfrak{J}$ ja noch von der Größe des Entmagnetisierungsfaktors, d. h. von der zufälligen Form abhängt, oder andererseits ein bestimmter Wert von \mathfrak{J} nicht einer wahren Feldstärke \mathfrak{H}_a , sondern einer kleineren wahren Feldstärke $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_a - N\mathfrak{J}$ entspricht. Wir suchen deshalb für jeden Wert $4\pi\mathfrak{J}$ den zugehörigen Wert \mathfrak{H} , indem wir von \mathfrak{H}_a den Wert $N\mathfrak{J}$ abziehen. Dies führt man nach dem Vorgang von Lord Rayleigh¹⁾ graphisch aus, indem man durch den Anfangspunkt eine Gerade zieht, deren Neigung gegen die Ordinatenachse

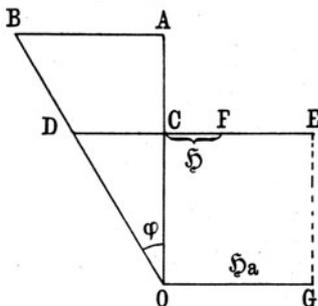
durch $\text{tg } \varphi = \frac{N}{4\pi}$ gegeben ist, und

dann jeden Punkt $4\pi\mathfrak{J}$ um so viel nach links verschiebt, als der Abstand der Geraden für die Ordinate $4\pi\mathfrak{J}$ von der Ordinatenachse beträgt (Fig. 17, $\frac{BA}{OA} = \frac{N}{4\pi}$, $\frac{DC}{OC} = \frac{N}{4\pi}$

$DC = 4\pi\mathfrak{J} \frac{N}{4\pi} = EF$). Man bezeichnet dieses Verfahren als

„Scherung“ der Magnetisierungskurve, und spricht deshalb von der den Zusammenhang zwischen $4\pi\mathfrak{J}$ und \mathfrak{H}_a darstellenden Kurve als der „ungescherten“ Kurve im Gegensatz zur gescherten Kurve ($4\pi\mathfrak{J}$, \mathfrak{H}). Die Linie OB heißt „Entmagnetisierungslinie“ oder „Scherungslinie“. Nach dieser Methode erhält man die den Zusammenhang zwischen $4\pi\mathfrak{J}$ und \mathfrak{H} darstellende Magnetisierungskurve; der Quotient $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}}$ an jeder Stelle ist die anfänglich eingeführte Suszeptibilität κ . Wünscht man den Zusammenhang zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} , d. h. die Veränderlichkeit der Permeabilität μ zu wissen, so hat man nur noch zu jedem Werte von $4\pi\mathfrak{J}$ den zugehörigen Wert von \mathfrak{H} zu addieren, was man gleichfalls graphisch ausführen kann. In den meisten Fällen ist aber $4\pi\mathfrak{J}$ bei ferromagnetischen Körpern so groß gegenüber \mathfrak{H} , daß man letzteres

Fig. 17.



¹⁾ Vgl. Handbuch d. El. u. d. Magn., S. 250 ff.

vernachlässigen und deshalb die $4\pi\mathfrak{J}$, \mathfrak{G} -Kurve auch als \mathfrak{B} , \mathfrak{G} -Kurve ansprechen kann.

Die zur Aufnahme der Magnetisierungskurve dienende Methode gestattet in vielen Fällen nicht, wie bisher angenommen, eine Messung von \mathfrak{J} , sondern von \mathfrak{B} ; dies ist z. B. bei der ballistischen Methode der Fall; dann begnügt man sich in den meisten Fällen damit, die \mathfrak{B} , \mathfrak{G}_a -Kurve zu zeichnen und in der angegebenen Weise graphisch zu scheren; d. h. man setzt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_a - N\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_a - \frac{N}{4\pi}(\mathfrak{B} - \mathfrak{G}) \sim \mathfrak{G}_a - \frac{N}{4\pi}\mathfrak{B}$. Für die Koerzitivkraft erhält man dann allerdings einen nicht ganz richtigen Wert, indem man dieselbe durch die Bedingung $\mathfrak{B} = 0$, anstatt durch $\mathfrak{J} = 0$ definiert (vgl. oben); doch ist auch dieser Fehler in den meisten Fällen zu vernachlässigen.

10. Die Scherung der Magnetisierungskurve beim Kreiszyylinder.

Die angegebene Art der Scherung läßt sich in allen Fällen anwenden, wenn der Entmagnetisierungsfaktor N bekannt und örtlich konstant ist, also beim Ellipsoid und angenähert beim geschlitzten Ringe. Bei Verwendung eines geschlossenen Ringes erhält man unmittelbar die wahre Magnetisierungskurve, da für ihn $N = 0$ ist. Für einen unendlich langen Kreiszyylinder ist gleichfalls $N = 0$, doch ist derselbe ja nur durch einen im Verhältnis zu seiner Länge dünnen Zylinder einigermaßen realisierbar, und ein solcher besitzt zwar einen sehr kleinen, aber immerhin endlichen Entmagnetisierungsfaktor. Man kann nun die bei einem bestimmten Zylinder anzubringende Scherung derart experimentell bestimmen, daß man die Magnetisierung oder Induktion zunächst nach irgend einer Methode als Funktion von \mathfrak{G}_a aufnimmt, dann die Probe zu einem Ellipsoid von bestimmtem Dimensionsverhältnis abdreht¹⁾ und nun von diesem Ellipsoid die Magnetisierungskurve als Funktion von \mathfrak{G}_a aufnimmt. Letztere wird dann mittels des bekannten Entmagnetisierungsfaktors des betreffenden Ellipsoids geschert, und so erhält man die wahre Magnetisierungskurve. Die Differenz zwischen derselben und derjenigen des Kreiszyinders

¹⁾ Hierbei wird vorausgesetzt, daß durch das Abdrehen keine Änderung in den magnetischen Eigenschaften des Materials hervorgerufen wird.

ergibt dann dessen Scherungslinie. Oder man kann den ursprünglichen Zylinder, an dem man die Magnetisierungskurve aufnahm, durch Abdrehen sukzessive immer dünner machen. Man gewinnt so die Magnetisierungskurven für alle möglichen Dimensionsverhältnisse, und kann untersuchen, welchem Grenzwert diese Magnetisierungskurven zustreben; dies ist natürlich die Magnetisierungskurve für einen unendlich langen Stab. Indes ist hierbei zu bedenken, daß man diesen Wert niemals erreicht, und daß die Meßgenauigkeit für die sehr dünnen Stäbe immer geringer wird.

a) Die Messungen von R. Mann und C. Benedicks.
(Magnetometrische Methode.)

Wir beschränken uns bei der folgenden Übersicht über das vorliegende experimentelle Material auf einige prinzipiell wichtige Arbeiten; ausführlichere Literaturangaben finden sich im Handb. d. Elektr. u. d. Magn. IV, S. 277 ff. Zunächst sei betont, daß der Begriff des Entmagnetisierungsfaktors für den nicht homogen magnetisierten Kreiszyylinder noch gar nicht definiert ist; aus den früheren Betrachtungen wissen wir, daß N auch für den homogen magnetisierten Kreiszyylinder örtlich nicht konstant ist, ferner daß die Magnetisierung eines endlichen geraden Kreiszyinders nicht homogen ist. Wir versuchen nun, vom Experiment her, d. h. durch den Vergleich der aus dem Ellipsoid gewonnenen wahren Magnetisierungskurve mit der an dem Kreiszyylinder aufgenommenen ungescherten Kurve die Scherungslinie zu gewinnen und aus ihrer Neigung gegen die Ordinatenachse Schlüsse auf den Wert von N_I ¹⁾ zu ziehen.

Zunächst ist es prinzipiell von größter Wichtigkeit, zwischen dem Ergebnis aus magnetometrischen und dem aus ballistischen Messungen zu unterscheiden. Nach der magnetometrischen Methode wurden Entmagnetisierungsfaktoren zylindrischer Stäbe von R. Mann²⁾ bestimmt; das Ergebnis seiner Messungen ist in der Tabelle 8³⁾ zusammengestellt; zum Vergleich sind die Werte von N für das Ellipsoid mit dem gleichen Dimensionsverhältnis beigefügt (s. Tabelle a. f. S.).

¹⁾ Wir schreiben für das nach der magnetometrischen Methode bestimmte N : N_I .

²⁾ R. Mann, Inaug.-Diss. Berlin 1895; Phys. Rev. **3**, 359, 1896.

³⁾ Vgl. E. Gumlich, a. a. O., S. 9.

Tabelle 8.

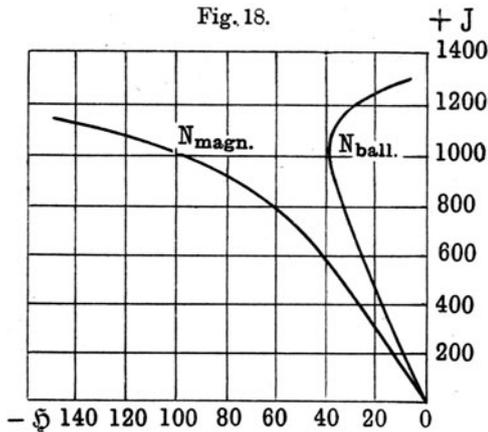
β	N_I	N Ellipsoid	β	N_I	N Ellipsoid
$\frac{1}{5}$	0,680 0	0,701 5	$\frac{1}{60}$	0,013 1	0,013 2
$\frac{1}{10}$	0,255 0	0,254 9	$\frac{1}{70}$	0,009 9	0,010 1
$\frac{1}{15}$	0,140 0	0,135 0	$\frac{1}{80}$	0,007 8	0,008 0
$\frac{1}{20}$	0,089 8	0,084 8	$\frac{1}{90}$	0,006 3	0,006 5
$\frac{1}{25}$	0,062 8	0,058 7	$\frac{1}{100}$	0,005 2	0,005 4
$\frac{1}{30}$	0,046 0	0,043 2	$\frac{1}{150}$	0,002 5	0,002 6
$\frac{1}{40}$	0,027 4	0,026 6	$\frac{1}{200}$	0,001 5	0,001 6
$\frac{1}{50}$	0,018 3	0,018 1	$\frac{1}{300}$	0,000 8	0,000 8

R. Mann hatte nämlich gefunden, daß die Scherungslinien der zylindrischen Stäbe wenigstens bis zu etwa $\mathfrak{J} = 800$ innerhalb der Beobachtungsfehler geradlinig verlaufen, daß also die Größe N_I von $\mathfrak{J} = 0$ bis $\mathfrak{J} = 800$ als konstant anzusehen ist. Sie ist für kurze Zylinder etwas größer als für die entsprechenden Ellipsoide, für die Dimensionsverhältnisse $\frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{70}$ nahezu gleich groß und für langgestreckte Stäbe etwas kleiner als für die entsprechenden Ellipsoide. Mann war hierbei von der Annahme ausgegangen, daß sich ein Zylinder vom Dimensionsverhältnis $\frac{1}{300}$ in magnetometrischer Hinsicht wie ein Ellipsoid von demselben Dimensionsverhältnis verhalte, und daß somit der Entmagnetisierungsfaktor eines solchen Ellipsoids $N = 0,00075$ bei entsprechenden Zylindern benutzt werden könne. Messungen, die C. Benedicks¹⁾ an einem Eisendraht mit dem Dimensionsverhältnis $\frac{1}{300}$ ausgeführt hat, und bei denen er die Normalkurve nach der ballistischen Methode unter Zugrundelegung des von du Bois (s. w. u.) gefundenen „ballistischen“ Entmagnetisierungsfaktors konstruierte, ergaben jedoch für diesen Zylinder den Wert 0,0028 an Stelle von 0,00075 beim entsprechenden Ellipsoid. Er folgert hieraus, daß den Mannschen Werten für die Zylinder die Zahl 0,0028 — 0,00075 \sim 0,002 zu addieren sei. Die N_I wären demnach für Zylinder bei allen Dimensionsverhältnissen (wenn wir von dem ersten, herausfallenden Wert absehen) größer als bei den entsprechenden Ellipsoiden, und zwar wäre die Abweichung bei dünnen Stäben bzw. Ellipsoiden am stärksten ausgeprägt.

¹⁾ C. Benedicks, Ann. d. Phys. **6**, 726, 1901.

Mann hatte bereits gefunden, daß die Konstanz von N nur unterhalb $\mathfrak{S} = 800$ vorhanden ist, und daß N oberhalb $\mathfrak{S} = 800$ erst langsam, dann stärker zunimmt, mit anderen Worten, daß die Scherungskurve in ihrem weiteren Verlauf konvex gegen die Ordinatenachse verläuft. Benedicks hat dieses Verhalten eingehender untersucht und z. B. für das Dimensionsverhältnis $1/25$ die in Fig. 18 wiedergegebene, mit $N_{\text{magn.}}$ bezeichnete Scherungskurve gefunden.

Aus dem geradlinigen Teil der Kurve ergibt sich $N = 0,0658$, was mit dem um 0,002 korrigierten Werte von Mann, nämlich 0,0648, nicht schlecht übereinstimmt; wie groß die Werte von N für größere \mathfrak{S} werden, ist an der Fig. 18 leicht abzulesen.



Wir stellen die Deutung dieses Verhaltens einstweilen zurück und wenden uns jetzt zu einigen Arbeiten, die die Feststellung der Scherungslinie nach der ballistischen Methode vornehmen.

b) Die Messungen von C. Benedicks und C. L. B. Shudde-
magen. (Ballistische Methode.)

C. Benedicks hat in der genannten Arbeit die Scherungslinie für ein gegebenes Dimensionsverhältnis auch auf ballistischem Wege festgestellt. Diese Methode, die, wie erwähnt, darauf beruht, daß die Induktion in einer die Probe in der Mitte umschließenden enganliegenden Spule bekannter Windungszahl mit einem ballistischen Galvanometer gemessen wird, gibt zunächst nicht die

Magnetisierung \mathfrak{J}_{II} ¹⁾, sondern die Induktion \mathfrak{B}_{II} , und zwar für den mittleren Teil der Probe, d. h. für die Äquatorialebene. Ob in den übrigen Teilen der Probe dieselbe oder eine kleinere Induktion herrscht, ist zunächst gleichgültig. Man kann aber aus \mathfrak{B}_{II} sofort das zugehörige \mathfrak{J}_{II} mittels der sich aus Gleichung (3) und (14) ergebenden Gleichung

$$\mathfrak{J}_{II} = \frac{\mathfrak{B}_{II} - \xi_a}{4\pi - N}$$

berechnen, wenn man N wenigstens angenähert kennt. Ist nur die Voraussetzung erfüllt, daß N klein gegen 4π ist, so kommt ein Fehler in N offenbar nicht merklich in Betracht. Benedicks schätzte den Wert von N (Entmagnetisierungsfaktor für die Äquatorialebene) auf 0,04 für $\beta = 1/25$.

Der Vergleich der so gewonnenen \mathfrak{J}_{II} - ξ_a -Kurve mit der am Ellipsoid gewonnenen \mathfrak{J} - ξ -Kurve liefert dann die Scherungslinie Fig. 18, N_{ball} . Diese ist gleichfalls bis zu $\mathfrak{J} = 800$ eine fast vollkommen gerade Linie, die einem konstanten Entmagnetisierungsfaktor $N_{II} = 0,0444$ entspricht; bei stärkerer Magnetisierung nimmt dagegen die Entmagnetisierung schnell ab, was darauf beruht, daß die ungescherte Kurve des Zylinders und die Normalkurve des Ellipsoids dann beinahe zusammenfallen. Auch aus früheren Bestimmungen von Ewing²⁾, die du Bois³⁾ zur erstmaligen Berechnung am N_{II} benutzt hat, ergeben sich Scherungskurven, die das gleiche Verhalten zeigen, wie Benedicks mitteilt. Für das Dimensionsverhältnis $1/25$ ist somit die ballistisch gewonnene Zahl $N_{II} = 0,0444$ bedeutend kleiner als die eben magnetometrisch gewonnene Zahl $N_I = 0,0658$ bzw. 0,0648. Wenn wir hier nicht auf den von du Bois errechneten Wert 0,0533 und seine sonstigen Zahlen zurückgreifen, so geschieht dies im Anschluß an Benedicks deshalb, weil er für die Dimensionsverhältnisse $> 1/50$ zur Berechnung von N magnetometrische Messungen (von Tanakadaté) benutzt hat.

Hatten die Untersuchungen von Benedicks ergeben, daß die ballistisch bestimmten Entmagnetisierungsfaktoren N_{II} nur innerhalb eines bestimmten Bereichs konstant sind, während sie für

¹⁾ Wir schreiben bei den ballistisch bestimmten Größen den Index II.

²⁾ J. Ewing, Phil. Trans. 176, Plate 37, Fig. 3, 1885.

³⁾ H. du Bois, Magnetische Kreise, S. 45, 1894; Wied. Ann. 46, 497, 1892.

größere Induktionen rasch abnehmen und dann fast zu vernachlässigen sind, so war doch eine genauere Bestimmung dieser konstanten Werte für die verschiedenen Dimensionsverhältnisse wünschenswert. Sehr eingehende Untersuchungen hierüber sind von C. L. B. Shuddemagen¹⁾ angestellt worden, der außer einer Abhängigkeit vom Dimensionsverhältnis β noch eine geringe Abhängigkeit von der Dicke selbst fand. In Tabelle 9 sind seine Zahlen wiedergegeben, wobei wir wieder zum Vergleich die N für Ellipsoide gleicher Dimensionsverhältnisse beifügen.

Tabelle 9.

β	N_{II} $d = 0,32$ cm	N_{II} $d = 0,6 \div 2,0$ cm	$N_{\text{Ellipsoid}}$
$1/10$	0,220	0,204	0,254 9
$1/15$	0,117	0,106	0,135 0
$1/20$	0,074	0,067 2	0,084 8
$1/25$	0,051 5	0,046 7	0,058 7
$1/30$	0,038 2	0,034 4	0,043 2
$1/40$	0,023 4	0,021 1	0,026 6
$1/50$	0,016 0	0,014 4	0,018 1
$1/60$	0,011 5	0,010 4	0,013 2
$1/70$	0,008 7	0,007 95	0,010 1
$1/80$	0,006 9	0,006 25	0,008 0
$1/90$	0,005 6	0,005 07	0,006 5
$1/100$	0,004 6	0,004 20	0,005 4
$1/150$	0,002 22	0,002 04	0,002 6
$1/200$	0,001 30	0,001 20	0,001 6

Die Tabelle zeigt, daß die N_{II} beim Zylinder durchweg bedeutend kleiner als die N beim Ellipsoid sind; die Unterschiede der Werte für die verschiedenen Durchmesser sind relativ gering.

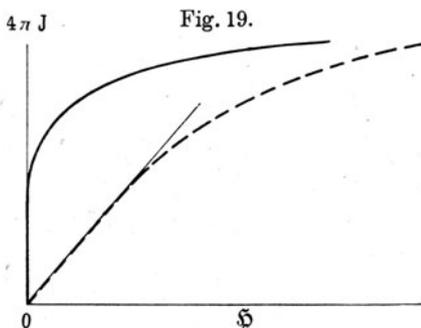
c) Die Messungen von J. Würschmidt. (Ballistische und Erschütterungsmethode.)

Zur Nachprüfung der von Shuddemagen erhaltenen Werte hat der Verfasser an Stäben verschiedener Dimensionsverhältnisse Messungen des Entmagnetisierungsfaktors N_{II} ausgeführt; wenn sie hier in einem eigenen Abschnitt angeführt werden, obwohl es

¹⁾ C. L. B. Shuddemagen, Proc. Am. Ac. **43**, 185, 1907; Phys. Rev. **31**, 165, 1910; Contr. Jefferson Lab. **8**, Nr. 2, 1911.

sich um die gleiche Größe N_{II} handelt wie soeben, so geschieht es aus dem Grunde, weil die angewandte Methode eine andere war und auf Grund später anzustellender Betrachtungen eine gewisse Bedeutung besitzt.

Bekanntlich kann man von einem ferromagnetischen Material eine von der gewöhnlichen Magnetisierungskurve abweichende Magnetisierungskurve erhalten, wenn man jedesmal, nachdem man die Stärke des äußeren Feldes um einen gewissen Betrag wachsen ließ, diesem Felde ein Wechselfeld von hinreichender Stärke überlagert, das man dann allmählich auf Null abnehmen läßt, und dann die für das konstante Feld übrigbleibende Magnetisierung mißt.



Die so erhaltene, sogenannte „ideale“ Magnetisierungskurve¹⁾ (vgl. Fig. 19, siehe auch Handbuch d. Elektr. u. d. Magn. IV, S. 715), ist dadurch ausgezeichnet, daß sie keinen Inflexionspunkt mehr besitzt, sondern von Anfang an zuerst geradlinig, dann konkav gegen die H -Achse verläuft. Da sie in ihrem anfänglichen

Verlauf mit der Ordinatenachse zusammenfällt, ist offenbar der Grenzwert der Suszeptibilität für $H = 0$ gleich Unendlich, d. h. schon eine unendlich kleine Feldstärke H verursacht eine endliche Magnetisierung J . Zugleich ist die Kurve vollständig hysteresefrei, d. h. beim Abwärtsgehen werden wieder die gleichen Werte von J für gleiches H erreicht. Bei der Aufnahme der idealen Magnetisierungskurve wurde ein Ellipsoid mit bekanntem Entmagnetisierungsfaktor N untersucht und dessen Kurve, d. h. zunächst ungescherte Kurve aufgenommen; diese soll durch Scherung um den Betrag $-NJ$ in die in Fig. 19 ausgezogene Kurve übergehen, mithin muß sie den Verlauf der gestrichelten Kurve in Fig. 19 haben. Der Winkel φ der ungescherten Kurve bzw. ihres geradlinigen Teiles mit der $4\pi J$ -Achse muß somit die Größe N liefern, indem $\tan \varphi = \frac{N}{4\pi}$ ist. Ganz ähnliche Verhältnisse wie bei

¹⁾ E. Gumlich u. R. Steinhaus, Verh. d. D. Phys. Ges. 1915, S. 369.

der idealen Magnetisierungskurve hatte man bereits früher bei der gewöhnlichen Versuchsanordnung dadurch erreicht, daß man das Material nach jeder Magnetisierungsstufe erschütterte¹⁾; nur waren die von Ewing auf diese Weise erhaltenen Kurven nicht ganz hysteresefrei. Bei weichem Eisen trat die Tendenz der Aufhebung der Hysterese am besten hervor. Es war deshalb vorteilhaft, ein Material zu verwenden, das bereits normalerweise eine geringe Hysterese, also eine kleine Koerzitivkraft besitzt, ferner müßte es günstig sein, wenn das Material eine große Anfangspermeabilität μ_0 hat, da dann bereits durch das Anlegen bzw. Verstärken des Feldes auch ohne Erschütterung ein möglichst hoher Wert der Induktion erreicht wird, und es dann um so leichter gelingt, durch Erschütterung den Maximalwert der Induktion zu bekommen. Aus diesen Gründen hat der Verfasser²⁾ zur Bestimmung des Entmagnetisierungsfaktors N_{II} nach der Erschütterungsmethode ein Material gewählt, das durch Zusammensetzung und geeignete Wärmebehandlung möglichst weich war, das ferner eine große Anfangspermeabilität und kleine Koerzitivkraft besitzt, nämlich 50proz. Nickelstahl mit sehr geringem Kohlenstoffgehalt und etwa 1,5 Proz. Mn-Gehalt; letzteres war der leichteren Bearbeitbarkeit (Schmiedbarkeit) wegen beigesezt. Ausgegangen wurde von einer Probe vom ungefähren Dimensionsverhältnis $1/50$; durch allmähliches Abschneiden wurden immer größere Dimensionsverhältnisse hergestellt. Da es nur darauf ankam, für die üblichsten Dimensionsverhältnisse Zahlen zu erhalten, beschränkte sich der Verfasser auf die Werte zwischen $1/50$ und $1/13$. Zur Messung wurde die ziemlich empfindliche ballistische Versuchsanordnung gewählt³⁾, die der Verfasser bereits früher zur Aufnahme des anfänglichen Verlaufs der Neukurven benutzt hatte; natürlich kam hier nur der Teil der idealen Magnetisierungskurven in Betracht, der noch vollständig geradlinig verläuft. Tabelle 10 (a. f. S.) enthält die aus den Messungen sich ergebenden Werte, denen zum Vergleich die beiden Werte von Shuddemagen beigefügt sind.

Die Zahlen der ersten Spalte liegen insgesamt zwischen den beiden von Shuddemagen erhaltenen Zahlen, und zwar in Über-

¹⁾ J. A. Ewing, Magnetische Induktion, S. 110 ff., 1892.

²⁾ J. Würschmidt, ZS. f. Phys. **19**, 388, 1923.

³⁾ J. Würschmidt, ebenda **12**, 128, 1922.

einstimmung mit dem verwendeten Probedurchmesser 0,6 näher der letzten, für die größeren Durchmesser geltenden Reihe, wenigstens für die größeren β , während sie sich für kleinere β der ersten Reihe von Shuddemagen nähern.

Tabelle 10.

β	N_{II}		
	Würschmidt	Shuddemagen 1	Shuddemagen 2
$\frac{1}{20}$	0,067 5	0,074 0	0,067 2
$\frac{1}{25}$	0,047 6	0,051 5	0,046 4
$\frac{1}{30}$	0,036 4	0,038 2	0,034 4
$\frac{1}{40}$	0,022 3	0,023 4	0,021 1
$\frac{1}{50}$	0,015 3	0,016 0	0,014 4

Zahlreiche Kontrollversuche an Stählen verschiedenster Zusammensetzung, meist Nickelstählen, die aber sämtlich große Anfangspermeabilität und kleine Remanenz nach Erschütterungen, d. h. geringe Härte gemeinsam hatten, ergaben für die dem jeweiligen Dimensionsverhältnis entsprechenden Größen N_{II} Werte, die mit den oben angegebenen gut übereinstimmten. Auch die Kontrolle mittels der gewöhnlichen ballistischen Methode zur Bestimmung der Scherung, die auch ohne Kenntnis der Normalkurve, d. h. der Ellipsoidkurve wenigstens die Differenzen von Entmagnetisierungsfaktoren liefert¹⁾, zeigte die gute Übereinstimmung mit den Differenzwerten der Entmagnetisierungsfaktoren von Shuddemagen.

Im Hinblick auf die späteren Ausführungen sei noch betont, daß die im vorliegenden erwähnten Größen N_{II} , da aus den idealen Magnetisierungskurven gewonnen, und zwar aus dem geradlinigen Anfangsteil, zur Suszeptibilität $\kappa = \infty$ gehören.

11. Der ballistische Entmagnetisierungsfaktor beim Kreiszyylinder.

Wir sehen nun zunächst von der Abnahme von N_{II} bei den hohen Induktionen ab, sondern betrachten N_{II} als von der Induktion unabhängig, d. h. als konstant für ein gegebenes Dimensionsverhältnis. Nach dem Obigen muß auch für den Kreiszyylinder sich der Entmagnetisierungsfaktor durch die Gleichung (14)

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_a - N\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_a + \mathfrak{S}_e$$

¹⁾ Vgl. J. Würschmidt, ZS. f. Phys. 19, 395 ff., 1923.

definieren lassen; d. h. wir haben auch hier die Aufgabe, das entmagnetisierende Feld \mathfrak{H}_e zu bestimmen. Dieses ist aber an jeder Stelle durch die Wirkungen aller freien magnetischen Belegungen auf dem magnetischen Körper gegeben, die letzteren aber sind durch die Zahl der an jedem Oberflächenelement des Körpers endigenden Magnetisierungslinien, und diese durch die in dem Körper vorhandene Magnetisierung \mathfrak{J} bestimmt. Diese ist aber, wie oben gezeigt, bei einem Kreiszyylinder sicher nicht homogen; die Erfahrung zeigt durch Messung der Induktion in verschiedenen Querschnitten des Körpers, daß sie im allgemeinen in der Mitte am größten ist und nach beiden Seiten zu symmetrisch abnimmt. Trägt man die in verschiedenen Querschnitten eines Kreiszyinders gemessenen Induktionen, bzw. Zahlen des Induktionsflusses durch den Querschnitt, als Funktion der Entfernung vom Mittelpunkt auf, so erhält man eine Kurve mit einem flachen Maximum in der Mitte, die nach den Enden stärker abfällt, somit einer umgekehrten Kettenlinie sehr ähnlich ist. Man hat deshalb vielfach versucht, die Verteilung der Magnetisierung in einem Zylinder durch eine Kettenlinie darzustellen¹⁾, also in der Form

$$J = c_0 + c_1 (e^{c_2 x} + e^{-c_2 x}) (56)$$

da der Kreiszyylinder überall den gleichen Querschnitt $b^2 \pi$ hat, so ist die Zahl der durch diesen Querschnitt an der Stelle x laufenden Magnetisierungslinien

$$F_x = b^2 \pi J = b^2 \pi (c_0 + c_1 (e^{+c_2 x} + e^{-c_2 x})) . . (57)$$

folglich ist die Zahl der zwischen x und $x + dx$ endigenden Magnetisierungslinien

$$- d F_x = - b^2 \pi c_1 c_2 (e^{c_2 x} - e^{-c_2 x}) dx,$$

und diese Zahl ist gleich dem freien Magnetismus δ auf der Zone dx .

Kohlrausch²⁾ hat nun bereits gezeigt, daß man in vielen Fällen diese Formel für den freien Magnetismus durch die wesentlich einfachere parabolische Formel

$$- \frac{d F_x}{d x} = \pm c x^2 (58)$$

ersetzen kann.

¹⁾ Vgl. hierzu die Literaturangaben im Handb. d. Elekt. u. d. Magn. IV, S. 85 ff., sowie S. 155.

²⁾ F. Kohlrausch, Wied. Ann. **31**, 609, 1887.

Die später zu besprechenden Versuche zeigen, daß diese Formel sicher nur einen Näherungswert ergibt. Wir wollen zunächst annehmen, der freie Magnetismus sei in der Form

$$-\frac{dF}{dx} = cx^m \quad \dots \dots \dots (59)$$

darstellbar, eine Form, die zunächst nichts anderes als eine Verallgemeinerung des Kohlrauschschen Gesetzes darstellt. Da positivem freiem Magnetismus auf der rechten Seite des Zylinders negativer freier Magnetismus auf der linken Seite entsprechen muß, so müssen wir für alle geraden n dem Werte von δ für negative x das negative Vorzeichen geben [vgl. Gleichung (58)]; für alle ungeraden n erhält δ gleichzeitig mit dem Vorzeichenwechsel in x von selbst das andere Vorzeichen.

Der Kreiszyylinder habe wieder die Länge $2a$ und den Durchmesser $2b$; da

$$-\frac{dF_x}{dx} = cx^m,$$

so ist

$$F_x = -\int dF_x = -c \frac{x^{m+1}}{m+1} + c' \quad \dots \dots \dots (60)$$

Die Konstanten c und c' bestimmen sich aus der Bedingung, daß für $x = 0$ $F_x = b^2 \pi J_0$ ¹⁾ und für $x = a$ $F_x = 0$ sein soll; wir setzen also zunächst voraus, daß auf der Endfläche des Zylinders kein freier Magnetismus vorhanden sein soll. Wir erhalten so

$$F_x = b^2 \pi J = b^2 \pi J_0 \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^{m+1} \right] \quad \dots \dots \dots (61)$$

d. h. es ist

$$-dF_x = b^2 \pi J_0 (m+1) \frac{x^m}{a^{m+1}} dx \quad \dots \dots \dots (59 a)$$

oder, wenn wir für $m+1$ n setzen, ist die Magnetisierung gegeben durch die Gleichung

$$J = J_0 \left(1 - \frac{x^n}{a^n} \right) \quad \dots \dots \dots (61 a)$$

¹⁾ Wir bezeichnen von jetzt ab den Wert von J in der Äquatorial-ebene mit J_0 , den Wert von J an der Stelle x mit J oder J_x .

a) Magnetisierung in der Form $J = J_0 \left(1 - \frac{x^n}{a^n}\right)$.

Die freie Ladung der Zone dx ist in diesem Falle gegeben durch

$$\delta = b^2 \pi J_0 \cdot \frac{n}{a^n} x^{n-1} dx = b^2 \pi J_0 \frac{n}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} dx. \quad (59 a)$$

Nun wäre die Wirkung dieser freien Ladung, die wir uns wieder auf der Längsachse konzentriert denken, auf irgend einen Punkt ξ, η auszurechnen, über den Ausdruck von $-a$ bis $+a$ zu integrieren, endlich für η der Oberflächenwert b einzusetzen, um die Größe des entmagnetisierenden Feldes an der Zylinderoberfläche zu erhalten, das im allgemeinen örtlich variabel sein wird.

Wir beschränken uns darauf, das Feld an der Zylinderoberfläche in der Äquatorialebene zu bestimmen, d. h. für die Stellen, für die im Innern die Magnetisierung J_0 ist; die Größe dieses negativen und in die Achsenrichtung fallenden Feldes ist $(H_e)_0 = -N_0 \cdot J_0$, d. h. wir definieren den Entmagnetisierungsfaktor N_0 zunächst nur für diese Äquatorialebene, für die die Magnetisierung J_0 beträgt.

Die Kraft, die die Flächenbelegung δ auf den Punkt $\xi = 0, \eta = b$ ausübt, ist gegeben durch

$$\Delta H = -\frac{\delta}{x^2 + b^2} = -b^2 \pi J_0 \frac{n}{a} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}{x^2 + b^2} dx \quad (62)$$

ihre x -Komponente ist

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_x &= -b^2 \pi J_0 \frac{n}{a} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} dx \cdot x}{(x^2 + b^2)^{3/2}} \\ &= -b^2 \pi J_0 \frac{n}{a^2} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \beta^2\right]^{3/2}} \\ &= -\beta^2 \pi J_0 \cdot n \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \beta^2\right]^{3/2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (63)$$

Also ist die Gesamtkraft sämtlicher Flächenbelegungen ¹⁾:

$$H_e = H_x = -2 \beta^2 \pi J_0 \cdot n \int_0^a \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \beta^2\right]^{3/2}} \cdot \cdot \cdot \quad (64)$$

Also ist der oben definierte Entmagnetisierungsfaktor N_0 :

$$N_0 = 2 \beta^2 \pi n \int_0^1 \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (65)$$

wenn wir die Integrationsvariable $\frac{x}{a}$ wieder mit x bezeichnen und dementsprechend die Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 ausführen.

Bevor wir nun das Integral in (65) allgemein auswerten, wollen wir einige Spezialfälle mit kleinen n berechnen.

1. $n = 1$.

$n = 1$ würde bedeuten, daß die Magnetisierung von der Mitte aus linear nach beiden Seiten abnimmt. Der freie Magnetismus wäre dann an jeder Stelle einer Seite gleich groß, nämlich gleich $\frac{b^2 \pi J_0}{a} dx$ für die positive Seite, im Mittelpunkt würde er sich unstetig auf den Wert $-\frac{b^2 \pi J_0}{a} dx = -\beta^2 \pi J_0 a dx$ ändern, der für die negative Seite gilt. Für N_0 ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} N_0^{(1)} &= 2 \beta^2 \pi \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} = -2 \beta^2 \pi \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \right]_0^1 \\ &= +2 \beta^2 \pi \left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \right] \\ &= 2 \beta^2 \pi \left[\frac{1}{\beta} - 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Eine derartige Unstetigkeit an der Stelle 0 und ein so großer Entmagnetisierungsfaktor kommt in Wirklichkeit nicht vor.

¹⁾ Während wir oben die Integration von $-a$ bis $+a$ ausführten, integrieren wir jetzt von 0 bis a und nehmen das doppelte der erhaltenen Größe; auf diese Weise umgehen wir die Schwierigkeit, die bei ungeradem n in (61 a) sich durch den Vorzeichenwechsel für negatives x ergibt.

2. $n = 2$.

Die Magnetisierung würde für $n = 2$ von der Mitte aus nach beiden Seiten quadratisch abnehmen; der freie Magnetismus wäre proportional der Entfernung vom Mittelpunkt, nämlich gleich $2 \beta^2 J_0 x dx$, d. h. genau ebenso groß wie bei dem homogen magnetisierten Ellipsoid. Infolgedessen müßte auch der Entmagnetisierungsfaktor gleich dem des Ellipsoids sein, wie auch die Auswertung von (65) für $n = 2$ zeigt. Es ergibt sich (vgl. Integraltafel Nr. 4)

$$\left. \begin{aligned} N_0^{(2)} &= 4 \beta^2 \pi \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} \\ &= 4 \beta^2 \pi \left[\lg(x + \sqrt{x^2 + \beta^2}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \right]_0^1 \\ &= 4 \beta^2 \pi \left[\lg\left(\frac{2}{\beta} + \frac{\beta}{2}\right) - 1 + \frac{\beta^2}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Dieser Ausdruck stimmt aber, wenn man β^2 gegen 1 vernachlässigt mit dem oben gefundenen Werte

$$N = 4 \beta^2 \pi \left(\lg \frac{2}{\beta} - 1 \right)$$

überein.

3. $n = 3$.

Da für $n = 3$ die Magnetisierung nach beiden Seiten kubisch abnimmt, so ist der freie Magnetismus proportional dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt, nämlich gleich $\pm 3 \beta^2 \pi J_0 x^2 \frac{1}{a}$, wobei für positives x das positive Zeichen, für negatives x das negative Zeichen zu setzen ist. Dieser Fall entspricht der von Kohlrausch (vgl. oben) angegebenen Näherung. Für N_0 ergibt sich (vgl. Integraltafel Nr. 7):

$$\left. \begin{aligned} N_0^{(3)} &= 6 \beta^2 \pi \left[\sqrt{x^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \right]_0^1 \\ &= 6 \beta^2 \pi \left[\sqrt{1 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}} - 2 \beta \right] \\ &= 6 \beta^2 \pi \left[1 - 2 \beta + \frac{3}{2} \beta^2 \right]. \end{aligned} \right\} \dots (68)$$

4. $n = 4$.

Nach Integraltafel Nr. 8 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 N_0^{(4)} &= 8 \beta^2 \pi \left[-\frac{x^3}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3x}{2} \sqrt{x^2 + \beta^2} - \frac{3\beta^2}{2} \lg(x + \sqrt{x^2 + \beta^2}) \right]_0^1 \\
 &= 8 \beta^2 \pi \left[-\frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \frac{3}{2} \sqrt{1 + \beta^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3\beta^2}{2} \lg(1 + \sqrt{1 + \beta^2}) + \frac{3\beta^2}{2} \lg \beta \right] \\
 &= 8 \beta^2 \pi \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \beta^2 - 1 + \frac{\beta^2}{2} - \frac{3\beta^2}{2} \lg \frac{2}{\beta} \right] \\
 &= 8 \beta^2 \pi \left[\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \beta^2 - \frac{3}{2} \beta^2 \lg \left(\frac{2}{\beta} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{69}$$

5. $n = 5$.

Nach Integraltafel Nr. 9 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 N_0^{(5)} &= 10 \beta^2 \pi \left[\frac{(x^2 + \beta^2)^{3/2}}{3} - 2 \beta^2 \sqrt{x^2 + \beta^2} - \frac{\beta^4}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \right]_0^1 \\
 &= 10 \beta^2 \pi \left[\frac{(1 + \beta^2)^{3/2}}{3} - 2 \beta^2 \sqrt{1 + \beta^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\beta^4}{\sqrt{1 + \beta^2}} - \frac{\beta^3}{3} + 2 \beta^3 + \beta^3 \right] \\
 &= 10 \beta^2 \pi \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \beta^2 - 2 \beta^2 + \frac{8}{3} \beta^3 \right] \\
 &= 10 \beta^2 \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \beta^2 + \frac{8}{3} \beta^3 \right] \sim 10 \beta^2 \pi \cdot \frac{1}{3}.
 \end{aligned} \tag{70}$$

6. $n \geq 6$.

Für $n \geq 6$ wollen wir die allgemeine Lösung geben. Nach Integraltafel Nr. 10 läßt sich das Integral $\int \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}}$ in eine Reihe nach geraden bzw. ungeraden Potenzen von x (je nachdem n ungerade oder gerade ist) entwickeln, wobei zugleich der Exponent von β jeweils um 2 steigt. Da β klein ist, genügt es,

nach Einsetzen der Grenzen 1 und 0 das quadratische Glied in β zu berücksichtigen. Man erhält so:

$$\left. \begin{aligned}
 N_0^{(n)} &= 2 \beta^2 \pi n \left[\frac{1}{n-2} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{n-1}{n-2} \frac{1}{n-4} \frac{\beta^2}{\sqrt{1+\beta^2}} \right] \\
 &= 2 \beta^2 \pi n \left[\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-2} \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{1}{n-4} \beta^2 \right] \\
 &= 2 \beta^2 \pi n \left[\frac{1}{n-2} - \frac{3}{2(n-4)} \beta^2 \right] \\
 &= 2 \beta^2 \pi \frac{n}{n-2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{n-2}{n-4} \beta^2 \right].
 \end{aligned} \right\} (71)$$

Unter Berücksichtigung der Glieder mit β^2 in der Klammer ist diese Formel bis herab zu $n = 5$ zu gebrauchen.

Wir geben in der folgenden Tabelle 11 eine Zusammenstellung der für verschiedene n geltenden Formeln sowie der für $\beta = 1/60$ sich hieraus ergebenden Zahlenwerte, und zwar unter N_0 die Werte unter Berücksichtigung, unter \bar{N}_0 unter Vernachlässigung des quadratischen Gliedes in β . Aus Gleichung (71) ersieht man, daß sich N_0 für $n = \infty$ dem Grenzwert

$$N_0^{(\infty)} = 2 \beta^2 \pi \left(1 - \frac{3}{2} \beta^2 \right) \sim 2 \beta^2 \pi$$

nähert, d. h. dem Werte für den homogen magnetisierten Zylinder.

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den genauen und den angenäherten Werten so gut, daß man unbedenklich die Näherungswerte benutzen darf.

Wir können somit das Ergebnis der Untersuchung folgendermaßen zusammenfassen.

Ist die Magnetisierung in dem Zylinder durch die Funktion

$$J = J_0 \left(1 - \frac{x^n}{a^n} \right) \cdot \dots \cdot \dots \cdot (61 a)$$

gegeben, so ist der Entmagnetisierungsfaktor N_0 in der Äquatorial-ebene:

$$\left. \begin{aligned}
 N_0^{(1)} &= 2 \beta^2 \pi \left[\frac{1}{\beta} - 1 \right] && \text{für } n = 1, \\
 N_0^{(2)} &= 2 \beta^2 \pi \cdot 2 \cdot \left[\lg \frac{2}{\beta} - 1 \right] && \text{" } n = 2, \\
 N_0^{(3)} &= 2 \beta^2 \pi \cdot 3 [1 - 2 \beta] && \text{" } n = 3, \\
 N_0^{(n)} &= 2 \beta^2 \pi \frac{n}{n-2} \cdot && \text{" } n \geq 4.
 \end{aligned} \right\} \dots (71 a)$$

Tabelle 11.

n	N_0	N_0 $\beta = 1/50$	N_0 $\beta = 1/50$
1	$2\beta^2\pi\left[\frac{1}{\beta}-1+\frac{1}{2}\beta^2\right]$	0,123 15	0,123 15
2	$2\beta^2\pi\cdot 2\left[\lg\frac{2}{\beta}-1+\frac{\beta^2}{2}\right]$	0,018 123	0,018 122
3	$2\beta^2\pi\cdot 3\left[1-2\beta-\frac{3}{2}\beta^2\right]$	0,007 238 2	0,007 233 7
4	$2\beta^2\pi\cdot\frac{4}{2}\left[1+\frac{5}{2}\beta^2-3\beta^2\lg\left(\frac{2}{\beta}\right)\right]$	0,005 026 6	0,005 003 8
5	$2\beta^2\pi\cdot\frac{5}{3}\left[1-\frac{9}{2}\beta^2\right]$	0,004 188 8	0,004 181 3
6	$2\beta^2\pi\frac{6}{4}\left[1-3\beta^2\right]$	0,003 787 8	0,003 783 3
7	$2\beta^2\pi\frac{7}{5}\left[1-\frac{5}{2}\beta^2\right]$	0,003 518 6	0,003 515 1
8	$2\beta^2\pi\frac{8}{6}\left[1-\frac{9}{4}\beta^2\right]$	0,003 351 1	0,003 348 0
9	$2\beta^2\pi\frac{9}{7}\left[1-\frac{21}{10}\beta^2\right]$	0,003 231 3	0,003 228 6
10	$2\beta^2\pi\frac{10}{8}\left[1-2\beta^2\right]$	0,003 141 6	0,003 139 1
20	$2\beta^2\pi\frac{20}{18}\left[1-\frac{27}{16}\beta^2\right]$	0,002 792 5	0,002 790 7
50	$2\beta^2\pi\frac{50}{48}\left[1-\frac{36}{23}\beta^2\right]$	0,002 618 0	0,002 616 4
100	$2\beta^2\pi\frac{100}{98}\left[1-\frac{49}{32}\beta^2\right]$	0,002 564 5	0,002 563 0
1000	$2\beta^2\pi\frac{1000}{998}\left[1-\frac{499}{332}\beta^2\right]$	0,002 518 3	0,002 516 9
∞	$2\beta^2\pi\left[1-\frac{3}{2}\beta^2\right]$	0,002 513 3	0,002 511 9

In Fig. 20 (S. 60) sind die durch die Gleichung $J = J_0\left(1 - \frac{x^n}{a^n}\right)$ dargestellten Verteilungen graphisch für verschiedene Werte von n dargestellt; auch hieraus sieht man deutlich, daß der Fall der homogenen Magnetisierung dem Grenzfall dieses Parabelsystems erster bis n ter Ordnung für $n = \infty$ entspricht.

Um nun die bei einem gewissen äußeren Felde \mathfrak{S}_a in einem Zylinder tatsächlich vorhandene Verteilung zu bestimmen, wurde

an einem Kreiszyylinder aus einem ziemlich harten¹⁾ Spezialstahl die Induktion an verschiedenen Stellen gemessen ($\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \dots$). Die Dimensionen des Zylinders waren $a = 13,395$, $b = 0,301$, also $\beta = \frac{1}{44,5}$, wozu nach den oben angeführten Messungen $N_0 = 0,0185$ gehört. Für \mathfrak{B}_0 , d. h. den Wert in der Mitte des Zylinders, läßt sich die Berechnung aus dem gemessenen Galvanometerausschlag, dem Reduktionsfaktor, dem Querschnitt der Probe und der Induktionsspule, deren Windungszahl und der Feldstärke \mathfrak{S}_a einwandfrei durchführen, und damit ist auch J_0 bekannt. Für einen anderen Punkt können wir zwar die beiden Querschnitte usw., aber nicht die wahre Feldstärke \mathfrak{S} bestimmen, da wir ja die Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors vom Orte nicht kennen. Wir begnügen uns deshalb, die wegen der Luftlinien anzubringenden Korrekturen mit dem für die Mitte geltenden \mathfrak{S} zu berechnen, und erhalten so die jeweiligen Werte von \mathfrak{B} .

Tabelle 12.

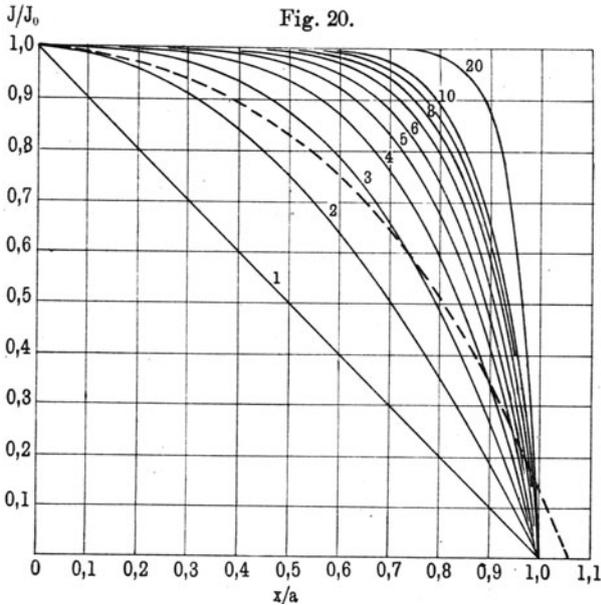
I			II	
x	$\frac{x}{a}$	$\frac{J}{J_0}$	$\frac{x}{a}$	$\frac{J}{J_0}$
0	0	1,000	0	1,000
1	0,747	0,994	0,1	0,991
2	149	984	2	970
3	224	963	3	938
4	299	938	4	891
5	373	905	5	828
6	448	867	6	751
7	523	812	7	650
8	597	751	8	515
9	672	681	9	340
10	747	600	1,0	130
11	821	482	—	—
12	896	348	—	—
13	971	193	—	—

Da die \mathfrak{B} groß gegen \mathfrak{S} sind, konnten wir \mathfrak{S} gegen \mathfrak{B} vernachlässigen und die \mathfrak{B} -Kurve als nahe zusammenfallend mit

¹⁾ Dies war nötig, damit nicht durch die Erschütterung beim Abziehen der Induktionsspule eine Entmagnetisierung eintritt.

der $4\pi\mathfrak{J}$ -Kurve betrachten. Dividierte man endlich noch die $4\pi\mathfrak{J}$ -Werte mit $4\pi\mathfrak{J}_0$, so erhielt man die in Tabelle 12, I angegebenen Werte. Aus diesen sind dann die Werte für $\frac{x}{a} = 1, 2$ usw. interpoliert (II).

Die dieser Verteilung entsprechende Kurve ist punktiert in Fig. 20 eingezeichnet. Es zeigt sich, daß die Verteilungskurve etwas oberhalb der Kurve für $n = 2$ verläuft, in ihrem letzten



Drittel die Kurve $n = 3$, dann auch die übrigen Kurven schneidet und für $x = a$ noch nicht die Achse erreicht hat. Es ist also auf der Endfläche noch eine freie Ladung vorhanden.

b) Magnetisierung in der Form

$$J = J_0 \left(1 - c_n \frac{x^n}{a^n} \right) \dots \dots \dots (72)$$

Wir werden also dahin geführt, die anfängliche Annahme, auf der Endfläche sei keine freie Ladung vorhanden, fallen zu lassen. Schreiben wir die Gleichung für die Magnetisierung in der Form

$$J = J_0 \left(1 - c_n \frac{x^n}{a^n} \right),$$

so heißt dies, die Kurve schneidet die Achse nicht im Punkte $x = a$, sondern im Punkte $x = \frac{a}{\sqrt{c_n}}$. Soll im Punkte $x = a$

eine freie Magnetisierung vorhanden sein, so muß $J = J_0(1 - c_n)$ positiv für positives J_0 , also $c_n < 1$ sein.

Die Berechnung der Entmagnetisierungsfaktoren N_0 gestaltet sich in analoger Weise wie oben, nur kommt stets noch der Faktor c_n dazu, ferner ist noch die von den beiden Endbelegungen ausgeübte Kraft für die Stelle $\xi = 0, \eta = b$ gesondert zu berechnen.

Setzt man in Gleichung (72) $x = a$, so erhält man für die freie Magnetismmenge auf der positiven Endfläche $b^2\pi$:

$$\delta_f = b^2\pi J = b^2\pi J_0(1 - c_n) \dots \dots \dots (73)$$

Die von dieser auf den Punkt 0, b ausgeübte Kraft ist

$$\mathfrak{G}_f = -\frac{\delta_f}{a^2 + b^2} = -\frac{b^2\pi J_0(1 - c_n)}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots (74)$$

und ihre X-Komponente

$$(\mathfrak{G}_f)_x = -\frac{b^2\pi J_0(1 - c_n)}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \cdot a \dots \dots \dots (75)$$

oder, da $b \ll a$,

$$(\mathfrak{G}_f)_x = -\beta^2\pi J_0(1 - c_n) \dots \dots \dots (75a)$$

Die negative Endbelegung liefert den gleichen Betrag, folglich ist der von den Endbelegungen herrührende Teil des Entmagnetisierungsfaktors

$$N_f = 2\beta^2\pi(1 - c_n) \dots \dots \dots (76)$$

Demnach ist z. B. der Entmagnetisierungsfaktor, wenn

$$J = J_0\left(1 - c_2 \frac{x^2}{a^2}\right),$$

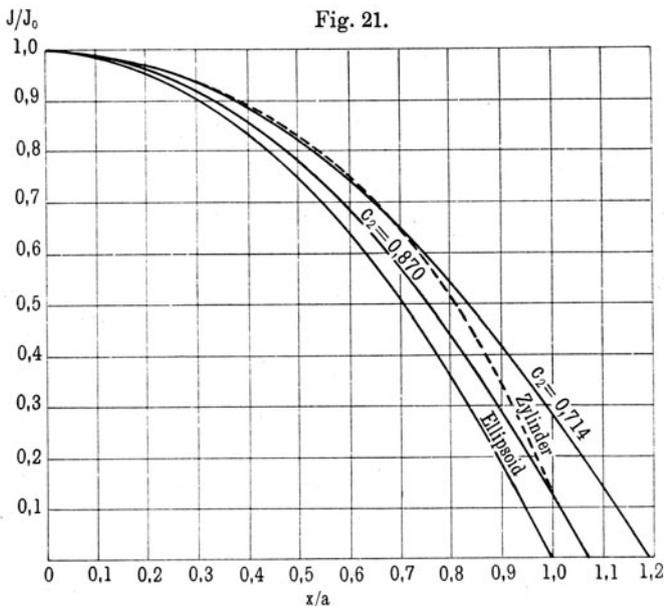
$$N_0^{(2)} = 4\beta^2\pi\left[\lg \frac{2}{\beta} - 1\right] \cdot c_2 + 2\beta^2\pi(1 - c_2) \dots \dots (77)$$

Wir betrachten nun die oben gegebene Verteilung von Tabelle 12. Da für $x = a$ sich ergibt $J = 0,130 J_0$, so müßte sein, wenn die Kurve der Gleichung (72) entspräche,

$$c_2 = 0,870.$$

Berechnet man hierfür den Entmagnetisierungsfaktor nach Gleichung (77), so erhält man $N_0^{(2)} = 0,0196$, während der

experimentell gefundene Wert 0,0185 beträgt. In Fig. 21 ist die der Verteilung $c_2 = 0,87$ entsprechende Kurve gezeichnet, die von der gemessenen Verteilung (punktierte Kurve) noch ziemlich abweicht; die größte Abweichung liegt bei $x = 0,7 a$.



Nun könnte man aber auch eine Parabel von der Form $J = J_0 \left(1 - c_2 \frac{x^2}{a^2}\right)$ so legen, daß in diesem Punkte die Abweichung Null wird. Dann muß sein:

$$\frac{J}{J_0} = 0,650 = 1 - c_2 \cdot 0,7^2,$$

oder

$$c_2 = 0,714.$$

Der zugehörige Entmagnetisierungsfaktor beträgt $N_0^{(2)} = 0,0167$, ist also gegenüber dem gemessenen Werte zu klein, obwohl die der Verteilung $c_2 = 0,714$ entsprechende Kurve sich der experimentellen Kurve bedeutend besser anschmiegt (vgl. Fig. 21). Doch liegt sie gerade in ihrem anfänglichen Verlauf höher als letztere (was in der Figur nicht mehr zu sehen ist), d. h. gerade in der Nähe der Mitte des Stabes sind die freien Ladungen geringer, und diese üben wegen der geringen Abstände vom Punkte 0, b die relativ stärksten Wirkungen aus.

Man sollte also zur näherungsweise Darstellung der Verteilung durch eine Parabel deren Konstante am besten so wählen, daß für die ersten Punkte möglichst gute Übereinstimmung mit der experimentellen Kurve vorhanden ist. Doch zeigt gerade das vorliegende Beispiel, daß eine vollkommene Übereinstimmung deshalb nicht zu erzielen ist, weil die Verteilung nicht genau durch eine Parabel darstellbar ist.

Immerhin ist aus dem vorliegenden Abschnitt ersichtlich, daß für Kreiszyylinder allein aus der Verteilung des Magnetismus erschlossen werden kann, daß der Entmagnetisierungsfaktor für die Äquatorialebene bedeutend kleiner als derjenige des Ellipsoids gleicher Dimension ist.

In Fig. 21 haben wir noch die Verteilung für das Ellipsoid gleicher Dimension eingezeichnet. Tabelle 13 enthält die Werte für die Magnetisierung an den Stellen $\frac{x}{a}$, sowie die N_0 .

Tabelle 13.

$\frac{x}{a}$	Ellipsoid	Zylinder	$c_2 = 0,870$	$c_2 = 0,714$
0	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	99	991	991	993
0,2	96	970	965	971
0,3	91	938	922	936
0,4	84	891	861	886
0,5	75	828	783	822
0,6	64	751	687	743
0,7	51	650	574	650
0,8	36	515	443	543
0,9	19	340	295	422
1,0	0	130	130	286
1,07	—	—	0	—
1,19	—	—	—	0
N_0	0,0221	0,0185 exp.	0,0196	0,0167

c) Magnetisierung in der Form

$$J = J_0 \left(1 - c_2 \frac{x^2}{a^2} - c_3 \frac{x^3}{a^3} - c_4 \frac{x^4}{a^4} - \dots \right)$$

Wir können nun leicht die bisherige Form der Darstellung der Magnetisierung dahin erweitern, daß wir sie statt durch eine

Parabel 2., 3., ... n^{ter} Ordnung durch eine Potenzreihe darstellen. Dabei wollen wir jedoch, da das lineare Glied, wie der Versuch sofort zeigt, nur Schaden stiftet, von diesem absehen, d. h. die Magnetisierung in der Form

$$J = J_0 \left(1 - c_2 \frac{x^2}{a^2} - c_3 \frac{x^3}{a^3} - c_4 \frac{x^4}{a^4} - \dots \right) \dots \quad (78)$$

geben.

Der Entmagnetisierungsfaktor setzt sich dann linear aus den mit den Konstanten c_2, c_3 usw. multiplizierten Größen $N_0^{(2)}, N_0^{(3)}$ usw. zusammen, zu denen noch der durch die Endbelegungen

$$\pm \delta_f = b^2 \pi J_0 (1 - c_2 - c_3 - \dots)$$

erzeugte Entmagnetisierungsfaktor N_f hinzukommt. Es ergibt sich demnach:

$$N_0 = c_2 N_0^{(2)} + c_3 N_0^{(3)} + c_4 N_0^{(4)} + \dots + N_f \dots \quad (79)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} N_0^{(2)} &= 2 \beta^2 \pi \cdot 2 \cdot \left[\lg \frac{2}{\beta} - 1 \right] \\ N_0^{(3)} &= 2 \beta^2 \pi \cdot 3 \cdot [1 - 2 \beta] \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (80)$$

$$N_0^{(n)} = 2 \beta^2 \pi \frac{n}{n-2} \quad \text{für } n \geq 4$$

$$N_f = 2 \beta^2 \pi (1 - c_2 - c_3 - c_4 - \dots).$$

Hierbei, d. h. bei der Darstellung von J durch die Potenzreihe von Gleichung (78), ist jedoch zu beachten, daß für negative x die Koeffizienten der ungeraden Potenzen von x das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten müssen.

Um diese Unsymmetrie zu vermeiden, können wir uns auch von vornherein auf gerade Potenzen von x beschränken; es bedeutet dieses keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn es kann ja bekanntlich eine beliebig vorgegebene stetige symmetrische Kurve stets durch eine Potenzreihe mit geraden Exponenten dargestellt werden.

Also ist:

$$J = J_0 \left(1 - c_2 \frac{x^2}{a^2} - c_4 \frac{x^4}{a^4} - c_6 \frac{x^6}{a^6} - \dots \right) \dots \quad (78a)$$

oder, wenn wir setzen:

$$c_2 = C_1$$

$$c_4 = C_2$$

usw.

$$J = J_0 \left(1 - C_1 \frac{x^2}{a^2} - C_2 \frac{x^4}{a^4} - C_3 \frac{x^6}{a^6} - \dots - C_n \frac{x^{2n}}{a^{2n}} - \dots \right) \quad (78b)$$

Ferner:

$$N_0 = 2\beta^2\pi \left[2C_1 \left(\lg \frac{2}{\beta} - 1 \right) + 2C_2 + \frac{3}{2}C_3 + \frac{4}{3}C_4 + \frac{5}{4}C_5 + \dots + \frac{n^1}{n-1}C_n + \dots + (1 - C_1 - C_2 - C_3 - \dots) \right] \quad (79a)$$

Um zu prüfen, inwieweit der nach den Formeln (79) bzw. (79a) berechnete Entmagnetisierungsfaktor mit dem experimentell gefundenen Wert übereinstimmt, wenden wir sie auf die in Tabelle 13 angegebene Verteilung an. Wir unterscheiden, indem wir uns auf eine Darstellung durch drei Konstante beschränken, zwei Fälle, je nachdem wir als gegebene Punkte die Punkte $\frac{x}{a} = 0,2$, 0,5 und 1 oder 0,2, 0,4 und 0,6 ansehen. In jedem Falle ist die Berechnung entweder für die Form (78) (ganzzahlige Exponenten) oder für die Form (78a) (ganzzahlige gerade Exponenten) durchgeführt. Tabelle 14 enthält eine Zusammenstellung der Ergebnisse.

Tabelle 14.

I. Gegeben		II. Gegeben	
$\frac{x}{a}$	$\frac{J}{J_0}$	$\frac{x}{a}$	$\frac{J}{J_0}$
0,2	0,970	0,2	0,970
0,5	0,828	0,4	0,891
1,0	0,130	0,6	0,751

1. Ganzzahlige Exponenten.

$c_2 = 0,8627$	$c_2 = 0,8981$
$c_3 = -0,7060$	$c_3 = -0,9375$
$c_4 = 0,7133$	$c_4 = 0,9896$
$N_0 = 0,0176$	$N_0 = 0,0179$

2. Gerade Exponenten.

$C_1 = 0,7674$	$C_1 = 0,7854$
$C_2 = -0,4572$	$C_2 = -0,9635$
$C_3 = 0,5603$	$C_3 = 1,9531$
$N_0 = 0,0172$	$N_0 = 0,0181$

Die Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert 0,0185 ist nicht schlecht, wenn auch alle vier Werte noch unterhalb

1) Da C_n zu x^{2n} gehört, so müssen wir schreiben $\frac{2n}{2n-2} = \frac{n}{n-1}$.

desselben liegen. Indes ist zu bedenken, daß die Genauigkeit, mit der die J/J_0 -Werte bekannt sind, keine allzugroße ist. Um zu untersuchen, wie sehr sich der Wert von N_0 ändert, wenn man z. B. für den ersten Punkt an Stelle des angegebenen Wertes 0,970 den gerade noch in der Fehlergrenze liegenden Wert 0,965 nimmt, wurde die Berechnung auch für diesen Fall durchgeführt. Es ergaben sich dann für I. 1 die Konstanten $c_2 = 1,1230$, $c_3 = -1,4872$ und $c_4 = 1,2342$ sowie $N_0 = 0,0197$, d. h. ein Wert, der jetzt bedeutend oberhalb des experimentellen Wertes liegt. Ein Fehler von $\frac{1}{2}$ Proz. in dem Werte von $\frac{J}{J_0}$ an der Stelle

$\frac{x}{a} = 0,2$, bedingt also einen Fehler von etwa 11 Proz. in dem Entmagnetisierungsfaktor. Die durchgerechneten Beispiele zeigen wieder, daß es für N_0 wesentlich auf die Werte der mittennahen Punkte, d. h. auf die Verteilung nahe der Mitte, dagegen weniger auf die Verteilung an den Enden und auf die freien Endladungen ankommt. Deshalb kann auch eine Berücksichtigung von mehr Punkten und damit eine Einführung von mehr Konstanten kein genaueres Ergebnis liefern.

Der vorliegende Abschnitt zeigt, daß aus der experimentell bekannten Verteilung des Magnetismus eine Berechnung des Entmagnetisierungsfaktors möglich ist und Werte liefert, die mit dem experimentell gefundenen innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit gut übereinstimmen.

12. Die Magnetisierung bei der ballistischen und bei der magnetometrischen Methode.

Nach unseren bisherigen Ausführungen können wir annehmen, daß sich die Magnetisierung in einem Kreiszyylinder durch die Form

$$J = J_0 \left(1 - C_1 \frac{x^2}{a^2} - C_2 \frac{x^4}{a^4} - \dots - C_n \frac{x^{2n}}{a^{2n}} - \dots \right) \quad (78a)$$

darstellen läßt, wobei J_0 der Wert in der Äquatorialebene, also für $x = 0$, ist, den man experimentell aus der Messung der Induktion an dieser Stelle mittels einer Induktionsspule und eines ballistischen Galvanometers gewinnen kann.

Wenn wir nun die Wirkung eines magnetisierten Eisenzylinders nach der magnetometrischen Methode messen, so können wir nicht mehr, wie oben beim Ellipsoid oder homogen magnetisierten Zylinder, das „magnetische Moment“ als Produkt aus Volumen und Magnetisierung definieren, da ja die Magnetisierung in dem Stabe nicht örtlich konstant ist. Um zu sehen, welche Größe hier als mittlere Magnetisierung (J_m) auftritt, berechnen wir die Feldstärke, die der nach Gleichung (78a) magnetisierte Zylinder in einem sehr weit entfernten Punkte der x -Achse erzeugt. (1. Gaußsche Hauptlage.)

Aus (78a) ergibt sich für die freie Ladung im Punkte x :

$$\delta_x = \frac{2b^2\pi J_0}{a^2} \left(C_1 x + 2 \frac{C_2}{a^2} x^3 + \frac{3C_3}{a^4} x^5 + \dots + \frac{n \cdot C_n}{a^{2n-2}} \cdot x^{2n-1} + \dots \right) dx \quad \dots \quad (81)$$

Die Kraft auf den Punkt $\xi, 0$ ergibt sich, indem man durch das Entfernungsguadrat $(\xi - x)^2$ dividiert und von $-a$ bis $+a$ integriert. Außerdem kommt dazu noch die von den freien Endbelegungen $\pm b^2\pi J_0(1 - C_1 - C_2 - \dots - C_n - \dots)$ ausgeübte Kraft. Man erhält also:

$$H_I = \frac{2b^2\pi J_0}{a^2} \left[C_1 (B_1)_{-a}^{+a} + \frac{2C_2}{a^2} (B_3)_{-a}^{+a} + \frac{3C_3}{a^4} (B_5)_{-a}^{+a} + \dots + \frac{n C_n}{a^{2n-2}} (B_{2n-1})_{-a}^{+a} + \dots \right] + b^2\pi J_0(1 - C_1 - C_2 - \dots) \left[\frac{1}{(\xi - a)^2} - \frac{1}{(\xi + a)^2} \right], \quad (82)$$

wobei wir das Integral

$$\int \frac{x^m dx}{(\xi - x)^2} = B_m, \quad m = 1, 2, 3 \dots 2n - 1 \dots \quad (83)$$

setzen.

Nach Integraltafel Nr. 11 ist

$$B_m = \frac{-1}{m-1} \cdot \frac{x^m}{\xi - x} - \frac{m}{m-1} \cdot \frac{1}{m-2} \xi x^{m-1} + \frac{m}{m-2} \xi^2 B_{m-2}.$$

Setzt man die Grenzen ein, so ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß m eine ungerade Zahl ist,

$$\left. \begin{aligned}
 (B_m)_{-a}^{+a} &= \frac{-a^m}{m-1} \frac{1}{\xi} \left[1 + \frac{a}{\xi} + \frac{a^2}{\xi^2} + \dots + 1 - \frac{a}{\xi} + \frac{a^2}{\xi^2} - \dots \right] \\
 &\quad - \frac{m}{m-1} \cdot \frac{a^{m-1}}{m-2} \left[1 + \frac{a}{\xi} + \frac{a^2}{\xi^2} + \dots - 1 + \frac{a}{\xi} - \frac{a^2}{\xi^2} + \dots \right] \\
 &\quad + \frac{m}{m-2} \xi^2 (B_{m-2})_{-a}^{+a} = \frac{-2a^m}{m-1} \frac{1}{\xi} \left[1 + \frac{a^2}{\xi^2} + \dots \right] \\
 &\quad - \frac{2ma^m}{m-1} \cdot \frac{1}{m-2} \left[1 + \frac{a^2}{\xi^2} + \dots \right] + \frac{m}{m-2} \xi^2 (B_{m-2})_{-a}^{+a} \\
 &= \frac{-2a^m}{(m-2)\xi} \left[1 + \frac{a^2}{\xi^2} + \dots \right] + \frac{m}{m-2} \xi^2 (B_{m-2})_{-a}^{+a}
 \end{aligned} \right\} (84)$$

Nun ist (vgl. Integraltafel Nr. 3):

$$\left. \begin{aligned}
 [B_1]_{-a}^{+a} &= \left[\frac{x}{\xi-x} + \lg(\xi-x) \right]_{-a}^{+a} = \frac{a}{\xi-a} + \frac{a}{\xi+a} - \lg \frac{\xi+a}{\xi-a} \\
 &= \frac{2a}{\xi} \left[1 + \frac{a^2}{\xi^2} + \frac{a^4}{\xi^4} + \dots \right] - 2 \left[\frac{a}{\xi} + \frac{1}{3} \frac{a^3}{\xi^3} + \frac{1}{5} \frac{a^5}{\xi^5} + \dots \right] \\
 &= \frac{4}{3} \frac{a^3}{\xi^3} + \frac{8}{5} \frac{a^5}{\xi^5} + \frac{12}{7} \frac{a^7}{\xi^7} + \dots
 \end{aligned} \right\} (84a)$$

Also nach (84)

$$\begin{aligned}
 [B_3]_{-a}^{+a} &= -\frac{4a^3}{\xi} \left[1 + \frac{a^2}{\xi^2} + \frac{a^4}{\xi^4} + \dots \right] + 3\xi^2 \left[\frac{4}{5} \frac{a^3}{\xi^3} + \frac{8}{5} \frac{a^5}{\xi^5} + \dots \right], \\
 &= \frac{4}{5} \frac{a^5}{\xi^3} + \frac{8}{7} \frac{a^7}{\xi^5} + \frac{12}{9} \frac{a^9}{\xi^7} + \dots, \\
 [B_5]_{-a}^{+a} &= \frac{4}{7} \frac{a^7}{\xi^3} + \frac{8}{9} \frac{a^9}{\xi^5} + \frac{12}{11} \frac{a^{11}}{\xi^7}, \\
 [B_7]_{-a}^{+a} &= \frac{4}{9} \frac{a^9}{\xi^3} + \frac{8}{11} \frac{a^{11}}{\xi^5} + \frac{12}{13} \frac{a^{13}}{\xi^7} \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Setzt man die gefundenen Werte in Gleichung (82) ein, so ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß ξ groß gegen a sein soll [s. Gleichung (85) a. f. S.], und wenn man $V = 2b^2\pi a$ setzt

$$J_m = J_0 \left[1 - \frac{1}{3} C_1 - \frac{1}{5} C_2 - \frac{1}{7} C_3 - \dots - \frac{1}{2n+1} C_n - \dots \right] (86)$$

Man findet also das von früher bekannte Gesetz, nur muß J_m durch Gleichung (86) definiert werden. J_m ist nichts anderes als der Mittelwert von J , wie sich sofort ergibt, wenn man das Integral von J zwischen $-a$ und $+a$ bildet und durch $2a$ dividiert.

$$\left. \begin{aligned}
 H_I &= \frac{2b^2\pi J_0}{a^2} \left[C_1 \frac{4}{3} \frac{a^3}{\xi^3} + 2C_2 \frac{4}{5} \frac{a^3}{\xi^3} + 3C_3 \frac{4}{7} \frac{a^3}{\xi^3} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + n C_n \frac{4}{2n+1} \frac{a^3}{\xi^3} + \dots \right] + \frac{4b^2\pi J_0 a}{\xi^3} (1 - C_1 - C_2 - \dots - C_n - \dots) \\
 &= 4 \cdot \frac{b^2\pi a J_0}{\xi^3} \left[\frac{2}{3} C_1 + \frac{2}{5} C_2 + \frac{2}{7} C_3 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{2n+1} C_n + \dots + 1 - C_1 - C_2 - \dots \right] \\
 &= \frac{2V}{\xi^3} J_0 \left[1 - \frac{1}{3} C_1 - \frac{1}{5} C_2 - \frac{1}{7} C_3 - \dots - \frac{1}{2n+1} C_n \right] \\
 &= \frac{2V}{\xi^3} \cdot J_m = \frac{2M}{\xi^3}.
 \end{aligned} \right\} (85)$$

Das Ergebnis ist also: Die magnetometrische Magnetisierung J_m ist der Mittelwert der örtlich veränderlichen wahren Magnetisierung J ; sie ist deshalb stets kleiner als deren Höchstwert J_0 .

Denken wir uns also den Zylinder durch einen homogen magnetisierten Zylinder ersetzt, der den gleichen Querschnitt und das gleiche magnetische Moment wie ersterer besitzt, und dessen Magnetisierung gleich dem Maximalwert J_0 in ersterem ist, so ist, wenn wir seine Länge mit $2a_0$ bezeichnen:

$$M = 2b^2\pi a_0 J_0 = 2b^2\pi a J_m$$

oder

$$a_0 = a \cdot \frac{J_m}{J_0} \dots \dots \dots (87)$$

d. h. seine Länge ist im Verhältnis $\frac{J_m}{J_0}$ kleiner als $2a$ zu wählen; seine Pole, d. h. freien Endbelegungen, liegen im Abstand $\pm a_0 = \pm a \frac{J_m}{J_0}$ vom Mittelpunkt¹⁾.

13. Die Abhängigkeit des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors beim Kreiszyylinder von der Magnetisierung.

Die Versuche von Benedicks zeigen nun, daß das Verhältnis der magnetometrischen oder mittleren Magnetisierung J_m zur ballistischen oder maximalen bei den verschiedenen äußeren

¹⁾ Vgl. hierzu auch C. Benedicks, a. a. O., S. 736.

Feldstärken keineswegs konstant ist, sondern mit zunehmendem Felde zunimmt, wie aus der Tabelle 15¹⁾ ersichtlich ist.

Da nun $\frac{J_m}{J_0} = 1 - \frac{1}{3} C_1 - \frac{1}{5} C_2 - \frac{1}{7} C_3$, so müssen offenbar bei hohen Feldstärken die Konstanten $C_1 C_2 \dots$ andere Werte annehmen, d. h. die Verteilungskurve für die Magnetisierung muß einen anderen Verlauf haben.

Tabelle 15.

\mathfrak{H}_a	J_m	J_0	$J_m : J_0$
22,9	165	240	0,687
45,8	466	641	0,726
68,7	712	963	0,740
91,6	866	1131	0,766
114,6	950	1220	0,779
137,5	1012	1270	0,796
160,4	1061	1304	0,813
183,3	1101	1331	0,827
206,2	1136	1350	0,841

Das gleiche Ergebnis lieferten die Untersuchungen von Lamb²⁾, nur mit dem Unterschied, daß die Größe $\frac{J_m}{J_0}$ ³⁾ für kleine Feldstärken zunächst größer ist, dann erst abnimmt, für mittlere Feldstärken ein Minimum erreicht und für große Feldstärken zunimmt. Tabelle 16 enthält die Lamschen Werte, wobei \mathfrak{B}_m als Mittelwert aus der Verteilungskurve berechnet wurde.

Auch die Beobachtungen von E. Gumlich⁴⁾ ergaben das gleiche Resultat, wenn auch der von ihm gemessene „Polabstand“ eine andere Größe ist, als der oben eingeführte. Der hier auftretende Begriff der „äquivalenten Pole“⁵⁾ ergibt sich zunächst für ein Ellipsoid aus folgender einfachen Überlegung.

1) C. Benedicks. a. a. O., S. 728.

2) C. G. Lamb, Phil. Mag. (5) 48, 262, 1899, vgl. Handbuch usw. a. a. O., S. 280 bis 283.

3) An Stelle von $\frac{J_m}{J_0}$ ist $\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}_0}$ gegeben.

4) E. Gumlich, Ann. d. Phys. 59, 668, 1919.

5) Vgl. auch Handbuch, a. a. O., S. 97 ff.

Tabèlle 16.

ξ_a	\mathfrak{B}_0	\mathfrak{B}_m	$\frac{\mathfrak{B}_m}{\mathfrak{B}_0}$
0,74	162	146	0,90
1,49	572	477	0,83
2,23	2 350	1 880	0,80
3,35	5 500	4 070	0,74
4,47	8 000	6 160	0,77
6,70	10 700	8 680	0,81
11,6	13 500	11 900	0,88
20,0	14 300	12 900	0,90
35,0	15 200	14 100	0,93

Die Feldstärke H_I für einen Achsenpunkt ξ , die durch ein homogen magnetisiertes (J) Ellipsoid a, b hervorgerufen wird, ergibt sich nach Gleichung (29) zu

$$H_I = \frac{2JV_e}{\xi^3} = \frac{2M_e}{\xi^3}.$$

Berücksichtigt man jedoch noch das nächste Glied bei der Reihenentwicklung [vgl. Gleichung (84a)], so findet man

$$\left. \begin{aligned} H_I &= \frac{2Jb^2\pi}{a^3} \left[\frac{4}{3} \frac{a^3}{\xi^3} + \frac{8}{5} \frac{a^5}{\xi^5} \right] \\ &= \frac{2JV_e}{\xi^3} \left[1 + \frac{6}{5} \frac{a^2}{\xi^2} \right] = \frac{2M_e}{\xi^3} \left[1 + \frac{6}{5} \frac{a^2}{\xi^2} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots (88)$$

Andererseits ist die Kraft, die ein homogen magnetisierter Zylinder \bar{a}, b (\bar{a} = halbe Länge) in dem gleichen Punkte hervorgerufen würde, nach Gleichung (9) und (11)

$$H'_I = \frac{2\bar{J}V_s}{\xi^3} \left[1 + 2\frac{\bar{a}^2}{\xi^2} \right] = \frac{2M_s}{\xi^3} \left[1 + 2\frac{\bar{a}^2}{\xi^2} \right] \dots \dots (89)$$

Ersetzen wir demnach das Ellipsoid durch einen homogen magnetisierten Zylinder, der genau die gleiche Kraft in ξ ausüben und das gleiche magnetische Moment wie das Ellipsoid besitzen soll (jedoch die Magnetisierung \bar{J} muß verschieden von J sein, da die Volumina verschieden sind), so können wir für das Ellipsoid die Formel (89) des Zylinders benutzen, wenn wir

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{a}^2 &= \frac{6}{5} a^2 \\ \text{oder} \quad \bar{a} &= a\sqrt{\frac{3}{5}} = a \cdot 0,77 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (90)$$

setzen, die Entfernung $\bar{a} = a \cdot 0,77$ bezeichnet man als „äquivalenten“ Polabstand. Gumlich fand z. B. experimentell $\bar{a} = 0,75 - 0,76$ der großen Achse, indem er Gleichung (89)¹⁾ auf zwei verschiedene Entfernungen ξ_1 und ξ_2 anwandte und die Unbekannte $\frac{\bar{a}}{a}$ hieraus berechnete.

Wendet man die gleiche Gleichung auf einen gewöhnlichen, also nicht homogen magnetisierten Zylinder an, so erhält man den äquivalenten Polabstand für diesen.

Wir wollen unter der Annahme, die Verteilung der Magnetisierung in dem zylindrischen Stabe sei durch eine Parabel m -ter Ordnung, also durch Gleichung (61a) gegeben, sowohl den gewöhnlichen Polabstand a_0 als auch den äquivalenten Polabstand \bar{a} berechnen, indem wir uns auf diesen Spezialfall beschränken.

Da

$$J = J_0 \left(1 \mp \frac{x^m}{a^m} \right), \quad (\text{Vorzeichenwechsel für neg. } x \text{ und ungerade } m) \dots (61a)$$

ist der freie Magnetismus:

$$\delta_x = \pm b^2 \pi J_0 \frac{m}{a^m} x^{m-1} dx,$$

somit die Feldstärke für einen Punkt ξ der Längsachse:

$$H_I = \frac{2 b^2 \pi J_0 m}{a^m} \int_0^a \frac{x^{m-1} dx}{(\xi - x)^2} = \frac{2 b^2 \pi J_0}{a^m} m [B_{m-1}]_0^a$$

oder, unter Benutzung von (84a)

$$\left. \begin{aligned} H_I &= \frac{2 b^2 \pi J_0 m}{a^m} \left[\frac{2}{m+1} \frac{a^{m+1}}{\xi^3} + \frac{4}{m+3} \frac{a^{m+3}}{\xi^5} + \frac{6}{m+5} \frac{a^{m+5}}{\xi^7} + \dots \right] \\ &= \frac{2 b^2 \pi a \cdot 2 J_0 m}{\xi^3} \left[\frac{1}{m+1} + \frac{2}{m+3} \frac{a^2}{\xi^2} + \dots \right] \\ &= \frac{2 b^2 \pi a \cdot 2 J_0}{\xi^3} \cdot \frac{m}{m+1} \left[1 + \frac{2(m+1)}{m+3} \frac{a^2}{\xi^2} + \dots \right] \\ &= \frac{2 J_0 \cdot V}{\xi^3} \cdot \frac{m}{m+1} \left[1 + \frac{2(m+1)}{m+3} \frac{a^2}{\xi^2} + \dots \right] \end{aligned} \right\} (91)$$

In sehr großer Entfernung ist

$$H_I = \frac{2 J_0 V}{\xi^3} \frac{m}{m+1} = \frac{2 J_m V}{\xi^3} \dots \dots \dots (91a)$$

¹⁾ Unwesentliches ist hier fortgelassen.

wenn man

$$J_0 \frac{m}{m+1} = J_m$$

setzt; J_m ist, wie man leicht zeigen kann, gleich $\frac{1}{a} \int_0^a J dx$.

Ersetzen wir also den Zylinder durch einen homogen magnetisierten Zylinder, der den gleichen Querschnitt und das gleiche magnetische Moment wie ersterer besitzt, und dessen Magnetisierung gleich dem Maximalwert J_0 in ersterem ist, so ist, wenn seine Länge $2a_0$ ist:

$$M = 2b^2\pi a_0 J_0 = 2b^2\pi a J_m \dots \dots \dots (87)$$

also

$$a_0 = a \frac{J_m}{J_0} = a \frac{m}{m+1} \text{ (Polabstand) } \dots \dots \dots (92)$$

Ersetzt man aber den Zylinder durch einen homogen magnetisierten Zylinder (Länge $2\bar{a}$) vom gleichen Querschnitt und gleichen magnetischen Moment, der in einem Punkte ξ der Achse die gleiche Feldstärke hervorbringt, so gilt für diesen

$$H'_I = \frac{2M}{\xi^3} \left[1 + 2\frac{\bar{a}^2}{\xi^2} + \dots \right] \dots \dots \dots (89)$$

dagegen für den nicht homogen magnetisierten Zylinder nach (91)

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{2J_0 \cdot V}{\xi^3} \frac{m}{m+1} \left[1 + \frac{2(m+1)a^2}{m+3} \frac{1}{\xi^2} + \dots \right] \\ &= \frac{2M}{\xi^3} \left[1 + \frac{2(m+1)a^2}{m+3} \frac{1}{\xi^2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Gleichsetzung von H'_I und H_I ergibt:

$$2\bar{a}^2 = \frac{2(m+1)}{m+3} a^2,$$

oder

$$\bar{a} = a \sqrt{\frac{m+1}{m+3}} \text{ (äquivalenter Polabstand) } \dots \dots (93)$$

Die folgende Tabelle 17 enthält die für verschiedene Werte von m berechneten Werte für a_0 und \bar{a} ; gleichzeitig sind nach Tabelle 11 die Werte für die entsprechenden (ballistischen) Entmagnetisierungsfaktoren für $\beta = \frac{1}{50}$ beigelegt.

Die Tabelle zeigt, wie mit der Veränderung der Kurvenform ($m = 2, 3 \dots$) sowohl der gewöhnliche als auch der äquivalente

Tabelle 17.

m	Polabstand a_0	Äquivalenter Polabstand \bar{a}	Entmagnetisierungsfaktor N_0
2	0,667 a	0,775	0,018 12
3	0,750 a ¹⁾	0,816 ¹⁾	0,007 23
4	0,800 a	0,845	0,005 00
5	0,833 a	0,866	0,004 18
6	0,857 a	0,882	0,003 78
7	0,875 a	0,894	0,003 52
8	0,889 a	0,904	0,003 35
9	0,900 a	0,913	0,003 23
10	0,909 a	0,920	0,003 14
20	0,952 a	0,956	0,002 79
50	0,980 a	0,981	0,002 62
100	0,990 a	0,990	0,002 56
1000	0,999 a	0,999	0,002 52
∞	1,000 a	1,000	0,002 51

Polabstand immer größer werden und zuletzt gegen den Wert 1 konvergieren, wie gleichzeitig der Entmagnetisierungsfaktor stark abnimmt.

Gumlich fand nun für seine zylindrischen Proben die in Tabelle 18 wiedergegebenen Werte.

Tabelle 18.

\mathfrak{B}	$\bar{a} : a$	\mathfrak{B}	$\bar{a} : a$
300	0,835	12 000	0,812
3000	0,832	14 400	0,887
6000	0,838	16 500	0,914
9000	0,820	18 000	0,975

Der äquivalente Polabstand nimmt also zunächst etwas ab, „bis ungefähr die Maximalpermeabilität erreicht ist“, sodann wächst er ständig und sehr erheblich an, „so daß schon bei $\mathfrak{B} = 18\,000$ in der Nähe der Sättigung die Pole fast mit den Enden

¹⁾ Vgl. z. B. Handb. a. a. O., S. 99. Kohlrauschsche Verteilungsfunktion.

des Stabes zusammenfallen. Es zeigt sich also die Erscheinung, daß die Pole um so weiter gegen das Ende hinrücken, die Magnetisierung also um so gleichmäßiger wird, je geringer die Permeabilität ist¹. Auch L. Holborn¹⁾ war für die gewöhnlichen Pole in Übereinstimmung mit C. G. Lamb, E. Gumlich und C. Benedicks²⁾ zu dem gleichen Ergebnis gelangt.

Die Tatsache des Umbiegens der Scherungslinie bei der ballistischen Methode gegen die Achse hin bei großen Induktionen findet somit darin ihre Erklärung, daß infolge des Vorrückens der Pole gegen die Enden bei der hohen Magnetisierung der Entmagnetisierungsfaktor N_0 kleiner und kleiner wird.

Nach den vorliegenden Versuchen scheint auch für sehr kleine Magnetisierungen die Verteilung und damit auch der Entmagnetisierungsfaktor nicht konstant zu sein, wenn auch hier keine so starken Änderungen auftreten. Bemerkenswert ist endlich die Tatsache, daß das Minimum des Polabstandes und damit das Maximum des Entmagnetisierungsfaktors bei dem Maximalwert der Permeabilität zu liegen scheint.

Diese Umstände legen den Schluß nahe, daß die Verteilung der Magnetisierung in dem Zylinder außer von seinen Dimensionen von dem magnetischen Verhalten des Materials, also von seiner Permeabilität oder Suszeptibilität abhängen muß, derart, daß für große Suszeptibilitäten der Polabstand ein Minimum ist, mit abnehmender Suszeptibilität größer wird und sich für die Suszeptibilität Null dem Werte Eins nähert. Dieser Grenzfall entspricht dann sowohl dem Falle eines unmagnetischen und unmagnetisierbaren Körpers, als auch dem Falle eines magnetischen und vollkommen gesättigten Körpers, endlich auch dem Falle eines vorher magnetischen Körpers, der unter dem Einfluß eines entgegengesetzt seiner Magnetisierung gerichteten Feldes keine Magnetisierung aufweist (Feld = Koerzitivkraft).

14. Theorie des Entmagnetisierungsfaktors beim Kreiszyylinder als Funktion der Suszeptibilität und der Form.

Bei der folgenden Berechnung des Entmagnetisierungsfaktors aus der Suszeptibilität sehen wir davon ab, daß die letztere, genau

¹⁾ L. Holborn, Sitz.-Ber. d. Kgl. preuß. Akad. d. Wiss., S. 159, 1898.

²⁾ C. Benedicks, K. Svenska Vet. Akad. Handb. 27, Nr. 5, 1902.

genommen, in den verschiedenen Teilen des Stabes verschieden groß ist. Wir setzen voraus, es sei ein bestimmter Wert von κ gegeben, und fragen uns, wie muß die Verteilung der Magnetisierung beschaffen sein, damit das durch die Verteilung, d. h. durch den freien Magnetismus, erzeugte Gegenfeld zusammen mit dem äußeren Felde die gleiche Verteilung erzeugt, mit anderen Worten, welche Verteilung entspricht bei gegebenem κ einem Gleichgewichtszustand? Für das Ellipsoid wurde die Aufgabe oben gelöst: die Voraussetzung einer homogenen Verteilung führt zu einem konstanten entmagnetisierenden Felde, also ist auch das Gesamtfeld konstant, und einem konstanten Felde entspricht eine homogene Magnetisierung. Beim Kreiszyylinder dagegen führte die Voraussetzung einer homogenen Verteilung zu einem örtlich variablen entmagnetisierenden Felde, also auch zu einem örtlich variablem Gesamtfeld, und ein solches kann keine homogene Magnetisierung hervorrufen. Die Voraussetzung ist also nicht erfüllt.

Wir müssen also die Verteilung beim Zylinder, wie das auch den experimentellen Erfahrungen entspricht, von vornherein, als nicht homogen voraussetzen; wir wählen die Form der Gleichung (78), also

$$J = J_0 \left(1 - c_2 \frac{x^2}{a^2} - c_4 \frac{x^4}{a^4} - \dots - c_{2n} \frac{x^{2n}}{a^{2n}} - \dots \right),$$

lassen aber die Koeffizienten c_{2i} noch unbestimmt. Die Zahl der durch den Querschnitt $b^2 \pi$ an der Stelle x laufenden Magnetisierungslinien ist dann $b^2 \pi J$; der freie Magnetismus an dieser Stelle

$$\delta_x = -b^2 \pi dJ = \frac{2b^2 \pi J_0}{a^2} \left[c_2 x + \frac{2c_4}{a^2} x^3 + \frac{3c_6}{a^4} x^5 + \dots \right] + \frac{n c_{2n}}{a^{2n-2}} x^{2n-1} + \dots \Bigg\} \quad (81)$$

Die von diesem freien Magnetismus δ_x in einem Punkte ξ der Längsachse im Innern des Zylinders erzeugte Feldstärke erhält man durch Division mit dem Entfernungsguadrat $[(x - \xi)^2 + b^2]$; die Komponente nach der x -Achse durch Multiplikation mit $\frac{x - \xi}{[(x - \xi)^2 + b^2]^{3/2}}$, die Gesamtfeldstärke, die von allen freien Magnetismen ausgeht wird, durch Integration nach dx in den Grenzen $-a$ und $+a$. Dazu kommt noch die von den freien Endbelegungen $\pm b^2 \pi J_0 (1 - c_2 - c_4 - \dots)$ auf den Punkt ξ ausgeübte Kraft; wir erhalten sie durch Division mit $(a - \xi)^2$ bzw.

$(a + \xi)^2$. Da wir die Endbelegungen auf der Achse vereinigt denken können, so fällt diese Kraft, die für beide Belegungen in gleichem Sinne wirkt, nämlich in negativem, in die Richtung der Achse.

So ergibt sich für die entmagnetisierende Kraft in der Achsenrichtung im Innern des Zylinders an der Stelle ξ

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_\xi = & - \frac{2b^2 \pi J_0}{a^2} \left[c_2 \int_{-a}^+ x(x-\xi) dx \left[\frac{1}{(x-\xi)^2 + b^2} \right]^{3/2} + \frac{2c_4}{a^2} \int_{-a}^+ x^3(x-\xi) dx \left[\frac{1}{(x-\xi)^2 + b^2} \right]^{3/2} \right. \\ & + \frac{3c_6}{a^4} \int_{-a}^+ x^5(x-\xi) dx \left[\frac{1}{(x-\xi)^2 + b^2} \right]^{3/2} + \dots \\ & \left. + \frac{nc_{2n}}{a^{2n-2}} \int_{-a}^+ x^{2n-1}(x-\xi) dx \left[\frac{1}{(x-\xi)^2 + b^2} \right]^{3/2} + \dots \right] \\ & - b^2 \pi J_0 [1 - c_2 - c_4 - \dots - c_{2n}] \left[\frac{1}{(a-\xi)^2} + \frac{1}{(a+\xi)^2} \right] \end{aligned} \quad (94)$$

oder wenn wir das Integral

$$\int_{-a}^+ \frac{x^{2n-1}(x-\xi) dx}{[(x-\xi)^2 + b^2]^{3/2}} = D_{2n} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \dots (95)$$

setzen und das letzte Glied in eine Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_\xi = & - \frac{2b^2 \pi J_0}{a^2} \left[c_2 D_2 + \frac{2c_4}{a^2} D_4 + \frac{3c_6}{a^4} D_6 + \dots \right. \\ & \left. + \frac{nc_{2n}}{a^{2n-2}} D_{2n} + \dots \right] \\ & + [1 - c_2 - c_4 - \dots] \left[1 + 3 \frac{\xi^2}{a^2} + 5 \frac{\xi^4}{a^4} + \dots \right], \end{aligned} \quad (94a)$$

wobei die Integrale zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ auszuwerten sind.

Für das Integral D_{2n} erhalten wir nach Integraltafel Nr. 12 den Wert:

$$\begin{aligned} D_{2n} = & (v-1) \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}} \left[\frac{x^{v-1}}{(v-1)(v-2)} \right. \\ & + \frac{\xi x^{v-2}}{(v-2)(v-3)} + \dots + \frac{\xi^{v-3} x^2}{2 \cdot 1} \left. \right] + \xi^{v-2} (D_{2n})_{n=1} \\ & - \xi^{v-3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{v-2} \right) \cdot \frac{\xi x - x^2 - b^2}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}, \end{aligned} \quad (96)$$

wobei wir $2n = \nu$ gesetzt haben und

$$(D_{2n})_{n=1} = D_2 = \frac{-x}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}} + \lg [(x-\xi) + \sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}].$$

Setzt man nun die Grenzen ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} [D_\nu]_{-a}^+ = (\nu-1) & \left[\frac{1}{a-\xi} \left(\frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{\xi a^{\nu-2}}{(\nu-2)(\nu-3)} + \dots \right. \right. \\ & + \frac{\xi^{\nu-3} a^2}{2 \cdot 1} \left. - \frac{1}{a+\xi} \left(\frac{(-a)^{\nu-1}}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{\xi (-a)^{\nu-2}}{(\nu-2)(\nu-3)} + \dots \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\xi^{\nu-3} (-a)^2}{2 \cdot 1} \right) + \xi^{\nu-2} [D_2]_{-a}^+ 2 \xi \cdot \xi^{\nu-3} \Sigma \frac{1}{\nu-2} \right]. \end{aligned}$$

Nun entwickeln wir $\frac{1}{a-\xi}$ und $\frac{1}{a+\xi}$ in Potenzreihen nach $\frac{\xi}{a}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} [D_\nu]_{-a}^+ = (\nu-1) & \left[\frac{1}{a} \left(1 + \frac{\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a^2} + \dots + \frac{\xi^\sigma}{a^\sigma} + \dots \right) \right. \\ & \left(\frac{a^{\nu-1}}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{\xi a^{\nu-2}}{(\nu-2)(\nu-3)} + \dots + \frac{\xi^{\nu-3} a^2}{2 \cdot 1} \right) \\ & - \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a^2} - \dots + \frac{\xi^\sigma}{a^\sigma} - \dots \right) \\ & \left(\frac{(-a)^{\nu-1}}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{\xi (-a)^{\nu-2}}{(\nu-2)(\nu-3)} + \dots + \frac{\xi^{\nu-3} (-a)^2}{2 \cdot 1} \right) \\ & \left. + \xi^{\nu-2} \left([D_2]_{-a}^+ 2 \Sigma \frac{1}{\nu-2} \right) \right]; \end{aligned}$$

hierbei sei in dem allgemeinen Gliede $\frac{\xi^\sigma}{a^\sigma}$ σ eine positive Zahl.

Beim Ausmultiplizieren verschwinden alle ungeraden Potenzen von ξ in dem ersten Term und man erhält:

$$\begin{aligned} [D_\nu]_{-a}^+ = (\nu-1) 2 a^{\nu-2} & \left[\frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{\xi^2}{a^2} \left(\frac{1}{(\nu-3)(\nu-4)} \right. \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\nu-2)(\nu-3)} + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) + \frac{\xi^4}{a^4} \left(\frac{1}{(\nu-5)(\nu-6)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\nu-4)(\nu-5)} + \frac{1}{(\nu-3)(\nu-4)} + \frac{1}{(\nu-2)(\nu-3)} \right) \end{aligned}$$

1) Es ist zu beachten, daß $\Sigma \frac{1}{\nu-2}$ für alle ganzen ν , nicht etwa nur für gerade ν zu bilden ist.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{\xi^6}{\alpha^6} \left(\frac{1}{(\nu-7)(\nu-8)} + \frac{1}{(\nu-6)(\nu-7)} + \dots \right. \\
 & + \left. \frac{1}{(\nu-2)(\nu-3)} + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) + \dots \\
 & + \frac{\xi^{\nu-6}}{\alpha^{\nu-6}} \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) \\
 & + \frac{\xi^{\nu-4}}{\alpha^{\nu-4}} \left(\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) \\
 & + \frac{\xi^{\nu-2}}{\alpha^{\nu-2}} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) \\
 & + \frac{\xi^\nu}{\alpha^\nu} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) \\
 & + \frac{\xi^{\nu+2}}{\alpha^{\nu+2}} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) + \dots \\
 & + \left. \frac{\xi^\sigma}{\alpha^\sigma} \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} \right) + \dots \right] \\
 & + \xi^{\nu-2} \left[[D_2]_{-a}^+ \frac{a}{2} \Sigma \frac{1}{\nu-2} \right] (\nu-1).
 \end{aligned}$$

Wendet man auf die Summen das Gesetz an:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau(\tau+1)} + \frac{1}{(\tau+1)(\tau+2)} + \frac{1}{(\tau+2)(\tau+3)} + \dots + \frac{1}{(\tau+\omega-1)(\tau+\omega)} \\
 = \frac{\omega}{\tau(\tau+\omega)},
 \end{aligned}$$

das durch sukzessives Addieren leicht zu verifizieren ist, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned}
 [D_\nu]_{-a}^+ &= 2\alpha^{\nu-2} \left[\frac{1}{\nu-2} + \frac{\xi^2}{\alpha^2} \frac{3}{\nu-4} + \frac{\xi^4}{\alpha^4} \frac{5}{\nu-6} + \dots \right. \\
 & + \frac{\xi^{\nu-6}}{\alpha^{\nu-6}} \cdot \frac{\nu-5}{4} + \frac{\xi^{\nu-4}}{\alpha^{\nu-4}} \frac{\nu-3}{2} + \frac{\xi^{\nu-2}}{\alpha^{\nu-2}} (\nu-2) \\
 & + \frac{\xi^\nu}{\alpha^\nu} (\nu-2) + \frac{\xi^{\nu+2}}{\alpha^{\nu+2}} (\nu-2) + \dots + \frac{\xi^\sigma}{\alpha^\sigma} (\nu-2) + \dots \\
 & \left. + \frac{\xi^{\nu-2}}{\alpha^{\nu-2}} (\nu-1) \left(\frac{1}{2} [D_2]_{-a}^+ \Sigma \frac{1}{\nu-2} \right) \right].
 \end{aligned} \right\} (97)$$

Das Integral $[D_2]_{-a}^+$ ergibt sich, wenn man in das unbestimmte Integral D_2 die Grenzen einsetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 [D_2]_{-a}^+ &= \left[\frac{-a}{a-\xi} - \frac{a}{a+\xi} + lg \frac{a-\xi + (a-\xi) \left(1 + \frac{b^2}{2(a-\xi)^2}\right)}{-a-\xi + (a+\xi) \left(1 + \frac{b^2}{2(a-\xi)^2}\right)} \right] \\
 &= lg \frac{2(a-\xi) \cdot 2(a+\xi)}{b^2} - \left(1 + \frac{\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a^2} + \dots\right) \\
 &\quad - \left(1 - \frac{\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a^2} - \dots\right) \\
 &= 2lg \frac{2a}{b} + lg \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) + lg \left(1 + \frac{\xi}{a}\right) - 2 - 2\frac{\xi^2}{a^2} - 2\frac{\xi^4}{a^4} - \dots \\
 &= 2lg \frac{2a}{b} + \frac{\xi}{a} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{\xi^3}{a^3} - \frac{1}{4} \frac{\xi^4}{a^4} - \dots \\
 &\quad - \frac{\xi}{a} - \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{1}{3} \frac{\xi^3}{a^3} - \frac{1}{4} \frac{\xi^4}{a^4} - \dots \\
 &\quad - 2 - 2\frac{\xi^2}{a^2} - 2\frac{\xi^4}{a^4} - \dots \\
 &= 2lg \frac{2}{\beta} - 2 - 3\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{5}{2} \frac{\xi^4}{a^4} - \frac{7}{3} \frac{\xi^6}{a^6} - \dots;
 \end{aligned} \tag{98}$$

führt man diesen Wert in Gleichung (97) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 [D_\nu]_{-a}^+ &= 2a^{\nu-2} \left[\frac{1}{\nu-2} + \frac{\xi^2}{a^2} \frac{3}{\nu-4} + \frac{\xi^4}{a^4} \frac{5}{\nu-6} + \dots + \frac{\xi^{\nu-6}}{a^{\nu-6}} \frac{\nu-5}{4} \right. \\
 &+ \frac{\xi^{\nu-4}}{a^{\nu-4}} \frac{\nu-3}{2} + \frac{\xi^{\nu-2}}{a^{\nu-2}} \left((\nu-2) + (\nu-1) \left(lg \frac{2}{\beta} - 1 \right) - (\nu-1) \Sigma \frac{1}{\nu-2} \right) \\
 &+ \frac{\xi^\nu}{a^\nu} \left((\nu-2) - \frac{3}{2} (\nu-1) \right) \\
 &\left. + \frac{\xi^{\nu+2}}{a^{\nu+2}} \left((\nu-2) - \frac{5}{4} (\nu-1) \right) + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir noch $lg \frac{2}{\beta} - \Sigma \frac{1}{\nu-2}$ mit $\gamma_{\nu-2}$, so finden wir:

$$\begin{aligned}
 [D_\nu]_{-a}^+ &= 2a^{\nu-2} \left[\frac{1}{\nu-2} + \frac{\xi^2}{a^2} \frac{3}{\nu-4} + \frac{\xi^4}{a^4} \frac{5}{\nu-6} + \dots + \frac{\xi^{\nu-6}}{a^{\nu-6}} \frac{\nu-5}{4} \right. \\
 &\quad + \frac{\xi^{\nu-4}}{a^{\nu-4}} \frac{\nu-3}{2} \\
 &\quad + \frac{\xi^{\nu-2}}{a^{\nu-2}} \left[(\nu-1) \gamma_{\nu-2} - 1 \right] \\
 &\quad \left. - \frac{\xi^\nu}{a^\nu} \frac{\nu+1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{\xi^{\nu+2}}{a^{\nu+2}} \frac{\nu+3}{4} - \dots - \frac{\xi^{\sigma-2}}{a^{\sigma-2}} \frac{\sigma-1}{\sigma-\nu} \\ & - \frac{\xi^\sigma}{a^\sigma} \frac{\sigma+1}{\sigma+2-\nu} \end{aligned} \right] .$$

Indem wir nun $\nu = 2, 4, 6$ usw. setzen, erhalten wir die Integrale D_2, D_4 usw. nach geraden Potenzen von $\frac{\xi}{a}$ entwickelt. In der Tabelle 19 sind die Werte zusammengestellt (S. 83).

Setzt man nun die Werte der Integrale von Tabelle 19 in Gleichung (94a) ein und ordnet die Glieder nach den Vertikalreihen von Tabelle 19, d. h. nach Potenzen von $\frac{\xi}{a}$, so findet man

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_\xi = & - \frac{2b^2\pi J_0}{a^2} \\ & \left[(1 - c_2 \quad - c_4 \quad - c_6 \quad - c_8 - \dots \quad - c_\nu) \right. \\ & + \left(2c_2(\gamma_0 - 1) + 4c_4 \cdot \frac{1}{2} + 6c_6 \cdot \frac{1}{4} + 8c_8 \cdot \frac{1}{6} + \dots + \nu c_\nu \frac{1}{\nu-2} \right) \\ & + \frac{\xi^2}{a^2} (3 - 3c_2 \quad - 3c_4 \quad - 3c_6 \quad - 3c_8 - \dots \quad - 3c_\nu) \\ & + \frac{\xi^2}{a^2} \left(-2c_2 \frac{3}{2} + 4(3\gamma_2 - 1)c_4 + 6c_6 \frac{3}{2} + 8c_8 \frac{3}{4} + \dots + \nu c_\nu \frac{3}{\nu-4} \right) \\ & + \frac{\xi^4}{a^4} (5 - 5c_2 \quad - 5c_4 \quad - 5c_6 \quad - 5c_8 - \dots \quad - 5c_\nu) \\ & + \frac{\xi^4}{a^4} \left(-2c_2 \frac{5}{4} - 4c_4 \frac{5}{2} + 6c_6(5\gamma_4 - 1) + 8c_8 \cdot \frac{5}{2} + \dots + \nu c_\nu \frac{5}{\nu-6} \right) + \dots \\ & + \frac{\xi^{\nu-2}}{a^{\nu-2}} ((\nu-1) - (\nu-1)c_2 - (\nu-1)c_4 - (\nu-1)c_6 - (\nu-1)c_8 - \dots \\ & \qquad \qquad \qquad - (\nu-1)c_\nu) \\ & + \frac{\xi^{\nu-2}}{a^{\nu-2}} \left(\quad - 2c_2 \frac{\nu-1}{\nu-2} - 4c_4 \frac{\nu-1}{\nu-4} - 6c_6 \frac{\nu-1}{\nu-6} - 8c_8 \frac{\nu-1}{\nu-8} + \dots \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \nu c_\nu [(\nu-1)\gamma_{\nu-2} - 1] \right) \\ & + \frac{\xi^\nu}{a^\nu} ((\nu+1) - (\nu+1)c_2 - (\nu+1)c_4 - (\nu+1)c_6 - (\nu+1)c_8 - \dots \\ & \qquad \qquad \qquad - (\nu+1)c_\nu) \\ & + \frac{\xi^\nu}{a^\nu} \left(\quad - 2c_2 \frac{\nu+1}{\nu} - 4c_4 \frac{\nu+1}{\nu-2} - 6c_6 \frac{\nu+1}{\nu-4} - 8c_8 \frac{\nu+1}{\nu-6} - \dots \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \nu c_\nu \frac{\nu+1}{2} \right) + \dots \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2b^2\pi J_0}{a^2} \\
&\left[\left(1 + c_2(2\gamma_0 - 3) + c_4 \cdot 1 + c_6 \cdot \frac{1}{2} + c_8 \frac{1}{3} + \dots + c_\nu \frac{1}{\frac{\nu-2}{2}} \right) \right. \\
&+ \frac{\xi^2}{a^2} \left(3 - c_2 \cdot 6 + c_4(12\gamma_2 - 7) + c_6 \cdot 6 + c_8 \frac{6}{2} + \dots + c_\nu \frac{6}{\frac{\nu-4}{2}} \right) \\
&+ \frac{\xi^4}{a^4} \left(5 - c_2 \frac{15}{2} - c_4 \cdot 15 + c_6(30\gamma_4 - 11) + c_8 \cdot 15 + \dots + c_\nu \frac{15}{\frac{\nu-6}{2}} \right) + \dots \\
&+ \frac{\xi^{\nu-2}}{a^{\nu-2}} \left((\nu-1) - c_2 \frac{\nu(\nu-1)}{\nu-2} - c_4 \frac{\nu(\nu-1)}{\nu-4} - c_6 \frac{\nu(\nu-1)}{\nu-6} \right. \\
&\quad \left. - c_8 \frac{\nu(\nu-1)}{\nu-8} - \dots + c_\nu [\nu(\nu-1)\gamma_{\nu-2} + 1 - 2\nu] \right) \\
&+ \frac{\xi^\nu}{a^\nu} \left((\nu+1) - c_2 \frac{(\nu+2)(\nu+1)}{\nu} - c_4 \frac{(\nu+2)(\nu+1)}{\nu-2} \right. \\
&\quad \left. - c_6 \frac{(\nu+2)(\nu+1)}{\nu-4} - c_8 \frac{(\nu+2)(\nu+1)}{\nu-6} - \dots - c_\nu \frac{(\nu+2)(\nu+1)}{2} \right) \Big]
\end{aligned}$$

Da wir oben setzten

$$\gamma_{\nu-2} = \lg \frac{2}{\beta} - \sum \frac{1}{\nu-2},$$

so können wir für den Koeffizienten von $\frac{\xi^{\nu-2}}{a^{\nu-2}} \cdot c_\nu$ schreiben:

$$\begin{aligned}
\nu(\nu-1)\gamma_{\nu-2} - 2\nu + 1 &= \nu(\nu-1) \left[\gamma_{\nu-2} - \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu} \right] \\
&= \nu(\nu-1) \left[\lg \frac{\beta}{2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\nu-2} \right) - \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu} \right] \\
&= \nu(\nu-1) \left[\lg \frac{\beta}{2} - \sum \frac{1}{\nu} \right] \\
&= \nu(\nu-1)\gamma_\nu.
\end{aligned}$$

Wir haben dann:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_\xi &= -\frac{2b^2\pi J_0}{a^2} \left[\left(1 + c_2 2\gamma_2 + c_4 \cdot 1 + c_6 \frac{1}{2} + c_8 \frac{1}{3} + \dots + c_\nu \frac{1}{\frac{\nu-2}{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi^2}{a^2} \cdot 6 \left(\frac{1}{2} - c_2 \cdot 1 + c_4 2\gamma_4 + c_6 \cdot 1 + c_8 \cdot \frac{1}{2} + \dots + c_\nu \frac{1}{\frac{\nu-4}{2}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Tabelle 19.

	1	$\frac{\xi_3}{S} \frac{S^3}{a^3}$	$\frac{\xi_4}{S} \frac{S^4}{a^4}$	$\frac{\xi_5}{S} \frac{S^5}{a^5}$	$\frac{\xi_6}{S} \frac{S^6}{a^6}$	$\frac{\xi_7}{S} \frac{S^7}{a^7}$	$\frac{\xi_{\nu-2}}{S} \frac{S^{\nu-2}}{a^{\nu-2}}$	$\frac{\xi_{\nu}}{S} \frac{S^{\nu}}{a^{\nu}}$	$\frac{\xi_{\nu+2}}{S} \frac{S^{\nu+2}}{a^{\nu+2}}$	$\frac{\xi_{\sigma}}{S} \frac{S^{\sigma}}{a^{\sigma}}$
D_2	$\gamma_0 - 1$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{9}{8}$	\dots	$-\frac{\nu-1}{\nu-2}$	$-\frac{\nu+1}{\nu}$	$-\frac{\nu+3}{\nu+2}$	$-\frac{\sigma+1}{\sigma}$
D_4	$\frac{1}{2}$	$3\gamma_2 - 1$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{9}{6}$	\dots	$-\frac{\nu-1}{\nu-4}$	$-\frac{\nu+1}{\nu-2}$	$-\frac{\nu+3}{\nu}$	$-\frac{\sigma+1}{\sigma-2}$
D_6	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$5\gamma_4 - 1$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{4}$	\dots	$-\frac{\nu-1}{\nu-6}$	$-\frac{\nu+1}{\nu-4}$	$-\frac{\nu+3}{\nu-2}$	$-\frac{\sigma+1}{\sigma-4}$
D_8	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$7\gamma_6 - 1$	$-\frac{9}{2}$	\dots	$-\frac{\nu-1}{\nu-8}$	$-\frac{\nu+1}{\nu-6}$	$-\frac{\nu+3}{\nu-4}$	$-\frac{\sigma+1}{\sigma-6}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$D_{\nu-2}$	$\frac{1}{\nu-4}$	$\frac{3}{\nu-6}$	$\frac{5}{\nu-8}$	$\frac{7}{\nu-10}$	$\frac{9}{\nu-12}$	\dots	$\frac{\nu-1}{2}$	$-\frac{\nu+1}{4}$	$-\frac{\nu+3}{6}$	$-\frac{\sigma+1}{\sigma-\nu+4}$
D_{ν}	$\frac{1}{\nu-2}$	$\frac{3}{\nu-4}$	$\frac{5}{\nu-6}$	$\frac{7}{\nu-8}$	$\frac{9}{\nu-10}$	\dots	$(\nu-1)\gamma_{\nu-2} - 1$	$-\frac{\nu+1}{2}$	$-\frac{\nu+3}{4}$	$-\frac{\sigma+1}{\sigma-\nu+2}$
$D_{\nu+2}$	$\frac{1}{\nu}$	$\frac{3}{\nu-2}$	$\frac{5}{\nu-4}$	$\frac{7}{\nu-6}$	$\frac{9}{\nu-8}$	\dots	$\frac{\nu-1}{2}$	$(\nu+1)\gamma_{\nu} - 1$	$-\frac{\nu+3}{2}$	$-\frac{\sigma+1}{\sigma-\nu}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
D_{τ}	$\frac{1}{\tau-2}$	$\frac{3}{\tau-4}$	$\frac{5}{\tau-6}$	$\frac{7}{\tau-8}$	$\frac{9}{\tau-10}$	\dots	$\frac{\nu-1}{\tau-\nu}$	$\frac{\nu+1}{\tau-\nu-2}$	$\frac{\nu+3}{\tau-\nu-4}$	$-\frac{\sigma+1}{\tau-\sigma-2}$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\xi^4}{a^4} 15 \left(\frac{1}{3} - c_2 \frac{1}{2} - c_4 \cdot 1 + c_6 \cdot 2 \gamma_6 + c_8 \cdot 1 + \dots + c_\nu \frac{1}{\frac{\nu-6}{2}} \right) + \dots \\
 & + \frac{\xi^{\nu-2}}{a^{\nu-2}} \frac{(\nu-1)\nu}{2} \left(\frac{1}{\frac{\nu}{2}} - c_2 \frac{1}{\frac{\nu-2}{2}} - c_4 \frac{1}{\frac{\nu-4}{2}} - c_6 \frac{1}{\frac{\nu-6}{2}} \right. \\
 & \left. - c_8 \frac{1}{\frac{\nu-8}{2}} + \dots + c_\nu \cdot 2 \gamma_\nu \right) \\
 & + \frac{\xi^\nu (\nu+1)(\nu+2)}{a^\nu} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{\nu+2}{2}} - c_2 \frac{1}{\frac{\nu}{2}} - c_4 \frac{1}{\frac{\nu-2}{2}} - c_6 \frac{1}{\frac{\nu-4}{2}} \right. \\
 & \left. - c_8 \frac{1}{\frac{\nu-6}{2}} - \dots - c_\nu \cdot 1 + \dots \right) \Big].
 \end{aligned}$$

Oder, wenn wir endlich wieder $\nu = 2n$ setzen; ferner statt $c_2, c_4, c_6 \dots c_{2n}$ schreiben $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ und statt $2\gamma_2, 2\gamma_4, 2\gamma_6 \dots 2\gamma_{2n}$ schreiben $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathfrak{G}_5 = - \frac{2b^2 \pi J_0}{a^2} & \left[\left(1 + C_1 q_1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \frac{1}{2} \right. \right. \\
 & + C_4 \cdot \frac{1}{3} + \dots + C_n \frac{1}{n-1} \Big) \\
 & + \frac{\xi^2}{a^2} \cdot 6 \left(\frac{1}{2} - C_1 \cdot 1 + C_2 q_2 + C_3 \cdot 1 \right. \\
 & + C_4 \frac{1}{2} + \dots + C_n \frac{1}{n-2} \Big) \\
 & + \frac{\xi^4}{a^4} \cdot 15 \left(\frac{1}{3} - C_1 \frac{1}{2} - C_2 \cdot 1 + C_3 q_3 \right. \\
 & + C_4 \cdot 1 + \dots + C_n \frac{1}{n-3} \Big) + \dots \\
 & + \frac{\xi^{2n-2}}{a^{2n-2}} \frac{(2n-1)2n}{2} \left(\frac{1}{n} - C_1 \frac{1}{n-1} \right. \\
 & - C_2 \frac{1}{n-2} - C_3 \frac{1}{n-3} - C_4 \frac{1}{n-4} - \dots + C_n q_n \Big) \\
 & + \frac{\xi^{2n}}{a^{2n}} \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} \left(\frac{1}{n+1} - C_1 \frac{1}{n} \right. \\
 & \left. \left. - C_2 \frac{1}{n-1} - C_3 \frac{1}{n-2} - C_4 \frac{1}{n-3} - \dots - C_n \cdot 1 \right) + \dots \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (94 \text{ b})$$

Die entmagnetisierende Feldstärke ist hiermit als Funktion des Ortes in den zunächst noch unbestimmten Koeffizienten $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ dargestellt, die ihrerseits zur Darstellung der Magnetisierung J als Funktion des Ortes dienen sollen.

Somit ist die wahre Feldstärke an der Stelle ξ

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_a - \frac{2b^2\pi J_0}{a^2} \left[E_0 + E_1 \frac{\xi^2}{a^2} + E_2 \frac{\xi^4}{a^4} + \dots + E_n \frac{\xi^{2n}}{a^{2n}} \right] \cdot \dots \quad (95)$$

wenn wir die äußere Feldstärke mit \mathfrak{H}_a und die Koeffizienten von $1, \frac{\xi^2}{a^2}, \frac{\xi^4}{a^4}$ usf. in Gleichung (94 b) mit $E_0, E_1, E_2 \dots$ bezeichnen.

Nach Definition ist aber:

$$J = \kappa \mathfrak{H},$$

und zwar für jede Stelle ξ , also:

$$\left. \begin{aligned} J_\xi &= J_0 \left(1 - C_1 \frac{\xi^2}{a^2} - C_2 \frac{\xi^4}{a^4} - \dots - C_n \frac{\xi^{2n}}{a^{2n}} \right) \\ &= \kappa \mathfrak{H}_a - \kappa \frac{2b^2\pi J_0}{a^2} \left(E_0 + E_1 \frac{\xi^2}{a^2} + E_2 \frac{\xi^4}{a^4} + \dots + E_n \frac{\xi^{2n}}{a^{2n}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Die Koeffizienten beider Darstellungen müssen dieselben sein, also ist:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad J_0 &= \kappa \mathfrak{H}_a - \kappa \frac{2b^2\pi J_0}{a^2} E_0, \\ 2. \quad C_1 &= \kappa \frac{2b^2\pi}{a^2} E_1, \\ 3. \quad C_2 &= \kappa \frac{2b^2\pi}{a^2} E_2, \\ 4. \quad C_3 &= \kappa \frac{2b^2\pi}{a^2} E_3, \\ n+1. \quad C_n &= \kappa \frac{2b^2\pi}{a^2} E_n. \end{aligned} \right\} \cdot \dots \dots \dots (97)$$

Die Konstanten C_1, C_2 bis C_n lassen sich demnach aus den Gleichungen 2 bis $n+1$ berechnen, und zwar um so genauer, je höher wir n wählen. Die Gleichung 1 können wir auch in der Form schreiben:

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_a - \frac{2b^2\pi}{a^2} E_0 J_0.$$

Da jedoch nach Definition für die Äquatorialebene

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_a - N_0 J_0,$$

so folgt:

$$N_0 = \frac{2b^2\pi}{a^2} E_0 \dots \dots \dots (98)$$

Zusammenfassend sei das Ergebnis explizite angeschrieben:

Ist die Suszeptibilität κ gegeben, so kann die Verteilung der Magnetisierung in einem Kreiszyylinder der halben Länge a und des Halbmessers b in der Form dargestellt werden:

$$J = J_0 \left(1 - C_1 \frac{\xi^2}{a^2} - C_2 \frac{\xi^4}{a^4} - C_3 \frac{\xi^6}{a^6} - \dots - C_n \frac{\xi^{2n}}{a^{2n}} - \dots \right).$$

Hierbei sind die Koeffizienten $C_1, C_2, C_3, \dots C_n \dots$ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad C_1 &= 12\lambda \left(\frac{1}{2} - C_1 \cdot 1 + C_2 \varrho_2 + C_3 + C_4 \frac{1}{2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + C_n \frac{1}{n-2} + \dots \right), \\ 2. \quad C_2 &= 30\lambda \left(\frac{1}{3} - C_1 \frac{1}{2} - C_2 \cdot 1 + C_3 \varrho_3 + C_4 \cdot 1 + \dots \right. \\ &\quad \left. + C_n \frac{1}{n-3} + \dots \right), \\ 3. \quad C_3 &= 56\lambda \left(\frac{1}{4} - C_1 \frac{1}{3} - C_2 \frac{1}{2} - C_3 + C_4 \varrho_4 + \dots \right. \\ &\quad \left. + C_n \frac{1}{n-4} + \dots \right), \\ 4. \quad C_4 &= 90\lambda \left(\frac{1}{5} - C_1 \frac{1}{4} - C_2 \frac{1}{3} - C_3 \frac{1}{2} - C_4 + \dots \right. \\ &\quad \left. + C_n \frac{1}{n-5} + \dots \right), \\ \vdots & \\ n-1. \quad C_{n-1} &= (2n-1)2n\lambda \left(\frac{1}{n} - C_1 \frac{1}{n-1} - C_2 \frac{1}{n-2} \right. \\ &\quad \left. - C_3 \frac{1}{n-3} - C_4 \frac{1}{n-4} + \dots + C_n \varrho_n + \dots \right), \\ n) \quad C_n &= (2n+1)(2n+2)\lambda \left(\frac{1}{n+1} - C_1 \frac{1}{n} - C_2 \frac{1}{n-1} \right. \\ &\quad \left. - C_3 \frac{1}{n-2} - C_4 \frac{1}{n-3} + \dots - C_n \cdot 1 + \dots \right), \end{aligned} \right\} (97a)$$

wobei

$$\lambda = \frac{b^2\pi}{a^2} \cdot \kappa$$

und

$$q_n = 2\gamma_{2n} = 2\left[\lg \frac{2}{\beta} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right)\right].$$

Der Entmagnetisierungsfaktor N_0 ist bestimmt durch die Gleichung:

$$N_0 = 2\beta^2\pi \left(1 + C_1 q_1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \frac{1}{2} + \dots + C_n \frac{1}{n-1}\right). \quad (98a)$$

Die hier gegebene Lösung des Problems ist nichts anderes als die näherungsweise Lösung einer Integralgleichung, wie deutlich wird, wenn man den Gang der Überlegung in allgemeineren Symbolen wiederholt: Die Magnetisierung sei durch die Form $J(x)$ dargestellt. Dann ist $-b^2\pi \frac{dJ(x)}{dx} dx$ die freie Belegung an der Stelle x . Sie erzeugt an der Stelle ξ das entmagnetisierende

Feld $\frac{+b^2\pi \frac{dJ(x)}{dx} dx (x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + b^2]^{3/2}}$ in der Richtung der X-Achse; allgemein ist dieses Feld $+b^2\pi J'(x)f(x, \xi) dx$. Das von allen Punkten des Zylinders an der Stelle ξ erzeugte Feld erhält man, wenn man diesen Ausdruck von $-a$ bis $+a$ integriert und noch das von den freien Endbelegungen erzeugte Feld addiert. Letzteres ist $-b^2\pi J(a) \left[\frac{1}{(a-\xi)^2} + \frac{1}{(a+\xi)^2} \right]$, d. h. es ist nicht von der Integrationsvariablen x abhängig. Wir können es mit $b^2\pi \varphi(\xi)$ bezeichnen. Also ist das entmagnetisierende Feld an der Stelle ξ

$$\mathfrak{S}_\xi = +b^2\pi \left[\int_{-a}^{+a} J'(x) f(x, \xi) dx + \varphi(\xi) \right].$$

Nach Definition ist

$$J(\xi) = \kappa \mathfrak{S} = \kappa (\mathfrak{S}_a - \mathfrak{S}_\xi),$$

also gilt:

$$J(\xi) = \kappa \mathfrak{S}_a + \kappa b^2\pi \left(\int_{-a}^{+a} J'(x) f(x, \xi) dx + \varphi(\xi) \right). \quad (99)$$

Die Lösung für $J(\xi)$ in Form einer geraden Potenzreihe in ξ ist in den Gleichungen (97) bzw. (97a) gegeben.

Zur Berechnung der Größen N , C_1 , C_2 , ... C_n im einzelnen schreiben wir das Gleichungssystem (97a) und (98a) in folgender Form an:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{N_0}{2\beta^2\pi} - C_1 q_1 - C_2 \cdot 1 - C_3 \cdot \frac{1}{2} - C_4 \cdot \frac{1}{3} - \dots - C_n \frac{1}{n-1} &= 1, \\
 C_1 \left(1 + \frac{1}{12\lambda}\right) - C_2 q_2 - C_3 \cdot 1 - C_4 \cdot \frac{1}{2} - \dots - C_n \frac{1}{n-2} &= \frac{1}{2}, \\
 C_1 \frac{1}{2} + C_2 \left(1 + \frac{1}{30\lambda}\right) - C_3 q_3 - C_4 \cdot 1 - \dots - C_n \frac{1}{n-3} &= \frac{1}{3}, \\
 C_1 \frac{1}{3} + C_2 \frac{1}{2} + C_3 \left(1 + \frac{1}{56\lambda}\right) - C_4 q_4 - \dots - C_n \frac{1}{n-4} &= \frac{1}{4}, \\
 \vdots \\
 C_1 \frac{1}{n-1} + C_2 \frac{1}{n-2} + C_3 \frac{1}{n-3} + C_4 \frac{1}{n-4} + \dots - C_n q_n &= \frac{1}{n}, \\
 \\
 C_1 \frac{1}{n} + C_2 \frac{1}{n-1} + C_3 \frac{1}{n-2} + C_4 \frac{1}{n-4} + \dots \\
 + C_n \left[1 + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)\lambda}\right] &= \frac{1}{n+1} \text{)} \quad (100)
 \end{aligned} \right\}$$

Die Lösungen für die beiden ersten Unbekannten sind auf S. 89 gegeben, für C_2 hätte man die zweite, für C_3 die dritte usw. Vertikalreihe der Nennerdeterminante durch die Vertikalreihe der Glieder rechts zu ersetzen.

15. Numerische Auswertung der Integralgleichung für die Verteilung der Magnetisierung im Kreiszyylinder und Berechnung des Entmagnetisierungsfaktors.

a) Verteilung und Entmagnetisierungsfaktor für

$$\kappa = \infty.$$

Von besonderem Interesse ist zunächst, die Verteilung für sehr große Suszeptibilitäten zu berechnen, denn erstens ist beim Maximum der Suszeptibilität nach den Gumlich'schen Versuchen das Minimum des Polabstandes gelegen und deshalb das Maximum des Entmagnetisierungsfaktors zu erwarten, zweitens aber entsprechen die nach der Erschütterungsmethode bestimmten Ent-

¹⁾ Wir schreiben im folgenden η für $(2n+1)(2n+2)$.

magnetisierungsfaktoren der idealen Magnetisierungskurve, d. h. der Suszeptibilität Unendlich.

Wir setzen also in dem Gleichungssystem (100) die Größe λ gleich Unendlich und erhalten so das folgende Schema. Da es von Wert ist, die Konstanten C_1, C_2 explizite auszurechnen, lassen wir hierbei die Gleichung für N_0 fort und berechnen N_0 nachträglich aus Gleichung (98 a), die übrigens nichts anderes als die Entwicklung der Lösung Gleichung (101) nach der ersten Horizontalreihe ist.

C_1	C_2	C_3	C_4	$C_5 \dots C_{n-1}$	C_n	A	}	
1	$-q_2$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{n-3}$	$-\frac{1}{n-2}$		$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$-q_3$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{n-4}$	$-\frac{1}{n-3}$		$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$-q_4$	-1	$-\frac{1}{n-5}$	$-\frac{1}{n-4}$		$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$-q_5$	$-\frac{1}{n-6}$	$-\frac{1}{n-5}$		$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{n-7}$	$-\frac{1}{n-6}$		$\frac{1}{6}$
\vdots								
$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{n-4}$	$\frac{1}{n-5}$	1	q_n		$\frac{1}{n}$
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{n-4}$	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{n+1}$

Die Konstanten q_n haben folgende Werte:

$q_1 = 6,210\ 34$	$q_{11} = 1,828\ 72$	}	. . . (102)
$q_2 = 5,043\ 68$	$q_{12} = 1,658\ 42$		
$q_3 = 4,310\ 34$	$q_{13} = 1,501\ 50$		
$q_4 = 3,774\ 62$	$q_{14} = 1,356\ 00$		
$q_5 = 3,352\ 40$	$q_{15} = 1,220\ 38$		
$q_6 = 3,003\ 92$	$q_{16} = 1,093\ 36$		
$q_7 = 2,707\ 22$	$q_{17} = 0,973\ 94$		
$q_8 = 2,448\ 88$	$q_{18} = 0,861\ 24$		
$q_9 = 2,220\ 12$	$q_{19} = 0,754\ 54$		
$q_{10} = 2,014\ 86$	$q_{20} = 0,653\ 26$		

wenn wir die Berechnung wieder für den Fall $\beta = \frac{1}{50}$ durchführen.

Aus den Konstanten $C_1, C_2, \dots C_n$ ergibt sich dann der Entmagnetisierungsfaktor mittels:

$$N_0 = 0,015\ 608\ C_1 + 0,002\ 513\ 3 \left[1 + C_2 + \frac{1}{2} C_3 + \frac{1}{3} C_4 + \dots \frac{1}{n-1} C_n + \dots \right]. \quad (103)$$

Natürlich läßt sich für N_0 nur ein Näherungswert finden, der aber um so genauer wird, je mehr Konstante C_n berücksichtigt werden. Im wesentlichen kommt es auf den Wert von C_1 an, doch wird C_1 gleichfalls um so richtiger, je größer die Zahl der Gleichungen ist, die man zur Berechnung von C_1 benutzt.

In der Tabelle 20 sind die Werte der $C_1, C_2, \dots C_n$ zusammengestellt, die sich aus dem Gleichungssystem ergeben, wenn man nacheinander eine, zwei, drei usw. Gleichungen zur Berechnung benutzt.

Tabelle 20.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
0,500 00	—	—	—	—	—	—	—
0,619 34	0,023 66	—	—	—	—	—	—
0,674 80	0,032 95	0,008 60	—	—	—	—	—
0,706 55	0,038 05	0,012 41	0,004 47	—	—	—	—
0,726 92	0,041 22	0,014 70	0,006 69	0,002 73	—	—	—
0,740 92	0,043 39	0,016 22	0,007 90	0,004 09	0,001 94	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
0,758 93	0,046 14	0,018 11	0,009 49	0,005 62	0,003 47	0,002 11	0,001 15

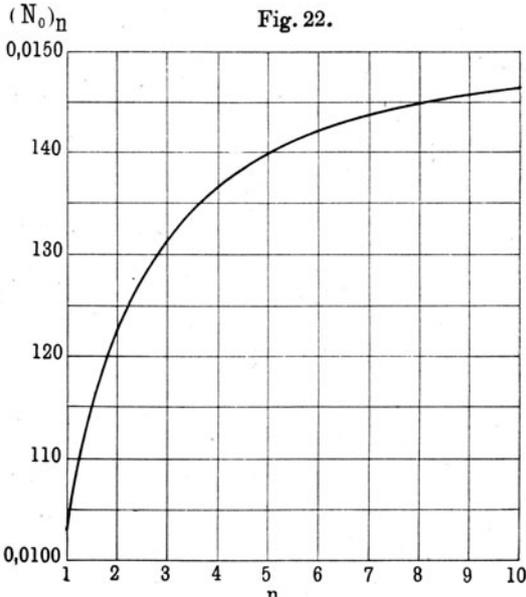
Wie man sieht, sind alle Konstanten positiv und werden mit wachsendem Index immer kleiner. Jede Konstante strebt einem Grenzwert für $n = \infty$ zu.

Berechnet man aus den gefundenen Werten nach Gleichung (103) N_0 , so ergibt sich folgende Reihe:

$$\left. \begin{aligned} (N_0)_1 &= 0,007\ 804 + 0,002\ 513 \cdot 1,0000 = 0,010\ 32 \\ (N_0)_2 &= 0,009\ 667 + 0,002\ 513 \cdot 1,0237 = 0,012\ 27 \\ (N_0)_3 &= 0,010\ 532 + 0,002\ 513 \cdot 1,0373 = 0,013\ 14 \\ (N_0)_4 &= 0,011\ 028 + 0,002\ 513 \cdot 1,0458 = 0,013\ 66 \\ (N_0)_5 &= 0,011\ 345 + 0,002\ 513 \cdot 1,0515 = 0,013\ 99 \\ (N_0)_6 &= 0,011\ 564 + 0,002\ 513 \cdot 1,0555 = 0,014\ 22 \\ \text{—} & \quad \text{—} \quad \text{—} \quad \text{—} \\ (N_0)_8 &= 0,011\ 845 + 0,002\ 513 \cdot 1,0610 = 0,014\ 51 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Der Entmagnetisierungsfaktor des Kreiszyinders $\beta = \frac{1}{50}$ ist demnach jedenfalls größer als 0,0145; der experimentell gefundene Wert betrug (vgl. Tabelle 10) nach Shuddemagen 0,0144 bzw. 0,0160, nach Würschmidt 0,0153; die Übereinstimmung ist also eine recht gute.

In Fig. 22 sind die Werte $(N_0)_n$ für $n = 1, 2, 3 \dots$ als Funktion von n aufgetragen; demnach scheint der Grenzwert für $n = \infty$ noch etwas unterhalb 0,0150 zu liegen.



Wir können diesen Grenzwert noch etwas genauer bestimmen, auch ohne die sehr langwierigen Determinanten Gleichung (101) für $n > 8$ aufzulösen, wenn wir von folgender Überlegung Gebrauch machen.

Wie man leicht sieht, ist der Wert von N_0 wesentlich durch den Wert von C_1 und die bereits ausgerechneten Konstanten von Gleichung (103) bestimmt, d. h. läßt man in Gleichung (103) die Glieder mit $C_2, C_3 \dots$ fort, so hat man schon einen guten Näherungswert, wenn nur C_1 genau genug angenähert ist. So ergibt sich z. B. für $(N_0)_8$ der Näherungswert

$$(\bar{N}_0)_8 = 0,014\ 368 \dots \dots \dots (105)$$

der von dem genauen Wert

$$(N_0)_8 = 0,014\ 512$$

um weniger als 1 Proz. abweicht. Benutzt man aber zur Auswertung von N_1 nur die Form

$$N_0 = 2\beta^2\pi(1 + \varrho_1 C_1) \dots \dots \dots (98\ b)$$

so heißt das, daß man in der Determinante sich mit den beiden ersten Gliedern bei der Entwicklung nach der ersten Horizontalreihe begnügt und die anderen Glieder vernachlässigt.

Näherungsweise können wir also an Stelle des Schemas (100 a) das folgende setzen, das für die numerische Rechnung bedeutend angenehmer ist:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_n	C_{n-1}	A	}	. . . (106)
1	$-\varrho_2$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{2}$	1	$-\varrho_3$	0	0	0	$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\varrho_4$	0	0	$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$		
⋮								
1	1	1	1			$\frac{1}{n}$		
$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{n-4}$	1	ϱ_n	$\frac{1}{n}$		
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{n+1}$		

Daß die Übereinstimmung der aus diesem System berechneten $\overline{C}_1, \overline{C}_2 \dots$ mit den oben gefundenen $C_1, C_2 \dots$ eine recht gute ist, zeigt die folgende Tabelle 21, in der wir unter die genauen Werte von Tabelle 20 die angenäherten Werte $\overline{C}_1, \overline{C}_2 \dots$ gesetzt haben (in Klammern).

Man kann nun das Gleichungssystem (106) in folgender Form schreiben, wobei wir, da es sich um Näherungswerte handelt, \overline{C} schreiben wollen:

$\varrho_2 \overline{C}_2 = -\frac{1}{2} + \overline{C}_1,$	}	(106 a)
$\varrho_3 \overline{C}_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \overline{C}_1 + \overline{C}_2,$		
$\varrho_4 \overline{C}_4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \overline{C}_1 + \frac{1}{2} \overline{C}_2 + \overline{C}_3,$		
⋮		
$\varrho_n \overline{C}_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \overline{C}_1 + \frac{1}{n-2} \overline{C}_2 + \dots + \frac{1}{2} \overline{C}_{n-2} + \overline{C}_{n-1}.$		

Setzt man für \overline{C}_1 verschiedene Werte ein, so kann man nacheinander $\overline{C}_2, \overline{C}_3 \dots$ berechnen. Wird nun irgend ein C_i gleich

Tabelle 21.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
0,500 00	—	—	—	—	—	—	—
(0,500 00)	—	—	—	—	—	—	—
0,619 34	0,023 66	—	—	—	—	—	—
(0,619 34)	(0,023 66)	—	—	—	—	—	—
0,674 80	0,032 95	0,008 60	—	—	—	—	—
(0,672 70)	(0,034 24)	(0,008 64)	—	—	—	—	—
0,706 55	0,038 05	0,012 41	0,004 47	—	—	—	—
(0,701 70)	(0,039 99)	(0,013 34)	(0,004 57)	—	—	—	—
0,726 92	0,041 22	0,014 70	0,006 69	0,002 73	—	—	—
(0,719 22)	(0,043 46)	(0,016 18)	(0,007 33)	(0,002 90)	—	—	—
0,740 92	0,043 39	0,016 22	0,007 90	0,004 09	0,001 94	—	—
(0,730 48)	(0,045 69)	(0,018 00)	(0,009 09)	(0,004 75)	(0,002 06)	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—
0,758 92	0,046 14	0,018 11	0,009 49	0,005 62	0,003 47	0,002 11	0,001 15
(0,743 18)	(0,048 21)	(0,020 06)	(0,011 00)	(0,006 86)	(0,004 37)	(0,002 65)	(0,001 27)

Null, so wird C_{i+1} negativ, und die Größen C_{i+2}, C_{i+3}, \dots sind alle negativ und wachsen immer mehr und mehr. Dies ist der Fall, wenn wir C_1 zu klein gewählt haben. Wird aber kein C_i negativ, so tritt ein Minimum der C auf, z. B. bei dem Werte C_n , dann wird $C_{n+1} > C_n$, $C_{n+2} > C_{n+1}$, d. h. die Konstanten werden immer größer. Dies ist der Fall, wenn C_1 zu groß gewählt wurde. Für das richtige C_1 fällt der Nullwert der C_i ins Unendliche. Die folgende Tabelle 22 enthält die Werte der C_i , die sich für verschiedene C_1 ergeben; wenn irgend ein C_i negativ wurde, so wurde die Reihe abgebrochen, da die Weiterführung nichts liefert. Dabei wurde so vorgegangen, daß zuerst $C_1 = 0,5$, dann $C_1 = 1,0$, hierauf $= 0,6$ und $= 0,9$ usw. gesetzt wurde; wir geben jedoch der besseren Übersichtlichkeit halber die Anordnung nach wachsenden Werten von C_1 . Der Minimalwert ist fett gedruckt.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß der Wert $\bar{C}_1 = 0,75$ noch etwas zu klein, der Wert $\bar{C}_1 = 0,76$ dagegen schon zu groß ist, in Fig. 23 ist der Verlauf der \bar{C}_i -Werte von $i = 2$ an für die verschiedenen Werte von \bar{C}_1 gekennzeichnet, wobei als Abszissen die Ordnungszahlen i der C_i gewählt wurden. Man sieht jetzt auch, daß die oben aus der achtreihigen Determinante berechneten Werte für die C_1 bis C_8 einfach dem Falle $C_9 = 0$ entsprechen.

Tabelle 22.

\bar{C}_1	0,500 00	0,600 00	0,700 00	0,750 00	0,760 00	0,770 00	0,800 00	0,900 00	1,000 00
\bar{C}_2	0	0,019 88	0,039 65	0,049 57	0,051 55	0,053 53	0,059 48	0,079 31	0,099 13
\bar{C}_3	< 0	< 0	0,013 07	0,021 17	0,022 79	0,024 41	0,029 27	0,045 57	0,061 17
\bar{C}_4	"	"	0,004 30	0,012 17	0,013 75	0,015 32	0,020 05	0,035,80	0,051 55
\bar{C}_5	"	"	< 0	0,007 99	0,009 64	0,011 30	0,016 26	0,032 80	0,049 34
\bar{C}_6	"	"	"	0,005 62	0,007 43	0,009 26	0,014 69	0,032 96	0,051 21
\bar{C}_7	"	"	"	0,004 07	0,006 15	0,008 24	0,014 14	0,035 34	0,056 19
\bar{C}_8	"	"	"	0,002 95	0,005 40	0,007 57	0,015 09	0,039,85	0,064 45
\bar{C}_9	"	"	"	0,002 04	0,005 03	0,007 87	> 0,015 09	> 0,039 85	> 0,064 45
\bar{C}_{10}	"	"	"	0,001 22	0,004 96	> 0,008 02	"	"	"
\bar{C}_{11}	"	"	"	0,000 37	0,005 19	"	"	"	"
\bar{C}_{12}	"	"	"	< 0	> 0,005 19	"	"	"	"
\bar{C}_{13}	"	"	"	"	"	"	"	"	"

Tabelle 23.

	I	II	I	II	I	II	I	II
\bar{C}_1	0,755 000	0,750 000	0,004 171 3	0,002 947 1	0,003 064 4	0,002 975 1	0,003 064 4	—
\bar{C}_2	0,050 558	0,049 557	0,003 531 4	0,002 040 9	0,003 884 6	—	0,003 884 6	—
\bar{C}_3	0,021 977	0,021 167	0,003 086 4	0,001 217 5	0,005 589 0	—	0,005 589 0	—
\bar{C}_4	0,012 961	0,012 174	0,002 787 6	0,000 368 7	0,009 139 6	—	0,009 139 6	—
\bar{C}_5	0,008 815 6	0,007 988 4	0,002 615 6	—	0,017 028	—	0,017 028	—
\bar{C}_6	0,006 522 9	0,005 611 4	0,002 574 9	—	0,036 088	—	0,036 088	—
\bar{C}_7	0,005 098 0	0,004 067 6	0,002 701 8	—				
					\bar{C}_{15}			
					\bar{C}_{16}			
					\bar{C}_{17}			
					\bar{C}_{18}			
					\bar{C}_{19}			
					\bar{C}_{20}			

Fig. 23.

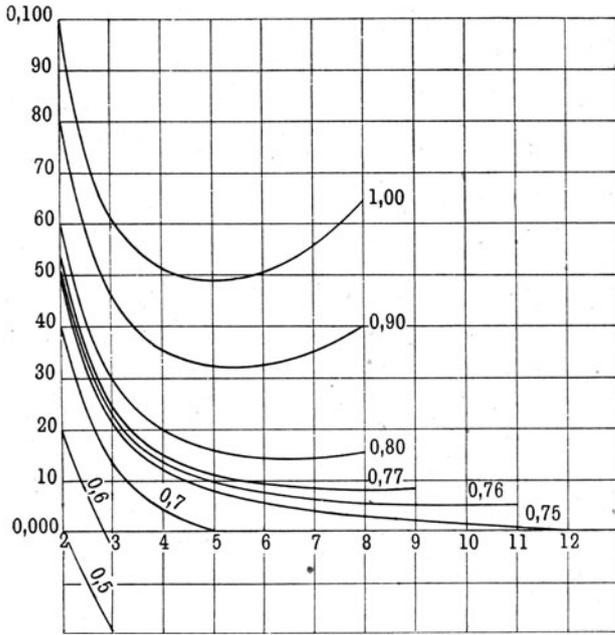
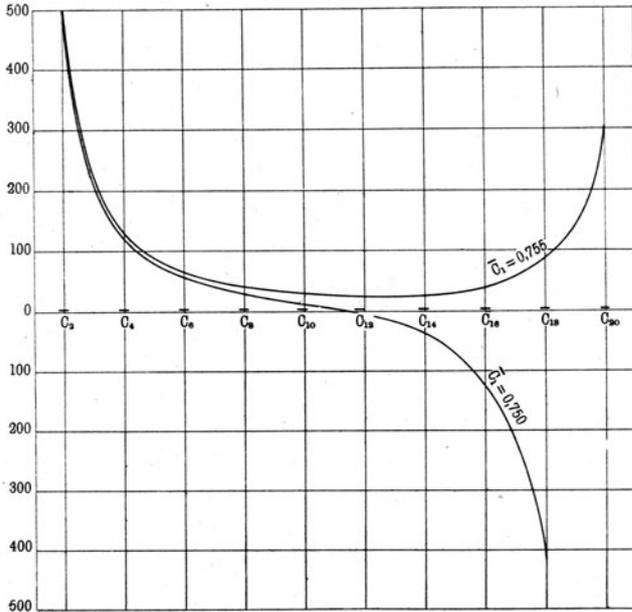


Fig. 24.



Nun berechnen wir noch die beiden Fälle $\bar{C}_1 = 0,755\ 00$ und $\bar{C}_1 = 0,750\ 00$ bis zur 20. Konstanten; das Ergebnis enthält Tabelle 23 und Fig. 24.

Da nach Gleichung (106 a) \bar{C}_n eine lineare Funktion von \bar{C}_1 ist, und umgekehrt, so folgt, wenn wir für den Augenblick einen beliebigen Wert von \bar{C}_n bzw. \bar{C}_1 mit x bzw. y , und die gefundenen Werte mit x_1, y_1 sowie x_2, y_2 bezeichnen:

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ y_1 &= ax_1 + b, \\ y_2 &= ax_2 + b, \end{aligned}$$

d. h. für $\bar{C}_n = x = 0$

$$\bar{C}_1 = y = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} = y_2 + (y_2 - y_1) \frac{x_2}{x_1 - x_2},$$

also

$$\bar{C}_1 = 0,750\ 00 + 0,005\ 00 \frac{(\bar{C}_n)_{II}}{(\bar{C}_n)_I - (\bar{C}_n)_{II}}.$$

Berechnet man hiernach \bar{C}_1 für $(\bar{C}_n)_I = 0,036\ 088$ und $(\bar{C}_n)_{II} = -0,188\ 07$, so ergibt sich $\bar{C}_1 = 0,754\ 20$, damit haben wir den Wert von \bar{C}_1 für $\bar{C}_{20} = 0$, d. h. den Wert, der sich durch Auflösung der 19reihigen Determinante ergeben würde¹⁾. Wir können somit sagen, der Wert für $n = \infty$ von \bar{C}_1 ist noch größer als $0,754\ 20$; dagegen ist oben gezeigt, daß er kleiner als $0,755\ 00$ ist.

Wir wählen als wahrscheinlichen Wert $\bar{C}_1 = 0,754\ 50$ und erhalten mit diesem Werte:

$$\begin{aligned} \bar{C}_2 &= 0,050\ 459, \\ \bar{C}_3 &= 0,021\ 896, \\ \bar{C}_4 &= 0,012\ 833 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Nun vergleichen wir nochmals die Werte für $(C_1)_n$ mit denen für $(\bar{C}_1)_n$ nach Tabelle 21 (vgl. die folgende Tabelle 24), und bestimmen die Abweichung der Größen $(\bar{C}_1)_n$ von den $(C_1)_n$ in Prozenten. Tragen wir die prozentualen Abweichungen als Funktionen von $(\bar{C}_1)_n$ in einer Kurve auf (Fig. 25), so ergibt sich durch Extrapolation, daß dem Werte $\bar{C}_1 = 0,754\ 50$ eine Abweichung

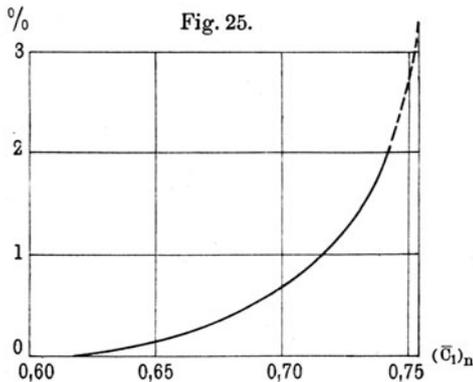
¹⁾ Man kann leicht nach diesem Verfahren die vorhergehenden Näherungen berechnen und so die Richtigkeit der in Tabelle 22 angegebenen (eingeklammerten) Werte nachprüfen.

von 3,25 bis 3,50 Proz. entsprechen muß, daß wir also zu setzen haben:

$$C_1 = 0,780.$$

Tabelle 24.

n	$(C_1)_n$	$(\bar{C}_1)_n$	Differenz	Abweichung in Proz.
2	0,619 34	0,619 34	0	0
3	0,674 80	0,672 70	0,002 10	0,31
4	0,706 55	0,701 70	0,004 85	0,69
5	0,726 92	0,719 22	0,007 70	1,06
6	0,740 92	0,730 43	0,010 49	1,42
8	0,758 93	0,743 18	0,015 75	2,08
∞	—	0,754 50	—	—



Die Konstante $(\bar{C}_2)_n$ ist für größere n um rund 0,002 größer als $(C_2)_n$; wir nehmen deshalb auch in der Grenze:

$$C_2 = \bar{C}_2 - 0,002 = 0,048.$$

Ebenso finden wir

$$C_3 = 0,020,$$

$$C_4 = 0,011,$$

$$C_5 = 0,006,$$

d.h. die Verteilung der Magnetisierung ist für sehr große Suszeptibilität in dem Kreiszyylinder $\beta = 1/50$ durch die Form dargestellt:

$$J = J_0 \left(1 - 0,78 \frac{\xi^2}{a^2} - 0,048 \frac{\xi^4}{a^4} - 0,020 \frac{\xi^6}{a^6} - 0,011 \frac{\xi^8}{a^8} - 0,006 \frac{\xi^{10}}{a^{10}} - \dots \right).$$

Der Entmagnetisierungsfaktor ist:

$$N_0 = 0,01485,$$

ein Wert, der mit dem experimentell gefundenen auf 3 Proz. übereinstimmt.

Die mittlere Magnetisierung J_m ergibt sich aus

$$J_m = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} J d\xi \text{ zu}$$

$$J_m = J_0 \cdot 0,726.$$

Hat man also die Magnetisierung magnetometrisch bestimmt, so sind die Werte im Verhältnis 1:0,726 zu vergrößern, um die (ballistische) Magnetisierung J_0 zu erhalten.

b) Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors vom Dimensionsverhältnis.

Die Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors N_0 vom Dimensionsverhältnis ist, wie Gleichung (98a) zeigt, im wesentlichen durch den Faktor $2\beta^2\pi$ bestimmt, doch kommt es auch noch auf den Wert des Klammersausdrucks, insbesondere auf das Glied $C_1 \rho_1$ an. Da es hier nur auf den Verlauf im großen und

Tabelle 25.

β	$(C_1)_2$	$(C_2)_2$	$(N_0)_1$	$(N_0)_2$	N_{Eu}
1/10	0,5795	0,045 19	0,1526	0,1696	0,255
1/15	0,5948	0,035 95	0,0810	0,0921	0,135
1/20	0,6025	0,031 98	0,0501	0,0577	0,848
1/25	0,6077	0,029 46	0,0343	0,0398	0,587
1/30	0,6113	0,027 68	0,0251	0,0293	0,432
1/35	0,6140	0,026 33	0,0192	0,0226	0,333
1/40	0,6161	0,025 26	0,0153	0,0180	0,266
1/45	0,6179	0,024 39	0,0121	0,0147	0,217
1/50	0,6193	0,023 67	0,0103	0,0123	0,181
1/55	0,6205	0,023 04	0,0087	0,0104	0,154
1/60	0,6217	0,022 50	0,0075	0,0080	0,132
1/65	0,6226	0,022 08	0,0065	0,0078	0,115
1/70	0,6235	0,021 60	0,0057	0,0068	0,101
1/75	0,6242	0,021 26	0,0051	0,0060	0,090
1/80	0,6249	0,020 88	0,0045	0,0054	0,080
1/85	0,6255	0,020 59	0,0040	0,0048	0,072
1/90	0,6261	0,020 29	0,0036	0,0043	0,065
1/95	0,6266	0,020 02	0,0033	0,0040	0,059
1/100	0,6271	0,019 77	0,0030	0,0036	0,054

ganzen ankommt, wurde davon abgesehen, für jeden Wert von β die Berechnung von N_0 in der im vorhergehenden Abschnitt durchgeführten Weise auszuführen, vielmehr wurden nur die Näherungswerte $(C_1)_2$ und $(C_2)_2$ berechnet und daraus und aus dem Näherungswert $(C_1)_1 = 0,5$ die Werte von $(N_0)_2$ bzw. $(N_0)_1$ für verschiedene β . Das Ergebnis enthält Tabelle 25; zum Vergleich sind die Werte von N_{EU} beigelegt.

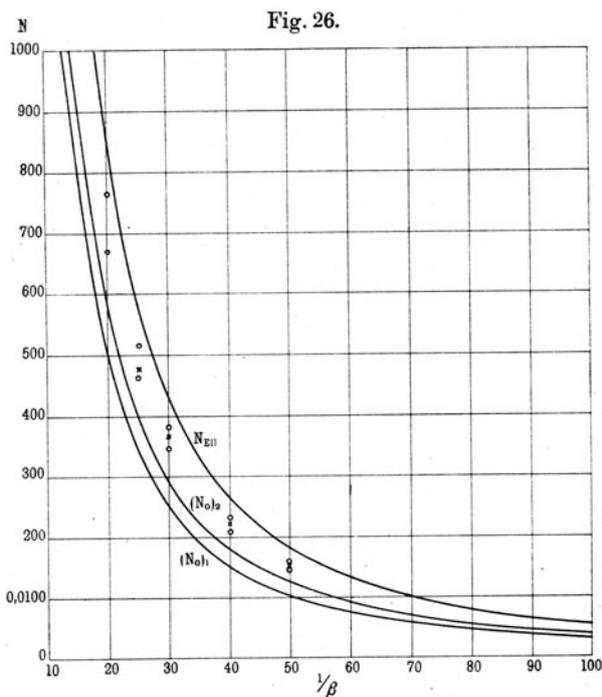


Fig. 26 zeigt die entsprechenden Kurven; die eingezeichneten Punkte entsprechen den oben mitgeteilten Messungen von Shuddemagen (○) und Würschmidt (×). Man sieht deutlich, daß bereits die relativ schlechten Näherungswerte $(N_0)_1$ und $(N_0)_2$, z. B. $(N_0)_1 = 0,0103$ und $(N_0)_2 = 0,0124$ für $N_0 = 0,0149$, die Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors vom Dimensionsverhältnis ganz ähnlich wie beim Ellipsoid aufweisen; eine Abhängigkeit von den absoluten Dimensionen, wie sie Shuddemagen annehmen zu müssen glaubt, dürfte nach den vorliegenden Überlegungen zum mindesten unwahrscheinlich sein.

c) Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors von der Suszeptibilität.

Die Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors von der Suszeptibilität ergibt sich aus der Auflösung (101) des Gleichungssystems (100); entwickelt man N_0 nach den Gliedern der ersten Reihe, so ergibt sich wieder die erste Gleichung aus (100)

$$N_0 = 2 \beta^2 \pi (1 + C_1 \varrho_1 + C_2 + \frac{C_3}{2} + \frac{C_4}{3} + \dots)$$

oder für $\beta = 1/50$

$$N_0 = 0,015608 C_1 + 0,0025133 [1 + C_2 + \frac{C_3}{2} + \dots] \quad (103)$$

Die Konstanten $C_1 \dots C_n \dots$ ergeben sich aus der Auflösung des Systems

C_1	C_2	C_3	C_4	C_{n-1}	C_n	A
σ_2	$-\varrho_2$	-1	$-\frac{1}{2} \dots$	$-\frac{1}{n-3}$	$-\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	σ_3	$-\varrho_3$	-1	$-\frac{1}{n-4}$	$-\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	σ_4	$-\varrho_4$	$-\frac{1}{n-5}$	$-\frac{1}{n-4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	σ_5	$-\frac{1}{n-6}$	$-\frac{1}{n-5}$	$\frac{1}{5}$
\vdots						
$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{n-4}$	σ_n	$-\varrho_n$	$\frac{1}{n}$
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{2}$	σ_{n+1}	$\frac{1}{n+1}$

$\left. \vphantom{\begin{matrix} \sigma_2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \vdots \\ \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n} \end{matrix}} \right\} (107)$

In diesem System ist allgemein: $\sigma_n = 1 + \frac{1}{(2n-1)2n\lambda}$ oder für $\beta = 1/50$:

$\sigma_2 = 1 + \frac{66,32}{x}$	$\sigma_6 = 1 + \frac{6,021}{x}$	} \dots (108)
$\sigma_3 = 1 + \frac{26,53}{x}$	$\sigma_7 = 1 + \frac{4,373}{x}$	
$\sigma_4 = 1 + \frac{14,21}{x}$	$\sigma_8 = 1 + \frac{3,316}{x}$	
$\sigma_5 = 1 + \frac{8,842}{x}$	usf.	

Die ϱ_n haben die in Gleichung (102) angegebenen Werte.

Die Auflösung des Gleichungssystems (107) bzw. (100) ist durch die Gleichungen (101) gegeben, allgemein können wir schreiben:

$$\left. \begin{aligned} (C_1)_n &= \frac{(c_1)_n}{D_n} \\ (C_2)_n &= \frac{(c_2)_n}{D_n} \\ \text{usf.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (109)$$

wenn wir unter $(C_i)_n$ den Wert von C_i verstehen, der sich aus der Berechnung der n reihigen Determinanten $(c_i)_n$ und D_n ergibt.

Wir haben diese Determinanten für den Fall $\beta = 1/50$ bis zur vierreihigen Determinante einschließlich berechnet und geben in der folgenden Zusammenstellung das Ergebnis der Rechnung wieder.

$$\begin{aligned} (c_1)_1 &= 0,5 \\ D_1 &= 1 + \frac{66,32}{\kappa} \\ (c_1)_2 &= 2,181 + \frac{13,27}{\kappa} \\ (c_2)_2 &= 0,0833 + \frac{22,11}{\kappa} \\ D_2 &= 3,522 + \frac{92,85}{\kappa} + \frac{1759}{\kappa^2} \\ (c_1)_3 &= 8,818 + \frac{50,89}{\kappa} + \frac{188,5}{\kappa^2} \\ (c_2)_3 &= 0,4286 + \frac{94,77}{\kappa} + \frac{314,2}{\kappa^2} \\ (c_3)_3 &= 0,1118 + \frac{7,735}{\kappa} + \frac{439,9}{\kappa^2} \\ D_3 &= 13,01 + \frac{294,7}{\kappa} + \frac{3079}{\kappa^2} + \frac{25\,000}{\kappa^3} \\ (c_1)_4 &= 32,82 + \frac{191,9}{\kappa} + \frac{676,1}{\kappa^2} + \frac{1666}{\kappa^3} \\ (c_2)_4 &= 1,743 + \frac{361,3}{\kappa} + \frac{1340}{\kappa^2} + \frac{2777}{\kappa^3} \\ (c_3)_4 &= 0,5762 + \frac{37,62}{\kappa} + \frac{1836}{\kappa^2} + \frac{3890}{\kappa^3} \\ D_4 &= 46,45 + \frac{999,7}{\kappa} + \frac{9367}{\kappa^2} + \frac{52\,220}{\kappa^3} + \frac{221\,000}{\kappa^4} \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Werte für verschiedene κ wollen wir uns auf positive κ beschränken; die Untersuchung, inwieweit die Näherungsmethode auch für negative κ , für die unter Umständen die Konstanten C_i unendlich groß werden können, anwendbar ist, soll einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben. Die Rechnung liefert die in den Tabellen 26 bis 29 wiedergegebenen Werte.

Tabelle 26.

κ	$(c_1)_1$	D_1	$(C_1)_1$
∞	0,5000	1,000	0,500
10 000	0,5000	1,007	0,497
1 000	0,5000	1,066	0,469
500	0,5000	1,133	0,441
200	0,5000	1,332	0,376
100	0,5000	1,663	0,307
50	0,5000	2,326	0,215
20	0,5000	4,316	0,116
10	0,5000	7,632	0,065 5
5	0,5000	14,26	0,035 1
2	0,5000	34,16	0,014 6
1	0,5000	67,32	0,007 43

Tabelle 27.

κ	$(c_1)_2$	$(c_2)_2$	D_2	$(C_1)_2$	$(C_2)_2$
∞	2,181	0,083 33	3,522	0,619	0,0237
10 000	2,183	0,085 54	3,531	0,619	0,0242
1 000	2,194	0,005 4	3,616	0,607	0,0292
500	2,207	0,127 5	3,715	0,594	0,0343
200	2,247	0,193 9	4,030	0,557	0,0481
100	2,314	0,304 4	4,626	0,498	0,0658
50	2,446	0,525 4	6,069	0,403	0,0866
20	2,844	1,189	12,56	0,227	0,0947
10	3,508	2,294	29,40	0,119	0,0780
5	4,834	4,504	91,09	0,053 1	0,0494
2	8,814	11,13	489,7	0,018 0	0,0227
1	15,45	22,19	1856	0,008 32	0,0120

Tabelle 28.

κ	$(c_1)_3$	$(c_2)_3$	$(c_3)_3$	D_3	$(C_1)_3$	$(C_2)_3$	$(C_3)_3$
∞	8,818	0,4286	0,1118	13,01	0,678	0,0329	0,0086
10 000	8,823	0,4381	0,1126	13,04	0,677	0,0336	0,0086
1 000	8,869	0,5237	0,1199	13,31	0,667	0,0393	0,0090
500	8,921	0,6193	0,1291	13,61	0,655	0,0455	0,0095
200	9,069	0,9103	0,1615	14,56	0,623	0,0626	0,0111
100	9,346	1,408	0,2332	16,29	0,573	0,0863	0,0143
50	9,911	2,450	0,4425	20,33	0,486	0,120	0,0218
20	11,83	5,955	1,598	38,57	0,307	0,155	0,0414
10	15,79	13,05	5,184	98,27	0,161	0,133	0,0528
5	26,54	31,95	19,26	395,1	0,067 2	0,0810	0,0487
2	81,39	126,4	113,95	4 055	0,020 1	0,0312	0,0281
1	248,2	409,4	447,7	28 390	0,008 73	0,0144	0,0158

Tabelle 29.

κ	$(c_1)_4$	$(c_2)_4$	$(c_3)_4$	$(c_4)_4$	D_4	$(C_1)_4$	$(C_2)_4$	$(C_3)_4$	$(C_4)_4$
∞	32,82	1,74	0,58	0,21	46,45	0,707	0,038	0,012	0,004
10 000	32,84	1,78	0,58	0,21	46,55	0,706	0,038	0,012	0,004
1 000	33,01	2,10	0,62	0,22	47,46	0,696	0,044	0,013	0,005
500	33,22	2,47	0,66	0,23	48,49	0,685	0,051	0,014	0,005
200	33,80	3,58	0,81	0,27	51,69	0,654	0,071	0,016	0,005
100	34,81	5,49	1,14	0,35	57,44	0,606	0,096	0,020	0,006
50	36,94	9,52	2,09	0,56	70,64	0,523	0,135	0,030	0,008
20	44,32	23,50	7,53	1,98	127,8	0,347	0,184	0,059	0,015
10	60,44	54,04	26,58	8,72	314,4	0,205	0,172	0,085	0,028
5	111,6	149,8	112,7	52,13	1393	0,080	0,108	0,081	0,037
2	506,1	864,4	964,7	691,7	21 230	0,024	0,041	0,045	0,033
1	2567	4480	5765	5256	283 600	0,009	0,016	0,020	0,019

In Fig. 27 sind die Konstanten $(C_1)_4$, $(C_2)_4$, $(C_3)_4$, $(C_4)_4$ als Funktionen von $lg \kappa$ ¹⁾ im richtigen Größenverhältnis dargestellt.

Tabelle 30 und Fig. 28 enthalten die Werte des Entmagnetisierungsfaktors N_0 .

Die Kurven für $(N_0)_1$ bis $(N_0)_4$ zeigen den gleichen Charakter; nur verläuft die Kurve mit wachsender Annäherung immer steiler. Da der Grenzwert von N_0 für $n = \infty$ nach unseren obigen Aus-

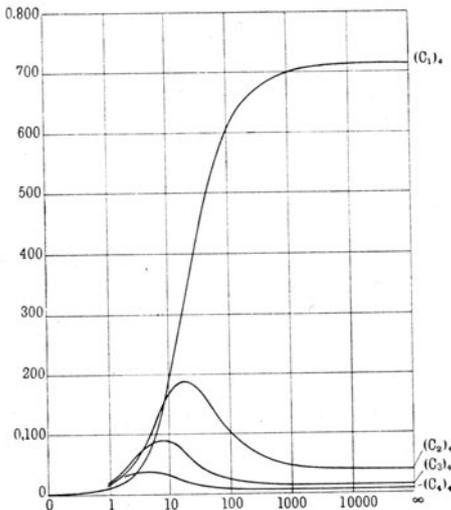
¹⁾ Um die Abhängigkeit für den ganzen Bereich gut graphisch darzustellen, tragen wir als Abszisse nicht κ , sondern $lg \kappa$ auf; an Stelle von $\kappa = \frac{1}{10}$ setzen wir $\kappa = 0$, an Stelle von $\kappa = 100\,000$, $\kappa = \infty$.

fürungen etwa 0,0150 beträgt, so können wir die (punktierter) N_0 -Kurve in die Fig. 28 einzeichnen, die somit die Abhängigkeit

Tabelle 30.

κ	$(N_0)_1$	$(N_0)_2$	$(N_0)_3$	$(N_0)_4$
∞	0,010 31	0,012 24	0,013 18	0,013 67
10 000	0,010 26	0,012 24	0,013 18	0,013 65
1 000	0,009 83	0,012 05	0,013 04	0,013 52
500	0,009 39	0,011 87	0,012 86	0,013 35
200	0,008 38	0,011 32	0,012 40	0,012 93
100	0,007 30	0,010 45	0,011 69	0,012 23
50	0,005 86	0,009 02	0,010 44	0,011 06
20	0,004 33	0,006 29	0,007 75	0,008 47
10	0,003 54	0,004 57	0,005 43	0,006 27
5	0,003 06	0,003 47	0,003 83	0,004 17
2	0,002 74	0,002 85	0,002 94	0,003 07
1	0,002 63	0,002 68	0,002 71	0,002 74
0	0,002 51	0,002 51	0,002 51	0,002 51

Fig. 27.

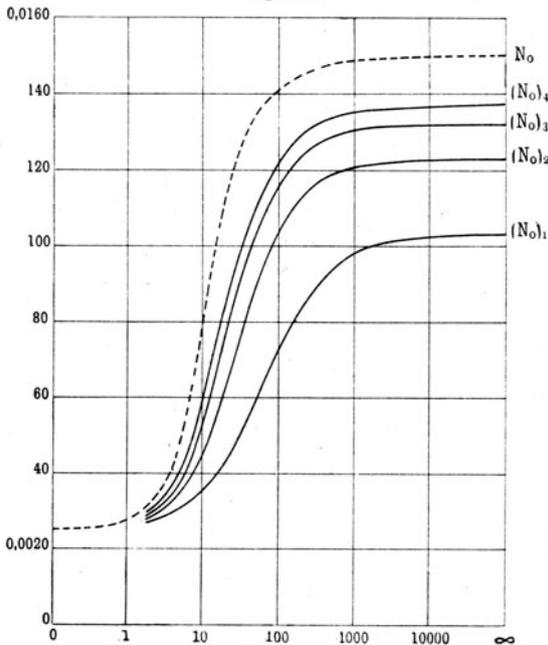


des Entmagnetisierungsfaktors von der Suszeptibilität darstellt. Die Kurve zeigt folgendes wichtige Resultat:

Der Entmagnetisierungsfaktor, der für einen Kreis-
zylinder $\beta = \frac{1}{50}$ für sehr große Suszeptibilität den Wert

$N_0 = 0,0150$ hat, nimmt mit abnehmender Suszeptibilität zuerst sehr langsam ab, so daß er im Bereich von $\kappa = 100$ bis $\kappa = \infty$ noch als nahezu konstant gelten kann. Wird κ kleiner als 100, so nimmt er stärker und immer stärker ab und nähert sich für $\kappa = 0$ seinem Grenzwert 0,0025, d. h. dem Entmagnetisierungsfaktor des homogen magnetisierten Zylinders.

Fig. 28.



d) Abhängigkeit der Magnetisierungsverteilung von der Suszeptibilität. Mittlere Magnetisierung.

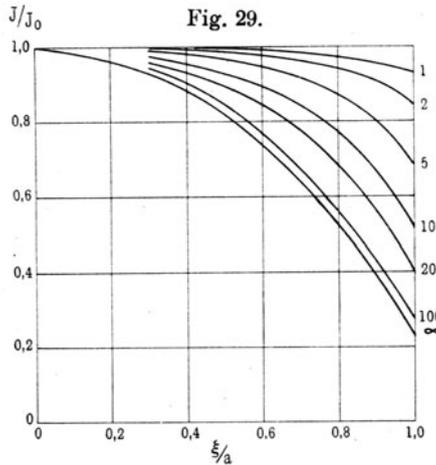
Mittels der berechneten Größen $(C_1)_\kappa$ bis $(C_4)_\kappa$ können wir leicht die Verteilung der Magnetisierung für verschiedene κ berechnen, von der die wahre Verteilung, die sich aus den Konstanten C_i für $n = \infty$ ergeben würde, auf keinen Fall sehr verschieden ist.

Wir geben in Tabelle 31 die berechneten Werte von J/J_0 an den Punkten $\xi = 0,3a$, $0,6a$, $0,8a$ und a , sowie in Fig. 29 die entsprechenden Verteilungskurven.

Wie man an der Fig. 29 sieht, ändert sich die Verteilung nur ganz wenig, wenn die Suszeptibilität κ von ∞ bis 100 sinkt; bei weiterem Sinken von κ tritt aber eine starke Änderung der

Tabelle 31.

κ	$\xi = 0,3 a$	$\xi = 0,6 a$	$\xi = 0,8 a$	$\xi = a$
∞	0,937	0,740	0,529	0,239
10 000	0,937	0,740	0,529	0,240
1 000	0,937	0,743	0,534	0,242
500	0,938	0,746	0,537	0,245
200	0,941	0,755	0,546	0,254
100	0,946	0,769	0,567	0,272
50	0,953	0,794	0,602	0,304
20	0,969	0,848	0,685	0,394
10	0,982	0,900	0,772	0,510
5	0,993	0,952	0,878	0,694
2	0,998	0,983	0,954	0,857
1	1,000	0,994	0,980	0,936



Verteilung ein, derart, daß sie sich immer mehr der homogenen Verteilung nähert, die sie für $\kappa = 0$ erreicht. Vergleicht man die so gefundene Verteilung mit der experimentell gefundenen, so findet man eine sehr gute Übereinstimmung bis auf die Nähe des Zylinderendes; hier kann die Rechnung natürlich nicht die wahren Werte liefern, da diese Stelle ($\xi = a$) ausdrücklich aus-

geschlossen wurde. Doch ist der Verlauf der Verteilung am Ende auf den Wert des Entmagnetisierungsfaktors offenbar von ver-schwindend geringem Einfluß.

Die mittlere Magnetisierung, die zugleich der magnetometrisch meßbaren Magnetisierung entspricht, ergibt sich aus

$$J_m = \frac{1}{a} \int_0^a J dx = J_0 \left(1 - \frac{C_1}{3} - \frac{C_2}{5} - \frac{C_3}{7} - \dots \right).$$

Berechnet man die Werte von J_m/J für die verschiedenen Werte von κ , so erhält man Tabelle 32.

Tabelle 32.

κ	J_m/J_0	κ	J_m/J_0
∞	0,755	20	0,837
10 000	0,755	10	0,882
1 000	0,757	5	0,936
500	0,759	2	0,974
200	0,765	1	0,989
100	0,775	0	1,000
50	0,793		

Wenn also bei der Magnetisierung eines ferromagnetischen Körpers mit wachsender Feldstärke die Permeabilität zuerst von einem relativ kleinen Werte an (Anfangspermeabilität) wächst, dann ein Maximum erreicht, um hierauf allmählich gegen Eins abzunehmen, so muß das Verhältnis J_m/J_0 , d. h. der sogenannte Polabstand, zuerst etwas abnehmen, dann bei dem Maximum der Permeabilität sein Minimum erreichen, hierauf allmählich wieder zunehmen und in der Grenze den Wert Eins erreichen, ganz wie dies bei den Beobachtungen von Lamb, Gumlich und anderen der Fall war.

e) Rechnerische Ermittlung der Scherungskurven
für eine gegebene Magnetisierungskurve.

Zum Schluß geben wir als Beispiel die rechnerische Ermittlung der ballistischen und magnetometrischen Scherungskurven zu einer gegebenen gescherten, also dem geschlossenen Ringe entsprechenden Magnetisierungskurve für das Dimensionsverhältnis $\beta = \frac{1}{50}$.

Gegeben sei die Neukurve eines Weicheisens, das von der PTR unter Nr. 2341 untersucht worden ist, d. h. die zusammengehörigen ξ - und \mathfrak{B} -Werte der folgenden Tabelle 33. Aus ihnen sind die gleichfalls in der Tabelle angegebenen Werte für J und κ berechnet; die jedem Werte von κ entsprechende Größe des Entmagnetisierungsfaktors N_0 ist aus der Kurve Fig. 28 (punktierte Kurve) entnommen. Durch Multiplikation mit J_0 erhält man $J_0 N_0$, d. h. die entmagnetisierende Kraft oder Scherung S_b für den jeweiligen Wert von J_0 .

Tabelle 33.

ξ	\mathfrak{B}	J_0	κ	N_0	$N_0 J_0 = S_b$
0,25	280	22,3	89	0,014 0	0,0312
0,5	700	55,6	111	0,014 1	0,0784
0,75	1 350	107	143	0,014 3	0,153
1	2 400	191	191	0,014 4	0,275
1,25	3 900	310	248	0,014 5	0,450
1,5	5 350	426	284	0,014 55	0,619
1,75	6 650	529	302	0,014 6	0,772
2	7 800	620	310	0,014 6	0,906
2,5	9 500	756	302	0,014 6	1,103
3	10 620	845	281	0,014 55	1,229
4	12 080	961	240	0,014 5	1,393
5	12 900	1026	205	0,014 45	1,482
8	14 100	1121	140	0,014 3	1,603
10	14 500	1153	115	0,014 2	1,638
12	14 980	1191	99	0,014 1	1,679
20	15 680	1246	62	0,013 8	1,719
30	16 200	1287	43	0,013 2	1,699
50	16 280	1332	26,6	0,012 0	1,598
80	17 500	1386	17,3	0,010 6	1,469
120	18 200	1439	12,0	0,009 0	1,295
200	19 250	1508	7,5	0,006 7	1,010
300	20 180	1582	5,3	0,005 2	0,823
500	21 300	1655	3,3	0,003 8	0,629
1000	22 200	1687	1,7	0,003 1	0,523
2000	23 320	1696	0,85	0,002 7	0,458
3000	24 350	1698	0,68	0,002 65	0,450
5000	26 350	1698	0,34	0,002 5	0,433

Zeichnet man die Größe $N_0 J_0$ der letzten Spalte als Funktion von J_0 (oder von \mathfrak{B}) auf, so erhält man die ballistische Scherungskurve (vgl. Fig. 30).

Um die magnetometrische Scherungskurve zu erhalten, ist zu bedenken, daß magnetometrisch nicht der Wert J_0 , sondern

der Mittelwert $J_m = \frac{1}{a} \int_0^a J dx$ gemessen wird. Ist nun die Kurve

der J_0 -Werte gegeben, so entspricht jedem J_0 ein (kleinerer) Wert J_m . Für jedes J_0 ist der Wert von J_m zu erhalten, indem man J_0 mit der der betreffenden Suszeptibilität entsprechenden Größe J_m/J_0 (vgl. Tabelle 32) multipliziert. Zur Interpolation zeichnen wir J_m/J_0 nach Tabelle 32 als Funktion von κ (auf die Wiedergabe der Kurve sei verzichtet); wir begnügen uns hier mit der Annäherung durch die vier Konstanten. Tabelle 34 enthält die zusammengehörigen Werte von J_0 , J_m/J_0 und J_m .

Tabelle 34.

J_0	$\frac{J_m}{J_0}$	J_m	J_0	$\frac{J_m}{J_0}$	J_m
22,3	0,777	17,3	961	0,764	734
55,6	0,773	43,0	1026	0,765	785
107	0,769	82,3	1121	0,770	863
191	0,765	146	1153	0,772	890
310	0,764	237	1191	0,775	923
426	0,764	325	1246	0,787	981
529	0,764	404	1287	0,799	1028
620	0,764	474	1332	0,822	1095
756	0,764	578	1386	0,846	1173
845	0,764	646	1439	0,872	1255

Nun zeichnen wir sowohl die J_0 -, ξ - als auch die J_m -, ξ -Kurve und können die Differenz in den zu gleichen Magnetisierungen gehörigen ξ -Werten ablesen (vgl. Fig. 30). Der Unterschied, d. h. die Scherungskurve, ist links von der J -Achse als Funktion der J -Werte aufgetragen. Man sieht, daß diese Scherung mit wachsendem J sehr schnell größer und größer wird. Die Scherungswerte für verschiedene J sind in Tabelle 35 zusammengestellt.

Diese Scherung S müssen wir zu der oben gefundenen ballistischen Scherung $S_b = N_0 J_0$ addieren, um die wahre magnetometrische Scherung zu erhalten. Die Tabelle 36 enthält eine

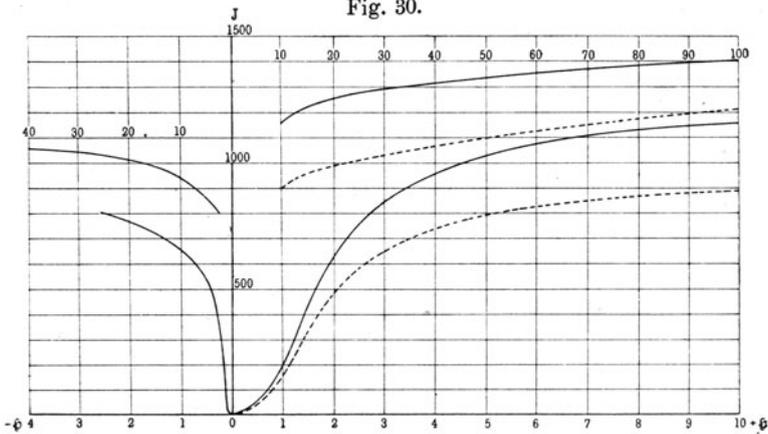
Zusammenstellung der beiden Scherungen, die wir mit S_b und S_m bezeichnen wollen.

Die beiden Scherungskurven sind in Fig. 31 als Funktionen der Magnetisierung gezeichnet; man sieht deutlich, wie die balli-

Tabelle 35.

J_0	S	J_0	S
22,3	0,07	620	0,83
55,6	0,10	756	1,85
107	0,12	845	4,5
191	0,14	1961	12
310	0,20	1026	25
426	0,30	1121	55
529	0,45	1153	60
		1191	78
		1246	100

Fig. 30.

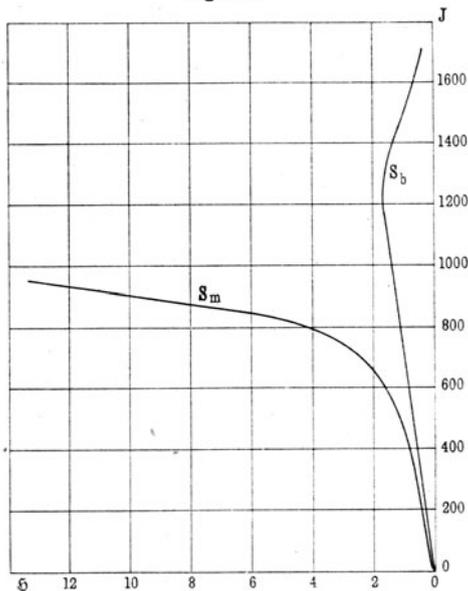


stische Scherungskurve zuerst nahezu linear verläuft, dann aber nach der Achse hin umbiegt, während die magnetometrische Scherungskurve nach anfänglich gleichfalls linearem Verlauf sich mehr und mehr von der Achse wegwendet. Würde man für J_m/J_0 die genaueren Werte benutzen, die einer noch besseren Annäherung entsprechen, d. h. z. B. für $\kappa = \infty$ den Wert $J_m/J_0 = 0,720$, so würde die Kurve S_m anfänglich etwas stärker gegen die J -Achse geneigt verlaufen, später aber nicht ganz so stark nach links ausbiegen.

Tabelle 36.

J_0	S_b	S_m	J_0	S_b	S_m
22,3	0,03	0,10	756	1,10	2,95
55,6	0,08	0,18	845	1,23	5,7
107	0,15	0,27	961	1,39	13,4
191	0,27	0,41	1026	1,48	26,5
310	0,45	0,65	1121	1,60	56,6
426	0,62	0,92	1153	1,64	61,6
529	0,77	1,22	1191	1,68	79,7
620	0,91	1,74	1246	1,72	101,7

Fig. 31.



Die Übereinstimmung mit dem experimentellen Verlauf der beiden Scherungskurven (vgl. Benedicks, a. a. O. und oben Fig. 18) ist, was das charakteristische Verhalten betrifft, vollkommen vorhanden.

Anhang.

Auswertung der Integrale.

S. 21. (1).

$$\begin{aligned} \int \frac{x(x-\xi)dx}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^{3/2}} &= - \int x d \frac{1}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^{1/2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} + \int \frac{dx}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^{1/2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} + \lg [(x-\xi) + \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}]. \end{aligned}$$

(2).

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^{3/2}} &= \int \frac{(x-\xi) dx}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^{3/2}} + \xi \int \frac{dx}{[(x-\xi)^2 + \eta^2]^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}} + \frac{\xi}{\eta^2} \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}}. \end{aligned}$$

S. 22. (3).

$$\int \frac{x dx}{(\xi-x)^2} = \int x d \frac{1}{\xi-x} = \frac{x}{\xi-x} - \int \frac{dx}{\xi-x} = \frac{x}{\xi-x} + \lg(\xi-x).$$

(4).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + \eta^2)^{3/2}} &= - \int x d \frac{1}{(x^2 + \eta^2)^{1/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} + \int \frac{dx}{(x^2 + \eta^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + \eta^2}} + \lg(x + \sqrt{x^2 + \eta^2}). \end{aligned}$$

S. 27. (5).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{[e^2 x^2 + b^2]^{3/2}} &= -\frac{1}{e^2} \int x d \frac{1}{[e^2 x^2 + b^2]^{1/2}} \\ &= -\frac{x}{e^2 \sqrt{e^2 x^2 + b^2}} + \frac{1}{e^2} \int \frac{dx}{(e^2 x^2 + b^2)^{1/2}} \\ &= -\frac{x}{e^2 \sqrt{e^2 x^2 + b^2}} + \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1}{e} \lg(e x + \sqrt{e^2 x^2 + b^2}). \end{aligned}$$

S. 28. (6).

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x(x-\xi)dx}{[e^2x^2-2\xi x+c^2]^{3/2}} = \frac{1}{e^2} \int \frac{x(e^2x-\xi)dx}{[e^2x^2-2\xi x+c^2]^{3/2}} \\
& + \frac{1}{e^2} \int \frac{x\xi dx}{[e^2x^2-2x\xi+c^2]^{3/2}} - \int \frac{x\xi dx}{[e^2x^2-2x\xi+c^2]^{3/2}} \\
& = \frac{1}{e^2} \int \frac{x(e^2x-\xi)dx}{[e^2x^2-2x\xi+c^2]^{3/2}} + \frac{1-e^2}{e^2} \xi \int \frac{x dx}{[e^2x^2-2x\xi+c^2]^{3/2}} \\
& = -\frac{1}{e^2} \int x d \frac{1}{(e^2x^2-2x\xi+c^2)^{1/2}} + \frac{1-e^2}{e^2} \xi \\
& \quad \left[\frac{1}{e^2} \int \frac{(e^2x-\xi)dx}{[e^2x^2-2x\xi+c^2]^{3/2}} + \frac{1}{e^2} \xi \int \frac{dx}{[e^2x^2-2x\xi+c^2]^{3/2}} \right] \\
& = -\frac{x}{e^2 \sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2}} + \frac{1}{e^2} \int \frac{dx}{(e^2x^2-2x\xi+c^2)^{1/2}} \\
& \quad + \frac{1-e^2}{e^2} \xi \frac{1}{e^2} \frac{-1}{\sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2}} \\
& \quad + \frac{1-e^2}{e^2} \xi^2 \frac{1}{e^2} \frac{1}{c^2 e^2 - \xi^2} \frac{e^2x-\xi}{\sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2}} \\
& = \frac{1}{e^3} \lg \left[ex - \frac{\xi}{e} + \sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2} \right] \\
& \quad - \frac{x}{e^2 \sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2}} - \frac{1-e^2}{e^2} \frac{\xi}{e^2} \frac{1}{\sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2}} \\
& \quad + \frac{1-e^2}{e^2} \frac{\xi^2}{e^2} \frac{1}{c^2 e^2 - \xi^2} \frac{e^2x-\xi}{\sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2}} \\
& = \frac{1}{e^3} \lg \left(ex - \frac{\xi}{e} + \sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2} \right) \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2}} \frac{1}{e^2} \left[\frac{1-e^2}{e^2} \left\{ \frac{\xi^2 e^2 x - \xi^3}{c^2 e^2 - \xi^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{c^2 e^2 \xi - \xi^3}{c^2 e^2 - \xi^2} \right\} - x \right] \\
& = \frac{1}{e^3} \lg \left[ex - \frac{\xi}{e} + \sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2} \right] \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{e^2x^2-2x\xi+c^2}} \frac{1}{e^2} \left[(1-e^2) \frac{\xi^2 x - c^2 \xi}{c^2 e^2 - \xi^2} - x \right].
\end{aligned}$$

S. 55. (7).

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}}; \quad \text{wir setzen: } x^2 + \beta^2 = u^2 \\
x dx = u du$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} &= \int \frac{(u^2 - \beta^2) u du}{u^3} = \int du - \beta^2 \int \frac{du}{u^2} \\ &= u + \frac{\beta^2}{u} \\ &= \sqrt{x^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{\sqrt{x^2 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

S. 56. (8).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} &= - \int x^3 d \frac{1}{(x^2 + \beta^2)^{1/2}} \\ &= - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + \int \frac{3x^2 dx}{(x^2 + \beta^2)^{1/2}} \\ &= - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + 3 \int x d(x^2 + \beta^2)^{1/2} \\ &= - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + 3x \sqrt{x^2 + \beta^2} - 3 \int (x^2 + \beta^2)^{1/2} dx \\ &= - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + 3x \sqrt{x^2 + \beta^2} - 3 \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{2} \lg(x + \sqrt{x^2 + \beta^2}) \right] \\ &= - \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + \frac{3x}{2} \sqrt{x^2 + \beta^2} - \frac{3\beta^2}{2} \lg(x + \sqrt{x^2 + \beta^2}) \end{aligned}$$

(9).

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}}; \text{ wir setzen: } \begin{matrix} x^2 + \beta^2 = u^2, \\ x dx = u du. \end{matrix}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} &= \int \frac{(u^2 - \beta^2)^2 u du}{u^3} = \int u^2 du - 2\beta^2 \int du - \beta^4 \int \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{u^3}{3} - 2\beta^2 u - \frac{\beta^4}{u} \\ &= \frac{(x^2 + \beta^2)^{3/2}}{3} - 2\beta^2 \sqrt{x^2 + \beta^2} - \frac{\beta^4}{\sqrt{x^2 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

(10).

$$\begin{aligned} \int \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} &= - \int x^{n-1} d \frac{1}{(x^2 + \beta^2)^{1/2}} \\ &= - \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + (n-1) \int \frac{x^{n-2} dx}{(x^2 + \beta^2)^{1/2}} \\ &= - \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + (n-1) \int \frac{(x^n + \beta^2 x^{n-2}) dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + (n-1) \int \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} + \beta^2 (n-1) \int \frac{x^{n-2} dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} \\
&\quad \int \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} - (n-1) \int \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} = -\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \\
&\quad + \beta^2 (n-1) \int \frac{x^{n-2} dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} \\
(n-2) \int \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} &= \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} - \beta^2 (n-1) \int \frac{x^{n-2} dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} \\
\int \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}} &= \frac{1}{n-2} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} - \frac{n-1}{n-2} \beta^2 \int \frac{x^{n-2} dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man $\int \frac{x^n dx}{(x^2 + \beta^2)^{3/2}}$ mit A_n , so ist also

$$A_n = \frac{1}{n-2} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} - \frac{n-1}{n-2} \beta^2 A_{n-2}.$$

Ebenso ist

$$A_{n-2} = \frac{1}{n-4} \frac{x^{n-3}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} - \frac{n-3}{n-4} \beta^2 A_{n-4}.$$

$$A_{n-4} = \frac{1}{n-6} \frac{x^{n-5}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} - \frac{n-5}{n-6} \beta^2 A_{n-6} \text{ usw.}$$

Also

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n-2} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} - \frac{n-1}{n-2} \frac{1}{n-4} \beta^2 \frac{x^{n-3}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \\
&+ \frac{n-1}{n-2} \frac{n-3}{n-4} \beta^2 A_{n-4} = \frac{1}{n-2} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \\
&- \frac{n-1}{n-2} \frac{\beta^2}{n-4} \frac{x^{n-3}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + \frac{n-1}{n-2} \frac{n-3}{n-4} \frac{\beta^4}{n-6} \frac{x^{n-5}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} \\
&- \frac{n-1}{n-2} \frac{n-3}{n-4} \frac{n-5}{n-6} \frac{\beta^6}{n-7} \frac{x^{n-7}}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} + \dots
\end{aligned}$$

S. 67. (11).

$$\begin{aligned}
B_m &= \int \frac{x^m dx}{(\xi - x)^2} = \frac{x^m}{\xi - x} - m \int \frac{x^{m-1} dx}{\xi - x} \cdot \frac{\xi - x}{\xi - x} \\
&= \frac{x^m}{\xi - x} - m \xi \int \frac{x^{m-1} dx}{(\xi - x)^2} + m \int \frac{x^m dx}{(\xi - x)^2} \\
&= \frac{x^m}{\xi - x} - m \xi B_{m-1} + m B_m, \\
B_m &= \frac{-1}{\xi - x} \frac{x^m}{m-1} + \frac{m}{m-1} \xi B_{m-1},
\end{aligned}$$

$$B_{m-1} = \frac{-1}{\xi - x} \frac{x^{m-1}}{m-2} + \frac{m-1}{m-2} \xi B_{m-2},$$

$$B_m = \frac{-1}{m-1} \frac{x^m}{\xi - x} - \frac{m}{m-1} \frac{\xi x^{m-1}}{\xi - x} \cdot \frac{1}{m-2} + \frac{m}{m-2} \xi^2 B_{m-2}.$$

S. 77. (12).

$$D_{2n} = \int \frac{x^{2n-1} (x - \xi) dx}{[(x - \xi)^2 + b^2]^{3/2}} = \int \frac{x^{2n} dx}{[(x - \xi)^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$- \xi \int \frac{x^{2n-1} dx}{[(x - \xi)^2 + b^2]^{3/2}} = K_{2n} - \xi K_{2n-1},$$

$$D_{2n} = - \int x^{2n-1} d \frac{1}{[(x - \xi)^2 + b^2]^{1/2}} = - \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2}}$$

$$+ (2n-1) \int \frac{x^{2n-2} dx}{[(x - \xi)^2 + b^2]^{1/2}} = - \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2}}$$

$$+ (2n-1) \int \frac{x^{2n-2} (x^2 - 2x\xi + b^2 + \xi^2) dx}{[(x - \xi)^2 + b^2]^{3/2}}$$

$$= - \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2}} + (2n-1) [K_{2n} - \xi K_{2n-1}$$

$$- \xi K_{2n-1} + \xi^2 K_{2n-2} + b^2 K_{2n-2}]$$

$$= - \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2}} + (2n-1) [D_{2n} - \xi D_{2n-1}$$

$$+ b^2 K_{2n-2}],$$

$$D_{2n} = \frac{x^{2n-1}}{2n-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2}} + \frac{2n-1}{2n-2} \xi D_{2n-1}$$

$$- \frac{2n-1}{2n-2} b^2 K_{2n-2}.$$

Oder, wenn wir $2n = \nu$ setzen,

$$D_\nu = \frac{x^{\nu-1}}{\nu-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + b^2}} + \frac{\nu-1}{\nu-2} \xi D_{\nu-1} - \frac{\nu-1}{\nu-2} b^2 K_{\nu-2}.$$

Das Integral D_ν ist somit auf das Integral $D_{\nu-1}$ zurückgeführt, vorausgesetzt, daß man das Integral $K_{\nu-2}$ kennt. Ist nun $K_{\nu-2}$ von gleicher Größenordnung wie D_ν , so kann man den Summanden $b^2 K_{\nu-2}$ gegenüber den anderen Gliedern vernachlässigen; wenn dies nicht der Fall ist, so muß $b^2 K_{\nu-2}$ eigens berechnet werden.

Da das Integral D_ν endlich sein muß, so muß $b^2 D_\nu$ gegen D_ν verschwinden; es ist also

$$0 \sim b^2 D_\nu = b^2 (K_\nu - \xi K_{\nu-1}),$$

oder

$$b^2 K_\nu = \xi b^2 K_{\nu-1},$$

ebenso

$$b^2 K_{\nu-1} = \xi b^2 K_{\nu-2},$$

$$b^2 K_{\nu-2} = \xi b^2 K_{\nu-3},$$

$$= \xi^2 b^2 K_{\nu-4} = \dots = \xi^{\nu-3} b^2 K_1,$$

wobei

$$K_1 = \int \frac{x dx}{[(x-\xi)^2 + b^2]^{3/2}}.$$

Dieses Integral ergibt aber nach (2)

$$K_1 = \frac{1}{b^2} \frac{\xi x - \xi^2 - b^2}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}.$$

Also ist

$$b^2 K_{\nu-2} = \frac{\xi x - \xi^2 - b^2}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}} \xi^{\nu-3}.$$

Man erhält somit:

$$D_\nu = \frac{x^{\nu-1}}{\nu-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}} + \frac{\nu-1}{\nu-2} \xi D_{\nu-1} - \frac{\nu-1}{\nu-2} \xi^{\nu-3} \frac{\xi x - \xi^2 - b^2}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}.$$

Ebenso:

$$D_{\nu-1} = \frac{x^{\nu-2}}{\nu-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}} + \frac{\nu-2}{\nu-3} \xi D_{\nu-2} - \frac{\nu-2}{\nu-3} \xi^{\nu-3} \frac{\xi x - \xi^2 - b^2}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}$$

u. s. f. Oder

$$\begin{aligned} D_\nu &= \frac{\nu-1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}} \left[\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)(\nu-2)} + \frac{\xi x^{\nu-2}}{(\nu-2)(\nu-3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi^2 x^{\nu-3}}{(\nu-3)(\nu-4)} + \dots + \frac{\xi^{\nu-3} x^2}{2 \cdot 1} \right] \\ &\quad + (\nu-1) \xi^{\nu-2} (D_\nu)_{\nu=2} - (\nu-1) \left[\frac{1}{\nu-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\nu-3} + \dots + 1 \right] \xi^{\nu-3} \frac{\xi x - \xi^2 - b^2}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

wobei nach Definition und Nr. (1):

$$\begin{aligned} (D_\nu)_{\nu=2} &= (D_{2n})_{n=1} = D_2 = \int \frac{x(x-\xi) dx}{[(x-\xi)^2 + b^2]} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}} + \lg [(x-\xi) + \sqrt{(x-\xi)^2 + b^2}]. \end{aligned}$$



Die „Sammlung Vieweg“ hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen, durch zusammenfassende Behandlung unter Befügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten**. Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig, und zwar für:

Physik (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):

Herr Geh. Reg.-Rat Professor Dr., Dr.-Ing. E. h. **Karl Scheel**, Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;

Chemie (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):

Herr Professor Dr. **B. Neumann**, Techn. Hochschule, Breslau;

Technik (Wasser-, Straßen- und Brückenbau, Maschinen- und Elektrotechnik, Schiffsbau, mechanische, physikalische und wirtschaftliche Probleme der Technik):

Herr Professor Dr.-Ing. E. h. **Fritz Emde**, Techn. Hochschule, Stuttgart.

Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg“

- Heft 1. Dr. Robert Pohl und Dr. P. Pringsheim-Berlin: *Die lichtelektrischen Erscheinungen.*
- Heft 2. Dr. C. Freiherr von Girsowald-Berlin-Halensee: *Peroxyde und Persalze.* M. 2,50.
- Heft 3. Diplomingenieur Paul Béjeuhr-Charlottenburg: *Der Blériot-Flugapparat und seine Benutzung durch Pégoud vom Standpunkte des Ingenieurs.* Mit 26 Abbildungen. M. 2,—.
- Heft 4. Dr. Stanislaw Loria-Krakau: *Die Lichtbrechung in Gasen als physikal. und chem. Problem.* Mit 3 Abbild. und 1 Tafel. M. 3,—.
- Heft 5. Professor Dr. A. Gockel-Freiburg i. d. Schweiz: *Die Radioaktivität von Boden und Quellen.* Mit 10 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 6. Ingenieur D. Sidersky-Paris: *Brennereifragen: Kontinuierliche Gärung der Rübensäfte. — Kontinuierliche Destillation und Rektifikation.* Mit 24 Abbildungen. M. 2,—.
- Heft 7. Hofrat Professor Dr. Ed. Donath und Dr. A. Gröger-Brünn: *Die flüssigen Brennstoffe, ihre Bedeutung und Beschaffung.* Mit 1 Abbildung. M. 2,50.
- Heft 8. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Max B. Weinstein-Berlin: *Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenteld.* M. 2,—.
- Heft 9/10. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. O. Lummer-Breslau: *Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur.* Mit 50 Abbildungen. M. 5,—.
- Heft 11. Dr. E. Przybyllok: *Polhöhen-Schwankungen.* Mit 8 Abbildungen. M. 2,—.
- Heft 12. Professor Dr. Albert Opper-Halle a. S.: *Gewebekulturen und Gewebeeplege im Explantat.* Mit 32 Abbildungen. M. 3,—.
- Heft 13. Dr. Wilhelm Foerster-Berlin: *Kalenderwesen und Kalenderreform.* M. 1,50.
- Heft 14. Dr. O. Zoth-Graz: *Über die Natur der Mischfarben auf Grund der Undulationshypothese.* Mit 3 Textfiguren und 10 Kurventafeln. M. 3,—.
- Heft 15. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Die Grundlagen der Quantentheorie in elementarer Darstellung.* 3. erweiterte Aufl. Mit 8 Abbild. M. 4,—.