

Д.А.ФОКС

**ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ  
АНАЛИЗ  
НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ  
ТЕЧЕНИЯ  
В ТРУБОПРОВОДАХ**



ЭНЕРГОИЗДАТ

Д. А. ФОКС

**ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ  
АНАЛИЗ  
НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ  
ТЕЧЕНИЯ  
В ТРУБОПРОВОДАХ**

Перевод с английского

МОСКВА ЭНЕРГОИЗДАТ 1981

ББК 39.7  
Ф74  
УДК 532.542

J. A. Fox. Reader in Civil Engineering University of Leeds  
**Hydraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe Networks**  
London, 1977

Перевод с английского Н. И. Хвостова

Рецензент Г. И. Кривченко

**Фокс Д. А.**

Ф74 Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах: Пер. с англ. — М.: Энергоиздат, 1981. — 248 с., ил.

85 к.

В книге рассматриваются методы анализа и расчетов нестационарных течений напорных и безнапорных водоводов, основное внимание уделено методу характеристик. Детально рассматриваются граничные условия, определяемые резервуаром, разветвлениями, клапанами, насосами и др. Даются методы построения алгоритмов расчетов и программирования на ЭВМ.

Книга полезна широкому кругу специалистов, занимающихся гидравлическими расчетами насосных и гидроэнергетических установок, различных водо- и газопроводных систем.

Ф 30314-594  
051(01)-81 39-81(Э). 2305010000

ББК 39.7  
6С7

© J. A. Fox, 1977. All rights reserved.  
First published 1977 by the Macmillan Press Ltd.

© Перевод на русский язык, предисловие, Энергоиздат, 1981

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга Д. А. Фокса «Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах» — это не справочник и не теоретическое исследование проблемы, а инженерное руководство по выполнению практических расчетов на ЭВМ, опирающееся на опыт и глубокое понимание физических и математических основ гидравлического анализа нестационарных течений.

В отечественной литературе имеются работы по гидравлике и механике жидкости и газов, в которых со строгим математическим и физическим обоснованием рассматриваются явления возникновения и распространения волн. Однако при решении практических инженерных задач прямое получение строгих теоретических решений обычно оказывается невозможным и тогда приходится идти на значительные упрощения за счет отступления от реальных условий и мириться с опасностью возникновения больших отклонений расчетных данных от фактических, что требует введения повышенных запасов и в результате приводит к возрастанию капиталовложений и снижению надежности проектирования.

Широкие возможности дает использование в данной области конечно-разностных методов и современных ЭВМ. Но осуществление таких расчетов для сложных условий еще находится в стадии освоения. В связи с этим специалистам, занимающимся проектированием и исследованием гидроэнергетических и насосных установок, каналов, газо- и нефтепроводных систем, систем коммунального хозяйства и т. п., будут интересны методики и способы построения расчетных схем и алгоритмов расчетов неустановившихся режимов течения и переходных процессов, предлагаемые в настоящей книге. Несмотря на то, что в данной книге подход к решению отдельных инженерных вопросов несколько отличается от принятого в СССР, публикация ее будет способствовать дальнейшему совершенствованию методов проектирования насосных и водопроводящих сооружений и систем.

*Редактор*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Возможно, читателю интересно узнать, как появилась эта книга. Автор всегда считал, что переходные режимы представляют большой интерес, и в течение всей своей деятельности изучал их с особым прилежанием. В результате большая часть исследований автора и его аспирантов относится к этой области.

В 1969 г. отдел технических консультаций запросил у автора сведения о методах расчета волн, которые могли бы учитывать изменение скорости волны, вызванное свободными пузырьками воздуха, содержащегося в жидкости. К этому времени автором была уже разработана программа для расчета волны в простых трубопроводных сетях, но без учета воздействия пузырьков воздуха на скорость волны. Внесенные в программу изменения позволили выявить основную причину разрушения магистрального трубопровода. Одновременно независимо от автора один из его бывших аспирантов провел измерения изменения давления в магистральном трубопроводе. Совпадение аналитических и экспериментальных результатов оказалось очень хорошим, и единственным, имеющим значение расхождением было время возникновения максимумов давления. Истинные значения максимумов и минимумов давлений были вычислены точно.

Получив такие результаты, автор и сотрудник отдела технических консультаций Б. Смит (Bryan Smith) решили открыть в Лидсе бюро, которое могло бы анализировать проектируемые или действующие гидравлические системы. Вскоре бюро начали широко привлекать к расчету различных систем — от простых водоподъемных сетей для перекачки сточных вод на станции обработки до подводных нефтепроводов в бурных широтах Северного моря.

Для расчета сетей водоснабжения, нефтепроводов на Среднем Востоке, большинства трубопроводов, построен-

ных или проектируемых для Северного моря, систем закачки воды в нефтеносные подземные пласты, сложных сетей на нефтеочистительных и газоконденсирующих заводах и т. п. в бюро обращались представители разных стран.

Чтобы справиться с заказами, бюро увеличило штат сотрудников и привлекло специалиста по вычислительной технике А. Кича (Andrew Keech). Это позволило разработать оригинальные программы и повысить уровень сложности решаемых задач.

Автор понимал, что основной материал, содержащийся в программах, следует опубликовать; так появилось решение написать эту книгу. Конечно, в одну работу невозможно включить весь материал, который вошел в программы, но главные положения в ней изложены.

Автор хотел бы предупредить читателя, что он не претендует на завершенность своего труда о гидравлическом ударе. По-видимому в настоящее время такая законченная работа еще не может быть написана, так как сама тема все еще находится в стадии развития. Эта книга выражает позицию автора, те кто внес большой вклад в эту тему, могут быть раздосадованы, что их работы даже не упомянуты. Автор хотел бы извиниться перед ними и в качестве оправдания сослаться на ограниченность места в книге. По этой же причине в книге мало внимания уделено методам интегрирования конечно-разностных уравнений, методу Лакса — Вендрофа (Lax, Wendroff) с авторами, совсем не упоминается метод конечных элементов, который автор считает весьма перспективным в будущем. Показана полная приемлемость метода характеристик и это служит отчасти оправданием за ограниченное представление очень большой и очень сложной проблемы.

Лидс, 1976 г.

*Д. А. Фокс*

## ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $A$  — площадь поперечного сечения потока  
 $A_0$  — площадь клапана в начальный момент времени (гл. 1)  
 $A_t$  — площадь клапана в момент времени  $t$   
 $a_p$  — площадь поперечного сечения трубы (гл. 1)  
 $a_v$  — площадь открытия клапана  
 $A$  — постоянная в уравнении насоса  $H=AN^2+BNQ-CQ^2$  (гл. 6)  
 $A_e$  — площадь на выходе из рабочего колеса насоса (гл. 6)  
 $A_{sw}$  — площадь поперечного сечения колодца (гл. 6)  
 $a_e$  — эффективная площадь клапана (гл. 9)  
 $B$  — постоянная в уравнении насоса  $H=AN^2+BNQ-CQ^2$  (гл. 6)  
 $B$  — ширина свободной поверхности в канале (гл. 10)  
 $b$  — средняя ширина канала (гл. 10)  
 $C_d$  — коэффициент расхода клапана  
 $c$  — скорость элементарной волны сжатия  
 $C$  — постоянная в формуле трения, используемая при расчете уравнительного резервуара (гл. 3)  
 $C$  — постоянная в уравнении насоса  $H=AN^2+BNQ-CQ^2$  (гл. 6)  
 $c_s$  — коэффициент в уравнении для хода клапана со следящим приводом (гл. 7)  
 $C_v$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме (гл. 8)  
 $C_p$  — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении (гл. 8)  
 $C$  — электрическая емкость на единицу длины линии передачи (гл. 9)  
 $c$  — скорость элементарной волны на поверхности (гл. 10)  
 $C$  — коэффициент Шези (гл. 10)  
 $C_d$  — коэффициент расхода затвора (гл. 10)  
 $c_w$  — скорость большой волны в открытом канале (гл. 10)  
 $dt$  — приращение времени (бесконечно малое)  
 $dx$  — приращение длины (бесконечно малое)  
 $dp$  — приращение давления (бесконечно малое)  
 $d\rho$  — приращение плотности (бесконечно малое)  
 $dv$  — приращение скорости (бесконечно малое)  
 $d$  — диаметр трубы  
 $D$  — диаметр рабочего колеса насоса  
 $D_e$  — постоянная в уравнении к. п. д. насоса  
 $d_{sw}$  — глубина колодца  
 $d_t$  — внутренний диаметр воздушного колпака  
 $E$  — модуль упругости

- $E$  — к. п. д. насоса (гл. 3)  
 $E_e$  — постоянная в уравнении к. п. д. насоса (гл. 6)  
 $e$  — внутренняя энергия единицы массы газа (гл. 8)  
 $E_1, E_2, E_3$  — постоянные нестационарных уравнений в характеристической форме для газа (гл. 8)  
 $E = g(j - i)$  (гл. 10)  
 $f$  — коэффициент в формуле Дарси  $h_f = fLV^2/(2gm)$  (определен в тексте)  
 $f_n$  — кольцевые напряжения в стенке трубы  
 $\dot{f}$  — функция какой-либо величины; высота волны при ее движении вниз по течению (гл. 2)  
 $F$  — функция какой-либо величины, высота волны при ее движении вверх по течению (гл. 2)  
 $F_e$  — постоянная в уравнении к. п. д. насоса  
 $F$  — сила, действующая на единицу длины жидкости в трубопроводе (гл. 8)  
 $f$  — вынужденная частота колебаний напора (гл. 9)  
 $Fr$  — число Фруда, определяемое по абсолютной скорости (гл. 10)  
 $g$  — ускорение силы свободного падения (всюду в тексте)  
 $G_r$  — градиент частоты вращения насоса при остановке (гл. 6)  
 $h$  — потенциальный напор — сумма местного давления и превышения точки над произвольной базовой линией  
 $h_f$  — потери напора на трение  
 $h_s$  — статический напор или напор в точке  $S$  в соответствии с контекстом  
 $h_n$  — напор непосредственно вверх по направлению потока от клапана или сопла  
 $h_i$  — изменение потенциального напора (потенциальной энергии), вызванное изменением количества движения (кинетической энергии) (заметим, что  $p_i = \rho h_i$ )  
 $h_{air}$  — давление воздуха в воздушном колпаке, выраженное высотой столба жидкости (гл. 3)  
 $h_a$  — атмосферное давление  
 $h_b$  — высота основания воздушного колпака над осевой линией трубы  
 $h_w$  — то же, что  $h_{air}$  (гл. 7)  
 $h_{tr}$  — напор, измеряемый датчиком давления клапана со следящим приводом  
 $h$  — критический напор, при котором клапан со следящим приводом начинает двигаться  
 $\bar{h}$  — стационарный напор (гл. 9)  
 $h'$  — нестационарная составляющая напора (гл. 9)  
 $H$  — амплитуда волны давления (гл. 9)  
 $h_{sp}$  — высота поверхности в резервуаре над гребнем водослива  
 $h_w$  — высота гребня волны над уровнем основания канала (гл. 10)  
 $I$  — момент инерции вращающихся частей насоса и двигателя (гл. 6)  
 $i$  — электрический ток (гл. 9)  
 $i = \sqrt{-1}$  (гл. 9) — (см. контекст)  
 $i$  — уклон дна канала, принимается положительным при направлении вниз (гл. 10)



- $j$  — потери напора на трение на единицу веса жидкости и единицу длины канала (гл. 10)
- $K$  — постоянная в формуле для потерь в клапане  $h_f = K v^2 / (2g)$ ,  $K = 4fL/d + k$  (гл. 1 и 5)
- $K$  — объемный модуль упругости жидкости
- $k$  — постоянная; иногда характеризует местные потери, т. е.  $h_L = k v^2 / (2g)$  (для колен, соединений и т. д.); в гл. 1  $k = v_0 L h_s / (gT)$
- $k$  — постоянная в уравнении напор — расход  $h = k q^2$ , т. е. в формуле для трения в методе Шнидера — Бержерона
- $k$  — средняя высота шероховатости трубы в формуле Колбрука — Уайта
- $k_r$  — коэффициент потерь напора в рабочем колесе насоса (гл. 6)
- $k_v$  — коэффициент потерь напора в спирали насоса (гл. 6)
- $k$  — постоянная водослива (гл. 10)
- $L$  — длина, обычно длина трубы
- $L$  — постоянная в уравнениях гидравлического удара в характеристической форме (гл. 7)
- $l_t$  — внутренняя высота воздушного колпака
- $L$  — электрическая индуктивность на единицу длины линии передачи (гл. 9)
- $m$  — средний гидравлический радиус  $A/P$
- $n$  — отношение площадей  $a_p/A_0$  (гл. 1)
- $N$  — частота вращения насоса, об/мин (гл. 3 и 6)
- $n$  — показатель политропы (гл. 8)
- $p_i$  — давление, создаваемое изменением количества движения
- $P$  — смоченный периметр
- $P$  — мощность насоса (гл. 3 и 6)
- $P_{air}$  — давление воздуха в воздушном колпаке (гл. 3)
- $P_a$  — атмосферное давление
- $P_{wr}$  — мощность насоса (гл. 6)
- $q$  — расход
- $q_t$  — расход в момент времени  $t$
- $q$  — удельный тепловой поток (гл. 8)
- $\bar{q}$  — стационарный расход (гл. 9)
- $q'$  — нестационарная составляющая расхода (гл. 9)
- $Q$  — амплитуда колебаний расхода (гл. 9)
- $Re$  — число Рейнольдса,  $Re = \rho v d / \mu$  или  $vd/\nu$
- $R$  — универсальная газовая постоянная (гл. 8)
- $R$  — гидравлическое сопротивление на единицу длины (гл. 9)
- $R_{el}$  — электрическое сопротивление на единицу длины линии передачи (гл. 9)
- $s_i$  — ход клапана в начале периода  $\Delta t$  (гл. 7)
- $s_f$  — ход клапана в конце периода  $\Delta t$  (гл. 7)
- $s_{req}$  — потребный ход клапана, заданный датчиком давления (гл. 7)
- $s$  — множитель, принимающий значение +1 или -1 (гл. 7 и 10)
- $T$  — фаза удара  $2L/c$  (гл. 2 и 3)
- $T$  — толщина стенки трубы (определяется в тексте)
- $T$  — момент вращения в уравнении насоса (гл. 3)
- $T$  — абсолютная температура (гл. 8)
- $t$  — время

- $u$  — скорость на конце лопастей рабочего колеса (гл. 6)  
 $v$  — средняя скорость потока (гл. 1)  
 $V_{\infty}$  — скорость в трубе при  $t \rightarrow \infty$  (гл. 1)  
 $v_0$  — скорость в момент  $t=0$  (гл. 1)  
 $v_t$  — скорость в момент  $t$  (гл. 1)  
 $V_{air}$  — объем воздуха в воздушном колпаке (гл. 3)  
 $V_g$  — объем растворенного газа  
 $V_w$  — скорость закрутки потока на выходе из рабочего колеса насоса (гл. 6)  
 $V_r$  — относительная скорость на выходе из рабочего колеса насоса (гл. 6)  
 $V$  — абсолютная скорость на выходе из рабочего колеса насоса (гл. 6)  
 $V_f$  — скорость потока на выходе из рабочего колеса насоса (гл. 6)  
 $V$  — электрическое напряжение (гл. 9)  
 $V_w$  — скорость пика волны в открытом канале  
 $w$  — удельный вес жидкости  
 $W_n$  — безразмерный напор на диаграмме Сьютера (гл. 6)  
 $W_r$  — безразмерный момент на диаграмме Сьютера (гл. 6)  
 $x$  — расстояние вдоль трубопровода  
 $X$  — расстояние по длине трубопровода  
 $z$  — высота осевой линии трубы над уровнем начала отсчета  
 $z$  — высота свободной поверхности в уравнительном резервуаре над статическим уровнем в резервуаре (гл. 3)  
 $z_t$  — высота, отсчитываемая от уровня осевой линии трубопровода, расположенной в точке его присоединения к воздушному колпаку  
 $Z$  — гидравлическое сопротивление (гл. 9)  
 $Z_c$  — характеристическое сопротивление (гл. 9)  
 $\bar{z}$  — глубина центра тяжести поперечного сечения канала (гл. 10)  
 $\alpha$  — действительная составляющая  $\gamma$  (постоянной распространения) (гл. 9)  
 $\alpha$  — постоянная, определяющая вид поперечного сечения канала (гл. 10)  
 $\beta$  — произведение  $\frac{C_d a \gamma}{a_p} \sqrt{2g}$  (гл. 2)  
 $\beta$  — мнимая составляющая  $\gamma$  (постоянной распространения) (гл. 9)  
 $\gamma$  — угол установки лопасти насоса (гл. 6)  
 $\gamma$  — постоянная распространения (гл. 9)  
 $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей газа (гл. 8)  
 $\delta$  — отношение площади поперечного сечения канала к ширине поверхности (гл. 10)  
 $\Delta x$  — конечное приращение расстояния  
 $\Delta t$  — конечное приращение времени  
 $\Delta V$  — приращение объема (индекс показывает, какой объем изменяется)  
 $\Delta p_i$  — конечное приращение давления из-за изменения количества движения (гл. 1)

- $\Delta h_i$  — изменение потенциального напора, связанное с  $\Delta p$  соотношением  $\Delta p_i = \omega \Delta h_i$  (гл. 1)  
 $\varepsilon$  — парциальный объем свободного газа в жидкости (гл. 5)  
 $\varepsilon$  — отношение  $a_e/a_{e_0}$  (гл. 9)  
 $\bar{\varepsilon}$  — стационарная составляющая  $\varepsilon$  (гл. 9)  
 $\varepsilon'$  — нестационарная составляющая  $\varepsilon$  (гл. 9)  
 $\xi$  — корень квадратный из отношения напоров  $(h/h_0)^{0,5}$  (гл. 2)  
 $\zeta$  — наклон характеристической линии  
 $\eta$  — доля открытия клапана  $a/a_{v_0}$  (гл. 2)  
 $\theta$  — угол при четырехквadrантном представлении характеристик насоса в переменных Сьютера  $\theta = \text{arctg}(N/N_s \times \chi Q_s/Q)$  (гл. 6)  
 $\lambda$  — постоянная в характеристических уравнениях гидравлического удара (гл. 4)  
 $\lambda = \alpha \frac{d}{B} \frac{\partial B}{\partial x}$  (гл. 10)  
 $\mu$  — динамическая вязкость жидкости  
 $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости  $\nu = \mu/\rho$   
 $\rho$  — плотность  
 $\rho$  — характеристика Аллиеви,  $\rho = c v_0 h / (2g h_0)$  (гл. 2)  
 $\tau$  — коэффициент поверхностного натяжения (гл. 5)  
 $\tau$  — касательное напряжение вязкости (гл. 2 и 10)  
 $\chi$  — сложная линия, полученная путем суммирования двух элементарных волн по методу Шнидера — Бержерона (гл. 2)  
 $\psi$  — характеристика клапана в методе Шнидера — Бержерона (гл. 2)  
 $\psi$  — фазовый угол (гл. 9)  
 $\Omega$  — угловая скорость рабочего колеса насоса (гл. 3 и 6)  
 $\Omega$  — угловая скорость вынужденных колебаний напора (гл. 9)

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

### 1.1. ВВЕДЕНИЕ

Гидравлический расчет течения в сложных трубопроводах обычно производится для стационарных условий, поскольку для нестационарного состояния он сложнее, чем стационарного, и возможен только при больших упрощающих допущениях. Вплоть до появления ЭВМ единственным приемлемым методом расчета был графический, который мог быть применен только для расчета простых трубопроводов.

Теперь при наличии ЭВМ нет больше необходимости ограничивать математическое моделирование трубопроводных сетей только стационарным состоянием. Нестационарный анализ может включать стационарное состояние как частный случай, но при этом обеспечивается значительно большая информация. Поведение системы во время пуска, выхода на стационарный режим и переходного периода после закрытия задвижек может быть описано с удовлетворительной точностью. Практика показывает, что условия в период стационарной работы представляют меньший интерес, более важно то, что происходит в период открытия или закрытия. Работа любой сложной гидравлической сети может быть смоделирована, и единственным ограничением является объем памяти ЭВМ.

Переходные процессы, вызванные резким изменением давления, обычно обозначают термином «гидравлический удар», так как при движении волны сжатия по трубе возникает звук, напоминающий удар молотка. И хотя это происходит не всегда, термин получил столь широкое распространение, что нет смысла пытаться его изменить. Поэтому везде в книге слова «гидравлический

удар» относятся к переходным процессам при изменении давления.

При обычном ньютоновском подходе к анализу движения тела полагают, что сила, вызывающая ускорение, одновременно приложена ко всем частицам тела. И действительно, когда сила приложена к телу, то частицы в точке приложения силы тотчас же ускоряются. Движение этих частиц относительно соседних создает силы, приложенные к смежным частицам, что в свою очередь тоже приводит к их ускорению. Таким образом, силы действуют на следующий слой примыкающих частиц и ускоряют их. Со временем все частицы будут ускорены. В результате по телу проходит волна сжимающих напряжений, которая распространяется с обычно большой, но не бесконечной скоростью. Большинство тел недостаточно длинны в направлении приложения силы, чтобы время прохождения волны было значительным, но эффект конечности времени распространения возмущения всегда имеет место.

В случае длинного трубопровода, содержащего жидкость, волна сжатия может двигаться по жидкости значительное время, а давление, созданное волной сжатия, может оказаться достаточно большим, чтобы разорвать трубу.

В случае короткого трубопровода и изменения давления, приложенного к одному концу в течение времени большего, чем время прохождения волны сжатия по трубе, гипотеза, предполагающая, что все жидкие частицы ускоряются одновременно, будет достаточно точной, чтобы служить моделью поведения жидкости.

Чтобы описать поведение жидкости, находящейся под воздействием силы, обычно используются две теории:

1) теорию несжимаемой жидкости, когда полагают, что вся жидкость ускоряется одинаково по всей длине, а скорость распространения волны бесконечно большая;

2) теорию сжимаемой жидкости, при этом полагают, что любое изменение давления передается по жидкости волной с большой, но конечной скоростью.

Теорию несжимаемой жидкости можно применять для случая, когда время воздействия органа гидравлического управления значительно больше, чем время прохождения волны давления по жидкости. Теорию сжимаемой жидкости, хотя она является более сложной, можно применять всегда, и она дает более точные результаты.

## 1.2. ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОЙ ТРУБЕ

На первоначальном этапе развития теории гидравлического удара использовалась теория недеформируемого тела, которую называют теперь «жесткая труба—несжимаемая жидкость». Позднее была разработана теория «упругая труба—сжимаемая жидкость», которая послужила основой для большинства современных исследований, и можно считать, что ее разработка достигла высокого уровня развития. Теория несжимаемой жидкости представляет значительную ценность в тех случаях, когда нестационарное изменение давления не представляет большого интереса, а важно только движение жидкости. Теория несжимаемой жидкости способна описать такие движения с удовлетворительной точностью.

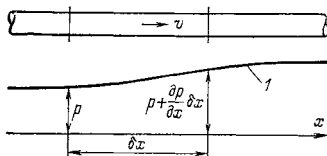


Рис. 1.1.

### Упрощенная форма уравнения движения

Сначала выведем основные уравнения гидравлического удара. Рассмотрим поток в трубе длиной  $L$  при наличии изменения давления  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , которое замедляет скорость жидкости.

Отметим, что давление увеличивается в направлении увеличения  $x$  (рис. 1.1). Предполагается, что скорость  $v$  в момент времени  $t$  одинакова во всех точках трубопровода. Масса жидкости, содержащаяся в элементе  $\Delta x$  трубопровода, равна  $\rho A \Delta x$ .

Сила, замедляющая жидкость, если пренебречь трением, равна  $A \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$ . В соответствии со вторым законом движения Ньютона

$$A \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \rho A \Delta x \frac{dv}{dt} = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1.1)$$

— это чрезвычайно упрощенная форма уравнения Эйлера.

Если  $dv/dt$  постоянно по всей длине трубопровода, а это так, если труба жесткая и жидкость несжимаемая, то уравнение можно проинтегрировать и получить

$$\Delta p = -\rho L \frac{dv}{dt}, \quad (1.2)$$

где  $\Delta p$  — разность давления в трубе длиной  $L$ , которую необходимо создать, чтобы вызвать ускорение  $dv/dt$ . Заметим, что если давление ниже по потоку превосходит давление выше по потоку на  $\Delta p$ , то  $dv/dt$  отрицательно, т. е. имеет место замедление.

Так как давление и напор связаны соотношением

$$p = \omega h = \rho g h,$$

то результат может быть записан в виде

$$\Delta h = -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt}. \quad (1.2a)$$

Это решение пригодно для течения без трения, с учетом влияния трения необходимо ввести дополнительные члены.

### 1.3. ВНЕЗАПНОЕ ОТКРЫТИЕ КЛАПАНА НА НИЖНЕМ КОНЦЕ ТРУБОПРОВОДА

Чтобы проиллюстрировать, как можно использовать приведенную выше простую теорию и учесть влияние трения, исследуем случай внезапного открытия клапана вниз по течению. При этом недостатки, присущие теории жесткой трубы и несжимаемой жидкости сохраняются.

В (1.2a)  $\Delta h_i$  — превышение напора в нижней точке трубы над ее верхней точкой (рис. 1.2).

В нижнем конце, когда клапан полностью открыт, напор равен атмосферному давлению (это давление принято за нулевой уровень), в верхнем конце напор равен  $h_s$ ; таким образом, если отсутствует трение,  $\Delta h_i = 0 - h_s$ , при наличии сил трения  $h_s$  должен быть уменьшен на  $h_f$ , тогда

$$\Delta h_i = -h_s + h_f, \quad (1.3)$$

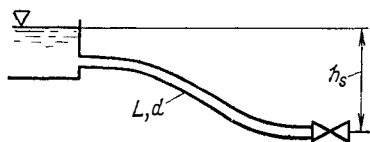


Рис. 1.2.

где  $h_f$  — потери напора из-за трения:

$$h_f = \frac{4fLv^2}{2gd}. \quad (1.4)$$

Это уравнение Дарси — Вейсбаха (Darcy — Weisbach).  
С учетом местных потерь

$$\Delta h_i = - \left( h_s - \frac{4fLv^2}{2gd} - \frac{kv^2}{2g} \right) = - \frac{L}{g} \frac{dv}{dt},$$

где  $kv^2/2g$  — потери напора, вызванные местными сопротивлениями, такими как изгибы, соединения и т. д.;

$$h_s - \frac{4fL}{d} \frac{v^2}{2g} - \frac{kv^2}{2g} = \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}$$

или

$$h_s - K \frac{v^2}{2g} = \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}, \quad (1.5)$$

где

$$K = \frac{4fL}{d} + k.$$

Проделав элементарные преобразования, разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$t = \frac{L}{\sqrt{2gh_s}} \left( \int \frac{dv}{\sqrt{2gh_s} - \sqrt{K}v} + \int \frac{dv}{\sqrt{2gh_s} + \sqrt{K}v} \right),$$

или

$$t = \frac{L}{\sqrt{2gh_s K}} \ln \left( \frac{\sqrt{2gh_s} + \sqrt{K}v}{\sqrt{2gh_s} - \sqrt{K}v} \right), \quad (1.6)$$

где  $v$  — скорость в момент времени  $t$ .

Когда  $t$  стремится к бесконечности, то  $\sqrt{2gh_s} = \sqrt{K}V_\infty$ , где  $V_\infty$  обозначает асимптотическую скорость при  $t \rightarrow \infty$ .

Итак,  $V_\infty = \sqrt{\frac{2gh_s}{K}}$ , т. е. получено выражение, известное из теории для установившегося движения.

Преобразуем уравнение (1.6):

$$t = \frac{L}{\sqrt{2gh_s K}} \ln \left[ \frac{(2gh_s/K)^{0.5} + v}{(2gh_s/K)^{0.5} - v} \right]$$



или

$$t = \frac{L}{\sqrt{2gh_s K}} \ln \left( \frac{V_\infty + v}{V_\infty - v} \right),$$

отсюда

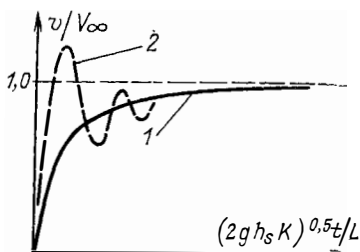
$$\frac{V_\infty + v}{V_\infty - v} = e^{(2gh_s K)^{0,5} t/L}.$$

Решая относительно  $v/V_\infty$ , получаем:

$$\frac{v}{V_\infty} = \frac{e^{(2gh_s K)^{0,5} t/L} - 1}{e^{(2gh_s K)^{0,5} t/L} + 1}. \quad (1.7)$$

График этого уравнения приведен на рис. 1.3.

Пунктирная линия показывает влияние упругости



жидкости и материала стенок трубопровода на изменение скорости; по теории жесткой трубы и несжимаемой жидкости можно рассчитать изменение средней скорости. Опыт показывает, что при мгновенном открытии клапана возникает очень большая скорость, которая затем уменьшается и вновь возрастает до значения меньшего чем скорость при первом выбросе.

Рис. 1.3. К расчету внезапного открытия клапана.

1 — теоретическая кривая изменения скорости; 2 — то же действительная.

Наибольшая скорость первого выброса приблизительно равна струйной скорости  $\sqrt{2gh_s}$ , ее быстрое уменьшение происходит из-за того, что энергия напряжений в жидкости и материале стенки трубы не может поддерживать такую скорость очень долго. Более точное решение этой задачи приведено в гл. 2.

#### 1.4. МЕДЛЕННОЕ ЗАКРЫТИЕ КЛАПАНА

Предположим, что общее уравнение изменения эффективной площади клапана имеет вид

$$a_e = a_0 f(t), \quad (1.8)$$

где  $a_0$  — площадь полностью открытого клапана, а  $f(t)$  — некоторая функция времени. Эффективная площадь кла-

пана — это действительная площадь, умноженная на коэффициент расхода.

Предположим, что уравнение Бернулли применимо к случаю течения жидкости через клапан. Несмотря на то что движение неустановившееся, такое предположение правомочно, оно было неоднократно подтверждено экспериментально.

Пусть

$$q_t = a_e \sqrt{2gh_n} \quad (1.9)$$

где  $q_t$  — скорость потока через клапан в момент времени  $t$ ;  $h_n$  — напор непосредственно перед клапаном в тот же момент времени.

Следовательно,

$$v_t = \frac{a_e}{A} \sqrt{2gh_n},$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения трубы.

Дифференцируя по времени, получаем:

$$\frac{dv_t}{dt} = \frac{da_e}{dt} \frac{\sqrt{2gh_n}}{A} + \frac{1}{2} \sqrt{2g} (h_n)^{-0.5} \frac{a_e}{A} \frac{dh_n}{dt}$$

и тогда

$$h_0 - h_n - \frac{4fLv_t^2}{2gd} = \frac{L}{g} \frac{dv_t}{dt},$$

где  $h_0$  — напор в снабжающем резервуаре.

Это уравнение выведено из уравнения (1.2a). Подстановка  $dv_t/dt$  и перегруппировка дает:

$$\frac{dh_n}{dt} = \frac{n\sqrt{2gh_n}}{Lf(t)} \left( h_0 - h_n - \frac{4fLv_t^2}{2gd} \right) - \frac{2h_n}{f(t)} \frac{d}{dt} f(t), \quad (1.10)$$

где  $n = A/a_0$ .

Полученное уравнение может быть проинтегрировано методом конечных разностей.

Однако максимальный напор можно оценить не прибегая к интегрированию. Умножим уравнение (1.10) на  $f(t)$ :

$$f(t) \frac{dh_n}{dt} = \frac{n\sqrt{2gh_n}}{L} \left( h_0 - h_n - \frac{4fLv_t^2}{2gd} \right) - 2h_n \frac{d}{dt} f(t).$$

Если максимальный напор возникает в момент времени, когда клапан закрыт, то  $v_t = 0$ , и член, учитывающий трение, исчезает. Если закрытие клапана происхо-

дит таким образом, что максимум напора возникает в момент, предшествующий полному закрытию клапана, то  $v_t$  отлично от нуля, когда  $dh_n/dt=0$ . Если трением пренебречь нельзя, то для того, чтобы получить максимум напора, необходимо уравнение (1.10) проинтегрировать методом конечных разностей, но если трением можно пренебречь, то максимум напора можно получить описанным ниже способом.

Если максимальный напор в математическом смысле достигается в период закрытия клапана, то  $f(t)dh_n/dt=0$ . Если по мере закрытия клапана напор увеличивается и достигает наибольшего значения в момент закрытия клапана, то  $f(t)dh_n/dt=0$ , поскольку функция  $f(t)=0$ , когда клапан закрыт. Итак, независимо от того, достигается ли максимум в математическом смысле в период закрытия клапана или в момент закрытия, определим наибольшее значение, приняв выражение  $f(t)dh_n/dt=0$ :

$$0 = \frac{\pi V \sqrt{2gh_{max}}}{L} (h_0 - h_{max}) - 2h_{max} \frac{d}{dt} f(t);$$

$$\frac{n^2}{L^2} 2gh_{max} (h_0 - h_{max})^2 = 4h_{max}^2 \left( \frac{d}{dt} f(t) \right)^2.$$

Перегруппировка дает:

$$\left( \frac{h_{max}}{h_0} \right)^2 - \left( 2 + \frac{2 \left( L \frac{d}{dt} f(t) \right)^2}{gn^2 h_0} \right) \frac{h_{max}}{h_0} + 1 = 0.$$

Положим

$$\frac{2 \left( L \frac{d}{dt} f(t) \right)^2}{n^2 gh_0} = k^2,$$

тогда

$$\frac{h_{max}}{h_0} = 1 + \frac{k^2}{2} + k^2 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{k^2}}. \quad (1.11)$$

В качестве примера рассмотрим такое закрытие клапана, при котором площадь его проходного сечения изменяется линейно, т. е.  $a_e = a_0(1-t/T)$ , где  $T$  — время закрытия клапана. При этом

$$f(t) = 1 - \frac{t}{T}$$

и

$$\frac{d}{dt}(f(t)) = -\frac{1}{T},$$

тогда

$$k^2 = \frac{2L^2}{T^2 n^2 g h_0} = \frac{2g h_0}{n^2} \cdot \frac{L^2}{T^2 g^2 h_0^2},$$

но  $2gh_0/n^2 = v_0^2$ , где  $v_0$  — стационарное значение скорости в трубопроводе перед началом закрытия клапана. При этом  $k = v_0 L / g h_0 T$ , а  $h_{max}/h_0$  легко определить по уравнению (1.11).

Чтобы проинтегрировать уравнение (1.10) и получить, если требуется, зависимость  $h_n$  от  $t$ , можно воспользоваться простым интегрированием по методу конечных разностей.

Рассмотрим упомянутое выше линейное закрытие, при котором эффективная площадь клапана  $a_e = a_0(1 - t/T)$ . Тогда, если трением можно пренебречь, при  $t=0$ ,  $h_n = h_s$

$$\left(\frac{dh_n}{dt}\right)_{t=0} = \frac{2h_s}{T}.$$

Если время  $T$  разделить на  $m$  интервалов

$$\Delta t = T/m,$$

то

$$h_{n_{t=\Delta t}} = \frac{2h_s}{T} \frac{T}{m} + h_0 = \frac{2h_s}{m} + h_0.$$

Теперь необходимо выполнить следующий шаг интегрирования:

$$h_{n_{t=2\Delta t}} = h_{n_{t=\Delta t}} + \left(\frac{dh_n}{dt}\right)_{t=\Delta t} \frac{T}{m}.$$

Этот процесс можно повторять до тех пор, пока не будет исследован достаточный промежуток времени. Поскольку рассматриваемый случай интегрирования относится к задаче с начальными условиями, то  $m$  должно быть велико и весь процесс вычислений следует выполнять на ЭВМ. Требуемую программу можно написать очень быстро, и время счета будет мало, даже если  $m$  сделать большим.

Как уже отмечалось, для расчета давления на неустановившихся режимах этот аналитический метод имеет

очень большие недостатки, поскольку в нем пренебрегается влиянием упругости, и правильные результаты получаются лишь для случая, когда время закрытия клапана велико. В этом случае задача становится тривиальной. Но аналитический метод может быть использован для расчета, когда можно пренебречь нестационарностью по давлению.

### **1.5. ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ТРУБЕ**

Дальнейшие главы книги касаются сжимаемой среды. Методы расчета сжимаемой среды, описанные ниже, требуют использования ЭВМ. В гл. 2—4 описаны теории гидравлического удара, которые, по мнению автора, не находят применения. Эти теории изложены в последовательности, соответствующей истории их развития. При этом читатель может проследить, как в зависимости от усложнения метода повышается точность результатов.

### **1.6. МГНОВЕННОЕ ЗАКРЫТИЕ КЛАПАНА**

Период колебаний массы воды, вызванных очень резкими изменениями скорости, равен времени прохождения четырехкратной длины трубы со скоростью волны, т. е.  $4L/c$ .

Предположение о мгновенном закрытии клапана является чисто теоретическим, поскольку ни один клапан нельзя закрыть за нулевое время, но изучение этого случая позволяет использовать его при решении реальных задач.

Когда клапан в концевом сечении трубопровода закрывается мгновенно, примыкающий слой жидкости вверх по течению мгновенно приходит в состояние покоя, воздействие струи на клапан и является причиной повышения давления. Это вызывает расширение секции трубы, содержащей слой жидкости, и сжатие жидкости в этом слое. Слой жидкости, расположенный непосредственно за слоем, уже находящимся в покое, будет в свою очередь остановлен чуть позже. Задержка во времени обеспечивает возможность движения вперед второго слоя еще некоторое время, чтобы занять место, появившееся из-за расширения трубы и сжатия жидкости первого слоя.

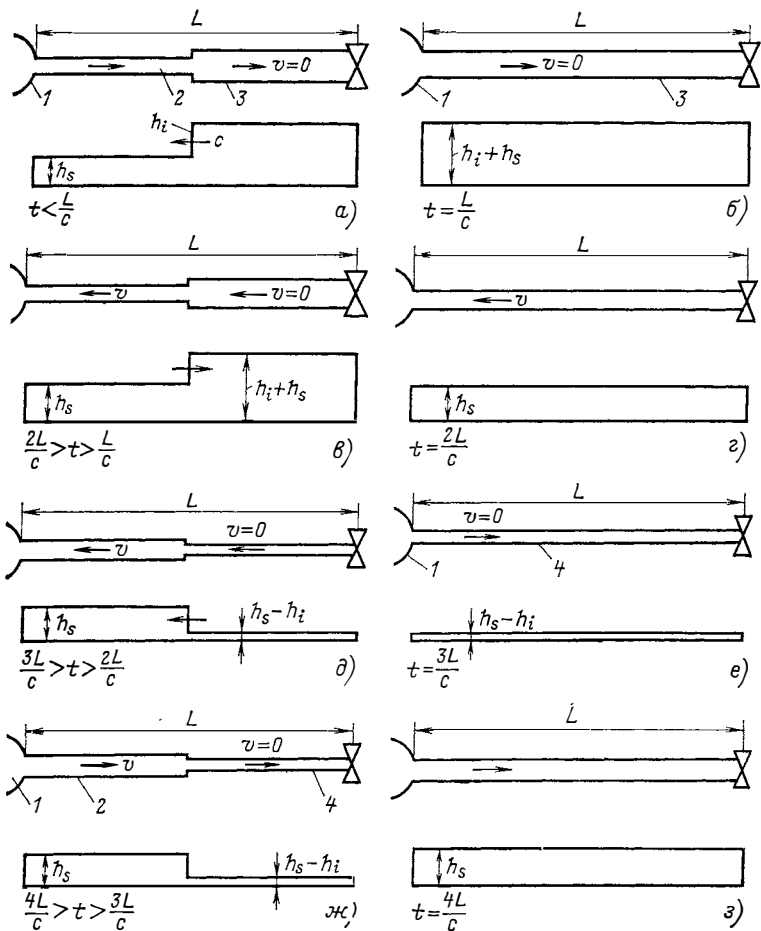


Рис. 1.4. К расчету мгновенного закрытия клапана для упругой трубы и сжимаемой жидкости. Для всех случаев показаны форма трубопровода и график распределения давления.

1 — резервуар; 2 — труба с первоначальным диаметром; 3 — труба с увеличенным диаметром; 4 — труба с уменьшенным диаметром;  $h_i$  — высота волны давления;  $c$  — скорость волны;  $h_s$  — статический напор.

Третий слой жидкости будет приведен в состояние покоя, так же как первый и второй; потеря им количества движения из-за воздействия второго слоя вызывает повышение давления в слое, идентичное тому, что испытывают первый и второй слои. Поскольку первый и вто-

рой слои не могут отскочить от закрытого клапана, то их давление не может уменьшиться и будет поддерживаться на уровне первоначального значения. Последовательно, слой за слоем, жидкость будет приводиться в состояние покоя (рис. 1.4,а).

Со временем вся труба будет заполнена жидкостью, которая находится в состоянии покоя под давлением  $h_i + h_s$ , где  $h_i$  — повышение напора, вызванное изменением количества движения, т. е. инерционный напор а  $h_s$  — статический напор жидкости в резервуаре вверх по потоку (местными потерями пренебрегаем). Это состояние изображено на рис. 1.4,б.

Последовательный процесс соударения слоев с небольшой задержкой по времени, упомянутый выше, и есть процесс распространения волны давления  $h_i$  со скоростью  $c$ . Время, необходимое, чтобы эта волна прошла по трубе длиной  $L$ , равно  $L/c$ . После того как волна пройдет по трубе, вся масса жидкости в ней будет находиться в состоянии покоя, но под давлением  $h_i + h_s$ . Это состояние неустойчиво, поскольку в резервуаре давление  $h_s$ . Поэтому жидкость начнет истекать из трубы в направлении к резервуару. Последующие слои жидкости движутся по направлению к резервуару с начальной скоростью  $v$ , каждый слой жидкости расширяется, а соответствующий участок трубы сжимается до его первоначального диаметра. На рис. 1.4,в изображена промежуточная стадия этого процесса. В результате отраженная волна прибудет к клапану. Это состояние изображено на рис. 1.4,г. Состояние течения теперь такое же, какое существовало при  $t=0$ , но поток направлен от клапана а не к нему.

Это состояние также неустойчиво, так как жидкость будет стремиться отойти от закрытого клапана и двигаться вверх по течению. Поскольку она не может сделать этого, изменение количества движения приведет к уменьшению давления. Слой жидкости, примыкающий к клапану, будет приведен в состояние покоя, давление уменьшится на значение, равное первоначальному повышению давления, т. е. на  $h_i$ . Последующие слои будут приведены в состояние покоя, как и раньше, но это приведет к уменьшению давления в противоположность первоначальному повышению давления. На рис. 1.4,д изображена промежуточная стадия этого процесса. Со временем вся труба заполняется жидкостью в состоянии

покою под давлением  $h_s - h_i$ , как это показано на рис. 1.4,е.

Снова это состояние неустойчиво, так как жидкость начнет втекать в трубу из резервуара с первоначальной скоростью  $v$ . При этом давление увеличится до своего первоначального уровня  $h_s$ , скорость достигнет своего первоначального значения  $v$  и будет направлена к клапану. Промежуточное состояние этого процесса изображено на рис. 1.4,ж.

Конечная стадия обратного течения показана на рис. 1.4,з. Это состояние точно такое же, как в начале, поэтому процесс будет повторяться бесконечно. В действительности под влиянием трения переходный процесс быстро затухнет, так что отраженные волны будут постепенно уменьшаться.

В приведенном выше описании влиянием трения пренебрегали (ниже в этой главе и в § 6.17 будет показано влияние трения).

На практике наблюдается 5—6 отраженных волн значительной величины. Выше при описании механизма образования волн было сказано, что волны отражаются полностью и с отрицательным знаком (волны разрежения) от резервуара и полностью и с положительным знаком (волны сжатия) от клапана (см. рис. 1.4,а, б, в, д, е). Это означает, что волна давления с интенсивностью  $\Delta h$ , перемещающаяся по жидкости с давлением  $h_s$ , отражается от точки с постоянным напором (резервуара) величиной  $h_s - \Delta h$  и от точки с нулевой скоростью (закрытого конца или закрытого клапана) с давлением  $h_s + \Delta h$ . Это является следствием закона сохранения энергии. Когда жидкость обладает удельной кинетической энергией  $v^2/(2g)$ , Н·м/Н, и не имеет энергии деформации  $\rho^2 i / (\omega 2K)$ , Н·м/Н (что характерно для закрытого конца трубы), происходит прямое преобразование кинетической энергии в энергию деформации, т. е. отражение волны сжатия, и наоборот у резервуара.  $K$  — объемный модуль упругости жидкости.)

Сформулируем основной принцип: «Полное положительное отражение происходит от закрытого конца трубопровода, полное отрицательное отражение происходит от открытого конца». При этом подразумевается, что частичные (положительные или отрицательные) отражения происходят от концов, которые не полностью откры-



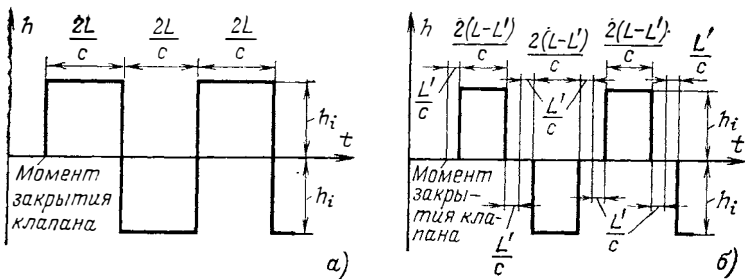
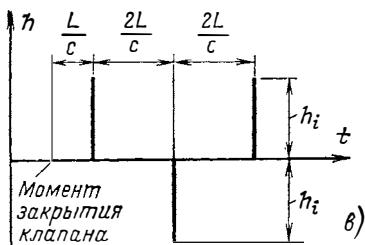


Рис. 1.5.



ты (постоянный напор) или закрыты (нулевая скорость), т. е. от разветвлений [подробнее см. в гл. 6, 7].

Изучив диаграммы на рис. 1.4, а—е, построим графики изменения давления в различных точках: на нижнем конце трубопровода — рис. 1.5, а; в точке  $l'$  — рис. 1.5, б, на конце трубопровода со стороны резервуара — рис. 1.5, в.

Заметим, что хотя форма волны, движущейся вверх по течению, в точке наблюдения сильно изменяется, затухания амплитуды волны не происходит.

Эффект воздействия трения на волну является в какой-то степени неожиданным. Форма волны у клапана показана на рис. 1.6. Эта диаграмма требует разъяснения. В точке А клапан только что закрыт: поток со скоростью  $v$  остановлен, и восстановлен инерционный напор  $h_i$ . В точке В также остановлен поток со скоростью  $v$  и восстановлен инерционный напор  $h_i$ , но волна, подходящая к клапану в момент В, была получена в результате

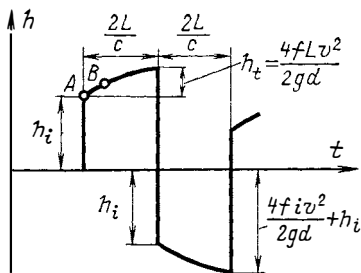


Рис. 1.6.

остановки жидкости в точке  $l'$  выше по потоку. В тот момент, когда жидкость была остановлена, давление потока было больше, чем давление воды на нижнем конце трубопровода на  $4fl'v^2/(2gd)$ , а жидкость остановлена через время  $l'/c$  после закрытия клапана. Внезапная остановка потока в точке  $l'$  вызывает повышение давления на  $h_i + 4fl'v^2/(2gd)$ , но оно действует с запозданием на время  $l'/c$ . Чтобы повышение давления, вызванное остановкой потока в точке  $l'$  и распространяющееся со скоростью волны, достигло клапана, требуется дополнительное время  $l'/c$ ; таким образом, давление прибывает к клапану с запаздыванием на время  $2l'/c$  относительно времени закрытия клапана.

В конечном сечении перед резервуаром жидкость остановится через время  $L/c$  после закрытия клапана, а повышение давления достигнет клапан через время  $L/c$ . Повышение давления равно  $h_i + 4fLv^2/(2gd)$ . Непосредственно за этой волной сжатия возникнет сильная волна разрежения, которая будет распространяться по неподвижной жидкости так, что давление будет падать от  $h_i + 4fLv^2/(2gd)$  до  $-h_i$ . Из-за потерь давления на трение скорость  $v$  и давление  $h_i$  будут меньше их начальных значений, потери напора на трение  $4fLv^2/(2gd)$  будут также меньше первоначального значения. Таким образом происходит ослабление волны (дальнейшие пояснения приведены в § 6.17).

## 1.7. РАЗРЫВ КОЛОННЫ ЖИДКОСТИ

Если волна разрежения, возникающая при отражении от конечного сечения трубы у резервуара, стремится понизить давление жидкости у клапана ниже давления пара, то жидкость закипит при окружающей температуре и внутри возникнет каверна. Давление жидкости не может стать меньше, чем давление пара (рис. 1.7).

Поскольку разрежение не может быть равно первоначальному сжатию (так как давление жидкости не может стать ниже давления пара), то жидкость, движущаяся от клапана в момент времени немного больший, чем  $2L/c$ , не будет быстро приведена в состояние покоя. Следовательно, из-за того что действует неэквивалентная разность давлений, для обращения течения потребуется большая задержка. Это будет повторяться до тех пор, пока колебания давления не достигнут такого уров-

ня, что возникающая волна разрежения не будет снижать давление воды до давления пара. Как только это произойдет, все нестационарные явления не будут отличаться от обычных. Любое выделение газа может создать условия, аналогичные вскипанию. В воде, если абсолютное давление становится меньше 2,4 м вод. ст.,



Рис. 1.7. График изменения давления при разрыве колонны жидкости.

1 — давление пара; 2 — абсолютное давление, равное нулю.

появляются пузырьки растворенного в ней воздуха. Они уменьшают степень понижения давления в воде, так же как вскипание препятствует понижению давления жидкости ниже абсолютного давления пара.

Когда давление жидкости равно давлению пара и внутри жидкости появляется каверна, это явление называют разрывом колонны жидкости.

### 1.8. РАСЧЕТ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПРОЦЕССА, ВЫЗВАННОГО ПОЛНЫМ МГНОВЕННЫМ ЗАКРЫТИЕМ КЛАПАНА НА КОНЦЕ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА

#### Соотношения Аллиеви

Рассмотрим трубопровод длиной  $\Delta x$ , через который нестационарное изменение давления  $\Delta p_i$  проходит за время  $\Delta t$ , уменьшая скорость от  $v$  до нуля (случай закрытия клапана).

Из уравнения (1.2)

$$\Delta p_i = - \frac{w \Delta x}{g} \frac{dv}{dt}.$$

Если  $\Delta t$  — время прохождения по отрезку  $\Delta x$  волны, уменьшающей скорость на  $\Delta v$ , равно  $\Delta x/c$ , где  $c$  — ско-

рость волны, то

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_i &= -\frac{\omega \Delta x}{g} \frac{-\Delta v}{\Delta x/c}; \\ \frac{\Delta p_i}{\omega} &= \Delta h_i = \frac{c \Delta v}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Это уравнение известно как соотношение Аллиеви [1] (Allievi). В некоторых источниках вывод этого уравнения принадлежит Моэну (Moен), Кортевегу (Korteweg) или Жуковскому<sup>1</sup>.

Так как  $\Delta v$  в приведенном выше соотношении есть уменьшение скорости, происходящее за время  $\Delta t$ , то оно может быть заменено на  $v$ , если закрытие клапана происходит внезапно, и тогда

$$\Delta h_i = \frac{cv}{g}; \quad (1.13)$$

теперь остается только вычислить скорость  $c$ .

### Скорость волны

Скорость волны зависит от объемного модуля упругости жидкости и от упругости трубы и легко может быть вычислена.

Рассмотрим пример. Труба снабжена соединениями, позволяющими ей вытягиваться без возникновения продольных напряжений и свободно растягиваться по диаметру.

При изменении внутреннего давления на  $\Delta p_i$  диаметр трубы будет увеличиваться, а жидкость внутри нее сжиматься. Это приведет к тому, что в трубе будет содержаться жидкости больше, чем при нормальных условиях без давления. Это увеличение объема можно вычислить следующим образом:

$$\Delta V_p = \frac{\Delta p_i}{K} \frac{\pi}{4} d^2 L,$$

где  $K$  — объемный модуль упругости жидкости, а  $d$  — диаметр трубы.

<sup>1</sup> Н. Ё. Жуковский вывел аналогичные соотношения и применил на практике раньше Аллиеви. — См. Труды IV Водопроводного съезда 1899 г. — *Прим. перев.*

Кольцевые напряжения в стенке трубы

$$\dot{f}_h = \frac{\Delta p_i d}{2T},$$

где  $T$  — толщина стенки трубы.

Кольцевые напряжения в стенке трубы равны радиальным напряжениям, при этом относительное удлинение

$$\sigma_h = \frac{\dot{f}_h}{E}, \quad (1.14)$$

где  $E$  — модуль упругости.

Приращение радиуса трубы равно  $\sigma_h d/2$ .

Приращение объема трубы

$$\Delta V_{\rho i \rho e} = \pi d L \sigma_h \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \sigma_h \pi d^2 L,$$

или

$$\Delta V_{\rho i \rho e} = \frac{1}{E} \frac{\Delta p_i d}{2T} \frac{d}{2} \pi d L.$$

Суммарное приращение объема из-за растяжения трубы и сжатия жидкости

$$\Delta V_{tot} = \frac{\Delta p_i}{K} \frac{\pi d^2}{4} L + \Delta p_i \frac{\pi d^2}{4} L \frac{d}{TE} = \frac{\pi}{4} d^2 L \Delta p_i \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right). \quad (1.15)$$

Пока волна не достигла рассматриваемого сечения, жидкость продолжает двигаться с первоначальной скоростью  $v$ , при этом время, необходимое для того, чтобы невозмущенный поток занял этот дополнительный объем, составит:

$$\Delta t = \frac{4\Delta V_{tot}}{\pi d^2 v},$$

или

$$\Delta t = \frac{\Delta p_i}{v} L \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right).$$

Это и есть время, которое требуется, чтобы волна прошла по трубе, сжимая жидкость и растягивая трубу.

Из уравнения (1.12)

$$\Delta p_i = \frac{\omega c v}{g} = \rho c v;$$

из уравнения (1.2)

$$\Delta p_i = -\rho L \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

а так как

$$\Delta v = -v, \rho c v = \frac{\rho L v}{\Delta t},$$

то

$$c = \frac{1}{\frac{\Delta p_i}{v} \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right)};$$

из уравнения (1.12)

$$\frac{\Delta p_i}{v} = \frac{w c}{g};$$

$$c = \frac{1}{\frac{w c}{g} \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right)};$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{w}{g} \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right)}}.$$

Если труба абсолютно жесткая, то формулу можно представить в виде

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{w}{g} \frac{1}{K}}}, \text{ или } c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

Таким образом, влияние упругости проявляется в уменьшении объемного модуля упругости жидкости от  $K$  до  $K'$ , где

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} + \frac{d}{TE}.$$

Для стального трубопровода, заделанного в туннеле (затрубное пространство между стальной оболочкой и скалой заполнено бетоном),

$$c = \sqrt{\frac{g/w}{\frac{1}{K} + \frac{d_s}{E_s T} (1-\lambda)}},$$

где

$$\lambda = \frac{d_s^2 / (4E_s T)}{\frac{d_s^2}{4TE_s} + \frac{d_c^2 - d_s^2}{4d_c E_c} + \frac{m+1}{2mE_R} d_s}.$$

Здесь  $d_s$  — внешний диаметр стальной трубы;  $d_c$  — внешний диаметр бетонной трубы;  $E_s$  — модуль упругости стали;  $E_c$  — модуль упругости бетона;  $E_R$  — модуль упругости скалы;  $1/m$  — коэффициент Пуассона для скалы;  $T$  — толщина стенок стальной трубы.

Для скального туннеля

$$c = \sqrt{\frac{g/\omega}{\frac{1}{K} + \frac{2}{E_R}}};$$

для толстостенной трубы

$$c = \sqrt{\frac{g/\omega}{\frac{1}{K} + \frac{1}{8E}(d_1^4 - d_2^4)}};$$

где  $d_1$  — внешний диаметр трубы;  $d_2$  — внутренний диаметр трубы;  $K=2,03067 \cdot 10^9$  Па для воды;  $E=2,10915 \times 10^{11}$  Па для стали;  $\omega=9810$  Н/м<sup>3</sup> для воды;  $g=9,81$  м/с<sup>2</sup>.

### 1.9. ПОВЫШЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ, ВЫЗВАННОЕ МГНОВЕННЫМ ЗАКРЫТИЕМ КЛАПАНА

Повышение давления можно теперь рассчитать по формуле Аллиеви:

$$\Delta p_i = \frac{\omega c v}{g} = \frac{\omega v / g}{\sqrt{\frac{\omega}{g} \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right)}}; \quad (1.16)$$

$$\Delta p_i = \frac{v}{\sqrt{\frac{g}{\omega} \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right)}}. \quad (1.17)$$

При использовании (1.16) и (1.17) следует помнить, что все величины должны быть в системе СИ, т. е.  $g$  — в м/с<sup>2</sup>,  $\omega$  — в Н/м<sup>3</sup>,  $K$  и  $E$  — в Па.  $d$  и  $T$  — в м.

Полученные формулы дают очень большое повышение давления для случая мгновенного закрытия клапана в трубопроводе. Так, в обычной стальной трубе внезапное закрытие клапана будет создавать повышение напора жидкости на 125 м при изменении скорости на 1 м/с. Поэтому для работы на скоростях более 10 м/с необходимо создать очень прочные трубопроводы либо обеспечить невозможность мгновенного закрытия клапана.

## 1.10. ВНЕЗАПНОЕ ЗАКРЫТИЕ КЛАПАНА

Очень большое повышение давления может возникнуть и при постепенном закрытии клапана. Следует иметь в виду, что это давление не является наибольшим, линейное переуплотнение может создать даже более высокое давление, особенно в длинных трубопроводах (см. § 6.17).

График постепенного закрытия клапана можно представить ступеньчатой линией, где каждый шаг закрытия происходит мгновенно. Каждый шаг будет возбуждать небольшое изменение скорости  $\Delta v$ , связанное с небольшим повышением давления  $\Delta p$ , которое определяется по уравнению (1.12):  $\Delta p = \omega c \Delta v / g$ , а форма волны будет иметь сходство с изображенной на рис. 1.5,а.

На каждом шаге закрытия создается волна, которая начинает распространяться через небольшой промежуток времени после предшествующей. Волны налагаются друг на друга, и давление у клапана повышается. Если окончательное закрытие клапана произойдет до того, как вернется первая отраженная волна разрежения, то сумма  $\Delta p$  всех волн будет равна повышению давления при мгновенном закрытии клапана при той же начальной скорости. Такое закрытие клапана называют «внезапным». Форма волны при этом будет иной, чем при мгновенном закрытии, но ее наибольшая амплитуда будет такой же. Это явление возникает, если закрытие производится за время меньшее, чем фаза гидравлического удара  $2L/c$ .

Если закрытие клапана производится медленнее, то отраженные волны разрежения возвратятся до окончания закрытия клапана. В результате уменьшится степень повышения давления, а может быть, даже давле-



ние и понизится. Таким образом, можно гарантировать, что повышение давления, вызванное закрытием клапана за время, большее  $2L/c$ , будет иметь пик давлений меньший, чем при внезапном закрытии.

Длина современных трубопроводов может достигать 100 км без промежуточных перекачивающих станций. Фаза гидравлического удара такого трубопровода может быть более 200 с. Закрытие клапана на конце такого трубопровода за время 3 мин 20 с может показаться медленным, но в действительности оно является внезапным закрытием с максимальными амплитудами нестационарных эффектов. Ясно, что рассматривать темп закрытия клапана в терминах «внезапно» или «медленно» нельзя без учета фазы гидравлического удара трубы ( $2L/c$ ).

Заметим, что величину  $2L/c$  нельзя смешивать с периодом колебаний волны гидравлического удара  $4L/c$ .

## **ГЛАВА ВТОРАЯ**

### **АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

#### **2.1. ВВЕДЕНИЕ**

В этой главе описываются нестационарные процессы, вызванные медленным движением регулирующих устройств. Поскольку излагаемые вопросы являются предпосылками к более современной теории расчета, которая описывается в последующих главах, то здесь рассматриваются только основные принципы.

#### **2.2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

Существуют два полностью эквивалентных аналитических метода решения задачи о медленно закрывающемся клапане, основанные на предположении, что трением в трубопроводе следует пренебречь. При решении задачи не очень опытным расчетчиком это предположение может привести не только к неправильным, но и к небезопасным решениям. Поэтому перед использованием ниже приведенных методик необходимо учесть эти замечания.

### 2.3. СТУПЕНЧАТОЕ ЗАКРЫТИЕ КЛАПАНА ЗА ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ, РАВНЫЕ ФАЗЕ УДАРА

Идея описываемого ниже метода заключается в том, что условия, накладываемые на давление и скорость в трубе в процессе закрытия клапана, рассматриваются для каждого интервала времени, равного  $2L/c$ . При этом, конечно, необходимо знать положение клапана в конце каждого из интервалов. Произведенная в начальный момент времени первая ступень закрытия клапана еще не создаст отражения волны разрежения от конца трубы у резервуара, поэтому ее можно рассматривать независимо. Распределение параметров потока в трубопроводе через короткий промежуток времени после первого закрывающего движения клапана показано на рис. 2.1.

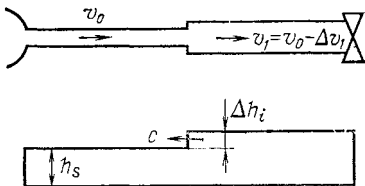


Рис. 2.1.

Волна с амплитудой  $\Delta h_i$  перемещается вверх по трубопроводу со скоростью  $c$ . Эту волну обозначим  $F$ . Волны, перемещающиеся вниз по трубе, обозначим  $f$ . Объяснение этих обозначений будет дано ниже. Сначала, до первой ступени закрытия клапана, поток характеризовался скоростью  $v_0$  и напором  $h_s$ . Поэтому

$$\alpha_p v_0 = C_{d_0} \alpha_{V_0} \sqrt{2gh_s}, \quad (2.1)$$

где  $\alpha_{V_0}$  — полное открытие клапана;  $C_{d_0}$  — коэффициент расхода.

Непосредственно за первой ступенью закрытия клапана

$$v_1 = \frac{C_{d_1} \alpha_{V_1}}{\alpha_p} \sqrt{2g \left( h_s + \frac{c \Delta v_1}{g} \right)^{0.5}}, \quad (2.2)$$

где  $c$  — скорость распространения волны.

Обозначив  $\frac{C_{d_1} \alpha_{V_1}}{\alpha_p} \sqrt{2g}$  через  $\beta$ , получим:

$$v_0 = \beta_0 h_s^{0.5}, \quad (2.3)$$

и

$$v_1 = \beta_1 \left( h_s + \frac{c \Delta v_1}{g} \right)^{0.5}. \quad (2.4)$$

Но  $\Delta v_1 = v_0 - v_1$ , тогда

$$v_1^2 = \beta_1^2 \left( h_s + \frac{cv_0 - cv_1}{g} \right);$$

$$v_1^2 + \frac{\beta_1^2 cv_1}{g} - \beta_1^2 \left( h_s + \frac{cv_0}{g} \right) = 0.$$

Решаем это квадратное уравнение:

$$v_1 = -\frac{\beta_1^2 c}{2g} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta_1^4 c^2}{g^2} + 4\beta_1^2 h_s + \frac{4\beta_1^2 cv_0}{g}}; \quad (2.5)$$

$$v_1 = -\frac{\beta_1^2 c}{2g} + \beta_1 \sqrt{\left( \frac{\beta_1 c}{2g} \right)^2 + h_s + \frac{v_0 c}{g}}. \quad (2.6)$$

В § 1.4 указывалось, что уравнение Бернулли применимо к частично открытому клапану даже в условиях нестационарных течений.

Вычислив  $v_1$ , легко определим  $\Delta h_i$   $F$ -волны по соотношению  $\Delta h_i = c(v_0 - v_1)/g$ .

Через период  $2L/c$  происходит следующий шаг закрытия клапана, и тогда  $\beta_2 = C_{d_2} a_{v_2} \sqrt{2g/a_p}$ .

Однако через интервал времени  $L/c$  после первого шага закрытия от резервуара отразилась  $f$ -волна, которая вернется назад к клапану в момент времени  $2L/c$ , когда происходит следующий шаг закрытия. Волна  $f$  будет равна  $-F$ , так как она создана при отражении  $F$ -волны от резервуара в виде волны разрежения. Напор у клапана в момент времени  $2L/c$  будет  $h_s + f$ . Скорость в трубе  $v_1 = v_0 - \Delta v_1$ . Напор у клапана увеличится от  $h_s + f$  до  $h_s + f + c(v_1 - v_2)/g$ ,

$$v_2 = \beta_2 [h_s + f + c(v_1 - v_2)/g]^{0,5}.$$

Так как теперь

$$\Delta v_1 = Fg/c \text{ и } f = -F, \quad \Delta v_1 = -fg/c,$$

$$v_1 - v_2 = v_0 - \Delta v_1 - v_2 = v_0 + fg/c - v_2,$$

то

$$v_2^2 = \beta_2^2 (h_s + f + cv_0/g + f - cv_2/g).$$

Решение этого квадратного уравнения дает:

$$v_2 = -\frac{\beta_2^2 c}{2g} + \beta_2 \sqrt{\left( \frac{\beta_2 c}{2g} \right)^2 + \frac{cv_0}{g} + h_s + 2f}. \quad (2.7)$$

Так как  $f = -\Delta h_i$ , то можно рассчитать  $v_2$  и найти  $\Delta h_2 = c(v_1 - v_2)/g$ .

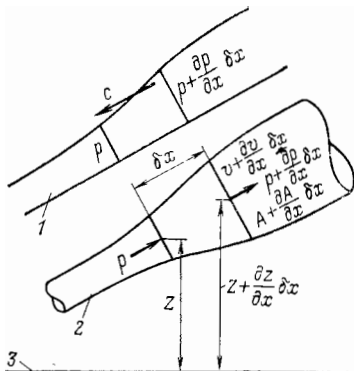
Напор  $h_2 = h_s + f + \Delta h_2$ .

Весь процесс можно повторять до тех пор, пока клапан не будет закрыт полностью.

## 2.4. ЦЕПНЫЕ УРАВНЕНИЯ АЛЛИЕВИ

Аналитический метод, разработанный Аллиеви в 1903 г. [1], сложнее, чем метод, приведенный в § 2.3; изящнее математически, но не точнее; по методике, описанной выше, можно легко получить цепные уравнения Аллиеви путем преобразований.

Прежде чем представить цепные уравнения Аллиеви, необходимо вывести дифференциальные уравнения гидравлического удара, которые представляют собой дифференциальную форму уравнения неразрывности и уравнений количества движения. Так как они являются основой всех точных аналитических методов, то их целесообразно вывести в данном параграфе.



### Уравнение неразрывности

На рис. 2.2 показан отрезок трубы, по которой вверх по течению перемещается волна со скоростью  $c$ . Масса жидкости, втекающей в элемент длиной  $\delta x$  за время  $\delta t$ , равна  $\rho A v \delta t$ , масса жидкости, вытекающей за время  $\delta t$ , равна

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x\right) \delta t.$$

Дополнительная масса, которая может быть аккумулярована из-за сжатия жидкости и растяжения трубы на

заданном участке  $\delta x$  за время  $\delta t$  в результате увеличения среднего давления, происходящего за интервал времени  $\delta t$ , равна

$$\rho A \delta x \frac{\partial p}{\partial t} \delta t \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right) \text{ [см. (1.15)].}$$

Результирующее изменение массы на участке  $\delta x$  необходимо приравнять массе, которую можно аккумулировать путем сжатия жидкости и растяжения трубы, пренебрегая малыми второго порядка:

$$\begin{aligned} \rho A v \delta t - \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x A v \delta t - \rho v \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \delta t - \rho A \frac{\partial v}{\partial x} \delta x \delta t - \rho A v \delta t = \\ = \rho A \delta x \frac{\partial p}{\partial t} \delta t \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

или

$$A v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho v \frac{\partial A}{\partial x} + \rho A \frac{\partial v}{\partial x} + \rho A \frac{\partial p}{\partial t} \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Так как  $\frac{g}{\omega c^2} = \frac{1}{K} + \frac{d}{TE}$ , [см. (1.16)], то

$$\frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

но  $\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K} \right)$ , следовательно,  $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial p}{\partial x}$

и

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

При выводе (1.16) предполагалось, что труба имеет круглое поперечное сечение, при этом  $A = \pi d^2/4$ :

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{v}{\frac{\pi}{4} d^2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\pi}{4} 2d \frac{\partial d}{\partial p} = \frac{2v}{d} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial d}{\partial p};$$

но

$$\frac{\partial d}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{h}{E} d \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{p d}{2TE} d \right) = \frac{d^2}{2TE},$$

поэтому

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = 2 \frac{v}{d} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{d^2}{2TE} = v \frac{\partial p}{\partial x} \frac{d}{TE}.$$

Так как  $\omega(h - z) = p$  и  $\omega \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}$ , то (2.10) преобразуется к виду

$$\frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{K} + \frac{vd \frac{\partial p}{\partial x}}{TE} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.11)$$

где  $\rho_0$  — плотность при начальном давлении, относительно которого ведется измерение.

Так как  $\rho/\rho_0 = 1 + p/K$  и  $K$  чрезвычайно велико по сравнению с практически применяемыми  $p$ , то  $\rho/\rho_0$  может быть приравнено единице с достаточной точностью:

$$\frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} + v \omega \left( \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

но

$$\omega \left( \frac{1}{K} + \frac{d}{TE} \right) = \frac{g}{c^2},$$

поэтому

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad (2.12)$$

Это и есть уравнение неразрывности гидравлического удара в дифференциальной форме.

### Уравнение количества движения

Уравнение равновесия сил запишем для элемента трубы, показанного на рис. 2.2. Сила, действующая слева направо, равна:

$$pA - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \right) + \left( p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \left( \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \right) - \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

$$- \tau P \delta x - \omega A \delta x \frac{dz}{dx},$$

$$(4) \quad (5)$$

где (1) — сила давления, действующая по оси трубы влево;

(2) — сила давления, действующая по оси трубы вправо;

- (3) — средняя продольная составляющая реакции сил давления со стороны стенок трубы на жидкость;
- (4) — сила трения, противодействующая течению;
- (5) — гравитационная составляющая, действующая вдоль средней линии против течения.

Примечание.  $P$  — средний смоченный периметр элемента трубы;  $\tau$  — вязкое касательное напряжение между жидкостью и стенкой трубы.

Пренебрегая малыми второго порядка, получаем, что сила, действующая слева направо,

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} \delta x - \tau P \delta x - \omega A \delta x \frac{dz}{dx}.$$

Эта сила вызывает ускорение жидкости в элементе, и согласно второму закону Ньютона

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} \delta x - \tau P \delta x - \omega A \delta x \frac{dz}{dx} = \rho A \delta x \frac{dv}{dt}. \quad (2.13)$$

Разделив на  $A \delta x$  и преобразовав, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \omega \frac{dz}{dx} + \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\tau}{A/P} = 0, \quad (2.14)$$

где  $A/P = m$  — гидравлический радиус трубы;  $A$  — площадь поперечного сечения трубы;  $dv/dt$  по правилам для полной производной можно представить как

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t};$$

но

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \omega z) + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\tau}{m} = 0.$$

Разделив на  $\omega = \rho g$ , получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\omega} + z \right) + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\tau}{\rho g m} = 0.$$

По формуле Дарси — Вейсбаха

$$\frac{\tau}{\rho g m} = \frac{f v |v|}{2 g m}$$

(при этом предполагается, что используется формула трения для стационарных условий).

Так как  $p/w + z = h$  — потенциальный напор, то

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f|v|v}{2gm} = 0. \quad (2.15a)$$

Для трубы с круглым поперечным сечением

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2fv|v|}{gd} = 0. \quad (2.15б)$$

так как  $m = d/4$ .

Отметим, что уравнения неразрывности и количества движения представляют собой пару квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных и поэтому не могут быть решены аналитически. Совместно они решают задачу о распространении возмущений в упругих трубах.

Чтобы получить аналитическое решение, предлагались различные упрощения. Так, Аллиев предложил пренебречь нелинейными членами и трением, т. е. членом

$v \frac{\partial h}{\partial x}$  в уравнении неразрывности, поскольку член  $v \frac{\partial h}{\partial x}$  — порядка  $\frac{v}{v+c} \frac{\partial h}{\partial t}$  и во многих трубопроводах мал, и членами  $\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\frac{2fv|v|}{gd}$  в уравнении количества движения.

Член  $\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x}$  — порядка  $\frac{v}{(v+c)g} \frac{\partial v}{\partial t}$ , и он обычно мал, но пренебрежение членом  $\frac{2fv|v|}{gd}$  означает пренебрежение

трением, что можно допустить, если потери напора на трение составляют малую долю статического напора.

Предположение об отсутствии трения является очень важным: без него нет возможности получить аналитическое решение, а с ним аналитическое решение становится крайне ограниченным.

Упрощенные уравнения, которые использовал Аллиев: уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t}; \quad (2.16)$$

уравнение количества движения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (2.17)$$



Дифференцируя первое по  $t$ , а второе по  $x$ , получаем волновое уравнение в классическом виде, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial x \partial t} = -\frac{g}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

следовательно,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (2.18)$$

Поскольку вид уравнений определен, то можно полагать, что возможно аналитическое решение:

$$h = h_0 + F\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right); \quad (2.19)$$

$$v = v_0 - \frac{g}{c} \left[ F\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right) \right]. \quad (2.20)$$

Это решение (обычно приписываемое Риману) может быть найдено в любом учебнике по математике, где решаются дифференциальные уравнения в частных производных.

В других работах, посвященных неустановившимся режимам, решения отличаются от приведенных выше.

Это объясняется тем, что в данной книге за начало отсчета координаты  $x$  принят верхний конец (от резервуара), а  $v$  предполагается положительной, если течение направлено в сторону увеличения  $x$ ; в других работах

за начало  $x$  принят нижний конец трубы, т. е. от клапана, и скорость принята положительной, если она направлена в сторону уменьшения  $x$ . (В данной книге это не принято из-за математической непоследовательности.)

Символы  $F$  и  $f$  обозначают функцию. Ясно, что  $F(t+x/c)$  и  $f(t-x/c)$  должны измеряться в единицах напора и представлять собой изменение напора из-за воздействия волны. Более полно это будет показано в § 2.5.

Рассмотрим уравнение Римана для напора. Оно может быть представлено в виде графика по оси  $x$  в мо-

мент времени  $t=t_0$ . Для наблюдателя, перемещающегося вверх по течению со скоростью волны  $c$  и находящегося в точке  $x=X$  в момент  $t=t_0$ , напор равен  $h_x$  (рис. 2.3). Если пренебречь членом  $f(t-x/c)$ , то можно записать  $h_x=h_0+F(t_0-x/c)$ . Так как наблюдатель перемещается, то в момент  $t_1$  он окажется в точке  $X_1$ , и можно записать  $X_1=X-(t-t_0)c$ .

В соответствии с уравнением Римана

$$h_{x_1}=h_0+F\left(t_1+\frac{X_1}{c}\right),$$

но

$$F\left(t_1+\frac{X_1}{c}\right)=F\left[t_1+\frac{X-(t_1-t_0)c}{c}\right]=F\left(t_0+\frac{X}{c}\right),$$

т. е.  $h_{x_1}$  равно первоначальной неизменной величине  $F$  в момент  $t=t_0$  в точке  $x=X$ .

Если для наблюдателя, перемещающегося вверх по течению со скоростью волны, член  $F$  не изменяется, то член  $F$  может быть только волной, двигающейся вверх по течению со скоростью  $c$ .

Аналогично этому доказывается, что член  $f$  представляет собой волну, двигающуюся вниз по течению со скоростью  $c$ . Уравнение Римана для напора имеет ясную интерпретацию. Напор в любой точке  $X$  трубопровода в момент  $t$  складывается из статического напора  $h_0$ , напора, созданного в этой точке и в это время волной, двигающейся вверх по трубе ( $F$ ), и напора, созданного волной, двигающейся вниз по трубе ( $f$ ).

Из этих уравнений легко вывести условия отражения от резервуара и закрытого конца математическими методами, а не с помощью инженерного подхода, как в гл. 1.

Рассмотрим волну, созданную у нижнего конца трубы и перемещающуюся вверх по течению к резервуару. Выберем на ней точку, возбужденную в момент времени  $t=0$  на нижнем конце  $x=L$ . Амплитуда волны будет  $F(0+L/c)$ . Так как при движении вверх ее форма остается неизменной, то в момент  $t$  в точке  $x$

$$F(L/c)=F(t+x/c).$$

Когда эта волна в момент  $L/c$  достигнет резервуара, ее амплитуда будет иметь то же значение:  $F(L/c+0/c)$ , т. е.  $F(L/c)$ . У резервуара напор должен оставаться по-

стоянным  $h_0$ , т. е.

$$h = h_0 = h_0 + F(L/c) + f(L/c + 0),$$

следовательно,  $F(L/c)$ , которая все еще равна  $F(0 + L/c)$ , должна быть равна  $-f(L/c + 0)$ .

В следующий период  $L/c$  вновь созданная волна  $f$  будет двигаться назад к клапану и прибудет в  $x=L$  в момент времени  $2L/c$ , при этом  $f(2L/c - L/c) = f(L/c)$ . Это показывает, что и волна  $f$  перемещается назад к клапану без изменения амплитуды. Таким образом, начальная волна  $F(0 + L/c)$  без изменения амплитуды и формы перемещается вверх по течению к резервуару, от которого она полностью отражается с отрицательным знаком, как  $f$ -волна, перемещающаяся затем вниз по течению к клапану без изменения амплитуды и формы и прибывающая туда через время  $2L/c$  после возникновения  $F$ -волны.

В простом трубопроводе  $f$ -волны, подходящие к клапану, были возбуждены на  $2L/c$  раньше, чем  $F$ -волны, которые были полностью и с отрицательным знаком отражены от резервуара.

Аналогично этому у закрытого конца  $F$ -волны полностью отражаются с положительным знаком. Это можно показать с помощью уравнения Римана для скорости. У закрытого конца скорость всегда должна быть равна нулю, т. е.  $v = v_0 = 0$ .

$$\text{Итак, } 0 = 0 - \frac{g}{c} \left[ F\left(\frac{L}{c} + \frac{0}{c}\right) - f\left(\frac{L}{c} - 0\right) \right], \text{ т. е.}$$

$$F\left(\frac{L}{c}\right) = f\left(\frac{L}{c}\right). \quad (2.21)$$

Обобщим это следующим образом: если рассматриваются периоды времени  $T$  (где  $T = 2L/c$ ) и определенное время обозначить как  $iT$ , где  $i$  — соответствующий числовой множитель, то в случае отражения от открытого конца (резервуара)

$$f_i = -F_{i-1}, \quad (2.22)$$

а в случае отражения от закрытого конца (клапана)

$$f_i = F_{i-1}. \quad (2.23)$$

Обозначив волну  $F(t + x/c)$  в момент времени  $iT$  через  $F_i$ , а волну  $f(t - x/c)$  — через  $f_i$ , уравнения Римана

запишем так:

$$h_i = h_0 + F_i + f_i; \quad (2.24)$$

$$v_i = v_0 - \frac{g}{c} (F_i - f_i). \quad (2.25)$$

Рассмотрим случай медленного закрытия клапана в интервалы времени  $T=2L/c$ :

при  $t=0$

$$h_0 = h_0 + F_0 + f_0; \quad (2.26)$$

$$v_0 = v_0 - \frac{g}{c} (F_0 - f_0); \quad (2.27)$$

при  $t=T$

$$h_1 = h_0 + F_1 + f_1; \quad (2.28)$$

$$v_1 = v_0 - \frac{g}{c} (F_1 - f_1); \quad (2.29)$$

при  $t=2T$

$$h_2 = h_0 + F_2 + f_2; \quad (2.30)$$

$$v_2 = v_0 - \frac{g}{c} (F_2 - f_2) \quad (2.31)$$

и т. д. Но  $f_0=0$ , поскольку не может быть  $f$ -волны до тех пор, пока начальная  $F$ -волна не отразится от резервуара и не вернется к клапану.

Теперь

$$f_1 = -F_0; \quad (2.32)$$

$$f_2 = -F_1; \quad (2.33)$$

$$f_3 = -F_2 \quad (2.34)$$

и т. д.;

$$h_0 = h_0 + F_0, \quad (2.35)$$

$$v_0 = v_0 - \frac{g}{c} F_0; \quad (2.36)$$

$$h_1 = h_0 + F_1 - F_0; \quad (2.37)$$

$$v_1 = v_0 - \frac{g}{c} (F_1 + F_0); \quad (2.38)$$

$$h_2 = h_0 + F_2 - F_1; \quad (2.39)$$

$$v_2 = v_0 - \frac{g}{c} (F_2 + F_1) \quad (2.40)$$

и т. д.

Складывая последовательные пары уравнений для напора и вычитая последовательные пары уравнений для скоростей, получаем:

$$h_1 + h_0 = 2h_0 + F_1; \quad (2.41)$$

$$h_2 + h_1 = 2h_0 + F_2 - F_0; \quad (2.42)$$

$$h_3 + h_2 = 2h_0 + F_3 - F_1 \quad (2.43)$$

и т. д. и

$$v_0 - v_1 = \frac{g}{c} F_1; \quad (2.44)$$

$$v_1 - v_2 = -\frac{g}{c} (F_0 - F_2); \quad (2.45)$$

$$v_2 - v_3 = -\frac{g}{c} (F_1 - F_3) \quad (2.46)$$

и т. д.

В общем виде

$$F_i - F_{i-2} = \frac{c}{g} (v_{i-1} - v_i), \quad (2.47)$$

тогда

$$h_i + h_{i-1} - 2h_0 = \frac{c}{g} (v_{i-1} - v_i); \quad (2.48)$$

функции  $F$  и  $f$  исключены из задачи.

Для того чтобы решить эти уравнения, необходима дополнительная информация. Если можно определить  $v_i$  и  $v_{i-1}$ , то возможно решить эти уравнения последовательно, поочередно меняя  $i$  на 1, 2, 3 и т. д.

Выведем граничные условия, определяемые клапаном.

Используя (1.9), получаем:

$$v_i = \frac{C_{d_i} a_{V_i}}{a_p} \sqrt{2gh_i}, \quad (2.49)$$

или

$$v_i = \frac{C_{d_i} a_{V_i} a_{V_0}}{a_{V_0} a_p} \sqrt{2gh_i}. \quad (2.50)$$

Когда  $i = 0$

$$v_0 = \frac{C_{d_0} a_{V_0}}{a_{p_0}} \sqrt{2gh_0},$$

тогда

$$\frac{v_i}{v_0} = \frac{C_{d_i} a_{V_i}}{a_{V_0}} \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}. \quad (2.51)$$

Обозначим  $\frac{C_{d_i} a_{V_i}}{C_{d_0} a_{V_0}}$  через  $\eta_i$  и  $h_i/h_0$  через  $\zeta_i^2$ .

Тогда

$$v_i = v_0 \eta_i \zeta_i; \quad (2.52)$$

$$h_i = h_0 \zeta_i^2. \quad (2.53)$$

Подставляя (2.53) в уравнение (2.48), получаем:

$$h_0 \zeta_i^2 + h_0 \zeta_{i-1}^2 - 2h_0 = \frac{v_0 c}{g} (\eta_{i-1} \zeta_{i-1} - \eta_i \zeta_i),$$

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i-1}^2 - 2 = \frac{v_0 c}{g h_0} (\eta_{i-1} \zeta_{i-1} - \eta_i \zeta_i).$$

Обозначим  $v_0 c / (g h_0) = 2\rho$ , тогда

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i-1}^2 - 2 = 2\rho (\eta_{i-1} \zeta_{i-1} - \eta_i \zeta_i). \quad (2.54)$$

Использованные символы предложены Аллиеву в его первой работе. Символ  $\rho$  не следует смешивать с повсеместно используемым символом, обозначающим плотность жидкости. Здесь  $\rho = cv_0 / (2gh)$  назван «характеристикой Аллиеву для трубы».

Уравнение (2.54) представляет семейство уравнений, получающихся, если поочередно вводить  $i=1, 2, 3$  и т. д. Они известны как цепные уравнения Аллиеву.

При  $i=1$

$$\zeta_1^2 + \zeta_0^2 - 2 = 2\rho (\eta_0 \zeta_0 - \eta_1 \zeta_1). \quad (2.55)$$

$\zeta_0=1$ , поскольку вплоть до начала закрытия клапана напоры постоянны;  $\eta_0=1$ , если клапан открыт полностью. Итак, при  $i=1$

$$\zeta_1^2 - 1 = 2\rho (1 - \eta_1 \zeta_1). \quad (2.56)$$

Если открытие клапана  $\eta_1$  известно, то  $\zeta_1$  можно вычислить, решив обычное квадратичное уравнение.

При  $i=2$

$$\zeta_2^2 + \zeta_1^2 - 2 = 2\rho (\eta_1 \zeta_1 - \eta_2 \zeta_2). \quad (2.57)$$

$\zeta_1$  — было вычислено;  $\eta_1$  и  $\eta_2$  должны быть заданы, т. е. открытие клапана должно быть известно, тогда  $\zeta_2$  может быть вычислена.

Таким образом можно рассчитать весь период закрытия клапана. Так как решение, полученное для первого шага, используется при следующем, то решения находятся в результате цепного процесса, что и дало наименование данному методу.

Получив  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  и т. д., легко вычислим напоры  $h_1 = h_0 \zeta_1^2, h_2 = h_0 \zeta_2^2, h_3 = h_0 \zeta_3^2$  и т. д. и скорости  $v_1 = v_0 \eta_1 \zeta_1, v_2 = v_0 \eta_2 \zeta_2, v_3 = v_0 \eta_3 \zeta_3$  и т. д.

Таким образом получено полное решение.

На основании этого метода была разработана методика расчета трубопроводных сетей и простых труб, которая изложена в монографиях Рича (Rich) [30] и Джагера (Jaeger) [25]. Однако, поскольку этот метод не учитывает влияния трения, здесь мы ограничились только общими положениями.

## 2.5. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ШНИДЕРА—БЕРЖЕРОНА

Цепные уравнения Аллиеви дают стройное решение задачи о гидравлическом ударе без трения, но становятся громоздкими при решении сложного трубопровода.

Графическим методом Шнидера (Schnyder) — Бержерона (Bergeron) [2, 3] решаются те же основные уравнения, что и методом Аллиеви, но его значительно легче обобщить.

Метод не требует вычисления интенсивности отраженных волн, если в сети больше одной трубы, но позволяет с допустимой точностью рассчитать влияние трения в системе, и при этом можно иметь дело со сложными граничными условиями. Этот метод ценится высококвалифицированными специалистами. Однако он не лишен недостатков, и один из них — это необходимость высокого уровня квалификации исполнителей. При рассмотрении большинства схем необходимо исследовать большое число мод операций схемы, но такие исследования редко проводятся, поскольку графический метод весьма трудоемкий.

Любые графические методы состоят из следующих операций:

- 1) графического представления граничных условий предложенной сети;

2) графического представления уравнений гидравлического удара, которые описывают условия в трубе при прохождении волн;

3) согласования явлений на концах двух (или более) труб, на которых заданы граничные условия, т. е. условий гидравлического управления.

В любую задачу о гидравлическом ударе входят четыре переменных: напор, скорость (или расход), положение в трубе  $x$  и время  $t$ . Чтобы представить эти четыре переменные на графике, принимается, что волна распространяется с постоянной скоростью  $c$ . Это является еще одним недостатком графического метода.

Сначала пренебрегаем трением (метод расчета с учетом трения будет приведен ниже).

### Гидравлический удар или распространение элементарных волн

Элементарная волна (eagre) — это слабая волна, перемещающаяся с постоянной скоростью. В данном контексте этот термин используется для описания малых элементарных волн, которые непрерывно перемещаются по трубопроводу во время и после работы регулирующего устройства.

Преобразование уравнения скоростей Римана (2.20) дает:

$$\frac{c}{g}(v_0 - v) = F\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (2.58)$$

Запишем уравнение (2.19) для двух точек  $x$  и  $x'$  в моменты времени  $t$  и  $t'$ :

$$h_{x,t} - h_0 = F\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right); \quad (2.59)$$

$$h_{x',t'} - h_0 = F\left(t' + \frac{x'}{c}\right) + f\left(t' - \frac{x'}{c}\right). \quad (2.60)$$

и

$$\frac{c}{g}(v_0 - v_{x,t}) = F\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right); \quad (2.61)$$

$$\frac{c}{g}(v_0 - v_{x',t'}) = F\left(t' + \frac{x'}{c}\right) - f\left(t' - \frac{x'}{c}\right). \quad (2.62)$$



Вычитание уравнений напоров дает:

$$h_{x,t} - h_{x',t'} = F\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right) - F\left(t' - \frac{x'}{c}\right) - f\left(t' - \frac{x'}{c}\right). \quad (2.63)$$

Вычитание уравнений скоростей дает:

$$\frac{c}{g}(v_{x',t'} - v_{x,t}) = F\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right) - F\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + f\left(t' - \frac{x'}{c}\right). \quad (2.64)$$

Эти уравнения применимы к любым значениям  $x$ ,  $t$ ,  $x'$  и  $t'$ . Но если предположить, что  $x$ ,  $x'$ ,  $t$  и  $t'$  связаны уравнением  $x = x' + c(t - t')$ , то приходим к очень важному выводу. Это уравнение описывает движение наблюдателя, перемещающегося в направлении увеличения  $x$ . Назовем этого наблюдателя «волновым наездником».

Для волнового наездника

$$t + \frac{x}{c} = t + \frac{x' + ct - ct'}{c} = 2t - t' + \frac{x'}{c} \quad (2.65)$$

и

$$t - \frac{x}{c} = t - \frac{x' + ct - ct'}{c} = t' - \frac{x'}{c}. \quad (2.66)$$

Итак, для наездника, перемещающегося вниз по течению,  $F(t + x/a)$  изменяется, а  $f(t - x/a)$  — нет (см. § 2.4).

Уравнение напора для волнового наездника имеет вид:

$$h_{x,t} - h_{x',t'} = F\left(2t - t' + \frac{x'}{c}\right) + f\left(t' - \frac{x'}{c}\right) - F\left(t' + \frac{x'}{c}\right) - f\left(t' - \frac{x'}{c}\right) = F\left(2t - t' + \frac{x'}{c}\right) - F\left(t' + \frac{x'}{c}\right), \quad (2.67)$$

а уравнение скорости

$$\frac{c}{g}(v_{x',t'} - v_{x,t}) = F\left(2t - t' + \frac{x'}{c}\right) - F\left(t' + \frac{x'}{c}\right), \quad (2.68)$$

поэтому

$$h_{x,t} - h_{x',t'} = -\frac{c}{g}(v_{x,t} - v_{x',t'}). \quad (2.69)$$

Необходимо подчеркнуть, что этот результат справедлив только для волнового наездника, движущегося вниз по течению.

Аналогично можно показать, что для волнового наездника, перемещающегося вверх по течению, т. е. подчиняющемуся уравнению  $x=x'-c(t-t')$ , можно написать

$$h_{x,t} - h_{x',t'} = \frac{c}{g}(v_{x,t} - v_{x',t'}). \quad (2.70)$$

Так как  $v=q/A$ , где  $q$  — расход,  $A$  — площадь поперечного сечения трубы, то

$$h_{x,t} - h_{x',t'} = \pm \frac{c}{Ag}(q_{x,t} - q_{x',t'}). \quad (2.71)$$

Это уравнение описывает в координатах  $h, q$  две линии с равным, но противоположно направленным наклоном. Необходимо всегда помнить, что линия с положительным наклоном подразумевает волнового наездника, движущегося вверх по трубе, линия с отрицательным наклоном подразумевает волнового наездника, движущегося вниз по трубе. Линию с положительным наклоном назовем элементарной волной *I*, а линию с отрицательным наклоном — элементарной волной *II*. Движение вдоль каждой из этих линий подразумевает движение вдоль трубы со скоростью  $c$  и, следовательно, движение во времени. Направление в сторону увеличения  $x$  в любой трубе должно быть выбрано так, чтобы оно совпало с направлением начального стационарного течения.

## Граничные условия

В данном параграфе из всего возможного набора граничных условий ограничимся рассмотрением только двух граничных условий, определяемых резервуаром и клапаном.

1. Резервуар представляет собой простое устройство, поскольку из него вытекает жидкость в трубу при

постоянном напоре, если он — верховой<sup>1</sup>, или в него втекает жидкость при постоянном напоре, если он низовой. На графике  $h, q$  характеристика резервуара имеет вид горизонтальной прямой линии.

2. Клапан. В любое мгновение времени при закрытии клапана

$$q = C_d \beta a_{V_0} \sqrt{2gh}, \quad (2.72)$$

где  $\beta$  и  $a_{V_0}$  — относительное открытие клапана и полное открытие клапана соответственно

$$h = \left( \frac{q}{C_d \beta a_{V_0}} \right)^2 \quad (2.73)$$

или

$$h = \psi q^2, \quad (2.74)$$

где

$$\psi = \frac{1}{2g(C_d a_{V_0})^2 \beta^2}. \quad (2.75)$$

Уравнение (2.74) — уравнение семейства парабол, которое определяется величиной  $\psi$ , зависящей в свою очередь от текущего значения  $\beta$ . Когда клапан закрывается,  $\beta$  уменьшается, а  $\psi$  увеличивается. Величина  $\beta$  изменяется от 1,0 при полном открытии клапана до нуля при полном закрытии клапана и принимает положительное значение, меньшее единицы, при частичном закрытии.

В моменты времени  $T, 2T, 3T$  и т. д. ( $T=2L/c$ ) значения  $\beta$  должны быть известны, и следовательно,  $\psi$  для каждого шага закрытия может быть вычислена. Таким образом, в любой момент времени существует парабола, которая описывает все возможные значения  $h$ , соответствующие всем возможным значениям  $q$  для относительного открытия клапана.

---

<sup>1</sup> Расположение гидравлических устройств (резервуаров, насосов, задвижек, клапанов и т. п.) в данном створе определяется относительно направления течения потока, отвечающего начальному состоянию системы. Так, устройство, расположенное ниже по течению, для сокращения будет названо «нижним» или «низовым», расположенное выше по течению — «верхним» или «верховым». *Прим. ред.*

## Графическое решение

Для случая простого трубопровода, соединяющего резервуар с регулирующим устройством (клапаном), необходимо знать (на диаграмме с координатами  $h$ ,  $q$ ) три элемента: характеристику резервуара, линии распространения элементарных волн и параболическую характеристику клапана (слово «характеристика» здесь не

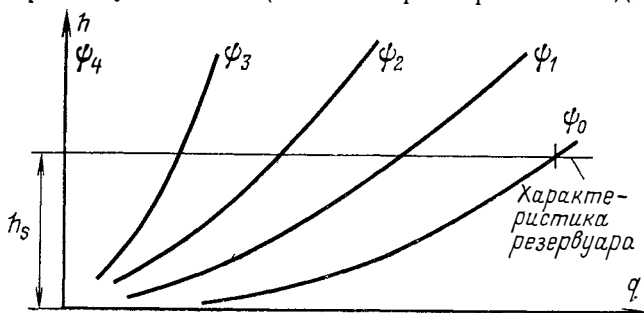


Рис. 2.4.

используется для обозначения характеристики  $\rho$ , упомянутой в связи с цепными уравнениями Аллиев).

Пусть  $\psi_0$  — характеристика полностью открытого клапана. То, что эта характеристика не горизонтальная прямая, проходящая через начало координат, показывает, что площадь полностью открытого клапана меньше, чем площадь поперечного сечения трубы.

На рис. 2.4 приведен график пропускной способности клапана, полностью закрывающегося за время четырех фаз удара (индекс у символа  $\psi$  обозначает, сколько фаз прошло с начала закрытия). Парабола  $\psi_4$  вырождается в вертикальную прямую, так как  $\psi_4 = \infty$  при  $\beta = 0$ , когда клапан закрыт. В точке  $A_0$  на рис. 2.5 напор в резервуаре равен напору за клапаном, таким образом, точка  $A_0$  определяет стационарное состояние течения перед началом закрытия клапана.

Чтобы решить задачу, необходимо нанести линии распространения элементарных волн. В начальный момент времени расход через клапан соответствует расходу в точке  $A_0$ . Расход в точке  $B$ , как и во всей трубе, такой же, как в точке  $A$  в начальный момент времени, а напор в точке  $B$  такой же, как и напор в точке  $A$ , так как трение в трубопроводе отсутствует. Напор и

расход в точке  $B$  не могут измениться до прихода туда волны, поэтому точка  $B_{0,5T}$  соответствует  $B_0$ , а та в свою очередь совпадает с  $A_0$ , как показано на рис. 2.5. Если волновой наездник начнет движение от точки  $B$  в момент времени  $0,5T$ , он будет перемещаться вдоль линии элементарной волны  $II$ . Эта линия на диаграмме соответствует линии от  $B_{0,5T}$  до  $A_{1,0T}$ , т. е. если волновой наездник покинет  $B$  в момент времени  $0,5T$ , то он при-

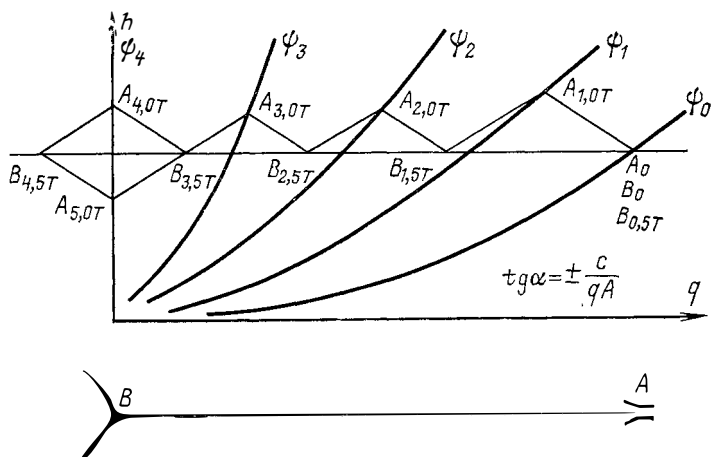


Рис. 2.5.

будет в момент времени  $1,0T$  к клапану. В это мгновение характеристикой клапана становится  $\psi_{1,0T}$ , и пересечение характеристики клапана и линии элементарной волны  $II$  определит на плоскости  $h, q$  условия в точке  $A$  в момент времени  $1,0T$ . Представим теперь волнового наездника, движущегося назад по трубе со скоростью  $c$  от  $A$  к  $B$ . Так как он движется вверх по течению, то он будет двигаться вдоль линии элементарной волны  $I$  (с положительным наклоном), т. е. вдоль линии  $A_{0,1T}-B_{1,5T}$ , и прибудет в точку  $B$  в момент времени  $1,5T$ , линия  $I$  пересечет характеристику резервуара, определив на плоскости  $h, q$  условия в точке  $B$  в момент времени  $1,5T$ . Возвращение волнового наездника дает линию  $II$ , соединяющую  $B_{1,5T}$  с  $A_{2,0T}$ ; к моменту прибытия волнового наездника клапан будет иметь характеристику  $\psi_{2,0T}$ , что и определит на плоскости  $h, q$  условия в  $A$  в момент времени  $2,0T$ . Диаграмму можно завершить

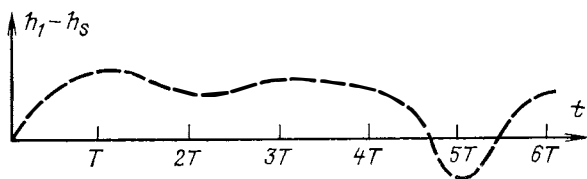


Рис. 2.6.

точно таким же образом. Ромбовидная форма  $B_{3,5T} \rightarrow A_{4,0T} \rightarrow B_{4,5T} \rightarrow A_{5,0T}$  может быть получена только при отсутствии трения, она представляет колебания потока, которые происходят после того, как клапан закроется.

Вычертив график зависимости напора от времени в точке  $A$ , получим кривую, показанную на рис. 2.6.

### Определение напоров в интервалы времени, составляющие часть фазы удара

Чтобы определить напоры в интервалы времени, составляющие часть фазы, необходимо начертить дополнительные кривые  $\psi$ . Рассмотрим случай определения напоров в моменты времени, равные половине фазы

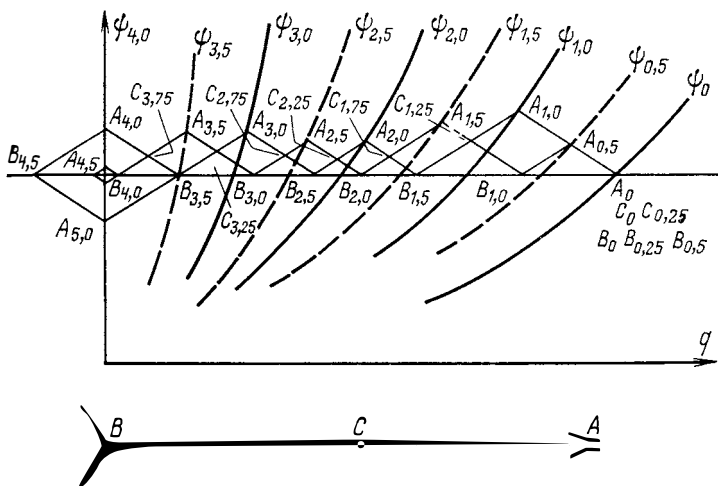


Рис. 2.7.

гидравлического удара (рис. 2.7). Символ  $T$  в индексах опустим, т. е. индекс 1,5 следует читать как  $1,5T$ .

В момент времени 0 напоры и расходы в  $A$  будут определяться точкой  $A_0$ , условия в точке  $C$  будут такими же, как и в точке  $A$ , до тех пор, пока волна не придет в среднюю точку  $C$  в момент времени  $0,25T$  и в  $B$  до момента времени  $0,5T$ , как и раньше, таким образом, все точки  $A_0$ ,  $C_{0,25}$ ,  $B_0$ ,  $B_{0,25}$  и  $B_{0,5}$  будут совпадать.

Движение волнового наездника от  $B$  в момент времени  $0,5T$  дает линию элементарной волны  $II$   $B_{0,5}A_{1,0}$ ; таким образом, условия у клапана в момент времени  $1,0T$  будут определены пересечением линии  $II$  и характеристики клапана в момент времени  $1,0T$ . Волновой наездник мог бы двинуться от точки  $C$  в момент времени  $0,25T$ , и тогда можно было бы определить линию элементарной волны  $II$ , которая пересекала характеристику  $\psi_{0,5}$ , а также напоры и расходы у клапана в момент времени  $0,5T$ , т. е. при  $A_{0,5}$ .

Волновой наездник, стартовавший от  $A$  в момент времени  $1,0T$ , достигнет  $B$  в момент времени  $1,5T$ , т. е. в  $B_{1,5}$ , и аналогично, стартовавший от  $A$  в момент времени  $0,5T$  прибывает в  $B$  в момент времени  $1,0T$ , т. е. в  $B_{1,0}$ . Дополнительный волновой наездник, стартовавший от  $A$  в момент времени  $1,0T$ , прибывает в среднюю точку  $C$  трубы в момент времени  $1,25T$ , стартовавший от  $B$  в момент времени  $1,0T$  прибывает в  $C$  также в  $1,25T$ . Пересечение двух элементарных линий определяет условия в  $C$  в момент времени  $1,25T$ . Таким же образом может быть завершена остальная диаграмма на рис. 2.7.

Итак, путем нанесения семейства характеристик клапана  $\psi_{0,5}$ ,  $\psi_{1,5}$ ,  $\psi_{2,5}$  были получены условия у клапана в середине периода и были установлены условия в средней точке трубы.

### **Медленное открытие клапана**

В этом случае линия  $\psi_0$  совпадает с нулевой ординатой потока, поскольку клапан первоначально закрыт. Предположим, что клапан открывается за время  $3T$  (рис. 2.8). Если он открыт, то характеристика  $\psi_3$  является характеристикой для всего последующего промежутка времени, поскольку клапан не может открываться еще больше после полного открытия. В момент времени, равный нулю, расход равен нулю, и напор равен

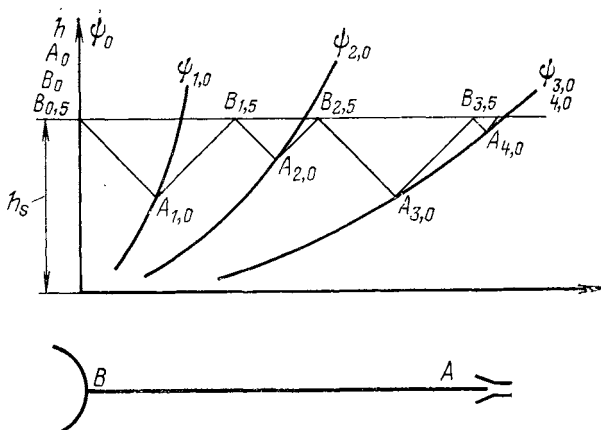


Рис. 2.8.

$h_s$ . Условия в  $B$  не меняются до тех пор, пока туда не придет в момент времени  $0,5T$  волна, обусловленная первым шагом открытия клапана.

Движение волнового наездника от  $B$  в момент времени  $0,5T$  по направлению к  $A$  происходит по линии элементарной волны  $II$ .

Эта линия пересекает кривую  $\psi_{1,0}$  в точке  $A_{1,0}$ . Движение волнового наездника в обратном направлении происходит по линии  $I$ , которая пересекает характери-

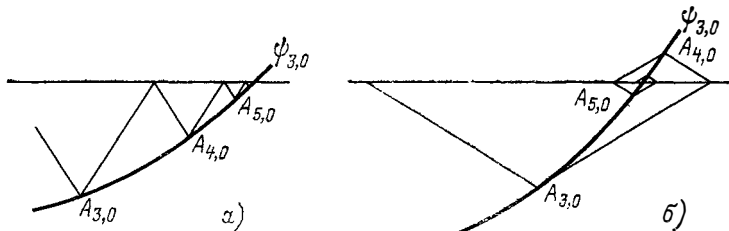


Рис. 2.9.

стику резервуара в точке  $B_{1,5}$ . Чтобы завершить диаграмму, весь процесс следует повторить. В зависимости от наклона линии распространения элементарной волны и линии  $\psi_{3,0}$  и т. д. можно получить две диаграммы, как показано на рис. 2.9, а и б. Таким образом, если  $c/gA$  сравнительно мало, т. е. в случае высокоупругой трубы



с низкой волновой скоростью (или трубы с большой площадью поперечного сечения), можно получить пульсации напора, которые превышают статический напор резервуара.

### Частичное медленное закрытие клапана

Предположим, что закрытие клапана происходит за две фазы удара, и линия  $\psi_2$  является линией  $\psi$  для частичного открытия  $\beta_{2,0}$ , когда клапан завершил свое движение. Таким образом, линия  $\psi_2$  совпадает также с линиями  $\psi_3, \psi_4, \psi_5$ . Произведем анализ обычным способом, в конце концов линии распространения элементарной волны образуют спираль при пересечении с линией  $\psi_2$

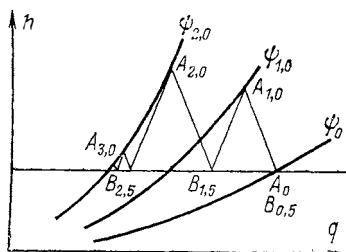


Рис. 2.10.

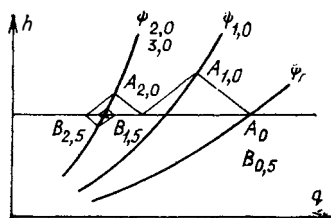


Рис. 2.11.

и характеристикой резервуара. Таким образом, даже в случае течения без трения для частичного закрытия клапана пульсации давления уменьшаются. Это же происходит и в случае открытия клапана (рис. 2.10).

Если наклон линии элементарной волны достаточно велик, то спиральная форма линий элементарной волны может измениться, как показано на рис. 2.11.

### Построение линий элементарных волн

Наклон линий волны (см. рис. 2.5)

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{c}{Ag}. \quad (2.76)$$

Величины, вычисляемые таким образом, могут быть очень большими, например, если  $c=1000$  м/с и  $A=0,5$  м<sup>2</sup>, то  $c/(Ag)=200$ .

Так как график  $h, q$  не изображается в натуральном масштабе, то вычисленная величина  $\alpha$  не находит широкого применения. Предлагаемый метод построения линий распространения элементарной волны поясняется на рис. 2.12.

Пусть  $c/(Ag) = 200$ ; проведем линию из точки  $q = 0,3$  на оси абсцисс (точка  $D$ ) в точку  $B$  на оси ординат, где  $h = 60$ , т. е. линию  $BD$ . Завершим построение прямоугольника  $ABCD$ . Проведем другую диагональ  $AC$ . Используя правило параллелограмма, линии элементарной волны  $II$  можно провести параллельно  $BD$ , а линии  $I$  параллельно  $AC$ .

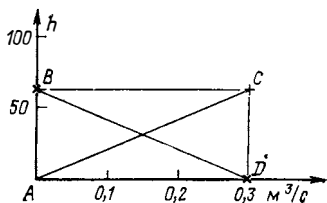


Рис. 2.12.

## Расчет простых соединений труб

Рассмотрим трубопровод, одна труба которого соединена с другой меньшего диаметра (рис. 2.13).

Длины  $BC$  и  $CA$  должны быть выбраны таким образом, чтобы отношение их фаз  $T_1$  и  $T_2$  было представлено сравнительно простой величиной, т. е.  $T_1/T_2 = 1, 2, 3$  или  $1/2, 1/4$ . Если это отношение, например, равно 1,42, то графическое решение усложняется, и потребует очень много времени.

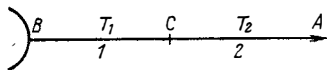


Рис. 2.13.

Для иллюстрации расчета положим  $T_1 = 2T_2$  и выберем произвольные наклоны линий элементарной волны. Заметим, что наклон линии элементарной волны для верховой трубы 1 с большим поперечным сечением будет меньше, чем у низовой трубы. Закрытие клапана на низовой трубе осуществим за  $5T_2$ , таким образом, необходимо вычислить и построить пять параболических характеристик  $\psi$ . (Если отношения  $T_1/T_2$  или  $T_2/T_1$  не являются целыми числами, то потребуются построить значительно больше характеристик.)

Последующие рассуждения относятся к рис. 2.14. Для сокращения объема графических построений абсциссу графика следует проводить из нулевой точки на оси напоров, соответствующей  $h=h_s$ , причем это является обычным приемом при выполнении графического решения. Нужно начертить только ту часть линий  $\psi$ , которые лежат выше линии напора резервуара  $h=h_s$ .

Точка  $A_0$  определяет стационарное состояние, а также условия и в точке  $C$  вплоть до момента времени, когда туда придет волна, т. е. точку  $C_{0,5}$ . Она также

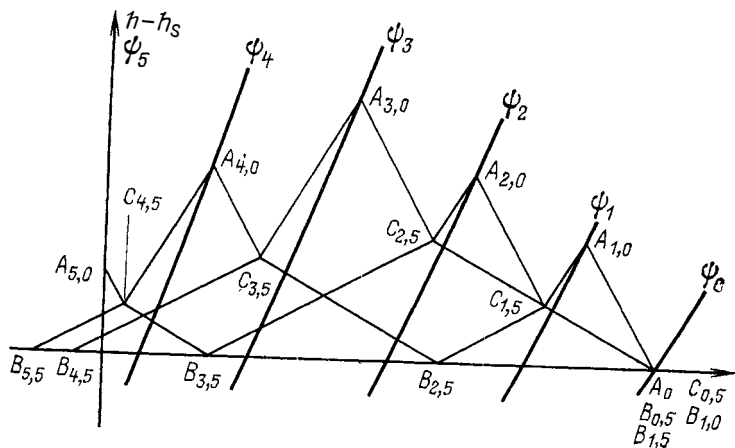


Рис. 2.14.

определяет условие в точке  $B$  до момента времени  $1,5T_2$ , т. е. точку  $B_{1,5}$ . Заметим, что подстрочные индексы обозначают время, отнесенное к  $T_2$  (напомним также, что  $1/2 T_1 = T_2$ ).

Таким образом, волновой наездник, начинающий движение из точки  $C$  в момент времени  $0,5T_2$ , придет в точку  $A$  в момент времени  $T_2$  — на графике это даст линию  $II$ , т. е. линию от точки  $C_{0,5}$  до точки  $A_{1,0}$ .

Движение из точки  $B$  в момент времени  $0,5T_2$  даст линию  $II$ , приходящую в точку  $C$  в момент  $1,5T_2$ , а движение волнового наездника из точки  $A$  в момент времени  $1,0T_2$  даст линию  $I$ , приходящую в точку  $C$  в момент времени  $1,5T_2$ . Отсюда пересечение этих двух линий элементарной волны определяет условия в точке  $C$  в момент времени  $1,5T_2$ .

Из точки  $C_{1,5}$  два волновых наездника могут начать движение один вверх по потоку, другой — вниз. Линия элементарной волны  $II$  является линией элементарной волны, движущейся вниз по потоку, а линия  $I$  — вверх по потоку. Волновой наездник, движущийся вниз по потоку, придет в точку  $A$  в момент времени  $2T_2$ , и соответствующая линия элементарной волны пересечет линию  $\psi_{2,0}$  в точке  $A_{2,0}$ . Линия  $I$  элементарной волны, движущейся вверх по потоку, пересечет характеристику резервуара в точке  $B_{2,5}$ .

Движение волнового наездника из точки  $B$  в момент времени  $1,5T_2$  даст соответствующую линию  $II$ , и он придет в точку  $C$  в момент времени  $2,5T_2$ . Волновой наездник, начинающий движение из точки  $A$  в момент времени  $2,0T_2$ , будет двигаться вдоль линии  $I$  и придет в точку  $C$  в момент времени  $2,5T_2$ . Пересечение этих двух линий элементарной волны определит точку  $C_{2,5}$ .

Так как точки  $B_0$ ,  $B_{0,5}$ ,  $B_{1,0}$  и  $B_{1,5}$  совпадают, то линии элементарных волн  $B_{0,5} \rightarrow C_{1,5}$  и  $B_{1,5} \rightarrow C_{2,5}$  совпадают на протяжении части своей длины.

С момента времени  $1,5T_2$  исходное положение любых волновых наездников, начинающих движение от  $B$ , не совпадает больше с точкой стационарного состояния, но оно может быть найдено, исходя из того, что новые исходные точки для  $B$  определяются из предшествующих стадий решения, например,  $B_{0,5}$ ,  $B_{1,0}$  и  $B_{1,5}$  совпадают с точкой стационарного состояния, а положение точки  $B_{2,5}$  необходимо определить, прежде чем возникнет необходимость использовать ее. Зная положение точки  $C_{2,5}$ , можно найти  $A_{3,0}$  и  $B_{3,5}$ .

С помощью  $A_{3,0}$  и  $B_{2,5}$  можно определить точку  $C_{3,5}$  и аналогичным образом завершить построение графика.

## Расчет сложных соединений труб

В точке соединения  $C$  (рис. 2.15) всегда должно выполняться уравнение неразрывности, т. е.

$$q_1 = q_3 - q_2.$$

Точка  $C^1$  определяет условия в начале соединения для трубы 1,  $C^2$  — для трубы 2,  $C^3$  — для трубы 3.

В точке соединения, пренебрегая местными потерями и изменением кинетической энергии, имеем:

$$h_{C^1_t} = h_{C^2_t} = h_{C^3_t}, \quad (2.77)$$

т. е. напоры в точке соединения труб в любой данный момент времени должны быть равны. (Заметим, что индексы 1, 2, 3 обозначают расположение, а не степень, индекс  $t$  обозначает время.)

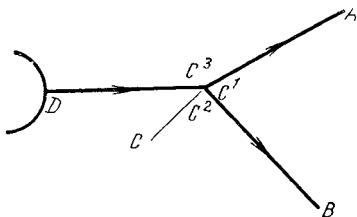


Рис. 2.15.

Анализ соединений, приведенный ниже, основывается на методе, разработанном для уравнительных резервуаров Хокинсом (Hawkins) и Зинкевичем (Zienkewiez) [4].

Рассмотрим рис. 2.15 и обозначим периоды труб 1, 2 и 3 соответственно  $T^1$ ,  $T^2$  и  $T^3$ . Предположим, что на графике  $h, q$  (рис. 2.16) условия в точке  $A$  в момент времени  $t - 0,5T^1$ , в точке  $B$  — в момент времени  $t - 0,5T^2$  и в точке  $D$  — в момент времени  $t - 0,5T^3$  известны и могут быть обозначены как точки  $A_{t-0,5T^1}$ ,  $B_{t-0,5T^2}$  и  $D_{t-0,5T^3}$ . Через эти точки проведем линии элементарной волны, соответствующие движению волновых наездников по направлению к точке слияния  $C$ . В точке  $C^2$  напор должен быть равен напору в точке  $C^3$ .

Расход в трубе 1, т. е.  $q_1$ , должен равняться  $q_3 - q_2$  и напор в  $C^1$ ,  $h^1$  равен  $h^2$  и  $h^3$ . Поэтому на графике  $h, q$

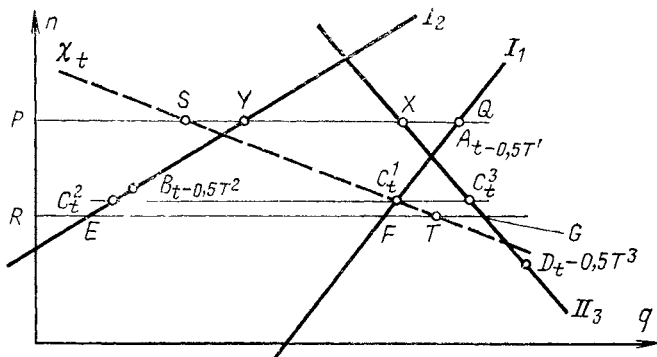


Рис. 2.16.

можно провести линию, которая является комбинацией двух линий элементарной волны, линии  $I_3$  и линии  $I_2$ . Напор в точках  $X$  на линии  $I_3$  и  $Y$  на линии  $I_2$  один и тот же, поскольку необходимое условие  $h_{c_2} = h_{c_3}$  выполняется во всех точках на линии  $PQ$ . Абсцисса искомой линии дается соотношением  $q_x - q_y$ ; если  $PS$  откладывается вдоль линии  $PQ$  и  $PS = XY$ , то  $S$  определит одну точку на искомой линии, полученной из линий  $I_3$  и  $I_2$ . Эту процедуру можно повторить для другой пары точек, например точек  $E$  и  $G$ , и получить точку  $T$  ( $RT = EG$ ). Таким образом, искомой является линия  $ST$ , она называется  $\chi$ -линией. Эта  $\chi_t$  линия пересекается с оставшейся

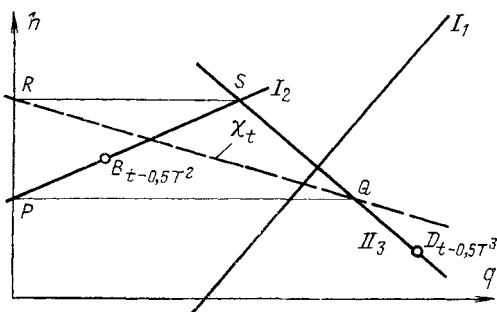


Рис. 2.17.

ся линией  $I_1$  в точке  $C^1_t$  и определяет условия в точке соединения для момента времени.

Проведя горизонтальную линию через  $C^1_t$ , получим точки  $C^2_t$  и  $C^3_t$ , поскольку должно удовлетворяться требование  $h_{C^2_t} = h_{C^3_t} = h_{C^1_t}$ .

Если точки  $C^1_t$ ,  $C^2_t$  и  $C^3_t$  получены, то из них можно проводить новые линии элементарных волн для получения точек  $A_{t+0,5T^1}$ ,  $B_{t+0,5T^2}$  и  $D_{t+0,5T^3}$ , которые, в свою очередь, можно использовать для получения следующих точек  $C^1_{t+T^1}$ ,  $C^2_{t+T^2}$ ,  $C^3_{t+T^3}$  и т. д. Эти новые точки на рис. 2.16 не обозначены.

Построение  $\chi$ -линии можно упростить, как показано на рис. 2.17.

Проведя горизонтальную линию  $RS$  через точку  $S$ , получим точку  $R$  на линии  $\chi_t$ . В точке  $S$   $q_2 = q_3$ , так что  $q_1 = q_3 - q_2 = 0$ , и это условие определяет точку нулевого расхода на искомой  $\chi_t$ -линии, т. е.  $R$ . Проведя горизон-



определены в точке пересечения скомпонованной линии и линии элементарной волны последней трубы. Поскольку напор в точке соединения труб одинаков, то горизонтальная линия, проведенная через точку пересечения, определяет расход во всех других трубах посредством пересечения этой линии с линиями элементарных волн других труб.

Решение этой задачи очень трудоемко.

## Учет трения

Потери на трение распределены по длине трубы, но в таком виде их нельзя учесть при графическом решении. Шнидер и Бержерон независимо друг от друга предложили потери напора на трение сконцентрировать в одной точке трубы, если предположить, что они вызваны каким-либо местным сопротивлением, например диафрагмой, заслонкой, дросселем.

Шнидер предложил располагать диафрагму на конце трубы перед резервуаром, Бержерон — в нижнем по течению конце непосредственно перед клапаном. Методы Шнидера и Бержерона дают сравнительно точные решения для одной точки трубопровода: у клапана — метод Шнидера; у резервуара — метод Бержерона.

Современные методы допускают использование произвольного числа дросселей, расположенных через равные интервалы вдоль трубы. Они дают более точные результаты, но требуют значительно больших усилий для выполнения расчета. Чтобы достаточно точно описать влияние трения на системы, в которых большая часть располагаемого напора идет на преодоление трения, необходимо использовать сравнительно большое число дросселей, поэтому такие расчеты из-за больших затрат времени и усилий выполняются редко. Знание распределения давления по длине трубопровода может быть очень важным, поскольку наименьшего и наибольшего значений давления достигают в промежуточных точках трубопровода, а не на его концах. Наименьшее давление может в некоторых случаях упасть до значения давления пара (но не ниже его), и тогда происходит местное вскипание жидкости, которое приводит к образованию двухфазного потока. Это явление обычно называют «разрывом колонны», объясняется оно тем,



что в точке, где достигается давление пара, образуются две вертикальные поверхности жидкости, которые движутся в противоположные стороны, причем между ними остается пространство, заполненное паром. Такое явление означает, что позднее, по истечении периода раздела, две вертикальные поверхности будут двигаться с ускорением навстречу друг другу, сталкиваясь в конце и

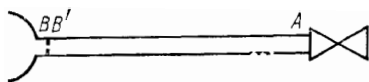


Рис. 2.19.

вызывая очень большое повышение давления. Вряд ли это явление происходит в верхних точках реального трубопровода, оно может иметь место у закрытых клапанов и на других закрытых концах. Можно предполо-

жить, что когда местное давление падает до давления пара, образуется пенообразная масса жидкости и развивается двухфазное течение с образованием свободной поверхности. Образованная таким образом каверна обычно не занимает все сечение трубы, а возникает и исчезает под действием поверхностных волн. При исчезновении каверны не создается значительного давления, поскольку взаимодействие свободных поверхностных волн не образует давления, которое имеет существенное значение с инженерной точки зрения. Автор в лабораторных опытах по разрыву колонны не смог обнаружить каких-либо скачков давления, которые можно было бы приписать разрушению полости. Графические методы могут предсказать вероятность разрыва колонны жидкости, но не могут точно определить изменение давления, которое он вызывает.

Определение крайне низких давлений в трубах является столь же важным, как и высоких, поскольку в условиях, близких к вакууму, может произойти разрушение в результате потери устойчивости или простого сжатия трубы.

Модифицированный аналитический метод, учитывающий влияние трения, лучше всего проиллюстрировать методом Шнидера (рис. 2.19). Дроссель располагается на входе в трубу непосредственно за резервуаром;  $B'$  — низовая точка расположена непосредственно за дросселем. Предполагается что дроссель вызывает потери напора  $4fLv^2/(2gd)$ , т. е.  $fLq^2/(3d^5)$ , где  $L$  и  $d$  измеряются в м, а  $q$  — в м<sup>3</sup>/с. Это выражение можно переписать

в следующем виде:

$$h = kq^2 \quad (2.78)$$

где  $k = fL / (3d^5)$ .

Таким образом, потенциальный напор в точке  $B'$

$$h = H_s - kq^2, \quad (2.79)$$

где  $H_s$  — превышение уровня воды в резервуаре над клапаном.

Нанося кривую  $kq^2$  на график  $h, q$ , как показано на рис. 2.20, и вычитая ординаты этой кривой из ординат характеристики резервуара (кривая 1), получаем характеристику резервуара с учетом потерь на трение для точки  $B'$  (кривая 2). Теперь можно нанести на график  $\psi$ -линии, и решение получено (рис. 2.21).

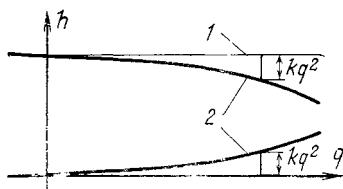


Рис. 2.20.

**Примечание.** Этот метод построения с учетом трения дает точное значение стационарного расхода и набора (в точках  $A$  и  $B$ ), а также воспроизводит затухание, вызванное трением, как показано спиралью вокруг точки пересечения характеристики резервуара и ординаты, проходящей через начало координат.

Продемонстрируем применение метода Бержерона к случаю, когда дроссель расположен в нижнем по по-

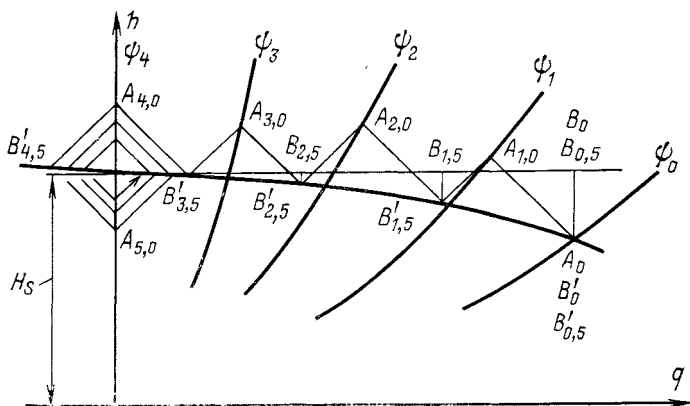


Рис. 2.21.

току конце трубопровода у клапана (рис. 2.22). В точке  $A$  связь напор — расход остается прежней и описывается  $\psi$ -линией. В точке  $A'$  напор возрастает из-за потерь на трение в трубопроводе, которые, по предположению,

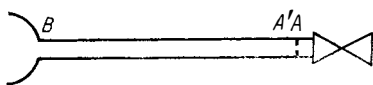


Рис. 2.22.

сконцентрированы в дросселе. Таким образом, характеристика точки  $A'$  должна лежать выше  $\psi$ -характеристики на величину  $kq^2$ . Итак, нанося кривую  $kq^2$  на график  $h$ ,  $q$ , так же как в решении

Шнидера, и затем складывая ординаты кривой  $kq^2$  и ординаты  $\psi$ -характеристики, получим характеристику в точке  $A'$  (рис. 2.23). Этот метод хорошо описывает стационарные условия, т. е. в точке  $A$  и в точке  $B$ , но не учитывает затухания процесса, вызываемого трением после полного закрытия клапана.

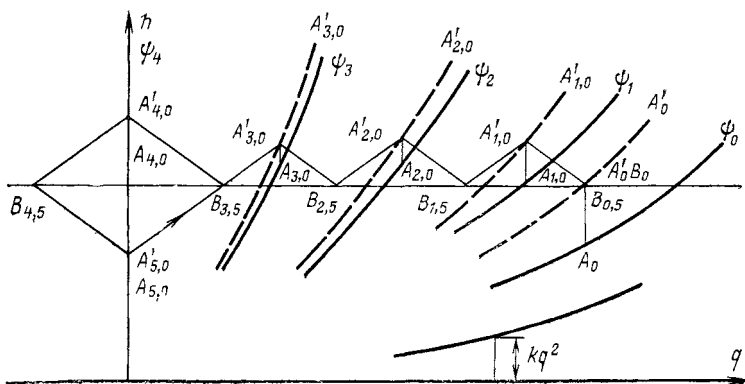


Рис. 2.23.

### Использование большого числа дросселей

Эта методика разработана Ангусом (Angus) [5, 6]. Она будет продемонстрирована на примере двух дросселей (рис. 2.24). Предположим, что два дросселя расположены в точке  $B$  на конце трубы у резервуара и в точке  $C$  посередине трубы и половина потерь на трение в трубе сосредоточена в точке  $B$ , половина — в  $C$ . На всем протяжении участков трубопровода  $AC''$  и  $C'B'$  волновые наездники могут перемещаться, не испытывая

трения, и можно начертить линии распространения элементарной волны, которые определяют условия в этих сегментах трубы. Рисуя две кривые трения — одну, представляющую собой  $\frac{1}{2}kq^2$ , и другую —  $kq^2$ , учтем трение,

создаваемое одним дросселем, линией  $h_f = \frac{1}{2}kq^2$ , и

другим дросселем — линией  $h_f = kq^2$ . Ординаты этих двух графиков затем можно вычесть из ординат графика  $H_s$  для получения графиков  $H_s - \frac{1}{2}kq^2$  и  $H_s - kq^2$ . После

этого надо нанести линии характеристик клапана, т. е. линии  $\psi_0, \psi_{0,5}, \psi_{1,0}, \psi_{1,5}, \psi_{2,0}, \psi_{2,5}$  и  $\psi_{3,0}$  (рис. 2.25).

Пересечение характеристики  $\psi_0$  полностью открытого клапана с линией  $h = H_s - kq^2$  определяет для клапана условия стационарного потока, т. е. точку  $A_0$ ,

а также определяет условия вниз по потоку непосредственно за дросселем, расположенным в середине трубы, т. е.  $C''_0$  и  $C''_{0,25}$ . Условия вверх по

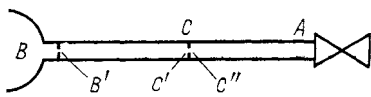


Рис. 2.24.

потоку непосредственно перед этим дросселем определяются пересечением вертикальной линии, проходящей через  $A_0$ , с линией  $h = H_s - 0,5kq^2$ , т. е. в  $C'_0$ . Условия в точке  $C$  не меняются до момента  $0,5T$  после начала закрытия клапана, поэтому точки  $C'_0$  и  $C'_{0,25}$  совпадают. До наступления момента времени  $0,5T$  условия в  $B'$  будут такими же, как в  $C'_0$ , так что точки  $C'_0, C'_{0,25}, B'_0, B'_{0,5}$  совпадают. Пересечение вертикальной линии характеристикой резервуара определит условия для верхнего дросселя, и, следовательно,  $B_0 \rightarrow B_{0,5}$ .

Движение волнового наездника из  $C''$  в момент времени  $0,25T$  вниз по течению даст линию  $II$  элементарной волны. Волновой наездник придет к месту расположения клапана в момент времени  $0,5T$ , так что пересечение линии элементарной волны с линией  $\psi_{0,5}$  определяет точку  $A_{0,5}$ . Волновые наездники, начинающие свое движение из  $A$  и из  $B$  в момент времени  $0,5T$ , встречаются в  $C$  в момент времени  $0,75T$ . Напор в  $C''$  должен быть меньше напора в  $C'$  на величину  $kq^2$ ; следовательно, точка  $c''_{0,75}$  на линии  $I$ , исходящей из  $A_{0,5}$ , должна быть выбрана таким образом, чтобы точка  $C_{0,75}$

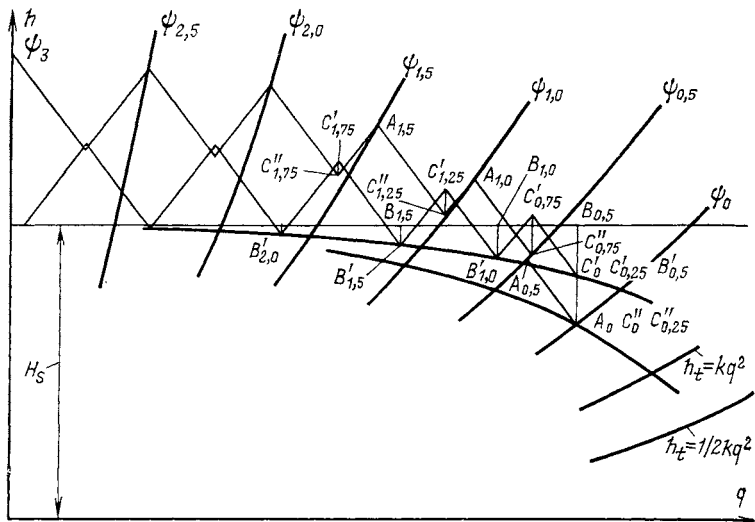


Рис. 2.25.

на линии II, исходящей из  $B'_{0,5}$ , была выше ее на величину  $C_{0,75} - C''_{0,75}$ , равную  $\frac{1}{2}kq^2$ , где  $q$  — текущий расход.

Это означает, что данная процедура является одним из вариантов метода проб и ошибок, но в действительности процесс выбора двух точек достаточно быстрый.

Движение вдоль двух линий распространения элементарных волн из  $C$ , т. е. линии I, исходящей из  $C'_{0,75}$ , и линии II, исходящей из  $C''_{0,75}$ , дает  $B'_{1,0}$ , путем пересечения линии I и характеристики  $B'$ , а также  $A_{1,0}$  путем пересечения линии II с характеристикой клапана  $\psi_{1,0}$ .

Движение вдоль линии I из  $A_{1,0}$  и линии II из  $B'_{1,0}$  дает условия для  $C'_{1,25}$  и  $C''_{1,25}$ . Как и прежде,  $C'_{1,25}$  должна быть выше по вертикали  $C_{1,25}$  на  $\frac{1}{2}kq^2$ , причем  $q$

обозначает текущую величину и методика оценки, использовавшаяся выше, должна быть применена снова для определения точек  $C'_{1,25}$  и  $C''_{1,25}$ . Процесс может быть продолжен для получения оставшегося графика.

Методика, описанная выше, может использоваться для расчета такого количества дросселей, которое является необходимым, но увеличение их числа потребует

большого труда при решении. Если необходимо поместить дроссели в четырех точках, расположенных по длине трубопровода, то на соответствующее число должно увеличиться количество линий  $\psi$ , и отсюда необходимые для решения затраты возрастут приблизительно пропорционально числу дросселей в квадрате. В очень длинных трубопроводах четырех дросселей недостаточно для того, чтобы точно учесть влияние трения.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ГРАФИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

#### 3.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 2 были рассмотрены графические методы анализа для граничных условий, которые соответствовали закрытию затвора (клапана), расположенного в конечном сечении трубопровода. В этой главе описаны методы представления граничных условий, соответствующие другим гидравлическим устройствам.

#### 3.2. НАСОСЫ

Выключение насоса после стационарной работы приводит к «отрицательному» нестационарному возмущению, которое распространяется вниз по течению; если ниже по течению находится резервуар, то отрицательная волна отразится с противоположным знаком и возвратится в насос как «положительное» возмущение. Если насос снабжен обратным клапаном, то возникающая положительная волна (волна сжатия) приведет к созданию возвратного течения, которое закроет этот клапан. Это вызовет положительное отражение, и вниз по течению будет передаваться нестационарное возмущение в виде интенсивной волны сжатия.

Поскольку пусковое возмущение не может быть больше напора насоса при закрытом клапане (при нулевом расходе), то обычно при решении графическим методом пренебрегают этим возмущением и учитывают только возмущения, вызванные остановкой насоса.

Мощность, потребляемая насосом, расходуется на ускорение насоса, на увеличение энергии потока воды, а также на потери энергии внутри насоса. В конечном счете энергия насоса, переданная жидкости, и потери уравниваются с мощностью, приложенной к насосу, и достигается стационарное состояние. При отключении насоса работа его продолжается только за счет кинетической энергии вращения рабочего колеса и двигателя. Запас этой энергии быстро уменьшается за счет накачки воды, и насос останавливается.

Мощность, извлекаемую от вращающегося рабочего колеса насоса и двигателя, обозначим через  $P$ :

$$P = - \frac{\omega q H}{E}, \quad (3.1)$$

где  $H$  — напор насоса;  $q$  — расход;  $E$  — к. п. д. насоса. Минус показывает, что мощность отбирается у насоса.

Заметим, что  $\omega q H$  — мощность, передаваемая насосом жидкости; мощность  $P$ , извлекаемая из насоса и двигателя, должна быть больше на величину потерь, имеющих место внутри насоса, поэтому в (3.1) член  $E$  в знаменателе.

Теперь

$$P = T\Omega. \quad (3.2)$$

Здесь  $T$  — момент вращения и  $\Omega$  — угловая скорость, рад·с<sup>-1</sup>,  
но

$$T = I\dot{\Omega}, \quad (3.3)$$

где  $I$  — момент инерции насоса и вращающихся частей двигателя;  $\dot{\Omega}$  — угловое ускорение, рад·с<sup>-2</sup>. Поскольку  $P$  имеет отрицательное значение,  $T$  будет отрицательным, так что  $\dot{\Omega}$  — замедление (отрицательное ускорение).

Таким образом,

$$P = I\dot{\Omega}\Omega, \quad (3.4)$$

отсюда

$$\dot{\Omega} = \frac{P}{I\Omega}.$$

Теперь

$$\Omega = \frac{2\pi N_1}{60} \quad \text{и} \quad \dot{\Omega} = \frac{2\pi}{60} \frac{N_2 - N_1}{\Delta t},$$

где  $N_1, N_2$  — частота вращения, об/мин, соответственно в начале и в конце интервала времени  $\Delta t$ .

Отсюда

$$\frac{2\pi}{60} \frac{N_2 - N_1}{\Delta t} = \frac{P}{I \frac{2\pi N_1}{60}}; \quad (3.5)$$

$$N_2 = N_1 + \frac{P \Delta t}{I \frac{4\pi^2}{3600} N_1}; \quad (3.6)$$

$$N_2 = N_1 - \frac{3600 \omega q H \Delta t}{4\pi^2 I N_1 E}, \quad (3.7)$$

где  $E$  — к. п. д. насоса при расходе  $q$  и частоте вращения  $N_1$ . Таким образом, (3.7) — это выражение для частоты вращения насоса  $N_2$  в конце интервала времени, если в начале этого интервала частота вращения была  $N_1$ .

Рассмотрим характеристику насоса на рис. 3.1, где  $N_0$  — стационарная частота вращения.

После отключения насоса происходит его замедление и затем остановка. Рассмотрим условия работы насоса через интервалы, равные фазе удара  $T$ , т. е. пусть  $\Delta t$  равно  $T$ . Частота вращения в конце любого интервала  $\Delta t$  описывается уравнением (3.7), где  $\Delta t = T$ .

Анализ уравнения динамомашин методом размерностей дает следующий результат:

$$f \left( \frac{q}{Nd^3}, \frac{gH}{N^2 d^2}, \rho \frac{Nd^2}{\mu}, \frac{H}{d}, \frac{k}{d}, E \right) = 0, \quad (3.8)$$

где  $d$  — диаметр рабочего колеса;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости;  $k$  — шероховатость поверхностей рабочего колеса; другие переменные известны.

Уравнение (3.8) приводится почти во всех учебниках по прикладной механике жидкости, полный вывод его дан в [14].

Параметр  $k/d$  не оказывает влияния, так как при изменении частоты вращения насоса  $k$  и  $d$  остаются постоянными. Найдено, что параметр  $H/d$  на практике оказывает малое влияние и обеспечивает турбулентное



Рис. 3.1.



течение в рабочем колесе, т. е. параметр  $\rho Nd^2/\mu$  остается большим, пока во время остановки сохраняется поток через насос. Параметр  $\rho Nd^2/\mu$  также оказывает незначительное влияние. Поскольку поток сохраняется только в течение периода, когда частота вращения насоса остается выше частоты, необходимой для преодоления насосом напора, с которым действует на насос

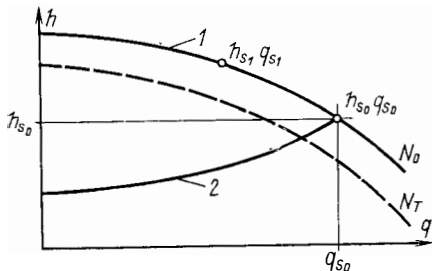


Рис. 3.2. К расчету насоса.

1 — характеристика насоса; 2 — характеристика системы.

поток жидкости, а параметр  $\rho Nd^2/\mu$  остается большим на протяжении этого периода, то при этом анализе целесообразно пренебречь изменениями параметра  $\rho Nd^2/\mu$ .

В результате получаем:

$$f\left(\frac{q}{Nd^3}, \frac{gH}{N^2d^2}, E\right) = 0. \quad (3.9)$$

Поскольку для каждого насоса  $d$  — величина постоянная и  $g$  также не меняется, то

$$f\left(\frac{q}{N}, \frac{H}{N^2}, E\right) = 0. \quad (3.10)$$

При расчетной частоте вращения насоса  $N_0$  можно применить обычный метод расчета (рис. 3.2). Из этого графика можно получить  $h_{s0}$  и  $q_{s0}$ .

Необходимо знать кривую зависимостей к. п. д. насоса от  $q$  (рис. 3.3). Ее можно использовать для получения зависимости  $E=f(q/Nd^3)$ , которая является безразмерным представлением кривой  $E=f(q)$ , но поскольку  $d$  постоянно для данного насоса, вместо нее можно использовать график  $E=f(q/N)$  (рис. 3.4)

В конце интервала времени, равного фазе удара  $T$ , частота вращения насоса будет выражаться уравнением (3.7), т. е.

$$N_1 = N_0 - \frac{3600\omega q_{s_0} h_{s_0} T}{4\pi^2 I N_0 E_{s_0}}. \quad (3.11)$$

Далее

$$\frac{q_{s_0}}{N_0} = \frac{q_{T_0}}{N_1}, \quad (3.12)$$

$$\frac{h_{s_0}}{N_0^2} = \frac{h_{T_0}}{N_1^2} \text{ и } E_{T_0} = E_{s_0}. \quad (3.13)$$

Отсюда легко вычислить  $q_{T_0}$  и  $h_{T_0}$ , которые определяют одну точку на характеристике насоса для частоты

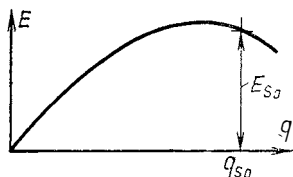


Рис. 3.3.

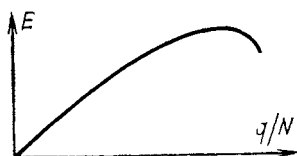


Рис. 3.4.

вращения  $N_1$  в момент времени  $T$ . Затем можно выбрать вторую точку на стационарной характеристике  $h_{s_1}$ ,  $q_{s_1}$  насоса и вычислить соответствующую точку на кривой  $N_1$ , т. е.

$$\frac{q_{s_1}}{N_0} = \frac{q_{T_1}}{N_1} \quad (3.14)$$

и

$$\frac{h_{s_1}}{N_0^2} = \frac{h_{T_1}}{N_1^2}. \quad (3.15)$$

Чтобы получить характеристику насоса при частоте вращения  $N_1$  в момент времени  $T$ , этот процесс повторяется для последующих точек.

По истечении следующего периода  $T$

$$N_2 = N_1 - \frac{3600\omega q h_T T}{4\pi^2 I N_1 E_T}, \quad (3.16)$$

где  $q_T$  и  $E_T$  — мгновенные значения расхода, напора и к. п. д. в момент времени  $T$ . Значения  $h_T$  и  $q_T$  получа-

ются из первого шага графического решения, а  $E_T$  — из графика зависимости к. п. д. от  $q/N$ .

Этот процесс можно использовать для определения зависимости напора от расхода на втором шаге по времени, т. е. из

$$\frac{q_{s_1}}{N_0} = \frac{q_{T_1}}{N_1} = \frac{q_{2T_1}}{N_2} \quad (3.17)$$

и

$$\frac{h_{s_1}}{N_0^2} = \frac{h_{T_1}}{N_1^2} = \frac{h_{2T_1}}{N_2^2} \quad (3.18)$$

можно получить  $q_{2T_1}$  и  $h_{2T_1}$ . Аналогично можно определить другие точки на характеристике насоса, имеющего частоту вращения  $N_2$ , например  $q_{2T_2}$ ,  $h_{2T_2}$ ;  $q_{2T_3}$ ,  $h_{2T_3}$ ;  $q_{2T_4}$ ,  $h_{2T_4}$  и т. д. Таким образом рассчитывается сетка характеристических кривых насоса для необходимого числа частот вращения.

В этом методе используется ряд предположений:

1. Интервал времени  $T$  достаточно мал для того, чтобы вычисления по методу конечных разностей были достаточно точными. Если  $T$  велико, то вместо этого интервала времени следует использовать величины  $0,5T$  или  $0,25T$ .

2. Значения к. п. д.  $E_T$ , которые берутся с кривой зависимости к. п. д. от  $q/N$ , не являются совершенно точными. Кривая к. п. д. была получена для частоты вращения  $N_0$ , и делается предположение, что эта кривая остается без изменения при изменении частоты вращения. Это было бы справедливо в том случае, если бы параметр  $\rho N d^2 / \mu$  не оказывал влияния на к. п. д., хотя на самом деле, конечно, это влияние имеет место.

3. Параметры  $q/N$  и  $h/N^2$ , которые использовались для определения точек характеристики насоса, могут непосредственно использоваться только в случае, если к. п. д. одинаков при двух значениях частоты вращения, но, как и в предположении 2, это не вполне справедливо, таким образом, построенные характеристики оказываются не вполне точными.

Рисунки 3.5, а—в показывают, как осуществляется графическое решение. Зная  $h_{T_1}$  и  $q_{T_1}$ , получим кривую  $N_{2T}$ . Окончательный график представлен на рис. 3.5, в.

Описанный случай может иметь место только в насосной установке с короткой напорной трубой и относи-

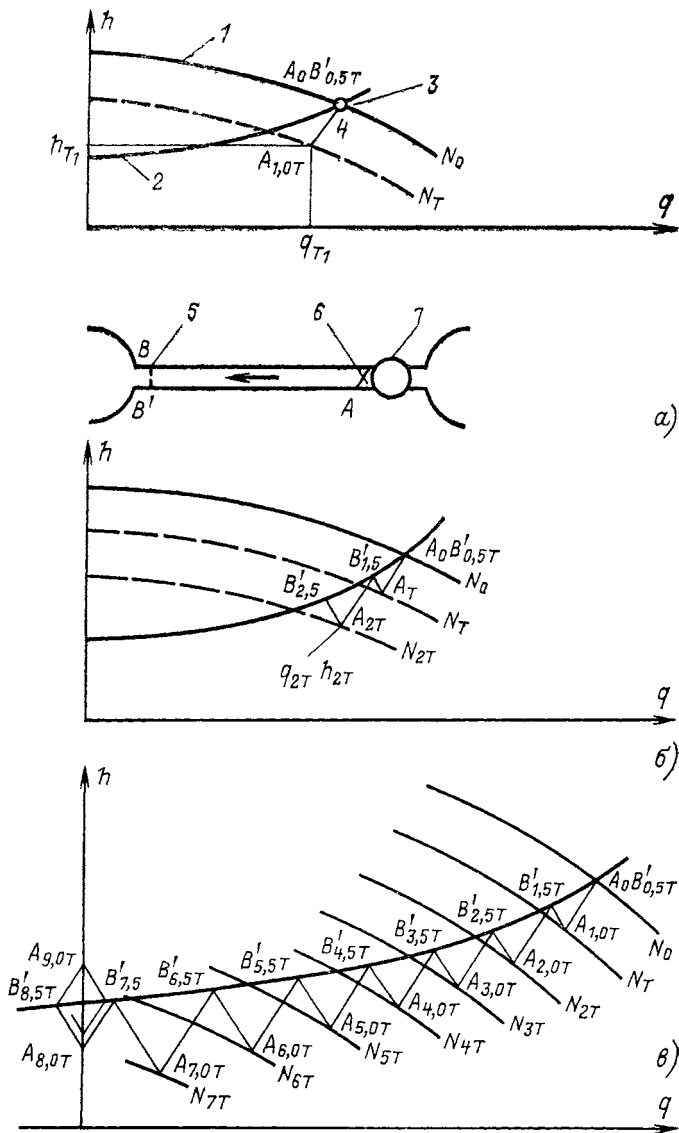


Рис. 3.5. К графическому расчету насоса.

1 — стационарная характеристика насоса; 2 — характеристика системы; 3 — стационарная рабочая точка; 4 — линия волны I; 5 — дроссель; 6 — обратный клапан; 7 — насос.

тельно большой инерционной энергией. В этом случае фаза гидравлического удара  $T$  очень мала, а период остановки насоса довольно велик. Если  $T$  велико по сравнению с периодом остановки насоса, то необходимо вычерчивать характеристики насоса в промежуточные моменты времени. При этом будет возможно получить давления и расходы в промежуточных точках трубы при помощи метода, который был описан в гл. 2. В некоторых работах приведены серии характеристик насосов  $h$ ,  $q$  для различных частот вращения насоса, но используемые методы не учитывали колебания напоров в трубопроводе.

Поскольку в момент выключения насоса начальные параметры, соответствующие стационарному периоду  $h_s$ ,  $q_s$  и  $E_s$ , известны, можно предсказать степень замедления частоты вращения насоса и определить эту частоту через  $\Delta t$ . Напор, расход и, следовательно, к. п. д. можно определить пересечением линии  $I$  элементарной волны с характеристикой насоса, т. е. получить точные значения расходов, напоров и к. п. д. в тот момент времени, когда делается следующий шаг по определению частоты вращения насоса (на  $\Delta t$  позднее) в зависимости от характеристик гидравлического удара.

Таким образом, методика, которая не учитывает характеристику гидравлического удара, не может быть корректной.

Предлагаемый метод прост и свободен от недостатков, перечисленных выше.

### **3.3. ЧЕТЫРЕХКВАДРАНТНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ НАСОСА**

Если вверх по потоку от насоса не стоит клапан, то может случиться так, что в нестационарном режиме давление ниже по течению от насоса возрастет до такого значения, что поток потечет в обратном направлении через насос, даже если насос продолжает нагнетать жидкость в прежнем направлении. Кроме того, давление может упасть столь низко, что поток пойдет через насос вперед, заставляя его ускоряться или медленнее останавливаться. Другими словами, насос может работать: в режиме насоса, в тормозном режиме или в режиме турбины. Все три режима могут иметь место, когда по-

ток прямой или реверсивный, когда вращение насоса прямое или реверсивное.

Очень невелико количество насосов, которые были испытаны на всех режимах работы в нестационарных условиях; это не позволяет определить полные характеристики насоса в обобщенном виде, необходимом для анализа. Из ограниченного количества имеющихся полных характеристик можно получить приближенные зависимости, но это лучше всего сделать методами, которые не очень хорошо подходят для графического анализа. По этой причине графические методы здесь не представлены, хотя, конечно, они существуют. Способ решения этой задачи описан в гл. 5.

### **3.4. УРАВНИТЕЛЬНЫЕ РЕЗЕРВУАРЫ**

Уравнительные резервуары — это устройства, соединенные с трубопроводами, предназначенные для преобразования высокочастотных больших колебаний давлений на переходном режиме в низкочастотные колебания массы с небольшими амплитудами давления. Простейшим примером уравнительного резервуара является соединенная с трубопроводом вертикальная труба сравнительно большого диаметра, расположенная около регулирующего устройства, приводящего к появлению нежелательных нестационарных процессов (рис. 3.6). Когда регулирующий орган (например, клапан, затвор перед турбиной или насос) стремится быстро изменить скорость жидкости, она может войти в резервуар почти без сопротивления. По мере того как все больше и больше жидкости входит в резервуар, уровень внутри него растет, при этом медленно повышается напор, тормозящий жидкость в трубопроводе. Так как для поднятия уровня жидкости в уравнительном резервуаре в него должен войти относительно большой объем жидкости, то период колебаний пиковых давлений, устанавливающихся в трубопроводе, велик. Поэтому торможение происходит медленно и максимумы давлений сильно уменьшаются. Однако для полной защиты трубопровода от гидравлического удара необходим уравнительный резервуар с бесконечной площадью поперечного сечения. Но уравнительные резервуары даже обычных размеров спо-

способны уменьшить удар до очень малых значений. Методика определения удара изложена ниже.

Когда в качестве регулирующего устройства рассматривается турбина, очень важной функцией уравнивающего резервуара является подача жидкости на ранних стадиях открытия затвора. На этой стадии жидкость в трубопроводе движется слишком медленно для обеспечения полного расхода через турбину. Однако недостающую часть расхода можно получить за счет понижения уров-

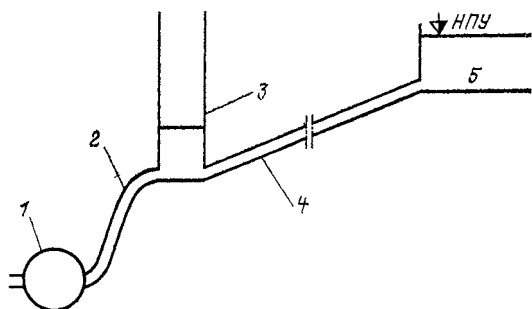


Рис. 3.6. К расчету уравнивающего резервуара (схема деривационной гидроэлектростанции).

1 — турбина; 2 — стальной турбинный водовод; 3 — простой уравнивающий резервуар; 4 — деривационный туннель; 5 — водохранилище.

ня жидкости в уравнительном резервуаре. Понижение уровня (и давления) заставит жидкость в трубопроводе ускориться, и в конце концов расход в трубопроводе станет равен расходу через турбину.

Уровень жидкости в уравнительном резервуаре будет колебаться и возможно, что частота колебаний или каких-либо их гармоник может совпасть с собственной частотой регулирующего механизма (или одной из его гармоник). Если это произойдет, регулирующий механизм может войти в резонанс, и тогда система станет неработоспособной. Были разработаны различные типы уравнительных резервуаров, которые способны гасить любые возникающие колебания.

### 3.5. ТИПЫ УРАВНИТЕЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

На рис. 3.7 показаны четыре основных типа уравнительных резервуаров.

Простой уравнительный резервуар (рис. 3.7,а) обладает следующими преимуществами: передает очень ма-

лые возмущения; хорошо работает в фазе открытия низового регулятора; имеет большой период.

В резервуаре такого типа слабо гасятся колебания жидкости.

Уравнительный резервуар с дросселирующим кольцом (рис. 3.7,б) имеет короткий стояк с закрытым верхним концом, входящий в главный резервуар. По периметру стояка расположены клапаны, которые при нарастании давления открываются и жидкость легко входит

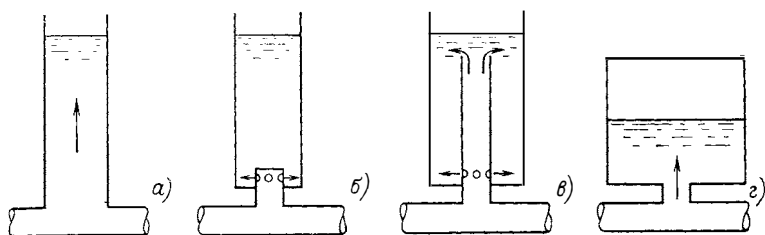


Рис. 3.7.

в резервуар; при возникновении обратного течения клапаны закрываются, но в них имеются маленькие отверстия, создающие большое сопротивление потоку, вытекающему из резервуара. Уравнительные резервуары этого типа обладают способностью быстро снижать ударное давление.

Дифференциальный уравнительный резервуар Джонсона имеет дополнительное сопротивление в виде центрального стояка (рис. 3.7,в). При закрытии задвижки на турбине повышение уровня в патрубке приводит к быстрому увеличению давления в трубопроводе до некоторого предельного значения. Гребень стояка обычно устанавливается на высоте статического уровня резервуара, поэтому увеличение давления мало. Быстрое повышение уровня вызывает более сильное торможение потока в трубопроводе по сравнению с тем, которое имело бы место при установке простого уравнительного резервуара. Когда уровень в стояке достигает гребня, жидкость начинает изливаться, заполняя кольцевую часть резервуара. Часть жидкости попадает в кольцевую часть через отверстия у основания стояка. В течение этой фазы давление в трубопроводе остается приблизительно постоянным. Когда уровень в кольцевой части достигает гребня центрального стояка, происходит мед-



ленное постепенное повышение уровня жидкости по всему поперечному сечению резервуара. Когда волна спадает, уровень понижается и доходит до уровня гребня центрального стояка. Затем уровень в стояке быстро падает, и жидкость выходит через отверстия внизу стояка. При этом уровень в кольцевой части падает сравнительно медленно. В результате график давления в трубопроводе в зависимости от времени описывается сложной кривой с разрывами.

Такой резервуар хорошо ослабляет возмущения и характеризуется сложной формой волны, для которой значительно меньше вероятность войти в резонанс с регулятором турбины. Он имеет более короткий период по сравнению с простым уравнительным резервуаром; так же как простой уравнительный резервуар он сбрасывает большие нестационарные давления в трубопроводе, но не ослабляет колебания массы, как это делает уравнительный резервуар с дроссельным кольцом.

Так же как уравнительный резервуар с дроссельным кольцом, он уступает по характеристике простому уравнительному резервуару при подаче жидкости в период начальной фазы работы турбины.

Пневматический уравнительный резервуар (рис. 3.7,з) представляет собой воздушный колпак. Он используется

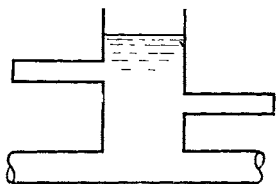


Рис. 3.8.

в тех случаях, когда уравнительный резервуар другого типа был бы слишком высок или когда его надо разместить в скале (подземный). Так как вода растворяет воздух, то пневматический уравнительный резервуар необходимо снабжать воздушными компрессорами, которые будут

поддерживать в нем необходимый объем воздуха. Управление компрессорами должно быть автоматическим; для гарантии такую систему управления потоком необходимо продублировать. Это очень важно, поскольку при потере уравнительным резервуаром всего воздуха он перестанет быть работоспособным и возникающие нестационарные давления могут сильно повредить трубопровод.

Для увеличения объема резервуара устраивают уравнительные резервуары с горизонтальными камерами (рис. 3.8).

Гидравлический расчет уравнильных резервуаров сводится к анализу нестационарных процессов, колебаний массы жидкости в уравнильном резервуаре и в трубопроводе.

### 3.6. АНАЛИЗ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В УРАВНИЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРАХ

На рис. 3.9 показано положение в системе в тот момент, когда работает турбина (или происходит изменение режима под действием какой-либо другой установки).

В течение очень короткого промежутка времени, когда существует значительное возмущение давления, уровень жидкости в резервуаре не может измениться очень сильно, так что  $L_2$  с большой точностью можно считать

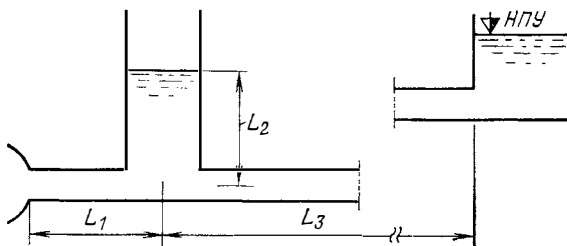


Рис. 3.9.

постоянной. Задача, таким образом, сводится к анализу трехходового соединения. Давление на свободной поверхности в уравнильном резервуаре должно быть постоянно равным атмосферному давлению. При этом задачу можно решать методом, описанным в § 2.5 для трехходового соединения. Хотя инерционные давления, возникающие в этих условиях, малы, не исключено, что они могут быть достаточными для возникновения резонанса («органной трубы») в верхней по потоку части трубопровода, что может быть источником высоких давлений в узловых точках и привести к разрыву трубы.

### 3.7. КОЛЕБАНИЯ МАСС ЖИДКОСТИ В УРАВНИЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРАХ

Предполагается, что скорости изменяются настолько медленно, что влияние этих изменений успевает распространиться по всей длине трубопровода за пренебрежи-

мо короткое время, т. е. мгновенные значения скорости во всех точках трубы считаются одними и теми же, и может быть применена теория несжимаемой жидкости (гл. 1). В гл. 6 приводится методика решения без этого предположения, но тогда потребуются применение ЭВМ. В данном параграфе приводится метод расчета без применения ЭВМ.

На рис. 3.10 показан уровень воды в резервуаре через  $t$ , с, после закрытия низового затвора. Скорость в трубе равна  $v$ , уровень поверхности в уравнительном резервуаре ниже статического уровня воды в резервуаре

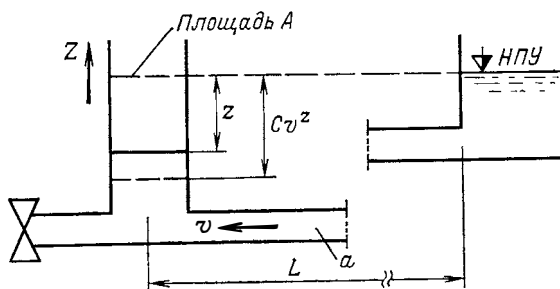


Рис. 3.10.

на  $Z$ , потери напора на трение равны  $(4fL/d)v|v|/2g$  или  $Cv|v|$ , где  $C=4fL/(2gd)$ ,  $d$  — диаметр трубопровода. Заметим, что положительная ось  $Z$  направлена вверх.

Если течение становится установившимся в момент времени  $t$  при скорости  $v$ , то  $Z=-Cv^2$ , но поскольку на жидкость, находящуюся в трубопроводе, действует тормозящая сила, напор, создаваемый этой силой, равен  $Cv^2 - (-Z)$ . Напомним, что  $Z$  — отрицательная величина, тогда

$$Cv^2 + Z = -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt}, \quad (3.19)$$

отсюда получим уравнение движения

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{L}(Cv|v| + Z). \quad (3.20)$$

Использование  $Cv|v|$  вместо  $Cv^2$  позволяет учесть потери напора на трение при изменении направления движения. Пусть через затвор в момент  $t$  проходит рас-

ход  $Q_t$ , тогда

$$av = A \frac{dZ}{dt} + Q_t, \quad (3.21)$$

отсюда получим уравнение неразрывности

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{av - Q_t}{A}. \quad (3.22)$$

Эти два уравнения можно объединить в дифференциальное уравнение второго порядка, но оно не имеет аналитического решения. Если принять  $Q_t=0$  и пренебречь трением, то получим уравнение простого гармонического движения из (3.19)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{L} Z \quad (3.23)$$

и из (3.22)

$$v = \frac{A}{a} \frac{dZ}{dt}. \quad (3.24)$$

Дифференцируя (3.24) по времени и подставляя  $dv/dt$  из (3.23), получаем:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{ag}{AL} Z = 0. \quad (3.25)$$

Угловые скорости  $\Omega$  этого простого гармонического движения есть  $\sqrt{ag/AL}$ , отсюда период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{AL}{ag}}. \quad (3.26)$$

Амплитуда легко находится следующим образом. Поскольку  $r\Omega = v_s a/A$ , где  $v_s$  — начальная стационарная скорость в трубопроводе, а  $r$  — амплитуда, то

$$r = \frac{v_s a/A}{\sqrt{ag/(AL)}} \quad (3.27)$$

или

$$r = v_s \sqrt{aL/(Ag)}. \quad (3.28)$$

Уравнение (3.26) определяет период очень точно и дает хорошие результаты даже при наличии трения; (3.27) и (3.28) определяют амплитуду приблизительно и с увеличением трения они становятся менее точны.

Однако поскольку они дают завышенный результат для пика волны, их можно использовать для быстрого получения начальной оценки пика.

Для уравнительных резервуаров с дроссельными кольцами уравнения можно получить, введя в уравнение движения дополнительный член, учитывающий локальные потери в отверстиях дроссельного кольца  $kv_r|v_r|/2g$ , где  $v_r$  — скорость в стояке:  $v_r = (av - Q_t) / a_r$ . Если дроссельное кольцо имеет отверстия, размер которых зависит от направления движения волны, то  $k$  необходимо согласовать с направлением движения волны. Уравнение неразрывности для уравнительного резервуара с дроссельным кольцом будет таким же, как для простых резервуаров.

Работу дифференциального уравнительного резервуара Джонсона необходимо проанализировать отдельно для каждой из шести фаз его полного волнового цикла. Сначала уровень воды поднимается в центральном стояке и жидкость проникает в кольцевой резервуар через отверстия, расположенные у основания. После подъема уровня жидкости до гребня стояка она начинает переливаться в кольцевой резервуар как через плотину. Когда уровень жидкости в кольцевом резервуаре достигает гребня, то происходит равномерный подъем жидкости по всему поперечному сечению, причем жидкость через отверстия, находящиеся у основания, почти не течет. Течение жидкости через отверстия, расположенные у основания, в любом направлении сопровождается потерями, которые следует учитывать при анализе.

Когда волна начинает спадать, уровень по всему поперечному сечению постепенно опускается и во время этой фазы течения через отверстия у основания нет. После достижения общим уровнем гребня стояка происходит быстрое падение уровня жидкости в стояке и начинается перетекание жидкости через отверстия у основания стояка, причем уровень жидкости в кольцевой части резервуара снижается. При этом исследователь может рассматривать кольцевую часть и стояк отдельно.

Анализ всех типов уравнительных резервуаров основывается на методе конечных разностей, поэтому можно легко записать группы уравнений движения и неразрывности, применимых к различным фазам работы резервуаров. Они используются в соответствии с тем, для какой фазы ведется исследование.

### 3.8. ПНЕВМАТИЧЕСКИЕ УРАВНИТЕЛЬНЫЕ РЕЗЕРВУАРЫ, ИЛИ ВОЗДУШНЫЕ КОЛПАКИ

В стационарном состоянии давление в резервуаре

$$P_{air_s} = -w(Z_s + Cv_s|v_s|) + P_a. \quad (3.29)$$

Здесь давление  $P_{air_s}$  абсолютное, поэтому необходимо включить атмосферное давление  $P_a$ . В этом случае  $Z_s \neq -Cv_s|v_s|$  в стационарном состоянии. Величина  $Z_s$  измеряется относительно стационарного уровня воды (положительная ось  $Z$  направлена вверх). Через  $t$ , с,

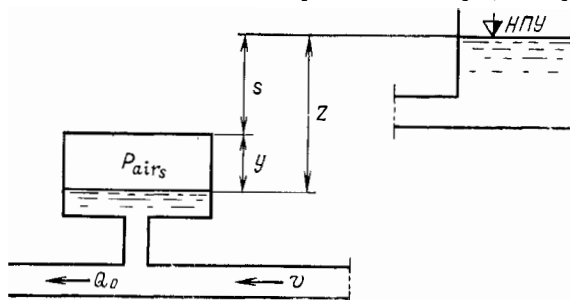


Рис. 3.11.

после закрытия затвора уровень в резервуаре поднимет-

Поскольку  $Z$  увеличивается, воздух будет сжиматься до давления  $P_{air_t}$  согласно политропическому процессу; обычно предполагают, что показатель политропы равен 1,2, отсюда

$$P_{air_s} V_{air_s}^{1,2} = P_{air_t} V_{air_t}^{1,2}. \quad (3.30)$$

Таким образом

$$P_{air_t} = \left( \frac{V_{air_s}}{V_{air_t}} \right)^{1,2} P_{air_s}, \quad (3.31)$$

где  $V_{air}$  — объем воздуха в резервуаре.

Если резервуар имеет постоянную площадь поперечного сечения, то  $V_{air}$  пропорционально  $y$  (рис. 3.11), т. е.

$$P_{air_t} = \left( \frac{y_s}{y_t} \right)^{1,2} P_{air_s}. \quad (3.32)$$

Тогда  $(P_{air_t} - P_a)/\omega = h_{air_t}$  — напор, соответствующий давлению в резервуаре, т. е.

$$\omega h_{air_t} + P_a = (y_s/y_t)^{1,2} P_{air_s} \quad (3.33)$$

или

$$h_{air_t} = (y_s/y_t)^{1,2} [-(Z_s + Cv_s |v_s|) + h_a] - h_a, \quad (3.34)$$

где  $h_a$  — высота, эквивалентная атмосферному давлению. Напомним, что обычно за отрицательное направление для  $Z$  и  $S$  принимается направление вниз.

Так как

$$y_s = S - Z_s, \quad (3.35)$$

$$y_t = S - Z_t, \quad (3.36)$$

то

$$h_{air_t} = \left(\frac{S - Z_s}{S - Z_t}\right)^{1,2} [-(Z_s + Cv_s |v_s|) + h_a] - h_a; \quad (3.37)$$

при этом уравнение движения записывается в виде

$$-Z_t - Cv_t |v_t| - h_{air_t} = \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}, \quad (3.38)$$

а уравнение неразрывности в виде

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{av - Q_t}{A}. \quad (3.39)$$

Таким образом, уравнения колебаний массы жидкости пневматического уравнительного резервуара имеют вид:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{av - Q}{A}; \quad (3.40)$$

$$Z_t + Cv_t |v_t| + h_{air_t} = -\frac{L}{g} \frac{dv}{dt}; \quad (3.41)$$

$$h_{air_t} = \left(\frac{S - Z_s}{S - Z_t}\right)^{1,2} [-(Z_s + Cv_s |v_s|) + h_a] - h_a. \quad (3.42)$$

Хотя показатель степени 1,2 является общепринятым, некоторые авторы предлагают другие показатели степени: 1,0 принимается при изотермическом процессе; 1,4 — при изэнтропическом процессе. Однако действительный процесс должен быть политропическим.

### 3.9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ УРАВНИТЕЛЬНОГО РЕЗЕРВУАРА

Решение уравнений уравнительного резервуара может быть получено только численными методами. Эти расчеты могут быть выполнены при ручном или, что лучше, при машинном счете.

Рассмотрим интегрирование уравнений пневматического уравнительного резервуара. В момент времени  $t$  значение  $v=v_t$ , величина  $Z=Z_t$ , величина  $h_{air}=h_{air_t}$  и

т. д. Тогда

$$\Delta Z = \left( \frac{av_t - Q_t}{A} \right) \Delta t; \quad (3.43)$$

$$Z_{t+\Delta t} = \left( \frac{av_t - Q_t}{A} \right) \Delta t + Z_t; \quad (3.44)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{g}{L} (Z_t + Cv_t |v_t| + h_{air_t}), \quad (3.45)$$

отсюда

$$v_{t+\Delta t} = -g \frac{\Delta t}{L} (Z_t + Cv_t |v_t| + h_{air_t}) + v_t, \quad (3.46)$$

$$h_{air_{t+\Delta t}} = \left( \frac{S - Z_s}{S - Z_{t+\Delta t}} \right)^{1,2} [- (Z_s + Cv_s |v_s|) + h_a] - h_a + h_{air_t}. \quad (3.47)$$

Этот метод является простейшим методом интегрирования уравнений с начальными условиями, он вполне приемлем, если интервалы времени  $\Delta t$  берутся достаточно малыми и используется ЭВМ.

Существуют осредненные итерационные методы, которые позволяют увеличивать интервалы времени  $\Delta t$ , но требуют значительно больше машинного времени.

Для решения этой задачи можно использовать усовершенствованные методы проб и ошибок и метод Рунге — Кутта. Эти методы здесь не рассматриваются, при желании их можно найти в специальной математической литературе.

Если интегрирование выполняется вручную, то лучше всего пользоваться затабулированными данными.



### МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

#### 4.1. ВВЕДЕНИЕ

До недавнего времени считалось, что метод Шнидера — Бержерона является наилучшим для решения нестационарных задач. Тем не менее он очень ограничен и не лишен недостатков.

1. Почти все жидкости, встречающиеся в инженерной практике, содержат небольшое количество свободного воздуха в виде пузырьков: когда давление в жидкости увеличивается, пузырьки уменьшаются в объеме, когда давление уменьшается, они расширяются. В результате объемный модуль сжатия жидкости изменяется с давлением. Поскольку скорость волны зависит от объемного модуля сжатия, она зависит и от давления. Изменение скорости волны может быть очень большим.

Например, содержание свободного воздуха 0,01% может приводить к уменьшению скорости распространения волны с 1300 до 100 м/с только из-за изменения давления. В результате линии распространения элементарных волн при графическом методе вместо прямых становятся сложными кривыми. Эти кривые заранее определить нельзя, что затрудняет использование графического метода для условий переменной скорости волны.

2. Жидкость может содержать не только свободный газ; такие жидкости как нефть и вода могут содержать значительные количества растворенных газов: вода — до 2% по объему на каждую атмосферу давления; нефть — еще больше. В зонах пониженного давления при нестационарном режиме растворимый газ может выделяться из жидкости в виде пузырьков, увеличивая количество пузырьков в свободной форме и значительно уменьшая скорость распространения волны. Этот фактор также не может быть учтен графическим методом.

3. Современные нефтяные трубопроводы, а также длинные водопроводы снабжаются клапанами со сложными сервоприводами. Описание поведения такого оборудования графическим методом чрезвычайно трудно отчасти из-за разных масштабов времени работы клапанов и фазы удара, отчасти из-за многопараметрического характера работы клапана.

4. Отключение насосов при эксплуатации нефтяных трубопроводов является редким случаем, однако при такой необходимости важно учитывать изменение частоты вращения насоса и работу клапана при заполнении или опорожнении резервуаров, поэтому такой расчет трудно осуществить графическим методом.

5. Многие виды граничных условий могут быть представлены математически, но их невозможно воспроизвести графически; например, граничное условие, определяемое сточным эжектором, может быть графически представлено только с очень большими упрощениями (см. п. 3).

6. Требование, чтобы все длины труб в трубопроводной сети находились в простых соотношениях, является очень большим ограничением и может привести к значительным ошибкам.

7. В сложных сетях в одной точке могут сходиться до 15 разветвлений. Для таких систем, если их не удастся упростить, очень немногие специалисты могут с помощью графического метода решить задачу.

По изложенным выше причинам необходимо было найти метод решения задачи о гидравлическом ударе, который имел бы меньше недостатков, чем графические.

Вернемся к основным уравнениям гидравлического удара, которые были выведены в § 2.4.

Перепишем их:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

уравнение движения

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2fv|v|}{gd} = 0.$$

Эти уравнения можно непосредственно проинтегрировать методом конечных разностей, но это должно быть сделано с большой осторожностью, так как может возникнуть проблема неустойчивости решения; в связи с этим целесообразно упомянуть работы Лакса (Lax) [7] и Лакса и Вендрофа (Wendroff) [8], в которых изложены эти методы. Однако, по нашему мнению, лучше конечно-разностное решение этих дифференциальных уравнений в частных производных находить, приведя их предварительно к характеристической форме. Этот метод известен как метод характеристик.

## 4.2. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА К ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Уравнения гидравлического удара состоят из двух квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных. Существует несколько различных методов преобразования такой пары уравнений к характеристическому виду. Метод, рассматриваемый ниже, является усовершенствованным методом Листера (Lister) [9], более простой метод приведен в § 10.3.

Рассмотрим систему из двух дифференциальных уравнений в частных производных:

$$L_1 = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial y} + E_1 = 0; \quad (4.1)$$

$$L_2 = A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + C_2 \frac{\partial v}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v}{\partial y} + E_2 = 0, \quad (4.2)$$

где  $u$  и  $v$  — зависимые переменные;  $x$  и  $y$  — независимые переменные;  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$  — непрерывные известные функции  $v, u, x$  и  $y$ .

Предполагается, что условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

частично или полностью не выполняется.

Рассмотрим комбинацию  $L_1$  и  $L_2$  такую, что

$$L = L_1 + \lambda L_2; \quad (4.3)$$

тогда

$$L = (A_1 + \lambda A_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (B_1 + \lambda B_2) \frac{\partial u}{\partial y} + (C_1 + \lambda C_2) \frac{\partial v}{\partial x} + (D_1 + \lambda D_2) \frac{\partial v}{\partial y} + E_1 + \lambda E_2. \quad (4.4)$$

Пусть  $y=y(x)$  — уравнение кривой, для которой  $dy/dx$  — тангенс наклона. Если  $u=u(x, y)$  и  $v=v(x, y)$  — решения для  $L_1$  и  $L_2$ , то

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y; \quad (4.5)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y, \quad (4.6)$$

Теперь

$$\begin{aligned} & (A_1 + \lambda A_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (B_1 + \lambda B_2) \frac{\partial u}{\partial y} = \\ & = (A_1 + \lambda A_2) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B_1 + \lambda B_2}{A_1 + \lambda A_2} \frac{\partial u}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} & (C_1 + \lambda C_2) \frac{\partial v}{\partial x} + (D_1 + \lambda D_2) \frac{\partial v}{\partial y} = \\ & = (C_1 + \lambda C_2) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{D_1 + \lambda D_2}{C_1 + \lambda C_2} \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.7b)$$

но если

$$\frac{B_1 + \lambda B_2}{A_1 + \lambda A_2} = \frac{D_1 + \lambda D_2}{C_1 + \lambda C_2} = \frac{dy}{dx}, \quad (4.8)$$

то

$$L_1 + \lambda L_2 = (A_1 + \lambda A_2) \frac{du}{dx} + (C_1 + \lambda C_2) \frac{dv}{dx} + (E_1 + \lambda E_2). \quad (4.9)$$

Решив уравнение (4.8) относительно  $\lambda$ , получим:

$$\lambda = \frac{A_1 dy - B_1 dx}{B_2 dx - A_2 dy} = \frac{C_1 dy - D_1 dx}{C_2 dx - C_2 dy}, \quad (4.10)$$

отсюда

$$p(dy)^2 + qdxdy + r(dx)^2 = 0, \quad (4.11)$$

где

$$p = A_1 C_2 - A_2 C_1; \quad (4.12)$$

$$q = A_2 D_1 + B_2 C_1 - A_1 D_2 - B_1 C_2; \quad (4.13)$$

$$r = B_1 D_2 - B_2 D_1. \quad (4.14)$$

Если корни этого квадратного уравнения действительные и различные, то исходная пара дифференциальных уравнений является уравнениями гиперболического типа. Если корни действительные и равные, то исходные уравнения параболического типа, и если комплексные, то уравнения эллиптического типа, т. е.

$q^2 - 4pr > 0$  — гиперболические;

$q^2 - 4pr = 0$  — параболические;

$q^2 - 4pr < 0$  — эллиптические.

Подставляя значения  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2$  и решая квадратные уравнения, получаем два значения  $dy/dx$ , если уравнения гиперболического типа. Обозначим  $dy/dx$  через  $\xi$ .

При этом квадратное уравнение имеет вид

$$p\xi^2 + q\xi + r = 0,$$

а корни уравнения  $\xi_+$  и  $\xi_-$ . Таким образом, в плоскости  $x, y$  определены два направления.

Итак, в точке  $x, y$  плоскости  $x, y$  должны быть две линии с наклоном  $dy/dx = \xi_+$  и  $dy/dx = \xi_-$ , проходящие через точку и соответствующие дифференциальным уравнениям. Линии стремятся стать коллинеарными, когда  $\xi_+ \rightarrow \xi_-$ , что имеет место для гиперзвуковых течений газа, а также для сверхзвуковых течений при наличии свободной границы, при этом уравнения стремятся стать параболическими.

Вычислив значения  $\xi_+$  и  $\xi_-$ , запишем два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \xi_+, \quad (4.15a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \xi_-. \quad (4.15б)$$

Обратная подстановка этих значений в уравнение (4.10) дает:

$$\lambda = \frac{A_1\xi_{\pm} - B_1}{B_2 - A_2\xi_{\pm}} = \frac{C_1\xi_{\pm} - D_1}{D_2 - C_2\xi_{\pm}}.$$

Подстановка  $\lambda$  в уравнение (4.9) дает:

$$\left[ A_1 + \left( \frac{A_1\xi_{\pm} - B_1}{B_2 - A_2\xi_{\pm}} \right) A_2 \right] du + \left[ C_1 + \left( \frac{A_1\xi_{\pm} - B_1}{B_2 - A_2\xi_{\pm}} \right) C_2 \right] dv + \left[ E_1 + \left( \frac{A_1\xi_{\pm} - B_1}{B_2 - A_2\xi_{\pm}} \right) E_2 \right] dx = 0.$$

Проведя преобразование, получим:

$$(A_1B_2 - A_2B_1) du + [C_1B_2 - C_2B_1 + (C_2A_1 - C_1A_2)\xi_{\pm}] dv + [B_2E_1 - B_1E_2 + (E_2A_1 - E_1A_2)\xi_{\pm}] dx = 0. \quad (4.16)$$

Подстановка  $C_2 A_1 - C_1 A_2 = P$  из уравнения (4.12) дает:

$$Fdu + (p\xi_+ - G)dv + (K\xi_+ - H)dx = 0; \quad (4.17a)$$

$$Fdu + (p\xi_- - G)dv + (K\xi_- - H)dx = 0, \quad (4.17б)$$

где

$$F = A_1 B_2 - A_2 B_1; \quad (4.18)$$

$$G = B_1 C_2 - B_2 C_1; \quad (4.19)$$

$$K = A_1 E_2 - A_2 E_1; \quad (4.20)$$

$$H = B_1 E_2 - B_2 E_1. \quad (4.21)$$

Таким образом, имеются четыре уравнения:

$$Fdu + (p\xi_{\pm} - G)dv + (K\xi_{\pm} - H)dx = 0, \quad (4.17, a б)$$

$$dy - \xi_{\pm} dx = 0. \quad (4.15a, б)$$

Две линии на плоскости  $x, y$ , определяемые через  $dy/dx = \xi_{\pm}$ , называются линиями характеристики (отсюда название «метод характеристик») и вдоль этих линий удовлетворяется уравнение

$$Fdu + (p\xi_{\pm} - G)dv + (K\xi_{\pm} - H)dx = 0.$$

Эти уравнения решаются методом конечных разностей.

#### 4.3. УРАВНЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Имеем два уравнения (см. гл. 2):

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c}{g} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + 0 \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + 0 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2fv|v|}{gd} = 0.$$

Сравнивая их с общим видом приведенных выше уравнений, получим, что в общем случае  $x$  эквивалентно  $x, y-t, A_1-v, B_1-1$ :

$$C_1 - c^2/g, D_1 - 0, E_1 - \left(-v \frac{\partial z}{\partial x}\right), A_2 - 1, B_2 - \\ - 0, C_2 - v/g, D_2 - 1/g, E_2 - 2fv|v|/(gd), u - \\ - h \text{ и } v - v.$$

При этом

$$p = A_1 C_2 - A_2 C_1 = (v^2 - c^2)/g; \quad (4.22)$$

$$q = A_2 D_1 + B_2 C_1 - A_1 D_2 - B_1 C_2 = -2v/g; \quad (4.23)$$

$$r = B_1 D_2 - B_2 D_1 = 1/g. \quad (4.24)$$

Так как

$$\zeta_{\pm} = -\frac{q}{2p} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2p}\right)^2 - \frac{r}{p}},$$

то после подстановки и приведения членов

$$\zeta_{\pm} = \frac{1}{v \pm c}, \quad (4.25)$$

$$F = A_1 B_2 - A_2 B_1 = -1; \quad (4.26)$$

$$G = B_1 C_2 - B_2 C_1 = v/g; \quad (4.27)$$

$$K = A_1 E_2 - A_2 E_1 = 2fv^2 |v|/(gd) + v \frac{\partial z}{\partial x}; \quad (4.28)$$

$$H = B_1 E_2 - B_2 E_1 = 2fv|v|/(gd); \quad (4.29)$$

$$P = (v^2 - c^2)/g. \quad (4.30)$$

Тогда запишем:

$$-dh \mp \frac{c}{g} dv \mp \frac{c}{g} \left( \frac{2fv|v|}{d} \frac{dx}{v \pm c} + \frac{gv}{c} \frac{dz}{dx} \frac{dx}{v \pm c} \right) = 0, \quad (4.31a, б)$$

$$dx = (v \pm c) dt, \quad (4.32a, б)$$

а также

$$\pm \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{2fv|v|}{d} \mp \frac{gv}{c} \frac{dz}{dx} = 0; \quad (4.33a, б)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \pm c. \quad (4.34a, б)$$

Член  $\frac{gv}{c} \frac{dz}{dx}$  мал и обычно опускается. Это и есть

уравнение гидравлического удара в характеристической форме.

#### 4.4. ЗОНА ВЛИЯНИЯ И ОБЛАСТЬ ЗАВИСИМОСТИ

Предположим, что в точке  $P(x_1, t_1)$  известна скорость потока  $v$  и скорость распространения волны  $c$ . Через точку  $P$  можно провести две линии, у которых  $dt/dx = 1/(v+c)$  и  $dt/dx = 1/(v-c)$ . Отметим, что угол, дополнительный к углу  $\text{arctg} \frac{1}{v-c}$ , равен  $\text{arctg} \frac{1}{c-v}$ .

Эти линии направлены по касательным к характеристикам (показаны на рис. 4.1 в виде прямой характеристики  $C_+$ , т. е.  $RPW$ , и обратной характеристики  $C_-$ , т. е.  $SPV$ ).

Если в точке  $P$  возникает возмущение, т. е. в точке  $x$  в момент времени  $t$ , то оно будет перемещаться, как волна, вниз по течению со скоростью  $v+c$ , а вверх — со скоростью  $c-v$ . Иными словами, в плоскости  $x, t$  линии

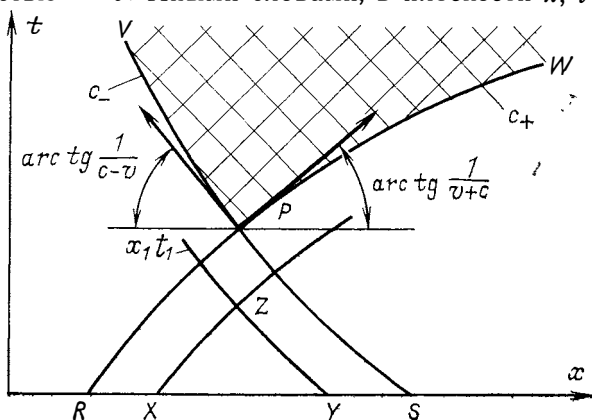


Рис. 4.1.

характеристик являются графиками движения волны, перемещающейся или вверх по течению, или вниз, как  $(dx/dt)_{\pm} = v \pm c$ .

Любая точка, лежащая внутри заштрихованной области на рис. 4.1, т. е.  $VPW$ , будет испытывать влияние возмущения, эту область называют зоной влияния точки  $P$ .

Рассмотрим, что происходит с возмущениями, которые возникают в точках, лежащих между  $R$  и  $S$  в начальный момент времени, допустим, в точках  $X$  и  $Y$ .



Прямая характеристика, идущая от  $X$ , пересекает обратную характеристику, идущую от  $Y$ , в точке  $Z$ . Точка  $P$ , которая характеризуется бóльшим временем, чем  $Z$ , лежит внутри зоны влияния точки  $Z$ , таким образом, на события, происходящие в точке  $P$ , воздействуют события, происходящие в точках, лежащих между  $R$  и  $S$ . Поэтому плоскость  $R, S$  называют областью зависимости точки  $P$ . Любые события, происходящие вне сегмента  $R, S$ , не могут воздействовать на события, происходящие в точке  $P$ .

#### 4.5. НЕВОЗМУЩЕННАЯ ЗОНА

Невозмущенной зоной называют область на плоскости  $x, t$ , в которую не может проникнуть влияние какого-либо возмущения: на рис. 4.2,а показана невозмущенная зона при возмущении течения в верхней части зоны; на

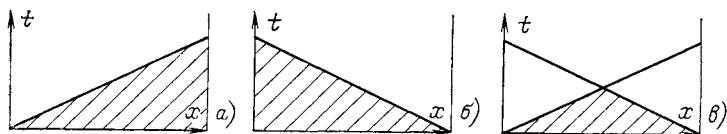


Рис. 4.2.

рис. 4.2,б — в нижней части зоны, на рис. 4.2,в — при возмущении в обеих частях зоны одновременно. Характеристики будут прямыми, если  $v$  и  $c$  постоянны во всех точках на характеристике, и искривленными, если они не постоянны. Понятия, введенные выше, дают представление о природе нестационарного течения.

#### 4.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим прямую характеристику с углом наклона  $\text{arctg} \frac{1}{v+c}$ , начинающуюся в точке  $R$  (рис. 4.3) и пересекающуюся в точке  $P$  с обратной характеристикой, исходящей из точки  $S$  с углом наклона  $\text{arctg} \frac{1}{v-c}$ . Предположим, что  $\Delta t$  и  $\Delta x$  настолько малы, что короткие отрезки характеристик  $RP$  и  $SP$  можно считать прямыми.

Линии  $RP$  и  $SP$  удовлетворяют уравнениям

$$dt = \frac{dx}{v \pm c}. \quad [4.34a, б]^*$$

Таким образом можно построить линии  $RP$  и  $SP$ , вдоль которых справедливы два других уравнения:

$$\pm \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{2fv|v|}{d} = 0 \quad [4.33a, б]$$

вдоль  $RP$

$$\frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{2fv|v|}{d} = 0; \quad [4.33a]$$

вдоль  $SP$

$$-\frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + \frac{2fv|v|}{d} = 0. \quad [4.33б]$$

Первое из этих двух уравнений справедливо в  $R$  и  $P$ , а второе — в  $S$  и  $P$ . Таким образом, в точке  $P$  они справедливы одновременно.

Чтобы проделать дальнейшие операции, необходимо записать уравнения в конечно-разностном виде:

вдоль  $RP$

$$\frac{g}{c} (h_P - h_R) + v_P - v_R + \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d} = 0; \quad (4.35)$$

вдоль  $SP$

$$-\frac{g}{c} (h_P - h_S) + v_P - v_S + \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d} = 0. \quad (4.36)$$

Если  $h_R$ ,  $v_R$ ,  $h_S$ ,  $v_S$  известны, то  $v_P$  и  $h_P$  можно найти, решив совместно уравнения (4.35) и (4.36). Этот процесс позволяет найти две величины — напор и скорость через  $\Delta t$ , с, по известным величинам. Метод обеспечивает основу расчета напоров и скоростей в нестационарных потоках в желаемом чис-

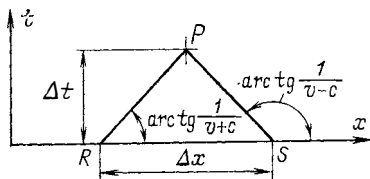


Рис. 4.3.

\* Квадратные скобки указывают, что уравнение с таким номером упоминалось раньше,

ле точек по трубе с учетом влияния трения, конвективного ускорения и мгновенных градиентов напора — все го, что предшествующие методы полностью или частично опускали.

На основе описанного выше можно произвести расчет.

Предположим, что ось  $x$  проходит вдоль осевой линии трубопровода и что в точке  $x=0$  расположено верховое регулирующее устройство (рис. 4.4). Затем пред-

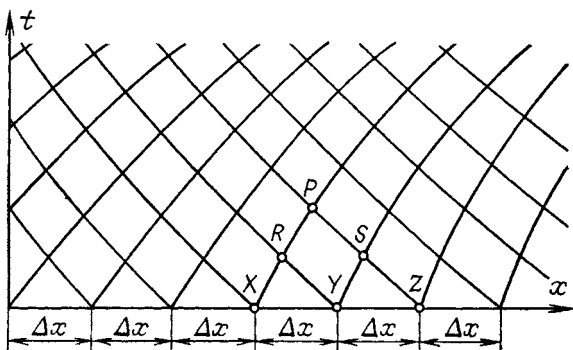


Рис. 4.4.

положим, что в точках вдоль трубы, расположенных через интервалы  $\Delta x$ , в момент времени  $t=0$  известны напоры и скорости. Точки  $R$  и  $S$  могут быть определены  $R$  из  $X$  и  $Y$ , а  $S$  из  $Y$  и  $Z$  по описанному методу. Затем точку  $P$  можно определить из точек  $R$  и  $S$ . Этот процесс может быть распространен на всю плоскость  $x, t$ . В точке  $x=0$  величины  $h$  и  $v$  или зависимость между ними должны быть известны или заданы.

#### 4.7. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

На границах имеется только по одной характеристике: на верхнем конце трубопровода — обратная характеристика, на нижнем — прямая характеристика (рис. 4.5). Так как нестационарность возникает на границах, то анализ граничных условий чрезвычайно важен.

Поскольку имеется только одна характеристика, необходимо выразить граничные условия в такой математической форме, чтобы их можно было решить относительно  $h_P$  (или  $h_Q$ ) и  $v_P$  (или  $v_Q$ ) совместно с характе-

ристическим уравнением. Более подробно этот процесс будет рассмотрен ниже.

Метод, описанный выше, был разработан задолго до появления современных методов счета. Он требовал графических построений и неприемлемо тяжелых расчетов, поэтому редко применялся. Можно легко написать программу для ЭВМ, которая дублирует графический процесс и позволяет быстро получить решения совместных уравнений, поэтому в настоящее время этот метод мог

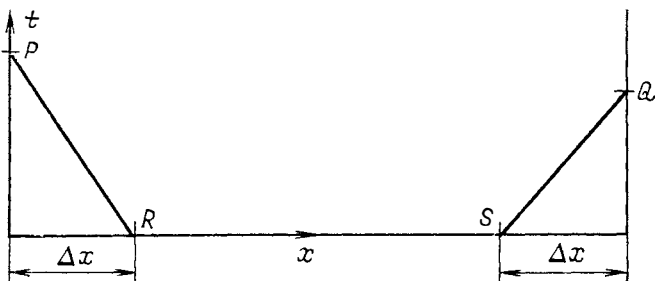


Рис. 4.5.

бы использоваться без затруднений. Однако он не используется, поскольку при изменении скоростей в зависимости от времени и расстояния наклоны характеристических линий изменяются, и, следовательно, точки пересечения не совпадают с точками пересечения постоянных интервалов  $x$  и  $t$ . Поэтому результаты, полученные из криволинейной сетки, необходимо интерполировать так, чтобы получить значения в узлах прямоугольной сетки в плоскости  $x, t$ . Эти величины можно рассматривать на фиксированном расстоянии  $x$  как зависящие от времени, и наоборот, в фиксированный момент времени как зависящие от расстояния  $x$ . Начальная нерегулярная сетка очень неудобна для этой цели. Различные варианты этого метода широко используются на практике.

#### 4.8. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК С РЕГУЛЯРНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКОЙ

Этот метод основан на положениях, изложенных выше, но для того, чтобы определить искомые величины в узлах регулярной прямоугольной сетки, необходима

интерполяция. Но это проще, чем требуется для приведения результатов к регулярной прямоугольной сетке с помощью метода Хартри (Hartree).

Выберем величину  $\Delta t$  меньше  $\Delta x/(v+c)$ . При расчетах гидравлического удара целесообразно выбрать  $\Delta t = 0,95\Delta x/\hat{c}$ , где  $\hat{c}$  — максимальная скорость распространения волны в сети. Если выбрана величина  $\Delta t = \Delta x/c$ , то это означает, что если  $v$  положительно, то точка  $R$  будет расположена выше по течению от точки  $M$  (рис. 4.6), а это ведет к потере устойчивости расчета.

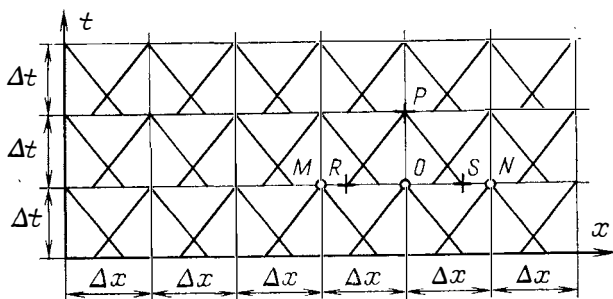


Рис. 4.6.

По полученным опытным данным постоянная, равная 0,95, обеспечивает удовлетворительный запас устойчивости.

Условие  $\Delta t = \Delta x/(v+c)$  известно как критерий устойчивости Куранта (Courant) и Леви (Lewy) [10]. Определенный таким образом критерий автоматически удовлетворяет другому требуемому условию  $\Delta t < \Delta x/(c-v)$ .

В некоторых работах предлагается использовать в качестве критерия  $\Delta t = \Delta x/c$  и пренебрегать членом  $v$ , поскольку он много меньше  $c$ . При этом отклонение от области зависимости будет мало. Для чистой воды, не содержащей воздуха, текущей с малыми скоростями в стальных трубах, это будет справедливо. При этом соответственно характерные значения  $v = 2$  м/с,  $c = 1300$  м/с. Если  $v = 15$  м/с, что характерно для гибких шлангов систем подачи жидкости в танкеры, и  $c = 100$  м/с из-за присутствия воздушных или газовых пузырьков или эластичности самой трубы, то такое предположение может быть рискованным. Целесообразно.

чтобы характеристика из точки  $\bar{P}$  пересекла «предыдущий уровень времени», как можно ближе к узловым точкам, т. е.  $RM$  должно составлять возможно меньшую долю от  $OM$ , но так, чтобы точка  $R$  не выходила за пределы  $MO$ , что может вызвать потерю устойчивости. Причина этого заключается в том, что если  $RM$  составляет большую долю  $\Delta x$ , то появляется тенденция к размытию фронта волны, крутая волна постепенно уползает и сильно искривленные участки волны будут иметь меньшую кривизну. Однако автор не встречал случая, чтобы этот фактор приводил к ошибочным значениям максимальных напоров и скоростей, если предусмотрено достаточное число интервалов  $\Delta x$  по длине трубы. Если  $OR < 0,95OM$ , то это удовлетворяет указанному выше требованию. Постоянная 0,95 удовлетворяет требованию к характеристике пересечь «предыдущий уровень времени» как можно ближе к узловой точке сетки с запасом для изменения  $v$  и  $c$ . Если в качестве критерия взято  $\Delta t = \Delta x/c$ , то предложенная ранее процедура интерполяции может и не понадобиться.

Предположим, что интегрирование на первом шаге по времени (рис. 4.6) выполнено для всех точек вдоль трубы. Поэтому напоры и скорости в точках  $M$ ,  $O$  и  $N$  известны. Построим две линии, проходящие через точку  $P$  соответственно с наклонами  $dt/dx = 1/(v_O + c_O)$  и  $dt/dx = 1/(v_O - c_O)$ . Они пройдут через  $R$  и  $S$ . Можно было бы предположить, что наклоны следовало определить по соотношениям  $dt/dx = 1/(v_R + c_R)$  и  $dt/dx = 1/(v_S - c_S)$ , или  $dt/dx = 1/(v_P + c_P)$  и  $dt/dx = 1/(v_P - c_P)$ , но на этой стадии  $v_R$ ,  $v_S$ ,  $c_R$ ,  $c_S$ ,  $v_P$ ,  $c_P$  еще не вычислены. С помощью линейной интерполяции между  $M$  и  $O$  находим  $v_R$  и  $c_R$ , между  $O$  и  $N$  —  $v_S$  и  $c_S$ .

Теперь запишем характеристические уравнения

$$\frac{g}{c_0} (h_I - h_R) + v_P - v_R + \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d} = 0, \quad [4.35]$$

откуда

$$h_P = h_R - \frac{c_0}{g} \left( v_P - v_R + \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d} \right); \quad [4.37]$$

$$-\frac{g}{c_0} (h_P - h_S) + v_P - v_S + \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d} = 0, \quad [4.36]$$

откуда

$$h_P = h_S + \frac{c_O}{g} \left( v_P - v_S + \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d} \right); \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} h_R - \frac{c_O}{g} \left( v_P - v_R + \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d} \right) = \\ = h_S + \frac{c_O}{g} \left( v_P - v_S + \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Таким образом,

$$v_P = \frac{h_R - h_S + \frac{c_O}{g} (v_R + v_S) - \frac{c_O}{g} \left( \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t + 2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d} \right)}{\frac{2c_O}{g}}; \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} v_P = \frac{g}{2c_O} (h_R - h_S) + \frac{v_R + v_S}{2} - \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d} + \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d} \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Теперь  $h_P$  можно вычислить по (4.37) или (4.38). В данном случае всюду в уравнении (4.35) использовалось  $c_R$  вместо  $c_O$  и в уравнении (4.36)  $c_S$  вместо  $c_O$ . Оба метода верны и дают слабо отличающиеся результаты.

Поскольку начальные расчеты положения точек  $R$  и  $S$  были основаны на величинах  $v_O$  и  $c_O$ , можно предположить, что целесообразно пересчитать наклоны, основываясь на средних значениях, т. е.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{(v_R + v_P)/2 + (c_R + c_P)/2},$$

чтобы определить новое положение  $R$ , и

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{(v_S + v_P)/2 - (c_S + c_P)/2},$$

чтобы определить снова  $S$ . Этот процесс можно повторять до тех пор, пока два последовательно полученных значения  $v_P$  и  $c_P$  будут мало отличаться друг от друга. Эта процедура проста, но автор не убежден в ее необходимости, если взято достаточно большое число интервалов  $\Delta x$ . Единственный путь убедиться в том, что число интервалов выбрано достаточно большим, это повторить

расчет на ЭВМ, используя все более малые значения  $\Delta x$ . Когда будет найдено, что два последующих значения  $\Delta x$  дают приемлемо одинаковые ответы, то можно использовать большие значения  $\Delta x$ . В действительности расчетчики, имеющие большой опыт в выборе значений  $\Delta x$ , не нуждаются в многократном повторении счета. Всегда следует иметь в виду, что в случае простой трубы, сделав  $\Delta x$  равным длине трубы, можно получить результаты, которые будут по меньшей мере такими же хорошими, как полученные с помощью графического метода Шнидера, использующего один дроссель на верхнем по течению концевом сечении. Поэтому даже если используется малое число интервалов  $\Delta x$ , то результаты будут уже значительно лучше, чем при графическом методе. Обычно используют десять интервалов  $\Delta x$ , и только для длинных трубопроводов — больше. При использовании большего числа интервалов  $\Delta x$  возникает проблема затрат машинного времени, которое приблизительно пропорционально квадрату числа интервалов  $\Delta x$ , поэтому увеличение их быстро увеличивает стоимость одного расчета. Проведение экономических расчетов при обеспечении высокого уровня точности во многом зависит от опыта расчетчика.

Некоторые специалисты используют запрограммированную версию графического метода расчета. Единственно, что при этом делается, это вводится другое представление уравнений гидравлического удара. При этом используются те же уравнения, что и при графическом анализе, т. е. упрощенные уравнения гидравлического удара, и, как таковые, не совсем верные. В уравнении движения и уравнении неразрывности опущен член  $v \frac{\partial v}{\partial x}$ , описывающий конвективное ускорение. Это приводит к небольшим ошибкам, если скорость волны велика, но они становятся больше, когда скорость волны уменьшается. Поскольку скорость волны изменяется и может стать относительно малой в потоках, содержащих свободные газовые пузырьки, этим влиянием нельзя пренебрегать.

Утверждение, что запрограммированный метод Шнидера эквивалентен методу характеристик, справедливо, если принять изложенные выше ограничения, поскольку задача едина в четырехмерном пространстве: переменными являются  $h$ ,  $v$ ,  $x$  и  $t$ . По методу Шнидера — Берже-



рона задача рассматривается в плоскости  $h, v$  (или  $h, q$ ), в то время как метод характеристик рассматривает задачу в плоскости  $x, t$ . В этом смысле имеется небольшое отличие между двумя методами, но метод характеристик проще использовать, он обеспечивает математическое описание граничных условий и не требует исключения каких-либо членов из основных уравнений гидравлического удара.

По этим причинам автор убежден, что метод характеристик лучше, чем запрограммированный метод Шнидера, и заменит последний.

#### 4.9. ДРУГИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Конечно-разностными методами можно производить прямое интегрирование основных дифференциальных уравнений гидравлического удара, записанных в частных производных.

Рассмотрим уравнение неразрывности и количества движения применительно к точке  $E$  (рис. 4.7)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0;$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2fv|v|}{gd} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_E = \frac{h_H - h_B}{2\Delta t}; \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_E = \frac{h_F - h_D}{2\Delta x};$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_E = \frac{v_H - v_B}{2\Delta t}; \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_E = \frac{v_F - v_D}{2\Delta x}.$$

Так как  $h_D, h_F, v_D, v_F, h_B$  и  $v_B$  известны, то, подставив записанные выше соотношения для частных производных, получим два совместных уравнения для определения  $v_H$  и  $h_H$ .

Величины  $\Delta x$  и  $\Delta t$  по-прежнему должны удовлетворять критерию устойчивости Куранта и Леви [10], т. е.  $dt/dx = 1/(v+c)$ .

Существует много вариантов этого метода, такие как

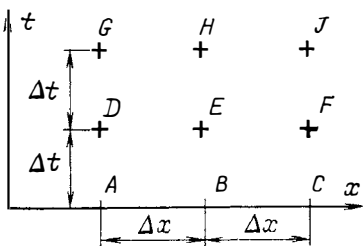


Рис. 4.7.

метод Лакса — Вендрофа, трехслойный явный метод, четырехточечный метод Амейна (Amein), неявные шести-точечные методы Лиггета (Liggett) и Вулхизера (Woolhiser), каждый из которых лучше изложенного выше. Однако, по нашему мнению, наилучшим для решения задачи о гидравлическом ударе является ранее описанный метод характеристик с регулярной сеткой [11].

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### ПЕРЕМЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

#### 5.1. ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ ВОЛНЫ

Скорость волны зависит от эффективного модуля упругости жидкости, и для жидкости, свободной от пузырьков, как уже было показано, зависит от упругости материала трубы, т. е.

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{K} + \frac{d}{TE}.$$

Здесь  $K'$  — эффективный модуль упругости;  $K$  — модуль упругости жидкости;  $d$ ,  $T$  и  $E$  — внутренний диаметр, толщина стенки и модуль упругости материала стенки трубы, соответственно.

Если в жидкости имеются пузырьки газа, то эффективный модуль упругости сильно уменьшается, влияние пузырьков газа при низких давлениях становится больше, чем влияние упругости трубы, описываемой членом  $d/TE$ . Так как объем газа в форме свободных пузырьков на любом участке  $\Delta x$  зависит от абсолютного давления на этом участке, то эффективный модуль упругости и, следовательно, скорость волны должны быть разными на каждом элементе  $\Delta x$ . Нестационарные возмущения могут создавать сильно отличающиеся давления в различных частях трубопровода в одно и то же время, например в одной точке трубопровода скорость волны может доходить до 1000 м/с, в другой до 10 м/с. Неучет этого эффекта обязательно приведет к ошибке.

Течение смеси газа с жидкостью является примером двухфазного потока; о нестационарном движении двухфазных потоков имеется мало работ; по стационарным двухфазным течениям имеются многочисленные исследования, однако знание этих течений до сих пор не полное.

## 5.2. ГАЗОВЫДЕЛЕНИЕ

Задача существенно осложняется из-за выделения дополнительных газовых пузырьков из растворенного газа, присутствующего во всех жидкостях, при прохождении волн разрежения. Когда жидкость, насыщенная газом при некотором повышенном давлении, например, атмосферном для воды, попадает в зону низкого давления на длительное время, некоторое количество содержащегося в ней газа выделится в виде пузырьков, которые будут подниматься и покидать жидкость через свободную поверхность. Содержание насыщенного газа в жидкости зависит от абсолютного давления. В соответствии с законом Генри объем растворенного газа пропорционален давлению, т. е.  $V_g = kp$ , где  $k$  — коэффициент, который уменьшается с температурой. Для воды содержание насыщенного газа при атмосферном давлении составляет около 2% по объему.

Таким образом, если вода при атмосферном давлении, содержащая 2% по объему воздуха, позднее окажется при давлении, равном половине атмосферного, то из воды выделится в виде пузырьков газ в количестве 1% по объему, приведенному к атмосферному давлению, при условии, что для этого будет обеспечен достаточный отрезок времени. Это явление в обычной жизни наблюдается повсеместно. Так, когда открывают бутылку с пивом, оно бурно пенится, но газовые пузырьки ( $\text{CO}_2$ ) продолжают выделяться относительно долгое время. Когда они окончательно высвободятся, про пиво говорят, что оно «выдохлось».

Если жидкость подвергнуть повышенному давлению, она будет поглощать газ через свободную поверхность, и снова этот процесс сильно зависит от времени. Если высокое давление приложено к пузырькам газа в жидкости, то процесс поглощения происходит много быстрее вследствие сильного увеличения поверхности, через которую происходит диффузия газа.

При возникновении нестационарного разрежения время, в течение которого происходит выделение или поглощение газа, много меньше времени, необходимого для установления равновесия, поэтому объем газа, выделившийся при прохождении нестационарного разрежения, нельзя вычислить, используя закон Генри.

Метод, описывающий процесс выделения пузырьков, будет приведен ниже. Следует отметить, что предлагаемая модель процесса выделения пузырьков основана на предположениях, которые не могут быть полностью справедливыми.

Рассмотрим пузырек с радиусом  $r$  (рис. 5.1). Давление внутри пузырька будет больше, чем снаружи, на  $\Delta p$ , поскольку против сил внутреннего давления действует поверхностное натяжение. Дополнительное давление может быть рассчитано из условия баланса сил в поперечном диаметральной сечении пузырька:

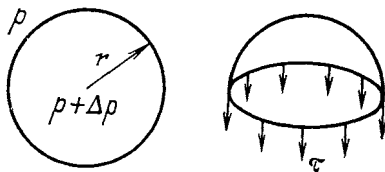


Рис. 5.1.

$$\Delta p \pi r^2 = 2\pi r \tau,$$

отсюда

$$\Delta p = \frac{2\tau}{r}, \quad (5.1)$$

где  $\tau$  — коэффициент поверхностного натяжения на границе газ — жидкость.

Таким образом, дополнительное давление в пузырьке увеличивается по гиперболе, когда радиус уменьшается.

Поскольку избыточное давление  $\Delta p$  заставляет газ диффундировать из пузырька наружу, а давление  $p$  определяет, сколько газа должно поступить в пузырек, находящийся в потоке, то при любых давлениях (меньших, чем давление насыщения) и радиусе пузырька газ будет стремиться войти внутрь пузырька, а из-за высокого давления внутри пузырька молекулы газа будут двигаться настолько быстро, что многие из них выйдут из пузырька. При критическом радиусе пузырька газ будет покидать пузырек со скоростью, равной скорости диффузии газа в него. При любом радиусе, **меньшем**

критического,  $\Delta p$  будет возрастать, и газ будет покидать пузырек быстрее, чем накапливаться в нем; таким образом, радиус пузырька будет уменьшаться, это приведет к еще большему увеличению  $\Delta p$  и пузырек будет «схлопываться». Таким образом, для каждого давления существует критический радиус пузырька, при достижении которого пузырьки не могут существовать.

Но если такой радиус существует, то как же тогда могут возникнуть пузырьки? Ответ на этот вопрос прост: они должны возникать с радиусом, большим критического радиуса. Чтобы это происходило внутри жидкости, должен существовать механизм, который образует такие пузырьки. Некоторые исследователи предполагают существование внутри жидкости маленьких частиц, назы-

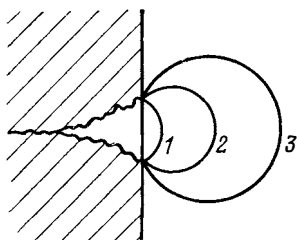


Рис. 5.2.

ваемых микроядрами, на которых абсорбируется пленка газа. Если микроядра имеют подходящую форму и размеры, то могут образоваться пузырьки, имеющие радиус больше критического.

В настоящее время выдвинуты другие убедительные гипотезы, которые утверждают, что на поверхности сосуда и на поверхности погруженных частиц находятся

мелкие трещины и выступы, внутри которых может находиться газ. Газ может пересекать границу раздела (на рис. 5.2 1, 2, 3 обозначают последовательность границ раздела), поскольку радиус кривизны границы больше критического значения. Пузырек может возникнуть на трещине и оторваться при достижении размера, который обеспечивает его плавучесть. После этого на трещине может образоваться другой пузырек.

Эта гипотеза очень привлекательна, поскольку любой человек, пьющий газированные напитки, может ее проверить. В стакане с жидкостью, насыщенной двуокисью углерода, можно видеть струйку пузырьков, поднимающихся с определенных точек поверхности стакана.

Вероятно действуют оба механизма: микроядерный в течение начальной пузырьковой фазы и поверхностных трещин, продолжающий действовать, когда степень насыщения падает до такой точки, в которой механизм

микроядер перестает действовать (предполагается, что диаметр микроядер равен 8 мкм).

Чтобы растворенный газ быстро выделялся из жидкости, должен действовать механизм либо микроядер, либо микротрещин. В любом случае эти активные источники не начнут действовать, до тех пор пока давление не упадет существенно ниже начального давления насыщения, поскольку для того, чтобы началось образование пузырьков при давлении чуть ниже давления насыщения, необходимы необычно большие микроядра или микротрещины, существование которых в обычных жидкостях маловероятно. Вероятно, существует диапазон размеров ядер и трещин, часть из них будет очень мала, а часть велика. Добавление кристаллов сахара в насыщенный раствор двуокиси углерода (пиво, газированная вода) усиливает газовыделение, что, по-видимому, подтверждает эту гипотезу.

Частицы или трещины, находящиеся внутри жидкости и попадающие в основной диапазон размеров, будут приводить к образованию пузырьков, когда давление снизится до значений, лежащих в некотором диапазоне давлений. Это подразумевает диапазон напоров, «освобождающих газ», который, по мнению автора, для каждой жидкости можно заменить на конкретное значение напора, «освобождающего газ».

Для воды, насыщенной воздухом, при атмосферном давлении напор, «освобождающий газ», равен примерно 2,4 м. Если эта теория справедлива, то быстрое понижение давления в толще воды ниже атмосферного давления будет приводить к выделению малого объема газа из раствора до тех пор, пока давление не уменьшится до напора, «освобождающего газ». При таких условиях большая часть растворенного газа выделится из раствора.

После того как растворенный газ выделился из раствора, трудно снова растворить его просто соответствующим повышением давления до атмосферного, но поскольку за волной разрежения следует волна сжатия и давление обычно значительно превышает атмосферное, большая часть газа снова растворяется.

Пока нет лучшей теории, можно принять, что газ выходит из растворенного состояния, когда давление падает ниже точки насыщения газа, и растворяется вновь, когда давление превышает это значение. Это объяснение

не точно, оно предполагает более высокие давления, чем возникающие в действительности, т. е. с запасом. Турбулентность, возможно, также оказывает сильное влияние на выделение пузырьков. Так, если бутылку с пивом потрясти и затем быстро открыть, то растворенный газ будет бурно выделяться. Почти во всех трубопроводах течение турбулентное, поэтому почти всегда приходится сталкиваться с таким явлением.

Ясно, что со многих точек зрения вышеизложенные представления упрощены, но они дают возможность описать явление.

### 5.3. ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ ВОЛНЫ С УЧЕТОМ ГАЗОВЫДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим жидкость, содержащую объемную долю  $\epsilon$  газа в виде свободных пузырьков, объем газа и жидкости равен  $V$ . Объем жидкости составляет  $(1-\epsilon)V$ , объем свободных пузырьков  $V_g = \epsilon V$ .

Пусть в жидкости произойдет приращение давления на  $\Delta p$ . Объем жидкости изменится и станет  $V_1$ , где  $V_1 = (1 - \Delta p/K)(1 - \epsilon)V$ .

Предполагается, что объем газа распределен по маленьким пузырькам, температура газа равна температуре воды. Таким образом, любое изменение объема газа происходит изотермически. Тогда

$$p\epsilon V = (p + \Delta p)V'_g; \quad (5.2)$$

$$V'_g = \frac{p}{p + \Delta p} \epsilon V; \quad (5.3)$$

где  $V'_g$  — объем газа при давлении  $p + \Delta p$ .

Объем смеси газа и жидкости составит [если заметить  $(1 + \Delta p/p)^{-1}$  на  $(1 - \Delta p/p)$ ]:

$$V_T = \left(1 - \frac{\Delta p}{K}\right)(1 - \epsilon)V + \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)\epsilon V; \quad (5.4)$$

где  $V_T$  — общий объем газа и жидкости при давлении  $p + \Delta p$ .

Раскрывая скобки,

$$V_T = V \left(1 - \frac{\Delta p}{K} - \epsilon + \frac{\Delta p \epsilon}{K} + \epsilon - \epsilon \frac{\Delta p}{p}\right); \quad (5.5)$$

поскольку член  $\Delta p \varepsilon / K$  мал, им можно пренебречь

$$\frac{V_T}{V} = 1 - \Delta p \left( \frac{1}{K} + \frac{\varepsilon}{p} \right). \quad (5.6)$$

Объемная деформация

$$V - V_T / V = 1 - V_T / V = \Delta p (1 / K + \varepsilon / p), \quad (5.7)$$

откуда

$$K' = \frac{\Delta p}{1 - \frac{V_T}{V}} = \frac{1}{\frac{1}{K} + \frac{\varepsilon}{p}}. \quad (5.8)$$

С учетом упругости материала трубы

$$\frac{1}{K'_T} = \frac{1}{K} + \frac{\varepsilon}{p} + \frac{d}{TE}, \quad (5.9)$$

где  $K'_T$  — эффективный модуль упругости смеси газа и жидкости, учитывающий влияние упругости трубы. Таким образом,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{w}{g} \left( \frac{1}{K} + \frac{\varepsilon}{p} + \frac{d}{TE} \right)}}; \quad (5.10)$$

пренебрегая массой свободного газа  $w = w_e(1 - \varepsilon)$ , получаем:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{w_e(1 - \varepsilon)}{g} \left( \frac{1}{K} + \frac{\varepsilon}{p} + \frac{d}{TE} \right)}}. \quad (5.11)$$

Эта формула принадлежит Пирсолу (Pearsall) [12]. Давление при этом должно быть абсолютным. Уравнение (5.11) справедливо только при малых значениях  $\varepsilon$ , в противном случае  $\varepsilon$  близко к единице и поток становится газовойдяным, причем в открытых каналах газ всплывает на поверхность, а в трубе все сечение может перекрываться газовыми полостями, чередующимися с водяными. Кроме того, такой поток может состоять из пленки жидкости, движущейся по периферии трубы и центрального газообразного ядра с большой ско-



ростью. Поэтому уравнение (5.11) может быть применено только к двухфазным потокам, для которых справедливо допущение, что газовые пузырьки составляют малую долю объема жидкости и равномерно распределены в потоке.

Скорость волны зависит от удельного объема газа в жидкости, как показано на рис. 5.3. Изображенная кривая зависит от давления, при разных давлениях будут разные кривые, но конечные значения при 0% газа и 100% газа не зависят от давления. Уравнение (5.11)

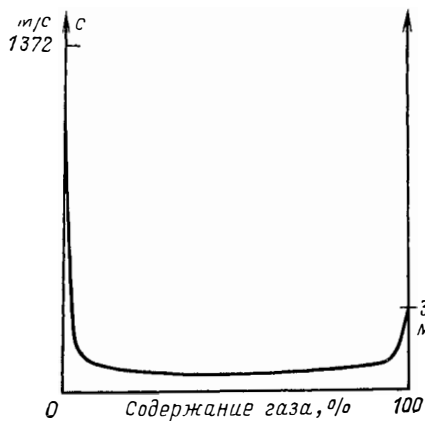


Рис. 5.3.

справедливо только при низком и, очевидно, несправедливо при высоком содержании газа: при содержании газа 100% уравнение определяет бесконечно большую скорость распространения волны.

Поскольку кривая скорости волны имеет широкий и относительно пологий минимум, то целесообразно использовать это минимальное значение при умеренных величинах  $v$ . На рис. 5.4 показана зависимость скорости

волны от абсолютного давления, полученная для смеси вода — воздух и приведенная в работе Карплюса (Karplus) [13]. Хотя аналогичные результаты для других смесей газ — жидкость не известны, результаты для смеси воздух — вода будут пригодны для других смесей газ — жидкость без существенной погрешности, так как модуль упругости жидкостей почти не влияет на минимальную скорость волны и расширение и сжатие газового пузырька происходит изотермически. Вероятно, результаты, полученные из анализа, в котором давления уменьшаются много ниже давления, освобождающего газ, будут ошибочными, поскольку газ, выделившийся из раствора, сильно расширится. Причиной таких ошибок является то, что выделившиеся 2% газа будут соответствовать при напоре, высвобождающем газ, 8%

объема и соответственно больше при более низких давлениях.

Такое большое процентное содержание газа будет делать недействительными целый ряд предположений, принятых при выводе уравнений гидравлического удара и уравнения скорости распространения волны:

1) пренебрегалось членами второго порядка, в частности, членом  $\frac{Av \partial p}{\partial x} \partial x \partial t$ . Однако  $\frac{\partial p}{\partial x}$  может и не быть

пренебрежимо малым, когда в потоке присутствуют большие объемы газа;

2) принималось, что  $\rho/\rho_0$  приближенно равно единице, но это может быть и несправедливо, когда содержатся большие объемы газа;

3) была сделана замена  $h$  на член  $p/\omega + z$ . Но  $\omega$  — удельный вес жидкости, а когда содержание газа велико, это приведет к ошибке;

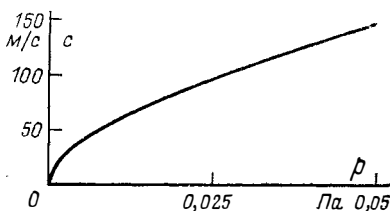


Рис. 5.4.

4) при выводе уравнения (5.11) пренебрегалось членом  $\Delta p \epsilon / K$ . Этот член несомненно мал, но когда  $\epsilon$  близко к единице, то пренебрежение им ведет к ошибке.

Расчеты, позволяющие определить участки трубы с очень низким давлением, представляют большой интерес с инженерной точки зрения, поскольку такие области низкого давления (и связанный с ними срыв потока) крайне нежелательны. Анализ, хотя и не точный, можно было бы рассматривать как имеющий диагностическую ценность. Затем можно было бы провести еще один расчет для того, чтобы убедиться, что устройство для подавления срыва предотвращает распространение областей низкого давления.

Условия, близкие к вакууму, на отдельных участках трубопровода неприемлемы по причинам, упомянутым ранее, а именно из-за очень сильно изменяющихся давлений, из-за появления сил, искажающих круговую форму сечения трубы, из-за возможного распространения изгибных напряжений, усталостного разрушения материала стенок трубы, радиальных пульсаций, вызываю-

щих высокие местные напряжения в точках концентрации напряжения, обусловленных соприкосновением трубы с камнями в траншее или с другими трубами, неправильно уложенными в ту же траншею. В подземных водопроводных системах не принято допускать давления ниже атмосферного, поскольку при этом существует риск загрязнения грунтовыми водами, попадающими в трубопровод через соединения.

#### **5.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛНЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ**

Для расчета скоростей волны  $c$  при давлениях  $p$ , существующих в интерполяционных точках, можно составить подпрограмму. Если скорость волны, вычисленная по (5.11), будет меньше минимальной скорости волны на рис. 5.4, то ей (скорости волны) следует приписать значение этой минимальной скорости. Таким образом, при использовании подпрограммы для расчета  $c_R$  и  $c_S$  изменение скорости волны может быть полностью включено в анализ.

#### **5.5. ПАРОВАЯ КАВИТАЦИЯ**

Если местное давление уменьшается до давления насыщения пара, то жидкость закипит при окружающем давлении. Внутри жидкости появятся пузырьки пара, и дальнейшее уменьшение местного давления становится невозможным. Если давление уменьшается очень быстро, то в верхней части трубы может образоваться полость, которая будет заполнена смесью пара и газа. Когда направление течения изменится, полость будет сжиматься и исчезать, оставляя за собой слабый туман мелких газовых пузырьков, полное исчезновение которых происходит медленно и при относительно большом давлении. Некоторые исследователи полагают, что следствием этого будет появление в жидкости вертикальных свободных поверхностей и возникновение очень больших нестационарных давлений при их смыкании. Это явление называется разрывом колонны жидкости. В длинных трубопроводах может происходить образование больших продольных полостей, но в опытах, прове-

денных нами, было показано, что при схлопывании полостей происходит возникновение волн на свободной поверхности, а не значительных нестационарных давлений.

Даже большие полости схлопываются путем возникновения волн на свободной поверхности потока, а возможное небольшое повышение давления сглаживается из-за демпфирующего влияния сжимаемости газовых пузырьков, появившихся в жидкости из раствора в течение предшествующего уменьшения давления.

Движение пузырьков, наполненных паром, как и пузырьков, наполненных газом, представляет движение двухфазной среды. Разница между паровой и газовой кавитацией заключается в том, что в присутствии ограниченного количества растворенного газа давление может опуститься ниже давления насыщения газа, а при наличии паровой кавитации — нет. При паровой кавитации пары жидкости допускают свободное неограниченное расширение пузырька без заметного изменения давления.

Таким образом, явление паровой кавитации можно учесть путем вычисления местного давления, и если это давление меньше, чем давление паров жидкости, то абсолютный потенциальный напор вычисляется путем приравнивания высоты под плоскостью сравнения к давлению водяных паров.

Эта методика не учитывает схлопывания пузырьков под воздействием поверхностной волны. Полость может образоваться у закрытого конца или закрытого клапана, она может быть заполнена паром и газом или при недостаточно низком давлении только газом. Если закрытие клапана, создающего нестационарное давление, происходит за очень короткое время и период  $2L/c$  также мал, то такая полость не будет схлопываться под воздействием поверхностной волны, поскольку нет одной из двух необходимых волн. Необходимо рассчитать изменение объема такой полости и повышение давления при ее схлопывании, после этого вычисляют скорость потока жидкости, как это сделал Сваффилд (Swaffield) [18].

Скорость, с которой распространяются поверхностные волны, относительно мала, порядка 1—6 м/с в зависимости от глубины потока. Анализ, выполненный Марсденом (Marsden) и Фоксом [19] показывает, что соче-

тание нестационарного анализа явлений гидравлического удара с анализом поверхностной волны в пузырьке позволяет получить очень точное решение задачи о схлопывании пузырьков под воздействием поверхностной волны, т. е. в трубопроводах обычных размеров. Анализ требует очень большого времени счета на ЭВМ, и поэтому не экономичен для обычных расчетов. Использование скорости поверхностной волны примерно 1—6 м/с также приводит к ошибкам по следующим причинам. При таком анализе предполагается, что образование пузырька происходит по всей длине  $\Delta x$ , в то время как в действительности он будет занимать только малую долю длины  $\Delta x$ , вероятно, всего несколько метров. Поэтому схлопывание пузырька длиной  $\Delta x$  со скоростью поверхностной волны будет происходить длительное время, и это время будет полностью неправильным. Поэтому когда происходит паровая кавитация, нами допускается использование минимальной скорости волны, взятой с графика на рис. 5.4, при давлении пара: для воды давление составит 0,1 МПа и скорость волны 20 м/с. Однако при очень больших значениях  $\Delta x$  эту скорость следует значительно увеличить, чтобы правильно предсказать время схлопывания пузыря. В таком случае лучше использовать меньшие значения длины  $\Delta x$ . Изучение этого вопроса требует дополнительных исследований.

## 5.6. РАСЧЕТ ТРЕНИЯ

В уравнении характеристик требуется определять в интерполяционных точках функцию  $f$  Дарси. Несомненно формула Коулбрук—Уайта (Colebrook—White) является лучшей из имеющихся, но, к сожалению, при этом функция  $f$  выражена в неявном виде, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \lg \left( \frac{2,51}{2\sqrt{2}f \operatorname{Re}} + \frac{k/d}{3,71} \right).$$

Заметим, что значение  $f$ , используемое в США и СССР, в 4 раза больше, чем наше значение функции Дарси  $f$ .

Чтобы получить  $f$  из уравнения Коулбрука—Уайта, необходимо использовать итерационный процесс реше-

ния. Сначала в правую часть уравнения следует подставить первое подходящее приближенное значение  $f$ . Затем вычислить  $f$ , подставить в правую часть уравнения и определить следующее значение  $f$ . Процесс необходимо повторять до тех пор, пока два последовательно полученных числа не будут отличаться на приемлемо малую величину.

Первое приближенное значение для  $f$  можно получить по формуле Мууди (Moody), т. е.

$$f = 0,001375 \left[ 1 + \left( 20\,000 \frac{k}{d} + \frac{10^6}{\text{Re}} \right)^{1/3} \right]; \quad (5.12)$$

она аппроксимирует формулу Коулбрука—Уайта для  $f$  с точностью 5% в диапазоне чисел Рейнольдса между 4000 и  $10^7$  и при величинах  $k/d$  вплоть до 0,01, что является весьма хорошим приближением. Можно считать, что формула Мууди достаточно точна.

Если допустимо различие между последующими итерациями в 0,1%, то требуется не более пяти итераций.

Конечно, необходимо следить за тем, чтобы число Рейнольдса было больше 2300. Если оно меньше, то следует применять формулу для ламинарного течения  $f = 16/\text{Re}$ .

Признается, что стационарные значения  $f$  не применимы к нестационарным потокам, но ошибки, получающиеся при использовании стационарных значений  $f$  в нестационарных условиях, не приводят к существенным погрешностям. Удовлетворительных методов расчета  $f$  для нестационарных течений не существует.

В нестационарных потоках при наличии положительных градиентов давления пограничные слои толще, чем в стационарных потоках при одинаковых числах Рейнольдса. Если положительные градиенты достаточно велики, то пограничный слой может оторваться от границы с очень большими потерями энергии. Наоборот, пограничные слои при наличии отрицательных градиентов давления и одинаковых числах Рейнольдса тоньше, чем в стационарных потоках. Это и является причиной того, что стационарные значения  $f$  недостаточно точно описывают условия трения в нестационарных потоках. В газовых потоках это явление может быть больше, а в жидкостях оно обычно мало.

## 5.7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Как и в случае переменной скорости волны для оценки  $f$  в каждой интерполяционной точке необходимо составить подпрограмму. Параметрами, которые должны быть известны, являются интерполяционная скорость, а также соответствующие значения шероховатости и диаметра трубы. Подпрограмма должна сначала вычислить число Рейнольдса; затем следует определить, оно больше или меньше 2300. Если скорость равна нулю, то равно нулю и число Рейнольдса, а величина  $f$  станет бесконечностью, поэтому должно быть установлено предельное значение  $f$ . Предлагается при  $Re < 0,01$  приписывать величине  $f$  значение 160. Если  $Re > 0,1$  и меньше 2300, то  $f = 16/Re$ . Если оно больше 2300, то  $f_1$  должно быть вычислено по (5.12). Используя  $f_1$ , получаем:

$$f = \frac{1}{\left[ -4 \lg \left( \frac{2,51}{2\sqrt{2f_1} Re} + \frac{k/d}{3,71} \right) \right]^2}. \quad (5.13)$$

Затем необходимо сравнить  $f$  и  $f_1$ . Если разница между ними больше, чем допустимая ошибка в 0,01%, то  $f_1$  должно быть заменено на вычисленное значение  $f$ , программа возвращается к расчету  $f$  и процесс повторяется до тех пор, пока заданная точность не будет удовлетворена.

## 5.8. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

При достаточно малом значении  $\Delta x$  можно использовать линейную интерполяцию. Должна быть написана подпрограмма для выполнения интерполяции на каждом шаге по  $\Delta x$  и  $\Delta t$ .

Вначале необходимо вычислить величины  $RO$  и  $OS$  (рис. 5.5). Для этого должно быть вычислено или определено по графику  $\Delta t$  (причем его значение должно быть приемлемым). Находится скорость волны в точке  $O$  при текущем значении напора (см. § 5.4). Тогда  $RO = (v_o + c_o)\Delta t$ ;  $OS = (c_o - v_o)\Delta t$ .

В этот момент целесообразно проверить, что  $RO$  и  $OS$  меньше  $\Delta x$ . Если любой из этих членов больше  $\Delta x$ , то должен отпечататься предупреждающий знак, а счет отменен. Если это произойдет при счете, то это означает,

что или должен быть сбой в подготовленных для счета данных, или  $\Delta t$  придано слишком большое значение.

Затем вычисляются скорости и потенциальные напоры в точках  $R$  и  $S$ :

$$v_R = v_O - (v_O - v_M) \frac{RO}{\Delta x}; \quad (5.14)$$

$$h_R = h_O - (h_O - h_M) \frac{RQ}{\Delta x}, \quad (5.15)$$

аналогично

$$v_S = v_O - (v_O - v_N) \frac{OS}{\Delta x}; \quad (5.16)$$

$$h_S = h_O - (h_O - h_N) \frac{OS}{\Delta x}. \quad (5.17)$$

Как уже указывалось в гл. 4, этот процесс, строго говоря, должен быть итерационным, поскольку скорость и напор в точке  $P$  вычислены. Следовательно, по средним между точками  $P$  и  $R$  значениям скорости потока и скорости волны можно пересчитать наклон прямой характеристики и заново определить положение  $R$ ; используя средние между точками  $P$  и  $S$  значения скорости потока и скорости волны, пересчитать наклон обратной характеристики и определить новое положение  $S$ . Но если  $\Delta x$  достаточно мала, то необходимости в такой итерации нет.

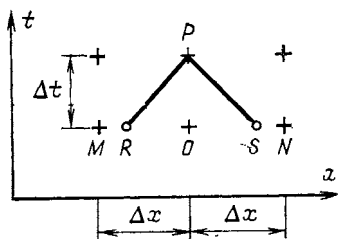


Рис. 5.5.

## 5.9. РАСЧЕТ СОДЕРЖАНИЯ СВОБОДНЫХ ПУЗЫРЬКОВ

Начальное содержание свободных пузырьков при атмосферном напоре должно быть задано, расширение или сжатие этих пузырьков вместе с теми пузырьками, которые выделяются из раствора в течение фазы низкого давления, должно быть рассчитано. Сначала необходимо



рассчитать местный напор. Напор в уравнении характеристик имеет абсолютное значение и равен сумме местного абсолютного давления и напора, соответствующего местному уровню осевой линии трубы. Таким образом напор может быть вычислен путем вычитания уровня и потенциального напора, т. е.

$$p = (h - z) \omega. \quad (5.18)$$

Затем содержание пузырьков  $\epsilon_1$  должно быть увеличено на содержание пузырьков, выделенных из раствора, т. е. на  $\epsilon_2$ . Для воды  $\epsilon_2 \approx 0,02$ , а  $\epsilon_1 \approx 0,001$ .  $\epsilon_2$  выделится только в том случае, если местный напор  $p/\omega$  станет меньше, чем напор, освобождающий газ  $h_G$ . Теперь можно подсчитать общее содержание газа в виде пузырьков, т. е.

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ (если } p \geq \omega h_G, \text{ то } \epsilon_2 \text{ еще равно нулю)}. \quad (5.19)$$

Таким образом,

$$\epsilon = \epsilon_1, \text{ если } p > \omega h_G; \quad (5.20)$$

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2, \text{ если } p \leq \omega h_G.$$

Чтобы получить истинную долю объема газа, расширившегося (или сжавшегося) соответственно под местным абсолютным давлением, необходимо  $\epsilon$  умножить на  $\omega h_a/p$ . Процесс в газе предполагается изотермическим ( $h_a$  — высота, соответствующая атмосферному давлению, т. е. 10,3 м вод. ст.).

При вычислении объемной доли газа основывались на следующих предположениях:

1) если местное абсолютное давление становится меньше напора, освобождающего газ, то предполагается, что весь растворенный газ выделится;

2) если местное абсолютное давление увеличивается и становится больше напора, освобождающего газ, предполагается, что все содержание газа, которое было сначала растворено, а затем выделилось в виде пузырьков, растворяется вновь.

Обоснование этих предположений дано в § 5.2.

Расчет величины  $\epsilon$  необходим для вычисления скорости волны.

## **5.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ НАПОРОВ В ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ТОЧКАХ ПО ДЛИНЕ ТРУБОПРОВОДА**

Для расчета потенциальных напоров и скоростей во всех внутренних точках каждого трубопровода предлагается составить подпрограмму внутренних точек. Она может быть использована для любой внутренней точки.

Уравнения скорости и напора выведены в гл. 4 [см. (4.41) и (4.37)].

Прежде чем использовать уравнения (4.41) и (4.37), необходимо вычислить по интерполяционной подпрограмме  $v_R$ ,  $v_S$ ,  $h_R$  и  $h_S$ ,  $\epsilon$  должно быть вычислено по подпрограмме расчета объемного содержания газа,  $c_0$  — по подпрограмме скорости и  $f_R$  и  $f_S$  — по подпрограмме трения. Теперь можно определить  $v_p$  и затем вычислить  $h_p$ .

## **ГЛАВА ШЕСТАЯ**

### **ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ НАСОСАМИ**

#### **6.1. ВВЕДЕНИЕ**

Относительно просто написать программу расчета нестационарных режимов в трубопроводной сети, поскольку это зависит от точности описания перемещения волны (как показано в гл. 5), труднее произвести учет граничных условий, которые или создают нестационарности, или отражают (полностью или частично) уже возникшие нестационарные явления.

#### **6.2. НАСОСЫ, ОБОРУДОВАННЫЕ ОБРАТНЫМ КЛАПАНОМ**

Существуют различные методы определения характеристик насоса. Здесь приводится развитая автором методика, она имеет как недостатки, так и несомненные преимущества. Как будет показано ниже, характеристика

центробежного насоса может быть описана уравнением

$$H=AN^2+BNQ-CQ^2, \quad (6.1)$$

где  $H$  — напор, создаваемый насосом;  $N$  — частота вращения, об/мин;  $Q$  — подача насоса;  $A, B, C$  — постоянные, характеризующие тип насоса.

Уравнением (6.1) можно достаточно точно описать характеристику только насоса с радиальным выходом потока из рабочего колеса. Когда выход потока из рабочего колеса становится более осевым, уравнение становится менее точным. В этом заключается большой недостаток этого аналитического метода.

На рис. 6.1,а приведены характеристики для центробежного насоса: кривая  $A$  для насоса с высокоэффек-

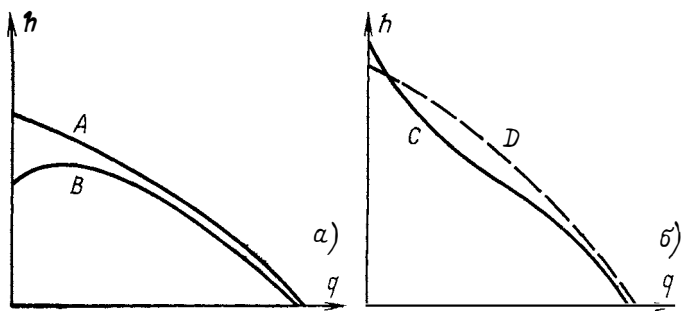


Рис. 6.1.

тивной спиральной камерой и кривая  $B$  для насоса с менее эффективной (но более дешевой) спиральной камерой.

На рис. 6.1,б приведены характеристики для осевого насоса: кривая  $C$  соответствует действительному осевому насосу, а кривая  $D$  — наилучшей ее аппроксимации с помощью уравнения (6.1). Выбрав кривую  $D$  таким образом, чтобы она проходила через ожидаемые стационарные режимы работы гидравлической сети, можно полагать, что ошибка от ее использования будет мала, поскольку начальная нестационарность будет отличаться незначительно, а преимущества, как будет показано ниже, могут быть существенными. Вывод зависимости  $H=f(Q)$  (6.1) необходим, поскольку по ней можно опреде-

лить поведение насоса, когда он работает в турбинном или тормозном режиме. Возможность описать турбинный режим работы насоса является несомненным преимуществом этого метода.

### 6.3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАСОСА

Пусть в соответствии с рис. 6.2  $u$  — окружная скорость лопастей рабочего колеса на периферии;  $V$  — абсолютная скорость жидкости, выходящая из направляющего аппарата;  $V_w$  — тангенциальная составляющая абсолютной скорости, т. е. скорость закрутки;  $V_r$  — относительная скорость жидкости;  $V_f$  — радиальная составляющая абсолютной скорости, т. е. скорость потока. Предполагая, что подвод жидкости в рабочее колесо радиальный, запишем

$$H = \frac{V_w u}{g} - k \frac{V^2}{2g} - k_r \frac{V_r^2}{2g},$$

где  $k_v V^2 / (2g)$  — гидравлические потери в спиральной камере;  $k_r V_r^2 / (2g)$  — потери на трение в рабочем колесе. более детально эта теория описана в [14].

Обозначим  $u = \pi DN / 60$  и  $V_f = Q / A_e$ , где  $A_e$  — площадь потока на выходе из рабочего колеса;  $D$  — наружный диаметр рабочего колеса;

$$V_w = u - V_f \operatorname{ctg} \gamma;$$

$$V_r = V_f \operatorname{cosec} \gamma;$$

$$V^2 = V_w^2 + V_f^2;$$

$$V^2 = (u - V_f \operatorname{ctg} \gamma)^2 + V_f^2;$$

$$V^2 = u^2 - 2uV_f \operatorname{ctg} \gamma + V_f^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma;$$

$$H = \frac{(2 - k_v) u^2 - (1 - k_v) 2uV_f \operatorname{ctg} \gamma - k_v V_f^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma - k_r V_f^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma}{2g}.$$

Таким образом,

$$H = \frac{(2 - k_v) u^2}{2g} + \frac{2(k_v - 1) uV_f \operatorname{ctg} \gamma}{2g} - \frac{(k_v + k_r) V_f^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma}{2g};$$

подставив  $u$  и  $V_f$ , получим:

$$H = AN^2 + BNQ - CQ^2,$$

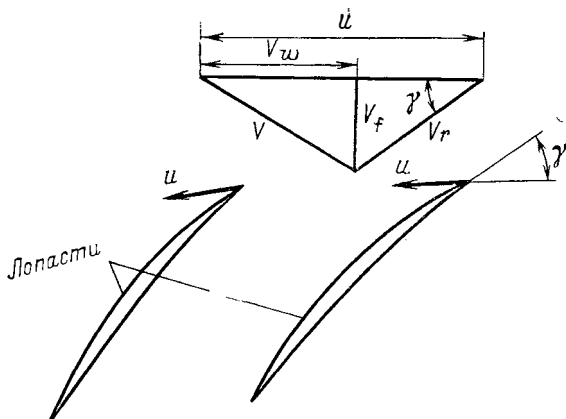


Рис. 6.2.

где

$$A = \frac{2 - k_v}{2g} \left( \frac{\pi D}{60} \right)^2; \quad (6.2)$$

$$B = \frac{k_v - 1}{g} \operatorname{ctg} \gamma \frac{\pi D}{60 A_e}; \quad (6.3)$$

$$C = (k_v + k_r) \frac{\operatorname{cosec}^2 \gamma}{2g A_e^2}. \quad (6.4)$$

Таким образом, уравнение (6.1) выведено.

#### 6.4. РАБОТА НАСОСА В ТУРБИННОМ ИЛИ ТОРМОЗНОМ РЕЖИМЕ

Возможен случай настолько большого увеличения расхода насоса, что перепад давления в насосе становится отрицательным. Иными словами, режимная точка на характеристике  $H, Q$  насоса смещается далеко вправо и соответствует большому расходу и отрицательному напору. В таких условиях насос действует как тормоз, а не как насос. В обычной гидравлической сети нестационарные процессы, вызывающие отрицательный перепад напора на работающем насосе, могут быть созданы только с помощью другого гидравлического регулятора, например клапана.

Предположим, что уравнение (6.1) описывает работу насоса в тормозном режиме, поскольку при этих усло-

виях единственная разница между насосным и тормозным режимом состоит в том, что при большем расходе потери на трение в спиральной камере и рабочем колесе становятся больше суммы напора при нулевом расходе и напора, восстановленного в спиральной камере. Таким образом, работа в тормозном режиме существенно не отличается от работы в насосном режиме. Почти вероятно, что  $k_v$  не будет постоянной, и для более точного представления о работе насоса в тормозном режиме нужно было бы больше знать о диапазоне ее изменения. Но даже предположение о том, что  $k_v$  постоянно, обеспечивает представление о работе насоса в тормозном режиме с точностью, достаточной для большинства инженерных расчетов. Исследование этого вопроса ведется в лаборатории автора.

В процессе остановки насоса перепад давления на насосе может стать отрицательным, т. е. потенциальный напор вверх по потоку от насоса может стать больше, чем вниз по потоку. Это может произойти из-за возникновения переходного процесса в трубах вверх и вниз по потоку, а также из-за отключения насоса, который использовали для дополнительной подкачки. В этих условиях насос переходит к работе в качестве турбины. Действительно, если на насосе в процессе его остановки создается отрицательный перепад давления, то уменьшение частоты вращения будет происходить медленнее; при наличии вспомогательного насоса основной насос может и не остановиться, если через него установится стационарное течение. Конечно, когда насос работает как турбина, то поток через него движется в направлении, противоположном направлению потока в обычной радиальной турбине, в которой поток движется от периферии к центру (т. е. работает в обратном насосном режиме).

При работе насоса в режиме турбины можно предложить простой метод расчета.

Предположим, что частота вращения насоса в некоторый момент времени при замедлении вращения равна  $N$ , об/мин, расход, направленный к выходу  $Q$ , м<sup>3</sup>/с, и разность напоров при этих условиях  $H$ , где  $H$  — отрицательно.

Энергия, переданная рабочему колесу насоса от единицы веса протекающей жидкости, составит  $V_{wu}/g$ , потери энергии на трение в рабочем колесе составят

$k_r V_r^2 / (2g)$ , потери энергии в спиральной камере состоят  $k V^2 / (2g)$ .

Тогда

$$-H = \frac{V_w u}{g} + \frac{k_r V_r^2}{2g} + \frac{k_v V^2}{2g},$$

где

$$V_w = u - V_f \operatorname{ctg} \gamma; \quad V_r = V_f \operatorname{ctg} \gamma; \quad V^2 = V_w^2 + V_f^2;$$

$$\frac{V_w u}{g} = -H - \frac{k_r V_f^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma}{2g} - k_v \frac{(u^2 - 2uV_f \operatorname{ctg} \gamma + V_f^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma)}{2g};$$

$$\frac{V_w u}{g} = -H - (k_r + k_v) \frac{V_f^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma}{2g} - \frac{k_v (u^2 - 2uV_f \operatorname{ctg} \gamma)}{2g};$$

$$\frac{V_w u}{g} = -H - CQ^2 - \frac{k_v}{2g} \left[ \left( \frac{\pi DN}{60} \right)^2 - \frac{2\pi DNQ}{60A_e} \operatorname{ctg} \gamma \right]. \quad (6.5)$$

Из уравнений (6.2) и (6.3)

$$k_v = 2 - 2g \left( \frac{60}{\pi D} \right)^2 A; \quad (6.6a)$$

$$\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{A_e} = \frac{60gB}{(k_v - 1)\pi D}. \quad (6.6b)$$

Величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  берутся с характеристики  $H$ ,  $Q$  завода — изготовителя насоса.

По уравнениям (6.5), (6.6a) и (6.6b) можно получить значение  $V_w u / g$ .

Мощность, подводимая к рабочему колесу, частично тратится на потери в подшипниках, на дисковое трение, вентиляционные потери в двигателе. Если  $P_0$  — мощность, поглощаемая насосом при нулевом расходе и стационарной частоте вращения  $N_s$ , то потери в подшипниках, на дисковое трение и вентиляционные потери при текущей частоте вращения  $N$  можно представить выражением  $P_0 (N/N_s)^3$ . Таким образом, мощность на ускорение рабочего колеса составит  $\frac{\omega Q V_w u}{g} - P_0 \left( \frac{N}{N_s} \right)^3$ .

Тогда

$$T\Omega = P; \quad (6.7)$$

$$T = I\dot{\Omega}, \quad (6.8)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость;  $\dot{\Omega}$  — угловое ускорение и  $I$  — момент инерции. Таким образом,

$$\dot{\Omega} = \frac{T}{I} = \frac{P}{\Omega I}; \quad (6.9)$$

$$\frac{2\pi(N_2 - N_1)}{60\Delta t} = \frac{P}{\frac{2\pi}{60} N_1 I}, \quad (6.10)$$

$$N_2 = N_1 + \frac{3600P\Delta t}{4\pi^2 N_1 I}. \quad (6.11)$$

Итак,  $N_2$  можно вычислить, и оно в зависимости от  $P_0(N/N_s)^3$  и  $V_w u/g$  может оказаться больше или меньше  $N_1$  в соответствии с тем, является ли  $P$  положительной или отрицательной величиной.

## 6.5. КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ НАСОСА

При замедлении вращения насоса к. п. д. учитывается в расчетах только при работе в насосном режиме.

Мощность насоса

$$P = \omega Q (AN^2 + BNQ - CQ^2). \quad (6.12)$$

Предположим, что потребляемая мощность может быть описана следующим уравнением:

$$P_i = \omega (D_e N^2 Q + E_e N Q^2 + F_e N^3), \quad (6.13)$$

где  $D_e$ ,  $E_e$  и  $F_e$  — постоянные. Чтобы подтвердить справедливость этого уравнения, рассмотрим следующее доказательство. Потребляемая мощность определяется выражением

$$P_i = \omega Q \frac{V_w u}{g} + P_0, \quad (6.14)$$

где  $P_0$  — мощность, потребляемая на преодоление момента при нулевом расходе, т. е. мощность дискового трения. Но дисковое трение при отсутствии течения пропорционально  $N^3$ , поэтому

$$P_i = \omega Q \frac{u^2 - uV_f \operatorname{ctg} \gamma}{g} + F_e N^3;$$

$$P_i = \omega (D_e N^2 Q + E_e N Q^2 + F_e N^3),$$

т. е. уравнение (6.13) доказано.



Таким образом, к. п. д. насоса может быть вычислен из следующего уравнения

$$Eff = \frac{AN^2Q + BNQ^2 - CQ^3}{D_e N^2 Q + E_e N Q^2 + F_e N^3}, \quad (6.15)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  можно рассчитать по характеристике  $H$ ,  $Q$ , и использовать их для вычисления  $D_e$ ,  $E_e$  и  $F_e$  по значению к. п. д.

## 6.6. МОЩНОСТЬ НАСОСА

Расчет мощности насоса производят для двух режимов: для обычной остановки насоса и остановки в режиме турбины. В обоих случаях нужно рассчитать мощность насоса, чтобы определить, происходит ли увеличение или уменьшение частоты вращения в интервале времени  $\Delta t$ .

В первом случае частота вращения уменьшается, поскольку насос продолжает создавать напор за счет кинетической энергии ротора вращения.

Мощность, поглощаемая насосом в первом режиме,

$$P_{wr} = - \frac{\omega Q H}{Eff}. \quad (6.16)$$

Отрицательный знак показывает, что насос отбирает энергию от потока, а не наоборот. Напомним также, что когда насос работает в тормозном режиме,  $Eff$  будет отрицательным.

$H$  определяется по уравнению напора, а  $Eff$  — по уравнению к. п. д. Прежде чем использовать уравнения, необходимо проверить, является ли напор на линии всасывания меньше, чем напор на линии подъема. При работе насоса во втором режиме энергия потока передается насосу.

Переданная энергия

$$P_{wr} = \omega Q \frac{V_{wu}}{g} - P_0 \left( \frac{N}{N_s} \right)^3, \quad (6.17)$$

где член  $V_{wu}/g$  определяется по (6.5). Перед тем как использовать это уравнение, необходимо проверить, является ли напор на линии всасывания больше, чем напор на линии подъема.

## 6.7. ПУСК НАСОСА

Пуск насоса трудно смоделировать, поскольку существует слишком много различных способов включения электродвигателей, соединенных с насосом. Если можно определить действие регулирующего устройства, то можно и смоделировать его работу, но учесть большое число возможных вариантов пусковых устройств в обобщенной программе практически невозможно (см. § 6.13).

Если предположить мгновенное включение насоса, то при этом насос мгновенно достигает номинальной частоты вращения, что приводит к пусковой нестационарности, наибольшей из всех возможных, но даже обычный пуск при некоторых обстоятельствах может обеспечить быстрое увеличение частоты вращения и привести к такой же пусковой нестационарности, как и при мгновенном включении.

Пусковая нестационарность может только достичь максимума, равного напору насоса при закрытом клапане, т. е. напору при нулевом расходе, и поэтому редко может быть опасной. Тем не менее можно рассчитать режим пуска системы до выхода ее на стационарные условия, существующие перед отключением насоса. Проверка по стационарному состоянию является очень ценной для проектировщика. Полученное таким образом стационарное состояние обычно соответствует с точностью 1% тому, что получается при стационарном анализе,

## 6.8. ОСТАНОВКА НАСОСА

В настоящем параграфе остановка насоса описывается уравнениями работы насоса в режиме турбины, т. е. уравнениями (6.7)—(6.11). Единственное отличие заключается в том, что мощность  $P$ , используемая в (6.11), соответствует  $P_{wr}$ , вычисленной в § 6.6.

При расчете  $N_2$  на ЭВМ можно применить более прогрессивный метод, чем метод конечных разностей, приведенный выше. Даже простой метод прогноз-коррекция, описанный ниже, будет давать лучшие результаты. Любая вращающаяся масса, на вращение которой не затрачивается работа, будет замедляться по экспоненциальному закону. В том случае, когда рабочее колесо насоса замедляет свое вращение, но все еще прокачивает жид-

кость, точная формой этой кривой не является строгой экспонентой, даже в течение коротких интервалов времени  $\Delta t$ , но ее лучше аппроксимировать коротким отрезком экспоненты, чем короткой прямой линией с наклоном, соответствующим изменению скорости в начале временного интервала. В начале следующего интервала  $\Delta t$  новая убывающая экспонента может быть вычислена, и процесс повторяется до тех пор, пока не будет построена вся кривая изменения скорости.

Нами было показано, что этот метод дает результаты, которые намного превосходят результаты, получаемые элементарным методом конечных разностей. Математически он выражается следующим образом. Обозначим наклон зависимости частоты вращения насоса от времени через  $G_r$ . Тогда

$$G_r = + \frac{3600P_{wr}}{4\pi^2NI}. \quad (6.18)$$

Предположим, что  $N = ae^{bt}$  — основная экспоненциальная зависимость, тогда

$$\frac{dN}{dt} = abe^{bt},$$

но

$$\frac{dN}{dt} = + \frac{3600P_{wr}}{4\pi^2NI} = G_r,$$

при этом

$$\frac{\frac{dN}{dt}}{N} = \frac{abe^{bt}}{ae^{bt}} = b; \quad b = \frac{G_r}{N}.$$

Теперь

$$N_1 = ae^{\frac{G_r}{N_1} t};$$

$$N_2 = ae^{\frac{G_r}{N_1} (t + \Delta t)};$$

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{G_r}{N_1} \Delta t};$$

$$N_2 = N_1 e^{\frac{G_r}{N_1} \Delta t}, \quad (6.19)$$

Этот метод имеет преимущество при расчете частоты вращения в момент времени, когда насос замедляет вращение или работает в турбинном режиме. Процесс не требует итераций и легко может быть использован при относительно больших интервалах  $\Delta t$ . Но если частота вращения насоса увеличивается, что может происходить

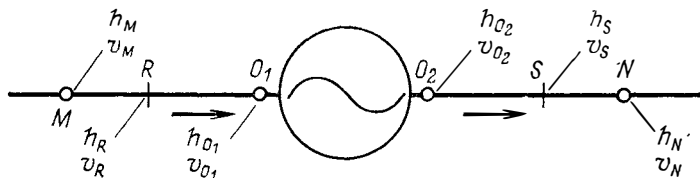


Рис. 6.3.

при работе в режиме турбины, то простой метод оценок, выведенный ранее, подходит больше, так как при этом не может быть использована экспоненциальная зависимость.

### 6.9. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЕ ТРУБОПРОВОДОМ С НАСОСОМ

Обозначим точками  $M$  и  $N$  начало и конец интервала  $\Delta x$  на всасывающей и отводящей трубах (рис. 6.4). Точки  $O_1$  и  $O_2$  расположены соответственно перед насосом и за ним;  $R$  и  $S$  — интерполяционные точки, где  $R$  — обратная интерполяция от точки  $P_1$ , вычисленной при значениях  $v_{O_1}$  и  $c_{O_1}$ , а  $S$  — прямая интерполяция от точки  $P_2$ , вычисленной при значениях  $v_{O_2}$  и  $c_{O_2}$  (рис. 6.4). Так как напоры по разные стороны от насоса (а также скорости, если диаметры труб не равны) не одинаковы, то точки  $O$  и  $P$  обозначены отдельно, т. е.  $O_1$  и  $O_2$ ,  $P_1$  и  $P_2$ .

Напоры и скорости в момент времени  $t$  известны во всех точках сетки, и их значения в  $R$  и  $S$  могут быть вычислены по интерполяционной подпрограмме, упомянутой выше.

Затем должны быть вычислены члены, учитывающие трение  $\frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d_1}$  и  $\frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d_2}$ . Обозначим их че-

рез  $F_R$  и  $F_S$ . Теперь запишем уравнение для прямой характеристики

$$\frac{g}{c_R} (h_{P_1} - h_R) + (v_{P_1} - v_R) + F_R = 0. \quad (6.20)$$

Уравнение для обратной характеристики

$$-\frac{g}{c_S} (h_{P_2} - h_S) + (v_{P_2} - v_S) + F_S = 0; \quad (6.21)$$

$$h_{P_2} - h_{P_1} = AN^2 + BNQ - CQ^2; \quad (6.22)$$

$$v_{P_2} = v_{P_1} \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2, \quad (6.23)$$

где  $d_1$  — диаметр всасывающей трубы;  $d_2$  — диаметр отводящей трубы.

Складывая два характеристических уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} & h_{P_1} - h_{P_2} - h_R + h_S + \frac{c_R}{g} v_{P_1} + \frac{c_S}{g} v_{P_2} - \\ & - \left( \frac{c_R}{g} v_R + \frac{c_S}{g} v_S \right) + \left( \frac{c_R}{g} F_R + \frac{c_S}{g} F_S \right) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя  $h_{P_1} - h_{P_2}$  и приравнявая  $v_{P_1} = Q/a_{P_1}$  и  $v_{P_2} = Q/a_{P_2}$ , где  $a_{P_1}$  — площадь поперечного сечения отводящей трубы, имеем:

$$\begin{aligned} & -AN^2 - BNQ + CQ^2 - h_R + h_S + Q \left( \frac{c_R}{a_{P_1}g} + \frac{c_S}{a_{P_2}g} \right) - \\ & - \left( \frac{c_R}{g} v_R + \frac{c_S}{g} v_S \right) + \frac{c_R F_R}{g} + \frac{c_S F_S}{g} = 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} & -AN^2 - \left( \frac{c_R}{g} v_R + \frac{c_S}{g} v_S \right) + \left( \frac{c_R F_R + c_S F_S}{g} \right) - \\ & - h_R + h_S = \gamma; \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$C = \alpha; \quad (6.25)$$

$$-BN + \left( \frac{c_R}{a_{P_1}g} + \frac{c_S}{a_{P_2}g} \right) = \beta. \quad (6.26)$$

При этом уравнение приводится к виду

$$\alpha Q^2 + \beta Q + \gamma = 0 \quad (6.27)$$

и, таким образом,

$$Q = - \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \quad (6.28)$$

Если  $Q$  меньше или равно нулю, то обратный клапан будет закрыт, и отрицательное течение исключено, поэтому в программу необходимо вписать алгоритм, который приравнял бы  $Q$  нулю, если  $Q \leq 0$ .

Вычислив  $Q$ , можно легко подсчитать  $v_{P_1}$  и  $v_{P_2}$  по соотношениям  $v_{P_1} = Q/a_{P_1}$  и  $v_{P_2} = Q/a_{P_2}$ .

Путем повторной подстановки в уравнения (6.20) и (6.21) можно вычислить  $h_{P_1}$  и  $h_{P_2}$ . Иррациональное число в уравнении (6.28) всегда должно быть положительным, и не должно иметь место извлечение квадратного корня из отрицательного числа, но целесообразно предусмотреть проверку этой возможности. Правда, нам не известны случаи, когда бы выражение  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$  становилось отрицательным.

Если отсчет времени ведется следующим образом:  $t = i\Delta t$ , где  $i$  — число интервалов  $\Delta t$ , прошедших со времени начала работы насоса, то необходимо проверить, будет ли это время меньше, чем время, при котором насос был отключен. Если оно меньше, то частота вращения насоса, используемая при следующем шаге расчета, должна быть равна начальному стационарному значению, если же больше, чем время отключения насоса, то необходимо использовать расчет замедления насоса для того, чтобы вычислить частоту вращения насоса на следующем шаге расчета.

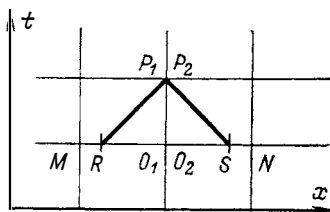


Рис. 6.4.

## 6.10. НАСОС, ВСАСЫВАЮЩИЙ ЖИДКОСТЬ ИЗ КОЛОДЦА

Схема насоса, всасывающего жидкость из колодца, широко используется на насосных станциях для сточных вод. Для расчета такого насоса лучше использовать абсолютный потенциал, поскольку это упрощает определение абсолютного давления (путем вычитания превы-

шения положения рассматриваемой точки над базисным уровнем), которое необходимо для вычисления доли в газовых пузырьках и проверки того, снизилось ли местное давление до давления пара или нет.

Так как для решения задачи нужна только обратная характеристика, то уравнение насоса с трубопроводом можно упростить.

Уравнение насоса имеет вид:

$$h_p = AN^2 + BNQ - CQ^2 + Z_{sw} + d_{sw} + h_a, \quad (6.29)$$

где  $Z_{sw}$  — высота всасывания;  $d_{sw}$  — заглубление всасывающего отверстия под уровень бассейна;  $h_a$  — атмосферное давление, м ст. жидкости. Значение  $C$  должно соответствовать кривой, представляющей потери в трубе (включая и всасывающей), которые вычитаются из ординат характеристики насоса.

Уравнение обратной характеристики

$$-\frac{g}{c_R} (h_p - h_s) + v_p - v_s + \frac{z f_{sv} |v_s| \Delta t}{d} = 0. \quad (6.30)$$

Так же как и для схемы насос с трубопроводом эти два уравнения можно решить совместно относительно  $Q$  ( $v_p = Q/a_p$ , где  $a_p$  — площадь поперечного сечения трубы).  $Q$  получаем в результате решения квадратного уравнения. Зная  $v_p$ , напор  $h_p$  найдем из уравнения (6.30).

Заглубление  $d_{sw}$ , которое изменяется медленно, может быть скорректировано. Обозначим приток к колодцу  $Q_i$ , расход  $Q$ , тогда

$$d_{sw_2} = d_{sw_1} + \frac{(Q_i - Q) dt}{A_{sw}}, \quad (6.31)$$

где  $d_{sw}$  — заглубления всасывающего отверстия в конце интервала времени  $\Delta t$ ;  $d_{sw}$  — то же в начале интервала, а  $A_{sw}$  — площадь поперечного сечения колодца. Если площадь поперечного сечения изменяется с глубиной, то это изменение может быть принято во внимание, но и средняя площадь колодца также дает достаточно точные результаты. Диапазон изменения заглубления всасывающего отверстия в колодце очень важен, поскольку в большинстве схем пуск и остановка насосов для сточных вод производятся датчиками уровня.

Статический напор системы может составлять большую или меньшую часть напора насоса. В длинной с не-

большим уклоном магистрали потери напора на трение велики, и статический напор мал. В этом случае изменение уровня в колодце будет составлять большую часть статического напора.

При высоком уровне в колодце подача насоса будет больше; кроме того, если произойдет аварийное отключение энергии, насос может перейти в турбинный режим, при этом уменьшение подачи будет происходить медленно и колебания напора будут минимальными. И наоборот, подача насоса будет минимальной, когда уровень в колодце наименьший, так как при этом статический напор достигает максимального значения. Переход в турбинный режим менее благоприятен, поскольку при переходном процессе возникают более интенсивные изменения давления.

Характер переходного процесса насоса невозможно предсказать без полного расчета: при максимальном, минимальном, а также при промежуточных уровнях в колодце.

#### **6.11. ЧЕТЫРЕХКВАДРАТНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ НАСОСА**

Насос обычно оборудуется обратным клапаном, но для очень больших установок (например для очень крупных насосов, которые используются для снабжения охлаждающей водой на теплоэлектроцентралях, на крупных заводах сжиженных газов) создать достаточно эффективный обратный клапан невозможно. Обратный клапан устанавливается на насосе, чтобы предотвратить возвратное течение через него, когда прекращается подвод энергии к насосу. Если можно поставить обратный клапан, то это нужно делать.

Желательно, чтобы включение насоса после остановки осуществлялось при уже заполненном трубопроводе, поскольку при опорожненном трубопроводе противодействующий напор очень мал, а подача велика, что приведет к смещению рабочей точки и относительно большому увеличению потребной мощности. Когда созданный таким образом высокоскоростной поток подойдет к системе гидравлического регулирования, могут возникнуть очень большие нестационарные явления. Если трубопровод, в котором установлен насос, имеет синусоидальный продольный профиль, то может случиться, что поток на уча-



стках трубы с большими отрицательными наклонами будет перемежающимся, поскольку на этих участках труб вверх по потоку будут перемещаться большие воздушные пузыри и потребуется много времени, чтобы очистить трубы от воздуха. Опорожненные трубопроводы, проложенные по сложной трассе, заполнить сложно. Воздух, заключенный на большом участке трубопроводной сети, может быть сжат и, таким образом, аккумулировать большое количество энергии. При остановке насоса такие большие объемы сжатого воздуха могут быстро расширяться, заставляя жидкость на других участках двигаться с большими скоростями. Эти потоки могут взаимодействовать и создавать неожиданно большие нестационарные давления. В больших воздушных пузырьках могут возникнуть колебания, которые войдут в резонанс со створками обратных клапанов, при этом в трубопроводе могут появиться стоячие волны. Известно, что

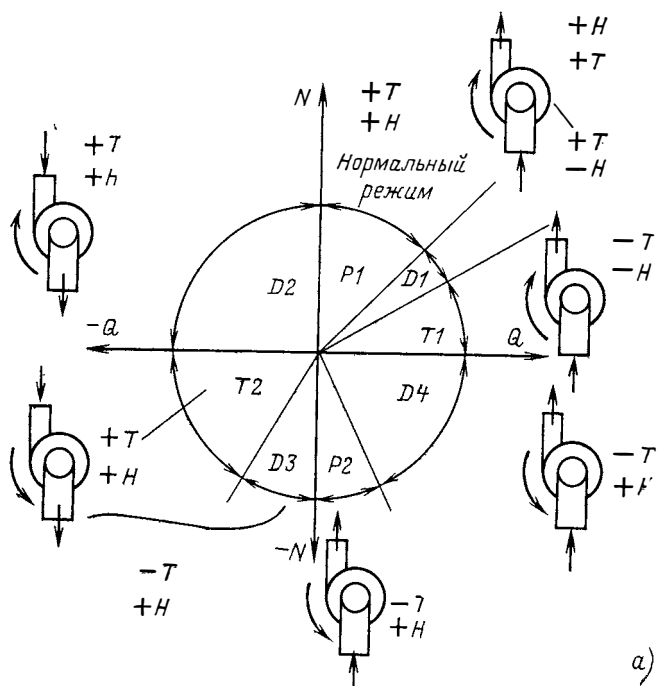
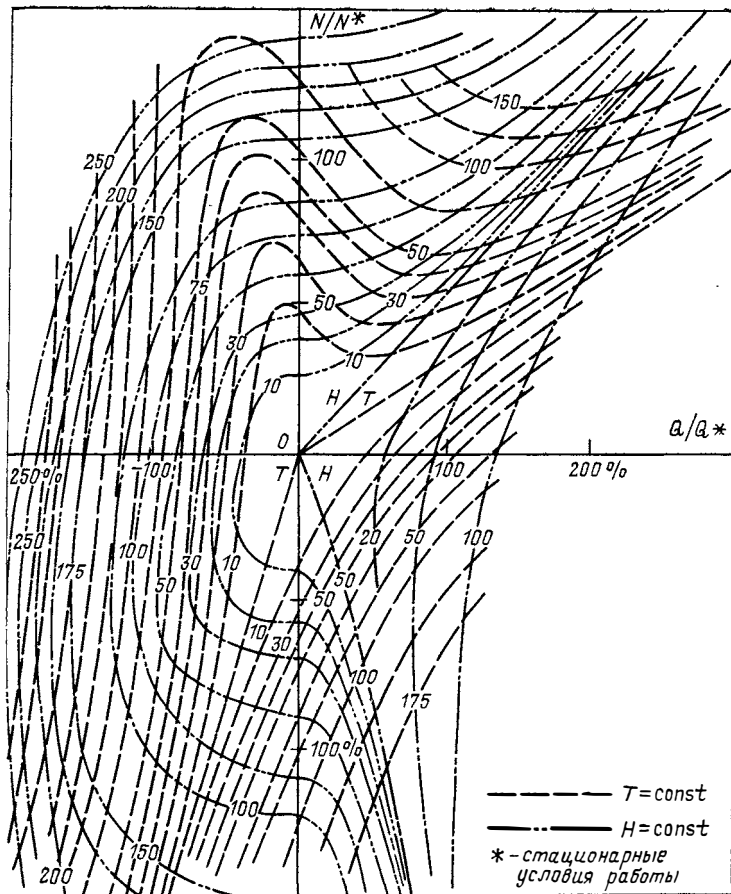


Рис. 6.5.

стоящие волны такого рода уже были причиной катастрофических разрушений труб. Поэтому без специального разрешения не следует накачивать жидкость в опорожненные или частично заполненные трубопроводы.

На крупных насосных станциях обычно сначала выключают насос, а после этого закрывают затвор (обычно дисковый), расположенный на напорной линии, чтобы избежать опорожнения системы. В водоохлаждающих системах часто принято забирать воду из резервуара, прокачивать через теплообменники и после охлаждения



сбрасывать в исходный резервуар. Статический напор в такой системе не будет большим, но, приняв меры к тому, чтобы местное абсолютное давление не уменьшалось ниже давления, при котором происходит выделение газа, можно будет не дренировать систему. Однако если местное давление станет меньше критического в период нестационарной фазы, то газ будет выделяться и собираться в верхних точках. Этот газ не будет быстро растворяться и может осложнить повторный пуск насоса.

Поскольку большие насосы, устанавливаются на трубопроводах большого диаметра, и, как правило, не оборудуются обратными клапанами, то после останова насоса возможно возникновение реверсивного течения. Задвижка, установленная на напорной линии, должна медленно закрываться, что будет создавать нестационарные явления. В зависимости от времени между отключением насоса и закрытием задвижки насос может продолжать вращаться в том же направлении, медленно уменьшая частоту вращения, и подавать жидкость вперед, или поток может изменить направление движения, даже если насос все еще продолжает вращаться вперед. В одном из этих случаев насос работает в режиме насоса — зона  $P1$  (рис. 6.5, *a* и *b*). При небольшом отрицательном напоре и расходе в прямом направлении насос работает в тормозном режиме — зона  $D1$ . Если напор становится большим отрицательным, то поток, направленный вперед, может начать вращать насос, который будет работать при этом в режиме турбины — зона  $T1$ .

Если поток изменил направление, то возникает другая серия режимов работы. При изменившемся направлении течения и при нормальном вращении рабочего колеса насоса создается другая фаза тормозного режима — зона  $D2$ . При изменении направления потока и вращения насоса на реверсивные и при более высоком давлении вверх по потоку по сравнению с трубой всасывания насос работает в режиме турбины — зона  $T2$ . При тех же условиях, но при больших реверсивных частотах вращения он работает как тормоз — зона  $D3$ . С потоком, направленным вперед, и большой реверсивной частотой вращения машина работает в режиме насоса — зона  $P2$ , и с таким же потоком, но с малой частотой реверсивного вращения — снова работает в тормозном режиме — зона  $D4$ . Однако в большинстве случаев насос не работает во всех четырех квадрантах.

Существует восемь различных режимов работы насоса, которые можно показать на четырех квадрантах графика  $N, Q$ .

Если использовать стандартный график  $N, Q$ , то характеристики насоса, изображенные на четырех квадрантах, являются сложными, и их трудно использовать в любой модели расчета режимов насоса. Сьютер (Suter) [15] разработал безразмерные параметры, которые можно легко использовать на ЭВМ. Последующее изложение взято из этой работы.

Если использовать безразмерные переменные  $W_H$  и  $W_T$

$$W_H = \text{sign } H \sqrt{\frac{H/H^*}{(N/N^*)^2 + (Q/Q^*)^2}}; \quad (6.32)$$

$$W_T = \text{sign } T \sqrt{\frac{T/T^*}{(N/N^*)^2 + (Q/Q^*)^2}}, \quad (6.33)$$

где звездочка обозначает стационарные условия работы (см. также рис. 6.5,б);  $H$  — напор, создаваемый насосом;  $Q$  — расход;  $N$  — частота вращения, об/мин;  $T$  — момент на оси рабочего колеса, то можно построить график зависимости  $W_H$  и  $W_T$  от  $\theta$ , где  $\theta$  определяется по уравнению

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{N}{N^*} \frac{Q^*}{Q} \right). \quad (6.34)$$

Графики этих функций даны на рис. 6.6. Они представляют значительно более сложную сетку характеристик насоса при его работе в четырех квадрантах.

Эти данные, например, в 64 точках на кривых  $W_H$  и  $W_T$  относительно просто ввести в ЭВМ и получить достаточно точное их представление. Методом интерполяции можно легко вычислить частные значения  $W_T$  или  $W_H$ , соответствующие любому значению  $\theta$ .

С помощью уравнений (6.32) и (6.33)  $W_T$  и  $W_H$  могут быть превращены в значения  $H$  и  $T$ .

Момент  $T$  можно использовать для расчета частоты вращения насоса через интервал времени  $\Delta t$ , а напор

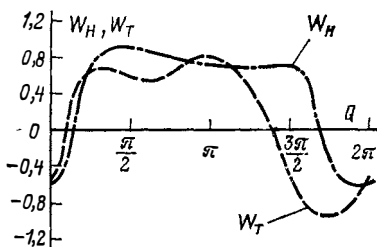


Рис. 6.6.

насоса  $H$  — как граничное условие, представляющее насос.

Прежде чем описать эти расчеты, рассмотрим проблемы, которые встречаются при получении данных, относящихся к работе насоса в четырех квадрантах.

Заводы — изготовители насосов очень редко представляют характеристики насосов в четырех квадрантах.

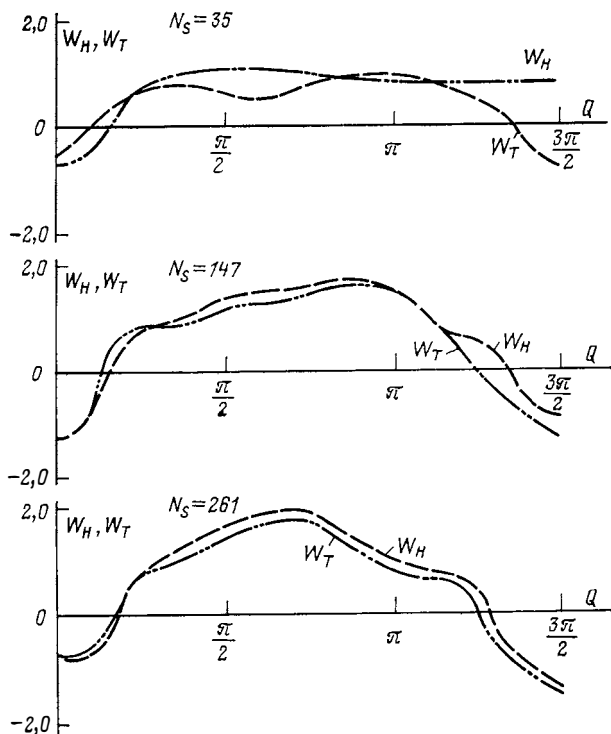


Рис. 6.7.

Обычно поставляются характеристики  $H, Q; P, Q$  и  $E, Q$  для нормального режима работы насоса. Поэтому необходимо иметь приемлемое представление для кривых Сьютера на остальных семи режимах работы насоса.

Три типа насоса были исследованы Донским (Donsky) на всех режимах работы [21]. Эти насосы имели очень широкий диапазон коэффициентов быстроходности.

Таблица 6.1

Радян	$N_S = 35$		$N_S = 147$		$N_S = 261$	
	$\Psi_H$	$\Psi_T$	$\Psi_H$	$\Psi_T$	$\Psi_H$	$\Psi_T$
0	-0,728	-0,548	-1,249	-1,249	-0,707	-0,748
0,168	-0,639	-0,394	-1,048	-0,951	-0,935	-0,776
0,318	-0,445	+0,095	-0,789	-0,651	-0,828	-0,736
0,464	-0,179	+0,400	-0,529	-0,297	-0,632	-0,559
0,588	+0,398	+0,545	+0,186	+0,447	-0,276	+0,144
0,695	+0,576	+0,644	+0,555	+0,630	+0,468	+0,550
0,785	+0,707	+0,707	+0,707	+0,707	+0,707	+0,707
0,876	+0,806	+0,745	+0,791	+0,761	+0,896	+0,787
0,983	+0,904	+0,772	+0,881	+0,807	+1,043	+0,861
1,107	+0,992	+0,785	+0,984	+0,853	+1,187	+0,951
1,249	+1,069	+0,771	+1,094	+0,939	+1,348	+1,102
1,406	+1,120	+0,725	+1,216	+1,071	+1,506	+1,275
1,571	+1,136	+0,663	+1,400	+1,217	+1,652	+1,400
1,736	+1,129	+0,608	+1,450	+1,240	+1,784	+1,520
1,893	+1,102	+0,585	+1,479	+1,244	+1,864	+1,627
2,034	+1,107	+0,587	+1,505	+1,274	+1,891	+1,713
2,159	+1,039	+0,606	+1,536	+1,308	+1,873	+1,741
2,266	+1,010	+0,661	+1,573	+1,381	+1,803	+1,716
2,356	+0,997	+0,721	+1,624	+1,442	+1,809	+1,660
2,447	+0,979	+0,777	+1,674	+1,535	+1,689	+1,596
2,554	+0,947	+0,831	+1,703	+1,594	+1,576	+1,477
2,678	+0,930	+0,885	+1,725	+1,650	+1,470	+1,342
2,820	+0,901	+0,926	+1,700	+1,658	+1,350	+1,201
2,976	+0,876	+0,940	+1,620	+1,580		
3,142	+0,831	+0,927	+1,473	+1,450	+1,040	+0,818
3,307	+0,789	+0,887	+1,247	+1,235	+0,887	+0,646
3,463	+0,754	+0,828	+0,996	+1,018	+0,839	+0,644
3,605	+0,727	+0,743	+0,785	+0,815	+0,785	+0,710
3,730	+0,710	+0,654	+0,644	+0,622	+0,680	+0,610
3,836	+0,709	+0,565	+0,528	+0,428	+0,510	+0,326
3,972	+0,711	+0,480	+0,624	0	+0,255	-0,274
4,018	+0,721	+0,376	+0,335	-0,414	-0,407	-0,570
4,124	+0,740	+0,263	+0,204	-0,564	-0,645	-0,763
4,249	+0,764	-0,155	-0,310	-0,709	-0,829	-0,938
4,391	+0,788	-0,379	-0,502	-0,843	-1,013	-1,082
4,547	+0,801	-0,600	-0,669	-1,030	-1,228	-1,240
4,712	+0,794	-0,819	-0,819	-1,225	-1,480	-1,526

Это позволяет по диаграммам, составленным для трех насосов, найти коэффициент быстроходности для расчета при любом насосе. Исследовались три типа насоса со следующими коэффициентами быстроходности<sup>1</sup>: насос центробежного типа  $N_s=35$ , диагонального типа  $N_s=147$  и осевого типа  $N_s=261$ .

Диаграммы Сьютера для этих насосов изображены на рис. 6.7, а параметры  $W_H$  и  $W_T$  приведены в табл. 6.1.

Часть кривых на диаграмме Сьютера, которые можно будет получить по характеристике  $H, Q$ , представляемой заводом-изготовителем, будет лежать в первом квадранте, т. е. при  $\theta$  между  $\pi/4$  и  $\pi/2$ . Если эту очень ограниченную информацию нанести на диаграмму Сьютера, то окажется, что она лежит между двумя определенными кривыми  $W_H$ .

Кривая зависимости момента от расхода может быть выведена по характеристикам  $P, Q$  и  $E, Q$  завода-изготовителя. Эта информация также может быть нанесена на диаграмму Сьютера, и будет найдено, что она лежит между кривыми исследованных насосов.

Предполагается, что эти короткие отрезки кривых  $W_H$  и  $W_T$  исследуемых насосов могут быть дополнены во всем диапазоне  $\theta$  от 0 до  $2\pi$  путем интерполяции между двумя соседними кривыми  $W_H$  и  $W_T$ .

Этот процесс не лишен риска. Так, если у двух насосов с одинаковыми коэффициентами быстроходности рабочие колеса различной формы, то неразумно предполагать, что диаграммы этих насосов идентичны, даже если их объемные расходы одинаковы. Для того чтобы убедиться, что интерполяция диаграммы Сьютера проведена правильно, необходимо получить дополнительную информацию о поведении насоса в другом диапазоне  $\theta$ , но это может быть очень трудно сделать.

Если дополнительная информация отсутствует, то, возможно, следует найти полную характеристику другого насоса аналогичной геометрической формы и по ней вычертить ряд диаграмм Сьютера. Форма этих кривых может послужить аналогом при построении кривых Сьютера для исследуемого насоса.

---

<sup>1</sup> По формулам, принятым в СССР, коэффициент быстроходности рабочего колеса насоса имеет значение в 3,65 раза больше.—*Прим. ред.*

Следует остановиться на позиции изготовителей насосов. Поскольку работа насосов на всех режимах, т. е. во всех четырех квадрантах, может иметь место только для крупных насосов, для проведения исследований на всех режимах требуется два крупных насоса с большими расходами и мощностью и соответствующий испытательный стенд. Выполнение подобных исследований требует от изготовителя больших затрат, и понятно его нежелание проводить такую работу. Вероятно, для получения полной характеристики насоса изготовитель должен выполнять исследования на модели насоса, имеющего одинаковый коэффициент быстроходности с натурным насосом (стоимость модельных исследований можно будет включить в стоимость реализуемой продукции).

## 6.12. ПРИМЕНЕНИЕ ДИАГРАММ СЬЮТЕРА

В первую очередь две кривые  $W_H$  и  $W_T$  в зависимости от  $\theta$  для насоса должны быть введены в ЭВМ в виде двух массивов (последовательностей чисел). Предлагается использовать координаты 64 точек на каждой кривой и метод интерполяции для вычисления промежуточных величин.

В стационарном состоянии  $N=N_S$  и  $Q=Q_S$ , так что  $\theta=\pi/4$ , т. е.  $\text{argtg } \theta=1$ . Текущие значения  $W_H$  и  $W_T$  могут быть получены из подготовленных массивов чисел. Очевидно,  $H=H_S$  и  $T=T_S$ , момент двигателя  $T_m$  внезапно становится равным нулю, таким образом, уравнение моментов будет:  $T_m - T_S = I\dot{\Omega}$ ; при остановке насоса  $T_m = 0$  и

$$-T_S = I\dot{\Omega},$$

таким образом,

$$\dot{\Omega} = -\frac{T_S}{I}, \quad \frac{\frac{2\pi}{60} (N_1 - N_S)}{\Delta t} = -\frac{T_S}{I};$$

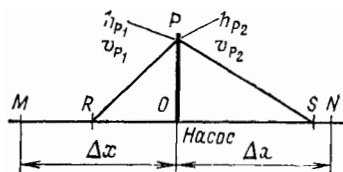


Рис. 6.8.



отсюда

$$N_1 = N_S - \frac{60}{2\pi} \frac{T_S \Delta t}{I}. \quad (6.35)$$

В начале остановки насоса напор  $H = H_S$ . Затем можно применить характеристическое уравнение для прямой характеристики на участке  $dx$  всасывающей трубы и обратной характеристики на первом участке  $dx$  отводящей трубы, т. е.

$$(h_{P_1} - h_S) + \frac{c_R}{g} (v_{P_1} - v_R) + c_R \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{g d_{su}} = 0; \quad (6.36)$$

$$(h_{P_2} - h_S) - \frac{c_S}{g} (v_{P_2} - v_S) - c_S \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{g d_{del}} = 0, \quad (6.37)$$

где  $d_{su}$  — диаметр всасывающей трубы;  $d_{del}$  — диаметр отводящей трубы. Так как  $h_{P_2} - h_{P_1} = H$ , то, вычитая уравнение (6.36) из (6.37) и подставляя известное значение  $H$  вместо  $h_{P_2} - h_{P_1}$ , подставляя также  $Q_1 / \left( \frac{\pi}{4} d_{su}^2 \right)$  вместо  $v_{P_1}$  и  $Q_1 / \left( \frac{\pi}{4} d_{del}^2 \right)$  вместо  $v_{P_2}$ , определяем  $Q_1$  (рис. 6.8).

Последующее значение  $\theta$  может быть рассчитано по соотношению

$$\theta_1 = \arctg \left( \frac{N_1}{N_S} \frac{Q_S}{Q_1} \right). \quad (6.38)$$

С помощью интерполяции данных, введенных в ЭВМ можно найти  $W_{H_1}$  и  $W_{T_1}$ , соответствующие  $\theta_1$ .

Из уравнений (6.32) и (6.33)

$$T_1 = T_S W_{T_1}^2 \left[ \left( \frac{N_1}{N_S} \right)^2 + \left( \frac{Q_1}{Q_S} \right)^2 \right]; \quad (6.39)$$

$$H_1 = H_S W_{H_1}^2 \left[ \left( \frac{N_1}{N_S} \right)^2 + \left( \frac{Q_1}{Q_S} \right)^2 \right]. \quad (6.40)$$

Используя  $T_1$ , получаем:

$$N_2 = N_1 - \frac{60}{2\pi} \frac{T_1 \Delta t}{I}. \quad (6.41)$$

По  $H_1$  можно найти  $Q_2$  и повторить указанный выше процесс многократно.

### 6.13. ВЫХОД НАСОСА НА СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ

В предыдущих параграфах рассматривалась работа насоса в четырех квадрантах после того, как двигатель выключен, т. е. насос остановлен. Если рассматривается случай выхода насоса на стационарный режим из состояния покоя, то необходимо иметь зависимость момента  $T_m$  от частоты вращения  $N$  двигателя. Эту зависимость необходимо ввести в ЭВМ в виде массива чисел. Для расчета момента на валу двигателя при любой частоте вращения можно использовать метод интерполяции.

Располагаемый момент для ускорения рабочего колеса насоса и вращающихся частей двигателя будет равен  $T_m - T_p$ , где  $T_m$  — момент, приложенный со стороны двигателя, а  $T_p$  — момент насоса при данной частоте вращения;  $T_p$  — момент, полученный из диаграммы Сьютера. При этом

$$T_m - T_p = I\dot{\Omega}, \quad (6.42)$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \frac{T_m - T_p}{I}; \\ \frac{2\pi(N_2 - N_1)}{60\Delta t} &= \frac{(T_m - T_p)}{I}; \\ N_2 &= N_1 + \frac{30(T_m - T_p)\Delta T}{\pi I}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Метод расчета аналогичен методу расчета при остановке насоса, но вместо (6.41) подставляется уравнение (6.43).

### 6.14. НАСОСЫ, ОБОРУДОВАННЫЕ БАЙПАСАМИ С КЛАПАНАМИ

Насосы в сетях часто оборудуются обратным клапаном, установленным в байпасе (рис. 6.9). Преимущество обратного клапана, установленного в байпасе, заключается в том, что на длинных трубопроводах насосные станции располагают приблизительно на равных расстояниях друг от друга. Когда расход в сети мал, некоторые насосы отключают, а остальные продолжают обеспечивать необходимый расход. При отключении насоса

поток автоматически проходит через байпас, а обратный клапан предотвращает циркуляцию жидкости через байпас, когда насос находится в работе. Системы, работающие под действием силы тяжести, снабжаются бустерными насосами для подкачки. Такой насос большую часть времени не работает, и поток проходит через байпас под гравитационным напором.

Байпас имеет и другие преимущества. В процессе остановки насоса уменьшается давление за насосом. Если оно становится меньше, чем давление перед насосом, то клапан в байпасе открыт, и через него продолжается течение. Давление за насосом не снизится слишком сильно, как это имело бы место при отсутствии байпаса, и возможность гидравлического удара существенно уменьшится. Это явление аналогично тому, которое происходит при работе насоса в турбинном режиме в фазе пониженного давления, следующей за остановкой насоса.

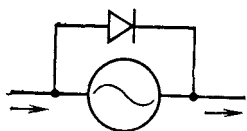


Рис. 6.9.

Анализ этих явлений относительно прост. При рассмотрении работы насоса (см. § 6.12) необходимо следить за изменением давлений перед насосом и за

ним. Если оно становится больше, чем давление за насосом, то необходимо продолжить расчет замедления частоты вращения насоса, а расчеты напор—расход следует заменить на расчеты, которые игнорируют присутствие насоса и рассматривают систему разветвлений в трубопроводе, т. е. следует написать два характеристических уравнения и решить их относительно напора и частоты вращения для случая, когда насоса нет. Если полностью открытый обратный клапан создает местные потери, то это можно учесть путем введения потерь на трение или, что более точно, записав дополнительный член для потери напора, например

$$\frac{g}{c_R} (h_{P_1} - h_R) + (v_{P_1} - v_R) + \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d_R} = 0; \quad (6.44)$$

$$- \frac{g}{c_S} (h_{P_2} - h_S) + (v_{P_2} - v_S) + \frac{f_S v_S |v_S| \Delta t}{d_S} = 0; \quad (6.45)$$

$$h_{P_1} - h_{P_2} = K \frac{v_{P_1}^2}{2g}, \quad (6.46)$$

где  $K \frac{V^2 P_1}{2g}$  — потери напора при полностью открытом обратном клапане. Так как  $v_{P_1} = Q/a_{P_1}$  и  $v_{P_2} = Q/a_{P_2}$ , то эти уравнения можно привести к квадратному уравнению относительно  $Q$  и легко решить. Подставив решение в уравнения (6.44) и (6.45), найдем  $h_{P_1}$  и  $h_{P_2}$ . При этом расходом через насос после остановки насоса пренебрегаем, но он обычно мал.

## 6.15. НАСОСНЫЕ СТАНЦИИ

Обычно на насосной станции устанавливается как минимум два насоса (один резервный), но чаще три — четыре. При моделировании группу насосов можно рассматривать как один эквивалентный насос, характеристику для группы насосов рассчитывать как для эквивалентного насоса.

Группа насосов на станции обычно работает параллельно, но в этом случае, чтобы получить устойчивую надежную работу, они должны быть идентичными.

### Параллельная работа насосов

При параллельной работе все насосы должны работать при одних и тех же частотах вращения и иметь одинаковые характеристики  $H-Q$  и  $Eff-Q$ . Расход  $Q$ , который обеспечивает группа насосов, является суммой расходов каждого насоса.

Если группа включает  $n$  насосов, то уравнение эквивалентного насоса

$$H_e = A'N^2 + B'NQ - C'Q^2, \quad (6.47)$$

где  $A' = A$ ,  $B' = B/n$ ,  $C' = C/n^2$ .

Инерцию группы насосов также можно рассчитать. Отдельный насос, работающий в стационарном режиме, имеет обычный расход, на который не влияет работа других насосов группы. При выключении группы насосов частота вращения каждого насоса убывает точно так же, как если бы он работал один, но с расходом  $1/n$  общего расхода. Инерция группы насосов должна быть

произведением инерции одного насоса на число насосов в группе.

Коэффициент полезного действия группы насосов такой же, как и отдельного насоса, и можно использовать уравнение, приведенное раньше, но для группы расход  $Q$  нужно заменить на  $Q/n$ , т. е.

$$Eff_e = \frac{A'N^2 + B'NQ - C'Q^2}{D_e N^2 \frac{Q}{n} + E_e N \left(\frac{Q}{n}\right)^2 + F_e \left(\frac{Q}{n}\right)^3}, \quad (6.48)$$

где  $D'_e = D_e/n$ ,  $E'_e = E_e/n^2$ ,  $F'_e = F_e/n^3$ ,  $D_e$ ,  $E_e$ ,  $F_e$  — постоянные индивидуального насоса, а  $D'_e$ ,  $E'_e$ ,  $F'_e$  — постоянные эквивалентного насоса.

### Последовательная работа насосов

Если насосы в группе работают последовательно, то общий расход равен расходу одного насоса, а напор равен сумме напоров всех насосов. При последовательной работе насосы не обязательно должны быть одинаковыми.

Таким образом, для насосов, поставленных последовательно, уравнение  $H$ ,  $Q$

$$H_e = \Sigma A_p N_p^2 + (\Sigma B_p N_p) Q - (\Sigma C_p) Q^2, \quad (6.49)$$

где

$$\Sigma A_p N_p^2 = A_1 N_1^2 + A_2 N_2^2 + A_3 N_3^2 + \dots;$$

$$\Sigma B_p N_p = B_1 N_1 + B_2 N_2 + B_3 N_3 + \dots;$$

$$\Sigma C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

Если насосы работают при различных частотах вращения (редкое сочетание), то эквивалентный насос, который представляет группу, имеет кинетическую энергию, эквивалентную вращающейся массе:

$$\frac{1}{2} I' N^2 = \sum \frac{1}{2} I_p N_p^2,$$

где

$$\sum \frac{1}{2} I_p N_p^2 = \frac{1}{2} (I_1 N_1^2 + I_2 N_2^2 + I_3 N_3^2 + \dots);$$

$$I' N^2 = \Sigma I_p N_p^2,$$

откуда

$$I' = \frac{\sum I_p N_p^2}{N^2}. \quad (6.50)$$

Здесь  $I'$  — эквивалентный момент инерции насосов;  $N$  — эквивалентная частота вращения насосов, которая может быть выбрана произвольно, например равной наибольшей частоте вращения насосов.

Эквивалентное уравнение, связывающее напор с расходом,

$$H_e = A'N^2 + B'NQ - C'Q^2,$$

где

$$A' = \frac{\sum A_p N_p^2}{N^2},$$

$$B' = \frac{\sum B_p N_p}{N};$$

$$C' = \sum C_p.$$

Коэффициент полезного действия группы насосов, работающих последовательно

$$Eff_e = H_e \sum_{1 \rightarrow n} \frac{Eff}{H_p}.$$

### Комбинированное соединение насосов

Группу насосов можно соединить параллельно, а затем соединить ее с другой, которая работает последовательно.

Рассчитав эквивалентный насос для параллельно соединенной группы и эквивалентный насос для последовательно соединенной группы и соединив эти группы последовательно, можно получить эквивалентный насос для комбинированной группы насосов.

### Остановка части насосов на насосной станции

Для насосной станции можно разработать подпрограмму, которая могла бы учитывать изменение характеристики эквивалентного насоса, его инерционности и к. п. д. при внезапной остановке подгруппы насосов,

когда множитель  $i$  в выражении для отсчета времени  $t=i\Delta t$  превысит заданное значение. Нет необходимости моделировать уменьшение частоты вращения отключенной группы, поскольку продолжающаяся подача жидкости от неотключенных насосов предотвращает развитие существенных нестационарных явлений.

Написать такую подпрограмму совсем просто, величины  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D_e'$ ,  $E'$  и  $I'$  вычисляются для всей группы, если  $i$  меньше заданного значения, и только для насосов, продолжающих работать, если  $i$  больше заданного значения.

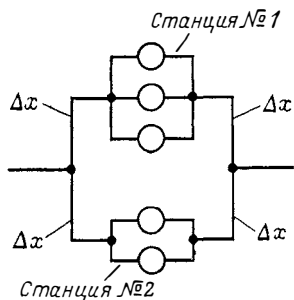


Рис. 6.10.

Кроме того, группа насосов на станции может быть разделена на две группы, каждая из которых может рассматриваться как насосная станция (рис. 6.10). Трубопроводная сеть из-за этого несколько усложняется, поскольку вводятся дополнительные участки длиной

$\Delta x$ . Если станция № 1 представляет группу насосов, которые продолжают работать, а станция № 2 группу, которая отключается в заданный момент времени, то расчеты характеристической кривой, констант и других параметров эквивалентных насосов выполняются без усложнения и станция № 2 может быть отключена в обусловленное время. Отключение эквивалентного насоса рассчитывается указанным методом, но можно думать, что введение дополнительных отрезков  $\Delta x$  компенсирует преимущества такого представления.

## 6.16. МЕТОДЫ БОРЬБЫ С ГИДРАВЛИЧЕСКИМ УДАРОМ ПРИ ОСТАНОВКЕ НАСОСА

Основными методами борьбы с гидравлическим ударом являются установка маховика на насос, воздушных колпаков или уравнильных резервуаров на трубопроводе непосредственно за насосом и устройство байпаса вокруг насоса.

Маховик, установленный на ось насоса, существенно увеличивает момент инерции насоса, т. е. уменьшение

частоты вращения насоса происходит медленнее и также медленно уменьшается подача жидкости. Если такое уменьшение подачи насосом можно осуществлять в течение длительного времени при установке не очень большого маховика, то эта мера весьма удобна для подавления нестационарных возмущений. Насос осуществляет подачу в течение периода, при котором напор насоса  $AN^2$  при текущей уменьшенной частоте вращения  $N$  больше статического напора в системе. Если этот период больше, чем фаза удара ( $2L/c$ ), то будет осуществлено некоторое уменьшение возникающих возмущений. Очевидно, что чем больше маховик, тем больше время подачи и меньше нестационарные возмущения. Поскольку маховики дороги, существует предел, начиная с которого они становятся экономически нецелесообразными, поэтому этот метод подавления возмущений используется, когда трубы относительно короткие и имеют соответственно малую фазу удара. При остановке насоса подача может осуществляться в течение периода большего, чем фаза удара, только в коротких трубах. Рассчитать систему с маховиком несложно, для этого необходимо увеличить момент инерции установки с насосом и выполнить дополнительный расчет на ЭВМ.

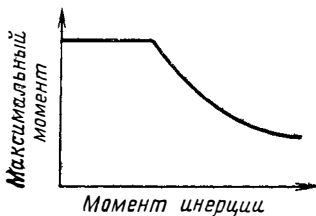


Рис. 6.11.

Достаточно произвести четыре расчета, меняя момент инерции маховика от нуля до наибольшего практически допустимого значения в последующих трех расчетах.

Построим график изменения максимального (а если необходимо, и минимального) напора от момента инерции маховика (рис. 6.11). Горизонтальный участок на графике рис. 6.11 означает, что до некоторого критического значения момента инерции маховика период подачи жидкости при остановке насоса меньше, чем фаза удара, поэтому отсутствует влияние момента инерции на максимум нестационарного напора. Это аналогично разнице между внезапным и медленным закрытием клапана.

В соответствии с графиком максимально допустимый напор определяет необходимый момент инерции маховика.

В соответствии с графиком максимально допустимый напор определяет необходимый момент инерции маховика.



вика. При использовании маховика максимальная длина трубопровода, которая эффективно уменьшит удар, составляет 1—2 км в зависимости от упругости трубы. Для более длинных трубопроводов необходимо устанавливать воздушный колпак или уравнильный резервуар.

Уравнильные резервуары можно использовать, если магистраль подачи относительно широкая, а пик напора в месте расположения резервуара не чрезмерно велик. Ориентировочно можно считать, что если резервуар не переполняется, то вершина уравнильного резервуара непосредственно за насосом должна находиться над базисным уровнем на высоте, равной высоте уровня жидкости в колодце плюс напор при закрытом клапане насоса. На практике эта высота может быть несколько меньше, но это правило позволяет проектировщику определить, можно ли применять уравнильный резервуар.

Воздушные колпаки (см § 3.8) очень дороги, так как должны выдерживать внутреннее давление, которое может быть очень велико; если они расположены на возвышенных точках, то возможно, что на них будут действовать и давления меньше атмосферного. Воздушный колпак, в котором давление может быть меньше атмосферного, должен быть подкреплен внутри ребрами, чтобы не прогибаться. Их необходимо оборудовать компрессорами, и вся установка должна работать таким образом, чтобы растворенный в воде воздух регулярно восстанавливался. Если маховик, используемый для устранения удара, работает всегда, то воздушный колпак работает только в случае, если уровень жидкости в колпаке установлен правильно с помощью автоматических устройств или частых контрольных проверок.

Для предотвращения гидравлического удара устраивают байпас вокруг насоса. Такой байпасный трубопровод с помощью электрически управляемого клапана позволяет воде вытекать из области, расположенной непосредственно за насосом, вниз по потоку в колодец. Во время работы насоса клапан закрыт, а в процессе остановки насоса соленоид срабатывает так, чтобы открыть клапан. Если после остановки насоса давление сильно уменьшится, то вода будет поступать через байпас в трубу, снижая таким образом изменение давления. Начальная нестационарность, вызванная останов-

кой насоса, возвратится к насосу после отражения на нижнем конце трубы. Эта ударная волна обычно отражается с положительным знаком, если клапан байпаса закрыт. Если клапан открыт, то нестационарность будет уменьшаться и возникнет возвратное течение; достаточно медленное закрытие клапана остановит этот поток без развития значительных нестационарных явлений. Клапан такого типа мог бы использоваться более часто, если бы был «безотказным». Однако поскольку он зависит от электроснабжения, то при остановке на-

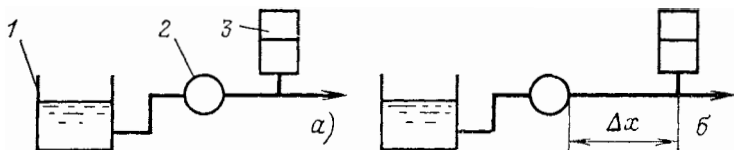


Рис. 6.12. К расчету режима насоса с воздушным колпаком.  
*a* — схема насосной установки; *б* — расчетная схема; 1 — колодец; 2 — насос; 3 — воздушный колпак.

соса из-за аварии линии электропередачи клапан также отключается. Клапаны такого типа, действующие от сжатого воздуха, при правильном обслуживании являются действительно «безопасными».

Подпрограмму, составленную для описания работы гидравлического управления, можно использовать в начале или конце наименьшего отрезка трубы, равного длине выбранного интервала  $\Delta x$ . Если насос оборудован воздушным колпаком, то обычно необходимо иметь интервал длиной  $\Delta x$  между насосом и воздушным колпаком (рис. 6.12).

Когда  $\Delta x$  мало, этот метод допустим, но если система длинная, например 10 км, и интервал  $\Delta x=1$  км, то использование отрезка длиной 1 км, чтобы представить расстояние всего около 10 м, приведет к очень плохому моделированию. Поэтому необходимо составить подпрограмму, которая будет рассматривать насос и воздушный колпак как одно целое.

Чтобы описать поведение комбинации насоса с воздушным колпаком, данный метод расчета насоса можно объединить с методом расчета воздушного колпака, который будет рассмотрен в гл. 7.

В длинных трубопроводах, снабженных бустерными насосами, желательно устанавливать воздушные колпа-

ки как со стороны всасывания, так и со стороны подачи. При этом расчет можно производить по методу, выведенному в § 7.3 для насоса с воздушным колпаком на стороне подачи.

Уравнительные резервуары в действительности являются частным случаем воздушных колпаков. Как будет описано ниже, обычно предполагается, что процесс сжатие — расширение в воздушном колпаке политропический с показателем политропы 1,2. Если этот показатель принять равным нулю, то уравнение

$$PV^{1,2} = \text{const}$$

становится  $P = \text{const}$ , что соответствует состоянию газа над поверхностью уравнительного резервуара, где давление равно атмосферному. Если высота воздушного колпака очень велика, то сжатия или расширения газа происходить не будет. Поэтому если принять показатель политропы для газа равным нулю, или сделать высоту воздушного колпака очень большой, или обеспечить и то, и другое, то получим условия, удовлетворяющие описанию простого уравнительного резервуара.

## 6.17. ЛИНЕЙНОЕ ПЕРЕУПЛОТНЕНИЕ И ЗАТУХАНИЕ

Когда гидравлическое регулирующее устройство в виде клапана на нижнем конце трубопровода быстро уменьшает расход до нуля, волна с крутым фронтом распространяется вверх по течению. По мере того как замедляются последующие слои жидкости, давление в них повышается и передается вниз по течению через жидкость, находящуюся почти в стационарном состоянии, с сохранением своего уровня давления. Так как давление в жидкости перед тем, как на него повлияла волна, под действием трения выше, чем начальное давление в слоях жидкости по течению, то это более высокое давление также передается вниз по течению вместе с повышением давления, вызванного изменением количества движения из-за изменения скорости. Поэтому по мере того, как волна продвигается вверх по потоку, давление у нижнего кольца, где расположено управляющее устройство, продолжает повышаться после того, как первоначальное возмущение с крутым фронтом уже было создано. Жидкость в трубе между волной и низо-

вым управляющим устройством подвергается постепенно увеличивающемуся давлению, которое сжимает ее и растягивает стенки трубы. Таким образом, несмотря на то, что скорость непосредственно за волной около управляющего устройства равна нулю, она увеличивается по мере перемещения волны вверх по потоку, чтобы компенсировать отток жидкости вниз по потоку для заполнения пространства, возникающего из-за сжатия жидкости и растяжения трубы. Поэтому изменение скорости в волне уменьшается, и высота волны убывает.

Явление увеличения давления после прохождения волны называют линейным переуплотнением, которое обычно наблюдается в длинных трубопроводах, особенно в нефтепроводах.

Явление уменьшения давления по мере продвижения волны вверх по потоку называют затуханием.

## 6.18. ЗАПИРАНИЕ

В трубопроводе с клапаном на нижнем конце и насосом, оборудованным обратным клапаном на верхнем конце, при закрытии клапана может происходить явление, получившее название запираания. Закрытие клапана создает повышение давления — волну сжатия, которая распространяется вверх по потоку по направлению к насосу. Когда она достигает насоса, то уменьшение расхода сдвигает рабочую точку насоса вверх по характеристике  $H, Q$ , что приводит к повышению давления. Из-за взаимодействия насоса с набегающей волной возникает отражение, которое перемещается вниз по потоку к закрытому клапану, где отражается с положительным знаком и возвращается назад к насосу. В течение времени прохождения волны вниз к клапану и назад насос будет подавать уменьшенный расход жидкости в трубу, которая закрыта на нижнем конце. В конце концов после одного или нескольких фаз гидравлического удара давление вниз от насоса станет больше, чем напор при нулевом расходе через насос, и обратный клапан закроется.

Сложная система волн будет распространяться вверх и вниз вдоль трубы с постепенным затуханием. В течение этого периода давление у насоса может на короткое время стать меньше, чем напор при нулевом расходе,

и насос подаст некоторый объем жидкости в трубу. В конце концов подвод жидкости прекратится во всех точках трубы, а давление, установившееся в трубе, может оказаться значительно выше, чем давление, создаваемое насосом при нулевом расходе. Если обратный клапан и клапан на нижнем конце не имеют течи, то давление сохранится в трубе, это и будет давление запираания. Давление запираания, которое может установиться в длинных трубопроводах, может быть большим.

Известны случаи, когда давления запираания в 1,5 раза превосходили напор при нулевом расходе; в длинных трубопроводах это может быть опасно. Если низовой клапан не полностью герметичен, то этой опасности можно избежать, если дать возможность вытечь небольшому количеству жидкости и тем самым существенно понизить давление. Такие клапаны с утечкой можно моделировать, используя методы, приведенные в § 7.4, путем уменьшения  $K$  для закрытого клапана от очень большого до меньшего, но все еще достаточно высокого значения.

Явление запираания автоматически рассчитывается методом характеристик, но не поддается анализу графическим методом Шнидера — Бержерона.

Это явление может иметь место в любом трубопроводе. Очевидно, что линейное переуплотнение можно заметить в относительно длинных трубопроводах, а запираание, к сожалению, касается и коротких трубопроводов. Оба явления рассчитываются методом характеристик.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### **ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ДРУГИМИ ГИДРАВЛИЧЕСКИМИ УСТРОЙСТВАМИ**

#### **7.1. СЛОЖНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ТРУБ**

Как указывалось выше, в общей программе необходимо иметь подпрограмму, способную рассчитать соединение из  $n$  ветвей.

Соединение из  $n$  ветвей означает, что  $n$  труб сходятся в какой-либо точке трубопроводной сети. Практически

В одной точке можно соединить только несколько труб, например четыре-пять, но при использовании коллектора можно соединить значительно больше. Трубы могут расчленяться в простые соединения, объединенные друг с другом коротким отрезком трубы, и так далее. Длина этих коротких отрезков между соединениями может быть недостаточной, чтобы рассматривать ее как участок  $\Delta x$ , поэтому, чтобы обеспечить наилучшее моделирование, такие распределенные соединения логично рассматривать как одно большое соединение.

Принято пренебрегать местным сопротивлением в сложных отводах. Влияние сопротивления можно учесть путем увеличения длины трубы или ее шероховатости, но в случае течения жидкости это влияние обычно мало. Если учесть влияние сопротивления при расчете сложных отводов, то расчет становится более сложным и дорогим в смысле затрат времени на ЭВМ.

В соединении напор должен быть одинаковым для всех труб, соединенных в данном месте, и должно быть справедливо уравнение неразрывности.

Уравнение неразрывности записывается в таком виде:

$$\sum_{i \rightarrow n} a_{pa} v_{pa} = 0, \quad (7.1)$$

где  $a_{pa}$  — площадь поперечного сечения трубы  $a$ ;  $v_{pa}$  — скорость в точке соединения трубы  $a$  в конце интервала  $\Delta t$ ;  $n$  — число труб, подходящих к месту соединения.

Обычно принимается, что расход, направленный к соединению, считается положительным, а от соединения — отрицательным.

Рассмотрим динамические условия для соединения. Если соединение — низовое, т. е. предполагается, что течение направлено к соединению, то прямая характеристика может исходить из некоторой точки последнего интервала  $\Delta x$  трубы; для труб с верховым соединением обратная характеристика может исходить из некоторой точки нижнего интервала  $\Delta x$  трубы (рис. 7.1).

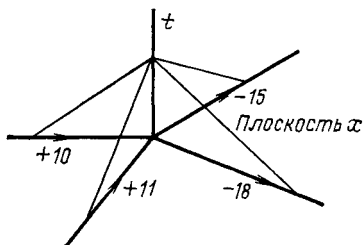


Рис. 7.1.

На рис. 7.1 трубы, связанные с соединением, обозначены номером со знаком плюс, если предполагается, что течение в трубе направлено к соединению, и со знаком минус, если предполагается, что течение направлено от соединения. При таком правиле нумерации можно выделить множитель  $s$ , который принимает значение  $+1$ , если течение направлено к соединению, или  $-1$  — если от соединения;  $s$  вычисляется из следующего уравнения:

$$s = \text{sign}(a),$$

где  $a$  — номер трубы, а  $s$  — искомый коэффициент.

Значение  $s$  можно использовать при определении направления характеристики для каждой трубы, т. е.

$$\frac{sg}{c_a}(h_p - h_a) - (v_{p_a} - v_a) + \frac{f_a v_a |v_a| \Delta t}{d_a} = 0, \quad (7.2)$$

где  $a$  — обозначает  $a$ -ю трубу;  $v_a$ ,  $c_a$ ,  $h_a$ ,  $f_a$  — соответствующие значения в  $a$ -й трубе;  $v_{p_a}$  — скорость в соединяющемся конце этой трубы в конце интервала  $\Delta t$  и  $d_a$  — диаметр трубы;

$$v_{p_a} = v_a - \frac{sg}{c_a}(h_p - h_a) - \frac{f_a v_a |v_a| \Delta t}{d_a}.$$

Из уравнения (7.1)  $\sum s a_{p_a} v_{p_a} = 0$  ( $s$  введено в это уравнение, чтобы сохранить за  $v_{p_a}$  положительное значение для труб, у которых течение направлено от соединения, и запомним, что  $s^2 = 1$ ), тогда

$$\begin{aligned} \sum_{1 \rightarrow n} s a_{p_a} v_{p_a} = 0 &= \sum_{1 \rightarrow n} s a_{p_a} v_a - \sum_{1 \rightarrow n} \frac{g}{c_a} a_{p_a} h_p + \\ &+ \sum_{1 \rightarrow n} \frac{g}{c_a} a_{p_a} h_a - \sum_{1 \rightarrow n} \frac{\sum s a_{p_a} f_a v_a |v_a| \Delta t}{d_a}; \\ \sum_{1 \rightarrow n} \frac{g}{c_a} h_p a_{p_a} &= \sum_{1 \rightarrow n} s a_{p_a} v_a + \sum_{1 \rightarrow n} \frac{g}{c_a} a_{p_a} h_a - \\ &- \sum_{1 \rightarrow n} \frac{\sum s a_{p_a} f_a v_a |v_a| \Delta t}{d_a}. \end{aligned}$$

Так как  $h_p$  одинаково для всех труб, то

$$h_p = \frac{\sum_{1 \rightarrow n} s_{z_{p_a}} v_a + \sum_{1 \rightarrow n} \frac{g}{c_a} a_{p_a} h_a - \sum_{1 \rightarrow n} \frac{2s a_{p_a} f_a v_a |v_a| \Delta t}{d_a}}{\sum_{1 \rightarrow n} \frac{g a_{p_a}}{c_a}} \quad (7.3)$$

Это уравнение хорошо приспособлено для решения с помощью ЭВМ. Поскольку все величины правой части формулы известны,  $h_p$  можно легко вычислить.

Затем с помощью обратной подстановки в уравнение (7.2) можно найти  $n$  значений  $v_{p_a}$  — по одному для каждой трубы. Видно, что никаких ограничений на число  $n$  нет. Таким образом, решение для соединений получено.

## 7.2. СОЧЛЕНЕНИЯ

Сочленения представляют собой соединение двух труб. Для расчета их целесообразно составлять дополнительную подпрограмму или использовать программу для расчета сложных соединений, состоящих из двух ветвей. Если между трубами расположен обратный клапан, то он определяет и возможное направление течения (рис. 7.2). Использование программы для сложных со-

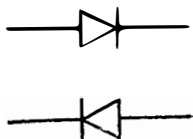


Рис. 7.2.

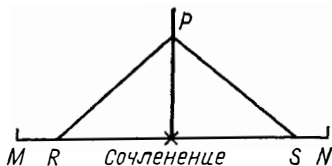


Рис. 7.3.

членений требует большей затраты времени на ЭВМ, чем отдельная программа для сочленений, поскольку приходится обращаться к медленным процессам, как вызов подпрограмм на языке АЛГОЛ или циклов на языке ФОРТРАН. Так как любая трубопроводная сеть имеет много сочленений, то любую программу для нестационарного анализа трубопроводной сети целесообразно дополнить подпрограммой их расчета.



Предположим, что обратный клапан не оказывает заметного сопротивления течению жидкости.

Уравнение прямой характеристики (рис. 7.3), описывающей условия вдоль  $RP$ ,

$$\frac{g}{c_R} (h_{p_1} - h_R) + v_{p_1} - v_R + \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d_R} = 0, \quad (7.4)$$

обратной характеристики вдоль  $SP$

$$-\frac{g}{c_S} (h_{p_2} - h_S) + v_{p_2} - v_S + \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d_S} = 0. \quad (7.5)$$

Отметим, что  $v_{p_1}$  может быть не равно  $v_{p_2}$ , если диаметры труб не равны, т. е.  $d_R \neq d_S$ , а  $h_p$  одинакова для обеих труб, если местными потерями можно пренебречь и скорость  $v_{p_1}$  отлична от нуля.

Из уравнения (7.4)

$$h_{p_1} = h_R - \frac{c_R}{g} (v_{p_1} - v_R) - \frac{c_R}{g} \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d_R}$$

и из уравнения (7.5)

$$h_{p_2} = h_S + \frac{c_S}{g} (v_{p_2} - v_S) + \frac{c_S}{g} \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d_S};$$

$$v_{p_2} = \frac{a_{p_1}}{a_{p_2}} v_{p_1}; \quad (7.6)$$

так как  $h_{p_1} = h_{p_2}$ ,

$$h_R = \frac{c_R}{g} (v_{p_1} - v_R) - \frac{c_R}{g} \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d_R} = h_S +$$

$$+ \frac{c_S}{g} (v_{p_2} - v_S) + \frac{c_S}{g} \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d_S};$$

$$\left( \frac{c_R + \frac{a_{p_1}}{a_{p_2}} c_S}{g} \right) v_{p_1} = h_R - h_S + \frac{c_R v_R + c_S v_S}{g} -$$

$$- \frac{c_S 2f_S v_S |v_S| \Delta t}{g d_S} - \frac{c_R 2f_R v_R |v_R| \Delta t}{g d_R};$$

$$v_{p_1} = \frac{h_R - h_S + \frac{c_R v_R + c_S v_S}{g} - \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t c_S}{g d_S} - \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t c_R}{g d_R}}{c_R + \frac{a_{p_1}}{a_{p_2}} c_S} \quad (7.7)$$

В этом месте расчета необходимо проверить, какого типа обратный клапан установлен. Если клапана нет, то расчет  $v_{p_1}$  продолжается. Если установлен обратный клапан, который позволяет жидкости течь только в прямом направлении, производится проверка, и если  $v_{p_1} < 0$ , то необходимо положить  $v_{p_1} = 0$ . Если установлен обратный клапан, который позволяет жидкости течь только в обратном направлении, производится проверка, и если  $v_{p_1} > 0$ , то необходимо положить  $v_{p_1} = 0$ .

Если, таким образом, значение  $v_{p_1}$  установлено, то можно вычислить

$$v_{p_2} = \frac{a_{p_1}}{a_{p_2}} v_{p_1}$$

Тогда

$$h_{p_1} = h_R - \frac{c_R}{g} (v_{p_1} - v_R) - \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t c_R}{g d_R}; \quad (7.8)$$

$$h_{p_2} = h_S + \frac{c_S}{g} (v_{p_2} - v_S) + \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t c_S}{g d_S}. \quad (7.9)$$

Если обратный клапан открыт, то  $h_{p_1}^* = h_{p_2}$ , но если клапан закрыт, то  $h_{p_1} \neq h_{p_2}$  и их значения следует рассчитывать отдельно.

### 7.3. ВОЗДУШНЫЕ КОЛПАКИ

Программа должна содержать возможность расчета любого числа воздушных колпаков, расположенных в произвольных точках трубопроводной сети.

Основной метод расчета воздушного колпака, приведенный в гл. 3 и показывающий, как происходят ко-

лебания массы в воздушных колпаках, будет использован и здесь. Отличие, однако, заключается в том, что в данном случае расчет гидравлического удара будет производиться только для труб, ведущих к резервуару и от него, а распространение волн через резервуар не будет рассматриваться. Это ограничение необходимо, если желательно сохранить приемлемое время расчета.

Длина пути волны от точки присоединения воздушного колпака к трубе до свободной границы в воздушном колпаке очень мала, на

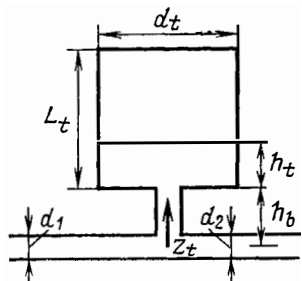


Рис. 7.4.

многую меньше  $\Delta x$ . Если  $\Delta x$  уменьшить примерно до этого расстояния, то время расчета программы становится чрезвычайно большим.

Аналитическая методика, представленная ниже, является комбинацией квазистационарного анализа воздушного колпака с полным рассмотрением гидравлического удара в трубопроводной сети. Этот

метод не позволяет рассмотреть распространение нестационарных волн в воздушном колпаке, но нестационарность в нем очень сильно ослабляется и становится ничтожной по величине. Тем не менее движение нестационарных волн в воздушном колпаке можно рассчитать, используя методику, предложенную выше.

На рис. 7.4 обозначено:  $l_t$  — высота резервуара;  $d_t$  — внутренний диаметр резервуара;  $h_b$  — высота основания резервуара над осевой линией трубы;  $z_t$  — превышение осевой линии основной трубы над базовой линией в точке присоединения резервуара.

В начале расчета уровень воды в резервуаре и потенциальный напор в точке соединения должны быть известны. Обозначим их через  $h_{t_i}$  и  $h_{p_i}$ .

Давление воздуха в резервуаре, выраженное высотой эквивалентного столба жидкости, можно рассчитать. Обозначим эквивалентную высоту столба жидкости через  $h_{w_i}$ , тогда

$$h_{w_i} = h_{p_i} - z_t - h_b - h_{t_i}.$$

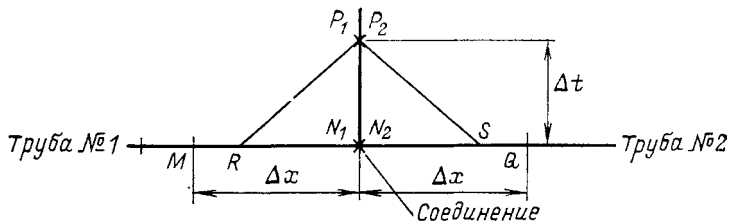


Рис. 7.5.

Это будет абсолютное давление, так как  $h_{p_i}$  — абсолютный потенциальный напор.

Применяя уравнение прямой характеристики (рис. 7.5) для участка  $\Delta x$  перед воздушным колпаком, имеем:

$$\frac{g}{c_R} (h_p - h_R) + (v_{p_1} - v_R) + \frac{2f_R v_R |v_R| \Delta t}{d} = 0,$$

а уравнение обратной характеристики для участка  $\Delta x$  за воздушным колпаком

$$-\frac{g}{c_S} (h_p - h_S) + (v_{p_2} - v_S) + \frac{2f_S v_S |v_S| \Delta t}{d_2} = 0.]$$

Индексы  $R$  и  $S$  имеют те же значения, что и повсеместно в книге:  $h_p$  равно для обоих участков  $\Delta x$ ,  $v_{p_1} \neq v_{p_2}$  из-за втекания (или вытекания) жидкости из воздушного колпака.

Из уравнения неразрывности

$$a_{p_1} v_{N_1} = A_t \frac{dh_t}{dt} + a_{p_2} v_{N_2}$$

следует

$$\Delta h_t = \left( \frac{a_{p_1} v_{N_1} - a_{p_2} v_{N_2}}{A_t} \right) \Delta t, \quad (7.10)$$

где  $A_t$  — площадь поперечного сечения воздушного колпака, равная  $\frac{\pi}{4} d_t^2$ . Высота жидкости в воздушном колпаке в конце интервала  $\Delta t$

$$h_{t_2} = h_{t_1} + \Delta h_t,$$

где  $h_{t_1}$  — высота в начале интервала  $\Delta t$ .

Новое давление воздуха в воздушном колпаке

$$h_{w_2}^{\text{н}} = \left( \frac{l_t - h_{t_i}}{l_t - h_{t_2}} \right)^n h_{w_i}, \quad (7.11)$$

где  $n$  равно примерно 1,2, таким образом,

$$h_p = h_{w_2} + h_{t_2} + h_b + z_t. \quad (7.12)$$

Подставив вновь  $h_p$  в уравнения прямой и обратной характеристик, получим  $v_{p_1}$  и  $v_{p_2}$ .

По значениям  $v_{p_1}$  и  $v_{p_2}$  легко рассчитать поток в воздушном колпаке в конце интервала  $\Delta t$ , потенциальный напор в точке соединения уже вычислен и изменение уровня в воздушном колпаке определено. Расчет вернулся к начальному состоянию интегрирования и может быть уточнен с помощью итераций, если в этом есть необходимость.

Горизонтально расположенные цилиндрические воздушные колпаки можно рассчитывать аналогичным методом, но поскольку при этом форма поперечного сечения сложнее, задача значительно усложняется.

#### 7.4. КЛАПАН С ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ

Клапан с электроприводом может быть установлен на любой трубе в сети. Чтобы проанализировать этот вариант, необходимо разделить трубу на две части, расположенные по обе стороны от клапана. Вначале можно предположить, что клапан имеет привод, который перемещает ходовой винт с постоянной скоростью (рис. 7.6). Потери напора в клапане можно записать в виде уравнения

$$h_v = K \frac{v^2}{2g}, \quad (7.13)$$

где  $v$  — скорость в трубопроводе вверх по течению. Коэффициент  $K$  приводится в каталогах на насосы для

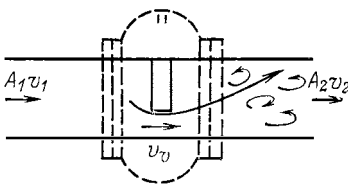


Рис. 7.6.

режимов, на которых велись заводские испытания, т. е. для трубы определенного диаметра. Прежде чем выбранный коэффициент клапана  $K$  использовать для трубы другого диаметра, необходимо приспособить его для ра-

боты в различных условиях. Потери напора в клапане вызваны расширением потока вниз по течению при частично закрытом клапане и отрыве пограничного слоя, происходящего в этом месте.

Потери определяются по уравнению

$$h_v = \frac{(v_v - v_2)^2}{2g}. \quad (7.14)$$

В сужающейся части потока при изменении скорости от  $v_1$  в трубе до  $v_v$  в точке сужения потока, выходящего из клапана, потери малы.

Имеем  $A_1 v_1 = A_v v_v = A_2 v_2$ , где  $A_1$  — площадь сечения подводящей трубы;  $A_2$  — площадь сечения отводящей трубы;  $A_v$  — площадь суженного сечения (рис. 7.6). Тогда

$$v_v = \frac{A_1}{A_v} v_1;$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1,$$

таким образом,

$$h_v = \left( \frac{A_1}{A_v} - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g};$$

$$h_v = \frac{A_1^2}{2g} \left( \frac{A_2 - A_v}{A_2 A_v} \right)^2 v_1^2.$$

Поэтому  $K$  определяется по уравнению

$$K = \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \left( \frac{A_2}{A_v} - 1 \right)^2. \quad (7.15a)$$

Если  $A_2 = A_1$ , то

$$K = \left( \frac{A_2}{A_v} - 1 \right)^2. \quad (7.15b)$$

Обозначим  $K$  через  $K_m$ ; индекс  $m$  означает, что  $K_m$  взято из каталога.

Если клапан установлен на трубе с диаметром, который отличается от указанного в каталоге (рис. 7.7), то  $K_m$  должно быть неизменно, как указано на рис. 7.7.

Снова примем, что потери вызваны расширением потока вниз по течению. Тогда, как и прежде,

$$h_v = \frac{(v_v - v_4)^2}{2g},$$

но в этом случае  $v_4$  намного меньше, чем в трубе, на которой велись заводские испытания, а  $h_v$  соответственно

больше. Скорость  $v_v$  при одинаковом открытии клапана равна скорости при проведении испытаний.

Теперь при том же расходе

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3 = A_4 v_4;$$

$$h_v = \left(\frac{A_3}{A_4}\right)^2 \left(\frac{A_4}{A_v} - 1\right)^2 \frac{v_3^2}{2g},$$

если использовать соответствующие значения  $A_3$  и  $A_4$  вместо  $A_1$  и  $A_2$  в уравнении (7.15а).

Далее можно записать:

$$h_v = \frac{\left(\frac{A_3}{A_4}\right)^2 \left(\frac{A_4}{A_v} - 1\right)^2 \frac{v_3^2}{2g}}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{A_2}{A_v} - 1\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}} K_m \frac{v_1^2}{2g}.$$

Во всех известных случаях заводские испытания производят в трубопроводах с одинаковым диаметром труб, расположенных выше и ниже клапана, т. е.  $A_1 = A_2$ ,

$$h_v = \left(\frac{A_3}{A_4}\right)^2 \left(\frac{\frac{A_4}{A_v} - 1}{\frac{A_2}{A_v} - 1}\right)^2 K_m \frac{v_3^2}{2g},$$

таким образом,

$$h_v = \left(\frac{A_3}{A_4}\right)^2 \left(\frac{A_4 - A_v}{A_2 - A_v}\right)^2 K_m \frac{v_3^2}{2g}.$$

Коэффициент  $K$  для других диаметров труб

$$K = \left(\frac{A_3}{A_4}\right)^2 \left(\frac{A_4 - A_v}{A_2 - A_v}\right)^2 K_m,$$

но из уравнения (7.15б)

$$A_v = \frac{A_2}{(\sqrt{K_m} + 1)},$$

тогда

$$K = \left(\frac{A_3}{A_4}\right)^2 \left[ \frac{(\sqrt{K_m} + 1) A_4 - A_2}{(\sqrt{K_m} + 1) A_2 - A_2} \right]^2 K_m;$$

$$K = \left(\frac{A_3}{A_2}\right)^2 \left( \frac{\sqrt{K_m} + 1 - A_2/A_4}{\sqrt{K_m}} \right)^2 K_m. \quad (7.16)$$

Обычно влияние, создаваемое частично закрытым клапаном, существенно, когда  $K$  (и следовательно,  $K_m$ )

становится на два порядка больше, чем  $A_2/A_4$ , и по крайней мере на один порядок больше, чем единица, поэтому можно упростить уравнение. Тогда получим

$$K = \left(\frac{A_3}{A_2}\right)^2 K_m$$

или

$$K = \left(\frac{d_{act}}{d_{test}}\right)^4 K_m, \quad (7.17)$$

где  $d_{act}$  — диаметр трубы;  $d_{test}$  — диаметр трубы при испытаниях.

Если требуется большая точность, то результат, выраженный уравнением (7.16), можно использовать без особых затруднений. Могут возникнуть сомнения в применимости значений  $K$ , полученных при предположении о внезапном расширении, когда используется соединение в виде расширяющегося конуса, но следует помнить, что угол расширения конуса должен быть меньше  $30^\circ$ , чтобы он уменьшил потери на 15% при отношении площадей расширения 1:4 и на 33% при отношении площадей 1:9. Так как в трубопроводы не принято устанавливать клапаны столь малого размера, то ошибка в большинстве случаев будет меньше 10% и приведет к завышению  $K$ . Можно включить влияние расширения, вводя в расчет коэффициент конусности, т. е.

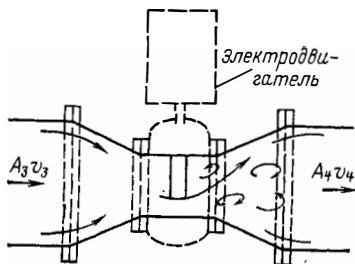


Рис. 7.7.

$$h_v = C_T \left(\frac{A_3}{A_4}\right)^2 \left(\frac{A_1}{A_v} - 1\right)^2 \frac{v_3^2}{2g}. \quad (7.18)$$

Коэффициент  $C_T$  приводится в справочных руководствах в зависимости от угла конусности.

Предшествующее уравнение можно, таким образом, привести к виду

$$K = C_T \left(\frac{A_3}{A_2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{K_m} + 1 - A_2/A_4}{\sqrt{K_m}}\right)^2 K_m. \quad (7.19)$$

Имея полученное соотношение, можно данные, предоставляемые изготовителем, представить в виде ряда



значений  $K$  для всех положений клапана от полностью открытого до полностью закрытого. (Если клапан открывается, а не закрывается, то этот ряд следует читать в обратном направлении.) Ход клапана можно брать с интервалом 1 или 5%.

Рассмотрим случай закрытия (или открытия) клапана с постоянной скоростью, т. е. когда ход клапана увеличивается (или уменьшается) равномерно по времени. Вначале клапан полностью открыт (или закрыт), и остается в этом положении, имея определенное значение  $K$  до тех пор, пока число интервалов интегрирования длительностью  $\Delta t$  не превзойдет заранее выбранного значения. Затем ход начинает уменьшаться (или увеличиваться) с заранее заданной скоростью. Таким образом, положение клапана известно на любом интервале  $\Delta t$ , и соответствующие значения  $K$  для этих моментов времени можно вычислить путем интерполяции между соответственно расположенными значениями  $K$ . Если используется достаточно большой ряд чисел, то линейная интерполяция обеспечивает хорошую точность. Используемый нами ряд из 21 значения  $K$  соответствует изменению хода клапана с интервалом 5%.

Если клапан закрывается из первоначального частично закрытого положения, то представленный ряд  $K$  должен принимать все соответствующие значения от частично закрытого положения до полностью закрытого. (Отметим, что для полностью закрытого клапана  $K$  должно равняться бесконечности, но так как ЭВМ не может хранить такое значение, то  $K$  следует придать очень большое значение, например  $10^{20}$ .)

Скорость закрытия клапана можно вычислить, разделив ход поршня, обеспечивающий закрытие, на разность времени между полным закрытием и его началом.

Могут встретиться случаи, когда используется привод, имеющий две или три скорости. Такой привод устанавливается, чтобы обеспечить быстрое закрытие клапана на начальном участке (допустим, 80% хода) и медленное закрытие клапана на остальной части хода. При этом следует помнить, что в течение очень большой доли закрытия клапана происходит относительно малое уменьшение расхода, это создает незначительную нестационарность; эффективное закрытие производится на последних 10% хода клапана.

Чтобы описать такие условия, можно перейти от интервалов по ходу клапана к интервалам времени, используя для этого значения  $K$ , относящиеся к интервалу хода в текущие моменты времени. Это означает, что работу такого привода можно представить зависимостью  $K$  от хода клапана.

Аналогично действие привода, который создает ступенчатое закрытие, можно смоделировать этим же методом.

Описание последнего этапа закрытия клапана составляет отдельную задачу. Значения  $K$  на предпоследней позиции ряда очень большие, положим, 10 000 или 100 000, но последнее значение чрезвычайно большое ( $10^{20}$ ). Это означает, что попытка использовать линейную интерполяцию между предпоследним и последним значением будет приводить к большим ошибкам. Предлагается использовать для хода в этом диапазоне экспоненциальную интерполяцию.

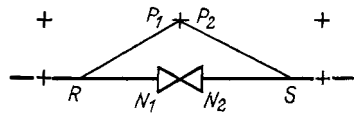


Рис. 7.8.

Для предпоследнего значения легко вычислить градиент кривой  $K$  и использовать его для определения одной из постоянных экспоненциальных кривых. Коэффициент  $K$  для закрытого положения клапана ( $10^{20}$ ) можно использовать при расчете второй постоянной. Автор и его сотрудники успешно используют логарифмическое представление всего ряда  $K$ .

Соответствующее значение  $K$  позволяет определить граничные условия для клапана с утечкой, такое устройство можно использовать для предотвращения полного запираания (см. § 6.18).

Обосновав методику определения  $K$  в любом положении закрывающегося клапана, можно рассчитать напоры и скорости в трубе по обе стороны клапана. Эти скорости не обязательно одинаковы, поскольку диаметры труб по обе стороны клапана не обязательно равны. Уравнения характеристик для системы, изображенной на рис. 7.8,

$$\frac{g}{c_R} (h_{P_1} - h_R) + (v_{P_1} - v_R) + \frac{2f_R v_R |v_R| dt}{d_R} = 0, \quad (7.20)$$

$$-\frac{g}{c_S} (h_{P_2} - h_S) + (v_{P_2} - v_S) + \frac{2f_S v_S |v_S| dt}{d_S} = 0, \quad (7.21)$$

Также

$$h_{p_1} - h_{p_2} = K \frac{v_{p_1}^2}{2g} \operatorname{sign}(v_{p_1}), \quad (7.22)$$

но

$$h_{p_1} = h_R - \frac{c_R}{g} (v_{p_1} - v_R) - \frac{c_R}{g} \left( \frac{2f_R v_R |v_R| dt}{d_R} \right)$$

и

$$h_{p_2} = h_S + \frac{c_S}{g} (v_{p_2} - v_S) + \frac{c_S}{g} \left( \frac{2f_S v_S |v_S| dt}{d_S} \right),$$

$$h_{p_1} - h_{p_2} = h_R - h_S - \left( \frac{c_R v_{p_1} + c_S v_{p_2}}{g} \right) + \left( \frac{c_R v_R + c_S v_S}{g} \right) -$$

$$\frac{2c_R f_R v_R |v_R| dt}{g d_R} - \frac{2c_S f_S v_S |v_S| dt}{g d_S},$$

$$\frac{K v_{p_1}^2}{2g} \operatorname{sign}(v_{p_1}) = h_R - h_S - \frac{(c_R v_{p_1} + c_S v_{p_1})}{g} +$$

$$+ \frac{c_R v_R + c_S v_S}{g} - \left( \frac{2f_R v_R |v_R| c_R dt}{g d_R} + \frac{2f_S v_S |v_S| c_S dt}{g d_S} \right). \quad (7.23)$$

Теперь

$$\frac{\pi}{4} d^2 v_{p_1} = \frac{\pi}{4} d^2 v_{p_2},$$

тогда

$$\frac{c_R v_{p_1} + c_S v_{p_2}}{g} = \left[ \frac{c_R + c_S (d_R/d_S)^2}{g} \right] v_{p_1}, \quad (7.24)$$

$$A v_{p_1}^2 + B v_{p_1} + C = 0, \quad (7.25)$$

где

$$A = \frac{K \operatorname{sign}(v_{p_1})}{2g},$$

$$B = \frac{c_R + c_S (d_R/d_S)^2}{g},$$

$$C = h_S - h_R - \left( \frac{c_R v_R + c_S v_S}{g} \right) + \frac{2f_R v_R |v_R| c_R dt}{g d_R} +$$

$$+ \frac{2f_S v_S |v_S| c_S dt}{g d_S}.$$

Тогда

$$v_{p_1} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; \quad (7.26)$$

$$v_{p_2} = (d_R/d_S)^2 v_{p_1}. \quad (7.27)$$

Подставив все снова в уравнение (7.20) и (7.21), можно рассчитать  $h_{p_1}$  и  $h_{p_2}$ . Величины  $V_R$ ,  $V_S$ ,  $f_R$ ,  $f_S$ ,  $c_R$  и  $c_S$  вычислены по только что описанному методу.

## 7.5. КЛАПАНЫ СО СЛЕДЯЩИМ ПРИВОДОМ

Эти клапаны наиболее важны, в дальнейшем с усовершенствованием эксплуатации трубопроводов они будут иметь широкое распространение. Они аналогичны клапанам с электроприводом (см. § 7.4), но управляются исполнительным механизмом, который действует от датчика давления, расположенного где-либо в системе. Эти датчики размещают непосредственно перед клапаном или за ним, но чаще их располагают в другой трубе, иногда далеко от клапана, которым он управляет. Обычно требуется, чтобы клапан начинал закрываться (или открываться), если давление вблизи датчика поднялось выше (или опустилось ниже) определенного критического значения. Если давление продолжает повышаться (или понижаться), клапан будет двигаться так, чтобы отрегулировать изменение давления, и при некотором другом критическом давлении клапан будет полностью закрыт (или открыт). Таким образом, клапан открывается или закрывается, когда давление у датчика изменяется в некотором диапазоне давлений. Если изменения давления будут происходить медленно, то клапан будет двигаться в соответствии с колебанием давления, но если изменения давления будут происходить быстро, то изменение хода клапана может совпадать с фазой изменения давления. (Отметим, что такое поведение может вызвать резонанс — этот эффект описан в гл. 9.)

Пусть ход клапана в некоторый момент времени  $s_i$  и пусть давление, измеряемое датчиком в этот же момент,  $h_{tr}$ . Следящий привод определит, что ход клапана для такого давления должен быть

$$S_{req} = c_S (h_{tr} - h_{crit}), \quad (7.28)$$

где  $s_{req}$  — требуемый ход;  $c_s$  — коэффициент пропорциональности, который показывает, как превышение давления датчика над опорным давлением преобразуется в требуемый ход клапана.

Если  $s_{req}$  не равно  $s_i$ , то двигатель приведет клапан в движение и ход будет или увеличиваться, или уменьшаться, пытаясь достичь  $s_{req}$ . Но в течение интервала времени  $\Delta t$  ход может достигнуть, а может и не достигнуть требуемого положения, таким образом, ход в конце интервала времени  $dt$  будет или  $s_{req}$ , или  $s_i \pm s_r dt$ , где  $s_r$  — скорость перемещения штока. Обозначив эту величину через  $s_f$ , вычислим текущее значение  $K$  для клапана и найдем напор до и после клапана, а также скорости точно таким же образом, как и для случая клапана с электроприводом. Знак  $\pm$  в приведенном выше выражении для величины  $s_f$  появляется из-за того, что клапан может открываться, в этом случае используется знак плюс, или закрываться, тогда используется знак минус. Это означает, что если  $c_s(h_{tr} - h_{crit})$  больше  $s_i$ , то используется знак плюс, если меньше  $s_i$ , то минус.

Итак,

$$s_f = s_i + \text{sign}(h_{tr} - h_{crit}) s_r \Delta t \quad (7.29)$$

до тех пор, пока  $s_f$  больше  $s_{req}$ , если клапан открывается, или меньше  $s_{req}$ , если клапан закрывается, или когда  $s_f = s_{req} = c_s(h_{tr} - h_{crit})$ .

Конечно, вычисленная таким образом  $s_f$  принимается за  $s_i$  в последующий момент  $\Delta t$  и так далее.

## 7.6. РЕЗЕРВУАРЫ

Резервуар может быть оборудован следующими четырьмя типами клапанов: 1) запорным, который может быть или открыт, или закрыт; 2) обратным, который обеспечивает течение только в резервуар; 3) обратным, который обеспечивает течение только из резервуара и 4) частично закрытым.

Включать отдельно в расчет частично закрытый клапан, по-видимому, не рационально, так как его легко представить в виде клапана с электроприводом, для которого известен весь ряд значений  $K$  и указано значение, соответствующее частично закрытому положению, и затем разместить его на расстоянии  $\Delta x$  от резервуара.

Время открытия клапана должно быть приравнено нулю в момент начала работы клапана, а время окончания работы клапана должно быть больше времени, моделируемого при расчете на ЭВМ. Такое представление частично закрытого клапана у резервуара имеет небольшую погрешность, требует несколько большего времени расчета на ЭВМ из-за вызова ряда значений  $K$  на каждом временном интервале, но экономит размер программы и объем памяти. Такой подход к решению является предпочтительным.

Для резервуара, у которого клапаны отсутствуют, потенциальный напор можно считать постоянным, если



Рис. 7.9.

его свободная поверхность относительно велика или уровень медленно изменяется.

Если резервуар — верховой (или низовой), то необходимо использовать обратную характеристику (или соответственно прямую), рис. 7.9:

$$\pm \frac{g}{c_{S/R}} (h_p - h_{S/R}) \pm (v_p - v_{S/R}) + \frac{2f_{S/R} v_{S/R} |v_{S/R}| \Delta t}{d_{S/R}} = 0. \quad (7.30)$$

Так как  $h_p = h_{res}$  — напору резервуара, то

$$v_p = v_{S/R} \pm \frac{g}{c_{S/R}} (h_{res} - h_{S/R}) - \frac{2f_{S/R} v_{S/R} |v_{S/R}| \Delta t}{d_{S/R}}. \quad (7.31)$$

В этих формулах знак минус для верхового резервуара, знак плюс — для низового. Если установлен обратный клапан, позволяющий вытекать жидкости из резервуара, то расчеты остаются справедливыми, но если при изменении направления течения  $v_p$  получит отрицательное значение, то полученное решение будет ошибочным, поскольку обратный клапан при этих условиях закроется и  $v_p$  следует приравнять нулю. Поэтому перед

расчетом необходимо проверить, какого типа установлен обратный клапан. Если это клапан, позволяющий вытекать жидкости из резервуара, и  $v_p$  положительно, то скорость  $v_p$  следует продолжать рассчитывать, а если  $v_p$  — отрицательно, то скорость следует приравнять нулю. Если обратный клапан не позволяет вытекать жидкости из резервуара, т. е. обеспечивает течение только в обратном направлении: втекание в верховой резервуар и вытекание из низового резервуара, то вычисление скорости можно продолжать, если она отрицательна, в противном случае ее следует приравнять нулю.

Если клапан управляемого типа, то он может быть полностью открыт или полностью закрыт: для первого случая расчет можно использовать, для второго случая  $v_p$  следует приравнять нулю независимо от ее значения или направления.

Далее следует снова вычислить  $h_p$ , если клапан закрыт, то напор у клапана больше не равен напору резервуара:

$$h_p = h_{S/R} \pm \frac{c_{S/R}}{g} \left[ v_p - v_{S/R} + \frac{2f_{S/R} v_{S/R} |v_{S/R}| \Delta t}{d_{S/R}} \right].$$

Заметим, что индекс  $S/R$  означает употребление знака  $S$  для верхового резервуара, знак  $R$  — для низового.

Если интересует только переходный режим, то указанная методика достаточна, так как уровень в резервуаре не может существенно измениться в течение очень короткого периода существования нестационарных условий.

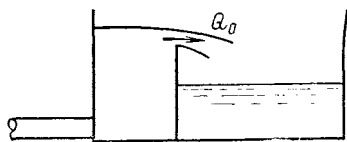


Рис. 7.10.

Если граничные условия в сети определяются не только простым резервуаром, а более сложными случаями,

например стоком из коллектора в люк, резервуаром малого сечения со сливом в канал, наличием тяжелых условий выхода из трубы в резервуар, наличием емкостей и т. д., то для расчета резервуара необходимо разработать новые программы.

Предположим, что граничные условия в сети определяются резервуаром с площадью сечения  $A$ , в который втекает жидкость из трубы (рис. 7.10). Как только уровень в резервуаре достигнет сливной кромки, начи-

нается истечение жидкости, и тогда площадь сечения резервуара рассматривается бесконечной.

Глубина резервуара с площадью  $A$  увеличивается в соответствии с уравнением

$$d_f = d_i + \frac{Q_p - Q_0}{A} \Delta t.$$

Если уровень жидкости в резервуаре выше, чем уровень сливной кромки порога, то расход  $Q_0 = kB(d_i - h_{sil})^n$ , где  $d_f$  — глубина в резервуаре в конце интервала  $\Delta t$ ;  $d_i$  — глубина в резервуаре в начале интервала  $\Delta t$ ;  $Q_p$  — расход через трубу;  $h_{sil}$  — высота сливной кромки порога относительно осевой линии трубы;  $A$  — площадь поверхности резервуара;  $B$  — ширина сливного отверстия;  $k$  — постоянная отверстия;  $n$  — показатель степени. При этом абсолютный потенциальный напор на выходе из трубы

$$h_p = d_f + z + h_a,$$

где  $z$  — положение осевой линии трубы в принятой системе координат;  $h_a$  — атмосферное давление, выраженное высотой столба жидкости.

Это чрезвычайно гибкая модель. Если принять площадь  $A$  очень большой, то можно смоделировать обычные условия для резервуара, если принять  $A$  малой, а  $B$  и  $n$  большими, то можно смоделировать условия начального повышения уровня в резервуаре и последующий постоянный уровень резервуара. Выбирая соответствующие значения, можно смоделировать резервуар с переливом. Имея характеристики  $H$ ,  $Q$  для почти любых низовых устройств, и проявив изобретательность при выборе подходящих значений  $k$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $h_{sil}$  и  $A$ , можно аппроксимировать эти кривые почти точно. С помощью такой программы можно реально представить многие граничные условия.

## 7.7. КОЛЕНА

Полностью закрепленные колена в трубопроводах не отражают входящие в них нестационарные волны. Но если колено зафиксировано не полностью, то увеличение силы, действующей на него при прохождении волны давления, приводит к растяжению участков, подходящих



к колену и отходящих от него, и колено соответственно будет смещаться. Это движение приведет к частичному отражению волны давления с противоположным знаком. Так как смещение определяется фундаментом колена, невозможно рассчитать отражение без моделирования поведения фундамента. Чтобы сделать это, нужна дополнительная информация о динамическом взаимодействии фундамента с породой, которая, как правило, отсутствует. Возникающие отрицательные отражения составляют примерно 10% входящей волны, но следует подчеркнуть, что эта цифра зависит от многих факторов. Обычно влияние колена сводится к ослаблению максимального давления, действующего на трубу со стороны колена, противоположному тому, в котором возникло нестационарное давление.

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ГАЗОВЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

#### 8.1. ВВЕДЕНИЕ

Методы, предложенные для расчета нестационарного течения в трубопроводных сетях, передающих жидкость, необходимо модифицировать, прежде чем применять их к сильно сжимаемым жидкостям, таким как газы.

Основные уравнения для газа по существу аналогичны тем, которые применимы к жидкостям.

#### 8.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

##### Уравнение неразрывности

Скорость изменения массы газа в элементарном участке длиной  $\Delta x$  пропорциональна разности между скоростями поступления и истечения газа из этого участка.

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A \delta x) &= \rho A v - \left( \rho A v + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A v) \delta x \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A v) &= 0; \\ A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + A v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho v \frac{\partial A}{\partial x} + A \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\rho v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

В газовых трубопроводах изменения давления не настолько велики, чтобы вызвать значительное расширение трубопровода, поэтому  $\frac{\partial A}{\partial t}$  очень мало и этим членом можно пренебречь.

Уравнение неразрывности, таким образом, преобразуется к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = 0. \quad (8.1)$$

### Уравнение движения

Применив второй закон Ньютона к газу на элементарном участке длиной  $\delta x$ , получим, что суммарная сила, действующая в направлении движения (т. е. в направлении возрастания  $x$ ), равняется скорости изменения количества движения газа, т. е.

$$\rho A - \left( \rho A + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A) \delta x \right) + \rho \frac{\partial A}{\partial x} \delta x - F \delta x = \rho A \delta x \frac{dv}{dt}.$$

Член  $\rho \frac{\partial A}{\partial x} \delta x$  — продольная сила, действующая на проекцию приращения площади в продольном направлении;  $F$  — сила трения, действующая на единицу длины трубопровода, т. е.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} (\rho A) + \rho \frac{\partial A}{\partial x} - F &= \rho A \frac{dv}{dt}; \\ A \frac{\partial \rho}{\partial x} + F + \rho A v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho A \frac{dv}{dt} &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{dv}{dt} + \frac{F}{A} &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

## Уравнение состояния газа

Для жидкости нет необходимости рассматривать уравнение состояния, но для газа уравнение состояния необходимо вследствие больших изменений плотности и температуры, обусловленных сжатием или расширением газа при неустановившемся движении.

Можно считать, что применение в соответствии с имеющимися условиями адиабатического, изотермического или политропического процесса является достаточным, но наилучшим методом является применение уравнения энергии, которое можно вывести следующим образом.

Внутренняя энергия единицы массы  $e$  идеального газа

$$e = C_v T = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho},$$

где  $C_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме, а также

$$e + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = C_p T,$$

где  $C_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $T$  — абсолютная температура.

Пусть  $s$  — периметр и  $q$  — тепловой поток в систему. Тогда приток тепла в элементарный участок равен  $qs\delta x$ . Скорость изменения энергии элемента по времени равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho A \delta x \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right].$$

Скорость, с которой энергия убывает из элемента в осевом направлении, равна  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho A v \left( e + \frac{v^2}{2} \right) \right] \delta x$ . Работа, совершаемая элементом против сил давления, равна  $\frac{\partial}{\partial x} (pAv) \delta x$ .

По первому закону термодинамики приток тепла равен изменению внутренней энергии плюс количество энергии, переданной из объема, плюс работа, совершаемая системой.

Объединяя эти уравнения с уравнением неразрывности и уравнением движения, получаем:

$$\frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{qs}{A} - \frac{Fv}{A} = 0. \quad (8.3)$$

### 8.3. УРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

С помощью метода, аналогичного тому, что применялся ранее, можно получить уравнения характеристик:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{c}{\gamma p} \frac{dp}{dt} = E_1 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = v + c; \quad (8.4)$$

$$\frac{dv}{dt} - \frac{c}{\gamma p} \frac{dp}{dt} = E_2 \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = v - c, \quad (8.5)$$

$$\frac{dp}{dt} - c^2 \frac{d\rho}{dt} = E_3, \quad \text{вдоль} \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad (8.6)$$

где

$$E_1 = \frac{\gamma-1}{c} \frac{q}{\rho m} + \frac{F}{\rho A} \left[ \frac{v(\gamma-1)}{c} - 1 \right] - \frac{vc}{A} \frac{\partial A}{\partial x}; \quad (8.7)$$

$$E_2 = -\frac{\gamma-1}{c} \frac{q}{\rho m} - \frac{F}{\rho A} \left[ \frac{v(\gamma-1)}{c} + 1 \right] + \frac{vc}{A} \frac{\partial A}{\partial x}; \quad (8.8)$$

$$E_3 = (\gamma-1) \left( \frac{g}{m} + \frac{Fv}{A} \right), \quad (8.9)$$

где  $m$  — средний гидравлический радиус канала;  $\frac{\partial A}{\partial x}$  — изменение площади поперечного сечения канала. В трубе с постоянным сечением канала  $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$ .

На рис. 8.1  $RP$  — прямая характеристика, удовлетворяющая (8.4);  $SP$  — обратная характеристика, удовлетворяющая (8.5);  $MP$  — траектория частиц, для нее справедливо (8.6).

Используя уравнения (8.4) и (8.5) в конечно-разностной форме и исключая  $v_p$ , получаем:

$$p_p = \frac{\gamma}{\left( \frac{c_R}{p_R} + \frac{c_s}{p_s} \right)} \left[ v_R - v_s + \frac{1}{\gamma} (c_R - c_s) \right] + (E_1 - E_2) dt. \quad (8.10)$$

Подставим  $p_P$  снова в конечно-разностное уравнение (8.4):

$$v_P = v_R + \frac{c_R}{\gamma p_R} (p_R - p_P) + E_1 dt. \quad (8.11)$$

Используя  $p_P$  в конечно-разностном уравнении (8.6), получаем:

$$p_P = p_M + \frac{1}{c^2_M} (p_P - p_M - E_3 dt). \quad (8.12)$$

Необходимые значения в точках  $R$ ,  $M$  и  $S$  можно получить интерполяцией, как было показано в гл. 4.

Величины в точке  $P$  можно вычислить с помощью уравнений (8.10)–(8.12). Аналогичным образом можно рассчитать любую промежуточную точку трубопровода,

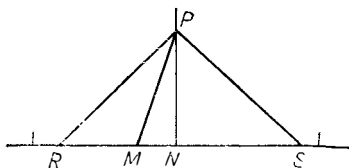


Рис. 8.1.

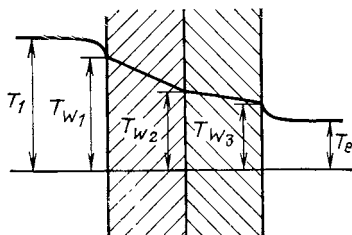


Рис. 8.2.

методы расчета подобны методам, которые были описаны ранее для жидкостей (см. гл. 4), но поскольку необходимо использовать три характеристики, расчет становится значительно более дорогостоящим и продолжительным.

Приведенное здесь описание очень близко соответствует аналогичному разделу книги Эджелля (Edgell) [16].

#### 8.4. ТЕПЛОВОЙ ПОТОК

Тепловой поток  $q$  — количество тепла, отнесенное на единицу площади стенки трубы. Для большинства газов считается, что для точной оценки достаточно вычислить  $q$  на базе квазистационарного потока тепла, т. е. предполагается, что в любой момент времени стационар-

ный поток тепла через стенку трубопровода пропорционален разности температур. При этом пренебрегается теплом, необходимым для повышения (или понижения) температуры материала стенки трубы.

Если считается, что квазистационарный метод определения теплового потока применим, то  $q$  можно оценить следующим образом.

Применим закон Ньютона для переноса тепла, т. е.

$$q = C \Delta T_e,$$

где  $\Delta T_e$  — разность температур.

В стационарном случае для схемы на рис. 8.2

$$\begin{aligned} q &= C_f (T_1 - T_{w_1}) = C_{w_1} (T_{w_1} - T_{w_2}) = C_{w_2} (T_{w_2} - T_{w_3}) = \\ &= C_{w_3} (T_{w_3} - T_e), \end{aligned} \quad (8.13)$$

где  $C_f$  — коэффициент теплоотдачи от жидкости к стенке;  $C_{w_1}$  — коэффициент теплопередачи через стенку;  $C_{w_2}$  — коэффициент теплопередачи через изоляции и  $C_{w_3}$  — коэффициент теплоотдачи изоляции в окружающую среду

$$\frac{q}{C_f} = T_1 - T_{w_1};$$

$$\frac{q}{C_{w_1}} = T_{w_1} - T_{w_2};$$

$$\frac{q}{C_{w_2}} = T_{w_2} - T_{w_3};$$

$$\frac{q}{C_{w_3}} = T_{w_3} - T_e;$$

$$q \left( \frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_{w_1}} + \frac{1}{C_{w_2}} + \frac{1}{C_{w_3}} \right) = T_1 - T_e;$$

$$q = \frac{T_1 - T_e}{\frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_{w_1}} + \frac{1}{C_{w_2}} + \frac{1}{C_{w_3}}};$$

$$C_c = \frac{1}{\frac{1}{C_f} + \frac{1}{C_{w_1}} + \frac{1}{C_{w_2}} + \frac{1}{C_{w_3}}}, \quad (8.14)$$

где  $C_c$  — эквивалентный коэффициент теплопередачи, т. е.

$$q = C_c (T_1 - T_e). \quad (8.15)$$

Теперь осталось только вычислить  $C_f$ ,  $C_{w_1}$ ,  $C_{w_2}$  и  $C_{w_3}$ .

### Передача тепла от газа к стенке трубы

В ламинарном потоке

$$C_f = 1,86 \frac{K}{d} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0,14} \left( \frac{\rho v^3 d}{\mu} \frac{c\mu}{K} \frac{d}{L} \right)^{0,33}, \quad (8.16)$$

где  $C_f$  — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $K$  — теплопроводность жидкости, Вт/(м·К);  $c$  — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $\mu_w$  — динамическая вязкость жидкости при температуре стенки трубы, кг/(м·с);  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости, кг/(м·с);  $d$  — внутренний диаметр трубы, м;  $L$  — длина трубы, м;  $v$  — средняя скорость потока;  $\rho$  — массовая плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>.

В турбулентном потоке ( $Re > 2300$ )

$$C_f = 0,027 \frac{K}{d} \left( \frac{dv}{\nu} \right)^{0,8} \left( \frac{c\mu}{K} \right)^{0,33} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0,14}, \quad (8.17)$$

где  $d$  — внутренний диаметр трубы;  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости при температуре, равной температуре жидкости.

### Теплопередача через стенку трубы

Приведенный коэффициент теплопроводности однослойной цилиндрической стенки

$$C_{w_1} = \frac{2\pi K}{\ln(d_{w_2}/d_{w_1})}, \quad (8.18)^*$$

где  $K$  — теплопроводность материала стенки трубы, Вт/(м·К);  $d_{w_1}$  — внутренний диаметр трубы;  $d_{w_2}$  — внешний диаметр трубы.

\* Необходимо обратить внимание на замечание автора, что коэффициенты  $C_{w_1}$ ,  $C_{w_2}$  в формулах (8.13) и (8.14) имеют размерности указанных коэффициентов в формулах (8.18), (8.19), (8.21). — Прим. перев.

## Теплопередача через изоляцию трубы

Так же как и для теплопередачи через стенку трубы

$$C_{w_2} = \frac{2\pi K}{\ln(d_{w_3}/d_{w_2})}, \quad (8.19)$$

где  $K$  — теплопроводность изоляции;  $d_{w_2}$  — внутренний диаметр изоляции;  $d_{w_3}$  — внешний диаметр изоляции.

Заметим, что коэффициенты  $C_{w_1}$  и  $C_{w_2}$  определяют потери тепла на единицу длины трубы, Вт/(м·К). Они отличаются от  $C_f$  и  $C_{w_3}$  [см. (8.21)], которые определяют потери тепла на единицу площади стенок трубы.

## Теплоотдача в окружающую среду

Если окружающая среда воздух, то

$$C_{w_3} = \frac{0,24K}{d_{w_3}} \text{Re}^{0,6}. \quad (8.20)$$

Здесь  $C_{w_3}$  — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $d_{w_3}$  —

внешний диаметр изоляции;  $K$  — теплопроводность воздуха, Вт/(м·К);  $\text{Re} = vd/\nu$  — число Рейнольдса, где  $v$  — скорость потока, м/с.

Если окружающая среда — грунт (т. е. для подземного трубопровода), то приведенный коэффициент теплопроводности

$$C_{w_3} = \frac{2\pi K}{\ln(Z/d_{w_3})}, \quad (8.21)$$

где  $Z$  — расстояние до оси трубопровода, м;  $d_{w_3}$  — внешний диаметр изоляции;  $K$  — теплопроводность грунта, Вт/(м·К).

Если поток в трубопроводе ламинарный (наиболее неблагоприятный случай для газовых трубопроводов), то  $C_{w_1}$  зависит от разности температур  $T_1 - T_{w_1}$ , но поскольку  $T_{w_1}$  неизвестна, следует использовать итерационный метод решения.



Если квазистационарное приближение для потока тепла не является достаточно точным, можно применить более точный метод. Он основывается на уравнении теплопроводности, т. е.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (8.22)$$

где  $\alpha = K/\rho C$ ;  $\theta$  — разность температур.

Это уравнение можно решить методом конечных разностей, но поскольку это приведет к значительному усложнению программы, этот метод не рекомендуется.

## 8.5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Решения на границах могут быть получены методами, аналогичными тем, которые были описаны для жидкостей. При почти полном сходстве уравнения сложнее и обычно их следует решать итерационными методами, такими как метод возмущений или метод Ньютона—Рафсона (Newton — Raphson).

Граничные условия в газовых трубопроводах, определяемые резервуаром, турбовентилятором или компрессором, и принцип их работы те же, что насосов в жидкостных трубопроводах, поэтому их расчет следует производить аналогичным образом.

Удельная энергия, передаваемая газу, рассчитывается с помощью уравнения

$$H = AN^2 + BNQ - CQ^2,$$

где  $Q$  — расход при давлении и температуре на входе,  $\text{м}^3/\text{с}$ .

Зависимость  $H—Q$  выдается изготовителем вентиляторов аналогично тому, как это делают изготовители насосов.

Если  $H$  определено по расходу, то давление можно вычислить по формуле

$$H = RT_1 \left( \frac{n}{n-1} \right) \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right], \quad (8.23)$$

где  $n$  — показатель политропы;  $p_2$  — давление на выходе;  $p_1$  — давление на входе;  $T_1$  — температура на входе

(абсолютная).  $n$  можно оценить по формуле

$$\frac{n-1}{n} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{e_p}, \quad (8.24)$$

где  $e_p$  — политропический к. п. д. вентилятора. Политропический к. п. д. должен быть известен или определен из эксперимента.

Граничные условия, определяемые соединениями труб, могут быть рассчитаны с помощью тех же методов, которые были описаны для жидкости, но с использованием уравнений для газа.

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### АНАЛОГОВЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТРУБОПРОВОДОВ

#### 9.1. ВВЕДЕНИЕ

В трубопроводах может возникнуть резонанс. Работа органичных труб и других воздушных музыкальных инструментов основана на возникновении резонанса. Небольшие вынужденные колебания давления или расхода могут накладываться друг на друга, если их собственная частота кратна фазе гидравлического удара и это приведет к образованию стоячей волны большой амплитуды. Это явление стало причиной больших аварий: трубопроводы разрывались при наложении вынужденных колебаний с малой амплитудой.

Колебания клапана являются одной из причин, которые возбуждают небольшие изменения давления или расхода. Очень распространено это явление в бытовых водопроводных трубах. Когда уровень воды в цистерне поднимается, то поднимается шар, который постепенно перекрывает отверстие. Когда отверстие почти закроется, незначительное перемещение клапана перекрывает поток воды, что вызывает волну сжатия в подводящей трубе. Увеличение давления вынуждает клапан отойти от уплотнения, снова через клапан устремляется поток жидкости и возникает волна разрежения, которая движется по трубе вслед за первоначальной волной сжатия. Клапан прижимается к седлу под влиянием силы, дей-

ствующей на шар. Резиновое седло клапана и массу его двигающихся частей можно представить как некую систему, обладающую собственной частотой колебаний. Если какая-либо гармоническая частота трубопровода (т. е. частота, кратная основной частоте  $C/4L$ ), совпадает с собственной частотой клапана, то возникнет резонанс. При этом по всему дому можно слышать низкочастотное гудение водопроводных труб, и если это будет продолжаться достаточно долго, труба может разрушиться. Чтобы устранить гудение, достаточно ликвидировать вибрацию шара, дотронувшись до него. Чтобы устранить причины возникновения вибрации, необходимо изменить гидравлические параметры или механическую характеристику шарового клапана. Заменой резинового седла клапана можно повлиять на его жесткость, что соответствует изменению константы, характеризующей упругость системы. Такое изменение предотвращает вынужденный резонанс, но обычно резина меняет свою жесткость со временем, и проблема может возникнуть снова. Путем прикрепления квадратной пластины к основанию шара в горизонтальном положении изменяют массу шара и плечо, таким образом увеличивается демпфирование из-за трения. Можно применить трубу большего диаметра, в которой скорости и пульсации скоростей меньше. При этом возникают меньшие нестационарные перепады давления, что уменьшает амплитуду вынужденной вибрации. Демпфирование из-за трения, всегда присутствующее в системе, может оказаться достаточным для того, чтобы предотвратить развитие резонанса.

Этот простой пример иллюстрирует многочисленные особенности, которые имеют место в больших трубопроводных системах.

На гидроэлектростанциях, например, источниками возникновения резонанса могут быть различные механизмы. В бассейне, снабжающем систему, ветер может поднять волны до 1,5—3 м высотой и частота волны может совпасть с гармонической или основной частотой трубопроводной системы, что приведет к возникновению резонанса. Большие трубы обычно перекрывают дроссельными задвижками. Если по каким-либо причинам появляется течь через уплотнение, и поэтому оно становится не полностью герметичным, утечка жидкости может вызвать вибрацию, которая образует малые волны сжатия, распространяющиеся вверх по трубе. Как было

описано выше, это может вызвать резонанс и разрушить трубу при кажущемся отсутствии течения по трубе.

Клапаны с авторегулированием также могут вызывать резонанс, если их собственная частота совпадает с собственной частотой трубопровода, а демпфирование недостаточно. Примерами таких клапанов являются управляемые регулятором игольчатые клапаны ковшовых турбин (Пельтона) и направляющие лопатки радиально-осевых турбин (Френсиса). Следует подчеркнуть, что оценка вероятности возникновения резонанса представляет не только чисто академический интерес, но имеет и реальную практическую важность. Если существует малейшая вероятность возникновения резонанса, то с помощью расчета необходимо оценить ее и убедиться, что принятые меры достаточно эффективны.

Расчет резонанса можно сделать с помощью метода характеристик, как было показано в предыдущих главах, и при отсутствии более совершенных методов он может служить одной из альтернатив. Однако существует аналитический метод, который столь же точен и позволяет получить решение на ЭВМ намного быстрее, чем при расчете по методу характеристик.

## 9.2. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ И ГИДРАВЛИЧЕСКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Метод основан на аналогии между электрическим током и течением жидкости. В теории передачи переменного тока по линиям электропередачи используются два уравнения, которые имеют большое сходство с уравнениями гидравлического удара. Это видно при сравнении уравнений (9.1) и (9.3) и (9.2) и (9.4).

Для электрической линии

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{C} \frac{\partial i}{\partial x} = 0; \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + R_{el} i = 0, \quad (9.2)$$

для трубопровода

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2fv|v|}{gd} = 0. \quad (9.4)$$

Для (9.1) и (9.2)  $C$  — емкость на единицу длины;  $L$  — индуктивность на единицу длины;  $R_{el}$  — сопротивление на единицу длины линии;  $V$  — напряжение;  $i$  — ток.

В уравнениях гидравлического удара использованы обозначения, принятые в данной книге.

Если потенциальный напор рассматривать как аналог напряжения  $V$  и расход  $Av$  как аналог тока  $i$ , и если членом  $v \frac{\partial h}{\partial x}$  в (9.3) и членом  $\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x}$  в (9.4) можно пренебречь, то сходство становится полным при условии, что член  $\frac{2fv|v|}{d}$  можно линеаризовать.

Член  $v \frac{\partial h}{\partial x}$  мал по сравнению с  $\frac{\partial h}{\partial t}$ , когда скорость волны велика, поскольку  $\frac{\partial h}{\partial t} \approx (v + c) \frac{\partial h}{\partial x}$ . Поэтому если предположить, что  $c$  — постоянная и значение ее велико, то в (9.3) этим членом можно пренебречь; аналогично в (9.4) член  $\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x}$  мал по сравнению с другими членами, если  $c$  велико и постоянно, то при этих обстоятельствах им можно пренебречь.

Теперь уравнения (9.3) и (9.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial q}{\partial x} = 0; \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2fq|q|}{A^2gd} = 0. \quad (9.6)$$

### 9.3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

Выражение  $\frac{2fq|q|}{A^2gd}$  линеаризовать нельзя, но если расход  $q$  представить суммой постоянной и переменной составляющих, то это выражение можно линеаризовать.

Таким образом, пусть  $q = \bar{q} + q'$ , где  $\bar{q}$  — постоянный стационарный расход и  $q'$  — переменная составляющая

расхода. Тогда

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial q'}{\partial x}.$$

По определению  $\frac{\partial \bar{q}}{\partial x}$  равно нулю, поскольку  $\bar{q}$  — постоянно по всей длине трубы, поэтому

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q'}{\partial x}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial q'}{\partial t}$$

и  $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0$ , поскольку расход  $\bar{q}$ , являясь стационарным, не может изменяться по времени, поэтому

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q'}{\partial t}.$$

Аналогично и напор  $h$  можно разбить на постоянную и переменную составляющие, т. е.

$$h = \bar{h} + h'.$$

Поскольку  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$  — гидравлический градиент, то он равен  $-\frac{2f\bar{q}|\bar{q}|}{g d A^2}$ . Величина  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0$ , поскольку стационарная составляющая напора не может меняться по времени. Отсюда (9.5)

$$\frac{\partial (\bar{h} + h')}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial (\bar{q} + q')}{\partial x} = 0$$

переходит в

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial q'}{\partial x} = 0, \quad (9.7)$$

и уравнение (9.6)

$$\frac{\partial (\bar{h} + h')}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial (\bar{q} + q')}{\partial t} + \frac{2f(\bar{q} + q')|\bar{q} + q'|}{g d A^2} = 0 \quad (9.8)$$

переходит в

$$-\frac{2f\bar{q}|\bar{q}|}{g d A^2} + \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{2f(\bar{q} + q')|\bar{q} + q'|}{g d A^2} = 0. \quad (9.9)$$

Если провести аналогию между трением и сопротивлением, то  $f$  следует считать постоянной и равной  $f_0$ , а для того, чтобы это сделать, члены

$$\frac{2f\bar{q}|\bar{q}|}{g d A^2} \text{ и } \frac{2f(\bar{q}+q')|\bar{q}+q'|}{g d A^2}$$

следует переписать в виде

$$\frac{2f_0\bar{q}^n}{g d A^n} \text{ и } \frac{2f_0(\bar{q}+q')^n}{g d A^n},$$

где  $n$  принимает значение между 1,75 и 2,0 в зависимости от шероховатости трубы. Тогда  $\frac{2f_0(\bar{q}+q')^n}{g d A^n}$  можно представить с помощью биномиального разложения, как

$$\begin{aligned} \frac{2f_0(\bar{q}+q')^n}{g d A^n} = \frac{2f_0}{g d A^n} & \left( \bar{q}^n + n\bar{q}^{n-1}q' + \right. \\ & \left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \bar{q}^{n-2}q'^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

Если  $q'$  мало по сравнению с  $q$ , то членами второго порядка можно пренебречь, поэтому

$$\frac{2f_0(\bar{q}+q')^n}{g d A^n} = \frac{2f_0\bar{q}^n}{g d A^n} + \frac{2nf_0\bar{q}^{n-1}q'}{g d A^n},$$

тогда (9.9) переписывается в виде

$$\frac{-2f_0\bar{q}^n}{g d A^n} + \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{1}{g A} \frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{2f_0\bar{q}^n}{g d A^n} + \frac{2nf_0\bar{q}^{n-1}q'}{g d A^n} = 0.$$

Следовательно, при сокращении

$$\frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{1}{g A} \frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{2nf_0\bar{q}^{n-1}q'}{g d A^n} = 0. \quad (9.10)$$

Обозначим  $\frac{2nf_0\bar{q}^{n-1}}{g d A^n}$  через  $R$ .

Тогда уравнения гидравлического удара будут иметь вид:

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{c^2}{g A} \frac{\partial q'}{\partial x} = 0; \quad [9.*7]$$

$$\frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{1}{g A} \frac{\partial q'}{\partial t} + Rq' = 0 \quad (9.11)$$

Сравнивая их с уравнениями электрического тока

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{C} \frac{\partial i}{\partial x} = 0; \quad [9.1]$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + R_{el} i = 0, \quad [9.2]$$

можно заметить, что гидравлическим эквивалентом емкости  $C$  на единицу длины является  $gA/c^2$ , гидравлическим эквивалентом индуктивности на единицу длины  $L$  — величина  $l/gA$  и гидравлическим эквивалентом сопротивления на единицу длины  $R_{el}$  — величина  $R$ , которая равна  $\frac{2f_0 \bar{q}^{n-1}}{g^2 A^n}$ .

Если поток — ламинарный, то по формуле Хагена—Пуазейля  $R = \frac{32\nu}{gd^2A}$ .

#### 9.4. РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

Дифференцируем уравнение (9.7) один раз по времени

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = -\frac{c^2}{gA} \frac{\partial^2 q'}{\partial x \partial t},$$

отсюда

$$\frac{\partial^2 q'}{\partial x \partial t} = -\frac{gA}{c^2} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}.$$

Перепишем (9.11) в другом виде:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = -gA \left( \frac{\partial h'}{\partial x} + Rq' \right).$$

Дифференцируем по  $x$

$$\frac{\partial^2 q'}{\partial x \partial t} = -gA \left( \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + R \frac{\partial q'}{\partial x} \right),$$

отсюда

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + R \frac{\partial q'}{\partial x},$$



но  $\frac{\partial q'}{\partial x} = -\frac{gA}{c^2} \frac{\partial h'}{\partial t}$  из уравнения (9.7), поэтому

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - g \frac{RA}{c^2} \frac{\partial h'}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = 0. \quad (9.12)$$

Это волновое уравнение [ср. уравнение (2.18), в котором трением пренебрегалось].

Если предполагается, что волновая скорость постоянна, хотя волна может ослабляться при движении вдоль трубы, амплитуда колеблющейся волны не изменится в любой точке трубопровода. Таким образом, в случае синусоидальной волны сжатия, приложенной к концу трубопровода, расположенному вверх по потоку, решение уравнения (9.12) должно иметь вид:

$$h' = He^{i\Omega t},$$

где  $H$  — амплитуда волны, т. е. в точке  $x=0$

$$h'_{x_0} = H_{x_0} e^{i\Omega t},$$

в точке  $x = x_1$

$$h_{x_1} = H_{x_1} e^{i\Omega t}.$$

Заметим  $e^{i\Omega t} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t$ , где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\Omega = 2\pi f$ ,  $f$  — частота колебаний, отсюда

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} e^{i\Omega t},$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = i\Omega H e^{i\Omega t},$$

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} = -\Omega^2 H e^{i\Omega t}.$$

Подставим эти величины в уравнение (9.12):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} e^{i\Omega t} - g \frac{RA}{c^2} i\Omega H e^{i\Omega t} + \frac{\Omega^2}{c^2} H e^{i\Omega t} = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{Ag\Omega}{c^2} \left( -\frac{\Omega}{gA} + iR \right) H. \quad (9.13)$$

Обозначим  $\frac{Ag\Omega}{c^2} \left( -\frac{\Omega}{gA} + iR \right)$  через  $\gamma^2$ , тогда

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \gamma^2 H. \quad (9.14)$$

где  $\gamma$  — постоянная распространения,

Уравнение (9.14) широко известно и называется вблновым уравнением.

Решение (9.14) имеет вид:

$$\dot{H} = C_1 e^{mx},$$

тогда

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} = C_1 m^2 e^{mx}.$$

Здесь

$$C_1 m^2 e^{mx} = \gamma^2 C_1 e^{mx}$$

и

$$m^2 = \gamma^2,$$

отсюда

$$m = \pm \gamma.$$

Искомое решение, таким образом, есть  $H = ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}$ , где  $a$  и  $b$  — константы. Таким образом,

$$h' = (ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}) e^{i\Omega t}. \quad (9.15)$$

Чтобы получить решение для  $q'$ , продифференцируем уравнение (9.15):

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = i\Omega (ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}) e^{i\Omega t},$$

но из уравнения (9.7) имеем:

$$\frac{\partial q'}{\partial x} = -\frac{gA}{c^2} \frac{\partial h'}{\partial t},$$

отсюда

$$q' = -\frac{gA}{c^2} i\Omega e^{i\Omega t} \int (ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}) dx$$

и

$$q' = g \frac{A\Omega}{ic^2\gamma} e^{i\Omega t} [ae^{\gamma x} - be^{-\gamma x}]. \quad (9.16)$$

Это и есть общее решение волнового уравнения для произвольного синусоидального колебания.

## 9.5. ОЦЕНКА ПОСТОЯННОЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ $\gamma$

Постоянная  $\gamma$  — комплексная величина по определению [уравнения (9.13) и (9.14)], поэтому ее можно представить в виде

$$\gamma = \alpha + i\beta.$$

Рассмотрим диаграмму Муавра [Moivre] (рис. 9.1).

Если  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные действительные числа, то  $\gamma$  должно находиться в первом квадранте. В этом случае

$$\gamma^2 = -\frac{\Omega^2}{c^2} + \frac{iA\Omega R}{c^2}.$$

Действительная часть  $\gamma^2$  — отрицательная величина, а мнимая — положительная, поэтому  $\gamma^2$  должно лежать

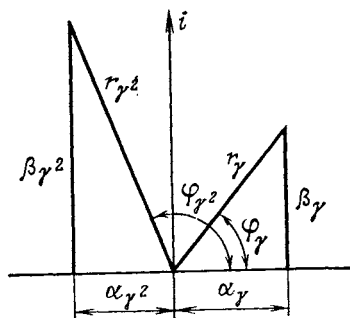


Рис. 9.1.

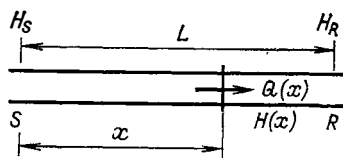


Рис. 9.2.

во втором квадранте. В этом случае

$$\gamma^2 = (\alpha + i\beta)^2 = r_{\gamma^2} e^{i\varphi_{\gamma^2}};$$

$$\gamma = \alpha + i\beta = r_{\gamma} e^{i\varphi_{\gamma}};$$

$$r_{\gamma^2} = (r_{\gamma})^2.$$

$\varphi_{\gamma^2} = 2\varphi_{\gamma}$  — из теории комплексных чисел.

Следовательно,

$$r_{\gamma} = \sqrt{\alpha_{\gamma}^2 + \beta_{\gamma}^2};$$

$$r_{\gamma^2} = \sqrt{\alpha_{\gamma^2}^2 + \beta_{\gamma^2}^2}.$$

Далее

$$\alpha_{\Gamma^2} = -\frac{\Omega^2}{c^2};$$
$$\beta_{\Gamma^2} = \frac{Ag\Omega R}{c^2};$$

отсюда

$$r_{\Gamma^2} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{c^4} + \frac{A^2 g^2 R^2 \Omega^2}{c^4}},$$

т. е.

$$r_{\Gamma^2} = \frac{Ag\Omega}{c^2} \sqrt{\left(\frac{\Omega}{gA}\right)^2 + R^2};$$
$$\varphi_{\Gamma^2} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\beta_{\Gamma^2}}{\alpha_{\Gamma^2}},$$

т. е.

$$\varphi_{\Gamma^2} = \pi \operatorname{arctg} \frac{RgA}{\Omega}.$$

Далее

$$\varphi_{\Gamma} = \frac{1}{2} \varphi_{\Gamma^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{RgA}{\Omega};$$

$$r_{\Gamma} = \sqrt{r_{\Gamma^2}} = \sqrt{\frac{AgR}{c^2} \left[ \left(\frac{\Omega}{gA}\right)^2 + R^2 \right]^{1/4}},$$

но

$$\alpha_{\Gamma} = r_{\Gamma} \cos \varphi_{\Gamma},$$

тогда

$$\alpha_{\Gamma} = \sqrt{\frac{Ag\Omega}{c^2} \left[ \left(\frac{\Omega}{gA}\right)^2 + R^2 \right]^{1/4}} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{RgA}{\Omega} \right),$$

поскольку

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \lambda \right) = \sin \lambda,$$

то

$$\alpha_{\Gamma} = \sqrt{\frac{Ag\Omega}{c^2} \left[ \left(\frac{\Omega}{gA}\right)^2 + R^2 \right]^{1/4}} \sin \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{RgA}{\Omega} \right], \quad (9.17)$$

$$\beta_{\Gamma} = r_{\Gamma} \sin \varphi_{\Gamma},$$

тогда

$$\beta_{\gamma} = \sqrt{\frac{A_{\rho}\Omega}{c^2} \left[ \left( \frac{\Omega}{gA} \right)^2 + R^2 \right]^{1/4} \cos \left( \frac{1}{2} \arctg \frac{RgA}{\Omega} \right)}. \quad (9.18)$$

## 9.6. ПОНЯТИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Возможность возникновения резонанса в электрической цепи можно оценить из анализа зависимости сопротивления от частоты напряжения подаваемого сигнала. Этот же метод можно применять и для условий нестационарного потока в трубопроводной сети. Понятие гидравлическое сопротивление основано на аналогии между электрическими и гидравлическими параметрами, т. е. напряжением и напором, током и расходом. Электрическое сопротивление определяется как отношение падения напряжения к току, аналогично гидравлическое сопротивление определяется как отношение  $h'/q'$ . Поскольку в электротехнике постоянные составляющие напряжения и тока не учитываются, то и в гидравлике постоянными составляющими напора и расхода тоже пренебрегают.

Таким образом,

$$Z(x) = h' / q';$$

$$Z(x) = \frac{ic^2\gamma}{gA\Omega} \left( \frac{ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}}{ae^{\gamma x} - b^{-\gamma x}} \right). \quad (9.19)$$

Член

$$\frac{-ic^2\gamma}{gA\Omega} = \frac{c^2\gamma}{igA\Omega}$$

имеет размерность сопротивления. Он называется характеристическим сопротивлением и обозначается  $Z_c$ .

На конце очень длинной линии обе величины  $h'$  и  $q'$  будут стремиться к бесконечности, если  $a$  не равно нулю.

Отсюда сопротивление бесконечно длинной линии будет

$$Z_{\infty} = -Z_c,$$

поэтому  $-Z_c$  — это сопротивление бесконечно длинного трубопровода в направлении  $x$ , а  $+Z_c$  — сопротивление трубопровода в направлении  $-x$ .

В бесконечном трубопроводе не может быть отраженных волн, двигающихся в направлении, противоположном движению прямой волны, поэтому понятие характе-

ристического сопротивления связано только с напорами и расходами волны, движущейся в одном направлении.

Так как  $Z_c = \frac{c^2 \gamma}{igA\Omega}$ , то, подставив вместо  $\gamma$  ее значение, получим:

$$Z_c = \frac{+c^2 (\beta_\gamma - i\alpha_\gamma)}{gA\Omega}. \quad (9.20)$$

### 9.7. ВЕРХОВОЙ И НИЗОВОЙ КОНЦЫ ТРУБОПРОВОДА

Принимаем для верхового конца трубопровода  $x=0$ , а для низового —  $x=L$ , вынужденные колебания давления приложены в точке  $x=0$ . Индексом  $S$  обозначается верховой конец,  $R$  — низовой.

### 9.8. УРАВНЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Изменение сопротивления от одного конца трубы к другому будет выведено ниже. Согласно рис. 9.2 в точке  $x$  переменная составляющая напора

$$h'_x = H_x e^{i\Omega t},$$

и расход  $q'_x = Q_x e^{i\Omega t}$ , где  $H_x$  — амплитуда колебания напора в точке  $x$  и  $Q_x$  — амплитуда соответствующего колебания расхода в точке  $x$ .

При  $x=0$

$$h'_0 = H_0 e^{i\Omega t} = H_S e^{i\Omega t};$$

$$q'_0 = Q_0 e^{i\Omega t} = Q_S e^{i\Omega t}.$$

Из уравнения (9.15)

$$h'_0 = H_S e^{i\Omega t} = (ae^{\gamma x_0} + be^{-\gamma x_0}) e^{i\Omega t},$$

$$H_S = a + b. \quad (9.21)$$

Аналогично для  $q'$  из уравнения (9.16)

$$q'_0 = Q_S e^{i\Omega t} = \frac{gA\Omega}{ic^2\gamma} (ae^{\gamma x_0} - be^{-\gamma x_0}) e^{i\Omega t},$$

$$Q_S = \frac{gA\Omega}{ic^2\gamma} (a - b). \quad (9.22)$$

Складываем уравнения (9.22) и (9.21):

$$2a = H_S + \frac{ic^2\gamma}{gA\Omega} Q_S,$$

т. е.

$$a = \frac{1}{2} (H_S - Z_c Q_S),$$

отсюда

$$b = \frac{1}{2} (H_S + Z_c Q_S),$$

т. е.

$$h'_x = e^{i\Omega t} \left[ \frac{1}{2} (H_S - Z_c Q_S) e^{\gamma x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (H_S + Z_c Q_S) e^{-\gamma x} \right] = e^{i\Omega t} \left[ H_S \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) - \right. \\ \left. - Z_c Q_S \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) \right],$$

но

$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = \text{ch}(\gamma x);$$

$$\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \text{sh}(\gamma x),$$

т. е.

$$h'_x = e^{i\Omega t} [H_S \text{ch}(\gamma x) - Z_c Q_S \text{sh}(\gamma x)].$$

Аналогично

$$q'_x = e^{i\Omega t} \left[ -\frac{H_S}{Z_c} \text{sh}(\gamma x) + Q_S \text{ch}(\gamma x) \right],$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 Z_x &= \frac{h'_x}{q'_x} = \frac{H_S \operatorname{ch}(\gamma x) - Z_c Q_S \operatorname{ch}(\gamma x)}{-\frac{H_S}{Z_c} \operatorname{sh}(\gamma x) + Q_S \operatorname{ch}(\gamma x)} = \\
 &= \frac{H_S - Z_c Q_S \operatorname{th}(\gamma x)}{Q_S - \frac{H_S}{Z_c} \operatorname{th}(\gamma x)}, \\
 Z_x &= \frac{Z_S - Z_c \operatorname{th}(\gamma x)}{1 - \frac{Z_S}{Z_c} \operatorname{th}(\gamma x)}.
 \end{aligned}$$

При  $x=0$   $\operatorname{th}(\gamma x) = 0$  и приведенный выше результат сводится к простому уравнению

$$Z_0 = Z_S.$$

При  $x=L$

$$Z_L = Z_R = \frac{Z_S - Z_c \operatorname{th}(\gamma L)}{1 - \frac{Z_S}{Z_c} \operatorname{th}(\gamma L)}. \quad (9.23)$$

Выражаем снова  $Z_S$  через  $Z_R$  из уравнения (9.23)

$$Z_S = \frac{Z_R + Z_c \operatorname{th}(\gamma L)}{1 + \frac{Z_R}{Z_c} \operatorname{th}(\gamma L)}. \quad (9.24)$$

С помощью этих выражений для  $Z_S$  и  $Z_R$  можно вычислить изменения сопротивления от одного конца трубы к другому.

## 9.9. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В предыдущих главах рассматривались граничные условия и обсуждалось, как они взаимодействуют с прямыми волнами и как в результате возникают отраженные волны.

Аналогичным образом необходимо описать граничные условия в сети с резонансом, так чтобы можно было определить сопротивление отдельной трубы, а затем вычислить сопротивление всего трубопровода.



## Резервуары

Напор в резервуарах строго контролируется и должен быть равен уровню жидкости в резервуаре относительно линии отсчета. Таким образом,  $h$  равно высоте уровня и  $h'$  равно нулю.

Следовательно, для резервуара  $h'/q'=0$  независимо от расхода, т. е.

$$Z=0. \quad (9.25)$$

## Незаполненный конец трубопровода

В незаполненном конце трубы расход должен быть равен нулю независимо от напора, поэтому  $\bar{q}$  и  $q'$  равны нулю:

$$Z = \frac{h'}{q'} = \infty. \quad (9.26)$$

## Сложные соединения труб

В месте соединения труб напор одинаков для всех труб, т. е.

$$\Sigma q_{in} = \Sigma q_{out},$$

$$\Sigma q'_{in} = \Sigma q'_{out},$$

поэтому можно написать

$$\Sigma \frac{q'_{in}}{h'} = \Sigma \frac{q'_{out}}{h'},$$

$$\Sigma \frac{1}{Z_{in}} = \Sigma \frac{1}{Z_{out}}.$$

Рассмотрим соединение из четырех труб (рис. 9.3). Предположим, что  $Z_{S_3}$ ,  $Z_{S_4}$  и  $Z_{R_2}$  уже определены. Тогда

$$\frac{1}{Z_{R_1}} = \left( -\frac{1}{Z_{R_2}} + \frac{1}{Z_{S_4}} + \frac{1}{Z_{S_3}} \right).$$

## Простые соединения труб

Для соединения двух труб разных диаметров (рис. 9.4) справедливо

$$\frac{1}{Z_{R_1}} = \frac{1}{Z_{S_2}}; Z_{R_1} = +Z_{S_2}.$$

Для трубопровода, представляющего последовательное соединение труб, расчетная схема приведена на рис. 9.5.

Характеристическое сопротивление трубы 3 получается с помощью уравнения (9.20), записанного здесь в виде

$$Z_{c_3} = \frac{c^2_3 (\beta_3 - i\alpha_3)}{g\Omega A_3}. \quad (9.27)$$

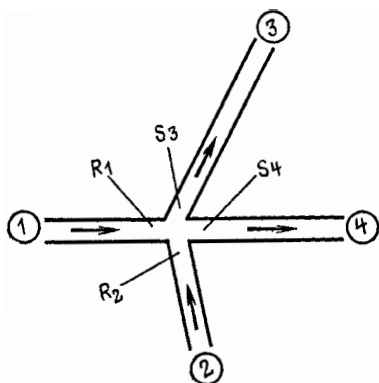


Рис. 9.3.

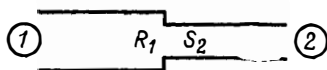


Рис. 9.4.

$\beta_3$  и  $\alpha_3$  вычисляются с помощью уравнений (9.17) и (9.18):

$$Z_{R_3} = 0 = \frac{Z_{S_3} - Z_{c_3} \operatorname{th}(\gamma L)}{1 - \frac{Z_{S_3}}{Z_{c_3}} \operatorname{th}(\gamma L)},$$

поэтому

$$Z_{S_3} = Z_{c_3} \operatorname{th}(\gamma L_3)$$

и  $Z_{S_3}$  можно оценить.

Из граничных условий в точке соединения следует

$$Z_{R_2} = +Z_{S_3},$$

тогда

$$Z_{R_2} = \frac{Z_{S_2} - Z_{c_2} \operatorname{th}(\gamma L_2)}{1 - \frac{Z_{S_2}}{Z_{c_2}} \operatorname{th}(\gamma L_2)}.$$

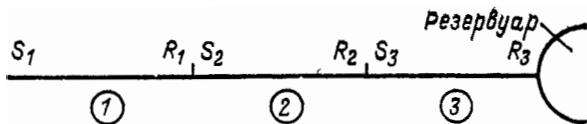


Рис. 9.5.

Поскольку  $Z_{R_3}$  известно,  $Z_{S_3}$  можно получить, вычислив  $Z_{c_3}$ .

Снова  $Z_{R_1} = Z_{S_2}$  и  $Z_{S_1}$  можно определить так же, как и для трубы 2.

### Обводные трубопроводы

$Z_c$  можно вычислить для каждой трубы в сети (рис. 9.6). Тогда

$$Z_{R_4} = 0 = \frac{Z_{S_4} - Z_{c_4} \operatorname{th}(\gamma_4 L_4)}{1 - \frac{Z_{S_4}}{Z_{c_4}} \operatorname{th}(\gamma_4 L_4)}, \quad (9.28)$$

таким образом,  $Z_{S_4}$  можно вычислить.

В точке соединения

$$\frac{1}{Z_{S_4}} = \left( \frac{1}{Z_{R_2}} + \frac{1}{Z_{R_3}} \right);$$

$$Z_{R_2} = \frac{Z_{S_2} - Z_{c_2} \operatorname{th}(\gamma_2 L_2)}{1 - \frac{Z_{S_2}}{Z_{c_2}} \operatorname{th}(\gamma_2 L_2)};$$

$$Z_{R_3} = \frac{Z_{S_3} - Z_{c_3} \operatorname{th}(\gamma_3 L_3)}{1 - \frac{Z_{S_3}}{Z_{c_3}} \operatorname{th}(\gamma_3 L_3)}.$$

В точке верхового соединения

$$\frac{1}{Z_{R_1}} = \left( \frac{1}{Z_{S_2}} + \frac{1}{Z_{S_3}} \right).$$

В соответствии с правилом об обратной пропорциональности сопротивлений при параллельном соединении

$$\frac{1}{Z_{S_4} - Z_{R_1}} = \frac{1}{Z_{R_2} - Z_{S_2}} + \frac{1}{Z_{R_3} - Z_{S_3}}; \quad (9.29)$$

$$Z_{R_1} = \frac{Z_{S_1} - Z_{c_1} \operatorname{th}(\gamma_1 L_1)}{1 - \frac{Z_{S_1}}{Z_{c_1}} \operatorname{th}(\gamma_1 L_1)}.$$

Получены все необходимые уравнения для определения всех значений сопротивлений.

Пересечение двух обводных трубопроводов называют

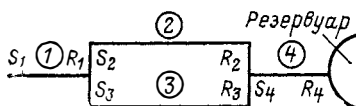


Рис. 9.6.

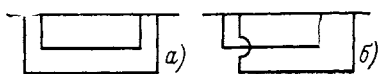


Рис. 9.7.

петлей второго порядка (рис. 9.7, б). Автор не знает каких-либо методов анализа трубопроводных сетей с петлями второго порядка.

## 9.10. СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРУБОПРОВОДНОЙ СЕТИ

Если в трубопроводной сети начать считать с точки, где сопротивление известно, например от резервуара  $R_5$  или  $R_6$ , либо от тупика  $R_3$ , то можно рассчитать сопротивление, перемещаясь вверх по течению.

Этот процесс выполнен ниже применительно к схеме на рис. 9.8:

$$Z_{R_5} = Z_{R_6} = 0, \quad Z_{R_3} = \infty,$$

тогда

$$Z_{S_5} = \frac{Z_{S_5} + Z_{c_5} \operatorname{th}(\gamma_5 L_5)}{1 + \frac{Z_{R_3}}{Z_{c_5}} \operatorname{th}(\gamma_5 L_5)}.$$

Так как  $Z_{R_3} = 0$ , то  $Z_{S_5} = Z_{c_5} \operatorname{th}(\gamma_5 L_5)$ .

Аналогично

$$Z_{S_6} = Z_{c_6} \operatorname{th}(\gamma_6 L_6).$$

Далее,

$$\frac{1}{Z_{R_4}} = \left( \frac{1}{Z_{S_3}} + \frac{1}{Z_{S_4}} \right),$$

т. е.  $Z_{R_4}$  легко определяется.

Аналогично

$$Z_{S_4} = \frac{Z_{R_4} + Z_{c_4} \operatorname{th}(\gamma_4 L_4)}{1 + \frac{Z_{R_4}}{Z_{c_4}} \operatorname{th}(\gamma_4 L_4)}.$$

Так как  $Z_{R_3} = \infty$ , то

$$Z_{S_3} = \frac{Z_{R_3} \left[ 1 + \frac{Z_{c_3}}{Z_{R_3}} \operatorname{th}(\gamma_3 L_3) \right]}{Z_{R_3} \left[ \frac{1}{Z_{R_3}} + \frac{1}{Z_{c_3}} \operatorname{th}(\gamma_3 L_3) \right]},$$

$$Z_{S_3} = \frac{Z_{c_3}}{\operatorname{th}(\gamma_3 L_3)}.$$

Тогда в точке соединения  $Z_{R_2}$  можно найти из уравнения

$$\frac{1}{Z_{R_2}} = \frac{1}{Z_{S_3}} + \frac{1}{Z_{S_4}};$$

$$Z_{S_2} = \frac{Z_{R_2} + Z_{c_2} \operatorname{th}(\gamma_2 L_2)}{1 + \frac{Z_{R_2}}{Z_{c_2}} \operatorname{th}(\gamma_2 L_2)};$$

$$Z_{R_1} = + Z_{S_2};$$

$$Z_{S_1} = \frac{Z_{R_1} + Z_{c_1} \operatorname{th}(\gamma_1 L_1)}{1 + \frac{Z_{R_1}}{Z_{c_1}} \operatorname{th}(\gamma_1 L_1)}.$$

Значения сопротивления в каждом низовом узле рассчитаны. Следует заметить, что все сопротивления являются комплексными величинами. Для таких специфических переменных, как комплексные числа, удобнее программировать задачу на языке ФОРТРАН, который

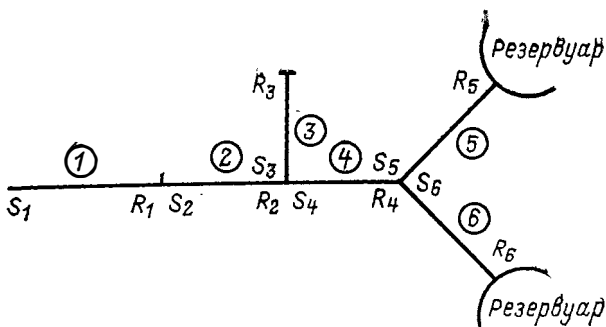


Рис. 9.8.

имеет приставку и библиотеку программ для работы с комплексной алгеброй. Язык АЛГОЛ-60 не имеет такой приставки и несколько меньше подходит для выполнения расчета резонанса, хотя и обладает рядом преимуществ перед ФОРТРАНОМ; в этом случае программист должен сам составить программу для работы с комплексной алгеброй, что является относительно простой задачей.

### 9.11. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Результаты расчетов сопротивлений элементов сети, выполненные выше, приводят к ряду комплексных чисел, которые зависят от угловой скорости  $\Omega$  и, таким образом, модуль этих чисел изменяется в зависимости от  $\Omega$ .

Вычислив  $Z$  для любой точки сети в диапазоне изменения  $\Omega$  (приращение с шагом 0,01), получим кривую, показанную на рис. 9.9.

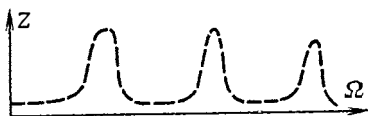


Рис. 9.9.

По диаграмме можно оценить вероятность возникновения и развития условий резонанса в сети ниже по течению от точки рассмотрения при приложении вынужденных колебаний в этой точке. Если частоты, вызывающие резонанс, отсутствуют, то трубопроводная сеть в безопасности, но тем не менее вероятность его возникновения следует оценивать очень тщательно. Фактические амплитуды колебаний давления зависят от ам-

плитуды вынужденного колебания, и до тех пор, пока не определено это вынужденное колебание, пик давления не может быть рассчитан. Однако в некоторых случаях достаточно только оценить опасные частоты и убедиться в том, что они не возникают. В § 9.12 приводится метод определения вынужденных колебаний.

Можно выполнить гармонический анализ типа описанного выше, используя методы характеристик. Каждая прогонка программы по методу характеристик будет стоить дороже, чем полный расчет по программе с использованием сопротивления. Для гармонического анализа потребуется много прогонок, поэтому метод характеристик экономически не эффективен.

## **9.12. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ**

Резонанс возникает вследствие взаимодействия волн, созданных вынужденными колебаниями, с волнами, отраженными от отдельных элементов трубопроводной сети. Для развития резонанса необходимо, чтобы частота вынужденных колебаний соответствовала гармонической или собственной частоте трубопровода. Собственную частоту трубопроводной сети определить не легко, если трубопровод не принадлежит к простейшему типу. Если частота собственных колебаний трубопровода не связана простыми соотношениями с фазой гидравлического удара, характеризующей трубопроводную сеть, то задача осложняется наличием частичного прохождения и отражения волн от точек разветвления.

Даже в простой разветвляющейся трубопроводной сети не существует простых соотношений между собственной частотой и частотами труб в сети, потому что в разных ветвях требуется различное время для прохождения отраженных волн от низовых концов к точке верхового соединения. Гармонический анализ, описанный в § 9.11, является единственным экономичным методом вычисления собственной и гармонической частот. Чтобы вычислить действительные давления в трубопроводной сети, необходимо знать амплитуду вынужденного колебания. Иногда это сделать очень просто, например для расчета трубопроводной сети, питающейся от бассейна: на поверхности бассейна образуются ветровые волны, которые являются причиной вынужденных колебаний.

Волны могут иметь не только простую синусоидальную форму, но и состоять из ряда синусоидальных волн с различными частотами; этот случай поддается анализу по методу Фурье. Вычислив амплитуды волн сжатия в различных точках трубопроводной сети для каждой из составляющей синусоидальных волн, результирующую амплитуду волны во всех необходимых точках получают путем сложения амплитуд элементарных волн.

Вычисление амплитуды волны сжатия рассмотрим на примере простого трубопровода. Предположим, что на верховом конце трубопровода имеются вынужденные колебания с амплитудой  $H_0$ , т. е.

$$h'_0 = H_0 e^{i\Omega t}, \text{ поэтому } H_S = H_0.$$

Поскольку  $Z_S$  уже определялось в § 9.9, то

$$q_0' = h_0' / Z_S, \text{ отсюда } Q_S = H_S / Z_S.$$

В низовой точке  $x$

$$h'_x = e^{i\Omega t} [H_S \operatorname{ch}(\gamma x) - Z_c Q_S \operatorname{sh}(\gamma x)],$$

отсюда

$$H_x = H_S \operatorname{ch}(\gamma x) - Z_c Q_S \operatorname{sh}(\gamma x);$$

$$Q_x = Q_S \operatorname{ch}(\gamma x) - \frac{H_S}{Z_c} \operatorname{sh}(\gamma x).$$

Таким образом, амплитуду волны сжатия и амплитуду колебаний расхода можно найти в любой точке трубопровода.

### 9.13. ВИБРИРУЮЩИЙ КЛАПАН

Падение напора на клапане, вызванное расширением потока после прохождения отверстия клапана, составляет:

$$h = \frac{Kv^2}{2g}, \quad (9.30)$$

где  $K$  — постоянная, которая изменяется при закрытии клапана от малых до больших значений в зависимости



от открытия клапана. Таким образом,

$$q = \frac{a_p}{\sqrt{K}} \sqrt{2gh}, \quad (9.31)$$

где  $a_p$  — площадь поперечного сечения трубы.

Обозначим  $a_p/\sqrt{K}$  через  $a_e$  — эффективную площадь клапана, тогда

$$q = a_e \sqrt{2gh}. \quad (9.32)$$

Как и ранее,

$$q = \bar{q} + q' = a_e \sqrt{2g(\bar{h} + h')}.$$

Это уравнение необходимо линеаризовать, прежде чем использовать его для расчета сопротивления.

Рассмотрим член  $(\bar{h} + h')$ . Имеем

$$\left(1 + \frac{h'}{2\bar{h}}\right)^2 = 1 + \frac{h'}{\bar{h}} + \frac{h'^2}{4\bar{h}^2}.$$

Пусть член  $h'^2/4\bar{h}^2$  мал по сравнению с членом  $h'/\bar{h}$ , что справедливо, если  $h'$  мало относительно  $\bar{h}$ ; тогда

$$\left(1 + \frac{h'}{2\bar{h}}\right)^2 \approx \frac{\bar{h} + h'}{\bar{h}}.$$

Отсюда

$$(\bar{h} + h')^{0,5} \approx (\bar{h})^{1/2} \left(1 + \frac{h'}{2\bar{h}}\right),$$

тогда

$$\bar{q} + q' = (\bar{a}_e + a'_e) \sqrt{2g\bar{h}} \left(1 + \frac{h'}{2\bar{h}}\right).$$

Раскрывая скобки и помня, что  $\bar{q} = \bar{a}_e \sqrt{2g\bar{h}}$ , получаем:

$$q' = a'_e \sqrt{2g\bar{h}} + \bar{q} \frac{h'}{2\bar{h}} + \frac{a'_e}{\bar{a}_e} \bar{q} \frac{h'}{2\bar{h}}.$$

Если  $a_{e0}$  — эффективная площадь полностью открытого клапана, то

$$q' = \bar{a}_e \frac{a_{e0}}{a_e} \frac{a'_e}{a_{e0}} \sqrt{2g\bar{h}} + \bar{q} \left( \frac{h'}{2\bar{h}} + \frac{a'_e}{a_{e0}} \frac{a_{e0}}{\bar{a}_e} \frac{h'}{2\bar{h}} \right).$$

Обозначим  $\bar{a}_e/a_{e_0}$  через  $\bar{\varepsilon}$ ,  $a'_e/a_{e_0}$  — через  $\varepsilon'$  и с учетом, что  $\bar{q} = \bar{a}_e \sqrt{2g\bar{h}}$ , получим:

$$q' = \bar{q} \left[ \frac{h'}{2\bar{h}} + \left( 1 + \frac{h'}{2\bar{h}} \right) \frac{\varepsilon'}{\bar{\varepsilon}} \right]. \quad (9.33)$$

Если амплитуда колебаний клапана мала, то приближенно

$$q' = \bar{q} \left( \frac{h'}{2\bar{h}} + \frac{\varepsilon'}{\bar{\varepsilon}} \right). \quad (9.34)$$

**З а м е ч а н и е.**  $\bar{\varepsilon}$  обозначает отношение «стационарной» площади отверстия клапана к площади полностью открытого отверстия и  $\varepsilon'$  — отношение переменной составляющей эффективной площади клапана к площади отверстия полностью открытого клапана. Таким образом

$$Z = \frac{h'}{q'} = \frac{h'}{\bar{q} \left( \frac{h'}{2\bar{h}} + \frac{\varepsilon'}{\bar{\varepsilon}} \right)}. \quad (9.35)$$

Обычно положение клапана зависит от напора на клапане. Клапаны, которые могут участвовать в рассматриваемом здесь колебательном движении, управляются автоматически таким образом, что они открываются, если напор верхового клапана становится больше некоторой постоянной величины, или закрываются, если напор низового клапана превышает некоторую постоянную величину в зависимости от того, какой трубопровод (верховой или низовой) необходимо предохранять от превышения давления.

Точное положение клапана определяется используемым сервомеханизмом, но обычно движение клапана под действием приложенного давления характеризуется фазовым углом  $\varphi$ . Поэтому колебательное движение клапана можно представить в виде

$$\varepsilon' = \zeta e^{i(\Omega t - \varphi)},$$

где  $\zeta$  — амплитуда колебаний клапана;  $\Omega = 2\pi f$ ,  $f$  — частота колебаний;  $\varphi$  — фазовый угол движения клапана. Предполагая эти величины известными и  $h'$  — соответ-

дствующим обычному колебательному уравнению для напора,  $h' = H_0 e^{i\Omega t}$ , имеем:

$$Z = \frac{h'}{q'} = \frac{H_0 e^{i\Omega t}}{\bar{q} \left( \frac{H_0 e^{i\Omega t}}{2\bar{h}} - \frac{\zeta e^{i(\Omega t - \varphi)}}{\bar{\varepsilon}} \right)};$$

$$Z = \frac{\frac{2\bar{h}}{\bar{q}}}{\bar{\varepsilon} + \frac{2\bar{h}}{H_0} \zeta e^{-i\varphi}}. \quad (9.36)$$

Если  $\zeta = 0$ , т. е. амплитуда колебаний клапана равна нулю, то задача сводится к задаче с фиксированным открытием клапана или к задаче с отверстием. Для этого случая

$$Z = \frac{2\bar{h}}{\bar{q}}. \quad (9.37)$$

Теперь  $Z_S$  можно найти путем независимого рассмотрения низового трубопровода. Когда  $Z = Z_S$ , можно вычислить  $H_0$  и получить амплитуду вынужденных колебаний давления, производимых клапаном.

Как и ранее, эту величину можно затем использовать для вычисления амплитуды колебания давления в любой точке трубопроводной сети.

#### 9.14. ТРУБОПРОВОДНАЯ СЕТЬ С РАЗЛИЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Примерами таких трубопроводных сетей может служить трубопровод, сообщающийся с двумя или более резервуарами, на поверхности которых возникают волны различных типов и с разными частотами. На гидроэлектростанциях вынужденные колебания могут вызвать турбины, если к ним подведены асимметричные трубопроводы. Насосы могут вызвать вынужденные колебания на линии нагнетания, действующие на низовой трубопровод, а линии всасывания вынужденные колебания, действующие на верховой трубопровод. Если на трубопроводе установлен байпас, то на него будут воздействовать два вынужденных колебания. Такие примеры встречаются очень часто.

В трубопроводных сетях такого типа следует проводить столько расчетов, сколько имеется источников

вынужденных колебаний. Поскольку анализ линейный, то возможна суперпозиция, и тогда степень возникновения резонанса в трубопроводе можно оценить из графика, получающегося путем суперпозиции всех выполненных гармонических анализов.

Явление резонанса изложено в книге Стритера (Streeter) [33].

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ОТКРЫТЫХ КАНАЛАХ

#### 10.1. ВВЕДЕНИЕ

Течение в открытых каналах обычно рассматривается только в условиях стационарного состояния. Однако течение в открытых каналах можно анализировать и с помощью слегка модифицированных методов расчета нестационарного течения в трубопроводных сетях.

Канал не обязательно должен быть призматического типа, его сечение может быть и непрямоугольным; в расчет можно включить переменное трение. Полученные таким образом результаты имеют обычно большую точность. Главным ограничением одномерного метода, описанного ниже, является то, что в поперечном сечении канала не должно быть резких изменений глубины.

Поток в главном канале (слева от линии  $AA$  на рис. 10.1,б) будет иметь большую скорость, чем поток

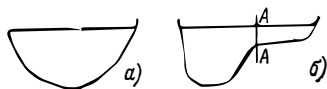


Рис. 10.1.

на менее глубокой части канала. Следовательно,  $AA$  является плоскостью сдвига, поперек которой будет возникать сильная турбулентность. Волновая скорость в левой части сечения будет намного больше, чем в правой части, и таким образом, одномерный анализ для такого поперечного сечения не может быть точным.

Существуют методы двумерных характеристик, которые можно использовать, но они значительно сложнее и требуют значительно больше машинного времени, по-

этому расчетчик поступит правильно, упростив сечение и рассматривая только главный канал, пренебрегая мелководьем.

Нестационарные течения встречаются почти в каждом канале. Река никогда не находится в стационарном состоянии — уровень в ней либо поднимается, либо падает. Потоки в канализационных трубах постоянно меняются. Потоки в напорных и отводных водоводах гидроэлектрических станций постоянно меняются в зависимости от нагрузки в системе. В некоторых случаях изменения глубины в канале не существенны, но в других могут возникнуть неожиданно большие изменения, при этом часто создаются бегущие волны, которые могут переклестнуться через стенки канала. Пренебрежение этими явлениями может иметь самые серьезные последствия. Следует надеяться, что в будущем, так же как сейчас повседневно рассчитываются нестационарные течения в трубопроводах, будут рассчитываться нестационарные течения и в открытых каналах.

## 10.2. УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ОТКРЫТЫХ КАНАЛАХ

Рассмотрим продольный профиль потока в открытом канале (рис. 10.2).

Результирующий объем жидкости, входящий в рассматриваемый элемент канала за время  $\delta t$ ,

$$\left[ Av - \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \right) \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x \right) \right] \delta t$$

приравняем к изменению внутреннего объема участка канала

$$B \delta x \frac{\partial d}{\partial t} \delta t,$$

где  $B$  — средняя ширина свободной поверхности. Получим

$$\left( -\frac{\partial A}{\partial x} v \delta x - A \frac{\partial v}{\partial x} \delta x \right) \delta t = B \frac{\partial d}{\partial t} \delta x \delta t,$$

так что

$$v \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial d}{\partial t} = 0,$$

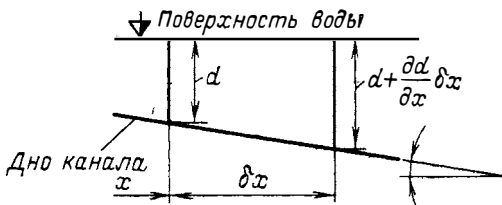


Рис. 10.2.

При этом пренебрегают сжимаемостью жидкости на рассматриваемом участке, что справедливо в потоке со свободной поверхностью.

Теперь

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial x};$$

$$\frac{\partial A}{\partial d} = B,$$

$$vB \frac{\partial d}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial d}{\partial t} = 0.$$

(10.1)

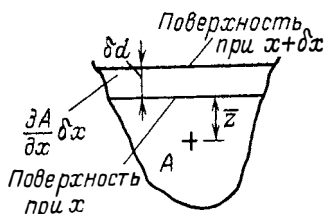


Рис. 10.3.

Рассмотрим силы, действующие на элемент, и изменение количества движения, вызванное ими.

Сила в направлении слева направо равна

$$w \bar{z} A - w \left( \bar{z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \delta x \right) \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \right) + w A \delta x \sin i - P \tau \delta x,$$

где  $\tau$  — напряжение трения, действующее по периметру потока;  $\bar{z}$  — расстояние до центра тяжести поперечного сечения на входе в элемент;  $P$  — средний смоченный периметр элемента канала. В этом случае

$$w \left( -A \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - \bar{z} \frac{\partial A}{\partial x} + A i - \frac{P \tau}{w} \right) \delta x,$$

— сила, в которой величины второго порядка малости отброшены;  $\sin i$  приближенно аппроксимирован величиной  $i$ , т. е. применяется обычное ограничение в виде малого уклона дна канала.

Теперь запишем выражение для момента относительно поверхности в низовом элементе (рис. 10.3).

$$\begin{aligned} \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \right) \left( \bar{z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \delta x \right) &= A \left( z + \frac{\partial d}{\partial x} \delta x \right) + \\ &+ \frac{B}{2} \left( \frac{\partial d}{\partial x} \delta x \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A\bar{z} + \bar{z} \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + A \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \delta x = A\bar{z} + A \frac{\partial d}{\partial x} \delta x + \frac{B}{2} \left( \frac{\partial d}{\partial x} \delta x \right)^2;$$

$$\bar{z} \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = A \frac{\partial d}{\partial x}.$$

Тогда сила, в которой величины второго порядка малости отброшены, равна

$$w \left( -A \frac{\partial d}{\partial x} + Ai - \frac{P\tau}{w} \right) \delta x.$$

Скорость изменения количества движения, которую вызывает эта сила,

$$\rho A \delta x \frac{dv}{dt} = \rho A \delta x \left( v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right),$$

$$w \left( -A \frac{\partial d}{\partial x} + Ai - \frac{P\tau}{w} \right) \delta x = \rho A \delta x \left( v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right);$$

$$\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - i + \frac{P\tau}{wA} = 0.$$

Теперь

$$\frac{P\tau}{wA} = \frac{\tau}{wm} = \frac{v|v|}{C^2 m} = j,$$

где  $C$  — коэффициент Шези;  $j$  — потери энергии на единицу массы жидкости на единицу длины канала

$$\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + j - i = 0. \quad (10.2)$$

Уравнения (10.1) и (10.2) называются уравнениями Сен-Венана, т. е.

$$v \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{A}{B} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial t} = 0; \quad [10.1]$$

$$\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + j - i = 0. \quad [10.2]$$

При выводе уравнения неразрывности использовалось допущение, что канал призматический. Это означает, что  $\delta A = B \delta d$ . Если канал не призматический, то это допущение неверно, как можно видеть из рис. 10.4,

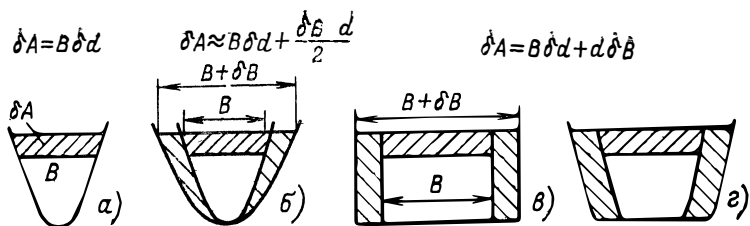


Рис. 10.4.

Итак,  $\delta A = B \delta d$  — призматический канал (рис. 10.4, а);

$\delta A \approx B \delta d + \frac{d}{2} \frac{\partial B}{\partial x} \delta x$  — непрямоугольное поперечное сечение в виде треугольника (рис. 10.4, б);

$\delta A = B \delta d + d \frac{\partial B}{\partial x} \delta x$  — непрямоугольное четырехугольное поперечное сечение (рис. 10.4, в и з).

Если канал непрямоугольный, то в уравнении неразрывности появится дополнительный член, т. е.

$$vB \frac{\partial d}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial d}{\partial t} = 0$$

— для призматического сечения и

$$vB \frac{\partial d}{\partial x} + \alpha d \frac{\partial B}{\partial x} v + A \frac{\partial v}{\partial x} + B \frac{\partial d}{\partial t} = 0$$

— для непрямоугольного сечения, где  $\alpha$  лежит между 0,5 и 1,0 в зависимости от формы сечения канала.

Теперь  $\frac{\partial B}{\partial x}$  — константа для данной области, так что

и  $\alpha \frac{\partial B}{\partial x}$  — константа. Положим

$$\alpha \frac{d}{B} \frac{\partial B}{\partial x} = \lambda.$$

Заметим, что  $\lambda$  — функция глубины, так как  $B$  меняется с глубиной; тогда

$$v \frac{\partial d}{\partial x} + \lambda v + \frac{A}{B} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial d}{\partial t} = 0. \quad (10.1a)$$



### 10.3. УРАВНЕНИЯ ОТКРЫТОГО КАНАЛА В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Уравнения открытого канала можно привести к характеристической форме таким же способом, какой использовался для уравнений гидравлического удара, но здесь будет изложен более простой способ.

Перепишем уравнения, заменив глубину  $d$  малой волновой скоростью  $c$  с помощью уравнения  $d=c^2/g$  уравнение (10.24а)]. Тогда

$$\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial x};$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Характеристическая форма уравнений нестационарного течения для непризматического канала более сложна, чем для призматического канала, и может быть получена, если использовать метод Листера (см. гл. 4). Уравнения для призматического канала будут выведены ниже. Допустим, что  $A/B=d$ , что точно для четырехугольного призматического канала и приблизительно верно для широкого канала; тогда уравнение (10.1)

$$\frac{2cv}{g} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (10.16)$$

и уравнение движения

$$2c \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + g(j-i) = 0. \quad (10.3)$$

Разделив уравнение (10.16) на  $c/g$  и сложив с уравнением (10.3), получим:

$$2(v+c) \frac{\partial c}{\partial x} + 2 \frac{\partial c}{\partial t} + (v+c) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + g(j-i) = 0.$$

Тогда

$$2 \left[ (v+c) \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} \right] c + \left[ (v+c) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right] v + g(j-i) = 0;$$

$$\left[ (v+c) \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} \right] (v+2c) + E = 0, \quad (10.4)$$

где  $E = g(j-i)$ .

Разделим уравнение (10.16) на  $c/g$  и затем вычтем (10.3)

$$2(v-c) \frac{\partial c}{\partial x} + 2 \frac{\partial c}{\partial t} - (v-c) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} - g(j-i) = 0;$$

умножим на  $-1$ :

$$\left[ (v-c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right] (v-2c) + E = 0.$$

Итак,

$$\left[ (v \pm c) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right] (v \pm 2c) + E = 0.$$

Теперь сравним это уравнение с определением полного дифференциала, т. е.

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \delta t.$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

т. е.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left( \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi.$$

Если  $E$  слабо изменяется и может рассматриваться как константа за период  $\delta t$ , а

$$dt/dx = 1/(v \pm c),$$

то

$$\varphi = v \pm 2c + Et.$$

Таким образом, в  $x, t$ -пространстве  $dt/dx = 1/(v \pm c)$  определяет две линии: одну с наклоном  $1/(v+c)$ , другую с наклоном  $1/(v-c)$ , вдоль этих линий  $d\varphi/dt = 0$ , т. е.  $\varphi$  — постоянна. Итак,  $dt/dx = 1/(v+c)$  определяет положительную характеристическую линию, вдоль которой  $v+2c+Et$  постоянна,  $dt/dx = 1/(v-c)$  — отрицательную характеристическую линию, вдоль которой  $v-2c+Et$  постоянна.

Объединяем характеристические уравнения свободной поверхности потока:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v \pm c}; \quad (10.5a \text{ и } б)$$

$$\frac{d}{dt} (v \pm 2c + Et) = 0. \quad (10.6a \text{ и } б)$$

Как будет показано, имеется очень большое сходство между этими уравнениями и уравнениями гидравлического удара, а также в способах их преобразования.

Понятия области зависимости, зоны влияния и зоны покоя, описанные в гл. 4, равно применимы к нестационарному течению в открытых каналах.

Метод нахождения значений  $c$  и  $v$  в любой точке на сетке  $x-t$  точно подобен тому, который использовался в гл. 4 для вычисления значений  $h$  и  $v$ . Как только найдено  $c$ , немедленно находится глубина  $d$ , поскольку  $d = c^2/g$  (рис. 10.5).

Как и в гл. 4,  $v_x$  и  $c_x$ ,  $v_y$  и  $c_y$  можно вычислить линейной интерполяцией значений в  $M$  и  $N$ , или в  $N$  и  $R$ , используя соотношения

$$\frac{XN}{\Delta t} = v_N + c_N \quad \text{и} \quad \frac{NY}{\Delta t} = c_N - v_N.$$

По вычисленным  $XN$  и  $NY$  легко находятся  $c$  и  $v$  в  $X$  и  $Y$ . Тогда

$$v_x + 2c_x + E_x t = v_p + 2c_p + E_p(t + \Delta t); \quad (10.7a)$$

$$v_y - 2c_y + E_y t = v_p - 2c_p + E_p(t + \Delta t). \quad (10.7b)$$

Теперь неизвестна  $E_p$ , зависящая от  $v_p$  и  $d_p$ , она определяется по формуле

$$E_p = g \left( \frac{v_p |v_p|}{c_p^2 m_p} - i \right).$$

Однако  $E$  слабо изменяется и очень мало изменится за интервал времени  $\Delta t$ . Обычно принято приравнять  $E_p$  к  $E_n$  (которая, конечно, известна). Некоторые расчетчики идут даже дальше и приравнивают к  $E_N$  величины  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_p$ , и это не приводит к большим ошибкам, если  $\Delta x$  и, следовательно,  $\Delta t$  малы.

Из совместного решения уравнений (10.7a) и (10.7b) легко получаем значения  $v_p$  и  $c_p$ , а затем находим  $d_p = c_p^2/g$ .

Выбрать  $\Delta t$  труднее, чем при анализе гидравлического удара. Так как  $c = \sqrt{gd}$  и  $d$  может значительно изменяться во время прохождения большой волны, то так же может меняться и  $c$ . Значение  $v$  может составлять большую долю  $c$  при докритическом течении и быть больше  $c$  при сверхкритическом течении.

Таким образом, для данного значения  $\Delta x$  значение  $\Delta t$  равно либо  $\Delta x/(v+c)$ , либо  $\Delta x/(v-c)$ . Если выбра-

на отрицательная характеристика, то значение  $\Delta t$  может оказаться очень большим и неудобным для использования на положительной характеристике. При использовании положительной характеристики значение  $\Delta t$  становится равным  $\Delta x/(v+c)$ . Однако если используется регулярная сетка (как в случае гидравлического удара), значение  $\Delta t$  должно быть постоянным. И  $v$ , и  $c$  меняются при расчете, поэтому должно быть выбрано значение  $\Delta t$ , которое всегда гарантирует, что точки  $X$  и  $Y$  лежат

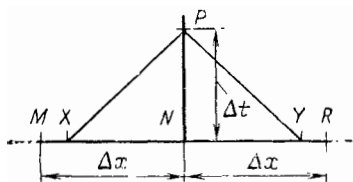


Рис. 10.5.

внутри сегмента  $MR$ . Предлагаемое значение для  $\Delta t$  равно  $\Delta x/(2c)$ . В этом примере  $c$  — волновая скорость, вычисленная по глубине канала в начале расчета. Эта глубина должна быть известна, либо можно предположить: течение в канале находится в начальном стационарном состоянии или отсутствует, причем скорость везде равна нулю и поверхность воды горизонтальна. Первое из этих предположений требует вычисления профиля поверхности при постепенно изменяющемся стационарном состоянии с помощью обычного уравнения, т. е.

$$\frac{dd}{dx} = \frac{i-j}{1-Fr}.$$

Здесь  $Fr$  — число Фруда, равное  $Q^2B/A^3g$  или  $v^2/g\delta$ , где  $\delta=A/B$  и  $B$  — ширина поверхности.

Вычисления этого типа, выполняемые обычными методами, в действительности недостаточно точны, чтобы использовать их для описания начального стационарного состояния, но если в этом расчете применить аналитический метод установления нестационарного решения, то можно получить удовлетворительные результаты. Второе начальное условие о том, что скорость потока приравнивается нулю, устраняет необходимость выполнять расчет постепенно меняющегося течения. Стационарное условие, действительно подходящее к данным обстоятельствам, должно применяться так, как если бы оно было нестационарным, затем выполняется расчет для периода времени, достаточного для достижения истинного стационарного состояния. После того как это установлено, можно найти требуемое нестационарное

условие и выполнить весь нестационарный расчет. Второе начальное условие о том, что скорость потока приравнивается нулю, требует большего машинного времени, но сберегает усилия, затраченные на вычисление начального, постепенно меняющегося, стационарного состояния. Если  $v$  и (или)  $c$  изменяются так, что это приводит к нарушению критериальной области зависимости, то расчет становится неверным. Поэтому необходимо обеспечить алгоритм, который выдаст предупреждающее сообщение и остановит счет на ЭВМ. Тогда программа должна быть поставлена на ЭВМ еще раз с использованием меньшего значения  $\Delta t$ .

### Нестационарное сверхкритическое течение

При сверхкритическом течении значение  $c$  меньше, чем  $v$ . Это означает, что наклон отрицательной характеристики становится положительным, как показано на рис. 10.6.

В сверхкритическом течении информация из зоны вниз по течению не может повлиять на условия вверх по потоку, поскольку местная скорость  $v$  больше волновой скорости  $c$ , и информация, передающаяся с волновой скоростью, нельзя перенести вверх по течению через жидкость, текущую вниз с большей скоростью. Следовательно, отрезок  $\Delta x$  длиной  $NR$  вниз по течению не содержит информации, которая повлияет на условия

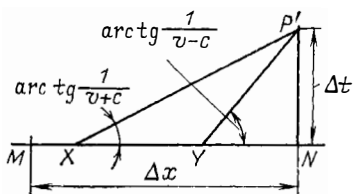


Рис. 10.6.

в точке  $P'$ , и область зависимости  $XU$  целиком расположена внутри отрезка  $\Delta x$  длиной  $MN$ , вверх по течению. Нужно учитывать только один отрезок  $\Delta x$ . Конечно, если существует сверхкритическое течение, то в отрицательном направлении соответствующим отрезком  $\Delta x$  становится  $NR$ .

Выше было установлено, что в сверхкритическом течении волна не может бежать вверх по течению. Это верно для маленьких волн. Если возникает большая ударная волна, ее скорость может быть больше местной скорости течения и при этом условии она может дви-

220

гаться вверх по потоку. Методика рассмотрения такого случая описывается ниже.

По мере того как поток постепенно становится сверхкритическим, положительная и отрицательная характеристики все больше стремятся к горизонтали, становясь постепенно параллельными. Это означает, что основные

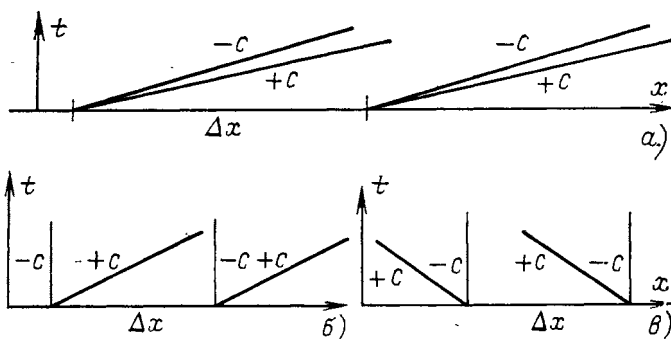


Рис. 10.7. К расчету нестационарного сверхкритического течения. *a* — характеристики при сверхкритическом потоке; *б* — характеристики при критическом потоке, *v* — положительная; *в* — то же *v* — отрицательная.

дифференциальные уравнения в частных производных все больше стремятся к параболическому типу, хотя в действительности они всегда остаются гиперболическими.

Значения  $\Delta t$ , которые должны использоваться, уменьшаются, когда поток становится сверхкритическим, так что затраты машинного времени увеличиваются для любого заданного интервала моделирования времени. В таких условиях, как эти, выбранное значение  $\Delta t$  может стать слишком большим. Поэтому целесообразно обеспечить возможность прекращения работы ЭВМ и вывода предупреждающего сообщения в случае, если значение  $XN$  стало больше, чем  $\Delta x$  (рис. 10.7, *a*, *б*, и *в*).

## Граничные условия

При анализе нестационарных течений в открытых каналах граничные условия определяются следующими сооружениями:

1) устье, уровень в котором изменяется в результате приливов и отливов;

2) водосборная площадь, формирующая поток, который изменяется в зависимости от осадков, вызывая паводки или штормовые колебания расходов;

3) плотины верховые или низовые;

4) затворы верховые или низовые;

5) бассейны низовые с медленно изменяющимся уровнем;

6) бассейны низовые с медленно изменяющимся уровнем и со сливом через водослив;

7) водослив верховой;

8) соединение каналов.

1. Устье, уровень в котором изменяется в результате приливов и отливов. По данным натурных наблюдений путем интерполяции можно получить глубину в конце канала через интервал времени  $\Delta t$ .

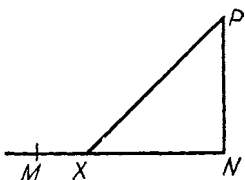


Рис. 10.8.

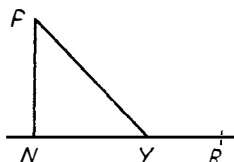


Рис. 10.9.

Изменение уровня прилива имеет место в нижнем конце канала, так что прямую характеристику можно увязать с глубиной  $d_T$ , определяемой уровнем прилива в любой интервал времени  $\Delta t$ , чтобы получить решение для местной скорости (рис. 10.8):

$$c_p = \sqrt{gd_T};$$

$$v_x + 2c_x + E_x t = v_p + 2c_p + E_p (t + \Delta t),$$

где  $v_x$  и  $c_x$  можно получить интерполяцией,  $E_x$  вычислить, а  $E_p$  принять равной  $E_N$ . Тогда  $v_p = v_x + 2c_x + E_x t - 2c_p - E_N (t + \Delta t)$ .

2. Водосборная площадь, формирующая поток, который изменяется в зависимости от осадков, вызывая паводки или штормовые расходы. В этом случае необходимо знать расход в верхнем конце канала. Он будет изменяться со временем, и поэтому необходимо иметь массив значений

расходов, введенный в читающее устройство, откуда путем интерполяции можно получить расход на входе в канал в любой интервал времени  $\Delta t$ .

Тогда для широкого или прямоугольного в поперечном сечении канала

$$Q_{t+\Delta t} = bd_{t+\Delta t}v_{t+\Delta t};$$

$$v_{t+\Delta t} = v_p = \frac{Q_{t+\Delta t}}{bd_p} \text{ (так как } d_p = d_{t+\Delta t}),$$

но

$$d_p = c_p^2/g,$$

тогда

$$v_p = \frac{gQ_{t+\Delta t}}{bc_p^2}. \quad (10.8)$$

Совмещая (10.8) с уравнением обратной характеристики (рис. 10.9), получаем:

$$v_y - 2c_y + E_y t = v_p - 2c_p + E_p(t + \Delta t).$$

Подставляя  $v_p$  из уравнения (10.8) и приравнявая  $E_p$  к  $E_N$ , получаем:

$$v_y - 2c_y + E_y t = g \frac{Q_{t+\Delta t}}{bc_p^2} - 2c_p + E_N(t + \Delta t).$$

Это дает кубическое уравнение для  $c_p$ , которое можно легко разрешить, например, методом Ньютона—Рафсона. Затем обратной подстановкой  $c_p$  в уравнение (10.8) находится  $v_p$ , т. е. получено решение для заданных граничных условий.

3. Плотины верховые и низовые. Рассмотрим сначала случай низовой плотины; тогда формула расхода плотины,  $\text{м}^3/\text{с}$ ,

$$Q = 1,71b(E_u - h_w)^{1,5}, \quad (10.9)$$

где  $E_u = d_u + v_u^2/(2g)$  — удельная энергия перед плотинной;  $d_u$  — глубина;  $v_u$  — скорость течения перед плотинной;  $h_w$  — высота гребня плотины над уровнем дна канала.

Используем положительную характеристику (отрицательную характеристику для верховой плотины)

$$v_x + 2c_x + E_x t = v_p + 2c_p + E_N(t + \Delta t).$$



Для прямоугольного канала  $Q = bd_p v_p$ , так что

$$bd_p v_p = 1,71b \left( d_p - h_w + \frac{v_p^2}{2g} \right)^{1,5}. \quad (10.10)$$

Так как  $v_u = v_p$  и  $d_u = d_p = c_p^2/g$ , то

$$\frac{c_p^2 v_p}{g} = 1,71 \left( \frac{c_p^2}{g} - h_w + \frac{v_p^2}{2g} \right)^{1,5},$$

$$v_x + 2c_x + E_x t = \frac{1,71 \left( \frac{c_p^2}{g} - h_w + \frac{v_p^2}{2g} \right)^{1,5}}{\frac{bc_p^2}{g}} +$$

$$+ 2c_p + E_N (t + \Delta t). \quad (10.11)$$

В этом уравнении появляется член  $v_p^2$ : выше по течению скорость  $v_p$  мала и поэтому  $v_p^2$  также мало. Сначала можно пренебречь величиной  $v_p^2$ . После этого остается решить кубическое уравнение относительно  $c_p$ . Как только это сделано, можно вычислить  $v_p$ . Подстановкой  $v_p$  в уравнение (10.11) можно получить второе приближение  $c_p$  и повторять процесс до тех пор, пока не будет достигнуто незначительное различие двух последовательных значений  $c_p$ .

Для верховой плотины вместо положительной характеристики нужно использовать отрицательную. Значение  $Q$  получается так же как и при расчете низовой плотины, но относится к концу расчетного рассматриваемого участка. Тогда решение идентично случаю 2.

4. Затвор. Рассмотрим низовой затвор. Уравнение расхода

$$Q = C_d b d_{c0} \sqrt{2g(E_u - d_{c0})},$$

где  $C_d$  — коэффициент расхода;  $d_{c0}$  — глубина в наиболее узком сечении непосредственно за затвором:  $d_{c0} = C_c d_s$  ( $d_s$  — высота открытия;  $C_c$  — коэффициент сжатия);  $E_u$  — удельная энергия потока непосредственно перед затвором:  $d_u + v^2/(2g)$ . Теперь  $d_u$  и  $v_u$  равны  $d_p$  и  $v_p$  соответственно, так что

$$Q = C_d b d_{c0} \sqrt{2g \left( \frac{c_p^2}{g} + \frac{v_p^2}{2g} - d_d \right)}. \quad (10.12)$$

Если затвор не подтоплен, то  $d_d = d_{c0}$ , но если он затоплен, то  $d_d$  — глубина потока непосредственно за за-

твóром. Используя положительную характеристику, получаем:

$$v_x + 2c_x + E_x t = v_p + 2c_p + E_N(t + \Delta t);$$

$$bd_p v_p = \frac{bc^2_p v_p}{g} = C_d b d_{c_0} \sqrt{2g \left( \frac{c^2_p}{g} + \frac{v^2_p}{2g} - d_d \right)},$$

так что

$$v_p = \frac{C_d b d_{c_0} \sqrt{2g \left( \frac{c^2_p}{g} + \frac{v^2_p}{g} - d_d \right)}}{bc^2_p/g};$$

$$v_x + 2c_x + E_x t = \frac{C_d b d_{c_0} \sqrt{2g \left( \frac{c^2_p}{g} + \frac{v^2_p}{2g} - d_d \right)}}{bc^2_p/g} +$$

$$+ 2c_p + E_N(t + \Delta t). \quad (10.13)$$

Как и для плотины, членом  $v^2_p$  можно сначала пренебречь и решить получающееся кубическое уравнение относительно  $c_p$ . Затем можно найти  $v_p$ , определить член  $v^2_p/2g$  и вставить в уравнение, которое затем опять решить относительно  $c_p$ , повторяя процесс, пока два последовательных значения не будут отличаться незначительно.

Решение для верхового затвора, осуществляется подобно решению для верховой плотины, причем значение  $Q$  получается из расчета для низового затвора, но относится к началу участка, так что глубину после затвора можно найти по методу, приведенному для верховой плотины. Метод, показанный для затвора, можно легко приспособить также для расчета водослива Вентури.

5. Бассейны низовые с медленно изменяющимся уровнем. Если изменение уровня происходит очень медленно, то обычно уровень можно считать постоянным для времени расчета нестационарного течения, т. е.  $d_p = d_{res}$ , так что  $c_p = \sqrt{gd_p}$  будет постоянной величиной. Тогда решение элементарно. Используем положительную характеристику для низового бассейна (отрицательную характеристику верхового бассейна), при этом

$$v_x + 2c_x + E_x t = v_p + 2c_p + E_N(t + \Delta t),$$

$$v_p = v_x + 2c_x + E_x t - 2c_p - E_N(t + \Delta t). \quad (10.14)$$

6. Бассейны низовые и с водосливом. Предполагается, что поверхность воды в бассейне плоская и горизонтальная.

Допустим, что площадь горизонтального сечения бассейна в момент времени  $t$  есть  $A_t$  и уравнение расхода через водослив  $Q_S = kh_{sp}^{1.5}$ . Тогда пусть расход из канала, заполняющего бассейн, равен  $Q_c$ , так что

$$Q_c = A_t \frac{dh}{dt} + Q_S,$$

т. е.

$$bd_p v_p = A_t \left( \frac{d_p - d_N}{\Delta t} \right) + kh_{sp}^{1.5},$$

где  $h_{sp}$  — превышение уровня поверхности воды в резервуаре над гребнем водослива. Таким образом

$$\frac{bc^2_p v_p}{g} = A_t \left( \frac{c^2_p - c^2_N}{g \Delta t} \right) + kh_{sp}^{1.5}.$$

Используя положительную характеристику, получаем:

$$v_x + 2c_x + E_x t = v_p + 2c_p + E_N(t + \Delta t).$$

Теперь

$$v_p = \frac{A_t \left( \frac{c^2_p - c^2_N}{g \Delta t} \right) + kh_{sp}^{1.5}}{bc^2_p/g};$$

$$v_x + 2c_x + E_x t = \frac{A_t \frac{c^2_p - c^2_N}{g \Delta t} + kh_{sp}^{1.5}}{bc^2_p/g} + 2c_p + E_N(t + \Delta t). \quad (10.15)$$

Это дает кубическое уравнение относительно  $c_p$ , и, решив его, можно получить  $v_p$  обратной подстановкой. Прежде чем анализировать следующий момент времени, надо увеличить  $h_{sp}$  на значение  $d_p - d_N$ .

При расчете распределения расхода по бассейну принимается, что в нем нет волн и подъем уровня происходит одновременно во всех точках поверхности. Так зачастую рассчитывается распределение потока, но таким путем нельзя рассчитать нестационарное течение в канале.

7. Водослив верховой — место, где жидкость из бассейна втекает в реку или канал. Расход водослива можно вычислить как в примере с бассейном в нижнем

течении, а затем применить метод, разработанный для случая 2 и 3 и плотины в верхнем течении.

8. Соединение каналов. В точке соединения глубина одинакова для всех подходящих каналов. В точку соединения должно втекать столько же, сколько вытекает из нее. Таким образом, картина здесь такая же, как описана для гидравлического удара в сложных соединениях труб (для потоков с большими числами Фруда в уравнения необходимо включать члены, учитывающие местные потери и кинетическую энергию).

Если глубина постоянна во всех соединяющихся каналах, то и волновая скорость  $c_p$  также должна быть одинаковой в этих каналах.

Если применить метод, использовавшийся для гидравлического удара, то из уравнения неразрывности получим:

$$\sum s b_a d_{pa} v_{pa} = 0, \quad (10.16)$$

где индекс  $a$  обозначает  $a$ -й канал. Как и в § 7.1, определим направление потока в любом канале, используя множитель  $s$ , который принимает значение  $+1$ , если вода в канале втекает в точку соединения, и  $-1$ , если она вытекает из этой точки.

Пусть номер канала  $a$  будет со знаком, причем  $a$  положительно, если вода притекает, и отрицательно, если вода вытекает; тогда  $s = \text{sign}(a)$ .

Для каждого из соединяющихся каналов характеристическое уравнение имеет вид:

$$(v_{pa} - v_a) + 2s(c_{pa} - c_a) + E_a \Delta t = 0, \quad (10.17)$$

где  $v_a$  и  $c_a$  — интерполяционная и волновая скорость соответственно в момент времени  $t$ , а  $v_{pa}$  и  $c_{pa}$  — скорость и волновая скорость после соединения в момент времени  $t + \Delta t$  соответственно, относящиеся к каналу с номером  $a$ .

Примечание. В уравнении (10.17)  $E_a = E$  на соединяющемся отрезке длиной  $\Delta x$ . Тогда

$$v_{pa} = v_a - 2s(c_{pa} - c_a) - E_a \Delta t. \quad (10.18)$$

Подставляем это значение в уравнение (10.16)

$$\sum s b_a \frac{c_{pa}^2}{g} (v_a - 2s(c_{pa} - c_a) - E_a \Delta t) = 0.$$

Так как  $c_{p_a}$  одинаково для всех каналов, то член  $c_{p_a}^2/g$  можно сократить. Тогда

$$\Sigma s b_a v_a - \Sigma 2 b_a c_{p_a} + \Sigma 2 b_a c_a - \Sigma s b_a E_a \Delta t = 0,$$

так что

$$c_{p_a} = \frac{\Sigma s b_a v_a + 2 \Sigma b_a c_a - \Delta t \Sigma s b_a E_a}{2 \Sigma b_a}. \quad (10.19)$$

Правая часть уравнения (10.19) содержит только известные величины, так что  $c_{p_a}$  можно найти. Тогда  $d_p$  в точке соединения равняется  $c_{p_a}^2/g$ .

Затем можно вычислить  $v_{p_a}$  для каждого канала, используя уравнение (10.18).

#### 10.4. БЕГУЩАЯ ВОЛНА

Анализ, описывающийся до сих пор, основывался на уравнениях, которые являются точными только для условий, когда течение изменяется постепенно. Для условий, когда течение меняется быстро, надо использовать другой метод расчета.

Рассмотрим бегущую волну с крутым фронтом, часто с бурунами (рис. 10.10). Наложив на систему скорость

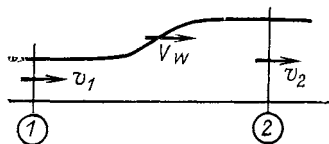


Рис. 10.10.

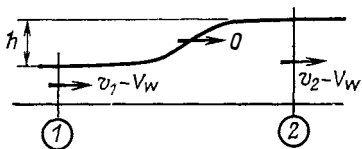


Рис. 10.11.

$V_w$ , как показано на рис. 10.10, можно сделать покоящейся границу свободной поверхности (рис. 10.11).

Применяя уравнение неразрывности к сечениям 1 и 2, получаем:

$$(v_1 - V_w) A_1 = (v_2 - V_w) A_2.$$

Применяя уравнение равновесия сил к сечениям 1 и 2, имеем:

$$\omega A_1 \bar{z}_1 - \omega A_2 \bar{z}_2 = \frac{\omega}{g} A_2 (v_2 - V_w)^2 - \frac{\omega}{g} A_1 (v_1 - V_w)^2,$$

$$\begin{aligned} A_1 \bar{z}_1 - A_2 \bar{z}_2 &= \frac{A_2}{g} \left[ (v_1 - V_w) \frac{A_1}{A_2} \right]^2 - \frac{A_1}{g} (v_1 - V_w)^2 = \\ &= \left( \frac{A_1^2}{A_2} - A_1 \right) \frac{(v_1 - V_w)^2}{g}. \end{aligned}$$

$$V_w = v_1 - \sqrt{g \frac{A_2}{A_1} \frac{(A_1 \bar{z}_1 - A_2 \bar{z}_2)}{(A_1 - A_2)}}, \quad (10.20)$$

где  $\bar{z}$  — глубина центра тяжести поперечного сечения потока под свободной поверхностью;  $A$  — площадь поперечного сечения. Это уравнение (иногда и с трудом) можно разрешить для любого правильного поперечного сечения.

Если  $v_1$  равно нулю, то  $V_w$  — скорость волны в покоящейся воде, т. е.  $c_w$ , так что

$$V_w = v_1 \pm c_w.$$

В этом выражении используется знак плюс, если  $d_1 > d_2$ , и минус, если  $d_1 < d_2$ .

Конечно, как будет видно ниже, эта волновая скорость больше, чем была бы у маленькой волны, распространяющейся в жидкости при меньшей глубине:

$$A_1 - A_2 \approx -Bh,$$

где  $h$  — высота волны;

$$A_1 \bar{z}_1 - A_2 \bar{z}_2 \approx A_1 \bar{z}_1 - A_1 (\bar{z}_1 + h) - \frac{Bh^2}{2} \approx -A_1 h - \frac{Bh^2}{2};$$

$$\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{A_1 + Bh}{A_1} \approx 1 + \frac{Bh}{A_1};$$

$$V_w \approx v_1 \pm \sqrt{g \left( 1 + \frac{Bh}{A_1} \right) \left( \frac{A_1 h - \frac{Bh^2}{2}}{Bh} \right)}. \quad (10.21)$$

Обозначим  $A_1/b$  через  $\delta$  — среднюю глубину при ширине поверхности  $b$ , тогда

$$V_w \approx v_1 \pm \sqrt{g \left( 1 + \frac{h}{\delta} \right) \left( \delta + \frac{h}{2} \right)}. \quad (10.22)$$

Если  $h$  мало по сравнению с  $\delta$ , то

$$V_w \approx v_1 \pm \sqrt{g \left( \delta + \frac{3}{2} h \right)}, \quad (10.23)$$

если  $h$  очень мало, то

$$V_w \approx v_1 \pm \sqrt{g\delta}, \quad (10.24)$$

т. е. для маленькой волны  $c = \sqrt{g\delta}$  и для прямоугольного канала  $\delta = d$ ; следовательно,

$$c = \sqrt{gd}. \quad (10.24a)$$

Конечно, все уравнения (10.21) — (10.24) являются приближенными по сравнению с (10.20).

Обычно каналы имеют прямоугольное сечение или бывают достаточно широкими, и тогда уравнение (10.20) сводится к следующему:

$$V_w = v_1 \pm \sqrt{gd_2 \frac{d_1 + d_2}{2d_1}}, \quad (10.25)$$

так что

$$\frac{dx}{dt} = v_1 \pm c_w.$$

Результат этого анализа для бегущей волны точно такой же, как и результат, полученный методом характеристик  $dt/dx = 1/(v \pm c)$ , что и следовало ожидать, так как маленькие и большие волны должны подчиняться этому соотношению. Однако в этом результате значение  $c_w$  отличается от  $c$  из уравнения характеристик.

## 10.5. ПРОФИЛЬ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Распространение волны в открытых каналах не так просто рассчитать, как могло бы показаться из простого уравнения, выведенного выше. После прохождения волны через некоторую точку канала глубина в этой точке не остается постоянной. Профиль потока за волной меняется со временем благодаря изменению уровня и влиянию трения, как показано на рис. 10.12. (Это соответствует линейному переуплотнению в трубопроводах, как показано в § 6.17.)

Рассмотрим последовательность событий, изображенных на рис. 10.12. Если бегущая волна, двигающаяся вверх по течению, возникает при закрытии низового затвора, то волна будет передвигаться вверх по течению, как изображено, т. е. волна будет последовательно проходить через позиции 1, 2, 3 и 4.

При этом поверхность за ней будет подниматься и постепенно становиться плоской, а сама волна умень-

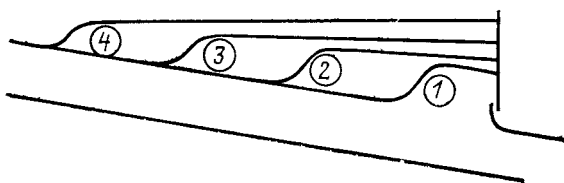


Рис. 10.12.

шаться по высоте. Поднятие поверхности может быть намного больше, чем высота волны и если этим пренебречь, то результат может быть ошибочным.

Расчет этого явления лучше всего выполняется методом характеристик, но для большой волны нужно сделать отдельный расчет, так как метод характеристик неверен для скачка значительного размера.

#### **10.6. МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ**

На рис. 10.13 изображены различные возможные типы волнового движения. Форма распространяющейся отрицательной волны, изображенной на рис. 10.13,г, не может быть неизменной. Такая волна будет быстро выравниваться, потому что на более глубоких участках волна будет двигаться быстрее, чем на мелких из-за большей скорости волны. Отрицательная волна выравнивается, как показано на рис. 10.14,а, б, в.

Волна, изображенная на рис. 10.13,а, возникает из-за уменьшения расхода в нижнем течении, на рис. 10.13,г — при увеличении расхода в нижнем течении; на рис. 10.13,в — при увеличении расхода в верхнем тече-



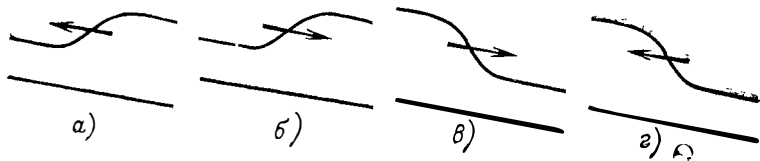


Рис. 10.13.

нии. Волна, очень похожая на изображенную на рис. 10.13,а, вызывается уменьшением расхода в верхнем течении.

Увеличения или уменьшения расхода не обязательно вызовут бегущую волну. Для возникновения бегущей волны необходимо, чтобы относительное число Фруда  $(v_1 - V_w)^2 / (gd_1)$ , было либо больше, либо меньше единицы, а  $(v_2 - V_w)^2 / (gd_2)$  наоборот меньше или больше единицы ( $V_w$  берется положительной в направлении возрастания  $x$ ) соответственно. Другими словами, изменение относительного числа Фруда должно быть таким, чтобы одно из двух относительных чисел Фруда было больше, а другое меньше единицы. Если оба относительных числа Фруда больше единицы или оба меньше единицы, волна не возникнет.

Обозначим относительные числа Фруда как  $F_1$  и  $F_2$  (абсолютные числа Фруда обозначаются  $F_{r1}$  и  $F_{r2}$ , тогда удобный признак возникновения волны будет  $(F_1 - 1) / (F_2 - 1) < 0$ .

Теперь, если существует волна, то абсолютное число Фруда на одной стороне волны должны быть меньше единицы, а на другой может быть меньше или больше единицы.

Если оба абсолютных числа Фруда меньше единицы, т. е. поток докритический, то можно использовать прямые и обратные характеристики на любой стороне волны (рис. 10.15).

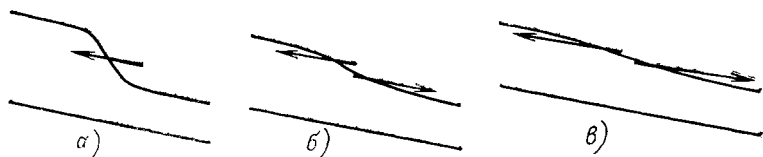


Рис. 10.14.

Скорость волны определяется по формуле

$$V_w = v_1 \pm \sqrt{gd_2 \frac{d_1 + d_2}{2d_1}}. \quad (10.26)$$

Знак плюс используется при  $d_1 > d_2$  и минус — при  $d_1 < d_2$ . Скорость  $V_w$  должна лежать между малой волновой скоростью  $v_1 \pm \sqrt{gd_1}$  на одной стороне волны и  $v_2 \pm \sqrt{gd_2}$  на другой стороне. Например,  $v_1 - \sqrt{gd_1} < V_w < v_2 - \sqrt{gd_2}$  для случая, изображенного на рис. 10.13,б, и  $v_1 + \sqrt{gd_1} > V_w > v_2 + \sqrt{gd_2}$  для случая, изображенного на рис. 10.13,в.

Большая волна всегда бежит быстрее, чем маленькая волна на мелководье, и медленнее, чем маленькая волна в глубоком потоке. На рис. 10.13,а маленькая волна может бежать вверх по глубокому потоку, догонять большую волну, идущую вверх, и в результате сливаться с ней. На рис. 10.13,б малая волна может идти вниз по мелководью и будет догонять большую волну, в то время как малая волна, идущая по глубокому потоку, будет идти быстрее большой волны, и, следовательно, не может быть поглощена ею. На рис. 10.13,в волна на глубоком потоке будет догонять большую волну и поглощаться ею, а большая волна будет догонять маленькие волны на мелководье, включая их в себя по мере продвижения.



Рис. 10.15.

Теперь должно быть ясно, что выше большой волны поток может быть сверх- или докритическим, а ниже — должен быть докритическим.

Рассмотрим условия в точке на верховом и низовом отрезках  $\Delta x$ , при которых существует большая волна. На рис. 10.16,б характеристика  $PS$  пересекает волновой фронт и это делает недействительными основные допущения, предпославшиеся методу характеристик.

Но даже при этом можно разработать простой метод.

На рис. 10.16,а — течение вверх — сверхкритическое, вниз — докритическое; на рис. 10.16,б — течение вверх и вниз — докритическое.

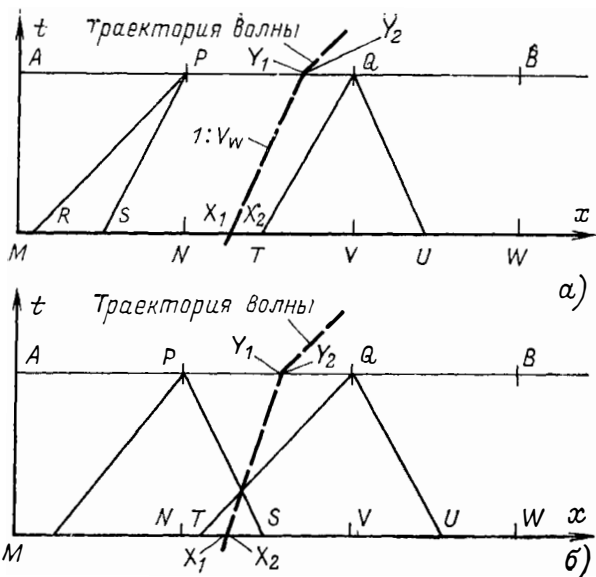


Рис. 10.16.

Предположим, что волновая скорость в  $X$  известна (из предыдущего шага интегрирования) (рис. 10.17). Используя эту волновую скорость, легко определить место точки  $Y$ . От  $Y$  можно построить три характеристики  $YA$ ,  $YB$  и  $YC$ . Точка  $A$  всегда должна лежать выше  $B$ , даже когда течение вверх докритическое (как нарисовано). Когда оно сверхкритическое, точка  $A$  лежит еще выше по течению. Глубины (и следовательно, волновые

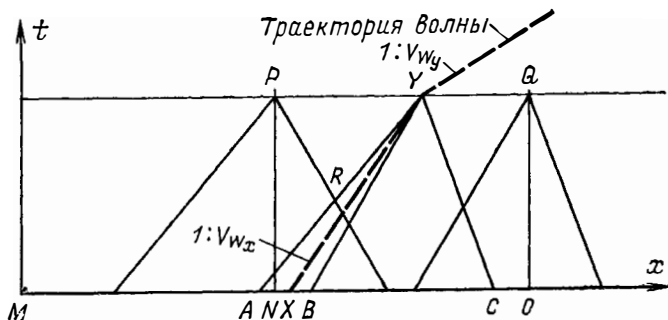


Рис. 10.17.

скорости) и скорости в  $A$ ,  $B$  и  $C$  можно получить соответствующей интерполяцией между  $M$  и  $N$  или  $N$  и  $O$ .

Таким образом, можно написать три уравнения характеристик:

$$\text{вдоль } AY: v_A + 2c_A + E_A t = v_{Y1} + 2c_{Y1} + E_{Y1}(t + \Delta t); \quad (10.27)$$

$$\text{вдоль } BY: v_B + 2c_B + E_B t = v_{Y2} + 2c_{Y2} + E_{Y2}(t + \Delta t); \quad (10.28)$$

$$\text{вдоль } CY: v_C + 2c_C + E_C t = v_{Y2} - 2c_{Y2} + E_{Y2}(t + \Delta t). \quad (10.29)$$

$E_{Y1}$  можно приравнять  $E_N$  и  $E_{Y2} = E_0$ .

Можно написать также уравнение неразрывности для условия перехода через волну:

$$\frac{v_{Y1} c_{Y1}^2}{g} = \frac{v_{Y2} c_{Y2}^2}{g} - V_{wY} \left( \frac{c_{Y2}^2 - c_{Y1}^2}{g} \right),$$

т. е.

$$v_{Y1} c_{Y1}^2 - v_{Y2} c_{Y2}^2 = V_{wY} (c_{Y1}^2 - c_{Y2}^2). \quad (10.30)$$

Совместное решение уравнений (10.28) и (10.29) дает  $v_{Y2}$  и  $c_{Y2}$ .

Перепишем волновое уравнение (10.26):

$$V_w = v_1 \pm \sqrt{gd_2 \frac{d_1 + d_2}{2d_1}}.$$

Как и раньше, знак положительный, если  $d_1 > d_2$ , и отрицательный — если  $d_1 < d_2$ . Подстановка  $c_{Y2}^2/g$  вместо  $d_2$  и  $c_{Y1}^2/g$  вместо  $d_1$  дает:

$$V_{wY} = v_{Y1} \pm \sqrt{c_{Y2}^2 \frac{c_{Y1}^2 + c_{Y2}^2}{2c_{Y1}^2}}. \quad (10.31)$$

Подстановка уже вычисленных значений  $c_{Y2}$  и  $v_{Y2}$  и выражения для  $V_{wY}$  в уравнение (10.30) и затем решение получающегося уравнения совместно с уравнением (10.27) дает решения для  $v_{Y1}$  и  $c_{Y1}$ . Затем можно вычислить  $V_{wY}$ , подставляя значения  $v_{Y1}$ ,  $c_{Y1}$  и  $c_{Y2}$  в уравнение (10.31).

Это значение  $V_{wY}$  дает новый наклон траектории волны, т. е.  $1/V_{wY}$ , используя это, можно подобным образом рассчитать следующий шаг по времени.

Для более глубокого изучения вопроса о волнах в открытых каналах рекомендуется книга Стокера (Stoker) [17].

Если характеристика, направленная назад к  $P$ , пересекает траекторию волны  $XU$ , то используют следующую методику. Вычисляют длину  $AR$  и используют линейную интерполяцию для значений  $v_R$  и  $c_R$  из  $v_A$  и  $c_A$  и  $v_U$  и  $c_U$ . Затем используют уравнение характеристики, направленной вперед к  $P$ , и уравнение характеристики, направленной назад из  $R$ , для нахождения  $v_p$  и  $c_p$ .

## 10.7. ДРУГИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Метод характеристик до сих пор большинство расчетов считают наилучшим. Однако в последние годы был разработан ряд методов, которые основаны на интегрировании уравнений Сен-Венана с использованием различных конечно-разностных схем:

- 1) трехслойный явный метод;
- 2) явный двухшаговый метод Лакса—Вендрофа [Lax — Wendroff];
- 3) неявный четырехточечный метод Амейна [Amein];
- 4) неявные шеститочечные методы, используемые Лиггетом и Вулхизером, Абботом и Ионеску [Liggit, Woolhiser, Abbot, Ionescu]. Утверждается, что эти методы допускают увеличение  $\Delta t$  без значительного роста ошибки или неустойчивости при заметном уменьшении времени работы ЭВМ.

В работе Прайса (Price) [11] изложены основные принципы методов 1—3 и описан метод фиксированной сетки характеристик, использованный в этой главе. В [11] отмечается, что четырехточечный метод Амейна является наилучшим. Эти методы можно применить и к расчету гидравлического удара, но автор не уверен, что они обладают какими-либо преимуществами перед методом фиксированной сетки характеристик, применявшимся в этой книге.

Недостаток места не позволяет привести здесь эти методы, но читатель может ознакомиться с ними по статьям, указанным в [20—35].

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

### ОБЩЕЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

#### 11.1. ВВЕДЕНИЕ

Общая программа — это такая программа, которая дает возможность описать топологию любой трубопроводной сети, используя числа, введенные как данные. Она должна описывать с помощью чисел наличие или отсутствие в любом месте любого конкретного гидравлического управления: насоса, турбины, резервуара, воздушного колпака.

Такая программа может использоваться для расчета любой сети без поправок; если с помощью программы нельзя рассчитать систему, то придется разрабатывать новую программу для каждой проектируемой сети. Очевидно, что общее программирование во много раз увеличивает ценность метода расчета.

Существует много методов написания общей программы. В литературе обычно описывается узловой метод, как наилучший, но автор предпочел представить свой собственный метод, который, по его мнению, обладает значительными преимуществами перед узловым.

#### 11.2. МАРШРУТНЫЙ, ИЛИ СВЯЗУЮЩИЙ МЕТОД ОБЩЕГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сначала необходимо подготовить схему сети. В эту схему должны быть включены все устройства гидравлического управления и все устройства одного типа последовательно пронумерованы. Например, если сеть содержит десять насосов, каждому насосу должен быть присвоен номер от 1 до 10. Аналогично, если имеется 15-клапанов-задвижек одного типа (но не обязательно обладающих одинаковыми параметрами), то каждая задвижка должна быть последовательно пронумерована от 1 до 15. Точно также надо поступить со всеми резервуарами, воздушными колпаками, уравнительными резервуарами и т. д.

Затем в схему необходимо ввести стрелки, указывающие для каждой трубы предполагаемое направление течения. Если поставленная стрелка указывает неверное направление, будет найдено, что скорость в стационарном состоянии для такой трубы отрицательна, так что на самом деле не важно, куда указывает стрелка, до тех пор, пока мы помним, что отрицательная скорость стационарного состояния означает всего-навсего, что направление потока противоположно направлению, указанному стрелкой.

Далее должны быть пронумерованы трубы, составляющие сеть. Если нумерация производится последовательно через сочленение, насос, воздушный колпак, уравнительный резервуар и т. д., то понадобится меньше данных. Однако чтобы программа сохранила гибкость (универсальность), надо для соединения из  $n$  труб зарезервировать  $n$  номеров (за исключением слияния двух трубопроводов, т. е. сочленения).

Необходимо создать массив, называемый маршрутным. Он должен быть двумерным и содержать одну строку на каждую трубу. Каждая строка должна содержать  $n$  чисел.

Рассмотрим гипотетический маршрутный массив, каждый ряд которого мог бы содержать следующие данные:

В 1-м столбце: (верхнее условие на границе сети)	1 — определяет верховой резервуар 2 — определяет насос, всасывающий воду из колодца со свободной поверхностью 3 — определяет вспомогательный насос на линии 4 — определяет сложные разветвления труб 5 — определяет воздушный колпак, а также уравнильный резервуар
Во 2-м столбце: (нижнее условие на границе сети)	6 — определяет низовой резервуар 7 — определяет клапан с электроприводом 8 — определяет клапан со следящим приводом 9 — определяет разветвления из $n$ труб 10 — и т. д. 11 — и т. д.
В 3-м столбце:	$a$ — номер верхового резервуара
В 4-м столбце:	$b1$ — номер верхового резервуара. Если нет резервуара, то должен стоять 0
В 5-м столбце:	$b2$ — номер низового резервуара. Если нет резервуара, то должен стоять 0
В 6-м столбце:	$c$ — число труб, сходящихся в нижнем соединении, если соединения нет, то должен стоять 0
В 7-м столбце:	+ номер трубы, подводящей жидкость к соединению
В 7-м + 1 столбце:	+ номер трубы, подводящей жидкость и соединению
В 7-м + 2 столбце:	+ номер трубы, подводящей жидкость к соединению
В 7-м + 3 столбце:	— номер трубы, отводящей жидкость от соединения
В 7-м + 4 столбце:	— номер трубы, отводящей жидкость от соединения
В 7-м + $c$ столбце:	и т. д.
Если $c$ равно 0, 8-му столбцу также должно быть присвоено значение 0	
В 9-м + $c$ столбце:	$d$ — номер клапана с электроприводом. Если клапана нет, должен стоять 0
В 8-м + $c$ столбце:	$e$ — номер клапана со следящим приводом. Если клапана нет, должен стоять 0

Номер любого другого гидравлического устройства можно поставить в 10-й +  $c$ , 11-й +  $c$  столбец и т. д.

Видно, что маршрутный массив должен иметь размерность по горизонтали от 1 до  $11+c$  (если нет других гидравлических устройств, кроме перечисленных выше) и по вертикали от 1 до  $n$ , где  $n$  — число труб в сети.

В АЛГОЛЕ разрешены массивы с переменной длиной, следовательно, для определения размерности маршрутного массива можно ввести  $n$ , где  $n=11+$  наибольшее значение  $c$  в сети и число труб в сети.

### 11.3. ОПИСАНИЕ ТРУБЫ

Затем следует создать и заполнить массив «сеть». Этот массив должен иметь размерность от 1 до 5 и от 1 до числа труб в сети (т. е. это двумерный массив).

В каждом ряду массива должны стоять пять переменных, относящихся к отдельной трубе сети:

- 1) длина трубы;
- 2) диаметр трубы;
- 3) толщина стенок трубы;
- 4) шероховатость трубы;
- 5) модуль упругости материала стенок трубы.

### 11.4. ПРОДОЛЬНЫЕ ПРОФИЛИ ТРУБОПРОВОДОВ

Следующим создается массив «подсеть». Этот массив должен содержать два числа в каждой строке и одну строку на каждую трубу в сети. Поскольку невозможно смоделировать длину трубы, необходимо вычислить число отрезков длиной  $\Delta x$ , которые почти полностью определяют длину трубы, и записать это число на 1-е место строки. На 2-м месте записывается число точек, в которых необходимо указать превышение осевой линии трубы над точкой отсчета (эта информация необходима, так как давление вычисляется путем вычитания превышения из потенциального напора в этой точке).

Затем должны быть созданы два массива, один под названием  $X_z$ , другой под названием  $Z$ . Это двумерные массивы, имеющие размерность от 1 до наибольшего значения номера подсети  $[N, 2]$  ( $N$  — номер трубы для каждой трубы в сети). В первом из этих двух массивов хранятся числа расстояния от начала каждой трубы до точек превышения осевой линии трубы над точкой отсчета. Полная строка должна быть приведена для каждой трубы сети. В массиве  $Z$  (его размерность идентична размерности массива  $X_z$ ) таким же образом должны храниться числа превышения каждой точки над точкой отсчета.

### 11.5. ВЕРХОВЫЕ РЕЗЕРВУАРЫ

Составляется массив  $U_{st}$ , в который заносятся данные об уровне поверхности воды в каждом резервуаре. Размер массива — от 1 до общего числа верхних резервуаров, имеющих в сети.



## 11.6. НИЗОВЫЕ РЕЗЕРВУАРЫ

Составляется массив  $D_{nst}$ . В этом массиве должны храниться строка из пяти чисел: по одной на каждый нижний бассейн сети.

Строка состоит из следующих пяти данных:

- 1) уровень поверхности воды в нижнем резервуаре в начале интервала  $\Delta t$ ;
- 2) площадь свободной поверхности резервуара;
- 3) ширина плотины в конце низового резервуара (см. § 7.6);
- 4) постоянная плотины;
- 5) индекс в уравнении плотины.

## 11.7. ОПИСАНИЕ НАСОСА

Создается массив «насос». Это двумерный массив, в котором должна содержаться строка из 36 переменных на каждый насос в сети. Эти 36 переменных содержат данные, описывающие характеристики насосов, т. е. зависимости напора  $H$  от расхода  $Q$  и к. п. д. от расхода  $Q$ , а также незаполненные ячейки, где можно хранить вычисляемые величины. Задав значения напоров и расходов, можно вычислить постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  в зависимости  $H$  от  $Q$ . Задав значения к. п. д. при соответствующем расходе, можно вычислить также постоянные в уравнении, выражающем зависимость к. п. д. от расхода. Один раз вычисленные, эти постоянные затем записываются в незаполненные места массива «насос». Для вычисления постоянных  $A$ ,  $B$  и  $C$  в уравнении, выражающем зависимость  $H$  от  $Q$ , и постоянных в уравнении, выражающем зависимость к. п. д. от  $Q$ , вероятно, лучше всего написать подпрограмму для их вычисления. При вызове этой подпрограммы выполняются вычисления, результаты которых заносятся в соответствующие места массива для каждого имеющегося насоса.

## 11.8. ПРОДОЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ ТРУБЫ В ИНТЕРВАЛАХ $\Delta x$

Требуется создать массив с названием  $Z_d$ . Это двумерный массив с размерами от 1 до наибольшего значения номера «подсети» ( $N$ , 1) для каждой трубы в сети.

В этом массиве хранятся данные о превышении осевой линии трубы в интервалах  $\Delta x$ . Эти данные получены линейной интерполяцией данных, взятых из массивов  $X_z$  и  $Z$ .

## 11.9. ВЫЗОВ ПРОГРАММ

Занеся все необходимые данные и распределив их по соответствующим местам в различных массивах, необходимо обеспечить вызов определенных процедур или подпрограмм в нужный момент в соответствии с управляющей последовательностью при прогонке программы. Это делается следующим образом.

На каждом шаге по времени вся сеть сканируется по последовательности номеров труб. На каждом шаге  $\Delta x$  рассматриваются местные условия, чтобы определить, какую подпрограмму следует применить для расчета потенциального напора и скорости в данной точке в следующий интервал  $\Delta x$  по времени. Чтобы определить,

какую из подпрограмм следует использовать, применяется простой алгоритм; если исследуемая точка расположена на верхнем конце трубы и в первом ряду маршрутной программы стоит цифра 1, то вызывается подпрограмма расчета верхнего резервуара. Если в первом ряду стоит цифра 2, то вызывается подпрограмма насоса, всасывающего жидкость из колодца. Если в первом ряду стоит цифра 3, то вызывается подпрограмма расчета вспомогательного насоса на линии. Если рассматриваемая точка расположена на низовом конце трубы, то берется второй маршрутный ряд, если стоит цифра 6, то вызывается подпрограмма расчета низового резервуара, если цифра 7, то — подпрограмма расчета клапана с электроприводом, если цифра 8, то — подпрограмма расчета клапана с сервоприводом, и если — 9, то — подпрограмма расчета разветвления труб.

Для точек, расположенных в середине трубы, используется соответствующая подпрограмма. Подпрограмма верхового бассейна определяется номером бассейна, который занесен в четвертый маршрутный ряд. Этот номер используется, чтобы получить нужные сведения об уровне поверхности из массива  $U_{st}$ .

Аналогично подпрограмма расчета низового бассейна определяется номером бассейна, который в пятом ряду маршрутной программы. По этому номеру находят пять характерных данных из массива  $D_{nst}$ . Остальные подпрограммы получают необходимые данные аналогичным образом, в частности, подпрограммы расчета насоса, всасывающего жидкость из колодца, и вспомогательного насоса на линии получают необходимые данные по номеру, который содержится в третьем ряду маршрутной программы, по этому номеру отыскиваются и используются параметры, занесенные в массивы «насос». Номер трубы, необходимый для подпрограммы соединения, содержится в маршрутной программе в строках 7, 8 и т. д. вплоть до строки 7+ строка 6.

Метод объединения отдельных программ в общую программу, по-видимому, теперь ясен.

Все подпрограммы могут быть, таким образом, объединены в общую программу, необходимо только добавить подпрограмму, которая обеспечивает вывод результатов расчета из ЭВМ. Следует предупредить, однако, что если ожидается получение большого количества данных, то лучше обеспечить вывод данных прямо на графопостроитель. Тем не менее рекомендуется некоторое число данных выводить на печать, поскольку по графикам трудно выявить незначительные ошибки.

## 11.10. СКАНИРОВАНИЕ ПО ВРЕМЕНИ

Завершив один цикл расчета сети, индекс  $i$ , который определяет моделируемое время  $T$ , как  $T=i\Delta t$ , необходимо увеличить на 1 и повторить цикл расчета. Процесс повторяется до тех пор, пока время расчета не станет равным или несколько большим, чем заданное время моделирования.

Так как  $\Delta t$  обычно мало, а  $\Delta x$  лежит между  $1/10$  и  $1/20$  длины трубы в линии, то, вероятно, целесообразно выводить на печать только 5-й или 10-й шаг по времени  $\Delta t$  и каждый 2-й или 4-й шаг по  $\Delta x$ . Количество выводимой информации может быть задано путем введения множителя специального типа. Аналогичным образом может задаваться информация на графопостроитель, что является важным, так как его память имеет ограниченный объем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Allievi L.** *Theoria generale del moto perturbato dell' acqua nei tubi in pressione.* Milan 1903. Translated into English by E. E. Halmos. *The Theory of waterhammer.* Am. Soc. Civil Eng., 1925.
2. **Schnyder O.** Druckstosse in Pumpensteigleitungen. *Schweiz Bauztg*, 94, № 22 and 23, 1929.
3. **Bergeron L.** Etudes des variations de régime dans les conduites d'eau. *Rev. gén. Hydraulique*, Nos. 1 and 2, 1935.
4. **Zienkiewicz O. C. and Hawkins P.** Transmission of waterhammer pressures through surge tanks. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 68, № 25, 1954.
5. **Angus R. W.** Waterhammer in pipes, including those supplied by centrifugal pumps; graphical treatment. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, p. 136 and 245, 1937.
6. **Angus R. W.** Waterhammer pressures in compound and branched pipes. *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, pp. 104 and 340, 1939.
7. **Lax P. and Wendroff B.** Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Maths*, XII, 217—37, 1960.
8. **Lax P.** Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations *Comm. Pure Appl. Maths*, VII, 159—93, 1954.
9. **Lister M.** The numerical solution of hyperbolic partial differential equations by the method of characteristics, in *Mathematical Methods for Digital Computers* (ed. Wilf A. and Ralston H. S.). Wiley, New York, 1960.
10. **Courant R., Friedrichs K. and Lewy H.** *On the Partial Differential Equations of Mathematical Physics.* New York University Institute of Mathematics, translated by P. Fox, 1956.
11. **Price R. K.** Comparison of four numerical methods for flood routing. *J. Hydr. Div., Am. Soc. Civ. Eng.*, July, 1974.
12. **Pearsall I.** The velocity of waterhammer waves in Symposium on Surges in Pipelines. *Inst. Mech. Eng.*, 180, 1965, 1966.
13. **Karplus M. B.** The velocity of sound in a liquid containing gas bubbles. *Armour Research Earth Foundation Report*, June, 1958.
14. **Fox J. A.** *An Introduction to Engineering Fluid Mechanics.* Macmillan, London, 1974.
15. **Suter P.** Representation of pump characteristics for calculation of waterhammer. *Sulzer Review*, 1966.
16. **Edgell H.** *Pressure Transients in Tunnels; Extension of Theory to Irreversible. Nonadiabatic Flow.* Limited publication by Leeds University, Department of Civil Engineering, April, 1974.
17. **Stoker J. J.** *Water Waves, Pure and Applied Mathematics*, vol. 4, The Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1957.

18. **Swaffield J. A.** A study of column separation following valve closure in a pipeline carrying aviation kerosine, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, № 23, 1969.
19. **Marsden N. and Fox J. A.** An alternative approach to the problem of column separation in an elevated section of pipeline. *Proceedings of 2nd International Symposium on Pressure Surges*, September, 1976.
20. **Angus R. W.** Simple graphical solution for pressure rise in pipes and pump discharge lines. *J. Inst. Canada*, February, 72—81, 1935.
21. **Donsky B.** Complete pump characteristics and the effects of specific speeds on hydraulic transients, *J. Basic Eng.*, December, 685—99, 1961.
22. **Fox J. A.** The use of the digital computer in the solution of waterhammer problems. *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 29, 127—31, 1968.
23. **Fox J. A. and Henson D. A.** The prediction of the magnitudes of pressure transients generated by a train entering a single tunnel. *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 49, 53—69, 1971.
24. **Henson D. A. and Fox J. A.** Transient flows in tunnel complexes of the type proposed for the channel tunnel. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 188, № 15, 153—67, 1974. (Two papers).
25. **Jaeger C.** *Engineering Fluid Mechanics*, Blackie, London, 1956.
26. **Knapp R. T.** Complete characteristics of centrifugal pumps and their use in prediction of transient behaviour. *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, 59, 683—9, 1939.
27. **Lax P. D. and Richtmyer R. D.** Survey of the stability of finite difference equations. *Comm. Pure. Appl. Maths*, ix, 267—93, 1956.
28. **Parmakian J.** *Waterhammer Analysis*, Dover, New York, 1963.
29. **Pickford J.** *Analysis of Surge*, Macmillan, London, 1969.
30. **Rich G.** *Hydraulic Transients*, Dover, New York, 1963.
31. **Stepanoff A. J.** *Centrifugal and Axial Flow Pumps*, Wiley, New York, 1948.
32. **Stoker J. J.** *Water Waves*, Pure and Applied Mathematics, vol. 4, The Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1957.
33. **Streeter V. and Wylie E.** *Hydraulic Transients*, McGraw-Hill, New York, 1967.
34. **Symposium** on surges in pipelines. *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 180, part E 1965, 1966.
35. **Wilf H. S. and Ralston A.** *Mathematical Methods for Digital Computers*, Wiley, New York, 1960.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Воздушный колпак 80, 85, 152, 161  
Волновой наездник 48, 51, 56  
Волны 12, 20,  
    бегущие 228  
    F-волна 33, 41  
    отраженные 22, 23, 33, 155  
    разрежения 25  
    распространение 22, 31, 57, 67  
    сжатия 12, 25, 69, 207  
    скорость 27, 88, 105, 110,  
    форма 24, 31  
    элементарные 47, 51, 56  
Газ 112, 120  
    выделение 106, 110  
    микродра 108  
    пузырьки 88, 105, 119  
    растворение 109, 120  
    расчет свободного содержания 119  
Гидравлический удар 11, 47, 90, 191  
    — фаза 31, 53, 151  
Граничные условия 49, 69, 89, 98,  
    121, 131, 156, 184, 199, 221  
Давление пара 26  
Диаграммы Сьютера 142, 143, 145  
Дроссель 63, 67  
Затвор 224  
Зона:  
    влияния нестационарного течения  
    95, 218  
    невозмущенная 96  
Каналы открытые 211, 230  
Клапан 14, 50, 152, 207  
    закрытие внезапное 31, 151  
    — мгновенное 20, 26, 30  
    — медленное 16, 66  
    обратный 145, 153, 161  
    открытие внезапное 14, 31  
    — медленное 64  
    с электроприводом 164, 171  
    характеристика 51, 67  
Колесания массы жидкости 77, 81,  
    162  
    — вынужденные 206  
Колена 176  
Компрессор 80, 184  
Коэффициент:  
    расхода 17, 33, 224  
    теплоотдачи 181,  
    теплопередачи 181  
    Шези 214  
Линейное переуплотнение 154  
Маховик 150  
Метод решения:  
    Амеина 105, 236  
    аналитический 32, 39, 40  
    графический 46, 51, 63, 64, 103  
    конечных разностей 93  
    Лакса—Вендрофа 89, 105, 236  
    Литгета и Вулдизера 105, 236  
    Листера 90, 217  
    трехслойный явный 105  
    характеристик 88, 104  
    Шнидера—Бержерона 46, 63, 88,  
    156  
Модуль упругости 27, 105, 111  
Момент:  
    инерции 70, 127  
    эквивалентный 149  
Напор:  
    высвобождающий газ 109, 112, 120  
    инерционный 22, 24  
    местные потери 15, 60, 84, 160  
    статический 22  
Насос 69, 121, 131  
    остановка 69, 125, 129, 134  
    работа параллельная 147  
    — последовательная 148  
    режим тормозной 76, 123  
    — турбинный 123  
    с байпасом 145  
    характеристика 121  
    четыреквадратный 76, 135  
Программирование 237  
Процесс:  
    нестационарный (переходный) 32,  
    81  
    политропический 86, 154, 178  
Резервуар 49, 64, 172, 200  
    — уравнительный 74, 87, 237  
    — — Джонсона 79, 84  
    — — пневматический см. Воздуш-  
    ный колпак  
    — — дросселирующим кольцом  
    79, 84  
Резонанс 80, 185, 196, 206  
Соединения:  
    каналов 222, 227  
    труб 57, 156, 200  
Сопротивление:  
    гидравлическое 15  
    характеристическое 196  
    электрическое 187  
Сочленения труб 153  
Течение:  
    двухфазное 64, 106, 115  
    нестационарное 211  
    — сверхкритическое 220  
Трение 23, 38, 63, 82, 116  
Трубопроводы:  
    газовые 176  
    длинные 12  
    короткие 12  
    обводные 202  
    сложные 46, 156, 203  
Уравнения:  
    Алливи 27  
    — цепное 35, 46  
    Бернулли 17, 34  
    гидравлического удара 13, 35, 93,  
    188  
    Дарси—Вейсбаха 15  
    движения 13, 37, 82, 177, 214  
    неразрывности 35, 83, 176, 235  
    Римана 40  
    сопротивления 197  
    характеристик 93, 179  
    Эйлера 13  
Характеристика:  
    обратная 93, 95, 99  
    прямая 93, 95, 99  
Энергия:  
    деформации 23  
    кинетическая 23

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	3
Предисловие к английскому изданию . . . . .	4
Основные условные обозначения . . . . .	6
<b>Глава первая. Основы теории гидравлического удара . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Введение . . . . .	11
1.2. Движение несжимаемой жидкости в жесткой трубе . . . . .	13
1.3. Внезапное открытие клапана на нижнем конце трубопровода . . . . .	14
1.4. Медленное закрытие клапана . . . . .	16
1.5. Движение сжимаемой жидкости в упругой трубе . . . . .	20
1.6. Мгновенное закрытие клапана . . . . .	20
1.7. Разрыв колонны жидкости . . . . .	25
1.8. Расчет неустановившегося процесса, вызванного полным мгновенным закрытием клапана на конце простого трубопровода . . . . .	26
1.9. Повышение давления, вызванное мгновенным закрытием клапана . . . . .	30
1.10. Внезапное закрытие клапана . . . . .	31
<b>Глава вторая. Аналитические и графические методы . . . . .</b>	<b>32</b>
2.1. Введение . . . . .	32
2.2. Аналитические методы . . . . .	32
2.3. Ступенчатое закрытие клапана за интервалы времени, равные фазе удара . . . . .	33
2.4. Цепные уравнения Аллиеви . . . . .	35
2.5. Графический метод Шнидера—Бержерона . . . . .	46
<b>Глава третья. Граничные условия при графическом методе . . . . .</b>	<b>69</b>
3.1. Введение . . . . .	69
3.2. Насосы . . . . .	69
3.3. Четырехквadrантный режим работы насоса . . . . .	76
3.4. Уравнительные резервуары . . . . .	77
3.5. Типы уравнительных резервуаров . . . . .	78
3.6. Анализ нестационарных процессов в уравнительных резервуарах . . . . .	81
3.7. Колебания масс жидкости в уравнительных резервуарах . . . . .	81
3.8. Пневматические уравнительные резервуары, или воздушные колпаки . . . . .	85
3.9. Интегрирование уравнений уравнительного резервуара . . . . .	87
<b>Глава четвертая. Метод характеристик . . . . .</b>	<b>88</b>
4.1. Введение . . . . .	88
4.2. Приведение уравнений гидравлического удара к характеристической форме . . . . .	90
4.3. Уравнения гидравлического удара в характеристической форме . . . . .	93
4.4. Зона влияния и область зависимости . . . . .	95

4.5. Невозмущенная зона . . . . .	96
4.6. Интегрирование характеристических уравнений . . . . .	96
4.7. Граничные условия . . . . .	98
4.8. Метод характеристик с регулярной прямоугольной сеткой . . . . .	99
4.9. Другие конечно-разностные методы . . . . .	104
<b>Глава пятая. Переменные параметры в нестационарном потоке . . . . .</b>	<b>105</b>
5.1. Изменение скорости волны . . . . .	105
5.2. Газовыделение . . . . .	106
5.3. Изменение скорости волны с учетом газовыделения . . . . .	110
5.4. Использование уравнения волны с переменной скоростью . . . . .	114
5.5. Паровая кавитация . . . . .	114
5.6. Расчет трения . . . . .	116
5.7. Использование переменных величин $f$ . . . . .	118
5.8. Интерполяция . . . . .	118
5.9. Расчет содержания свободных пузырьков . . . . .	119
5.10. Определение скоростей и потенциальных напоров в промежуточных точках по длине трубопровода . . . . .	121
<b>Глава шестая. Граничные условия, определяемые насосами . . . . .</b>	<b>121</b>
6.1. Введение . . . . .	121
6.2. Насосы, оборудованные обратным клапаном . . . . .	121
6.3. Вывод уравнения характеристики насоса . . . . .	123
6.4. Работа насоса в турбинном или тормозном режиме . . . . .	124
6.5. Коэффициент полезного действия насоса . . . . .	127
6.6. Мощность насоса . . . . .	128
6.7. Пуск насоса . . . . .	129
6.8. Остановка насоса . . . . .	129
6.9. Граничное условие, определяемое трубопроводом с насосом . . . . .	131
6.10. Насос, всасывающий жидкость из колодца . . . . .	133
6.11. Четырехкватратный режим работы насоса . . . . .	135
6.12. Применение диаграмм Сьютера . . . . .	143
6.13. Выход насоса на стационарный режим работы . . . . .	145
6.14. Насосы, оборудованные байпасами с клапанами . . . . .	145
6.15. Насосные станции . . . . .	147
6.16. Методы борьбы с гидравлическим ударом при остановке насоса . . . . .	150
6.17. Линейное переуплотнение и затухание . . . . .	154
6.18. Запирание . . . . .	155
<b>Глава седьмая. Граничные условия, определяемые другими гидравлическими устройствами . . . . .</b>	<b>156</b>
7.1. Сложные соединения труб . . . . .	156
7.2. Сочленения . . . . .	159
7.3. Воздушные колпаки . . . . .	161
7.4. Клапан с электроприводом . . . . .	164
7.5. Клапаны со следящим приводом . . . . .	171
7.6. Резервуары . . . . .	172
7.7. Колена . . . . .	175

<b>Глава восьмая. Нестационарное течение в газовых трубопроводах</b>	176
8.1. Введение	176
8.2. Основные уравнения	176
8.3. Уравнения характеристик	179
8.4. Тепловой поток	180
8.5. Граничные условия	184
<b>Глава девятая. Аналоговые методы расчета трубопроводов</b>	185
9.1. Введение	185
9.2. Аналогия между электрическим и гидравлическим сопротивлением	187
9.3. Линеаризация уравнений гидравлического удара	188
9.4. Решение линеаризованных уравнений гидравлического удара	191
9.5. Оценка постоянной распространения $\gamma$	194
9.6. Понятие сопротивления	196
9.7. Верховой и низовой концы трубопровода	197
9.8. Уравнение сопротивления	197
9.9. Граничные условия	199
9.10. Сопротивление трубопроводной сети	203
9.11. Гармонический анализ	205
9.12. Вынужденные колебания	206
9.13. Вибрирующий клапан	207
9.14. Трубопроводная сеть с различными источниками вынужденных колебаний	210
<b>Глава десятая. Нестационарное течение в открытых каналах</b>	211
10.1. Введение	211
10.2. Уравнения нестационарного течения в открытых каналах	212
10.3. Уравнения открытого канала в характеристической форме	216
10.4. Бегущая волна	228
10.5. Профиль свободной поверхности при наличии бегущей волны	230
10.6. Метод расчета нестационарных поверхностных течений при наличии бегущей волны	231
10.7. Другие методы расчета	236
<b>Глава одиннадцатая. Общее программирование</b>	237
11.1. Введение	237
11.2. Маршрутный, или связующий метод общего программирования	237
11.3. Описание трубы	239
11.4. Продольные профили трубопроводов	239
11.5. Верховые резервуары	239
11.6. Низовые резервуары	240
11.7. Описание насоса	240
11.8. Продольный профиль трубы в интервалах $\Delta x$	240
11.9. Вызов программ	240
11.10. Сканирование по времени	241
Список литературы	242
Предметный указатель	244



**Д. А. ФОКС**

**Гидравлический анализ неустановившегося течения  
в трубопроводах**

Редактор *А. Б. Кириллов*

Редактор издательства *Т. П. Готман*

Технический редактор *Н. Н. Хотулева*

Корректор *И. А. Володяева*

ИБ № 2570 (Энергия)

Сдано в набор 23.06.81

Подписано в печать 05.11.81

Формат 84×108<sup>1/32</sup>

Бумага типографская № 2

Гарн. шрифта литера-

турная Печать высокая

Усл. печ. л. 13,02

Уч.-изд. л. 12,73

Тираж 2600 экз.

Заказ 1221

Цена 85 к.

Энергоиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государствен-  
ном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной  
торговли. 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10