

Л. М. БЫСИНА-МОЛОЖЕН
Л. В. БЫСИН, М. П. ПОЛЯК

**ТЕПЛО-
ОБМЕН
В ТУРБО-
МАШИНАХ**





ТЕПЛО
ОБМЕН 
В ТУРБО
МАШИНАХ

Л.М. ЗЫСИНА-МОЛОЖЕН,
Л.В. ЗЫСИН, М.П. ПОЛЯК

ТЕПЛО·
ОБМЕН· 
В ТУРБО·
МАШИНАХ

ЛЕНИНГРАД „МАШИНОСТРОЕНИЕ“
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ 1974



Зысина-Моложен Л. М., Зысин Л. В., Поляк М. П. Теплообмен в турбомашинах. Л., «Машиностроение» (Ленингр. отд-ние), 1974. 336 с.

В книге рассмотрено современное состояние теории теплообмена, изложены основы теории пограничного слоя, элементы теории подобия и моделирования, а также специальные вопросы конвективного теплообмена в охлаждаемых турбинных лопатках и расчета температурных полей в элементах турбин. Представлены результаты экспериментальных исследований обтекания различных элементов проточной части паровых и газовых турбин. Рассмотрены отдельные задачи, связанные с течением газожидкостных потоков, специфические для некоторых конструкций систем охлаждения лопаток газовых турбин, а также для определения граничных условий теплообмена в элементах влажнопаровых ступеней и турбин. Приведена оценка пределов применимости и точности различных методов расчета современных турбин.

Книга рассчитана на научных работников НИИ и КБ заводов. Она также может быть широко использована инженерно-техническими работниками, занимающимися вопросами проектирования нового энергооборудования.

Табл. 8. Ил. 128. Список лит. 254 назв.

Рецензент засл. деятель науки и техники РСФСР д-р техн. наук
проф. *И. И. Кириллов*

З $\frac{30303-115}{038(01)-74}$ 115-74

© Издательство «Машиностроение», 1974 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современные тенденции в развитии энергомашиностроения характеризуются стремлением к форсированию процессов теплообмена в турбомашинах и к повышению их рабочих параметров, причем ставится вопрос о необходимости работы турбин в условиях переменных нагрузок и нестационарных режимов, об ускорении периодов пуска и останова машины. В связи с этим к современным и перспективным турбинам наряду с требованиями высокой эффективности и экономичности предъявляются высокие требования надежности. Последняя во многом, как известно, зависит от точности и достоверности расчета теплового и напряженного состояния элементов ротора и статора машины.

В современных мощных паровых турбинах до- и сверхкритических параметров температурный уровень элементов статора и ротора на номинальном режиме работы не вызывает опасений, однако при переходе на переменные режимы из-за неравномерности обогрева или охлаждения могут возникнуть градиенты температур, обуславливающие появление больших температурных напряжений и неодинаковых удлинений близлежащих элементов, что может вызвать задевание частей ротора о статор. При правильном расчете температурного состояния элементов турбины возможна разработка рационального графика пуска и останова машины, позволяющего избежать возникновения вышеуказанных явлений.

В современных стационарных газовых турбинах относительные скорости движения газа в проточной части сравнительно невелики (как правило, $M < 0,6$). Однако в транспортных и в создаваемых в настоящее время перспективных стационарных машинах имеют место также и сверхзвуковые режимы обтекания. Кроме того, главная тенденция в повышении параметров в области газотурбостроения заключается в стремлении к максимальному повышению температуры газа T перед турбиной. В связи с этим возникает необходимость в охлаждении как сопловых, так и рабочих лопаток. Задачей такого охлаждения является не только общее снижение температурного уровня лопаток, но и обеспечение равномерного температурного поля в теле лопатки. Последнее возможно только при умении правильно рассчитывать локальные коэффициенты теплоотдачи по контуру лопатки. Учет конструктивной схемы охлаждения лопатки приводит к дополнительным

трудностям при разработке метода расчета локальной теплоотдачи на поверхности лопатки. Влияние вращения, турбулентности — все это факторы, осложняющие задачу. Кроме того, задача создания эффективных систем охлаждения для высокотемпературных газовых турбин не может быть рационально решена только путем подбора системы с наибольшей интенсивностью охлаждения. Необходима комплексная постановка, когда решения тепловой, аэродинамической, прочностной и технологической задач совмещаются. В подобных случаях особенно желательна разработка методов расчета, допускающих максимальное использование ЭВМ.

Таким образом, очевидно, что для решения задачи создания высокоэффективных, высокоманевренных мощных паровых и высокотемпературных газовых турбин, обладающих большой надежностью, необходимо наряду с решением других проблем совершенствовать методы расчета, в частности расчета теплообмена в элементах проточной части. В настоящее время в научно-исследовательских и учебных институтах и в лабораториях передовых турбостроительных заводов ведутся теоретические и экспериментальные исследования, и имеются определенные успехи в этом направлении, однако не все работы являются равноценными, информация о них имеет разрозненный характер. В результате этого далеко не все эффективные методы расчета используются в практике, а некоторые методы используются за пределами их достоверной применимости.

В настоящей монографии авторы попытались изложить современное состояние теории теплообмена и результаты экспериментальных исследований применительно к задачам турбостроения.

Ограниченность объема монографии не позволила в полной мере сочетать анализ теплового состояния с анализом потерь энергии в проточной части. Ряд вопросов, касающихся этой проблемы, не вошел в монографию, хотя авторы считают, что расчетный анализ необходимо проводить совместно.

Главы I—V, п. 37, 41, 44 написаны проф. д-ром техн. наук Л. М. Зысиной-Моложен, главы VI (кроме п. 37) и VII (кроме п. 41, 44) — канд. техн. наук Л. В. Зысиным, гл. VIII — канд. техн. наук М. П. Поляк, п. 33 — совместно Л. М. Зысиной-Моложен и М. П. Поляк.

Авторы благодарны Н. В. Зайцевой за большую помощь при подготовке и подборе библиографии по рассматриваемым в монографии вопросам.

Авторы будут признательны за любые замечания по поводу содержания книги, которые можно присылать по адресу: 191065, Ленинград, ул. Дзержинского, 10.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В связи с тем, что в монографии рассмотрен широкий круг вопросов, непосредственно связанных или примыкающих к теории теплообмена, то в некоторых случаях пришлось применять одну и ту же букву для обозначения разных величин. Например, буквой λ обозначаются коэффициент сопротивления (в теории ламинарного и турбулентного движения в трубе), длина волны возмущающего движения (в теории устойчивости ламинарного пограничного слоя), коэффициент теплопроводности (в теории теплообмена); буквой x обозначаются декартова координата (в аэродинамике и теории теплообмена) и степень сухости пара (в термодинамике); буквой r обозначаются скрытая теплота парообразования (в термодинамике) и коэффициент восстановления температуры (в газодинамике) и т. д.

Величины общего значения

- x, y, z — декартовы координаты
- r, φ, z — цилиндрические координаты
- u, v, w — составляющие скорости в пограничном слое
- U, V, W — составляющие скорости вне пограничного слоя
- ω — угловая скорость
- $\rho, \bar{\rho}$ — плотность, средняя плотность
- μ — коэффициент динамической вязкости
- $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости
- p — давление
- L, l — длина
- r, a — радиус
- d — диаметр
- F — смоченная площадь или лобовая площадь тела
- n — нормаль к поверхности

Вязкая жидкость, сопротивление, теплоотдача

- T — температура потока
- T_w — температура стенки
- T_{aw} — температура адиабатного торможения стенки
- t — время
- τ — касательное напряжение
- τ_w — касательное напряжение на стенке
- $v_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — динамическая скорость
- δ — толщина динамического пограничного слоя
- δ_T — толщина теплового пограничного слоя
- δ^* — толщина вытеснения
- δ^{**} — толщина потери импульса
- δ_T^* — толщина теплового вытеснения
- δ_T^{**} — толщина потери энергии
- λ — коэффициент сопротивления при движении жидкости в трубе, коэффициент теплопроводности

- c_F — полный коэффициент сопротивления трения при внешнем обтекании
 c_f — местный коэффициент сопротивления трения
 q — удельный тепловой поток
 $\alpha, \bar{\alpha}$ — коэффициент теплоотдачи, средний коэффициент теплоотдачи
 α, α_x — местный коэффициент теплоотдачи
 $a = \lambda / (\rho c_p)$ — коэффициент температуропроводности
 c_p, c_v — удельная теплоемкость соответственно при постоянном давлении и объеме
 G — массовый расход
 u', v', w' — составляющие турбулентной пульсации скорости
 ε — степень турбулентности
 l — длина пути перемешивания
 κ — эмпирическая постоянная турбулентного течения
 $\eta = y v_* / \nu$ — безразмерное расстояние от стенки
 $\varphi = u / v_*$ — безразмерная скорость
 k — показатель адиабаты, высота элемента шероховатости
 r — скрытая теплота парообразования, коэффициент восстановления температуры
 i — энтальпия

Расчет температурных полей в элементах турбин

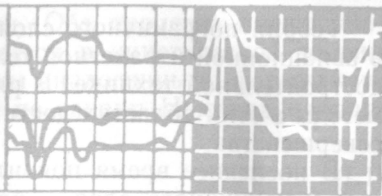
- τ — время
 t — температура
 r, φ, θ — сферические координаты

Нижние индексы

- s — параметры на границе области
 p — параметры потока
 охл — параметры охлаждающего агента
 ∞ — параметры невозмущенного потока
 0 — параметры вне пограничного слоя
 w — параметры на стенке
 s — параметры на линии насыщения
 1, 2 — параметры соответственно на входе и выходе из решетки профилей
 $ж$ — параметры жидкости
 $ср$ — среднее значение величины

Верхние индексы

- $*$ — параметры торможения
 $', ''$ — параметры соответственно жидкости или пара (газа) в двухфазных (газожидкостных) потоках
 $', ', ''$ — первая, вторая и третья производные функции по аргументу



ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

1. Некоторые определения и основные понятия

Теория теплообмена как наука практически начала формироваться только в XX в. До этого существовали теория теплопроводности и набор эмпирических формул и рекомендаций для определения коэффициентов теплоотдачи, логически и теоретически никак не связанные друг с другом. Аналогичное положение было и с аэродинамикой, вместо которой существовали классическая теоретическая гидродинамика идеальной жидкости и эмпирическая гидравлика.

В 1904 г. Л. Прандтль в своей работе «О движении жидкостей при малом трении» показал, что при изучении процесса обтекания можно весь объем жидкости разбить на две неравные области: узкую пристенную область, названную впоследствии пограничным слоем, где в основном проявляется влияние сил трения, и остальную область пространства (так называемый внешний поток), где можно с достаточным приближением пренебречь влиянием сил трения и рассматривать потенциальное обтекание идеальной (без трения) жидкости.

Неоднородность полей скоростей в потоке приводит к возникновению в жидкости, с одной стороны, сил внутреннего трения, с другой — конвективных ускорений, которые определяют инерционные эффекты. Большинство задач современной техники связано с потоками, в которых инерционные эффекты существенно преобладают над влиянием сил трения. Именно в этом случае и имеют место классические задачи теории пограничного слоя, когда основной поток можно считать идеальным, а влияние вязкости рассматривать только в тонком пограничном слое.

Дальнейшее развитие учения о пограничном слое показало, что вопросы взаимодействия тел с потоком — вопросы сопротивления тел и теплоотдачи — определяются процессами, протекающими непосредственно в пограничном слое. Создание теорий динамического и теплового пограничного слоя позволило теоретически решить основные задачи сопротивления и конвективного теплообмена в однородных средах для целого ряда практических приложений.

Теория пограничного слоя нашла весьма широкое применение в авиационной и ракетной технике, во внешней баллистике, в судостроительной технике. В ряде случаев теоретические расчетные методы в этих областях достигли к настоящему времени большого совершенства.

В последнее время появилась новая область применения теории пограничного слоя — расчет потерь энергии и теплоотдачи в проточной части турбомашин. Позднее внедрение теоретической аэродинамики в эту область техники обусловило недостаточную теоретическую разработанность вопросов теплового расчета турбомашин. По существу тепловой расчет проточной части турбомашин во многом представляет собой комбинацию эмпирических соотношений, эмпирических кривых и рекомендаций. Задача создания теоретически обоснованного метода теплового расчета проточной части турбомашин включает, в частности, задачу дальнейшего совершенствования и развития теории пограничного слоя. Имеющиеся уже в настоящее время результаты теоретических и экспериментальных исследований в области пограничного слоя позволяют более надежно и обоснованно решать целый ряд вопросов при расчетах проточной части турбомашин и поэтому заслуживают более широкого внедрения в расчетных отделах турбостроительных заводов.

В настоящей книге в соответствии с условиями развития процессов в проточной части турбомашин рассматриваются вопросы, связанные с течением вязкой сжимаемой жидкости. Прежде всего следует остановиться на формулировке основных понятий, которые будут использоваться в последующем изложении.

Вязкая жидкость. Вязкой жидкостью в отличие от идеальной называется такая, при течении которой кроме нормальных сил существуют силы касательные, способствующие возникновению касательных напряжений между слоями жидкости и между жидкостью и стенкой. В результате воздействия касательных сил кроме обычного условия непроницаемости стенки, имеющего место и при обтекании идеальной жидкостью и характеризующегося условием равенства нулю нормальной составляющей скорости ($v = 0$) при $y = 0$, возникает явление прилипания вязкой жидкости к стенке, т. е. в вязкой жидкости при $y = 0$ все составляющие скорости $v = u = w = 0$. В идеальной жидкости касательных сил не существует, поэтому у стенки имеет место разность скоростей, т. е. скольжение жидкости по стенке.

Трение между слоями жидкости и между жидкостью и стенкой проявляется в сопротивлении движению. Сила этого сопротивления пропорциональна градиенту скорости движения жидкости в направлении, перпендикулярном движению. Величина этой силы, отнесенная к единице поверхности, называется касательным напряжением трения.

Внутреннее трение и теплопроводность. Молекулярная структура реальных газов и жидкостей определяет наличие в них вну-

тренного трения и теплопроводности. Оба процесса имеют аналогичную природу и, как показывается в кинетической теории жидкости и газа, могут быть описаны аналогичными формулами.

Касательное напряжение трения по закону Ньютона пропорционально градиенту скорости:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (I.1)$$

Количество тепла, передаваемого теплопроводностью через единицу поверхности в единицу времени (тепловой поток), по закону Фурье пропорционально градиенту температуры:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (I.2)$$

При этом динамический коэффициент вязкости μ и коэффициент теплопроводности λ не зависят от характера движения и определяются физическими свойствами среды и ее температурой (влияние давления практически отсутствует).

Кроме динамического коэффициента вязкости вводят понятие кинематического коэффициента вязкости $\nu = \mu/\rho$. В отличие от μ коэффициент ν зависит не только от физических свойств среды, но также и от давления, поэтому при расчетах процессов, протекающих при больших скоростях, удобнее использовать μ , а не ν .

Обычно вязкость жидкостей μ с увеличением температуры уменьшается, а вязкость газов возрастает. Зависимость вязкости газов от температуры выражается формулой Сатерленда

$$\mu = \frac{cT^{3/2}}{T + 114},$$

где c — коэффициент, зависящий от рода газа.

Однако в практике удобнее пользоваться интерполяционной формулой

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n, \quad (I.3)$$

где показатель степени n зависит от температуры и различен для различных газов.

Теплопроводность газов зависит от давления и температуры. Одной из наиболее распространенных является формула Варгафтика

$$\lambda = \lambda_t + B\rho^m, \quad (I.4)$$

где λ_t — значение λ при давлении $p = 1 \text{ кгс/см}^2 = 98\,066 \text{ Па}$; B, m — постоянные экспериментальные величины, различные для различных газов. Подробные численные данные по этому вопросу можно найти, например, в [20].

Коэффициент теплопроводности жидкостей также убывает с возрастанием температуры. Для ряда жидкостей справедлива формула

$$\lambda = B\rho^{4/3},$$

где B — коэффициент, зависящий от теплоемкости и молекулярного веса жидкости [20].

Зависимость теплопроводности твердых тел от температуры носит приблизительно линейный характер:

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha T),$$

где λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при температуре $T = 0^\circ \text{C}$.

Для чистых металлов температурный коэффициент α , как правило, отрицательный. Для легированных сталей он может быть и положительным.

Кроме коэффициента теплопроводности в теории теплообмена вводится также понятие коэффициента температуропроводности $a = \lambda / (c_p \rho)$.

В кинетической теории газов доказывается, что число Прандтля

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad (1.5)$$

для совершенных газов не зависит от температуры и параметров течения, а зависит только от атомности газа:

$$\text{Pr} = \frac{4k}{9k - 5}.$$

В табл. 1 приведено сопоставление расчетных значений, полученных по этой формуле, с экспериментальными для различных газов.

Т а б л и ц а 1

Газ	$k = c_p / c_v$	Значение Pr	
		расчетное	экспериментальное
Гелий	1,659	0,668	0,691
Азот	1,408	0,734	0,739
Окись углерода	1,403	0,736	0,765
Кислород	1,398	0,737	0,731
Окись азота	1,380	0,742	0,738
Хлор	1,340	0,761	0,743
Углекислый газ	1,310	0,771	0,805

Для несовершенных газов и для жидкостей число Прандтля сильно изменяется с температурой. Например, для пара при $T \approx 250 \div 300^\circ \text{C}$ имеем $\text{Pr} \approx 0,9$; для сухого насыщенного пара при $p = 1$ ата и изменении температуры от 100 до 300°C значение Pr увеличивается в два раза. Для воды $\text{Pr} = 13,7$ при $T = 0^\circ \text{C}$

и $\text{Pr} = 1,75$ при $T = 100^\circ \text{C}$, для трансформаторного масла $\text{Pr} = 220$ при $T = 40^\circ \text{C}$ и $\text{Pr} = 100$ при $T = 80^\circ \text{C}$ и т. д.

Из приведенных цифр видно, что при исследовании движения совершенных или близких к ним газов можно считать число Прандтля всегда постоянным, однако при исследовании движения вязких жидкостей в неизотермических процессах необходимо учитывать сильное изменение числа Pr с температурой.

Кондуктивный и конвективный теплообмен. При рассмотрении процессов теплообмена в твердых телах и в неподвижной жидкой среде при отсутствии поперечных движений основным законом передачи тепла является закон Фурье, характеризующий молекулярную теплопроводность, или кондукцию, и устанавливающий прямую пропорциональность между потоком тепла q и градиентом температуры:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности вещества, в котором происходит процесс передачи тепла.

При перемещении объемов газа или жидкости перенос тепла осуществляется конвекцией. В случае, когда движение среды вызывается разностью температур, имеет место свободная (естественная) конвекция; если же движение вызывается воздействием внешних сил, то имеет место вынужденная конвекция.

При конвективном теплообмене тепловой поток q определяется законом Ньютона, устанавливающим связь между q и разностью температур потока T и стенки T_w :

$$q = \alpha (T - T_w). \quad (1.6)$$

Исследования последних десятилетий показали, что коэффициент пропорциональности α , называемый коэффициентом теплоотдачи, не сохраняет постоянного значения, а является сложной функцией характера обтекания и структуры потока, поэтому зависимость (1.6) в настоящее время рассматривают не как выражение какого-либо закона природы, а как формулу для определения коэффициента теплоотдачи.

Сжимаемая жидкость. Сжимаемая называется жидкость, способная изменять свой объем под влиянием внешних сил. Мерой сжимаемости является модуль объемной упругости E , определяемый из соотношения

$$\Delta p = -E \frac{\Delta V}{V_0}, \quad (1.7)$$

где ΔV — относительное изменение объема V_0 в результате изменения давления на величину Δp .

Для капельных жидкостей значение E очень велико, и поэтому практически в большинстве случаев они могут считаться несжимаемыми. Например, для воды $E = 20\,000 \text{ кгс/см}^2 = 19,5 \cdot 10^8 \text{ Па}$,

г. е. повышение давления на одну атмосферу вызывает относительное изменение объема на $\Delta V/V_0 = 0,005\%$.

Для газов модуль объемной упругости имеет существенно меньшее значение. Так, если изменение объема происходит при постоянной температуре, то из уравнения состояния для газов можно получить

$$E = p_0,$$

следовательно, для воздуха в нормальном состоянии в этом случае

$$E = 1 \text{ кгс/см}^2 = 98\,066,5 \text{ Па.}$$

Вопрос о том, следует ли учитывать влияние сжимаемости для данного газа, решается в каждом конкретном случае отдельно.

Из закона сохранения массы можно получить

$$\frac{\Delta p}{\rho_0} = -\frac{\Delta V}{V_0},$$

следовательно,

$$\Delta p = E \frac{\Delta \rho}{\rho_0}.$$

Очевидно, что условием несжимаемости будет условие $\Delta p/\rho_0 \ll 1$. Используя уравнение Бернулли, можно показать, что отношение $\Delta p/\rho_0$ имеет порядок

$$\frac{\Delta p}{\rho_0} \approx \frac{\rho u^2}{2E}.$$

Или если ввести понятие скорости распространения звука в данной среде a , которая в соответствии с формулой Лапласа определяется соотношением

$$a^2 = E/\rho,$$

можно получить условие несжимаемости

$$\frac{\Delta p}{\rho_0} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{u}{a} \right)^2 = \frac{1}{2} M^2 \ll 1. \quad (1.8)$$

Таким образом, в случае течения газа влиянием сжимаемости можно пренебречь только в том случае, когда отношение $M = u/a$ много меньше единицы.

Для воздуха, например, при нормальных атмосферных условиях $a \approx 330$ м/с и относительное изменение плотности при скорости движения $u = 100$ м/с составляет

$$\frac{\Delta p}{\rho_0} = \frac{1}{2} M^2 \approx 0,05.$$

Практически эта скорость считается предельной, когда еще можно пренебрегать влиянием сжимаемости.

Сплошная среда. Все уравнения, выведенные в аэродинамике или в теории теплообмена, справедливы для сплошной среды, обладающей свойством непрерывности распределения кинемати-

ческих элементов в пространстве и дифференцируемости их в пространстве и времени, т. е. при математическом построении и анализе уравнений, как правило, приходится отвлекаться от молекулярной структуры вещества. В связи с этим включаемые в анализ дифференциальные объемы должны быть достаточно большими по сравнению с размером молекул и с длиной их свободного пробега, но в то же время эти объемы должны быть достаточно малыми, чтобы можно было бы их рассматривать как объемы дифференциальные. Таким образом, решения и формулы, которые будут получены в этой и последующих главах настоящей монографии, нельзя применять, например, к сильно разреженным газам, в которых длина свободного пробега молекул велика, а также к потокам, в которых имеются разрывы (например, скачки уплотнения), и т. д.

Полная производная. При рассмотрении процессов обтекания и теплообмена в движущихся потоках в общем случае в качестве величины, характеризующей полное изменение векторной или скалярной величины X , вводится понятие полной (субстанциональной) производной, которая соответствует эйлеровым правилам дифференцирования и записывается в виде

$$\frac{DX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\mathbf{U}, \text{grad } X). \quad (I.9)$$

Если разложить вектор скорости \mathbf{U} на составляющие u, v, w , то для температуры T и скорости \mathbf{U} будут иметь место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{DT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}; \\ \frac{Du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{Dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{Dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (I.10)$$

Совершенный газ. Все выводы в последующем относятся к газу вязкому, но совершенному, в котором давление, температура и плотность связаны между собой уравнением Клапейрона

$$\frac{p}{\rho} = RT = \frac{k-1}{k} i,$$

где R — газовая постоянная; $k = c_p/c_v$; i — энтальпия газа.

2. Основная система дифференциальных уравнений динамики реального газа

Будем рассматривать газ однородный, реальный, но совершенный, т. е. подчиняющийся уравнению Клапейрона. Очевидно, что его состояние в некоторой точке M с координатами x, y, z

в декартовой системе координат будет определяться системой дифференциальных уравнений [118]. Рассмотрим эти уравнения.

Уравнение неразрывности. Из закона сохранения массы можно получить выражение

$$\frac{D}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = 0. \quad (I.11)$$

Здесь $\frac{D}{dt}$ — полная производная по времени; τ — некоторый произвольный объем.

Выполнив в уравнении (I.11) дифференцирование, заменив полную производную ее локальными и конвективными составляющими, используя условие произвольности объема τ и выполнив некоторые векторные преобразования, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (I.12)$$

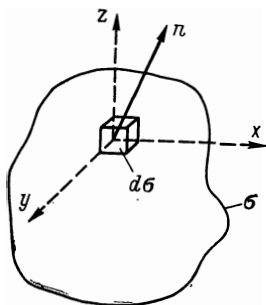


Рис. 1. К выводу уравнения движения

Уравнение движения. Рассмотрим представленный на рис. 1 некоторый произвольный объем τ , имеющий боковую поверхность σ . Выберем в нем элементарный объем $d\tau$, выделяющий из боковой поверхности элемент $d\sigma$. Нормаль к поверхности $d\sigma$ обозначим \mathbf{n} .

Основное динамическое уравнение движения выводится на основе трех фундаментальных законов механики.

Согласно закону изменения количества движения, производная по времени от главного вектора изменения количества движения равна главному вектору всех внешних поверхностных и массовых сил. Тогда можно записать

$$\frac{D}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{p}_n d\sigma + \int_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau. \quad (I.13)$$

Здесь \mathbf{p}_n — напряжение в данной точке; \mathbf{F} — равнодействующая массовых сил в данной точке.

Известно, что напряжение в данной точке связано с тензором напряжений \mathbf{P} соотношением

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{nP}. \quad (I.14)$$

Если пренебречь влиянием массовых сил и использовать соотношение (I.14), то уравнение (I.13) может быть сведено к уравнению

$$\frac{D}{dt} \int_{\tau} \rho \mathbf{v} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{nP} d\sigma. \quad (I.15)$$

Из этого уравнения после выполнения дифференцирования, используя закон сохранения массы, можно получить,

учитывая, что уравнение (I.15) написано для произвольного объема, следующее выражение ¹:

$$\rho \frac{Dv}{dt} = \text{Div } P, \quad (\text{I.16})$$

или в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}; \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z}; \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}, \end{aligned} \right\} (\text{I.17})$$

Далее, используя теорему о моменте количества движения, согласно которой изменение главного момента количества движения равняется главному моменту всех сил, т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) d\tau = \int_{\sigma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) d\sigma, \quad (\text{I.18})$$

можно получить условие взаимности напряжений:

$$\left. \begin{aligned} P_{xy} &= P_{yx}, \\ P_{xz} &= P_{zx}, \\ P_{yz} &= P_{zy}. \end{aligned} \right\} (\text{I.19})$$

Используя соотношение (I.19) и обобщенный закон Ньютона, согласно которому тензор напряжений P есть линейная функция тензора скоростей деформаций \dot{S} , т. е.

$$P = 2\mu\dot{S} + b\varepsilon, \quad (\text{I.20})$$

можно получить выражение для определения тензора напряжений в виде

$$P = 2\mu\dot{S} + \left(-p - \frac{2}{3} \mu \text{div } \mathbf{v} \right) \varepsilon. \quad (\text{I.21})$$

Здесь μ — константа; b — скалярная величина, которая может быть функцией входящих тензоров; ε — тензорная единица.

Подставляя выражение (I.21) в (I.17), можно получить основное уравнение движения в виде

$$\rho \frac{Dv}{dt} = 2 \text{Div} (\mu\dot{S}) - \text{grad} \left(p + \frac{2}{3} \mu \text{div } \mathbf{v} \right) \quad (\text{I.22})$$

¹ Знаком Div обозначается дивергенция тензора, в отличие от дивергенции вектора, обозначаемой знаком div.

или в развернутом виде для плоского стационарного движения газа:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (I.23)$$

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Уравнения движения (I.23), именуемые в аэродинамике уравнениями Навье—Стокса и выведенные для вязкой жидкости, не допускают предельного перехода к течению идеальной (без трения) жидкости. Легко видеть, что если мы просто подставим в уравнения (I.23) значение $\mu = 0$, то из них будут исключены члены со старшими производными и, таким образом, будет понижен порядок уравнений. Решения таких упрощенных уравнений не смогут удовлетворять всем граничным условиям полных (первоначальных) уравнений, и, следовательно, эти решения не имеют смысла. Из сказанного следует, что для получения из уравнений Навье—Стокса решений, соответствующих предельному случаю течений с очень большими числами Рейнольдса ($Re \rightarrow \infty$) и в то же время имеющих физический смысл во всем исследуемом диапазоне переменных, необходимо осуществлять предельный переход к исчезающей вязкости ($\mu \rightarrow 0$) не в самих дифференциальных уравнениях, а в их решениях.

Сказанное можно легко проиллюстрировать простым математическим примером, приведенным в работе [167].

Рассмотрим простое уравнение 2-го порядка

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = 0, \quad (a)$$

где m — масса колеблющейся точки; c — коэффициент восстанавливающей силы; k — коэффициент затухания; x — расстояние, на которое точка удалена от положения равновесия.

Начальное условие: при $t = 0$ имеем $x = 0$.

Решение уравнения (a) при малых значениях m ($m \ll \frac{k^2}{4c}$), как известно, имеет вид

$$x = A_1 e^{-ct/k} + A_2 e^{-kt/m}. \quad (б)$$

Используя начальное условие, можно получить

$$A_2 = -A_1 = A,$$

тогда

$$x = A (e^{-ct/k} - e^{-kt/m}). \quad (в)$$

Решение (в) при трех разных значениях m представлено на рис. 2 штриховыми линиями (чем меньше m , тем выше кривая). Если теперь подставить $m = 0$ в уравнение (а), то оно превращается в уравнение первого порядка

$$k \frac{dx}{dt} + cx = 0,$$

которое имеет только одно решение

$$x = Ae^{-ct/k}. \quad (\Gamma)$$

Кривая, соответствующая этому решению, изображена на рис. 2 сплошной линией. Как видно, при больших значениях t решения (штриховые и сплошная линии) сливаются, но при $t = 0$ решение (Г) сильно отличается от решения (в), не удовлетворяет начальному условию и поэтому не имеет физического смысла.

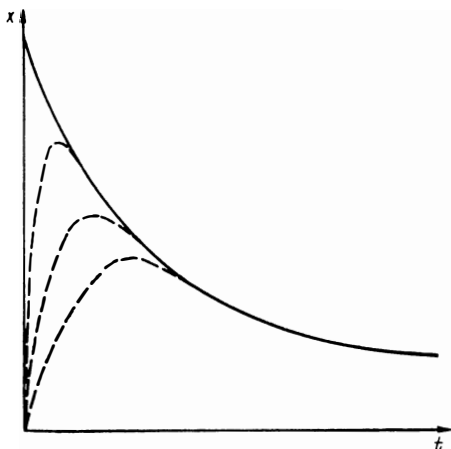


Рис. 2. Решение задачи о колебании материальной точки

Уравнение притока тепла. Согласно первому закону термодинамики, изменение полной энергии газа

$$\int_{\tau} \rho \left(c_p T + \frac{v^2}{2} \right) d\tau$$

равно сумме мощностей приложенных внешних сил $\int_{\sigma} \mathbf{p}_n \mathbf{v} \, d\sigma$ и количества тепла $\int_{\sigma} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \, d\sigma$, притекающего извне в единицу времени (лучеиспусканием пренебрегаем). Тогда можно написать

$$\frac{D}{dt} \int_{\tau} \rho \left(c_p T + \frac{v^2}{2} \right) d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{p}_n \mathbf{v} \, d\sigma + \int_{\sigma} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \, d\sigma. \quad (I.24)$$

Выполнив дифференцирование, используя закон сохранения массы и преобразовав поверхностные интегралы к объемным [118], получим для произвольного объема

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(c_p T + \frac{v^2}{2} \right) = \operatorname{div} (P\mathbf{v}) + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T). \quad (I.25)$$

После преобразований уравнение притока тепла приобретает вид

$$\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(i + \frac{v^2}{2} \right) - \mu \operatorname{grad} \left(\frac{i}{\rho} + v^2 \right) - \mu \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \frac{2}{3} \mu \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] = 0. \quad (I.26)$$

В развернутом виде для плоского стационарного течения получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(i + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{i}{Pr} + \frac{4}{3} \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \mu v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu u \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(i + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{i}{Pr} + \frac{u^2}{2} + \frac{4}{3} \frac{v^2}{2} \right) - \mu u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu v \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \quad (I.27) \end{aligned}$$

Уравнение Клапейрона. Как известно, уравнение Клапейрона имеет вид

$$p v = R T, \quad (I.28)$$

или

$$\frac{p}{\rho} = R T = \frac{R}{c_p} i = \frac{k-1}{k} i. \quad (I.29)$$

Закон зависимости вязкости от температуры. Динамическая вязкость связана с температурой соотношением

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^n. \quad (I.30)$$

Для очень высоких температур $n \approx 0,50$; для средних температур $n \approx 0,75$; для низких температур $n \approx 1,00$.

Шесть уравнений — (I.12), (I.23), (I.27), (I.28), (I.30) — составляют полную замкнутую систему уравнений динамики реального газа. Эта система даже для сравнительно простого случая плоского стационарного обтекания является весьма сложной нелинейной системой, и аналитическое ее решение до настоящего времени выполнено только для некоторых частных случаев. Кроме нелинейности конвективных членов сложность системы заключается еще в зависимости вязкости от поля температур, которое, в свою очередь, является функцией условий обтекания. В последнее время в связи с созданием весьма совершенных электронно-вычислительных машин (ЭВМ) и широким их внедрением в вычислительную практику существенно расширился круг задач, для которых возможно численное решение системы с приемлемой точностью.

Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться вопросы теплообмена и сопротивления, которые, как уже говорилось выше, определяются процессами обмена в пограничном слое, то преобразуем основную систему уравнений применительно к условиям течения в пограничном слое.

3. Уравнения плоского пограничного слоя

Для вывода уравнений пограничного слоя [118] представим систему основных уравнений динамики реального газа в безразмерных координатах:

$$\bar{x} = \frac{x}{x_1}; \quad \bar{y} = \frac{y}{y_1}; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_1}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_1};$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}; \quad \bar{i} = \frac{i}{i_1}; \quad \bar{p} = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho_1 u_1^2}; \dots,$$

где x_1, y_1 — некоторые постоянные величины (масштаб); u_1, ρ_1, μ_1 и т. д. — значения скорости, давления, плотности, динамического коэффициента вязкости для плоского течения на бесконечности.

Подставив все эти безразмерные величины в первое уравнение системы (I.23), получим

$$\begin{aligned} \rho_1 \bar{\rho} \left(\bar{u}_1 \bar{u} \frac{u_1}{x_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + v_1 \bar{v} \frac{u_1}{y_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = & - \frac{1}{x_1} \frac{\partial (p - p_1)}{\partial \bar{x}} + \\ & + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(2 \mu_1 \bar{\mu} \frac{u_1}{x_1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Вынося за скобку постоянный коэффициент перед первым членом, имеем

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{x_1} \left(\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{v_1}{u_1} \frac{x_1}{y_1} \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{1}{x_1} \frac{\partial (p - p_1)}{\partial \bar{x}} + \dots$$

Прделаем такую же операцию со всеми остальными уравнениями системы: (I.12), (I.23), (I.27), (I.28), (I.30). После этого поделим каждое из уравнений системы на свой коэффициент перед первым членом, тогда получим следующие уравнения.

Уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{x_1 v_1}{y_1 u_1} \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{4}{3} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) - \\ & - \frac{2}{3} \frac{x_1 v_1}{y_1 u_1} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{1}{R_1} \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) + \\ & + \frac{x_1 v_1}{y_1 u_1} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right); \\ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{x_1 v_1}{y_1 u_1} \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = & - \frac{1}{2} \frac{x_1 u_1}{y_1 v_1} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \\ & + \frac{1}{R_1} \frac{x_1 u_1}{y_1 v_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) + \\ & + \frac{4}{3} \frac{1}{R_1} \left(\frac{x_1}{u_1} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{R_1} \frac{x_1 u_1}{y_1 v_1} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

где

$$R_1 = \frac{\rho_1 u_1 x_1}{\mu_1} = \frac{u_1 x_1}{\nu_1}.$$

Комплекс $R_1 = \frac{u_1 x_1}{v_1}$ носит название числа Рейнольдса и, как будет показано ниже, является весьма характерной величиной при аэродинамических исследованиях.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u})}{\partial x} + \frac{x_1 v_1}{y_1 u_1} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v})}{\partial y} = 0. \quad (II)$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{\rho} \bar{u} \left[\bar{i} + \frac{u_1^2}{i_1} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{v_1^2}{u_1^2} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] - \right. \\ & - \frac{1}{R_1} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{i}}{Pr} + \frac{u_1^2}{i_1} \left(\frac{4}{3} \frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{v_1^2}{u_1^2} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] - \\ & - \left. \frac{1}{R_1} \frac{x_1 v_1}{y_1 u_1} \frac{u_1^2}{i_1} \left(\bar{\mu} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{y_1 u_1}{x_1 v_1} \bar{\mu} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right\} + \\ & + \frac{x_1}{y_1} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{v_1}{u_1} \bar{\rho} \bar{v} \left[\bar{i} + \frac{u_1^2}{i_1} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{v_1^2}{u_1^2} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] - \right. \\ & - \left. \frac{1}{R_1} \frac{x_1}{y_1} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\bar{i}}{Pr} + \frac{u_1^2}{i_1} \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{4}{3} \frac{v_1^2}{u_1^2} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] - \right. \\ & - \left. \frac{1}{R_1} \frac{u_1^2}{i_1} \frac{v_1}{u_1} \left(\bar{\mu} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right\} = 0. \quad (III) \end{aligned}$$

Уравнение состояния (Клапейрона)

$$\frac{p_1 + \bar{p} \rho u_1^2 / 2}{\bar{\rho} \rho_1} = \frac{a_1^2}{k} \bar{i},$$

или

$$\bar{p} = \bar{\rho} \left[\bar{i} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right] \frac{2}{k M_1^2}. \quad (IV)$$

Уравнение для вязкости

$$\bar{\mu} = \bar{i}^n. \quad (V)$$

Масштабы x_1 , y_1 , u_1 и т. д. выберем таким образом, чтобы ограничить задачу характерными для пограничного слоя условиями. Известно, что в пограничном слое при любых условиях продольные и поперечные скорости и координаты всегда конечны. Для этого, как видно из рассмотрения уравнений (I)—(III), должны выполняться два условия:

$$\frac{x_1 v_1}{y_1 u_1} = 1; \quad \frac{1}{R_1} \left(\frac{x_1}{y_1} \right)^2 = 1.$$

Из этих условий вытекает необходимость следующего соотношения между масштабами:

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{R_1}}; \quad v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{R_1}}.$$

Подставляя полученные значения y_1 и v_1 в уравнения (I)—(V) и используя условие

$$\frac{i_1}{u_1^2} = \frac{1}{(k-1)M_1^2},$$

получим:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{kM_1^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \\ &- \frac{2}{3} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right); \\ \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= -\frac{1}{kM_1^2} R_1 \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v})}{\partial y} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{\rho} \bar{u} \left[\bar{i} + (k-1)M_1^2 \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{1}{R_1} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_1} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\bar{i}}{\text{Pr}} + (k-1)M_1^2 \left(\frac{4}{3} \frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{1}{R_1} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_1} (k-1)M_1^2 \left(\bar{\mu} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{2}{3} \bar{\mu} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \bar{\rho} \bar{v} \left[\bar{i} + (k-1)M_1^2 \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{1}{R_1} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\bar{i}}{\text{Pr}} + (k-1)M_1^2 \left(\frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{4}{3} \frac{1}{R_1} \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_1} (k-1)M_1^2 \left(\bar{\mu} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right\} = 0; \\ \bar{\rho} = \bar{\rho} \left(\bar{i} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{2}{kM_1^2}; \end{aligned}$$

$$\bar{\mu} = \bar{i}^n.$$

Обычно во всех задачах пограничного слоя, как это будет показано ниже, имеет место условие $R_1 \gg 1$, а следовательно,

$1/R_1 \ll 1$. Тогда для перехода к уравнениям пограничного слоя необходимо во всех полученных уравнениях отбросить все члены первого и высших порядков относительно малой величины $1/R_1$. Таким образом, получаются уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{kM_1^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{v})}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\rho} \bar{u} \left(\bar{i} + \frac{k-1}{2} M_1^2 \bar{u}^2 \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\rho} \bar{v} \left(\bar{i} + \frac{k-1}{2} M_1^2 \bar{u}^2 \right) \right] \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{i}}{\text{Pr}} + \frac{k-1}{2} M_1^2 \bar{u}^2 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI})$$

Если использовать уравнение неразрывности, то можно правую часть последнего уравнения заменить и получить выражение

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{i} + \frac{k-1}{2} M_1^2 \bar{u}^2 \right) + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{i} + \frac{k-1}{2} M_1^2 \bar{u}^2 \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{i}}{\text{Pr}} + \frac{k-1}{2} M_1^2 \bar{u}^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Представляя систему уравнений (VI) в размерном виде, дополняя ее остальными уравнениями полной системы и используя выбранные масштабы, получим:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (\text{VII})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (\text{VIII})$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (\text{IX})$$

$$\rho u \frac{\partial i_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial i_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial i_0}{\partial y} \right), \quad (\text{X})$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{k-1}{k} i; \quad (\text{XI})$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{i}{i_0} \right)^n, \quad (\text{XII})$$

где

$$i_0 = i + \frac{k-1}{2} M_1^2 u^2.$$

Уравнения (VII)—(XII) составляют основную систему дифференциальных уравнений плоского пограничного слоя в общем случае движения вязкого сжимаемого газа.

Из проведенного анализа и из рассмотрения полученной системы уравнений вытекают свойства пограничного слоя:

1) $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$;

2) все поперечные масштабы в пограничном слое пропорциональны величине $1/\sqrt{R_1}$. В частности, толщина пограничного слоя δ убывает как $1/\sqrt{R_1}$.

Уравнение (X) может быть также представлено в виде

$$\rho u \frac{\partial T^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[T^* + (Pr - 1) \frac{u^2}{2c_p} \right] \right\}.$$

Здесь $T^* = T + u^2/(2c_p)$ — температура торможения.

Путем преобразования могут быть получены еще два часто встречающихся вида этого уравнения:

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial y} \right);$$

$$c_p \rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Рассмотрим частный случай системы уравнений (VII)—(XII). Если мы имеем дело с несжимаемой жидкостью, то физические свойства будут постоянными и $T^* \approx T$. Тогда при $Pr = 1$ будем иметь:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Так как в пограничном слое $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, можно утверждать, что распределение давления в любых соответствующих точках внутри пограничного слоя, в том числе и на поверхности обтекаемого тела, совпадает с распределением давления на внешней границе

пограничного слоя, по которой происходит его смыкание с внешним потенциальным потоком. Следовательно, распределение этого давления может быть определено непосредственно из расчета потенциального обтекания без учета вязкости или измерено экспериментально с помощью дренажных отверстий на поверхности. Таким образом, при решении задач расчета пограничного слоя распределение давлений всегда считается заданным независимо.

Если сравнить уравнения (VII) и (X), то видно, что при

$$\frac{dp}{dx} = 0 \text{ и } \text{Pг} = 1 \quad (\text{I.31})$$

они являются совершенно идентичными. Это позволяет считать, что в рассматриваемом случае скоростные поля и поля температур торможения подобны, так как $i_0 = c_p T_0^*$, т. е. профили кривых

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \text{ и } \frac{T^* - T_w}{T_0^* - T_w} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

должны быть одинаковыми. Здесь U — скорость на внешней границе пограничного слоя.

На этой идентичности построена так называемая гидродинамическая теория теплообмена, позволяющая по известным значениям скоростных величин определять величины температурные и рассчитывать, например, количество тепла q по известному t . В качестве одной из таких расчетных формул можно привести формулу Куерти

$$\frac{q}{\tau} = \frac{\lambda_w}{\mu_w} \frac{T_0}{u_0} \left[\frac{k-1}{2} M_0^2 - \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \right].$$

Гидродинамическая теория теплообмена была развита в свое время Карманом для случая обтекания поверхности потоком несжимаемой жидкости и экспериментально подтверждена обнаруженным подобием температурных и скоростных полей. Как видно из приведенного анализа, она оказывается справедливой и для потока сжимаемого газа при условии введения в рассмотрение вместо температуры потока T температуры торможения T^* .

Однако следует помнить, что полное подобие должно иметь место только при соблюдении условий (I.31). Опыт показывает, что при небольших продольных градиентах давления, т. е. при $\frac{dp}{dx} \approx 0$, или при значениях числа Pг , не сильно отличающихся от единицы, имеет место приближенное подобие температурных и скоростных полей.

Для газов $\text{Pг} \approx 1$, и поэтому при течении газа в трубе или при обтекании газом пластины возможно приближенное использование гидродинамической теории теплообмена. Для жидкостей $\text{Pг} \gg 1$ (для воды, например, $\text{Pг} = 8 \div 15$, для органических веществ $\text{Pг} = 40 \div 200$ и т. д.), для жидких металлов, наоборот, $\text{Pг} \ll 1$ ($\text{Pг} = 10^{-2} \div 10^{-3}$), поэтому для всех этих сред даже при обтека-

нии пластины или при течении в трубе, строго говоря, нельзя применять гидродинамическую теорию теплообмена.

Приведенные в настоящем параграфе преобразования безразмерных уравнений динамики вязкого сжимаемого газа справедливы, как это уже отмечалось, при больших значениях числа Рейнольдса R . Таким образом, полученные уравнения пограничного слоя справедливы только для течения с большими R . При малых R ими пользоваться нельзя, в этом случае необходимо решать полную систему уравнений. Но при малых значениях R

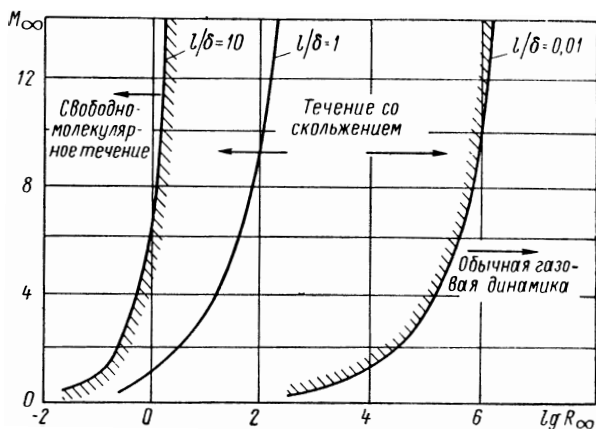


Рис. 3. Характерные зоны течения вязкого газа при изменении параметров потока

неверна и вся теория пограничного слоя, так как при этом теряется и само понятие пограничного слоя [117].

Анализ показывает, что область применимости уравнений пограничного слоя и самого понятия пограничного слоя определяется не только значением числа Рейнольдса, но и соотношением толщины пограничного слоя δ и длины свободного пробега молекул l .

В кинетической теории газов показано, что

$$l = 1,255 \sqrt{k} \frac{v}{a}.$$

Если ввести параметры

$$R_\infty = \frac{u_\infty L}{v_\infty}, \quad M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty}$$

и считать, что между определяющим размером тела L и толщиной пограничного слоя δ имеет место полученное выше соотношение $\delta/L = 1/\sqrt{R}$, то получим

$$\frac{l}{\delta} = 1,255 \sqrt{k} \frac{M_\infty}{\sqrt{R_\infty}}.$$

На рис. 3 приведена схема, из которой наглядно видны области применимости тех или иных методов расчета течения вязкого газа. Область применимости уравнений обычной газовой динамики и теории пограничного слоя находится справа от кривой, соответствующей $l/\delta = 0,01$. Например, при $M_\infty = 1,5$ предельное значение числа Рейнольдса, определяющее применимость уравнений пограничного слоя, соответствует $R_\infty \geq 10^4$.

4. Вывод основных интегральных соотношений пограничного слоя

Полученная в п. 3 система уравнений (VII)—(XII) решается для ряда задач точно, для некоторых задач приближенно. Каждый конкретный случай обтекания характеризуется своими граничными условиями.

В общем случае течения газа при наличии теплообмена у обтекаемой поверхности кроме скоростного возникает и тепловой (температурный) пограничный слой, причем при $Pr = 1$ толщины этих слоев равны, при $Pr \neq 1$ толщина температурного слоя, обычно обозначаемая δ_t , не равна толщине δ скоростного (динамического) слоя. При $Pr > 1$ имеем $\delta_t < \delta$, а при $Pr < 1$, наоборот $\delta_t > \delta$.

Таким образом, составляя граничные условия для системы (VII)—(XII), следует помнить, что для уравнения (VII) нужно рассматривать условия течения у стенки и на внешней границе динамического пограничного слоя, а для уравнения (X) — условия у стенки и на внешней границе теплового пограничного слоя.

При приближенном решении задач о теплообмене и сопротивлении поверхности в потоке газа обычно уравнения пограничного слоя преобразуют к двум интегральным соотношениям: интегральному соотношению импульсов и интегральному соотношению энергии, которые и решают тем или иным способом.

Получим эти интегральные соотношения в общем виде, ограничиваясь для простоты выкладок случаем плоского стационарного обтекания. Рассмотрим уравнения (VII) и (IX).

Введем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) &\equiv u \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \\ + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= u \left[\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \right] + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Последнее преобразование справедливо потому, что в силу уравнения (IX) сумма, стоящая в скобках, обращается в нуль. Подставим полученное соотношение в уравнении (VII) и воспользуемся также очевидным соотношением

$$-\frac{dp}{dx} = \rho_0 U \frac{dU}{dx}.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) = \rho_0 U \frac{dU}{dx} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (I.32)$$

Рассмотрим также тождественное преобразование

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u U) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v U) \equiv U \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \rho u \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \rho v \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Отсюда, используя условие (IX), а также учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, можно получить соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u U) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v U) = \rho u \frac{dU}{dx}. \quad (I.33)$$

Вычтя уравнение (I.32) из уравнения (I.33), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\rho u (U - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v (U - u)] = - \frac{\partial U}{\partial x} (\rho_0 U - \rho u) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (I.34)$$

Проинтегрируем уравнение (I.34) по y в пределах пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} [\rho u (U - u)] dy + \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} [\rho v (U - u)] dy = \\ = \int_0^{\delta} \frac{dU}{dx} (\rho u - \rho_0 U) dy - \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy. \end{aligned}$$

Проинтегрировав вторые члены в правой и левой частях уравнения и подставив в полученные выражения пределы интегрирования, можно получить уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_0 U^2 \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy \right] = \\ = - \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} (\rho_0 U - \rho u) dy - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \end{aligned} \quad (I.35)$$

Введем обозначение

$$\int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \delta^{**}. \quad (I.36)$$

Величина δ^{**} обычно называется толщиной потери импульса. Введя это обозначение в уравнение (I.35), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 U^2 \delta^{**}) = - \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} (\rho_0 U - \rho u) dy - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (I.37)$$

Рассмотрим интеграл в уравнении (I.37). Очевидно, можно преобразовать его следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} (\rho_0 U - \rho u) dy &\equiv \int_0^{\delta} (\rho_0 U - \rho U + \rho U - \rho u) dy = \\ &= \int_0^{\delta} \rho U \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) dy + \int_0^{\delta} \rho_0 U \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy. \end{aligned}$$

Учитывая, что, согласно уравнению (VIII), поперек пограничного слоя давление не изменяется и что тогда по уравнению Клапейрона $\rho/\rho_0 = T_0/T$, а также, учитывая, что величины ρ_0 и U не зависят от y , можно два последних интеграла преобразовать:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} (\rho_0 U - \rho u) dy &= - \rho_0 U \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) dy + \\ &+ \rho_0 U \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \\ &= \rho_0 U \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T_0 - T_w + T_w - T}{T_0} dy + \rho_0 U \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \\ &= \rho_0 U \frac{T_0 - T_w}{T_0} \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{T - T_w}{T_0 - T_w} \right) dy + \\ &+ \rho_0 U \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy. \end{aligned} \quad (I.38)$$

Введем обозначения:

$$T - T_w = t^*; \quad T_0 - T_w = t_0^*; \quad (I.39)$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \delta^*; \quad \int_0^{\delta_T} \frac{\rho}{\rho_0} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) dy = \delta_T^*. \quad (I.40)$$

Величину δ^* обычно называют толщиной вытеснения, а величину δ_τ^* — толщиной теплового вытеснения.

При введении в (I.38) обозначений по (I.40) можно получить

$$\int_0^\delta (\rho_0 U - \rho u) dy = -\rho_0 U \frac{t_0^*}{T_0} \delta_\tau^* + \rho_0 U \delta^*. \quad (\text{I.41})$$

Подставив соотношение (I.41) в уравнение (I.37), получим зависимость

$$\frac{d}{dx} [\rho_0 U^2 \delta^{**}] = \rho_0 U \frac{dU}{dx} \left[\frac{t_0^*}{T_0} \delta_\tau^* - \delta^* \right] - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (\text{I.42})$$

или

$$\begin{aligned} \rho_0 U^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + U^2 \delta^{**} \frac{d\rho_0}{dx} + 2\rho_0 \delta^{**} U \frac{dU}{dx} = \\ = \rho_0 U \frac{dU}{dx} \left[\frac{t_0^*}{T_0} \delta_\tau^* - \delta^* \right] - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\frac{d\rho_0}{dx} = \rho'; \quad \frac{dU}{dx} = U'; \quad \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \tau_w,$$

получим интегральное соотношение импульсов для плоского пограничного слоя в сжимаемом потоке газа

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} \left(\frac{\rho'}{\rho} + 2 \frac{U'}{U} \right) + \frac{U'}{U} \left(\delta^* - \frac{t_0^*}{T_0} \delta_\tau^* \right) = \frac{\tau_w}{\rho_0 U^2}. \quad (\text{I.43})$$

Если, как это иногда делают, ввести определение t^* и t_0^* не по (I.39), а обозначить

$$t^* = T^* - T_w; \quad t_0^* = T_0^* - T_w,$$

то уравнение (I.43) будет иметь более сложный вид:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} \frac{\rho_0'}{\rho_0} + \frac{U'}{U} (2\delta^{**} + \delta^* + \alpha_0^2 \delta^{***} + \frac{t_0^*}{T_0} \delta_\tau^*) = \frac{\tau_w}{\rho_0 U^2},$$

где

$$\alpha_0^2 = \frac{U^2}{2c_p T_0^*}, \quad \delta^{***} = \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) dy.$$

Рассмотрим частный случай уравнения (I.43).

При обтекании поверхности потоком сжимаемого газа при практически одинаковых температурах стенки и потока, т. е. при значении так называемого температурного фактора $T_w/T \approx 1$,

физические свойства потока будут постоянными и $\rho = \rho_0$; $\rho'_0 = 0$. Тогда уравнение (I.43) приобретает вид:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}. \quad (\text{I.44})$$

При этом, очевидно, выражения для условных толщин пограничного слоя также приобретают более простое написание:

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy; \quad \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (\text{I.45})$$

Как видно из сопоставления уравнений (I.43) и (I.44), в рассматриваемом частном случае из уравнения интегрального соотношения импульсов выпадает член, содержащий характеристики теплового пограничного слоя δ_T^* , поэтому динамическая задача решается независимо от тепловой.

При обтекании поверхности потоком несжимаемого газа, но при значительном различии температур потока T и стенки T_w (интенсивное охлаждение поверхности в высокотемпературном газе или охлаждение поверхности с высокой температурой потоком холодного газа), т. е. при $T_w/T \neq 1$, в уравнении интегрального соотношения импульсов сохраняются все члены, характеризующие изменение физических констант и температуры поперек пограничного слоя. Таким образом, динамическая и тепловая задачи в этом случае, как и в общем случае обтекания поверхности потоком сжимаемого газа, не разделяются.

Интегральное соотношение энергии получается аналогичным методом с помощью уравнений (IX) и (X).

Вводятся тождественные преобразования:

$$\frac{\partial(\rho u T^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T^*)}{\partial y} \equiv T^* \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] + \rho u \frac{\partial T^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T^*}{\partial y}; \quad (\text{I.46})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u T_0^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T_0^*)}{\partial y} &\equiv \rho u \frac{\partial T_0^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T_0^*}{\partial y} + \\ &+ T_0^* \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

Соотношение (I.46) подставляется в уравнение (X), и полученный результат вычитается из уравнения, получаемого при подстановке (IX) в тождество (I.47).

Далее, используя все принятые ранее обозначения, а также вводя понятие толщины потери теплосодержания

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) dy \quad (\text{I.48})$$

и интегрируя в пределах теплового пограничного слоя, можно получить уравнение

$$\frac{q}{c_p} = \frac{d}{dx} (\rho_0 U t_0^* \delta_{\tau}^{***}) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho_0 U^3}{2c_p} \delta^{***} \right) - \rho_0 U_0 \left[\delta - \delta^* + \left(1 - \frac{T_w}{T_0} \right) \delta_{\tau}^* \right]. \quad (I.49)$$

Отсюда получаем интегральное соотношение энергии в развернутом виде

$$\frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx^*} + \delta_{\tau}^{**} \left[\frac{U'}{U} + \frac{\rho_0'}{\rho_0} + \frac{t_0^{**'}}{t_0^*} \right] + \frac{U^2}{2c_p t_0^*} \left[\frac{d\delta^{***}}{dx} + \delta^{***} \left(\frac{\rho_0'}{\rho_0} + \frac{U'}{U} \right) \right] - \frac{T_0^{**'}}{t_0^*} \left[\delta - \delta^* + \left(1 - \frac{T_w}{T_0} \right) \delta_{\tau}^* \right] = \frac{q}{\rho_0 c_p U_0 t_0^*}. \quad (I.50)$$

Как видно, в уравнение (I.50) наряду с условными толщинами теплового пограничного слоя δ_{τ}^* и δ_{τ}^{**} входят также условные толщины динамического пограничного слоя δ^* , δ^{**} , δ^{***} , т. е. тепловая и динамическая задача должны решаться также совместно.

Частные случаи уравнения (I.50):

а) при малых скоростях $\frac{U^2}{2c_p t_0^*} \ll 1$, тогда

$$\frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx} + \delta_{\tau}^{**} \left(\frac{U_0'}{U_0} + \frac{\rho_0'}{\rho_0} + \frac{t_0^{**'}}{t_0^*} \right) - \frac{T_0^{**'}}{t_0^*} \left[\delta - \delta^* + \left(1 - \frac{T_w}{T_0} \right) \delta_{\tau}^* \right] = \frac{q}{\rho_0 c_p U_0 t_0^*}; \quad (I.51)$$

б) при $T_w/T_0 \approx 1$ и при $M \approx 0$ имеем $T_0^* = \text{const}$, тогда

$$\frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} \delta_{\tau}^{**} = \frac{q}{\rho_0 c_p U t_0^*}, \quad (I.52)$$

где

$$\delta_{\tau}^{**} = \int_0^{\delta_{\tau}^*} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) dy.$$

5. Представление интегральных соотношений пограничного слоя в переменных Дородницына

Из сравнения формул (I.44) и (I.52) с формулами соответственно (I.43) и (I.50) видно, насколько проще решается задача о расчете теплообмена и сопротивления при обтекании тел потоком несжимаемой жидкости. Кроме простоты формы уравнений очень

важно, что для несжимаемого потока тепловая и динамическая задачи полностью разделяются, т. е. в уравнении (I.44) мы имеем дело только с характеристиками динамического пограничного слоя, а в уравнении (I.52) — с характеристиками теплового пограничного слоя.

Вследствие этого для определения сопротивления не нужно рассчитывать тепловой слой, а для расчета теплоотдачи не нужно рассматривать слой динамический, как это имело место в общем случае обтекания сжимаемым газом. Это обстоятельство весьма упрощает расчеты.

В связи с этим появился целый ряд работ, в которых исследователи пытались вводить различные новые переменные или параметры, которые позволяли бы так или иначе сводить сложные уравнения к упрощенным.

Наиболее широкое распространение получили преобразования Дородницына—Стюарта.

А. А. Дородницын предложил в 1942 г. [42] преобразование координат, которое учитывает влияние сжимаемости и в то же время позволяет придать уравнениям для обтекания сжимаемым потоком форму, близкую к уравнениям пограничного слоя для обтекания несжимаемым потоком. Было предложено вместо обычных переменных x и y ввести в основную систему уравнений новые переменные:

$$\xi = \int_0^x \frac{\rho}{\rho_0^*} dx; \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy. \quad (\text{I.53})$$

Здесь ρ_0^* и ρ_0 — значения ρ и ρ соответственно в адиабатно и изоэнтропно заторможенном внешнем потоке.

Введем новые переменные в уравнения (VII), (IX), (X), учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\rho}{\rho_0^*} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.54})$$

Рассмотрим случай, когда на внешней границе пограничного слоя течение изоэнтропное. Тогда, очевидно, будет иметь место соотношение

$$p = p_0 (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (\text{I.55})$$

Здесь

$$\alpha_0 = \frac{U}{\sqrt{2i_0}}.$$

Соответственно из (I.55), используя (I.54), можно получить

$$\frac{dp}{dx} = (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k+1}{k-1}} \rho_0 U \frac{dU}{dx} = (1 - \alpha_0^2) \frac{\rho_0 U^2}{\alpha_0} \frac{d\alpha_0}{dx}. \quad (I.56)$$

Поскольку внутри пограничного слоя $\frac{dp}{dy} = 0$, что следует из уравнения (VIII), то, очевидно, соотношение (I.55) будет справедливо в любой точке пограничного слоя.

Нетрудно получить также выражения, связывающие значения в любой точке внутри пограничного слоя со значениями на внешней его границе, для следующих параметров:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right); \quad (I.57)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T_0}{T} = \frac{(1 - \alpha_0^2)^{k/(k-1)}}{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right)}; \quad (I.58)$$

$$\frac{i \mu}{\mu_0} = \left[1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 + \frac{t^*}{t_0^*} \right) \right]^n. \quad (I.59)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{u}{\sqrt{2i_0}} = \frac{u}{\sqrt{2c_p T_0}}. \quad (I.60)$$

Используя полученные соотношения, можно переменные Дородницына представить в виде:

$$\xi = \int_0^x (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}} dx; \\ \eta = (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}} \int_0^y \frac{dy}{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right)}. \quad (I.61)$$

Если ввести эти переменные в уравнение (VII) и поделить все члены уравнения на комплекс $\rho\rho/\rho_0$, то можно получить уравнение движения в виде

$$u \frac{du}{d\xi} + \frac{u}{(1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{v}{(1 - \alpha^2) + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right)} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \\ = \frac{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right)}{1 - \alpha_0^2} U \frac{dU}{d\xi} + \\ + \frac{1}{\rho_0 (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu \frac{(1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}} \frac{d\mu}{d\eta}}{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right)} \right]. \quad (I.62)$$

Если ввести обозначение

$$\frac{u}{(1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{v}{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right)} = \tilde{v}, \quad (I.63)$$

то можно представить уравнение (I.62) в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right)}{1 - \alpha_0^2} U \frac{dU}{d\xi} + \\ + v_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) \right]^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\}. \quad (I.64)$$

Аналогичным образом вводя переменные Дородницына в уравнение (IX), можно получить следующий вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = 0. \quad (I.65)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial U u}{\partial \xi} + \frac{\partial U \tilde{v}}{\partial \eta} = U \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right) + u \frac{\partial U}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial \eta}. \quad (I.66)$$

Используя уравнение (I.65) и учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$, равенство (I.66) можно свести к выражению

$$\frac{\partial U u}{\partial \xi} + \frac{\partial U \tilde{v}}{\partial \eta} - u \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \quad (I.67)$$

Аналогично можно получить

$$\frac{\partial u^2}{\partial \xi} + \frac{\partial u \tilde{v}}{\partial \eta} = 2u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} + u \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \quad (I.68)$$

Если ввести соотношение (I.68) в уравнение (I.64), то

$$\frac{\partial u u}{\partial \xi} + \frac{\partial u \tilde{v}}{\partial \eta} - \frac{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right)}{1 - \alpha_0^2} U \frac{dU}{d\xi} = \\ = v_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) \right]^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\}. \quad (I.69)$$

Вычитая из уравнения (I.67) уравнение (I.69) и производя преобразования, аналогичные преобразованиям в п. 3, можно получить интегральное соотношение импульсов в переменных Дородницына:

$$\frac{d\delta^{**}}{d\xi} + \frac{U'_\xi}{U} \left[\delta^{**} \left(2 + \frac{\alpha_0^2}{1 - \alpha_0^2} \right) + \frac{\delta^*}{1 - \alpha_0^2} \right] = \frac{T_0}{T_w} \frac{\tau_w}{\rho_0 U^2}. \quad (I.70)$$

Здесь

$$U'_\xi = \frac{dU}{d\xi}; \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_0^* U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta. \quad (I.71)$$

Введя переменные Дородницына в уравнение (X), разделив все члены уравнения на $\rho\rho/p_0$ и используя выражение (I.63), получим уравнение энергии в виде

$$u \frac{\partial T^*}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Pr} (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \times \\ \times \left\{ \lambda \frac{(1 - \alpha_0^2)^{k/(k-1)}}{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T^* + (\text{Pr} - 1) \frac{u^2}{2c_p} \right] \right\}. \quad (I.72)$$

Используя уравнение сплошности (I.65), можно получить соотношения:

$$\frac{\partial u T_0^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v} T_0^*}{\partial \eta} = T_0^* \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right) + \\ + u \frac{\partial T_0^*}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial T_0^*}{\partial \eta} = u \frac{dT_0^*}{d\xi}; \quad (I.73)$$

$$\frac{\partial u T^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v} T^*}{\partial \eta} = T^* \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right) + u \frac{\partial T^*}{\partial \xi} + \\ + \tilde{v} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} = u \frac{\partial T^*}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial T^*}{\partial \eta}. \quad (I.74)$$

Подставим соотношение (I.74) в уравнение (I.72):

$$\frac{\partial u T^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v} T^*}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Pr} (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \times \\ \times \left\{ \lambda \frac{(1 - \alpha_0^2)^{k/(k-1)}}{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T^* + (\text{Pr} - 1) \frac{u^2}{2c_p} \right] \right\}. \quad (I.75)$$

Далее, вычитая почленно из уравнения (I.73) уравнение (I.75) и интегрируя результат по η в пределах теплового пограничного слоя, получим интегральное соотношение энергии для изэнтропного течения в виде

$$\frac{d\delta_r^*}{d\xi} + \delta_r^{**} \left(-\frac{U'_\xi}{U} + \frac{t_0^{**}}{t_0^*} \right) = \frac{T_0}{T_w} \frac{q}{\rho_0 c_p U t_0^*}. \quad (I.76)$$

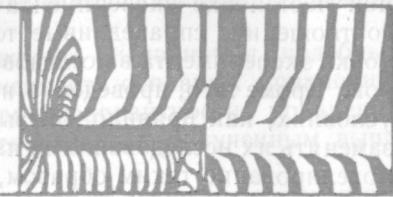
Здесь

$$\delta_{\tau}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) d\eta. \quad (I.77)$$

Сравнение уравнений (I.70) и (I.76) с уравнениями (I.44) и (I.52) показывает, что введение переменных Дородницына позволяет разделить переменные теплового и динамического слоя, и сами уравнения становятся аналогичными уравнениям для обтекания несжимаемым газом.

Использование координат Дородницына позволяет производить расчеты теплоотдачи и сопротивления при сверхзвуковых скоростях без необходимости дополнительного учета влияния сжимаемости при числах $M \leq 2,5$ [118].

Преобразование координат, которое предложил в 1949 г. Стюартсон [243], является некоторой модификацией преобразования Дородницына, позволяющей превратить уравнение движения для течения сжимаемого потока в уравнение, полностью тождественное уравнению пограничного слоя для несжимаемого потока. Подробно этот метод проанализирован, например, в [118], здесь останавливаться на нем нет необходимости, потому что задачи теплообмена в турбомашинах не выходят за пределы, ограничивающие применимость переменных Дородницына.



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

6. Основные представления

Система дифференциальных уравнений, полученных в гл. I, как уже говорилось, является весьма сложной, и к настоящему времени аналитические ее решения получены только для ряда частных случаев.

Невозможность аналитического решения задачи в полном объеме способствует созданию приближенных решений, основанных на введении гипотез, упрощающих либо постановку задачи, либо процесс ее решения. Полученные результаты, естественно, или будут приближенными, или дадут частные соотношения, справедливые в узком диапазоне изменения определяющих параметров; в некоторых случаях такие решения могут привести и к совершенно неправильным результатам. Во всех случаях такое решение требует экспериментального апробирования.

В последнее время в связи с развитием машинной вычислительной техники широкое распространение получили численные методы решения задач, причем успехи, достигнутые в этой области, таковы, что сейчас практически любая сколь угодно сложная задача может быть решена численно с любой заданной степенью точности. В результате такого решения может быть получен большой численный материал, на основе которого могут быть построены и некоторые аналитические соотношения между отдельными величинами, однако эти соотношения будут иметь частный характер (типа эмпирических соотношений) и не смогут вскрыть общих закономерностей и внутренних связей между определяющими параметрами (особенно при большом числе переменных), характерными для данной задачи [35]. В этом существенное отличие численного решения от аналитического.

Экспериментальные исследования, которые широко применяются для задач, не имеющих аналитического решения, в некоторых случаях являются единственным способом получить необходимые количественные соотношения, характеризующие рассматриваемую задачу. При правильной постановке эксперимента удастся получить количественные соотношения, которые можно распространять на широкий круг подобных задач; при неправиль-

ной постановке эксперимента получают частные эмпирические соотношения, справедливые только для данной конкретной обстановки эксперимента в исследованном диапазоне изменения параметров. Кроме того, проведение надежных экспериментов в натуральных условиях, как правило, оказывается невозможным, и приходится заменять их исследованиями на модели. При этом важно проводить моделирование таким образом, чтобы полученные на модели закономерности имели обобщенный характер и их можно было бы распространить как на моделируемый образец, так и на целую группу подобных агрегатов.

Условия правильной постановки экспериментальных исследований (в том числе и численного эксперимента), определяющие возможность получения обобщенных зависимостей, так же как и правила моделирования, устанавливаются теорией подобия и теорией размерности.

Сущность теории подобия заключается в утверждении, что при изучении какого-либо явления не следует рассматривать в отдельности влияние на процесс всех физических переменных, эти переменные взаимосвязаны, и закономерности развития процесса определяются некоторыми устойчивыми комплексами, составленными из этих переменных. Такие комплексы выступают как обобщенные координаты процесса, причем одинаковые их численные значения могут достигаться многообразными путями за счет изменения входящих в комплекс физических величин. Соотношения между такими обобщенными координатами и выражают общие закономерности, характерные для изучаемого явления. Теория подобия позволяет установить обобщенные координаты процесса, зависимость между которыми нужно находить при экспериментальном или численном исследовании, для того чтобы полученные при этом зависимости были универсальными для изучаемого класса явлений.

7. Условия подобия

Каждый конкретный рассматриваемый рабочий процесс может быть отнесен к определенному классу явлений, описываемых некоторой системой дифференциальных уравнений. Из этого широкого класса данное конкретное явление выделяется, как известно, граничными и начальными условиями задачи. В связи с этим условиями подобия будут тождественность уравнений и подобие условий (однозначности (подобие граничных и начальных условий и геометрическое подобие). Два физических явления называются подобными, если для каждого из них значения любой переменной в сходственных пространственно-временных точках отличаются друг от друга на постоянный множитель. Для подобных явлений решения системы дифференциальных уравнений, определяющих процесс, должны быть подобны, т. е. каждое решение должно получаться из другого путем умножения каждой из величин, входя-

щих в решение, на постоянный множитель. Такое преобразование называется подобным.

Условия, определяющие возможность выполнения подобных преобразований решения при неизменности основных уравнений, сводятся по существу к условиям инвариантности уравнений [35]. Рассмотрим эту задачу применительно к полученным выше уравнениям пограничного слоя.

Пусть имеется один процесс, характеризуемый переменными $x_1, y_1, u_1, v_1, \rho_1, T_1$ и т. д., и второй процесс, характеризуемый переменными $x_2, y_2, u_2, v_2, \rho_2, T_2$ и т. д.

Если эти процессы подобны, то в сходственных пространственно-временных точках должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} f_L &= \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{l_2}{l_1} = \text{const}; & f_u &= \frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} = \text{const}; \\ f_\rho &= \frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{const}; & f_T &= \frac{T_2}{T_1} = \text{const}; & f_\rho &= \frac{\rho_2}{\rho_1} = \text{const}; \\ f_a &= \frac{a_2}{a_1} = \text{const}; & f_v &= \frac{v_2}{v_1} = \text{const} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Подставим эти соотношения в уравнения (VII), (IX), (X), причем уравнения напомним для второго процесса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_\rho f_u^2}{f_L} \left(\rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \rho_1 v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) &= \\ = - \frac{f_\rho}{f_L} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{f_\mu f_u}{f_L^2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right); \\ \frac{f_\rho f_u}{f_L} \left(\frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y_1} \right) &= 0; \\ \frac{f_\rho f_u f_i}{f_L} \left(u_1 \frac{\partial i_{01}}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial i_{01}}{\partial y_1} \right) &= \\ = \frac{f_\mu f_i}{f_L^2} \left(\frac{f_a}{f_v \rho_1} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \mu_1 \frac{\partial i_0}{\partial y_1}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.1})$$

Как видно, полученная система уравнений для второго процесса будет отличаться от соответствующей системы для первого процесса только коэффициентами, составленными из множителей f . Очевидно, для тождественности систем уравнений необходимо, чтобы в системе (II.1), написанной для второго процесса, все эти коэффициенты сократились, т. е. условием подобия для рассматриваемого случая будет требование:

$$\frac{f_\rho f_u^2}{f_L} = \frac{f_\rho}{f_L} = \frac{f_\mu f_u}{f_L^2}; \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{f_\rho f_u f_i}{f_L} = \frac{f_\mu f_i}{f_L^2}. \quad (\text{II.3})$$

Подставляя вместо коэффициентов f отношение размерных величин, легко получить из соотношений (II.2) и (II.3), что для выполнения требований подобия необходимо сохранить неизменность следующих комплексов:

$$П_1 = \frac{f_u f_L}{f_v} = 1; \quad K_1 = \frac{ul}{v} = \text{idem}; \quad (\text{II.4})$$

$$П_2 = \frac{f_p}{f_\rho f_u^2} = 1; \quad K_2 = \frac{p}{\rho u^2} = \text{idem}; \quad (\text{II.5})$$

$$П_3 = \frac{f_v}{f_a} = 1; \quad K_3 = \frac{v}{a} = \text{idem}. \quad (\text{II.6})$$

Таким образом, условием инвариантности уравнений, или условием подобия, является условие равенства единице отношений типа $П_j$, или неизменность комплексов типа K_j .

Из этого анализа очевидно, что в целях соблюдения условий подобия невозможно произвольно задавать все множители подобного преобразования f . Ограничение накладывается требованием соблюдения условий $П_j = 1$.

Можно показать, что число степеней свободы преобразования, т. е. количество произвольно выбираемых множителей преобразования f , определяется как разность $n - r$, где n — общее число множителей f (общее число переменных в уравнении); r — общее число комплексов $П_j$, получаемых из уравнения (число членов уравнения без одного) [35].

Для различных задач, описываемых различными системами уравнений, могут быть получены различные безразмерные комплексы K_j . Эти комплексы получили название критериев подобия. Каждому из критериев подобия присвоено обозначение и название, соответствующее имени известного ученого.

Поскольку каждый из критериев, как было показано выше, получается в результате сопоставления комплексов, составленных из множителей преобразования f двух членов дифференциального уравнения, то он отражает влияние на рассматриваемый процесс соотношения определенных воздействий, которым соответствуют сопоставляемые члены уравнения, и поэтому критерии подобия имеют глубокий физический смысл.

При рассмотрении любого процесса следует различать физические переменные и параметры, задаваемые независимо (т. е. входящие в так называемые условия однозначности), и переменные и параметры, являющиеся функцией рассматриваемого процесса. Сопоставляя различные комплексы, составленные из множителей преобразования, при анализе уравнения, описывающего процесс, всегда можно подобрать их так, чтобы выделить критерии подобия, состоящие только из величин, относящихся к первой группе.

В теории подобия показывается, что критерии подобия, составленные из величин второй группы, являются однозначными

функциями критериев, составленных из величин первой группы, называемых определяющими критериями [34, 35]. Тогда для обеспечения подобия явлений достаточно задать неизменность определяющих критериев, неизменность остальных будет выполняться при этом автоматически, как следствие подобия.

Таким образом, условия подобия двух явлений, описываемых одними и теми же уравнениями, сводятся к требованиям одинаковости определяющих критериев и подобия условий однозначности (теорема Гухмана—Кирпичева).

Очевидно, соотношения (функциональные зависимости) неопределяющих и определяющих критериев в подобных процессах должны быть одинаковыми, т. е. критерии практически являются обобщенными координатами процесса.

Рассмотрим основные критерии подобия, получающиеся из соответствующих дифференциальных уравнений, описывающих процессы теплообмена в условиях, характерных для проточной части турбомашин.

Для общего случая обтекания поверхностей потоком сжимаемого газа при наличии значительной разности температур потока T и стенки T_w характерными являются следующие критерии:

1) критерий Рейнольдса ¹

$$R = ul/v,$$

характеризующий соотношение сил инерции и сил трения;

2) критерий (или число) Маха (иногда называется также числом Маевского)

$$M = u/a,$$

характеризующий отношение скорости течения к скорости звука, которая соответствует скорости распространения малых возмущений, т. е. характеризующий влияние сжимаемости потока на изучаемый процесс;

3) критерий Пекле

$$Pe = \frac{ul}{a} = \frac{u\rho c_p}{\lambda/l},$$

равный отношению плотности теплового потока, переносимого движущейся жидкостью, к плотности кондуктивного теплового потока в слое толщиной l , т. е. характеризующий соотношение конвективного и кондуктивного переноса тепла;

4) критерий Прандтля

$$Pr = \nu/a,$$

характеризующий соотношение переноса количества движения посредством внутреннего трения и переноса тепла за счет теплопроводности, т. е. характеризующий соотношение скоростных и температурных полей;

¹ Часто обозначается символом Re .

5) температурный фактор

$$\psi = T_w/T,$$

характеризующий соотношение температур стенки и потока на внешней границе пограничного слоя;

6) критерий Нуссельта

$$Nu = \alpha l/\lambda_{ж},$$

характеризующий отношение плотности потока тепла от жидкости к стенке (α) к плотности теплового потока, который имел бы место в условиях чистой теплопроводности в слое толщиной l ; этот критерий является также безразмерным коэффициентом теплоотдачи;

7) критерий Стэнтона

$$St = \frac{\alpha}{u\rho c_p} = \frac{Nu}{Pr R},$$

характеризующий соотношение изменения температуры жидкости по длине и движущего температурного напора и также являющийся безразмерным коэффициентом теплоотдачи;

8) число Струхала (или критерий гомохронности)

$$Sh = ut_0/l,$$

являющийся практически безразмерным временем и характеризующий соотношение темпа изменения условий в окружающей среде (t_0) и темпа перестройки скоростного поля;

9) критерий Фурье (также критерий гомохронности)

$$Fo = at_0/l^2,$$

характеризующий соотношение темпа изменения условий в окружающей среде (t_0) и темпа перестройки температурного поля внутри тела (a/l^2);

10) критерий Био

$$Bi = \alpha l/\lambda_{ст},$$

характеризующий соотношение переноса тепла от окружающей среды к телу и переноса тепла внутри тела, т. е. характеризующий соотношение температурного напора между средой и телом и температурного перепада в теле;

11) критерий Эйлера

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2},$$

характеризующий соотношение сил давления и сил инерции.

В том случае, когда кроме (или вместо) теплообмена вынужденной конвекцией возникает естественная конвекция, т. е. когда в уравнении движения сохраняются члены, содержащие массовые силы, появляются специфичные критерии:

1) критерий Фруда

$$Fr = \frac{\omega_0^2}{gl},$$

характеризующий соотношение инерционных сил и сил тяжести;

2) критерий Грасгофа

$$Gr = \frac{g\beta \Delta T l^3}{\nu^2},$$

характеризующий соотношение подъемной силы и сил трения.

8. Основы моделирования

Теория подобия позволяет без аналитического решения системы дифференциальных уравнений, описывающих данный процесс, получить обобщенные зависимости между определяющими процесс параметрами и представить эти зависимости в обобщенных координатах на основе постановки соответствующего экспериментального или расчетного (вычислительный эксперимент) исследования. При постановке таких исследований экспериментатор свободен в выборе средств и методов рациональной постановки эксперимента, он использует теорию подобия только для выявления основных параметров и при обработке и анализе опытных данных. Полученные обобщенные зависимости будут справедливы для всей группы подобных явлений.

Однако нередко возникают задачи другого плана. В инженерной практике часто требуется провести исследование конкретного процесса, развивающегося в пространстве определенных геометрических очертаний при заданных режимных условиях. При этом часто проведение исследования на натурном объекте в натуральных условиях оказывается невозможным. В этом случае теория подобия позволяет сформулировать условия моделирования, т. е. условия, определяющие возможность замены натурального объекта и натуральных условий некоторым другим объектом и другими условиями, им подобными.

Моделирование любого конкретного процесса для заданных конкретных условий разбивается на две часто равноценные по сложности задачи: 1) воспроизведение на модели явления, подобного натуре (т. е. осуществление всех условий, необходимых для моделирования изучаемого явления); 2) получение на основе эксперимента необходимых количественных соотношений.

Для решения первой задачи необходимо:

а) выписать систему дифференциальных уравнений, описывающих процесс;

б) выписать условия однозначности (граничные и начальные условия, условия геометрического подобия);

в) получить из дифференциальных уравнений критерии подобия по методу, описанному выше; выделить, используя условия однозначности, определяющие критерии;

г) определить расчетным путем значения определяющих критериев, соответствующие натурным условиям протекания изучаемого процесса;

д) исходя из условия постоянства определяющих критериев определить условия моделирования (масштаб модели, режимные параметры, рабочую жидкость и т. д.).

При таком анализе часто возникают трудности, связанные с очень малым числом степеней свободы подобного преобразования, т. е. с очень малой свободой выбора значений множителей подобного преобразования f . Для ряда процессов не удается выполнить все условия, связанные с выбором множителей преобразования, т. е. точное моделирование оказывается невозможным. В этом случае возникает вопрос о возможности приближенного моделирования. Опыт показывает, что каждый из определяющих критериев при различных значениях параметров влияет на изучаемый процесс по-разному. Имеются области, где влияние того или иного критерия ослабевает и наступает так называемая область автомодельности процесса относительно данного критерия. Эта область характеризуется тем, что изучаемый процесс практически не изменяется при изменении рассматриваемого критерия. В этом случае условия моделирования существенно упрощаются, так как увеличивается число степеней свободы. Нарушение подобия является допустимым и не вызывает искажения процесса в модели по сравнению с натурой, если отклонения полей изучаемых величин при допускаемой неодинаковости критериев не выходят за пределы погрешностей эксперимента.

9. Физические аналогии

Моделирование предполагает воспроизведение на модели в других масштабах того же физического явления, которое имеет место в натурном образце. Однако условия подобия, сформулированные в п. 7, допускают и более широкое толкование. Условия подобия требуют тождественности уравнений, определяющих сравниваемые процессы, при представлении их в безразмерных величинах, тождественности условий однозначности и одинаковости безразмерных комплексов типа Pi_j или K_j . Эти условия могут быть соблюдены и применительно к физическим процессам различной природы. Так, например, известно, что уравнения стационарного температурного поля аналогичны уравнениям поля электрического потенциала; уравнения потенциального течения жидкости аналогичны уравнениям электростатического поля и т. п.

В этом случае имеет место физическая аналогия, использование которой оказывается очень плодотворным при изучении процессов, трудно поддающихся прямому моделированию. При постановке такого исследования переход от модели к моделируемому образцу осуществляется также путем умножения соответствующих величин на множитель преобразования, однако в отличие от слу-

чая, рассмотренного в предыдущем параграфе, множители преобразования будут представлять собой отношения физически разнородных величин. Такое преобразование называется аналоговым преобразованием, а множители преобразования называются множителями аналоговых преобразований. В отличие от множителей подобного преобразования, рассмотренных выше, множители аналоговых преобразований являются размерными. Однако составленные из них комплексы типа P_j должны быть безразмерными и для соблюдения условия подобия должно выполняться требование

$$P_j = 1.$$

Вопрос о некоторых физических аналогиях будет рассмотрен в гл. VIII. обстоятельное рассмотрение вопроса о физических аналогиях можно найти в книгах [35, 90].

10. Анализ размерностей

Как следует из сказанного выше, применение теории подобия возможно при том условии, что физические представления о механизме изучаемого процесса достаточны для того, чтобы позволить составить систему основных уравнений и сформулировать для нее условия однозначности. Однако в ряде случаев приходится заниматься исследованием процессов, ограниченность физических представлений о которых не позволяет написать такую систему уравнений; тем не менее для правильной постановки экспериментального исследования необходимо определить обобщенные координаты и основные параметры изучаемой задачи. Решение этого вопроса в рассматриваемом случае оказывается возможным при использовании методов теории размерности.

В теории размерности все величины, существенные для рассматриваемых процессов, разбивают на две группы [35, 145]:

1) основные (первичные) величины, для определения численных значений которых не требуется привлечения первичных величин другой физической природы;

2) вторичные величины, выражающиеся через первичные с помощью некоторых уравнений, называемых определительными.

В теории размерности показывается, что определительные уравнения, связывающие вторичные величины с первичными, должны иметь форму степенных комплексов [35, 145], причем показатель степени при данной первичной величине обычно называется размерностью вторичной величины по отношению к данной первичной, а совокупность размерностей комплекса называется формулой размерности.

Для разных процессов обычно целесообразно принимать разные основные величины и разные основные единицы измерения. На практике оказывается достаточным выделить в качестве основных единицы измерения трех величин. В настоящее время наиболее

распространенными системами измерения являются физическая (СГС) и техническая (МКГСС). В них за основные механические единицы измерения приняты: сантиметр, грамм-масса, секунда (система единиц СГС); метр, килограмм-сила, секунда (система единиц МКГСС). В международной системе единиц СИ за основные механические единицы измерения приняты метр, килограмм (масса), секунда.

Символам размерности присвоены обозначения: L — длина; T — время; M — масса; K — сила. Формулы размерности для скорости, ускорения и силы обычно записывают в следующем виде:

$$[v] = LT^{-1}; \quad [a] = LT^{-2}; \quad [F] = MLT^{-2}.$$

Одна из основных теорем теории размерности — π -теорема Бекингема — позволяет, используя понятие первичных и вторичных величин, определить количество безразмерных комплексов (обобщенных координат), характерных для изучаемого процесса. Согласно этой теореме, количество таких комплексов (N) равно разности между числом характерных для изучаемого процесса переменных (n) и числом первичных величин (m):

$$N = n - m. \quad (II.7)$$

Сравнивая теорию размерности с теорией подобия, можно сказать, что, с одной стороны, при пользовании теорией размерности для определения числа критериев (обобщенных переменных), характерных для рассматриваемой задачи, нет нужды выписывать систему основных уравнений, с другой — точность решения задачи о числе критериев зависит от того, насколько точно можно перечислить все характерные для исследуемого процесса первичные и вторичные величины и насколько правильно выбрана система единиц измерения. Ошибки в этих вопросах могут привести либо к увеличению, либо к уменьшению числа характерных критериев.

При определении конкретного вида критериев подобия обычно исходят из того, что формула размерности вторичной величины соответствует ее определительному уравнению, т. е. ее можно использовать для получения приведенных комплексов типа Π_j .

Например, рассмотрим задачу об определении перепада давления при движении несжимаемой жидкости в канале. Характерные переменные: перепад давления Δp , скорость v , плотность ρ , вязкость μ , продольная координата l ; всего величин $n = 5$. Рассматривать задачу следует в системе первичных величин M, L, T ; всего величин $r = 3$. По теореме Бекингема число критериев $N = n - r = 2$. Составим табл. 2 (индексом 0 обозначены начальные условия).

Для рассматриваемой задачи первичные величины (масса m и время t_0) не являются существенными, поэтому они должны быть исключены из рассмотрения. Эту операцию можно произ-

вести, например, с помощью следующей комбинации приведенных комплексов:

$$\frac{P_1}{P_2 P_3} = \frac{\Delta p}{\rho v_0^3} = E u; \quad \frac{P_2 P_3}{P_4} = \frac{\rho v_0 l}{\mu} = R.$$

Как видно, получены два характерных для рассматриваемой задачи критерия подобия.

Таким образом, схема применения аппарата теории размерности к решению задачи об определении обобщенных координат при исследовании процесса, для которого невозможно написать систему основных уравнений, сводится к следующему.

Т а б л и ц а 2

Величина	Формула размерности	Приведенный комплекс
Δp	$[\rho] = ML^{-1}T^{-2}$	$\frac{\Delta p l t_0^2}{m} = P_1$
v	$[v] = LT^{-1}$	$\frac{v_0 t_0}{l} = P_2$
ρ	$[\rho] = ML^{-3}$	$\frac{\rho l^3}{m} = P_3$
μ	$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$	$\frac{\mu l t_0}{m} = P_4$
l	Первичная величина	

На основе общих представлений об изучаемом процессе определяется тип задачи и выбирается система размерности. Выписываются все величины, характерные для изучаемого явления (включая и размерные коэффициенты). С помощью л-теоремы Бекингема определяется число обобщенных переменных задачи. Формулы размерности вторичных величин преобразуются в приведенные степенные комплексы. Путем комбинации этих комплексов производится исключение первичных величин, несущественных для изучаемого процесса,

в результате чего получают критерии подобия, характерные для рассматриваемой задачи.

Как уже говорилось выше, качество решения определяется тем, насколько удачно решен вопрос об определении типа задачи, т. е. о выборе системы размерностей и о выборе характерных (существенных) для рассматриваемой задачи величин.

Таким образом, различие между теорией подобия и теорией размерностей заключается в том, что первая применяется к уравнениям процесса, вторая — к определительным уравнениям (формулам размерности). Во всех случаях, когда можно применить теорию подобия, нужно ей отдавать предпочтение, так как она позволяет установить физический смысл критериев и ее аппарат проще.

Когда применение теории подобия невозможно, следует пользоваться анализом размерностей. Однако в этом случае вследствие указанных выше причин всегда есть неуверенность в достаточной достоверности получаемых результатов. В том случае, когда есть уверенность в правильности исходных предпосылок, применение анализа размерностей дает результаты, не уступающие теории подобия по полноте и надежности.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЛАМИНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

11. Расчет ламинарного пограничного слоя, образующегося при обтекании пластины потокм больших скоростей

Классические исследования ряда ученых и в первую очередь О. Рейнольдса показали, что в зависимости от значения числа $R = Ux/\nu$ в потоках и в пограничном слое существуют различные формы движения жидкости. При числах R , меньших некоторого критического значения $R_{кр}$, форма движения является ламинарной. Ламинарная форма движения характеризуется регулярным струйным течением жидкости, причем проникающие в поток пульсации и возмущения не имеют условий для развития и затухают. Как принято говорить, ламинарное течение является устойчивым по отношению к проникающим в него возмущениям.

Выведенная в гл. I система основных дифференциальных уравнений (VII)—(XII) полностью применима для описания процессов обтекания тел ламинарным потоком жидкости. Эта область теории пограничного слоя является наиболее полно и наиболее строго разработанной.

Исходной классической задачей является задача об обтекании пластины. Так как при обтекании плоской пластины скорость потока на внешней границе пограничного слоя сохраняет постоянное значение ($\frac{dU}{dx} = 0$), то система уравнений (I.64), (I.65), (I.72), выведенных в п. 5, несколько упростится и будет иметь вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \nu_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left[1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) \right]^{n-1} \frac{du}{d\eta} \right\};$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = 0;$$

$$u \frac{\partial T^*}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial T^*}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Pr} (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \times$$

$$\times \left\{ \lambda \frac{(1 - \alpha_0^2)^{k/(k-1)}}{1 - \alpha^2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[T^* + (\text{Pr} - 1) \frac{u^2}{2c_p} \right] \right\}.$$

Введем функцию тока ψ , которая, согласно уравнению (I.65), будет удовлетворять соотношениям:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}; \quad \tilde{v} = - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (\text{III.1})$$

Будем искать выражение для продольной скорости u и температуры T^* в пограничном слое в функции одного аргумента

$$\xi = \frac{\eta}{2\sqrt{\bar{\xi}}}. \quad (\text{III.2})$$

Тогда, согласно первому из равенств (III.1), будем иметь

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^\eta u \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\bar{\xi}}} \right) d\eta = 2\sqrt{\bar{\xi}} \int_0^{\eta/(2\sqrt{\bar{\xi}})} u \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\bar{\xi}}} \right) d \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\bar{\xi}}} \right) = \\ &= 2\sqrt{\bar{\xi}} \int_0^\xi u(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Обозначим

$$2 \int_0^\xi u(\zeta) d\zeta = \varphi(\xi).$$

Выразив через функцию $\varphi(\xi)$ и ее производные по ξ все члены системы уравнений (I.64) и (I.72), можно после подстановки свести систему к виду:

$$\left. \begin{aligned} (i^{n-1}\varphi'')' + \varphi\varphi'' &= 0; \\ (i^{n-1}i')' + \frac{\text{Pr}}{4}(k-1)M_\infty^2 i^{n-1}\varphi'^2 + \text{Pr}\varphi i' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.4})$$

Граничные условия для функции $\varphi(\xi)$: 1) при $\xi = 0$ имеем $\varphi = 0$; $\varphi' = 0$; 2) при $\xi = \infty$ имеем $\varphi' = 2$.

Граничные условия для теплосодержания i на стенке будут различными в зависимости от условий задачи: 1) при $\xi = 0$ имеем $i = T_w$, или $di/d\xi = 0$; 2) при $\xi = \infty$ имеем $i = 1$.

В общем случае интегрирование системы уравнений (III.4) может быть выполнено численными методами.

В частном случае, когда в уравнении (XII) показатель степени $n = 1$, система упрощается и приобретает вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi''' + \varphi\varphi'' &= 0; \\ i'' + \text{Pr}\varphi i' + \frac{\text{Pr}}{4}(k-1)M_\infty^2\varphi'^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5})$$

Первое уравнение системы (III.5), представляющее собой обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение третьей степени, было получено и численно проинтегрировано Блазиусом при решении задачи о ламинарном пограничном слое, образующемся при обтекании плоской пластины потоком вязкого несжимаемого газа.

Из численного решения Блазиуса были получены выражения для φ и для универсального безразмерного профиля скорости при несжимаемом обтекании в виде¹

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{2} \varphi' \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U}{\nu x}},$$

хорошо согласующиеся с экспериментом.

По этим же данным легко определяются толщина δ пограничного слоя и его условные толщины δ^* и δ^{**} . Например, если принять за внешнюю границу пограничного слоя такое расстояние от стенки, на котором скорость u отличается от скорости внешнего потока U на 1%, то толщина пограничного слоя

$$\delta = 5,0 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

При условии отличия скоростей u и U на 0,2%

$$\delta = 5,8 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}.$$

Толщина вытеснения

$$\delta^* = 1,721 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}; \quad (\text{III.6})$$

толщина потери импульса

$$\delta^{**} = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \quad (\text{III.7})$$

Из численного решения Блазиуса получим формулу для напряжения трения

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{4} \mu \sqrt{\frac{U^2}{\nu x}} \varphi''(0).$$

Так как $\varphi''(0) = 1,328$, то

$$\tau_w = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \rho U^2}{x}}. \quad (\text{III.8})$$

Тогда местный (локальный) коэффициент трения

$$c_f = \frac{\tau_w}{0,5 \rho U^2} = \frac{0,664}{\sqrt{R_x}}, \quad (\text{III.9})$$

где $R_x = Ux/\nu$ — местное (локальное) значение числа Рейнольдса.

¹ Для пластины скорость на внешней границе пограничного слоя U равна скорости невозмущенного потока U_∞ .

Поскольку введение переменных Дородницына позволило свести рассматриваемую в настоящем параграфе задачу к этой классической решенной задаче обтекания потоком несжимаемого газа, то можно использовать известное решение. Тогда формально вид функции $\frac{u}{U}(\zeta)$ будет таким же, как и в решении Блазиуса, только величина ζ будет выражаться через переменные Дородницына по формуле (1.53) и соответственно

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{2} \varphi'(\zeta) = \frac{1}{2} \varphi' \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}} \right).$$

Переходя от координат Дородницына к обычным координатам, можно получить

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U}{\nu_0 x}} \int_0^y \frac{T_0^*}{T^*} dy,$$

т. е. профиль скорости должен зависеть от распределения температур.

На рис. 4. для иллюстрации сказанного приведено в координатах u/U ; $Y = y \sqrt{U \rho_\infty / (\mu_\infty x)}$ распределение скоростей в попе-

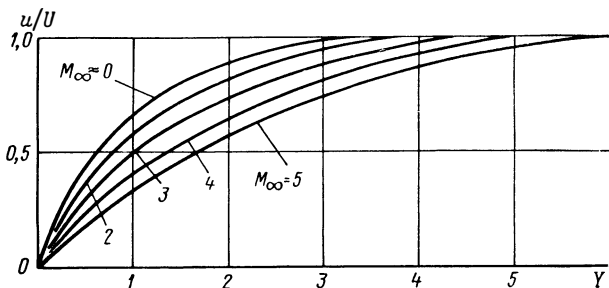


Рис. 4. Профили скоростей в ламинарном пограничном слое

речном сечении пограничного слоя пластины для случая $Pr = 0,7$; $k = 1,4$; $n = 1$, причем пластина охлаждалась в такой мере, чтобы при каждом значении скорости набегающего потока сохранялось равенство $T_w = 0,25 T_\infty$. Из рис. 4 видно, что с увеличением сверхзвуковой скорости профили становятся все более урезанными, т. е. ламинарный пограничный слой становится более толстым.

Для численного решения задачи Блазиуса имеются рассчитанные таблицы значений функции φ и ее производных φ' и φ'' [117]. Эти данные могут быть использованы и в рассматриваемом случае.

При условии $n = 1$ для обтекания потоком сжимаемого газа ¹

¹ Для обтекания несжимаемой жидкостью это условие не имеет смысла, так как в этом случае физические константы не зависят от температуры, и, следовательно, полученные формулы имеют универсальный характер.

можно написать соотношения (III.8) и (III.9) в переменных Дородницына и, переходя от них к обычным переменным, получить выражения:

$$\tau_w = 0,332 \sqrt{\frac{\mu_\infty \rho_\infty U^3}{x}}; \quad c_f = \frac{0,664}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu_\infty}}}.$$

Таким образом, если коэффициент вязкости в пограничном слое изменяется линейно с температурой ($n = 1$), то при отнесении μ и ρ к температуре невозмущенного потока T_∞ можно рассчитывать сопротивление пластины по обычным формулам, полученным для обтекания потоком несжимаемой жидкости.

Интегрирование второго уравнения системы (III.5) также может быть выполнено численными методами [117]. В этом случае при соблюдении условия $n = 1$ можно получить выражение для энтальпии в виде

$$i(\zeta) = \frac{1}{8}(k-1)M_\infty^2 \vartheta(\zeta) + \frac{c}{8} \int_0^{\zeta} \varphi''(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} + c_1. \quad (\text{III.10})$$

Здесь обозначено

$$\vartheta(\zeta) = 2 \text{Pr} \int_{\zeta}^{\infty} [\varphi''(\bar{\zeta})]^{\text{Pr}} d\bar{\zeta} \int_0^{\bar{\zeta}} [\varphi''(\zeta^*)]^{2-\text{Pr}} d\zeta^*. \quad (\text{III.11})$$

Используя граничные условия для i , получим значения констант интегрирования c и c_1 . Полагая $\zeta = \infty$, имеем $c_1 = 1$; полагая $\zeta = 0$, находим

$$c_1 = \frac{1 - i_w + \frac{1}{8}(k-1)M_\infty^2 \vartheta(0)}{\frac{1}{8} \int_0^{\infty} [\varphi''(\bar{\zeta})]^{\text{Pr}} d\bar{\zeta}}. \quad (\text{III.12})$$

При отсутствии теплообмена, т. е. когда пластина используется как пластинчатый термометр, при дифференцировании уравнения (III.10) и использовании условия $\vartheta'(0) = 0$ получается $c = 0$. Тогда из уравнения (III.12), обозначив $i_w = i_\tau$, для данного случая получим

$$i_\tau = 1 + \frac{1}{8}(k-1)M_\infty^2 \vartheta(0). \quad (\text{III.13})$$

Соответственно температура пластины

$$T_\tau = T_\infty \left[1 + \frac{1}{8} \vartheta_0 (k-1) M_\infty^2 \right]. \quad (\text{III.14})$$

Здесь T_τ — температура стенки при отсутствии теплоотдачи; $\vartheta(0)$ — функция, в общем случае зависящая от ζ и Pr . Значение этой функции при $\zeta = 0$ затабулировано, в частности:

Pr	0,6	0,8	1,0
$\vartheta(0)$	3,08	3,58	4,0

Из формулы (III.14) видно, что при $Pr = 1$ имеет место соотношение

$$T_\tau = T_\infty \left[1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right] = T_\infty. \quad (III.15)$$

Очевидно, T_τ является температурой пластинчатого термометра. Тогда из формул (III.14) и (III.15) следует, что если в качестве измерителя температуры в сжимаемом потоке газа применять пластину, то при $Pr = 1$ ее температура T_τ будет соответствовать температуре адиабатно и изоэнтропно заторможенного потока. При $Pr \neq 1$ она может быть и меньше, и больше T_∞^* — в зависимости от значений числа Pr . Величина $r = 0,25\vartheta(0)$ обычно называется коэффициентом восстановления температуры и широко используется в теории теплообмена при больших скоростях применительно не только к пластинчатым, но и к любым другим измерителям температуры. При обтекании пластины и при продольном обтекании цилиндрических поверхностей в широком диапазоне изменения параметра $(k-1)M_\infty^2$ для ламинарного пограничного слоя сохраняется значение

$$r = \sqrt{Pr}. \quad (III.16)$$

При наличии теплообмена, используя соотношение (III.13), можно представить постоянную c_1 в виде

$$c_1 = \frac{i_\tau - i_w}{\frac{1}{8} \int_0^\infty [\varphi''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}. \quad (III.17)$$

При подстановке этого выражения в уравнение (III.10) найдем полное теплосодержание

$$i(\zeta) = \frac{1}{8} (k-1) M_\infty^2 \vartheta(\zeta) + (i_w - i_\tau) \frac{\int_0^\infty [\varphi''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}{\int_0^\zeta [\varphi''(\zeta)]^{Pr} d\zeta}. \quad (III.18)$$

Продифференцировав все члены уравнения (III.18) по ζ , после несложных преобразований получим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{T_\infty}{2} \sqrt{\frac{U}{v_\infty x} \frac{\rho_w}{\rho_\infty} \left(\frac{di}{d\zeta} \right)_{\zeta=0}}. \quad (III.19)$$

Используя (III.17), формулу Клапейрона и условие постоянства давления для пограничного слоя пластины ($p = p_\infty$), можно выражение (III.19) преобразовать к виду

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2} (T_\tau - T_w) \frac{T_\infty}{T_w} f(\text{Pr}) \sqrt{\frac{U}{\nu_\infty x}}. \quad (\text{III.20})$$

Вводя понятие числа Нуссельта

$$\text{Nu} = \frac{Q}{\lambda_\infty (T_w - T_\infty)} \quad (\text{III.21})$$

и выражая приток тепла Q для пластины длиной L соотношением

$$Q = - \int_0^L \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} dx, \quad (\text{III.22})$$

получим для газов при $n = 1$

$$\text{Nu} = \frac{T_w - T_\tau}{T_w - T_\infty} f(\text{Pr}) \sqrt{R_\infty}. \quad (\text{III.23})$$

При малых скоростях $T_\tau = T_\infty$, тогда

$$\text{Nu} = f(\text{Pr}) \sqrt{R_\infty}. \quad (\text{III.24})$$

Функция $f(\text{Pr})$ для обтекания пластины несжимаемым потоком была рассчитана Польгаузенем (для двух сторон пластины):

$$f(\text{Pr}) \approx 0,664 \sqrt[3]{\text{Pr}}. \quad (\text{III.25})$$

В табл. 3 приведено сравнение этой приближенной формулы с точным решением.

При $\text{Pr} = 1$ формула (III.23) приобретает вид

$$\text{Nu} = 0,664 \frac{T_w - T_\tau}{T_w - T_\infty} \sqrt{R_\infty}, \quad (\text{III.26})$$

а формула (III.24) — соответственно (для двух сторон пластины)

$$\text{Nu} = 0,664 \sqrt{R_\infty}. \quad (\text{III.27})$$

Позднейшие исследования показали, что при очень больших значениях числа Pr ($\text{Pr} \rightarrow \infty$) функция $f(\text{Pr})$ может быть приближенно определена по формуле

$$f(\text{Pr}) = 0,339 \sqrt[3]{\text{Pr}},$$

а при очень малых значениях Pr — по формуле

$$f(\text{Pr}) = 0,564 \sqrt{\text{Pr}}.$$

Тогда формулы для Nu при $\text{Pr} \rightarrow \infty$ и $\text{Pr} = 0$ соответственно будут иметь вид:

$$\text{Nu} = 0,339 \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{R_\infty}; \quad (\text{III.28})$$

$$\text{Nu} = 0,564 \sqrt{R_\infty \text{Pr}}. \quad (\text{III.29})$$

На основании подробного анализа численных решений уравнения энергии (III.5) для ламинарного пограничного слоя, образующегося при обтекании нагретой пластины потоком сжимаемого газа, в работе [231] предлагается следующая формула для расчета коэффициента теплоотдачи:

$$Nu_x = \frac{c_f \sqrt{R_x}}{2} R_x^{0,5} Pr^{0,33}. \quad (III.30)$$

Коэффициент $k = c_f \sqrt{R_x}$ в этой формуле зависит от числа M , температурного фактора $\psi = T_w/T_\infty$ и показателя степени n в соотношениях, связывающих вязкость μ и теплопроводность λ с температурой.

В работе Крокко показано, что если относить физические константы в пограничном слое не к T_∞ , а к некоторой условной температуре T' , можно сохранить постоянство произведения $k = c_f \sqrt{R_x} = 0,664$ до значения $M = 5$ точно и до $M = 10$ приближенно. Эта температура для ненагретой пластины определяется соотношением

$$\frac{T'}{T_\infty} = 1 + 0,32M^2 + 0,58\left(\frac{T_w}{T_\infty} - 1\right); \quad (III.31)$$

для нагретой пластины

$$\frac{T'}{T_\infty} = \frac{1}{4} \left(1 + 3 \frac{T_w}{T_\infty}\right). \quad (III.32)$$

На рис. 5 в координатах T/T_∞ ; $Y = y\sqrt{U\rho_\infty/(\mu_\infty x)}$ приведены графики распределения температур в поперечном сечении пограничного слоя при различных значениях числа M , полученные расчетным путем для тех же условий, что и графики скоростей на рис. 4 ($Pr = 0,7$; $T_w = 0,25T_\infty$; $n = 1$; $k = 1,4$). Как видно, кривые имеют немонотонный характер: внутри пограничного слоя имеется максимум температуры, который увеличивается с увеличением числа M . Это явление объясняется диссипацией механической энергии газа за счет вязкости.

Для случая обтекания пластины при $Pr = 1$ и произвольном значении n имеет место очевидное частное решение уравнения энергии (X), так называемый интеграл Крокко:

$$\frac{T}{T_\infty} = -\frac{k-1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{u}{U}\right)^2 + a \frac{u}{U} + b. \quad (III.33)$$

Здесь

$$a = 1 - \frac{T_w}{T_\infty} + \frac{k-1}{2} M_\infty^2; \quad b = \frac{T_w}{T_\infty}.$$

Т а б л и ц а 3

Pr	Значение f (Pr)	
	точное	по (III.25)
0,6	0,552	0,560
0,8	0,614	0,616
1,0	0,664	0,664
7,0	1,29	1,46
10,0	1,26	1,43
15,0	1,67	1,64

Из (III.33) легко получить условие

$$\frac{t^*}{t_{\infty}^*} = \frac{T^* - T_w^*}{T_{\infty}^* - T_w^*} = \frac{u}{U}. \quad (\text{III.34})$$

Это — условие подобия температурных и скоростных полей, отмечавшееся выше при анализе основной системы дифференциальных

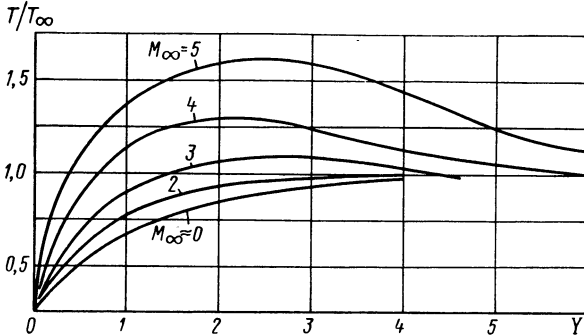


Рис. 5. Профили температур в ламинарном пограничном слое

уравнений. Согласно этому условию, при $\text{Pr} = 1$ и $\frac{dU}{dx} = 0$ в любом сечении пограничного слоя поля перепадов температур, выраженных в параметрах адиабатного и изоэнтропного торможения, подобны полям скоростей при любом значении показателя степени n .

Для случая обтекания несжимаемым потоком из (III.34) легко получить обычное, подтвержденное многими экспериментами соотношение

$$\frac{T - T_w}{T_{\infty} - T_w} = \frac{u}{U}. \quad (\text{III.35})$$

12. Расчет динамического ламинарного пограничного слоя при течении с продольным градиентом давления

Теория ламинарного пограничного слоя при градиентном обтекании в настоящее время является достаточно развитой. Существует ряд точных решений для той или иной заданной эпюры скоростей и ряд приближенных решений. Эти вопросы подробно освещены в работах [117, 118, 31, 167, 162], поэтому на них останавливаться не будем.

Рассмотрим здесь только один метод приближенного решения, относящийся к классу однопараметрических методов, — метод Дородницына — Лойцянского.

Выпишем интегральное соотношение импульсов (I.70), представленное в переменных Дородницына:

$$\frac{d\delta^{**}}{d\xi} + \frac{U'_\xi}{U} \left[\delta^{**} \left(2 + \frac{\alpha_0^2}{1 - \alpha_0^2} \right) + \frac{\delta^*}{1 - \alpha_0^2} \right] = \frac{T_0}{T_w} \frac{\tau_w}{\rho_0 U^2}.$$

Примем допущение, что все характеристики пограничного слоя однозначно определяются некоторым параметром f , изменяющимся вдоль обтекаемой поверхности, и что профили скоростей в пограничном слое могут быть представлены однопараметрическим семейством

$$\frac{u}{U} = \varphi \left(\frac{\eta}{\delta_\eta^{**}}; f \right), \quad (\text{III.36})$$

не зависящим явно от числа Маха на внешней границе пограничного слоя M_0 и, следовательно, имеющим одинаковый вид для обтекания как сжимаемым, так и несжимаемым потоком. Влияние числа M_0 при этом допущении, очевидно, будет сказываться неявно — через значение величин U , δ_η^{**} , η и f .

Обозначим величину производной безразмерной скорости по безразмерной координате у стенки через ζ :

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{u}{U} \right)}{\partial \left(\frac{\eta}{\delta_\eta^{**}} \right)} \right]_{\eta=0} = \frac{\delta_\eta^{**}}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{\tau_w \delta_\eta^{**}}{\mu U} = \zeta(f). \quad (\text{III.37})$$

За форм-параметр f выберем величину

$$f = \frac{U' \delta_\eta^{**2}}{v_0 (1 - \alpha_0^2)}. \quad (\text{III.38})$$

После подстановки (III.36) — (III.38) в интегральное соотношение (I.70) получим уравнение

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{(1 - \alpha_0^2)^2}{U'} f \right] = \frac{1 - \alpha_0^2}{U} F(f), \quad (\text{III.39})$$

или

$$\frac{df}{d\xi} = F(f) \ln \frac{U}{\sqrt{1 - \alpha_0^2}} + f \frac{d}{d\xi} \ln \frac{U'}{(1 - \alpha_0^2)^2}. \quad (\text{III.40})$$

Здесь

$$F(f) = 2 \left[\zeta(f) - \left(2 + \frac{\delta_\eta^*}{\delta_\eta^{**}} \right) f \right]. \quad (\text{III.41})$$

Уравнение (III.40) при переходе от переменной ξ к переменной x преобразуется к виду

$$\frac{df}{dx} = F(f) \frac{d}{dx} \left[\ln \frac{U}{\sqrt{1 - \alpha_0^2}} \right] + f \frac{d}{dx} \left[\ln \frac{U'}{(1 - \alpha_0^2)^{2 + \frac{k}{k-1}}} \right]. \quad (\text{III.42})$$

Из принятого допущения о независимости формы профиля скорости в рассматриваемых координатах от M_0 следует, что вид функции $F(f)$ должен быть одинаковым для обтекания как сжимаемым, так и несжимаемым потоком. Эксперименты показывают, что для несжимаемого потока [118]

$$F(f) = a - bf. \quad (\text{III.43})$$

Тогда уравнение (III.42) легко интегрируется, и для параметра f получим выражение

$$f = \frac{aU'}{U^b(1-\alpha_0^2)^m} \int_0^x U^{b-1} (1-\alpha_0^2)^{m-1} dx, \quad (\text{III.44})$$

где

$$m = 2 + \frac{k}{k-1} - \frac{b}{2}. \quad (\text{III.45})$$

Для воздуха $b \approx 5,75$; $a \approx 0,45$; $k = 1,4$.

Уравнение (III.44) легко может быть решено с помощью численного или графического интегрирования при заданной функции изменения скорости $U = U(x)$ на внешней границе пограничного слоя. Зачастую эта функция для обтекания сжимаемым потоком не может быть определена, а известно только распределение $U = U(x)$ для малых скоростей. Для этого случая авторы метода [43] преобразовали формулу (III.44) к виду

$$f = a \frac{\alpha_0'}{\alpha_0^b(1-\alpha_0^2)^m} \int_0^x \alpha_0^{b-1} (1-\alpha_0^2)^{m-1} dx \quad (\text{III.46})$$

и рассчитали сетки кривых $\alpha_0 = \alpha(M_\infty, \bar{p}_{н.с})$, где

$$\bar{p}_{н.с} = \frac{p-p_0}{\rho U^2/2}.$$

Расчеты по этой сетке (рис. 6) можно вести до тех пор, пока на каких-либо участках у поверхности не возникнут местные сверхзвуковые зоны, т. е. до $M_0 < M_{кр}$.

Для несжимаемого потока $\alpha_0 \approx 0$, и тогда

$$f = \frac{aU'}{U^b} \int_0^x U^{b-1} dx. \quad (\text{III.47})$$

Соответственно уравнение (III.42) приобретает следующий вид:

$$\frac{df}{dx} = F(f) \frac{d}{dx} \ln U + f \frac{d}{dx} \ln U', \quad (\text{III.48})$$

где

$$f = \frac{U\delta^{**2}}{v}. \quad (\text{III.49})$$

Это решение получено раньше, чем (III.44) и (III.46) [95].

Принятое при выводе формул (III.44) допущение о независимости безразмерного профиля скоростей от числа M_0 , позволившее получить удобные и простые формулы, оказывается, однако, справедливым только при сравнительно небольших числах M_0 . Так для обтекания пластины ($f = 0$) несжимаемой жидкостью функция ζ в соответствии с точными решениями должна быть равна 0,221.

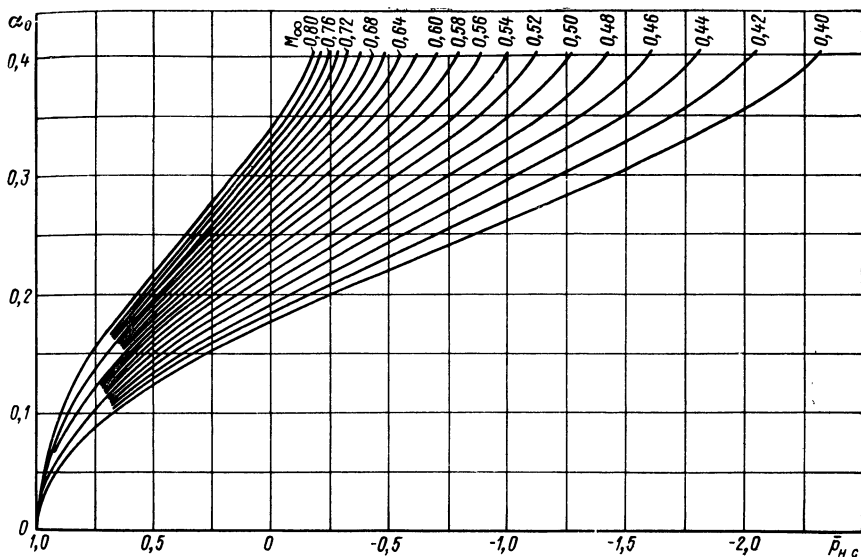


Рис. 6. Сетка кривых $\alpha_0 = \alpha(M_\infty, \bar{p}_{н,c})$

Очевидно, это же значение, если принятое допущение справедливо, должно сохраняться при любом M_0 . Однако расчеты показывают, что величина ζ изменяется в зависимости от M_0 сначала незначительно, а потом более резко:

M_0	0	0,65	1,59	3,05
ζ	0,221	0,222	0,227	0,234

Таким образом, рассмотренный здесь метод расчета следует применять только при $M_0 < 2$.

Однопараметрический метод расчета ламинарного пограничного слоя был впервые предложен для обтекания несжимаемой жидкостью еще в 1921 г. Карманом и Польшаузенем, которые ввели в качестве форм-параметра величину

$$\lambda = \frac{U'\delta}{\nu}. \quad (\text{III.50})$$

13. Расчет теплового ламинарного пограничного слоя при течении с продольным градиентом давления

Задача о развитии ламинарного теплового пограничного слоя при обтекании поверхности потоком несжимаемого газа с продольным градиентом давления решалась многими исследователями, рассматривавшими различные законы изменения скорости внешнего потока $U = U(x)$ [167].

Если ввести обозначение

$$\frac{T - T_w}{T_0 - T_w} = \frac{t^*}{t_0^*} = \theta, \quad (\text{III.51})$$

то основная система уравнений для рассматриваемого простого случая будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \\ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.52})$$

Граничные условия для этой системы:

- 1) при $y = 0$ имеем $u = v = 0$; $\theta = 0$;
- 2) при $y = \infty$ имеем $u = U(x)$; $\theta = 1$.

Введем замену переменных:

$$u = cx^m \Phi(\zeta);$$

$$v = - \sqrt{\frac{2c\nu}{m+1}} x^{m-1} \left[\frac{m-1}{2} \zeta \Phi'(\zeta) + \frac{m+1}{2} \Phi(\zeta) \right],$$

где

$$\zeta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{cx^{m-1}}{\nu}}.$$

Тогда решение системы уравнений (III.52) для случая изменения скорости по закону $U = cx^m$ позволяет получить уравнение

$$\theta = \frac{\int_0^{\zeta} \exp\left(-\text{Pr} \int_0^{\zeta} \Phi d\zeta\right) d\zeta}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\text{Pr} \int_0^{\zeta} \Phi d\zeta\right) d\zeta}, \quad (\text{III.53})$$

которое было решено численно [117]. При этом было обнаружено, что при $\text{Pr} = 1$ на участках пограничного слоя с конфузторным течением ($\frac{dp}{dx} < 0$) толщина температурного пограничного слоя δ_T оказалась больше толщины скоростного слоя δ и, наоборот, на участках с $\frac{dp}{dx} > 0$ имело место соотношение $\delta_T < \delta$.

Из (III.53) можно получить

$$\text{Nu}_x = \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=0} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{R_x}, \quad (\text{III.54})$$

или

$$\text{Nu}_x = K(\text{Pr}; m) R_x^{0,5}. \quad (\text{III.55})$$

Функция $K(\text{Pr}; m)$ определяется с помощью численного интегрирования.

Для частного случая температурного пограничного слоя вблизи лобовой точки поперечно обтекаемого круглого цилиндра [31], когда $m = 1$, значение функции $K(\text{Pr}; 1)$ может быть определено по следующим данным:

Pr	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7,0	10	15
$K(\text{Pr}; 1)$	0,466	0,495	0,521	0,546	0,570	0,592	1,18	1,34	1,54

При этом теплоотдачу следует считать по формуле

$$\text{Nu}_x = 2K(\text{Pr}; 1) \left(\frac{U_\infty d}{\nu} \right)^{0,5} \frac{x}{d}, \quad (\text{III.56})$$

где x — расстояние от лобовой точки; d — диаметр цилиндра.

Для более общего случая задания скорости внешнего потока функцией

$$U = x^m (U_0 + u_1 x^{m+1} + u_2 x^{2(m+1)} + \dots)$$

решение третьего уравнения системы (III.52) было выполнено Спэрроу. На основе этого решения для частного случая лобовой критической точки при $\text{Pr} = 1$ Спэрроу получил выражение

$$\text{Nu}_x = 0,57 R_x^{0,5}, \quad (\text{III.57})$$

являющееся частным случаем уравнения (III.55).

Из многочисленных решений, полученных для плоского пограничного слоя с произвольным градиентом давления, остановимся на двух решениях, сравнительно простых и удобных для практического пользования [149, 56]. Оба эти решения относятся к классу однопараметрических, т. е. таких, в которых предполагается, что все характеристики пограничного слоя однозначно зависят только от одной переменной, именуемой форм-параметром, которая изменяется вдоль пограничного слоя.

Методы, изложенные в работах [149, 56], являются развитием метода, приведенного в работе [95], и распространяются на тепловой пограничный слой.

Рассмотрим задачу об обтекании поверхности потоком несжимаемого газа. Для этого случая уравнение притока тепла, как отмечалось в п. 3, будет иметь вид

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

Граничные условия при этом:

1) при $y = 0$ имеем $u = v = 0$, $T = T_w$;

2) при $y = \delta_T$ имеем $u \rightarrow U$, $T = T_0$.

Соответственно уравнение интегрального соотношения энергии (I.52) имеет вид

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} \delta_T^{**} = \frac{q}{\rho_0 c_p U t_0^*},$$

где

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*} \right) dy.$$

Введем форм-параметр

$$f_T = \frac{U' \delta_T^{**}}{\nu} \quad (III.58)$$

и функцию

$$\chi(f_T) = \frac{\left(\frac{\partial t^*}{\partial y} \right)_{y=0} \delta_T^{**}}{t_0^*}, \quad (III.59)$$

которая практически равна числу Нуссельта

$$Nu^{**} = \frac{\alpha \delta_T^{**}}{\lambda} = \chi(f_T). \quad (III.60)$$

Подставляя в эту формулу значение коэффициента теплоотдачи $\alpha = q_w/t_0^*$, можно получить

$$\frac{q_w}{\rho_0 c_p U t_0^*} = \chi(f_T) \frac{\nu}{Pr U \delta_T^{**}}. \quad (III.61)$$

После подстановки (III.58) и (III.59) в интегральное соотношение энергии (I.52) удастся получить обыкновенное дифференциальное уравнение относительно f_T :

$$\frac{df_T}{dx} = \frac{U''}{U'} f_T + \frac{U'}{U} 2 \left[\frac{\chi(f_T)}{Pr} - f_T \right]. \quad (III.62)$$

Предположение об однопараметричности задачи, очевидно, сводится к утверждению, что независимо от характера изменения скорости U и температуры на внешней границе пограничного слоя функции $\gamma(f_T)$ и

$$F_T = 2 \left[\frac{\chi(f_T)}{Pr} - f_T \right]$$

должны сохранять один и тот же вид. В связи с этим их можно вычислить для любого частного случая и, подставив полученные значения в уравнение (III.62) и решив его, получить из соотношений (III.58) и (III.61) значения δ_T^{**} и

$$Nu_x = \frac{qx}{t_0^* \lambda} = \chi(f_T) \frac{x}{\delta_T^{**}}.$$

В работе [149] использовано описанное в настоящем параграфе точное частное решение для случая:

$$U = cx^m; \quad t_0^* = T_0 - T_w = \text{const.}$$

В результате проделанных вычислений была обнаружена однозначная связь γ и f_T с динамическим форм-параметром f , определяемым по формуле (III.47). Эти функции были определены для $Pr = 0,73$ и $Pr = 1,0$. Формула для числа Nu_x была представлена в виде

$$Nu_x = R_L^{0,5} \frac{x}{\sqrt{L}} \left| \sqrt{\frac{U'}{U}} \right| \left| \frac{\chi}{\sqrt{f_T}} \right|. \quad (\text{III.63})$$

Результаты вычислений приведены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

f	$Pr = 1,0$			$Pr = 0,73$		
	f_T	χ	$ \chi/\sqrt{f_T} $	f_T	χ	$ \chi/\sqrt{f_T} $
-0,07	-0,022	0,109	0,766	-0,033	0,122	0,687
-0,06	-0,025	0,135	0,854	-0,039	0,152	0,772
-0,05	-0,026	0,156	0,969	-0,040	0,176	0,880
-0,04	-0,024	0,173	1,116	-0,037	0,193	1,005
-0,03	-0,021	0,187	1,290	-0,031	0,206	1,171
-0,02	-0,015	0,199	1,631	-0,023	0,219	1,450
-0,01	-0,008	0,211	2,371	-0,013	0,231	2,026
0	0	0,221	∞	0	0,242	∞
0,01	0,011	0,232	2,320	0,016	0,253	2,008
0,02	0,026	0,242	1,503	0,039	0,264	1,340
0,03	0,045	0,253	1,193	0,067	0,276	1,062
0,04	0,068	0,264	1,012	0,100	0,286	0,905
0,05	0,099	0,276	0,879	0,145	0,298	0,784
0,06	0,138	0,288	0,776	0,205	0,310	0,686
0,07	0,193	0,302	0,688	0,278	0,324	0,614
0,08	0,271	0,317	0,608	0,391	0,338	0,541
0,085	0,325	0,325	0,570	0,470	0,346	0,505

Недостатком формулы (III.63) является необходимость получения производной скорости U' , что в случае определения функции $U(x)$ экспериментальным путем или графического ее задания является весьма неточной операцией, и обращение в бесконечность последнего сомножителя в правой части формулы вблизи точки $f = 0$.

В работе [56] уравнение (I.52) решается следующим образом. Вводится форм-параметр

$$\hat{f}_\tau = \frac{U' \delta_\tau^{**}}{\nu} G_\tau(R_\tau^{**}), \quad (\text{III.64})$$

где $R_\tau^{**} = U \delta_\tau^{**} / \nu$; $G_\tau(R_\tau^{**})$ — некоторая функция. Предполагается, что в соотношении (III.64) первый множитель выражает полностью влияние градиента давления, а второй зависит только от числа Рейнольдса R_τ^{**} .

Вводится функция

$$\chi = \frac{q}{\rho_0 c_p f_0^* U} G_\tau = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Pr} R_x} G_\tau. \quad (\text{III.65})$$

Подстановка (III.64) и (III.65) в уравнение (I.52) позволяет привести его к виду

$$\frac{d\hat{f}_\tau}{dx} = \frac{U'}{U} F_\tau + \frac{U''}{U'} \hat{f}_\tau, \quad (\text{III.66})$$

где

$$F_\tau = (1 + m) \chi - 2\hat{f}_\tau; \quad (\text{III.67})$$

$$m = \frac{G'_\tau}{G_\tau} R_\tau^{**}. \quad (\text{III.68})$$

Поскольку предполагается, что функция G_τ не зависит от градиента давления, то для определения ее вида можно использовать данные по теплоотдаче пластины. В соответствии с формулами (III.24) и (III.26) для нашего случая для одной стороны пластины имеем

$$\text{Nu}_x = 0,332 \sqrt[3]{\text{Pr} R_x^{0,5}}.$$

Используя это выражение и интегральное соотношение энергии для пластины

$$\frac{d\delta_\tau^{**}}{dx} = \frac{\text{Nu}_x}{\text{Pr} R_x},$$

получим

$$G_\tau = 2,91 \chi R_\tau^{**}. \quad (\text{III.69})$$

Согласно точному решению для пластины в соответствии с табл. 4 имеем $\chi = 0,242$, тогда:

$$G_\tau = 0,703 R_\tau^{**}, \quad (\text{III.70})$$

$$F_\tau = 0,48 - 2\hat{f}_\tau. \quad (\text{III.71})$$

Подстановка соотношения (III.71) в уравнение (III.66) сводит его к квадратуре, и решение получается в виде

$$\hat{f}_\tau = \frac{0,48 U'}{U} \int_0^x U(x) d\xi, \quad (\text{III.72})$$

откуда легко получаются выражения для определения локальных значений δ_{τ}^{**} и Nu_x в виде элементарно простых интегралов:

$$\delta_{\tau}^{**} = 0,82 \left(\frac{\nu}{U^2} \right)^{0,5} \left[\int_0^x U(x) d\xi \right]^{0,5}; \quad (III.73)$$

$$Nu_x = 0,41 Pr R_x \left[\int_0^x \frac{U(x)}{\nu} d\xi \right]^{-0,5}. \quad (III.74)$$

В работе [149] рассмотрен случай обтекания поверхности не-сжимаемым потоком газа, осложненный наличием больших температурных напоров, когда нельзя пренебречь изменяемостью физических констант поперек пограничного слоя. В этом случае для описания процесса теплообмена приходится использовать полную систему уравнений (VII)—(XII) (см. п. 3).

В работе [84] введена обобщенная (распространяемая на тепловой пограничный слой) переменная Дородницына

$$\eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy = \int_0^y \frac{T_0}{T} dy.$$

Это позволило для случая $t_0^* = T - T_w = \text{const}$ и $Pr = 1$ свести систему (VII)—(X) к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} \delta^{**} (2 + H) + \frac{U'}{U} \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) H_{\tau}^* \delta^{**} = \frac{\tau_w}{\rho_0 U^2}; \quad (III.75)$$

$$\frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx} + \frac{U' \delta_{\tau}^*}{U} = \frac{q_w}{\rho_0 c_p t_0^* U}, \quad (III.76)$$

где

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}; \quad H_{\tau}^* = \frac{\delta_{\tau}^*}{\delta^{**}}; \quad \tau_w = \nu_0 \rho_0 \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=0};$$

$$q_w = \frac{\mu_0 c_p}{Pr} \left(\frac{T_w}{T_0} \right) \left(\frac{\partial t^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}.$$

Для решения (III.75) вводятся [149] форм-параметр

$$f = \frac{U' \delta^{**2}}{\nu_0} \frac{T_w}{T_0} \quad (III.77)$$

и функция

$$\zeta(f) = \left[\frac{\partial \left(\frac{u}{U} \right)}{\partial \left(\frac{\eta}{\delta^{**}} \right)} \right]_{\eta=0}. \quad (III.78)$$

Для решения уравнения (III.76) вводятся форм-параметр

$$f_{\tau} = \frac{U' \delta_{\tau}^{**2}}{\nu_0} \frac{T_w}{T_0} \quad (\text{III.79})$$

и функция

$$\chi = \left[\frac{\partial \left(\frac{t^*}{t_0^*} \right)}{\partial \left(\frac{\eta}{\delta_{\tau}^{**}} \right)} \right]_{\eta=0} \quad (\text{III.80})$$

В результате подстановок этих функций в соответствующие интегральные соотношения (III.75) и (III.76) получаются уравнения, формально совпадающие с уравнениями (III.42) и (III.66), только функции F и F_{τ} в них оказываются равными:

$$F = 2 \left\{ \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^n \zeta(f) - f \left[H + 2 + \left(\frac{T_w}{T_0} - 1 \right) H_{\tau}^* \right] \right\}; \quad (\text{III.81})$$

$$F_{\tau} = 2 \left[\left(\frac{T_w}{T_0} \right)^n \frac{\chi}{Pr} - f_{\tau} \right]. \quad (\text{III.82})$$

На рис. 7 представлены расчетные зависимости $F(f)$ при различных значениях температурного фактора $\psi = T_w/T_0$ для $Pr = 0,73$ и $Pr = 1,0$. По этим кривым можно, заменяя для заданного T_w/T_0 соответствующую кривую прямой

$$F = a - bf + \varepsilon(f),$$

находить величину f по формуле

$$f(x) = \frac{U'}{U} \int_0^x [a + \varepsilon(f)] U^{b-1} d\xi. \quad (\text{III.83})$$

Тепловой форм-параметр считается связанным с динамическим так же, как и при $\psi = 1$, и для числа Нуссельта получается формула

$$Nu_x = Re_x^{0,5} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{n-0,5} \frac{x}{\sqrt{L}} \left| \frac{\chi}{\sqrt{f_{\tau}}} \right| \left| \sqrt{\frac{U'}{U}} \right|, \quad (\text{III.84})$$

в которой значения $\chi/\sqrt{f_{\tau}}$ определяются из табл. 4; а n — показатель степени в зависимости вязкости от температуры.

Рассмотренные выше решения уравнения (1.52) выполнены для случая, когда температура стенки $T_w = \text{const}$. В практике часто встречаются задачи, в которых температура T_w непостоянна. В этом случае задача анализа теплообмена становится более трудной, так как зачастую изменение T_w вдоль поверхности не задается независимо, а является также функцией процесса обтекания.

Уравнение баланса тепла для этого случая приобретает вид

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + u \frac{\theta - 1}{T_w - T_{\infty}} \frac{dT_w}{dx} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (\text{III.85})$$

Пусть

$$U = cx^m; \quad T_w = T_\infty + ax^n. \quad (\text{III.86})$$

Численное решение уравнения (III.85), выполненное Фейджем и Фокнером и позже Леви, позволяет получить следующее при-

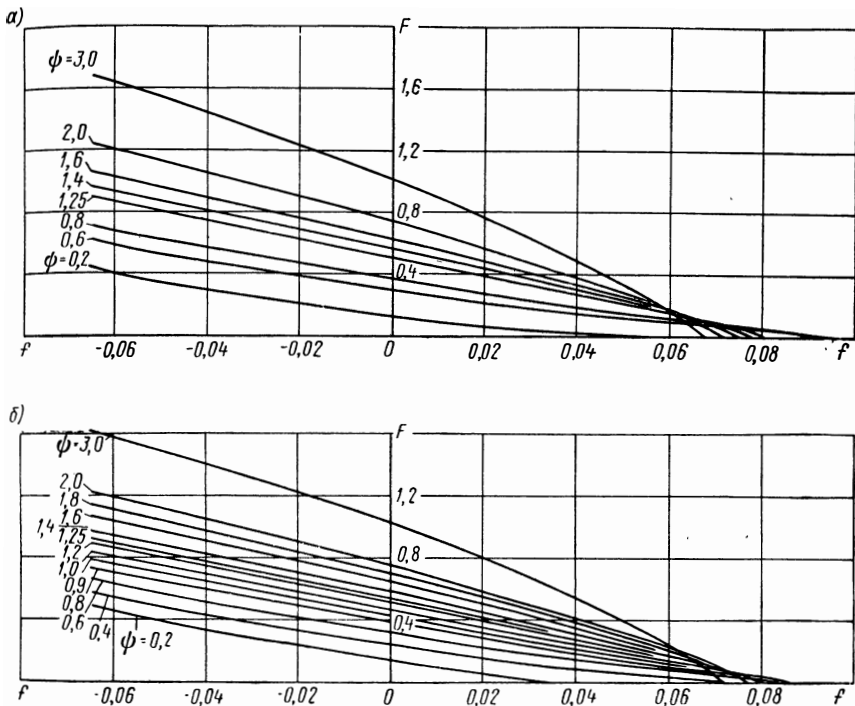


Рис. 7. Зависимость $F(f)$ при различных значениях ψ : а — $Pr = 0,73$; б — $Pr = 1$

ближенное выражение:

$$Nu_x = B(\beta; n) \sqrt{R_x} Pr^k, \quad (\text{III.87})$$

где

$$\beta = \frac{2m}{m+1}; \quad R_x = \frac{Ux}{\nu}.$$

При этом функция $B(\beta; n)$ с погрешностью, не превышающей $\pm 5\%$, описывается формулой

$$B(\beta; n) = 0,57 (\beta + 0,205)^{0,104} [n(2 - \beta) + 1]^{0,37 + 0,06\beta}, \quad (\text{III.88})$$

а показатель степени k изменяется в зависимости от β :

β	1,6	1,0	0	-0,199
k	0,367	0,355	0,327	0,254

На рис. 8 приведена одна из групп кривых изменения интенсивности теплообмена поверхности при различных значениях β и n , полученных в работе Леви. Из рассмотрения этих кривых

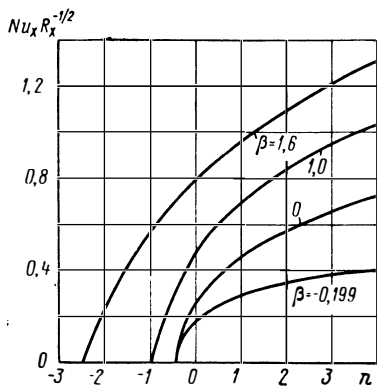


Рис. 8. Изменение интенсивности теплообмена поверхности

при заданных Pr и β толщина пограничного слоя δ_t убывает с увеличением n , причем это убывание тем заметнее, чем больше Pr при заданном β и, наоборот, чем меньше β при заданном Pr .

14. Расчет ламинарного пограничного слоя на вращающемся диске

Вращение диска в неограниченном пространстве. Задача о сопротивлении и теплоотдаче диска, вращающегося в бесконечном пространстве вязкой жидкости в направлении, перпендикулярном его оси, в отличие от рассмотренных выше плоских задач представляет собой осесимметричную пространственную задачу с тремя компонентами скорости (u , v , w). Последние зависят только от двух координат, так как задача является симметричной.

Динамическая задача впервые была решена приближенно Карманом и более точно — позже Кокреном. Тепловая задача была решена Кибелем для $Pr = 1$ и в общем случае Миллсансом и Польгаузенем.

Схема задачи представлена на рис. 9, где через u , v , w обозначены радиальная, окружная и нормальная к плоскости диска составляющие скорости потока в некоторой точке M . Система

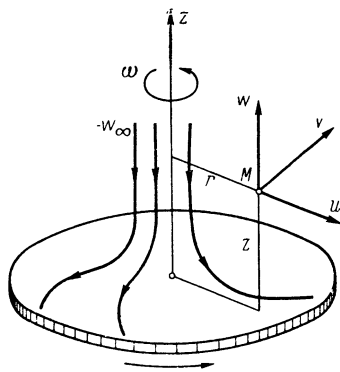


Рис. 9. К задаче о вращающемся диске

уравнений, описывающих процесс, в цилиндрических координатах (r, z, φ) имеет, как уже говорилось выше, следующий вид [117]:

$$\left. \begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\
 &+ v \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]; \\
 u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]; \\
 u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]; \\
 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0; \\
 u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{v}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \\
 + \frac{v}{c_p} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{r} \right)^2 + \right. \\
 &\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.89})$$

Граничные условия этой системы:

$$\left. \begin{aligned}
 z = 0 \rightarrow u = 0; \quad v = r\omega; \quad w = 0; \quad T = T_\omega; \\
 z = \infty \rightarrow u = 0; \quad v = 0; \quad T = T_\infty.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.90})$$

Если считать вращение с угловой скоростью ω равномерным и диск настолько большим, что можно пренебречь краевыми эффектами, то замена переменных

$$\begin{aligned}
 u &= r\omega f(\zeta); \quad v = r\omega g(\zeta); \quad w = \sqrt{v\omega h}(\zeta); \\
 T &= T_\infty + \frac{\omega^2 r}{c_p} s(\zeta) + \frac{v\omega}{c_p} t(\zeta)
 \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

(где за аргумент принято выражение $\zeta = z \sqrt{\omega/v}$) позволяет свести систему (III.89) к системе из шести обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 2f + h' &= 0; \\
 f^2 + f'h - g^2 - f'' &= 0; \\
 2fg + hg' - g'' &= 0; \\
 p' + hh' - h'' &= 0; \\
 s'' - Pr hs' + h's &= -Pr (f'^2 + g'^2); \\
 t'' - Pr ht' &= -(4s + 12 Pr f^2)
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.92})$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \zeta = 0 \rightarrow f = 0; \quad g = 1; \quad h = 0; \quad p = 0; \quad s = 0; \\ t = \frac{c_p}{\nu\omega} (T_w - T_\infty); \\ \zeta = \infty \rightarrow f = 0; \quad g = 0; \quad s = 0; \quad t = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.93})$$

Численное решение этой системы позволило получить из первых четырех уравнений толщину динамического пограничного слоя

$$\delta = 2,794 \sqrt{\nu/\omega}, \quad (\text{III.94})$$

скорость движения от оси диска к периферии

$$\omega_{z=\delta} = -0,545 \sqrt{\nu\omega}, \quad (\text{III.95})$$

момент сопротивления жидкости вращению диска радиусом a

$$M = C_m a^5 \frac{\rho\omega^2}{2}, \quad (\text{III.96})$$

где

$$C_m = \frac{3,38}{\sqrt{R}}; \quad R = \frac{\omega a^2}{\nu}.$$

Последние два уравнения системы (III.92) позволяют получить решение для температурного поля в пограничном слое вокруг диска:

$$\begin{aligned} T = T_\infty + (T_w - T_\infty) t_1 \left(z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) + \frac{\nu\omega}{c_p} t_2 \left(z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right) + \\ + \frac{\omega^2 r^2}{c_p} s \left(z \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.97})$$

Как видно из рассмотрения уравнения (III.97), два последних члена в нем не зависят от граничных условий задачи; они не зависят ни от T_w , ни от T_∞ и характеризуют повышение температуры, которое получается за счет диссипации механической энергии. Расчеты, проведенные в работе [221], показали, что при малых значениях M_∞ этими членами можно пренебречь. В этом случае уравнение (III.97) сводится к соотношению

$$\theta = t_1 \left(z \sqrt{\omega/\nu} \right), \quad (\text{III.98})$$

где

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}.$$

Как видно, в этом случае (принято $T_w = \text{const}$) безразмерная температура не зависит от радиуса, а зависит только от расстояния до диска z .

Значение функции t_1 было получено в работе [221] с помощью численного интегрирования.

Количество тепла, отдаваемого окружающей среде одной стороной диска в секунду, равно

$$Q = -\lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} r dr = -\pi a^2 \lambda \omega^{0,5} \nu^{-0,5} t_1'(0). \quad (\text{III.99})$$

На рис. 10 приведены расчетные значения функции $t_1'(0)$, полученные в работе [221].

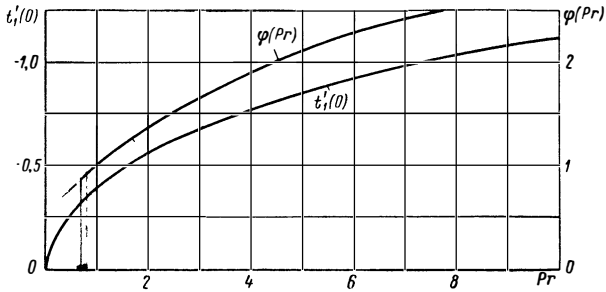


Рис. 10. Значение функции $t_1'(0)$ при различных значениях числа Pr

В работе (45) рассмотрен частный случай решения уравнения притока тепла для вращающегося диска, температура поверхности которого изменяется по закону

$$T_w - T_\infty = c_0 r^2. \quad (\text{III.100})$$

В этом случае уравнение баланса тепла сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\theta'' - Pr (h\theta' + 2f\theta) = 0 \quad (\text{III.101})$$

с граничными условиями: при $\zeta = 0$ имеет место $\theta = 1$; при $\zeta = \infty$ будет $\theta = 0$.

Численное интегрирование этого уравнения позволяет получить для Nu_r следующее выражение:

$$Nu_r = \frac{\alpha r}{\lambda} = 0,616 R_r^{0,5} \varphi(Pr), \quad (\text{III.102})$$

где

$$R_r = \frac{\omega r^2}{\nu}.$$

Функция $\varphi(Pr)$ также представлена на рис. 10.

Равномерное вращение диска в кожухе. При равномерном движении диска в соосном цилиндрическом кожухе возникает сложное пространственное течение жидкости. Имеет место подтекание жидкости к вращающемуся диску и последующее отбрасывание

ее к периферии. Это приводит к циркуляции жидкости по стенкам кожуха и соответствующему перетеканию ее по основаниям кожуха от периферии к центру диска.

В зависимости от ширины зазора между диском и кожухом возможны два типа движения:

1) если зазор достаточно велик, то пограничные слои, образующиеся на вращающемся диске и неподвижном кожухе, не смыкаются, а взаимодействуют друг с другом через некоторую область внешнего потока;

2) если зазор мал, то пограничные слои, образующиеся на диске и основании кожуха, смыкаются.

Первый случай был рассмотрен в работе Шульца—Грюнова. Опыты, описанные в этой работе, показали, что в рассматриваемом случае в области, находящейся между пограничными слоями, возникает такое же распределение азимутальных скоростей, какое имеет место в твердом теле, вращающемся с некоторой угловой скоростью ω_1 — промежуточной между скоростью диска ω и нулевой скоростью вращения кожуха.

В этом случае в отличие от задачи, рассмотренной для вращения диска в неограниченном пространстве, во внешнем потоке существуют азимутальные движения, в результате чего возникает изменение давления в радиальном направлении:

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega_1^2 r. \quad (\text{III.103})$$

В связи с этим в системе уравнений (III.89) нельзя пренебрегать членами с радиальными производными.

Численное решение такой полной системы дифференциальных уравнений, приведенное в работе Шульца—Грюнова, позволило получить следующие выражения для толщины пограничного слоя δ_0 и момента сил трения жидкости M_0 на основаниях кожуха:

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{v}{\omega_1}} x^{0,25} [4,385 - 5,845x + 4,015x^2 - \\ - 4,46x^3 - 1,29x^4 + \dots]; \quad (\text{III.104})$$

$$M_0 = 3,39\mu\omega_1 b^4 \sqrt{\frac{\omega_1}{v}}, \quad (\text{III.105})$$

где b — радиус кожуха.

Для вращающегося диска соответствующие уравнения имеют вид:

$$\delta = \sqrt[4]{150} \left[\frac{v/\omega_1}{2 + 3\omega/\omega_1} \right]^{0,5} \sqrt[4]{\frac{6\omega/\omega_1 - 1}{\omega/\omega_1 + 7/3}}; \quad (\text{III.106})$$

$$M_0 = 1,179\mu a^4 (\omega - \omega_1) \sqrt{\frac{\omega_1}{v}} \sqrt{2 + 3\omega/\omega_1} \left[\frac{\omega/\omega_1 + 7/3}{6\omega/\omega_1 - 1} \right]^{0,25}. \quad (\text{III.107})$$

Теоретически было получено соотношение между угловыми скоростями вращения жидкости (ω_1) и диска (ω)

$$\omega_1/\omega = 0,54. \quad (\text{III.108})$$

Тогда из (III.106) следует, что $\delta = \text{const}$, а

$$M = 1,33\mu a^4 \omega \sqrt{\omega/\nu}.$$

Кроме решений этой динамической задачи имеются решения, относящиеся к вращению диска в однородном осевом потоке, к вращению диска, приводимого в движение из состояния покоя, и др. Здесь на этих решениях мы останавливаться не будем, подробный их анализ приведен в работе [117].

15. Ламинарное движение вязкой жидкости в гладкой цилиндрической трубе

Для решения задачи воспользуемся основной системой дифференциальных уравнений, полученной в п. 2, так как в этом случае упрощенная система дифференциальных уравнений пограничного слоя может быть применена лишь на коротком входном участке. На основном же участке длинной трубы пограничные слои, образовавшиеся у стенок, смыкаются, и понятие внешней границы пограничного слоя с невозмущенным внешним потоком теряет смысл.

Рассмотрим бесконечно длинную трубу с потоком, направленным вдоль ее оси z (рис. 11). Очевидно, что для рассматриваемого случая все компоненты скорости произвольной точки M , кроме w , будут равны нулю и система уравнений существенно упростится. Уравнения движения и сплошности для несжимаемого потока приобретают вид:

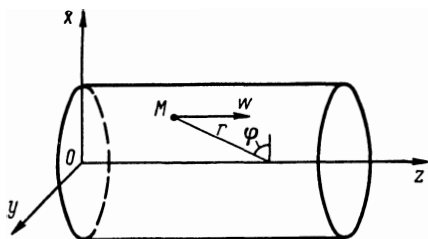


Рис. 11. К задаче о движении в трубе

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x}; & 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y}; \\ \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right); \end{aligned} \right\} (\text{III.109})$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Из этих уравнений следует, что скорость w является функцией только от координат x и y , а давление p — только от z .

Таким образом, для рассматриваемой задачи мы имеем только одно уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (\text{III.110})$$

левая часть которого представляет функцию только от z , а правая — только от x и y . Так как координаты x , y и z независимы друг от друга, то равенство (III.110) возможно только в том случае, если правая и левая его части в отдельности равны постоянному числу. Пусть

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta p}{l},$$

где Δp — постоянное вдоль трубы падение давления на длине l .

Тогда уравнение (III.110) сводится к линейному уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}, \quad (\text{III.111})$$

которое необходимо решать при граничном условии обращения в нуль скорости w на контуре поперечного сечения, нормального к оси z . Эта задача для простейших контуров поперечного сечения трубы легко решается.

Рассмотрим течение через трубу эллиптического сечения. Пусть сечение трубы будет представлять собой эллипс с полуосями a и b , описываемый в плоскости xOy уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда решение уравнения (III.111) с учетом граничных условий будет иметь вид

$$w = A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

при этом постоянная A определяется из условия

$$-2A \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -\frac{\Delta p}{\mu l},$$

откуда

$$A = \frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Подставляя это значение A , получаем выражение для профиля скорости в поперечном сечении эллиптической трубы в виде

$$w = \frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (\text{III.112})$$

Очевидно, эпюры этой скорости представляет собой параболоид вращения, а линиями равных скоростей — изотохами — будут концентрические эллипсы с одинаковыми отношениями полуосей.

Максимальная скорость на оси трубы

$$\omega_{\max} = \frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (\text{III.113})$$

Тогда выражение для скорости можно представить в виде

$$\omega = \omega_{\max} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (\text{III.114})$$

Секундный объемный расход жидкости через сечение эллиптической трубы (σ — площадь сечения)

$$Q = \int_{\sigma} \int \omega \, dx \, dy = \omega_{\max} \int_{\sigma} \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx \, dy = \frac{\pi}{2} ab \omega_{\max}, \quad (\text{III.115})$$

или

$$Q = \frac{\Delta p}{4\mu l} \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Средняя скорость будет равна отношению секундного объемного расхода к площади сечения трубы $F = \pi ab$:

$$\omega_{\text{cp}} = \frac{Q}{\pi ab} = \frac{\Delta p}{4\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\omega_{\max}}{2}. \quad (\text{III.116})$$

Течение в цилиндрической трубе круглого сечения можно рассматривать как частный случай, соответствующий условию равенства полуосей $a = b$. Тогда $x^2 + y^2 = r^2$ и соответственно:

$$\omega = \frac{\Delta p r^2}{4\mu l} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right); \quad (\text{III.117})$$

$$\omega_{\max} = \frac{\Delta p a^2}{4\mu l} = 2\omega_{\text{cp}}; \quad (\text{III.118})$$

$$Q = \frac{\pi \Delta p a^4}{8\mu l}, \quad (\text{III.119})$$

т. е. получаются известные формулы и известный закон Пуазейля, согласно которому при установившемся ламинарном движении в круглой трубе секундный объемный расход пропорционален перепаду давления на единицу длины трубы и четвертой степени ее радиуса. Этот закон справедлив только для установившегося течения, имеющего место на достаточном удалении от входа; для начального участка трубы или для коротких труб закон Пуазейля несправедлив.

Введем понятие сопротивления Δp данного участка трубы, характеризующего перепадом давления на этом участке при заданной

скорости или заданном объемном расходе жидкости через трубу:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w_{\text{ср}}^2}{2}. \quad (\text{III.120})$$

Коэффициент λ , представляющий собой перепад давления на участке трубы длиной $l = d$, отнесенный к единичному среднему скоростному напору, называется коэффициентом сопротивления.

Этот коэффициент имел бы одно и то же постоянное значение для данной трубы и данной жидкости, если бы сопротивление трубы подчинялось квадратичному закону зависимости от скорости. На самом деле при ламинарном течении в гладких трубах этот закон не имеет места и коэффициент λ зависит от скорости.

Действительно, если подставить в (III.120) выражение для Δp из (III.118), то можно получить соотношение

$$\frac{8\mu l w_{\text{ср}}}{a^2} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{w_{\text{ср}}^2}{2},$$

или

$$\frac{32\mu l w_{\text{ср}}}{d^2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w_{\text{ср}}^2}{2},$$

откуда

$$\lambda = \frac{64\mu}{\rho w_{\text{ср}} d} = \frac{64}{R}.$$

Закон, описываемый зависимостью

$$\lambda = 64/R, \quad (\text{III.121})$$

где $R = w_{\text{ср}} d / \nu$ — число Рейнольдса, называется законом сопротивления ламинарного движения вязкой жидкости в цилиндрической трубе круглого сечения. Выражение (III.120) обычно рассматривается не как закон сопротивления, а как формула для определения λ .

Выражение (III.121) справедливо и для эллиптической трубы, если ее средний диаметр d выбрать на основании зависимости

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2b)^2} \right] = \frac{1}{8} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}.$$

Закон распределения скоростей (III.112) можно было бы получить и непосредственно из исходного дифференциального уравнения, представив лапласиан в (III.111) в полярных координатах. В этом случае можно получить уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\mu l},$$

решение которого имеет вид

$$w = - \frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + c_1 \ln r + c_2. \quad (\text{III.122})$$

Из условия ограниченности скорости на оси трубы при $r = 0$ следует, что $c_1 = 0$, а из условия $w = 0$ при $r = a$ — что профиль скорости имеет параболический характер.

Решение (III.122) является более общим, чем (III.112). Из него, например, можно получить распределение скоростей в области между двумя соосными круглыми цилиндрами, имеющими радиусы a и $b > a$.

Граничные условия ($w = 0$ при $r = a$ и $r = b$) позволяют получить распределение скоростей

$$w = \frac{\Delta p}{4\mu l} \left[a^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)} \ln(r/a) \right]. \quad (\text{III.123})$$

Тогда соответственно:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} \left[b^4 - a^4 - \frac{(b^2 - a^2)^2}{\ln(b/a)} \right]; \quad (\text{III.124})$$

$$w_{\text{ср}} = \frac{\Delta p}{8\mu l} \left[b^2 + a^2 - \frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)} \right]. \quad (\text{III.125})$$

Так же можно получить формулы для скоростей и расходов в случае ламинарного движения в трубе прямоугольного сечения. Пусть

$$-a \leq x \leq a; \quad -b \leq y \leq b; \quad a > b.$$

В этом случае:

$$w = \frac{\Delta p}{\mu l} \left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{16b^2}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi y}{2b} \frac{\text{ch} \frac{\pi x}{2b}}{\text{ch} \frac{\pi a}{2b}} - \frac{1}{3^3} \cos \frac{3\pi y}{2b} \frac{\text{ch} \frac{3\pi x}{2b}}{\text{ch} \frac{3\pi a}{2b}} + \dots \right) \right]; \quad (\text{III.126})$$

$$Q = \frac{\Delta p a b^3}{4\mu l} \left[\frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^6} \frac{b}{a} \left(\text{th} \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^3} \text{th} \frac{3\pi a}{2b} + \dots \right) \right]; \quad (\text{III.127})$$

$$w_{\text{ср}} = \frac{\Delta p b^2}{16\mu l} f(a/b), \quad (\text{III.128})$$

где

$$f(a/b) = \frac{16}{3} - \frac{1024}{\pi^6} \frac{b}{a} \left(\text{th} \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^3} \text{th} \frac{3\pi a}{2b} + \dots \right).$$

Численные значения этой функции:

a/b	1	2	3	5	10	12	100	∞
$f(a/b)$	2,253	3,664	4,203	4,665	5,000	5,059	5,299	5,333

Уравнение притока тепла (I.27) для рассматриваемой задачи может быть также упрощено. В цилиндрических координатах (z , r , φ) в соответствии с рис. 11 для круглой трубы его можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & w_r \frac{\partial T}{\partial r} + w_\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = \\ & = \frac{\text{Pr}}{\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.129})$$

Задачу представим следующим образом. Сначала температурное поле жидкости в трубе однородно ($T = T_w$). После некоторого сечения $z = 0$ температура стенки T_w становится выше (или ниже) температуры жидкости, но сохраняется постоянной ($T_w = \text{const}$).

Введем в рассмотрение $\vartheta = T - T_w$; очевидно, уравнение (III.129) относительно ϑ будет иметь такой же вид, как и относительно T . Из соображений симметрии можно считать $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} = 0$; кроме того,

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \ll \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2}.$$

Тогда при использовании (III.117) и (III.118) уравнение (III.129) может быть преобразовано к виду

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 2w_{\text{cp}} \frac{\text{Pr}}{\nu} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \quad (\text{III.130})$$

с граничными условиями:

- 1) при $z = 0$ и $r < a$ имеем $\vartheta = \vartheta_0$;
- 2) при $z > 0$ и $r = a$ имеем $\vartheta = 0$.

Решение задачи о температурной функции $\vartheta(z, r)$ ищется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от z , другая — только от r :

$$\vartheta(z, r) = \Phi(z) \psi(r). \quad (\text{III.131})$$

Подставив эту функцию в (III.130), Нуссельт [32] нашел решение уравнения в виде бесконечного ряда

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f \left(\frac{\nu}{\text{Pr} w_{\text{cp}} d} \frac{x}{d}; \frac{r}{a} \right). \quad (\text{III.132})$$

Здесь $d = 2a$ — диаметр трубы.

Выражение для числа Nu было получено в виде

$$\text{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda} = f_1 \left(\frac{\nu}{\text{Pr} w_{\text{cp}} d} \frac{x}{d} \right). \quad (\text{III.133})$$

На рис. 12 представлена функция f_1 при различных значениях комплекса

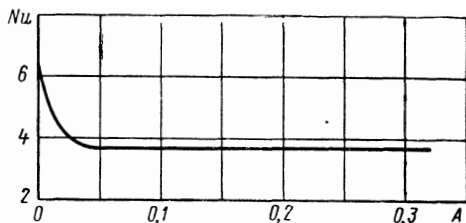
$$A = \frac{v}{Pr \omega_{cp} d} \frac{x}{d},$$

численные значения которой были получены в работе [32]. Из рассмотрения этой кривой видно, что уже при значении

$$\frac{v}{Pr \omega_{cp} d} \frac{x}{d} = \frac{1}{Pr R_d} \frac{x}{d} \geq 0,05$$

число Nu достигает некоторого предельного значения, после ко-

Рис. 12. Изменение числа Нуссельта по длине трубы ($A = \frac{v}{Pr \omega_{cp} d} \frac{x}{d}$)



торого интенсивность теплообмена вдоль трубы не изменяется. Это предельное значение равно

$$Nu_0 = 3,65. \quad (III.134)$$

Оно соответствует усредненной (среднерасходной) температуре¹

$$\vartheta_F = \frac{\int_f \vartheta \omega df}{\int_f \omega df} = \frac{1}{V} \int_f \vartheta \omega df. \quad (III.135)$$

Если коэффициент теплоотдачи относить к среднеинтегральной температуре

$$\vartheta_f = \frac{1}{f} \int_f \vartheta df, \quad (III.136)$$

то предельное значение числа Nu будет

$$Nu'_0 = 5,16. \quad (III.137)$$

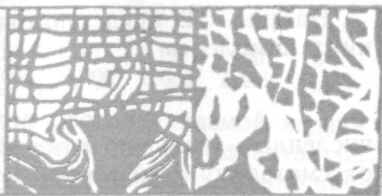
Для линейного изменения температуры стенки T_w и расчета ϑ_f по соотношению (III.136) было получено следующее предельное значение числа Nu

$$Nu''_0 = 4,364. \quad (III.138)$$

Было выполнено также решение для случая равномерного распределения скорости по сечению трубы [32]. В этом случае предельное значение числа Nu оказалось равным

$$Nu'''_0 = 8. \quad (III.139)$$

¹ В формуле (III.135) V — объемный расход.



ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

16. Понятие турбулентности

При выводе основных уравнений пограничного слоя в гл. I не вводилось никаких ограничений относительно формы обтекаемого тела. Таким образом, эти уравнения принципиально пригодны для описания обтекания любого тела: пластины, крыла самолета, турбинной лопатки, цилиндра, шара и т. д. Единственное условие, принятое при выводе, заключалось в предположении, что обтекающая среда является сплошной и при контакте ее с обтекаемой поверхностью имеет место прилипание.

Однако в реальных условиях при рассмотрении некоторых конкретных задач наблюдаются следующие явления. При поперечном обтекании цилиндрической трубы, при течении жидкости в диффузорном канале и в некоторых других случаях возникают условия, когда жидкость вынуждена двигаться в сторону повышения давления. Такое движение, как известно, является неустойчивым, в этих условиях возникает тенденция к образованию обратных течений, которые могут возникнуть раньше всего в тех частях потока, где скорость движения жидкости наименьшая, т. е. в пристенной области пограничного слоя. В результате этого процесса происходит перестройка профилей скорости в пограничном слое, и, в конце концов, при достаточно больших положительных градиентах давления нарушаются условия прилипания и возникает явление отрыва пограничного слоя. В этом случае уже нельзя рассчитывать обтекание по полученным уравнениям пограничного слоя. Таким образом, следует подчеркнуть, что выведенная в гл. I система уравнений применима только для всех случаев безотрывного обтекания поверхностей.

Еще в прошлом веке было обнаружено, что сопротивление жидкости, или потеря напора, при движении ее по данной трубе после некоторого значения скорости при всех прочих равных условиях сильно возрастает. Объяснение этому явлению было дано после известных классических опытов О. Рейнольдса (1883 г.), который проводил визуальные наблюдения за течением жидкости в трубе, подцветывая поток струйками краски. В этих опытах впервые

была обнаружена теперь уже общеизвестная разница в характере течения жидкости в ламинарном и турбулентном потоке и были установлены условия перехода из ламинарного течения в турбулентное. Было показано, что в различных трубах переход возникает, если некоторая величина, равная $R = U_{cp} d/\nu$ (где U_{cp} — средняя скорость потока; d — диаметр трубы; ν — коэффициент кинематической вязкости), достигает критического значения

$$R_{кр} \geq 2300. \quad (IV.1)$$

Ламинарная и турбулентная формы движения существенно отличаются друг от друга. Как известно, ламинарное течение характеризуется регулярным, струйным движением жидкости, причем проникающие в поток пульсации и возмущения не имеют условий для развития и затухают. Принято говорить, что ламинарное течение является устойчивым по отношению к проникающим в него возмущениям. Турбулентное течение, наоборот, характеризуется нерегулярным, неупорядоченным движением, при котором на основное движение жидкости накладываются поперечные перемещения, вызывающие весьма интенсивное перемешивание всей жидкости. В каждой данной точке потока скорость, плотность и другие параметры непрерывно испытывают отклонения от основного значения, при этом струйки жидкости как бы переплетаются друг с другом; проникающие в поток возмущения не затухают, а развиваются. Все это вызывает характерное для турбулентного течения увеличение сопротивления трения. Возникающие поперечные перемещения приводят к лучшему перемешиванию жидкости в потоке, в результате чего турбулентный профиль скорости гораздо более заполнен, чем ламинарный. Это одно из характерных свойств турбулентного течения в трубе или канале.

Позднейшие исследования установили, что критическое значение числа R , названного впоследствии числом Рейнольдса, не сохраняется постоянным, а зависит от характера изменения поперечного сечения трубы вдоль потока и от условий поступления потока в трубу. Для конфузорных труб критическое значение $R_{кр}$ значительно больше, чем для цилиндрических труб, в то время как для диффузорных труб значения $R_{кр}$ оказываются меньшими. Кроме того, в случае спокойного плавного входа возникновение перехода значительно затягивается. Так, для цилиндрических труб удалось сохранить ламинарное течение до значений $R \approx 40 \cdot 10^3$. С другой стороны, было обнаружено, что при любой интенсивности внешних возмущений до значений $R < 2 \cdot 10^3$ они со временем затухают, т. е. при этих значениях R ламинарное течение является устойчивым и не переходит в турбулентное.

В дальнейшем было установлено, что турбулентность может возникать не только в свободном потоке, но и в пограничном слое. Впервые это явление было обнаружено в опытах Эйфеля и Прандтля по определению сопротивления шара. Возникающее после некоторого значения числа Рейнольдса резкое уменьшение сопро-

тивления шара было объяснено турбулизацией пограничного слоя. Здесь обнаружилось второе характерное свойство турбулентного течения — его большая устойчивость по отношению к обратным градиентам давления, в результате чего при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое шара наблюдался более поздний отрыв пограничного слоя от поверхности шара. Это обусловило больший угол охвата шара потоком, сокращение кормовой зоны и соответствующее уменьшение сопротивления, связанного с отрывом пограничного слоя.

Исследования последних лет показали, что при переходе от ламинарного течения к турбулентному в трубе в районе крити-

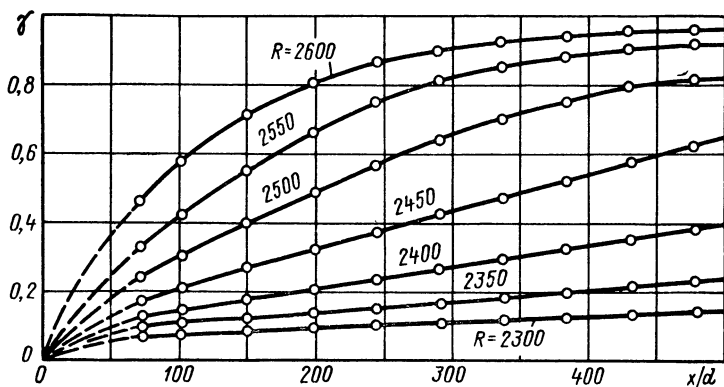


Рис. 13. Коэффициент перемежаемости в круглой трубе при различных значениях R

ческих значений числа R движение имеет перемежающийся характер, т. е. в течение некоторого промежутка времени оно является то ламинарным, то турбулентным. Для описания такого характера течения введено понятие коэффициента перемежаемости γ [233], который указывает, какую долю рассматриваемого промежутка времени течение в данной точке является турбулентным. При $\gamma = 1$ течение полностью турбулентное, при $\gamma = 0$ — полностью ламинарное. Величина коэффициента γ для данного конкретного течения зависит от числа R и от расстояния x между рассматриваемым сечением трубы и сечением, в котором начался процесс перехода. На рис. 13, заимствованном из работы [233], видно, что при $R = 2600$ значение $\gamma = 1$ достигается гораздо скорее, чем при $R = 2300$, т. е. в первом случае переходная область имеет меньшую протяженность, чем во втором.

Турбулентность по своей природе носит статистический характер, и в отношении неупорядоченности и нерегулярности турбулентное движение является некоторым аналогом молекулярного движения, которое в настоящее время описано достаточно полно с помощью законов статистической физики. Особенностью турбу-

лентного обмена по сравнению с молекулярным является макроскопичность рассматриваемых явлений, позволяющая сделать их доступными непосредственному наблюдению. Однако теоретическая формулировка проблемы турбулентности несравненно более сложна, чем соответствующие проблемы молекулярной физики. Молекулярные системы являются устойчивыми системами, разрушение которых возможно только под воздействием громадных сил, турбулентные же вихри весьма неустойчивы — они легко зарождаются и легко разрушаются. Таким образом, проблема

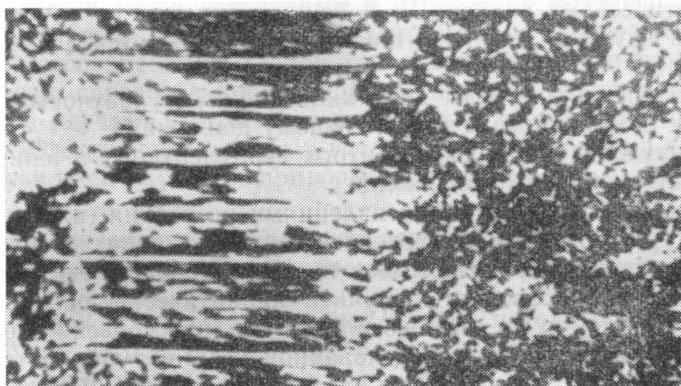


Рис. 14. Изотропное турбулентное движение за сотовой решеткой

развитого турбулентного течения неизбежно связана с проблемой зарождения и рассеяния турбулентности и поэтому применение к ней статистических законов требует гораздо более тонкого анализа.

Турбулентные движения, встречающиеся в различных задачах аэродинамики, являются весьма сложными, характеризуются они как обычным изменением осредненной скорости потока от точки к точке (вследствие влияния твердых стенок), так и наличием пульсаций (во времени и пространстве) таких параметров потока, как скорость, давление, плотность, температура и т. п. В общем случае картина является полностью анизотропной и сложной или даже практически недоступной для математического анализа. Однако в некоторых случаях в природе встречаются движения, турбулентные характеристики которых не зависят ни от положения, ни от направления осей координат. Турбулентные движения подобного типа называются статистически однородными и изотропными. Примером может служить показанное на рис. 14 изотропное турбулентное движение, возникающее на некотором расстоянии за решеткой, имеющей вид пчелиных сот. Большинство лабораторных исследований и исследований в аэродина-

мических трубах проводится в потоках, обладающих именно изотропной турбулентностью.

Изотропная однородная турбулентность является простейшим видом турбулентности, и применение для таких потоков статистических законов связано с наименьшими трудностями. Большинство теоретических исследований в этой области поэтому относится к задачам однородной изотропной турбулентности, и лишь некоторые частные задачи решены для более общего случая неизотропной однородной турбулентности. Однако и это наиболее простое явление до сих пор еще не поддается исчерпывающему математическому анализу.

При изучении турбулентности рассматриваются две основные задачи:

- 1) изучение природы возникновения турбулентности и перехода от ламинарного к турбулентному движению;
- 2) изучение природы развитого турбулентного течения и механизма турбулентного обмена.

Эти задачи осложняются явлениями рассеяния (или вырождения) турбулентности, обусловленными влиянием вязкости.

В настоящее время ни одна из существующих теорий турбулентности не позволяет получить аналитически распределение средней скорости по сечению или определить уровень турбулентности. Для построения обоснованной теории турбулентного течения, включающей основные частные случаи, требуется гораздо более обширный объем экспериментальных и теоретических исследований, чем тот, который имеется в настоящее время в распоряжении ученых. Исследования турбулентности ведутся весьма широким фронтом и охватывают все больший круг исследователей. Эти исследования нельзя рассматривать только как интересные главы теоретической физики, они необходимы для практического решения большого круга прикладных технических задач. Например, переход к турбулентному течению, с одной стороны, вызывает повышение сопротивления трения, связанное с более интенсивным обменом, с другой — повышает устойчивость течения и препятствует возникновению отрыва пограничного слоя. Вследствие этого в ряде практических задач, например при профилировании рабочего канала проточной части агрегата, нужно уметь определять, будет ли течение в ядре потока и в пограничном слое ламинарным или турбулентным, и задавать условия, обеспечивающие возникновение того или иного режима течения в пограничном слое. При этом в зависимости от условий и режимов работы агрегата требования к оптимальной аэродинамике профиля рабочего канала могут быть различными. При безотрывном обтекании, когда основную долю потерь энергии составляют потери на трение, необходимо стремиться к созданию условий, способствующих максимальному затягиванию существования ламинарного пограничного слоя. Однако если в этой же проточной части процесс развивается таким образом, что в потоке возможно воз-

никновение ударных волн, падающих на пограничный слой, требование к проточной части должно быть диаметрально противоположным. Ударные волны, взаимодействуя с пограничным слоем, могут вызвать при определенных условиях отрыв последнего и соответствующее возрастание потерь энергии, величина которых может значительно превысить потери на трение не только при ламинарном, но и при турбулентном течении в пограничном слое. В этом случае целесообразно стремиться к более ранней турбулизации пограничного слоя, так как турбулентный пограничный слой является более устойчивым и отрывается позднее.

Велико также влияние турбулентности на процессы теплообмена, массообмена и т. п. При этом очень важно, что турбулентность тесно связана с конкретной обстановкой опыта и поэтому нельзя ее изучать в отрыве от реальных условий развития процессов, эффективность которых исследуется. В этом одна из главных трудностей изучения природы турбулентности.

17. Возникновение перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое

Как правило, в первый момент встречи потока с обтекаемым телом около него возникает ламинарный пограничный слой, который на некотором расстоянии $x = x_n$ от передней точки разветвления начинает переходить в турбулентный. Экспериментальные исследования показали, что переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое зависит не только от значения числа R , но и от целого ряда других факторов, в том числе от характера изменения давления во внешнем потоке, от интенсивности возмущений во внешнем потоке (степень турбулентности), от шероховатости поверхности и т. д.

Область перехода в пограничном слое, так же как и в трубе, характеризуется перестройкой профилей скорости от незаполненного ламинарного профиля до крутых заполненных турбулентных профилей скорости. Наиболее отчетливо эта перестройка видна по характеру изменения параметра $H = \delta^*/\delta^{**}$ вдоль области перехода (рис. 15).

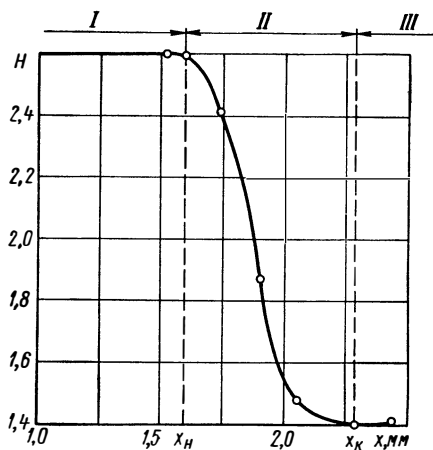


Рис. 15. Изменение параметра H вдоль области перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое пластины:

I — ламинарное течение; II — область перехода; III — турбулентное течение

Исследования показали, что переход в пограничном слое является перемежающимся процессом, характеризующимся беспорядочной сменой во времени ламинарных и турбулентных состояний. Через неправильные промежутки времени в различных точках внутри пограничного слоя возникают турбулентные образования — турбулентные пятна, которые смещаются вниз по потоку, расширяясь и сохраняя турбулентную форму движения. В области вне пятен существуют попеременно то ламинарная, то турбулентная формы движения. По мере продвижения вниз по потоку число турбулентных пятен возрастает, и к концу переходной области они начинают заполнять все пространство пограничного слоя.

Если приближенно принять, что скорость на внешней границе пограничного слоя является аналогом скорости на оси трубы, а толщина пограничного слоя δ — аналогом радиуса при движении в трубе, то значения критических чисел Рейнольдса $R_\delta = U\delta/\nu$, характеризующие переход от ламинарного режима течения к турбулентному в пограничном слое, оказываются примерно такими же, как и при течении в трубе. Это экспериментально установлено для обтекания пластин, шара, крылового профиля.

Толщина пограничного слоя δ является величиной очень не точно определяемой, так как профили скорости в поперечных сечениях пограничного слоя приближаются к значению $u = U$ плавно, асимптотически. В связи с этим в теории пограничного слоя вводятся число Рейнольдса, включающее продольную координату x и обозначаемое

$$R_x = \frac{Ux}{\nu}, \quad (IV.2)$$

и числа Рейнольдса, составленные из так называемых условных толщин пограничного слоя:

$$R^* = \frac{U\delta^*}{\nu}; \quad (IV.3)$$

$$R^{**} = \frac{U\delta^{**}}{\nu}. \quad (IV.4)$$

В случае обтекания плоской пластины с острой передней кромкой критическое значение числа R_x , определяемое по формуле

$$R_{xкр} = \frac{Ux_{кр}}{\nu}, \quad (IV.5)$$

колеблется в пределах $(3,5 \div 20,0) 10^5$.

При теоретическом анализе явление возникновения турбулентности связывается с потерей устойчивости ламинарного движения в пограничном слое. Различные теории рассматривают потерю устойчивости как результат наложения на основное движение некоторых заданных регулярных малых колебаний, развитие

которых во времени анализируют с помощью уравнений аэродинамики.

В том случае, когда возмущения, взаимодействуя с основным регулярным потоком, приобретают характер малых периодических колебаний или затухают со временем, движение будет устойчивым по отношению к этим возмущениям. Если же первоначальные возмущения будут со временем расширяться и возрастать, то основное движение будет неустойчивым по отношению к этим возмущениям. Таким образом, во всех теориях потери устойчивости принято допущение, что причиной возникновения турбулентности является развитие регулярных колебаний, присущих ламинарному движению.

Толлмиен в 1936 г. показал, что вызываемые малыми возмущениями регулярные колебания в ламинарном пограничном слое развиваются или гаснут в зависимости от частоты возмущений и от числа R . Значительное развитие колебаний возможно только в том случае, когда число Рейнольдса становится больше некоторого значения, называемого минимальным критическим. Это значение должно быть меньше, чем число Рейнольдса, соответствующее возникновению турбулентного движения, так как регулярные возмущения в ламинарном пограничном слое должны развиваться до значительной величины, прежде чем они смогут вызвать нерегулярные пульсации, характеризующие турбулентность.

Толлмиен теоретически нашел, что такие колебания могут развиваться, если

$$R^* > 420. \quad (IV.6)$$

Шлихтинг [167] получил критическое значение

$$R^* > 575. \quad (IV.7)$$

При этом было показано, что для каждого значения

$$R^* > R_{кр}^*$$

существует область частот пульсаций, в которой возмущения развиваются, при больших же или меньших значениях частот возмущения гаснут, т. е. существует некоторая так называемая область нейтральных пульсаций.

На рис. 16 приведены две кривые, ограничивающие область нейтральных пульсаций для двух типов течений:

а) течения с большим положительным градиентом давления и профилем скорости, близким к отрывному (профиль I);

б) течения с обычным турбулентным профилем скорости (профиль II).

Как видно, в первом случае область неустойчивых течений значительно больше, а величина $R_{кр}^*$ соответственно меньше, чем во втором случае.

Метод малых колебаний был применен различными авторами для сжимаемого и несжимаемого потоков, для адиабатных течений и течений с теплообменом и т. д., в результате были установлены факторы, влияющие на переход от ламинарного к турбулентному режиму в пограничном слое [167]. Сравнение расчетных данных с экспериментальными показало, что теоретические методы позволяют правильно предсказать тенденции в изменении критических значений чисел Рейнольдса под влиянием тех или иных факторов, однако абсолютные значения, полученные расчетным

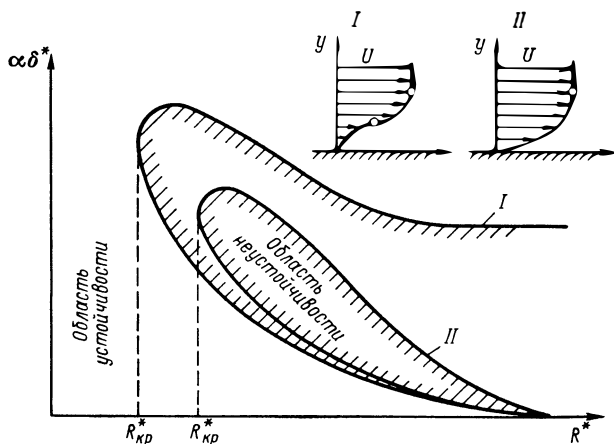


Рис. 16. Нейтральные кривые при двухмерных возмущениях в плоском пограничном слое для двух типов течений

путем ($R'_{кр}$) и экспериментальным ($R''_{кр}$), значительно отличаются друг от друга. Такое различие естественно, так как значение $R'_{кр}$ характеризует условия, при которых начинается развитие пульсаций в ламинарном пограничном слое, а значение $R''_{кр}$ характеризует условия, при которых изменения в режиме течения уже становятся заметными. Очевидно, для практического использования важна именно вторая величина, а не первая.

На рис. 17 приведена одна из картин сопоставления расчетных значений $R'_{кр}$ с экспериментальными $R''_{кр}$. Штриховыми линиями обозначены результаты расчетов Ван-Дрифта по влиянию температуры поверхности на потерю устойчивости ламинарного пограничного слоя пластины при различных значениях числа M . Сплошными линиями показаны экспериментальные данные работы [200] по определению $R''_{кр}$ в пограничном слое пластины при $M = 2,4$. Линия со светлыми кружочками соответствует критическому значению числа Рейнольдса $R_{x_n} = Ux_n/\nu$ в точке начала перехода x_n , линия с зачерненными кружочками — $R_{x_k} = Ux_k/\nu$ в точке конца перехода x_k (см. рис. 15).

Как видно, расчетные и экспериментальные данные имеют общую тенденцию уменьшения устойчивости с увеличением отношения T_w/T_{aw} , по абсолютному же значению они отличаются примерно в 700 раз, наклон расчетной и экспериментальной кривых также различен.

Несмотря на указанное несоответствие данных, для обтекания в потоках малой турбулентности в практике нашла применение теоретическая функция для критического числа Рейнольдса, определенная в однопараметрической постановке [118]. Эта функция получается из решения с использованием теории устойчивости и представляет собой приближенную зависимость между расчетным значением числа Рейнольдса в сечении ламинарного пограничного слоя, где теряется его устойчивость,

$$R_{кр}^{**} = \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu} \right)_{кр} \quad (IV.8)$$

и значением в этом же сечении форм-параметра

$$f'_{кр} = \left(\frac{dU}{dx} \frac{\delta^{**2}}{\nu} \right)_{кр}. \quad (IV.9)$$

На рис. 18 сплошной линией представлен график этой функции, являющийся универсальным, так как не зависит от конкретного вида функции $U = U(x)$ на внешней границе пограничного слоя. Практическое пользование графиком не представляет трудностей: из расчета ламинарного пограничного слоя, например по методу, изложенному в п. 12, определяется зависимость $R^{**} = R(f)$, которая наносится на график (штриховая линия на рис. 18), точка пересечения кривых будет точкой перехода.

Однако кроме общих соображений о различии между расчетным и экспериментальным значениями критических чисел Рейнольдса в данном случае следует еще отметить, что задачу перехода трудно представлять себе как однопараметрическую — это типичная многопараметрическая задача. В связи с этим возможны очень большие расхождения между этими значениями.

На основании сопоставления расчетных значений $R_{кр}^{**}$ с экспериментальными $R_{кр}$ в последнее время предложены эмпирические

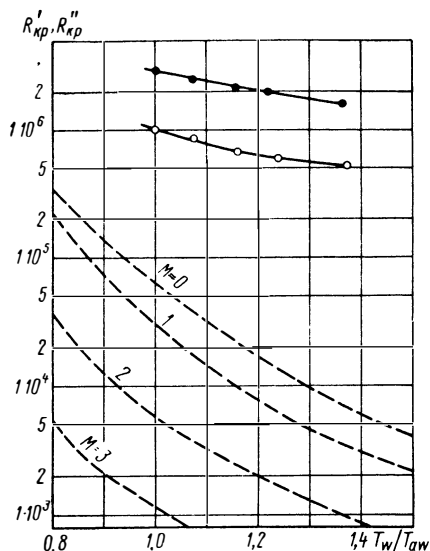


Рис. 17. Влияние температуры поверхности на устойчивость ламинарного пограничного слоя: — — — — $R''_{кр}$; — — — — $R'_{кр}$

поправки $\Delta = R_{кр}^{***} - R_{кр}^{**}$, позволяющие по известному первому значению приближенно определять второе. На рис. 19 приведена кривая изменения таких поправок при изменении продольного градиента давления [167], по оси абсцисс отложен параметр, эквивалентный форм-параметру f :

$$\bar{x} = \frac{1}{x_{кр}'' - x_{кр}' } \int_{x_{кр}'}^{x_{кр}''} \frac{dU}{dx} \frac{\delta^{***2}}{\nu} dx. \quad (IV.10)$$

Здесь $x_{кр}''$ и $x_{кр}'$ — значения координат начала перехода, полученные экспериментально и расчетным путем соответственно.

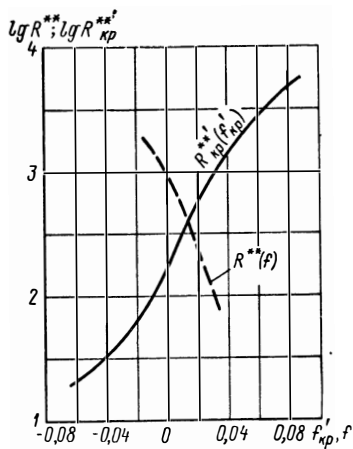


Рис. 18. Зависимость между $R_{кр}^{**}$ и $f_{кр}$ в точке потери устойчивости ламинарного пограничного слоя

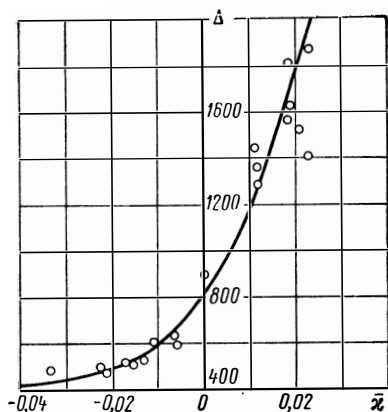


Рис. 19. Кривая изменения поправок к расчетным значениям $R_{кр}^{**}$

Точки соответствуют опытным данным различных авторов по обтеканию пластин и различных крыловых профилей потоком малой турбулентности. Эта поправочная кривая имеет частный характер. Кроме градиента давления к числу факторов, определяющих возникновение перехода от ламинарного к турбулентному движению в пограничном слое, относятся турбулентность внешнего потока, число M , температурный фактор, шероховатость и ряд других параметров. Кроме того, описанная выше картина перехода, представляющая собой процесс, развивающийся во времени и пространстве, заставляет ставить вопрос не о точке перехода, а об области перехода, т. е. если вводить понятие каких-то критических значений числа Рейнольдса, то нужно говорить по крайней мере о двух таких значениях: R_n , соответствующем началу заметной перестройки ламинарного течения в погра-

ничном слое, и R_k , соответствующем окончанию перестройки и возникновению развитого турбулентного течения в пограничном слое. Протяженность области перехода — это практически протяженность области, в которой коэффициент перемежаемости γ изменяется от 0 до 1. Так же как и в трубе (см. рис. 13), протяженность области перехода в пограничном слое зависит от целого ряда факторов.

На рис. 20 приведены экспериментальные кривые изменения значений R_{x_H} и R_{x_k} с изменением степени турбулентности

$$\varepsilon = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{1}{3} [(\overline{u'})^2 + (\overline{v'})^2 + (\overline{w'})^2]}, \quad (IV.11)$$

построенные на основе опытных данных [235, 58, 62] по исследованию пограничного слоя на плоской пластине. Из рассмотрения кривых видно, что как значения R_{x_H} и R_{x_k} , так и расстояние между кривыми, соответствующее протяженности области перехода, существенно изменяются с изменением степени турбулентности внешнего потока ε . Следует отметить, что в работе Шубауэра и Скрэм-



Рис. 20. Зависимость R_{x_H} и R_{x_k} в пограничном слое пластины от турбулентности потока: \times — данные [58]; \bullet — данные [62]; \circ — данные [235]

стэда [235], которыми была искусственно создана очень малая степень турбулентности потока в трубе ($\sim 0,02\%$), было показано, что при очень малых значениях ε переход к турбулентному течению действительно возникает под влиянием развития малых колебаний внутри ламинарного пограничного слоя, как это предполагается в теориях устойчивости ламинарного пограничного слоя; однако при увеличении степени турбулентности картина изменяется.

В работе [58] для характеристики протяженности области перехода введен параметр

$$r_x = \frac{R_{x_k}}{R_{x_n}}, \quad (\text{IV.12})$$

который впоследствии оказался весьма удобным, так как является в значительной мере универсальной величиной, не зависящей от целого ряда параметров потока.

Значительное несоответствие величин $R'_{кр}$, полученных из расчета с помощью теорий устойчивости, и экспериментальных $R''_{кр}$ привело к необходимости создания полуэмпирических или эмпирических методов определения $R_{кр}$, которые, базируясь на опытных данных, позволяли для случаев, аналогичных исследованным в базовых экспериментах, предсказывать место возникновения перехода более точно, чем расчеты с использованием теорий устойчивости. Из значительного количества этих методов остановимся только на двух.

Для условий обтекания крыловых профилей в малотурбулентных потоках удовлетворительное соответствие с экспериментом дает метод Дородницына—Лойцянского. В работе [43] изложена полуэмпирическая теория перехода, позволяющая определять приблизительно местоположение точки перехода для случая обтекания как сжимаемым, так и несжимаемым газом. Принимается следующая схема перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Внешние возмущения вызывают мгновенные местные отрывы ламинарного пограничного слоя, которые создают мелкие вихри, заполняющие пограничный слой и делающие его турбулентным.

При рассмотрении этих мгновенных местных отрывов как некоторого осредненного квазистационарного явления, принимается для определения точки возникновения отрывов условие

$$\left(\frac{\nu U'}{U^2} + \Gamma \right) R^{**2} = -0,089, \quad (\text{IV.13})$$

отличающееся от обычного условия отрыва ламинарного пограничного слоя наличием слагаемого Γ в круглых скобках (здесь U — скорость на внешней границе пограничного слоя; $U' = \frac{dU}{dx}$). Предполагается, что величина Γ есть некоторая функция, определяющаяся характером внешних возмущений, приносимых набегающим потоком.

Авторы приводят решение по определению точки перехода для двух случаев:

- 1) $\Gamma = \text{const} = -1,3 \cdot 10^{-7}$;
- 2) $\Gamma \neq \text{const}$, величина Γ зависит от турбулентных характеристик внешнего потока;

$$\Gamma = \varepsilon^{2,5} \left(\frac{\nu}{U_\infty L_0} \right)^{0,5} \left(\frac{U_\infty}{U} \right)^6 \left[1 + \left(\frac{U_\infty}{U} \right)^4 \right]^{-2,5},$$

где ε определяется по формуле (IV.11); L_0 — масштаб турбулентности внешнего потока.

Расчеты по формуле (IV.13) обеспечивают удовлетворительное совпадение с опытными данными для профилей типа крыла самолета при малой степени турбулентности потока.

Для случая обтекания крыла потоком сжимаемой жидкости условие для определения точки возникновения местных отрывов принимает вид

$$\varphi(x) \left(\frac{\bar{U}}{U} + \Gamma R \right) = -0,089. \quad (\text{IV.14})$$

Здесь

$$\varphi(x) = 0,46U^{-4} (1 - \alpha_0^2)^{-m} \int_0^x U^5 (1 - \alpha_0^2)^{m-1} dx, \quad (\text{IV.15})$$

где $m \approx 2,5$; $\alpha_0^2 = U^2/(2i_0)$, если i_0 — полная энтальпия потока.

Для условий обтекания турбинных и компрессорных решеток профилей удовлетворительное соответствие эксперименту дает эмпирический метод, предложенный в работе [62]. Этот метод построен на анализе и обобщении большого количества экспериментальных исследований безградиентного и градиентного обтекания пластин и решеток профилей в условиях наличия и отсутствия теплообмена. На основе анализа этих опытных данных авторы устанавливают, что главными факторами, влияющими на переход в пограничном слое у гладкой поверхности, являются турбулентность набегающего потока, число M , температурный фактор и продольный градиент давления. В качестве температурного фактора ψ выбирается отношение температуры стенки к температуре потока $\psi = T_w/T$; продольный градиент давления характеризуется значением числа Маха в точке минимума давления на эпюре скорости вдоль обвода профиля ($M = M_0$). Предполагается, что влияние каждого из четырех выделенных факторов на переход происходит независимо, т. е. корреляция между ними отсутствует, соответственно число R_{x_H} ищется в виде произведения четырех функций:

$$R_{x_H} = R_{x_H}^0 r_M r_\psi r_f, \quad (\text{IV.16})$$

где

$$R_{x_H}^0 = \varphi_1(\varepsilon) = 2,8 \cdot 10^6 r_\varepsilon = 2,8 \cdot 10^6 \frac{R_{x_H}(\varepsilon)}{R_{x_H}|_{\varepsilon=0,1}}; \quad (\text{IV.17})$$

$$r_M = \varphi_2(M) = \frac{R_{x_H}(M)}{R_{x_H}|_{M \approx 0}}; \quad (\text{IV.18})$$

$$r_\psi = \varphi_3(\psi) = \frac{R_{x_H}(\psi)}{R_{x_H}|_{\psi=1}}; \quad (\text{IV.19})$$

$$r_f = \varphi_4(M_0) = \frac{R_{x_H}(M_0)}{R_{x_H}|_{f=0}}. \quad (\text{IV.20})$$

Здесь $R_{x_n}^{\bullet}$ — значение R_{x_n} при обтекании пластины в случае $M \approx 0$ и $\psi \approx 1$; $R_{x_n}(M_0)$ — локальное значение R_{x_n} при градиентном обтекании для некоторых произвольных ϵ , ψ , M ; $R_{x_n}|_{f=0}$ — значение R_{x_n} для тех же ϵ , ψ , M , но при безградиентном обтекании.

На рис. 21 приведены экспериментальные зависимости, полученные для каждой из четырех функций, входящих в соотношение (IV.16).

На основе обобщения этих экспериментальных зависимостей для расчета R_{x_n} получена формула

$$R_{x_n} = A (1 + 1,3M_0^{1,7}) (1 + 0,38M^{0,6}) \psi^{-2,3}, \quad (IV.21)$$

где коэффициент A в зависимости от ϵ принимает значения:

ϵ в %	$\leq 0,12$	$0,12-1,00$	$1-3$
R	$3,1 \cdot 10^6$	$0,71 \cdot 10^6 \epsilon^{-0,7}$	$0,71 \cdot 10^6 \epsilon^{-1,76}$

Формула (IV.21) справедлива, как всякие эмпирические формулы, только в исследованном диапазоне изменения основных параметров: $M \leq 3,5$; $0,02\% \leq \epsilon \leq 3\%$; $0,5 \leq \psi \leq 2,8$.

Проверка этой формулы при обтекании решетки в условиях большой турбулентности и неоднородности потока на входе (установка решетки за вращающимся рабочим колесом турбины) при $\psi \approx 1$ и $M \approx 0$ показала, что в этих условиях при $\epsilon \approx 4,5 \div 7\%$ экспериментальные данные начинают отклоняться от расчетных и в экспериментах намечается стабилизация R_{x_n} (около $1,2 \cdot 10^6$) [63]. Экспериментальных данных при больших значениях турбулентности набегающего на решетку потока в литературе не имеется.

Из рис. 21, в видно, что температурный фактор ψ очень сильно влияет на процесс перехода в пограничном слое, причем увеличение степени охлаждения поверхности приводит к увеличению числа R_{x_n} , т. е. к повышению устойчивости ламинарного течения в пограничном слое. Расчеты устойчивости ламинарного пограничного слоя, проведенные Ван-Дристом, показывают, что в пределах изменения $M - 1 \div 9$ всегда можно подобрать такую степень охлаждения поверхности, при которой процесс перехода на пластине не возникает. В работе Штернберга при экспериментальном исследовании ракеты V-2 в полете пограничный слой был ламинарным вплоть до $R = (75 \div 90) 10^6$.

Анализ [62] показал, что по характеру влияния на процесс перехода в пограничном слое определяющие параметры следует разбить на две группы. К первой группе следует отнести параметры, влияющие только на значение R_{x_n} , но не влияющие на дальнейшее развитие процесса перестройки пограничного слоя в переходной области и на ее относительную протяженность. Параметр относительной протяженности области перехода $r_x = R_{x_k}/R_{x_n}$ оказался не зависящим от числа M , степени турбулентности при $\epsilon > 0,6\%$ [58] и от температурного фактора ψ [2]. Во всем исследовании

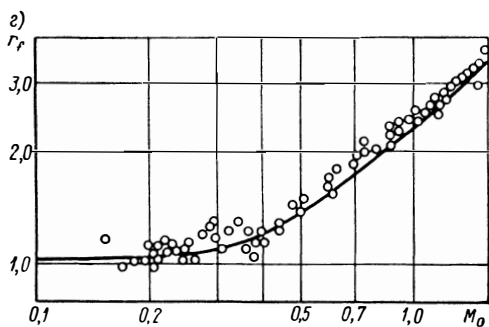
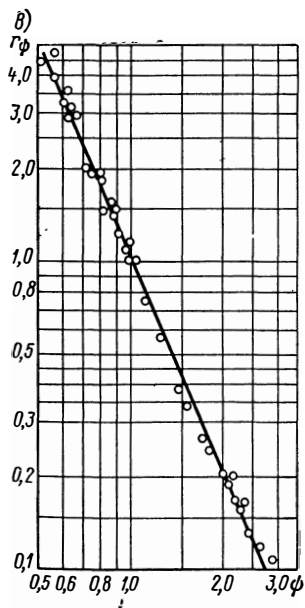
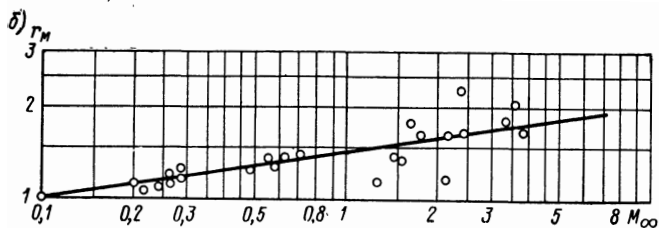
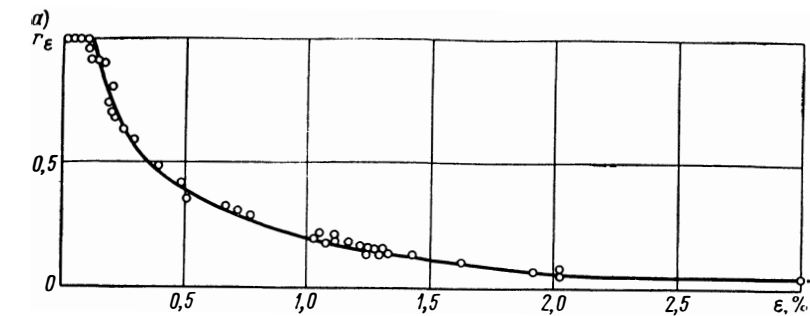


Рис. 21. Экспериментальные функции, определяющие величину R_{xH} : а — r_ϵ [235, 58, 62]; б — r_M [194, 62, 235]; в — r_ϕ [62, 200, 252]; г — r_f

дованном диапазоне изменения этих величин параметр r_x оказался неизменным и равным

$$r_x \approx 1,6 \div 1,7. \quad (\text{IV.22})$$

Ко второй группе относятся параметры, влияющие как на значение R_{xH} , так и на внутреннее развитие процесса перехода,

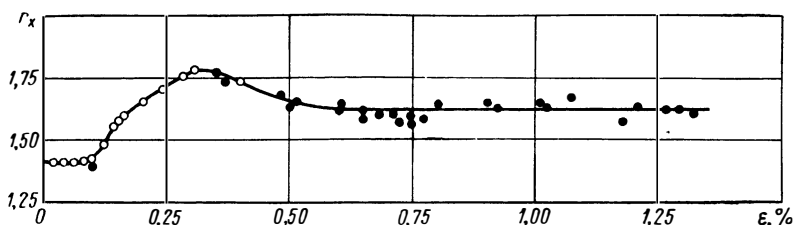


Рис. 22. Влияние степени турбулентности ε на процесс перехода:

○ — данные [47]; ● — данные [48]

т. е. на значение r_x . К таким параметрам относятся продольный градиент давления, кривизна эпюры скорости (поверхности), степень турбулентности в области $0,12\% < \varepsilon < 0,6\%$. Экспериментальная зависимость r_x от этих факторов представлена на рис. 22 и 23; где эпюра скорости характеризуется значением параметра \bar{p}_m , равного отношению давления в точке минимума на эпюре $p_{i \min}$ к полному напору p_0 :

$$\bar{p}_m = \frac{p_{i \min}}{p_0}. \quad (\text{IV.23})$$

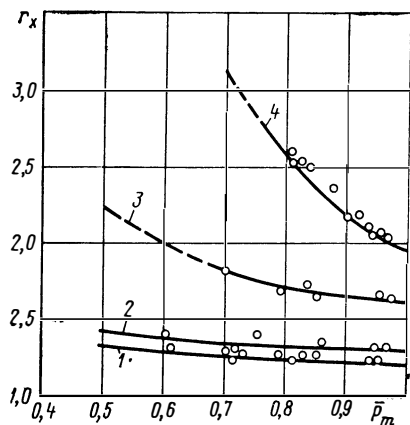


Рис. 23. Влияние эпюры скорости на процесс перехода:

1; 2 — диффузная эпюра скорости; 3; 4 — конфузурная эпюра скорости; 1; 3 — эпюра скорости выпуклая; 2; 4 — эпюра скорости вогнутая

Расчеты по кривым, представленным на рис. 23, удовлетворительно соответствовали эксперименту и в условиях повышенной турбулентности и неоднородности потока [63].

Все полученные выше расчетные зависимости относятся к случаю обтекания гладких поверхностей. Опыты показывают,

что шероховатость поверхности также оказывает влияние на процесс перехода в пограничном слое. Хотя этот вопрос теоретически в настоящее время не решен, но имеется значительное количество опытных данных по влиянию высоты бугорков шероховатости k для дискретной шероховатости на значение $R_{кр}$. К сожалению,

авторы этих работ характеризуют процесс перехода не областью, а точкой перехода, поэтому трудно сказать, к какому значению — к R_{x_H} или R_{x_K} — относятся полученные в их опытах соотношения. Однако эти данные можно использовать для приблизительной оценки относительного изменения R_{x_H} под влиянием шероховатости.

На рис. 24 представлена эмпирическая зависимость, полученная в работе Драйдена по влиянию изолированной (дискретной) шероховатости на изменение числа R в процессе перехода на пла-

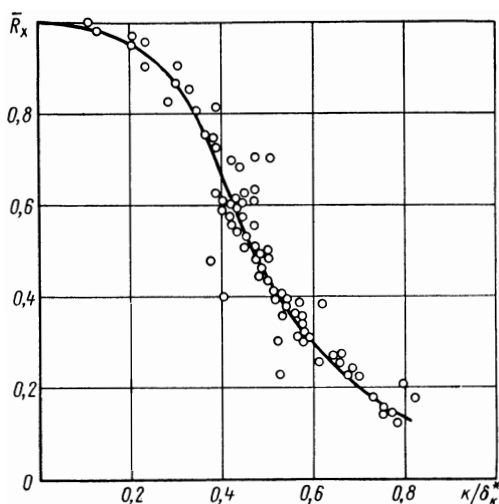


Рис. 24. Зависимость относительного изменения критического числа Рейнольдса от степени шероховатости

стине. По оси ординат на графике отложена величина \bar{R}_x , равная отношению действительного значения R_x в процессе перехода при наличии элемента шероховатости на поверхности к значению R_x для гладкой поверхности; по оси абсцисс отложено отношение высоты элемента шероховатости к толщине вытеснения δ_{κ}^* около места расположения последнего. Как видно, влияние шероховатости оказывается значительным и начинает обнаруживаться уже при $\kappa/\delta_{\kappa}^* > 0,1$. Опытные точки на кривой получены различными авторами и относятся к различной степени турбулентности потока, но они удовлетворительно согласуются с основной кривой и друг с другом, что говорит об определенной универсальности выбранных координат.

Опыты, проведенные с такими же элементами шероховатости, но при $M = 3,12$ [167] показали, что при сверхзвуковых скоростях ламинарное течение в пограничном слое может сохраняться до $\kappa/\delta_{\kappa}^* \approx 1,5$, т. е. при сверхзвуковых течениях критическая высота элемента шероховатости оказывается в несколько раз выше, чем при обтекании несжимаемым потоком.

Наибольший интерес для практики представляет влияние на процесс перехода в пограничном слое распределенной шероховатости. В этой области публикации очень ограничены. На рис. 25 представлены результаты опытов в сужающихся и расширяющихся круглых кольцевых каналах по влиянию на процесс перехода песочной шероховатости [167] при течении несжимаемой жидкости.

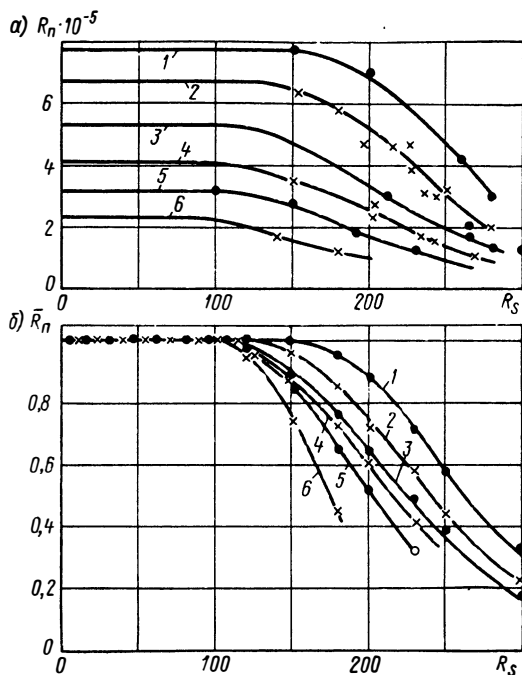


Рис. 25. Влияние песочной шероховатости на процесс перехода при обтекании несжимаемой жидкостью при различных значениях $\bar{\Delta p}$:
 1 — 0,2; 2 — 0; 3 — 0,05; 4 — 0,10; 5 — 0,15; 6 — 0,20

На рис. 25, а по оси ординат отложено число Рейнольдса $R_n = U_1 x_n / \nu$ (здесь U_1 — скорость на входе; x_n — координата точки перехода), по оси абсцисс — число $R_s = U_1 \kappa_s / \nu$ (здесь κ_s — высота зерна песка). Градиент давления характеризуется отношением разности давлений в точке перехода p_n и на входе p_1 к кинетической энергии на входе q_1 . Из рисунка видно, что при распределенной шероховатости ее влияние на процесс перехода начинается только при $R_s > 120$, причем при конфузорном течении область независимости перехода от шероховатости распространяется на большие значения R_s , чем при диффузорном.

На рис. 25, б по оси ординат отложена относительная величина \bar{R}_n , представляющая собой отношение локальных значений R_n

для каждой кривой на рис. 25, а к соответствующему значению при $R_s = 0$. Из рассмотрения кривых видно, что при значениях R_s больших, чем критическое, шероховатость оказывает на процесс перехода влияние, соизмеримое с влиянием градиента давления.

18. Основные уравнения развитого турбулентного движения

Турбулентное движение можно представить как некоторое нерегулярное перемещение сравнительно больших образований — молей, собственное движение которых накладывается на основное поступательное движение. В результате такого наложения в каждой точке потока имеют место частые и неравномерные пульсации характеристик (скорости движения, температуры, давления, плотности и т. п.) около некоторых осредненных значений. Имеет место нерегулярность течения во времени и пространстве.

Величина молей дает представление о пространственном протяжении элементов турбулентности, или о масштабе турбулентности, который определяется внешними условиями течения (размерами ячеек турбулизирующей решетки и т. п.). При этом турбулентный поток в общем случае представляет собой наложение многих частных движений с различными масштабами длины.

При построении теории турбулентности предполагается, что к турбулентному движению, как и к ламинарному, можно применять основные уравнения движения, неразрывности и теплообмена. В литературе иногда высказываются соображения о невозможности применения к турбулентному движению этих уравнений, составленных в предположении сплошности среды, вследствие того, что представление турбулентного движения как наложения разномасштабных движений допускает возможность существования движений с масштабами, соизмеримыми с длиной свободного пробега молекул. Однако в действительности влияние вязкости полностью подавляет мелкомасштабные компоненты турбулентности и при любых практически осуществимых условиях спектральная плотность энергии пульсаций обращается в нуль задолго до достижения масштабов, соизмеримых со средней длиной свободного пробега молекул. Таким образом, и в случае турбулентного течения можно рассматривать поток как сплошную среду и применять к описанию процессов обмена в нем систему уравнений, полученных в гл. I, не забывая только о том, что в эти уравнения входят актуальные значения параметров потока.

Для математического описания турбулентного потока актуальные значения параметров течения обычно представляются в виде суммы некоторого осредненного значения и пульсационной составляющей:

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} + u'; & v &= \bar{v} + v'; & w &= \bar{w} + w'; \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho'; & T &= \bar{T} + T'; & \rho &= \bar{\rho} + \rho' \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \text{(IV.24)}$$

При этом интервал усреднения выбирается настолько большим, чтобы в пределах этого интервала средняя величина пульсации равнялась нулю: $\overline{u'} = 0$; $\overline{v'} = 0$; $\overline{w'} = 0$ и т. д., т. е. чтобы средние величины параметров потока не зависели от времени.

В качестве характеристики турбулентности обычно вводится понятие степени турбулентности ε , которая представляет собой отношение средней квадратичной пульсационных скоростей к средней скорости основного потока — см. формулу (IV.11). Эту формулу можно представить в виде

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{U_0} \sqrt{\frac{(u'_0)^2 + (v'_0)^2 + (w'_0)^2}{3}}. \quad (\text{IV.25})$$

Для случая изотропной турбулентности $u'^2 = v'^2 = w'^2$ и, соответственно,

$$\varepsilon = \frac{1}{U} \sqrt{(u')^2}. \quad (\text{IV.26})$$

Степень турбулентности потока ε является параметром, зависящим от числа Рейнольдса и от геометрических характеристик канала, в котором происходит течение (условий входа в канал, продольного градиента давления и т. д.). Целесообразно рассматривать турбулентность в каждом конкретном случае обтекания как величину, характеризующуюся [66] некоторым минимальным уровнем турбулентности, характерным для данной геометрической системы с ее условиями входа и конфигурацией, и изменением этого уровня, зависящим от числа Рейнольдса. Такое представление позволяет выделить влияние числа R на относительное изменение турбулентности потока, при этом обнаруживается некоторая универсальность характера этого влияния для различных потоков. В работе [66] проанализированы опытные данные по влиянию числа R на относительное изменение турбулентности в потоках, набегающих на различные решетки турбинных профилей направляющих лопаток (значки * на рис. 26), в зазоре за вращающимся рабочим колесом турбины (значки ●) [63, 46], в газоходе за камерой сгорания ГТ (значки ○) [103], в круглых турбулентных струях (значки □), а также на изменение интенсивности тепловых пульсаций в пограничном слое пластины (значки ▽) [174]. По оси ординат на рис. 26 отложено относительное изменение интенсивности пульсаций продольной составляющей скорости

$$\bar{U} = u'/u'_0, \quad (\text{IV.27})$$

а по оси абсцисс — относительное изменение числа Рейнольдса

$$\bar{R} = R/R_0. \quad (\text{IV.28})$$

Как видно, все опытные данные группируются около линии, соответствующей уравнению

$$\bar{U} = \bar{R}^{0.4}. \quad (\text{IV.29})$$

По-видимому, соотношение (IV.29) отражает главную тенденцию относительного изменения интенсивности пульсаций скорости с изменением числа R , так как данные различных опытов с весьма различными абсолютными численными значениями турбулентности потоков практически совпадали. В работе [66] выбрано $R_0 = 10^5$, очевидно, что кривую на рис. 26 можно пересчитать на любое другое абсолютное значение R_0 , не выходя за рамки иссле-

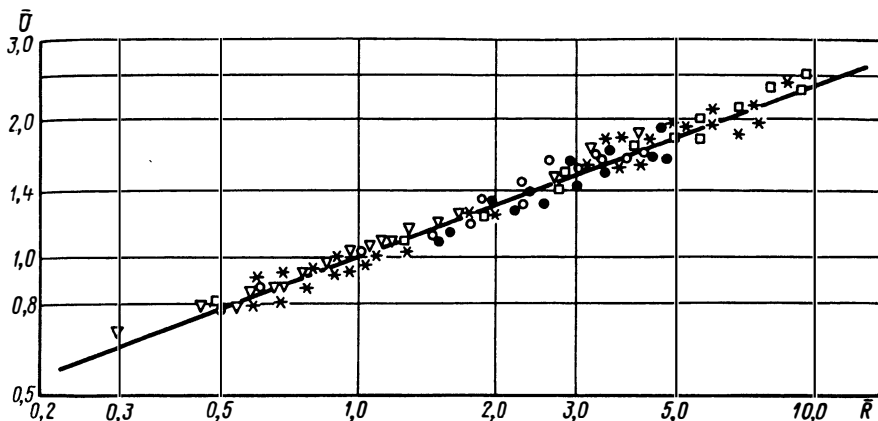


Рис. 26. Зависимость относительного изменения турбулентных пульсаций скорости от относительного изменения числа Рейнольдса

дованного диапазона изменения $R = (0,3 \div 10,0) 10^5$. Величина \bar{U} связана с ε простым соотношением

$$\bar{U} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{U}{U_0}. \quad (\text{IV.30})$$

Здесь ε , U — степень турбулентности и скорость потока при данном значении числа R ; ε_0 и U_0 — соответственно при $R = R_0$.

Влияние геометрических параметров канала на турбулентность потока изучено слабо. В литературе имеются только данные по зависимости ε от сужения канала. На рис. 27 приведены экспериментальные данные работы [249] по изменению продольной (u') и поперечной (v') составляющих пульсаций скорости при трех степенях сужения n дозвукового сопла для числа Рейнольдса на входе $R_1 = 3710$. Составляющие пульсации скорости на рисунке отнесены к значению скорости U_1 на входе в сопло: продольная составляющая $\sqrt{\overline{(u')^2}}/U_1$ (линия 1); поперечная составляющая $\sqrt{\overline{(v')^2}}/U_1$ (линия 2). Из рисунка видно, что при прохождении турбулентного потока через сужающееся сопло изотропность его турбулентности ($u' \approx v'$) нарушается примерно в области

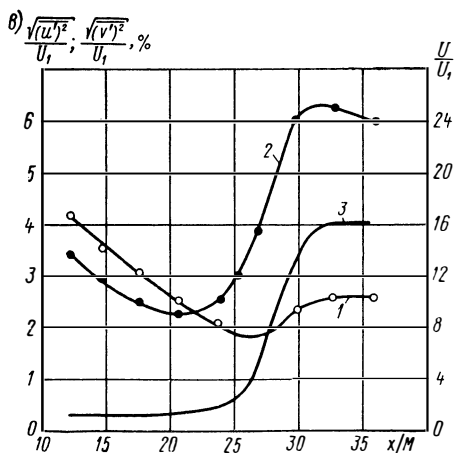
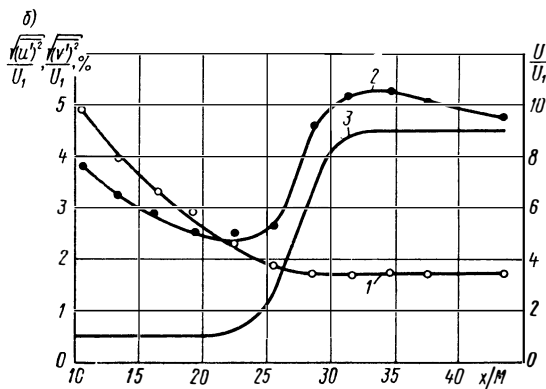
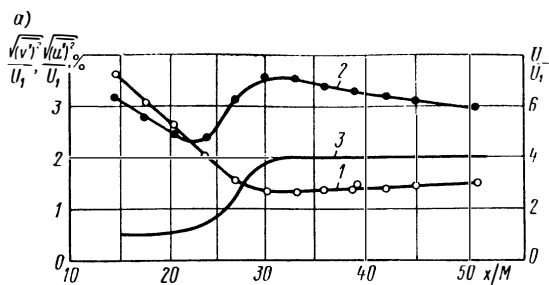


Рис. 27. Влияние сужения канала на турбулентность потока при $R_1 = 3710$:
 а — $n = 4$; б — $n = 9$; в — $n = 16$

перегиба профиля скорости u/U_1 (линия 3) вдоль оси сопла x/M : продольная составляющая скорости продолжает убывать с увеличением скорости U , а поперечная — резко возрастать. В итоге на выходе из сопла поток становится существенно анизотропным: составляющая v' становится примерно в 2—2,5 раза больше u' .

В работе [22] показано, что на перестройку турбулентности потока влияет не только изменение его поперечного сечения (степень сужения), но и форма обвода сопла. На рис. 28 сопоставлены значения составляющих u' и v' для сопла, имеющего контур,

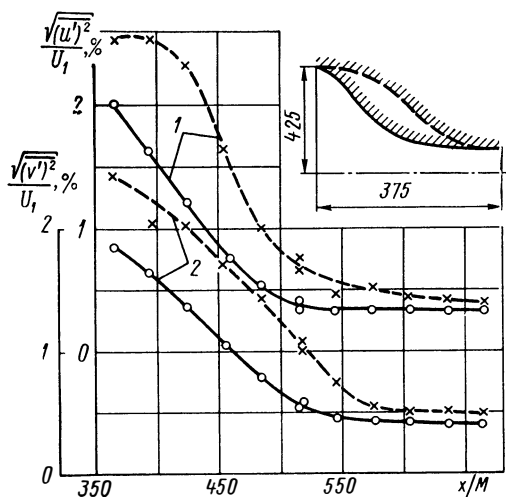


Рис. 28. Влияние формы контура сопла на турбулентность потока в нем:

— сопло Витошинского; - - - - - выпуклое сопло [249]; 1 — $\sqrt{\overline{(u')^2}}/U_1$; 2 — $\sqrt{\overline{(v')^2}}/U_1$

рассчитанный по методу Витошинского, и сопла, аналогичного исследованному в работе [249]. Видно, что внутри сопел кривые различаются значительно. Сопло Витошинского создает меньшую анизотропность турбулентности, чем выпуклое сопло [249]. На выходе из обоих сопел турбулентность становится примерно одинаковой.

Все это говорит о необходимости соблюдения большой осторожности при сравнении данных разных исследований и при перенесении результатов модельных исследований турбулентных потоков на натуру.

Общий метод исследования структуры турбулентности, предложенный Л. В. Келлером и А. А. Фридманом, заключается в изучении взаимной связи — корреляции величин, характеризующих мгновенное аэродинамическое поле. Тейлор, основываясь на этой

идее, ввел в рассмотрение коэффициент корреляции между значениями скорости в двух точках

$$R(x) = \frac{\overline{u_1' u_2'}}{\sqrt{(\overline{u_1'})^2} \sqrt{(\overline{u_2'})^2}} \quad (\text{IV.31})$$

Значение коэффициента корреляции, как видно из рис. 29, очень сильно зависит от величины r , кривая имеет острый макси-

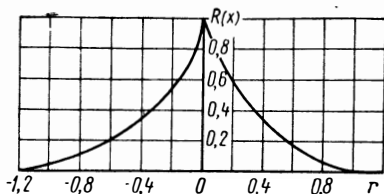


Рис. 29. Зависимость коэффициента корреляции продольных пульсаций скорости от величины $r = y/a$ для двух точек, находящихся друг от друга на расстоянии y в поперечном направлении (измерения производились позади решетки на расстоянии, в 40 раз большем ширины a ячеек решетки)

мум при $r = 0$, и значение $R(x)$ быстро убывает с возрастанием r , стремясь асимптотически к нулю. Обычно ширина корреляционной кривой называется масштабом турбулентности (L_0).

Для получения системы уравнений турбулентного движения параметры турбулентного течения, определяемые как сумма средней и пульсационной составляющих, вводятся в уравнения движения и энергии. При этом используются обычные правила осреднения:

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \overline{f} + \overline{g}; & \overline{fg} &= \overline{f} \overline{g}; \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} &= \frac{\partial}{\partial s} \overline{f}; & \int \overline{f} ds &= \int \overline{f} ds \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Подстановка этих величин в уравнения движения позволила в свое время получить известные уравнения Рейнольдса:

$$\begin{aligned} \rho \left(\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right) &= \\ = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \overline{u} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \overline{(u')^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{(u'v')} \right]; \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \right) &= \\ = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 \overline{v} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \overline{(u'v')} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{(v')^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

являющиеся уравнениями движения для турбулентного несжимаемого потока.

Феррари, Вильсон и Ван-Дрифт распространили метод Рейнольдса на турбулентный пограничный слой теплоизолированной пластины, обтекаемой сжимаемым потоком, и позже Ван-Дрифт [251] обобщил этот метод для течения с теплообменом.

После ряда преобразований, упрощений и отбрасывания членов второго порядка малости основные уравнения обобщенного уравнения Ван-Дрифта приобретают следующий вид.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\rho} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} (-\bar{\rho}' u') + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} [\bar{p}_x - \overline{(\rho u)' u'}] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{\tau}_{yx} - \overline{(\rho v)' u'}]; \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\rho} u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}' v') + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [\bar{p}_y - \overline{(\rho v)' v}] + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\tau}_{xy} - \overline{(\rho u)' v}]. \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (c_p \bar{T}) + \bar{\rho} u \frac{\partial}{\partial x} (c_p \bar{T}) + \bar{\rho} v \frac{\partial}{\partial y} (c_p \bar{T}) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} &= \\ = -\bar{\rho}' u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (-c_p \bar{\rho}' T') + \frac{\partial}{\partial y} [-c_p \overline{(\rho v)' T'}] - \\ &- \overline{(\rho v)' u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

для установившегося движения:

$$\bar{\rho} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [-\overline{(\rho v)' u'}]; \quad (\text{IV.38})$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} u \frac{\partial}{\partial x} (c_p \bar{T}) + \bar{\rho} v \frac{\partial}{\partial y} (c_p \bar{T}) &= \\ = \frac{\partial}{\partial y} [-c_p \overline{(\rho v)' T'}] - \overline{(\rho v)' u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

Дополнительные члены, появившиеся в уравнениях движения и энергии, представляющие собой производные от произведений турбулентных пульсаций скорости или температуры на пульсацию плотности или на пульсацию произведений плотности на скорость, а также произведений этих величин на производные скорости, были впоследствии названы кажущимися турбулентными напряжениями и дополнительными присоединенными членами диссипативной функции.

Уравнения (IV.35)—(IV.37) в сочетании с уравнением неразрывности являются исходной системой для определения осредненных величин, характеризующих турбулентное течение сжимаемого газа. Входящие в эту систему дополнительные члены, связанные с возникновением кажущихся турбулентных напряжений и присоединенных членов диссипативной функции, делают эту систему незамкнутой, и поэтому она не имеет рационального решения. Даже для такого простого случая, как обтекание плоской пластины, когда процессы движения и теплообмена описываются сравнительно простыми уравнениями (IV.38) и (IV.39), незамкнутость системы сохраняется. Влияние сжимаемости сказывается в том, что кроме пульсаций скорости и давления, характерных для обтекания несжимаемым потоком, в уравнениях появляются члены, содержащие пульсации плотности, температуры и пульсации произведения плотности на составляющие скорости. Эти величины содержатся как в уравнении движения, так и в уравнении энергии и делают принципиально неотделимыми тепловую и динамическую задачи.

Задача о турбулентном движении, таким образом, рационально не может быть решена до тех пор, пока не будет установлена связь между пульсационным и осредненным движениями. Для установления этой связи нужны дополнительные уравнения, определяющие статистические характеристики турбулентных пульсаций. Объем наших знаний о турбулентном движении настолько ограничен, что не позволяет в настоящее время установить эти уравнения точно, аналитически. В связи с этим при решении различных задач турбулентного обмена для замыкания основной системы дифференциальных уравнений широко используются различные эмпирические соотношения.

19. Современные представления о механизме турбулентного обмена

Невозможность получения замкнутой системы уравнений, определяющих процесс турбулентного обмена, при настоятельной необходимости решения ряда практических задач, связанных с турбулентным обтеканием, заставила исследователей проводить экспериментальное изучение процессов турбулентного обмена для конкретных частных задач и создавать полуэмпирические или эмпирические теории турбулентности, основанные на некоторых гипотезах и экспериментальном апробировании. Для задач турбулентного обтекания несжимаемым потоком при умеренном теплообмене ($T_w/T \approx 1$) накоплен обширный экспериментальный материал, который позволил сформулировать основные представления и получить практически удобные расчетные формулы, удовлетворительно согласующиеся с экспериментами. Для потока сжимаемого газа такая возможность отсутствует из-за ограниченности имеющихся опытных данных.

Впервые гипотеза о связи сил кажущейся вязкости, вызванных турбулентным перемешиванием, с осредненными скоростями была высказана в работе Т. В. Буссинеска, который предложил определять турбулентное касательное напряжение τ формулой, аналогичной формуле для соответствующего напряжения в ламинарном потоке, т. е. предложил ввести понятие коэффициента турбулентного обмена A и коэффициента кажущейся турбулентной вязкости:

$$E = A/\rho; \quad (\text{IV.40})$$

$$\tau = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho E \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (\text{IV.41})$$

Основным недостатком гипотезы Буссинеска является невозможность непосредственно представить коэффициенты A и E (как некоторые физические константы жидкости) не зависящими от скорости, как это можно сделать с коэффициентами μ и ν .

Л. Прандтль в 1926 г. предложил ввести для определения турбулентного обмена понятие пути перемешивания l , представляющего собой поперечное расстояние, на которое переместится частица жидкости, двигаясь со средней скоростью своего первоначального слоя, для того, чтобы разность ее скорости и скорости соседнего слоя стала равной осредненной скорости продольной пульсации скорости первоначального слоя.

На основе этих представлений продольная пульсация скорости u' запишется в виде

$$u' \approx l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (\text{IV.42})$$

Предполагая, что величина поперечной пульсации v' имеет тот же порядок, что и величина u' , т. е. что $v' \approx u' \approx l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, Прандтль получает выражение для турбулентного касательного напряжения

$$\tau = \overline{u'v'} = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2, \quad (\text{IV.43})$$

или, более правильно,

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (\text{IV.44})$$

Сравнивая формулы (IV.41) и (IV.44), можно получить выражения для коэффициента турбулентного обмена

$$A = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (\text{IV.45})$$

и кажущейся турбулентной вязкости

$$E = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (\text{IV.46})$$

Преимущество формулы Прандтля перед формулой Буссинеска заключается в том, что из формулы (IV.44) можно непосредственно получить квадратичный закон сопротивления, характерный для турбулентного течения, и, следовательно, величина l , хотя и не является физической константой жидкости, не зависит от скорости потока, а является только функцией точки.

Однако недостатком формулы Прандтля является невозможность ее использования для расчета кажущейся турбулентной вязкости в точках максимума или минимума скорости, так как при $\frac{d\bar{u}}{dy} = 0$ из формулы (IV.46) следует, что и $E = 0$, что в действительности не имеет места.

Карман в 1930 г. предложил для определения длины пути перемешивания l ввести гипотезу о подобии побочных движений во всех точках поля скоростей, т. е. предложил считать, что они отличаются только масштабами времени и скорости. При таком представлении турбулентного движения для слоистого течения [$\bar{u} = \bar{u}(y)$ и $\bar{v} = 0$] получается формула

$$l = \kappa \frac{\left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|}{\left| \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right|}, \quad (\text{IV.47})$$

где κ — некоторая универсальная постоянная, определяемая опытным путем.

Из этого соотношения получается выражение

$$\tau = \rho \kappa^2 \frac{\left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^4}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right)^2}, \quad (\text{IV.48})$$

легко переходящее в формулу Прандтля (IV.44).

Для случая безградиентного плоскопараллельного течения Прандтль предложил формулу

$$l = \kappa y. \quad (\text{IV.49})$$

Это допущение позволило решить до конца уравнение движения и определить универсальный осредненный профиль скорости для любого сечения турбулентного пограничного слоя в виде

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C, \quad (\text{IV.50})$$

где

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (\text{IV.51})$$

Сравнение этой теории с обстоятельными экспериментами Никурадзе по определению профилей скорости при движении

несжимаемой жидкости в трубе привело к блестящему совпадению данных, при этом были получены значения $\kappa = 0,40$ и $C = 5,5$. Тогда

$$\frac{u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{yv_*}{v} + 5,5. \quad (\text{IV.52})$$

Для случая течения сжимаемого газа нет достаточных экспериментальных данных, и возможность использования полученных выше численных значений коэффициентов в этой области никем не доказана.

На основании этих же опытных данных Никурадзе была показана возможность представления профиля скорости при турбулентном течении в трубе в виде семейства парабол

$$\frac{u}{U_0} = \left(\frac{y}{a} \right)^n, \quad (\text{IV.53})$$

где U_0 — скорость на оси трубы; a — радиус трубы; n — коэффициент, имеющий в зависимости от числа Рейнольдса следующие значения:

R	$4 \cdot 10^3$	$(10 \div 100) 10^3$	$3,24 \cdot 10^6$
n	1/6	1/7	1/10

Последующие исследования показали, что логарифмический и степенные профили скорости имеют место и в пограничном слое пластины, причем вид их описывается уравнениями (IV.50) и (IV.53) при условии, что вместо U_0 в формулу (IV.53) подставляется скорость на внешней границе пограничного слоя U , а вместо a — толщина пограничного слоя δ . Формула (IV.50) с экспериментальными уточнениями Клаузера для обтекания пластины приобретает вид

$$\frac{u}{v_*} = 5,6 \lg \frac{yv_*}{v} + 4,9. \quad (\text{IV.54})$$

Эксперименты показали, что в узкой области, непосредственно прилегающей к стенке, формула (IV.54) перестает быть справедливой, профиль скорости отклоняется от логарифмического и превращается в линейный:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{yv_*}{v} = \eta. \quad (\text{IV.55})$$

Толщина этого слоя η_0 определяется подстановкой соотношения (IV.55) в формулу (IV.54):

$$\eta_0 = 5,6 \lg \eta_0 = 4,9, \quad (\text{IV.56})$$

откуда ¹

$$\eta_0 = 10,65. \quad (\text{IV.57})$$

¹ Из формулы (IV.52) получается $\eta_0 = 11,65$.

В некоторых работах обозначается:

$$\frac{u}{u_*} = u^+; \quad \frac{y u_*}{\nu} = y^+.$$

Этот слой был назван ламинарным подслоем, и толщина его считалась неизменной.

Таким образом, о турбулентном пограничном слое было сформулировано представление как о слое неоднородной по своей толщине структуры, в котором непосредственно у стенки течение является ламинарным, затем по мере удаления от стенки начинает

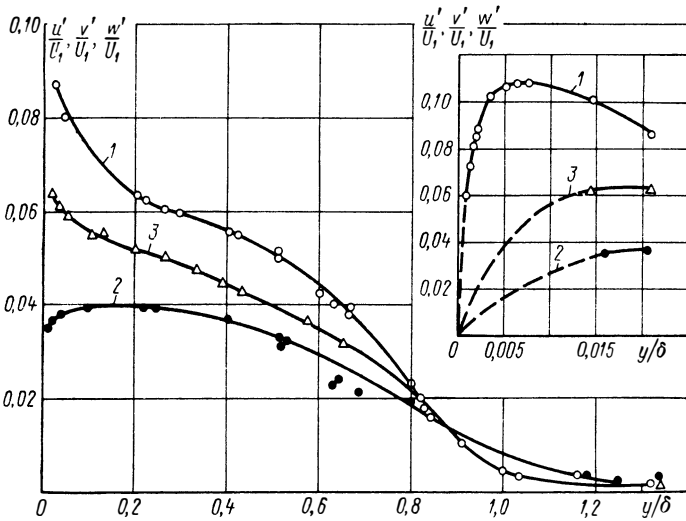


Рис. 30. Распределение средневладратичной интенсивности пульсаций в турбулентном пограничном слое:

1 — u'/U_1 ; 2 — v'/U_1 ; 3 — w'/U_1

возникать турбулизация и только на некотором расстоянии от стенки устанавливается развитое турбулентное течение, распространяющееся вплоть до внешней границы пограничного слоя. Эти представления легли в основу многих полуэмпирических теорий турбулентного пограничного слоя и позволили с хорошим приближением к эксперименту решить ряд конкретных практических задач, связанных с расчетом теплоотдачи и сопротивления в потоках несжимаемого газа при неинтенсивном теплообмене.

В последние десятилетия развитие техники идет по пути увеличения скоростей обтекания и перехода к сверхзвуковым скоростям (в авиации и ракетостроении числа Маха достигают значений $M \leq 12$, в турбостроении создаются ступени со сверхкритическими перепадами, на выходе из которых $M \approx 2,0 \div 2,5$, и т. д.). Одновременно возникают проблемы теплообмена поверхностей в потоках высокотемпературных газов ($\psi \ll 1$) или интен-

сивного охлаждения сильно нагретых поверхностей ($\psi \gg 1$). В агрегатах новой техники наряду с ламинарным течением широкое распространение имеют и турбулентные течения, поэтому проблема возможности распространения основных представлений о турбулентном обмене, полученных на базе экспериментальных исследований обтекания несжимаемым потоком, на сверхзвуковые и высокотемпературные потоки стоит сейчас очень остро, тем более что отдельные сопоставления с экспериментами говорят о неудовлетворительности такой постановки в некоторых случаях. В некоторых же случаях такая постановка оказывается допустимой.

В последние годы значительно расширились экспериментальные возможности; применение новых физических методов исследования позволило получить новые представления и поставить новые вопросы, связанные с механизмом турбулентного обмена и структурой турбулентного пограничного слоя. Исследования Эйнштейна и Ли [189] изменили укоренившееся представление о непосредственно прилегающей к стенке области турбулентного пограничного слоя как о ламинарном подслое. Визуализация картин течения в этой области с помощью эжекции краски показала, что течение в подслое является нестационарным, толщина подслоя изменяется локально во времени, турбулентные пульсации периодически проникают почти до самой стенки, элементы жидкости из подслоя иногда внезапно выбрасываются в турбулентное ядро. Последующие исследования [174, 211, 210, 214, 204, 154] уточнили эту картину. В работах [214, 208] было показано, что в пограничном слое при $y^+ = yv_*/\nu \approx 15$ имеется острый максимум энергии турбулентных пульсаций. На рис. 30 приведена одна из характерных картин распределения средней интенсивности пульсаций в пограничном слое. В работах [204 и др.] было показано, что порождение турбулентности является перемежающимся процессом и связано с внезапным появлением так называемых турбулентных пятен Эммонса, которые, по-видимому, и обуславливают в основном турбулилизацию потока. Понятие перемежаемости было введено и для описания процесса турбулизации в поперечных сечениях пограничного слоя. На рис. 31 приведены значения коэффициента перемежаемости $\Gamma = 1 - \gamma$

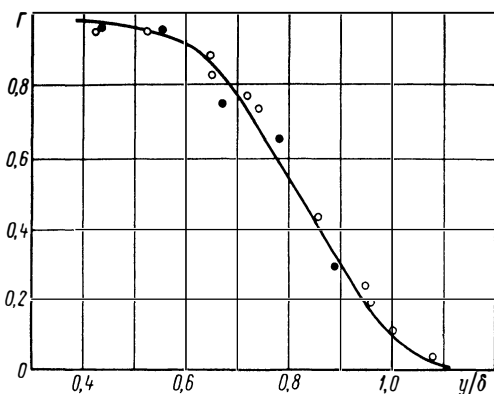


Рис. 31. Распределение перемежаемости в пограничном слое:

○ — опытные данные [209]; ● — опытные данные [211]

в поперечном сечении пограничного слоя¹. Этот график описывается уравнением

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y-\bar{y}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \quad (\text{IV.58})$$

полученным Клебановым [209].

В работе [208] в пограничный слой вводилась тонкая проводочка, на которой при пропускании тока возникали пузырьки водорода, непрерывно отрывавшиеся от нее и обрисовывавшие, таким образом, траектории движения элементов пограничного слоя. На рис. 32 приведены некоторые из картин, полученные в этой работе. Сдвиг во времени картин на рис. 32, б и в относительно рис. 32, а составляет 0,57 и 0,92 с соответственно.

Еще более наглядная картина получена в работе Клайна, Рейнольдса и Шрауба [211], которые визуализировали течение в пограничном слое горизонтальной пластины путем введения краски или пузырьков водорода на различных расстояниях от пластины (т. е. при разных значениях y^+) и фотографировали картину сверху. На рис. 33 представлено несколько картин, полученных в этой работе. Как видно, в различных сечениях по толщине пограничного слоя они сильно отличаются друг от друга.

На основе этих опытов рядом исследователей были развиты теории турбулентного обмена, основанные на представлениях о гидродинамической неустойчивости и последующем образовании вихрей, которые являются источником обмена между пристенной областью и основным потоком. Однако одно из основных допущений этих теорий, заключающееся в предположении, что скорость выброса жидкости (вихрь) больше средней скорости, определяемой законом стенки, было опровергнуто результатами экспериментальной работы Корино и Бродки [186]. В этой работе визуализация течения в пристенной области круглой трубы достигалась с помощью коллоидных частиц, взвешенных в потоке. Фото- и кинорегистрация картины производилась с увеличением при помощи аппарата, движущегося вместе с потоком. В пристенной области ($0 \leq y^+ \leq 30$) экспериментально были обнаружены перемежающиеся выбросы дискретных жидких элементов, причем они происходили всегда в сторону областей со значительно большими скоростями. Взаимодействие этих выбросов с потоком больших скоростей вызывало возмущение и турбулизацию всей области вплоть до стенки с интенсивным и хаотическим движением жидких частиц.

Процесс выброса начинался в пристенной области и не являлся отражением какого-то движения вне этой области, он носил

¹ Параметр Γ является дополнением до единицы ранее введенного коэффициента перемежаемости γ . Очевидно, при $\Gamma = 1$ имеет место ламинарное течение, при $\Gamma = 0$ — полностью турбулентное.

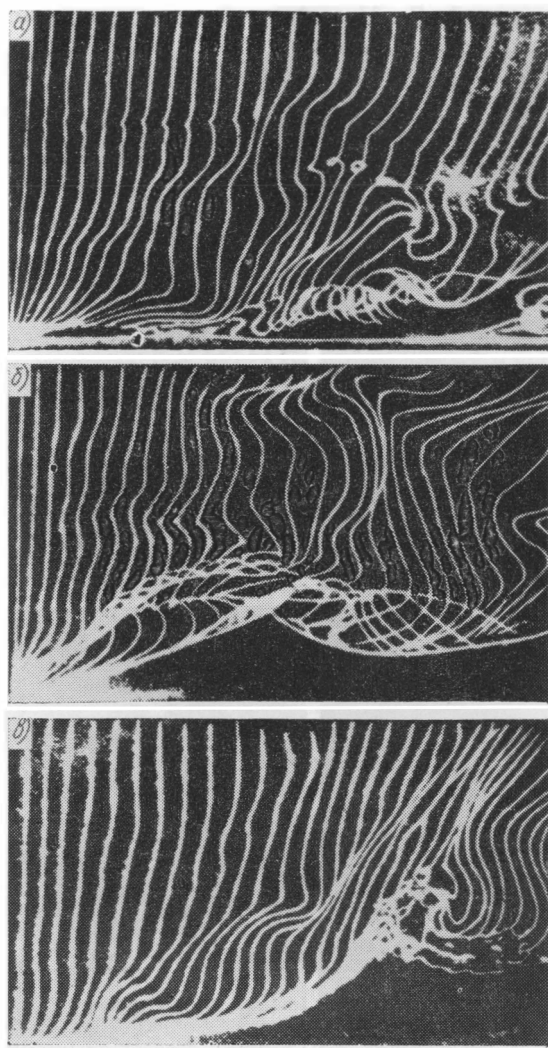


Рис. 32. Траектории движения пузырьков водорода в турбулентном пограничном слое

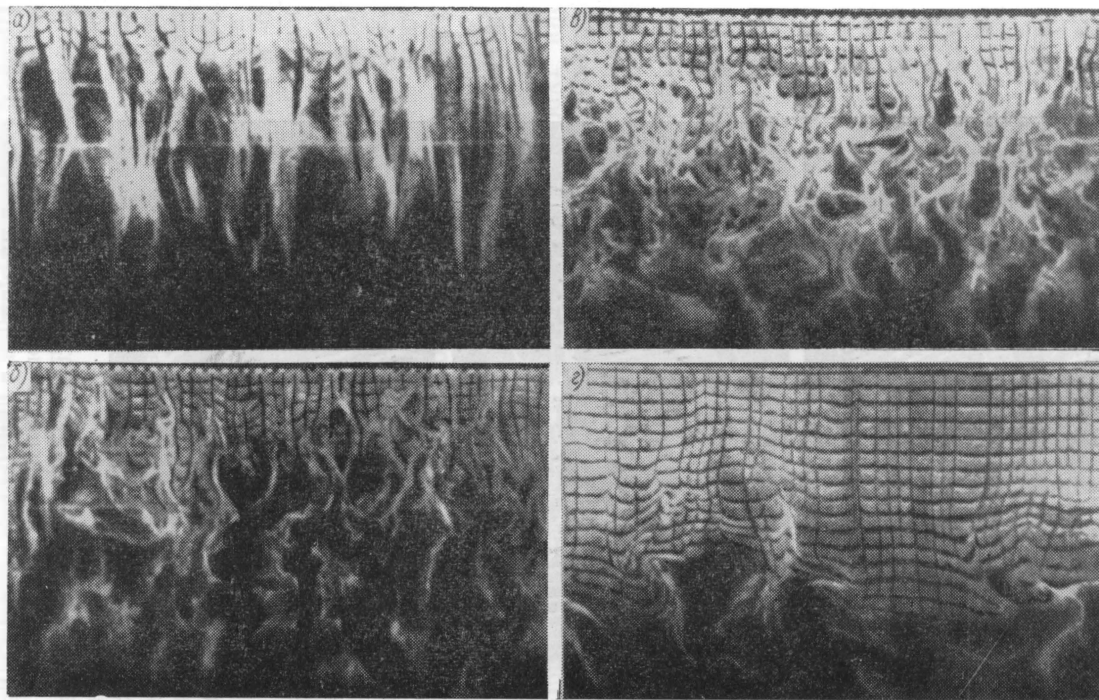


Рис. 33. Картины течения в пограничном слое на различных расстояниях от поверхности: а — $y^+ = 4,5$; б — $y^+ = 38$; в — $y^+ = 82$; г — $y^+ = 407$

локальный характер, происходил случайно во времени и пространстве, имел малый масштаб и был трехмерным. Начало выброса всегда совпадало с максимальной турбулентностью и, как правило, имело место в области $5 \leq y^+ \leq 15$. Выбросы перемещались как в радиальной, так и в параллельной поверхности плоскостях. С увеличением числа Рейнольдса интенсивность и число выбросов увеличивались.

На основании анализа своих подробных опытов авторы предлагают следующую трехслойную схему турбулентного пограничного слоя.

1. Область подслоя ($0 \leq y^+ \leq 5$), в которой движение жидкости не является ламинарным, частицы жидкости все время испытывают отклонения от прямолинейного течения вдоль стенки. Возмущения являются трехмерными, мелкомасштабными, они в основном вызываются и поддерживаются турбулентностью, генерируемой в соседней области. С ростом числа R число отклонений от основного направления движения возрастает, причем при больших значениях R жидкость из зоны генерации периодически проникает в подслой, доходя иногда до самой стенки.

2. Область генерации ($5 \leq y^+ \leq 70$), в которой в основном протекает процесс генерации и диссипации турбулентной энергии. В этой области зарождается основная масса выбросов жидкости и происходит максимальное взаимодействие последних с основным потоком, имеющим большую скорость. В результате этого взаимодействия кинетическая энергия забирается из среднего течения и преобразуется в турбулентную энергию. Характер выбросов зависит от локальных условий, частота и скорость выбросов — от параметров среднего течения. В работе [186] показано, что основанное на предыдущих исследованиях мнение многих ученых о том, что образующиеся в результате гидродинамической неустойчивости вихри являются источником обмена между основным потоком и пристенной областью, не подтвердилось. При анализе кинофильмов в работе [186] не было обнаружено ни колебательных, ни вращательных движений. Киносъемки показывают, что подслой только в самой непосредственной близости у стенки ($y^+ \leq 2,5$) можно считать пассивным, во всей же остальной области ($y^+ > 2,5$) он является активным. В частности, наблюдавшийся неоднократно факт уменьшения турбулентности за счет малого отсоса через стенку может быть объяснен тем, что отсос противостоит развитию радиальной скорости выброса и тем самым подавляет образование турбулентности. Тонкий подслой практически не имеет постоянной толщины, зависит от места появления выброса и от явлений в зоне генерации. В частности, он подвергается время от времени воздействию возмущений, направленных к стенке и возникающих в результате взаимодействия выброса и слоя сдвига в области $7 \leq y^+ \leq 30$. Таким образом, взаимодействие между областями происходит в двух направлениях.

3. Зона турбулентного ядра ($y^+ > 70$). Имеющиеся в ней вихри перенесены из зоны генерации с помощью диффузии или конвекции. По мере удаления от стенки размеры вихрей возрастают. Наибольшие изменения в характере возмущений после зоны генерации захватывают область $50 \leq y^+ \leq 100$. После $y^+ > 100$ не происходит заметного изменения вихрей и заметной диссипации. Эта зона содержит вихри, которые образовались в различных точках зоны генерации вверх по потоку и были снесены вниз по течению. Таким образом, турбулентность в этой зоне в основном зависит от условий вверх по потоку и очень мало от локальных условий. Эта зона обладает в значительной мере устойчивым характером течения и турбулентной структурой, зависящей от предыстории потока.

Таким образом, пограничный слой как бы разбивается на две части. В первой части, включающей первую и вторую зоны ($2,5 \leq y^+ \leq 70$), турбулентные характеристики потока являются локальными, во второй части ($y^+ > 70$) они определяются в основном предысторией потока.

Все эти исследования пояснили некоторые стороны механизма турбулентного обмена, однако они и поставили много новых вопросов. Это, в первую очередь, вопросы первопричин и взаимосвязи. Природа образования турбулентных пятен, характер их изменения во времени и пространстве, причины возникновения выбросов, динамика процесса перемежаемости, взаимосвязь числа R с частотой и продолжительностью порождения турбулентности и ряд подобных вопросов встал и требует для своего разрешения постановки новых, еще более тонких экспериментов.

На основе кратко описанных выше экспериментальных данных о характере турбулентного обмена можно ожидать, что одним из наиболее плодотворных подходов для описания характеристик турбулентного течения может быть подход, связанный с применением вероятностного анализа. В настоящее время эти вопросы практически только поставлены, в последние годы они плодотворно развиваются в работах А. С. Моница, В. М. Иевлева, Г. С. Глушко, А. А. Гухмана и др. Однако реальные возможности для практического использования открываются пока только при применении полуэмпирических теорий.

20. Сопротивление и теплообмен при турбулентном обтекании пластины потоком сжимаемого газа

Как было показано в гл. I, уравнения энергии и движения, так же как и интегральные соотношения импульсов и энергии, значительно упрощаются в случае обтекания плоской пластины, характеризующегося условиями:

$$\frac{dU}{dx} = 0; \quad \frac{dT_0}{dx} = 0. \quad (\text{IV.59})$$

Соответственно интегральное соотношение импульсов в обычных переменных в этом случае будет иметь вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho_0 U_0^2}, \quad (\text{IV.60})$$

а в переменных Дородницына

$$\frac{d\delta^{**}}{d\xi} = \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{n-1} \frac{\tau_w}{\rho_0 U_0^2}. \quad (\text{IV.61})$$

Так как обычно для газов $n = 1$, то с достаточной точностью можно считать

$$\frac{d\delta^{**}}{d\xi} = \frac{\tau_w}{\rho_0 U_0^2}. \quad (\text{IV.62})$$

Интегральное соотношение энергии для случая плоского обтекания пластины будет иметь следующий вид:
в обычных переменных

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \frac{(t_0^*)'}{t_0^*} = \frac{q_w}{c_p \rho_0 U_0 T_0^*}, \quad (\text{IV.63})$$

в переменных Дородницына

$$\frac{d\delta_T^{**}}{d\xi} + \delta_T^{**} \frac{(t_0^*)'}{t_0^*} = \frac{T_0}{T_w} \frac{q_w}{c_p \rho_0 U_0 t_0^*}. \quad (\text{IV.64})$$

Дифференциальные уравнения движения, энергии и неразрывности, определяющие теплоотдачу пластины в потоке сжимаемого газа, будут иметь вид:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (\text{IV.65})$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \quad (\text{IV.66})$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \quad (\text{IV.67})$$

Для случая обтекания пластины несжимаемым потоком газа описанные в п. 19 гипотезы, в достаточной мере апробированные, и подробные экспериментальные исследования позволили получить логарифмический и степенные профили скорости в пограничном слое. На основании этого для коэффициента сопротивления трению¹

$$c_f = \frac{\tau_w}{0,5\rho U^2} \quad (\text{IV.68})$$

¹ Для случая обтекания пластины $U_\infty = U_0 = U$, поэтому в дальнейшем индекс u скорости опускается.

также были получены логарифмическая и степенные расчетные формулы [118].

Логарифмическая формула Сквайра и Юнга имеет вид

$$c_f = \frac{\tau_w}{0,5\rho_w U^2} = \frac{1}{34,6 (\lg R^{**} + 0,61)^2} \cdot \quad (IV.69)$$

Степенные формулы зависят от показателя степени n в уравнении профиля скорости. Для $R \approx 10^5 \div 10^6$, когда, как уже говорилось, показатель степени $n = 1/7$, коэффициент сопротивления трения

$$c_f = 0,068 R_x^{-1/8}, \quad (IV.70)$$

при $n = 1/9$

$$c_f = 0,0263 R_x^{-1/7}. \quad (IV.71)$$

Используя гидродинамическую теорию теплообмена [34] и формулу (IV.70), Кольборн получил следующее выражение для расчета местного коэффициента теплоотдачи:

$$Nu_x = 0,0296 R_x^{0,8} Pr^{0,33}. \quad (IV.72)$$

Для воздуха $Pr = 0,72$ эта формула имеет вид

$$Nu_x = 0,0265 R_x^{0,8}. \quad (IV.73)$$

Экспериментальные данные лучше соответствуют эмпирической зависимости, полученной в работе Б. С. Пегухова:

$$Nu_x = 0,0255 R_x^{0,8}. \quad (IV.74)$$

Для среднего коэффициента теплоотдачи в этих же опытах получена формула

$$Nu = 0,032 R^{0,8}. \quad (IV.75)$$

Для случая обтекания пластины с ж и м а е м ы м потоком газа нет такого обилия экспериментального материала, на базе которого можно было бы построить полуэмпирические теории турбулентности.

В связи с этим одним из наиболее популярных направлений в разработке методов расчета тепло- и массообмена при турбулентном обтекании в потоках сжимаемых газов является обобщение закономерностей, полученных для несжимаемой жидкости, хотя правомерность такой постановки вопроса не очевидна, так как при обтекании сжимаемым газом вследствие больших поперечных градиентов температур в пограничном слое нельзя пренебрегать, как это делается в несжимаемом потоке, переменностью физических констант, что существенно усложняет основные уравнения.

Разработка методов расчета турбулентного обмена в потоке сжимаемого газа велась в основном тремя путями.

1. Введение в рассмотрение некоторой определяющей температуры T' , к которой следует относить физические константы

в пограничном слое с тем, чтобы получать результивные расчетные формулы для теплоотдачи и сопротивления при обтекании сжимаемым газом такими же, как и для несжимаемой жидкости.

В зависимости от условий эксперимента, на базе которого строится та или иная рекомендация, разные исследователи предлагают различные формулы для расчета T' . Так, Эбер и Фаллис предлагают в качестве такой температуры при обтекании пластин

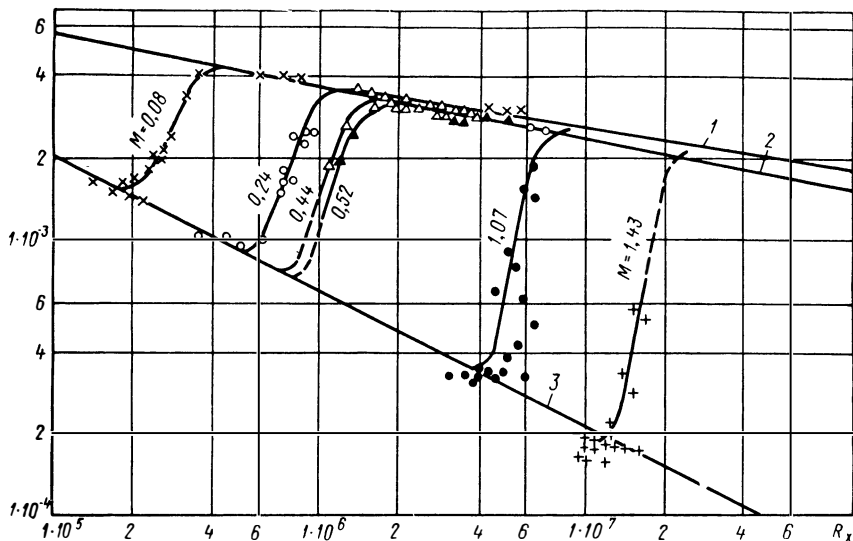


Рис. 34. Зависимость $c_f(R_x)$ при различных значениях числа M :
1 — по формуле (IV.71); 2 — по формуле (IV.70); 3 — по формуле (III.9')

и конусов выбирать температуру адиабатного торможения на стенке; Теккер [246] — среднее арифметическое между температурой набегающего потока и температурой стенки. Сомер и Шорт [240] определяющую температуру предлагают определять по формуле

$$T' = T_{\infty} \left[1 + 0,035M_{\infty}^2 + 0,45 \left(\frac{T_w}{T_{\infty}} - 1 \right) \right], \quad (IV.76)$$

а Шольц [234] — по формуле

$$T' = T_{\infty} + a(T_{aw} - T_{\infty}) - b(T_{aw} - T_w), \quad (IV.77)$$

где a и b — эмпирические константы.

Имеется еще целый ряд аналогичных предложений, в том числе и для градиентного обтекания.

При небольших сверхзвуковых значениях числа M и неинтенсивном теплообмене хорошее соответствие с формулами для обтекания несжимаемым потоком дает отнесение физических

констант к температуре торможения. На рис. 34, 35 приведены таким образом обработанные опытные значения локальных коэффициентов сопротивления и теплоотдачи при обтекании пластины с ламинарным, переходным и турбулентным пограничным слоем, полученные в ЦКТИ. Как видно, только значения чисел R_{x_n} и R_{x_k} в переходной области зависят от числа M (кроме M в этих опытах также изменялись ϵ и ψ), значения же c_f и Nu_x для ламинарного и турбулентного пограничного слоя при отнесении физических констант к температуре торможения соответствуют расчету по формулам (III.27), (III.9) и (IV.70), (IV.74) соответственно.

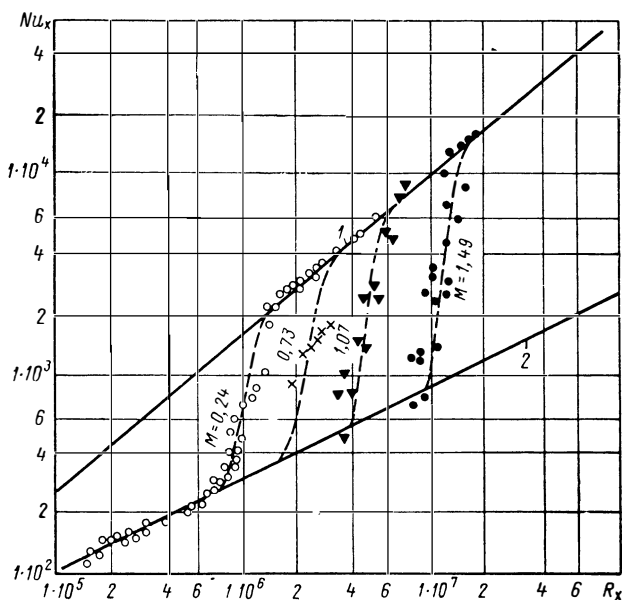


Рис. 35. Зависимость $Nu_x (R_x)$ при различных значениях числа M :

1 — по формуле (IV.74); 2 — по формуле (III.27)

Введение в качестве определяющей температуры средней арифметической [246]

$$T_m = \frac{T_\infty + T_w}{2} \quad (IV.78)$$

позволило получить при использовании формулы (IV.71) в виде

$$\frac{\tau_w}{0,5\rho_m U^2} = 0,0263 \left(\frac{\rho_m U}{\mu_m} \right)^{-1/7} \quad (IV.79)$$

выражение

$$c_f = 0,0263 \left(\frac{T_0}{T_m} \right)^{\frac{6-n}{7}} R_x^{-1/7}. \quad (IV.80)$$

Здесь

$$\frac{\mu_m}{\mu_\infty} = \left(\frac{T_m}{T_\infty} \right)^n; \quad (IV.81)$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T_m}. \quad (IV.82)$$

Из сопоставления формул (IV.80) и (IV.71) получается простое соотношение между значениями коэффициентов сопротивления в сжимаемом (c_f) и несжимаемом ($c_{f\text{нс}}$) потоках:

$$\frac{c_f}{c_{f\text{нс}}} = \left(\frac{T_\infty}{T_m} \right)^{\frac{6-n}{7}}. \quad (IV.83)$$

Если принять $n = 1$ и считать коэффициент восстановления температуры $r = 1$, то при отсутствии теплообмена

$$\frac{c_f}{c_{f\text{нс}}} = \left(\frac{2}{2 - \frac{k-1}{2} M_\infty^2} \right)^{5/7}. \quad (IV.84)$$

В настоящее время опубликован ряд опытных данных по определению профилей скорости в турбулентном пограничном слое пластин или плоских стенок аэродинамических труб. Из этих данных видно, что до $M \approx 2,5 \div 3$ профили скоростей в сжимаемом газе отклоняются незначительно от профилей в несжимаемом газе. Во всяком случае, отклонение профилей лежит в пределах разброса опытных данных. Однако все эти опыты относятся к обтеканию пластины без теплообмена и охватывают узкий диапазон изменения переменных.

Наиболее подробным и систематическим является исследование Лобба, Винклер и Перша [217]. Они исследовали турбулентный пограничный слой на стенке трубы при значениях M , равных 5; 6,8; 7,7, при наличии и отсутствии передачи тепла к стенке. Значение R^{**} изменялось от 5000 до 13 000. Было обнаружено существенное отклонение профилей скорости от профилей, характерных для обтекания несжимаемым потоком, в зависимости от нагрева поверхности, различными оказались также наклон кривых в области ламинарного подслоя и толщина самого ламинарного подслоя.

2. Представление уравнений обтекания сжимаемым потоком в новых координатах, непосредственно учитывающих влияние сжимаемости, вследствие чего уравнения движения и энергии приобретают такую же форму, как и при обтекании несжимаемым потоком. Введение таких переменных А. А. Дородницыным в виде:

$$\xi = \int_0^x \frac{\rho}{\rho_0} dx; \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy,$$

где звездочка соответствует параметрам торможения, позволило продвинуть задачу о расчете турбулентного обтекания в сжимаемом потоке. На базе использования переменных Дородницына был разработан ряд полуэмпирических методов расчета теплообмена и сопротивления в турбулентном потоке [84, 150, 60 и др.], позволивших приближенно решать большой круг практических задач.

Об ограниченности этого пути решения говорилось в пп. 5 и 12. Однако для задач турбостроения, в которых даже для перспективных машин $M \leq 2,5 + 3,0$, это ограничение не является существенным и использование переменных Дородницына плодотворно.

3. Третий путь заключается в попытках решения основной полной системы дифференциальных уравнений при условии замыкания ее эмпирическими соотношениями, построенными на той или иной формулировке гипотез Прандтля или Кармана с использованием так называемых констант турбулентного обмена. Эти константы получаются из экспериментов для обтекания несжимаемой жидкостью без теплообмена или при значении температурного фактора $\psi = T_w/T_{aw} \approx 1$. Подавляющее большинство исследований по влиянию сжимаемости и температурного фактора на турбулентное обтекание проводится применительно к безградиентному обтеканию наиболее простых объектов — пластин и конусов. Различные полуэмпирические решения этой задачи строятся на основе использования тех или иных гипотез для определения констант турбулентного обмена и их связи друг с другом или для определения турбулентного трения и его связи с усредненными скоростями.

Как уже говорилось выше, кроме проблемы внутренних закономерностей в турбулентной части пограничного слоя возникает проблема внутренней структуры всего пограничного слоя, т. е. проблема определения профилей скорости и температуры в нем и влияния на них числа M и температурного фактора ψ .

Решению этих двух вопросов для турбулентного течения и посвящено большинство полуэмпирических и эмпирических исследований в этой области.

В известной работе Ван-Дриста для обтекания сжимаемым потоком принимаются следующие допущения:

$$-\overline{(\rho v)'u'} = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad -c_p \overline{(\rho v)'T'} = K \frac{\partial T}{\partial y}; \quad (IV.85)$$

$$\frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{c_p A}{K} = 1; \quad (IV.86)$$

$$\tau = \bar{\rho} l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (IV.87)$$

где

$$l = \kappa y = \kappa \frac{\frac{d\bar{u}}{dy}}{\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}}. \quad (\text{IV.88})$$

В формуле (IV.86) величина $c_p A / K = \text{Pr}_t$ иногда называется турбулентным числом Прандтля.

На основе этих допущений получается известное соотношение между коэффициентами теплообмена и сопротивления трения

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Pr}R} = \text{St} = \frac{1}{2} c_f. \quad (\text{IV.89})$$

Принимается двухслойная структура пограничного слоя с постоянной толщиной ламинарного подслоя

$$\eta_0 = \frac{\delta_0}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}} = 11,7. \quad (\text{IV.90})$$

В результате получается так называемый синус-логарифмический профиль скорости и соответствующие формулы для расчета теплообмена и сопротивления.

Аналогичные допущения принимаются и в ряде других работ. В работе Сполдинга предлагается принять допущение о существовании особой формы гипотезы Прандтля

$$\tau = \mu_{eff} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (\text{IV.91})$$

где

$$\mu_{eff} = \mu + \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad l = f\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

и производить интегрирование системы уравнений методом конечных разностей с помощью электронных счетных машин. Преимущество метода Сполдинга заключается в том, что программа машинного счета допускает решение при измененных гипотезах переноса и, таким образом, может быть использована и при уточнении механизма турбулентного обмена.

Дейслер в ряде своих работ пытался найти подход к решению вопроса о структуре турбулентного пограничного слоя пластины. Он рассматривает двух- и трехслойную схемы пограничного слоя и принимает допущение, что в пристенной области при $\eta < 26$ имеет место соотношение

$$A = \kappa \frac{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^3}{\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right)^2}, \quad (\text{IV.92})$$

а при $\eta > 26$ — соотношение

$$A = n^2 \bar{u} y, \quad (\text{IV.93})$$

где n — экспериментальная константа.

В работе Кутателадзе и Леонтьева [107] в рамках вышеуказанных допущений о независимости констант турбулентного обмыва от сжимаемости выведены предельные значения функции

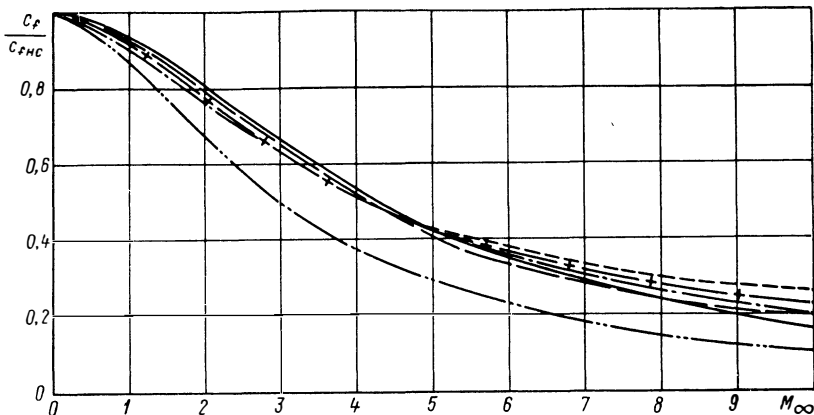


Рис. 36. Сопоставление значений $c_f/c_{fнс} = f(M_\infty)$, определенных различными методами расчета:

— — [234]; - - - - [240]; — + — метод Дейслера; — — — [246]; - · - · - [107]

$c_f/c_{fнс}$ при $R \rightarrow \infty$, при этом авторы полагают, что для сжимаемого потока сохраняется соотношение

$$\left(\frac{c_f}{c_{fнс}} \right)_{R_x} = \left(\frac{St}{St_{нс}} \right)_{R_x}. \quad (\text{IV.94})$$

На рис. 36 приведено сопоставление шести различных методов расчета по влиянию сжимаемости на c_f для теплоизолированной пластины. Как видно, имеет место практическое совпадение данных. Кривая Кутателадзе и Леонтьева лежит ниже других. Все эти теоретические решения в целом хорошо соответствуют опытным значениям коэффициентов сопротивления. Это позволяет считать, что для расчета теплоизолированной пластины не имеет существенного значения, какая структура турбулентного пограничного слоя кладется в основу теоретического метода расчета.

Совершенно другая картина получается при интенсивном теплообмене поверхности, т. е. при значениях температурного фактора T_w/T_{aw} , значительно отличающихся от единицы. На рис. 37 приведено сопоставление расчетов по влиянию сжимаемости на сопротивление трения по методам [240, 241, 199]. Как видно,

расхождение между результатами расчетов с уменьшением температурного фактора увеличивается. Наилучшее соответствие с экспериментальными данными (нанесены точками), полученными для $0,6 \leq \psi \leq 1,0$; $2 \leq M \leq 10$; $7 \cdot 10^6 \leq R_\infty \leq 2 \cdot 10^9$ [244], имеет метод Хеббора и Паранжпи [199], в котором влияние сжимаемости на c_f выражается простой формулой

$$\frac{c_f}{c_{f_{нс}}} = \left[1 + \frac{(n-1) \lg \frac{T_\infty}{T^*}}{\lg R_\infty} \right]^{-n} \frac{T_\infty}{T^*}. \quad (\text{IV.94a})$$

Здесь n — показатель степени в зависимости μ от T ,

$$\frac{T^*}{T_\infty} = \int_0^1 \frac{T}{T_\infty} d\left(\frac{u}{U_\infty}\right).$$

Еще большее влияние принятая за основу расчета структура пограничного слоя оказывает на интенсивность теплообмена. На рис. 38 приведены результаты расчетов Гопкинса и Нерема [202] по определению отношения числа Стэнтона St для обтекания сжимаемым потоком к числу $St_{нс}$ для обтекания несжимаемым потоком. Экспериментальные данные [244] располагаются в заштрихованной области и соответствуют диапазону изменения параметров:

$$2,5 \leq M \leq 3,5; \quad 0,8 \cdot 10^5 \leq R \leq 1,4 \cdot 10^6; \quad 0,02 < \psi = \frac{i_w}{i_{aw}} < 0,07,$$

где i_w — энтальпия газа у стенки; i_{aw} — энтальпия равновесного газа.

Из анализа данных, представленных на рисунках, видно, что даже два метода Ван-Дрифта, один из которых основывается на гипотезе Прандтля для пути перемешивания, а другой — на гипотезе Кармана, дают значительно отличающиеся результаты. Это различие еще больше, когда теплообмен происходит в средах с числами Pr , значительно отличающимися от единицы.

В настоящее время наиболее популярными методами расчета профилей скорости и сопротивления при безградиентном обтекании пластины потоком сжимаемого газа являются методы Сполдинга и Чи [241] и метод Коулза [185].

В работе [241] на основании анализа результатов исследований двадцати различных авторов вводится модифицированная

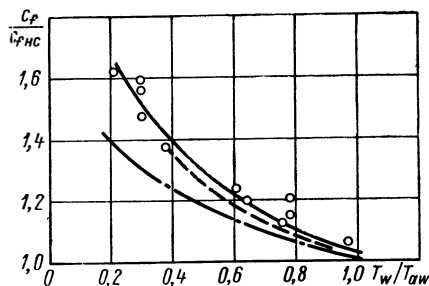


Рис. 37. Сопоставление значений $c_f/c_{f_{нс}} = f(T_w/T_{aw})$, определенных различными методами расчета:
 - - - - [240]; - · - - [241]; — — — [199]

форма гипотезы Прандтля в виде (IV.91) и производится численное интегрирование системы уравнений движения методом конечных разностей с помощью ЭВМ. На основе этих вычислений построены номограммы, позволяющие быстро выполнять расчет (рис. 39, 40).

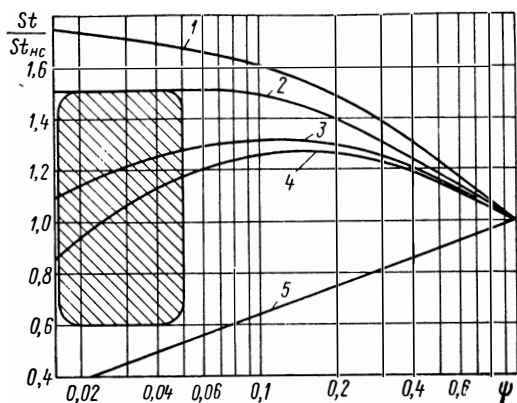


Рис. 38. Зависимость $St/St_{нс}$ от температурного фактора при $2,5 \leq M \leq 3,5$ и $0,8 \cdot 10^5 \leq R \leq 1,4 \cdot 10^6$:

1 — метод Эккерта; 2, 3 — [251]; 4 — [241]; 5 — метод Винклера и Чн

С помощью рис. 39 по заданным $\psi = T_w/T$ и M определяются значения условных функций F_c и $F_{R\delta}$:

$$F_c = \int_0^1 \frac{dz}{\left[\frac{T_w}{T} + \left(1 - \frac{k-1}{2} rM^2 - \frac{T_w}{T} \right) z - \frac{k-1}{2} rM^2 z^2 \right]^{0,5}}$$

$$F_{R\delta} = \left(\frac{T_w}{T} \right)^{-0,702} \left(\frac{T_{aw}}{T_w} \right)^{0,772}$$

По этим значениям определяется функция

$$F_{R_x} = \frac{F_{R\delta}}{F_c} \quad (IV.95)$$

По графикам на рис. 40 при известных значениях R_x , F_{R_x} и F_c находится локальное или среднее значение коэффициента сопротивления трения.

Эмпирические коэффициенты, входящие в решение, базируются на имеющемся ограниченном опытном материале, относящемся в основном к опытам без теплообмена. Однако преимущество метода заключается в том, что программа машинного счета допускает ввод измененных гипотез переноса и, таким образом, может

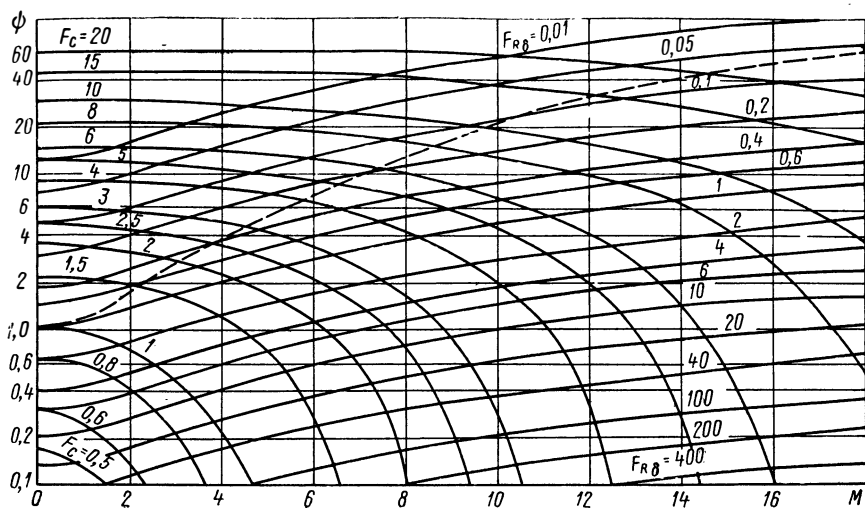


Рис. 39. Номограмма для определения условных функций F_c и $F_{R\delta}$

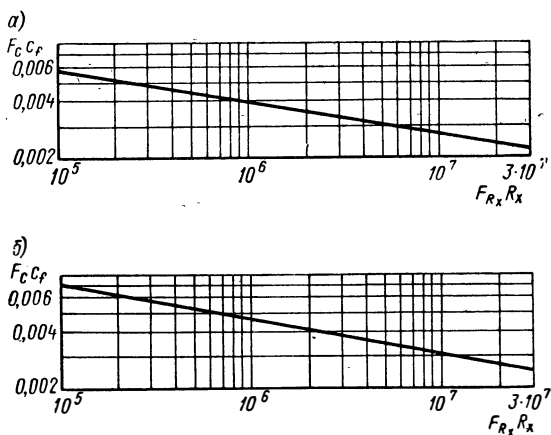


Рис. 40. Расчетные значения c_f по методу Сполдинга и Чи: а — локальные; б — средние

быть использована и при уточнении механизма турбулентного обмена.

В работе Коулза [185] логарифмический профиль скорости в пограничном слое, полученный при обтекании пластины несжи-

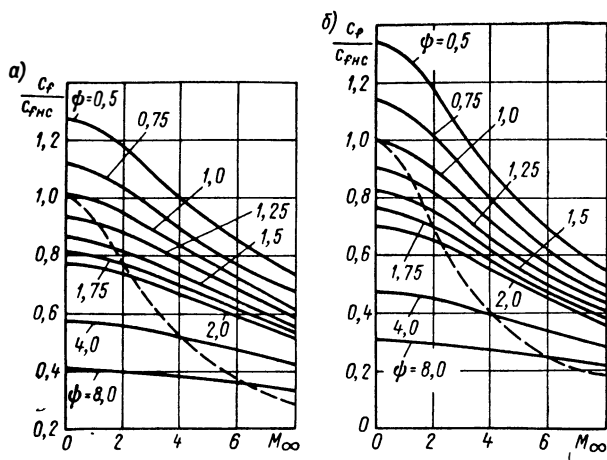


Рис. 41. Номограмма для определения коэффициента сопротивления трения: а — $R^{**} = 10^3$; б — $R^{**} = 10^4$; — — — адиабатное течение; — — — неадиабатное течение

маемым потоком газа, уточняется для сжимаемого потока путем введения дополнительного члена

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y v_*}{\nu} + C + \frac{\Pi}{\kappa} W\left(\frac{y}{\delta_c}\right), \quad (\text{IV.96})$$

где Π — параметр, зависящий от градиента давления; δ_c — значение y , при котором

$$\frac{\partial (U/v_*)}{\partial \ln y} = \frac{1}{\kappa}.$$

Зависимость (IV.96) получила название закона следа.

Формула для расчета коэффициента сопротивления получается в работе [185], как обычно для логарифмического профиля скорости, в неявном виде. Однако недавно Майлз и Ким [220] сравнили экспериментальные данные 18 работ с расчетами по методу [185] в диапазоне изменения параметров $R^{**} = 10^3 \div 10^4$; $T_w/T_\infty = 0,5 \div 8,0$ и установили, что отклонения не превышают 7,3% для адиабатного течения и 15,3% для неадиабатного течения. На рис. 41 приведена номограмма, полученная в работе [220], позволяющая быстро определять изменения c_f с изменением чисел M и $\psi = T_w/T_\infty$.

В последнее время появился также ряд экспериментальных и теоретических работ, в которых приводится исследование влия-

ния тех или иных параметров течения на так называемые константы турбулентного обмена. Так, в работе [251] на основе интегрирования уравнения энергии для трехслойной схемы пограничного слоя получено выражение для фактора аналогии Рейнольдса

$$S = \frac{c_f}{2St} = Pr_t + 5 Pr_t \sqrt{\frac{c_f}{2}} \left\{ \frac{1}{5\kappa} (1 - Pr_t) \left[\frac{\pi^2}{6} + \frac{3}{2} (1 - Pr_t) \right] + \left(\frac{Pr}{Pr_t} - 1 \right) + \ln \left[1 + \frac{5}{6} \left(\frac{Pr}{Pr_t} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (IV.97)$$

По данным работы [237] $S \approx Pr^{-0,57}$; по экспериментальным данным $S \approx 0,9 \div 1,1$. В работе [74] для этого параметра получены значения, представленные на рис. 42, из которого видно, что S зависит от M и $\psi = T_w/T_{aw}$ и значительно отличается от единицы при обтекании сжимаемым потоком.

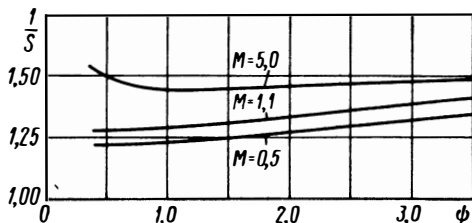


Рис. 42. Зависимость S от ψ

В работе [239] на основе обобщения результатов прецизионных опытных

данных предлагаются следующие формулы для расчета модифицированного фактора аналогии Рейнольдса α , представляющего собой отношение коэффициента турбулентного обмена тепла к коэффициенту турбулентной вязкости $\alpha = K/A$:

1) при $y^+ < y_1^+$

$$\alpha = Pr^{-0,5};$$

2) при $y_1^+ < y^+ < y_2^+$

$$\alpha = \frac{1}{2 Pr^{0,5}} \left[Pr^{0,5} + 1 + (Pr^{0,5} - 1) \sin \frac{\pi (y^+ - y_{1m}^+)}{2y_{2m}^+} \right];$$

3) при $y^+ > y_2^+$

$$\alpha = 1.$$

При этом

$$y_1^+ = 4; \quad y_2^+ = 10; \quad y_{1m}^+ = \frac{y_2^+ + y_1^+}{2}; \quad y_{2m}^+ = \frac{y_2^+ - y_1^+}{2}.$$

В работе [228] предлагается уточнение формулы Прандтля для длины пути перемешивания l путем введения демпфирующего множителя Ван-Дрифта:

1) при $y/\delta < 0,1$

$$\frac{l}{\delta} = 0,41 \left[1 - \exp \left(-\frac{y^+}{26} \right) \right] \frac{y}{\delta};$$

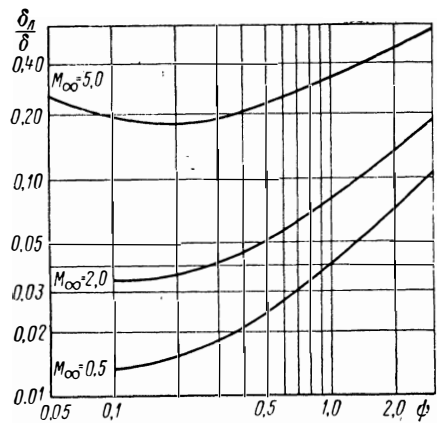


Рис. 43. Зависимость δ_L/δ от ψ и M_∞ при $R = 10^5$

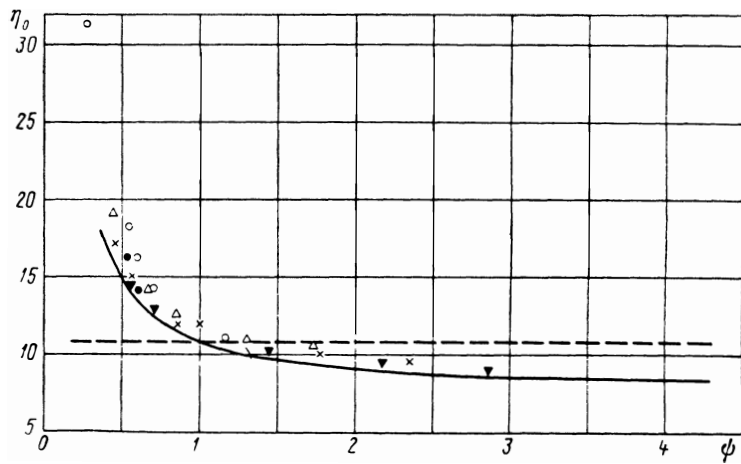


Рис. 44. Зависимость η_0 от ψ при следующих значениях M_∞ :
 ○ — 6,8; ● — 5,0; ▽ — 3,0; × — 2,0; ▼ — 1,5

2) при $0,2 < y/\delta < 0,6$

$$\frac{l}{\delta} = 0,41 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right] \frac{y}{\delta} - 1,53506 \left(\frac{y}{\delta} - 0,1 \right)^2 + \\ + 2,75625 \left(\frac{y}{\delta} - 0,1 \right)^3 - 1,88425 \left(\frac{y}{\delta} - 1 \right)^4;$$

3) при $y/\delta > 0,6$

$$l/\delta = 0,089.$$

Отмеченное выше значительное влияние температурного фактора на сопротивление и теплообмен пластины может быть объяснено тем, что при изменении ψ происходит существенная перестройка пограничного слоя, которая характеризуется, в частности, изменением протяженности области вязкого подслоя. Из приведенных на рис. 43 кривых [74] видно, что при $\psi = T_w/T_{aw} = 2$ и $M_\infty \approx 5$ толщина подслоя δ_n может составлять 50% толщины всего пограничного слоя δ . Безразмерная толщина подслоя $\eta_0 = yv_*/\nu$, являющаяся при обтекании пластины несжимаемым потоком величиной постоянной и равной $\eta_0 = 10,65$ (штриховая линия на рис. 44), с изменением температурного фактора в случае сжимаемого потока, как видно из рис. 44 [74], заметно изменяется. Линия на рисунке соответствует $M_\infty \approx 0$.

Все эти данные говорят, что основные допущения, принимаемые при построении приближенных методов расчета турбулентного пограничного слоя ($Pr_t = 1$; $\eta_0 = \text{const}$; $S = 2 St/c_f = 1$; $l = \kappa y$ и т. д.), становятся практически неприемлемыми для расчета теплообмена при значениях ψ , значительно отличающемся от единицы, и при больших значениях числа M_∞ .

21. Расчет турбулентного пограничного слоя при обтекании с продольным градиентом давления

Задача о градиентном обтекании поверхности потоком сжимаемого газа (обтекание крылового профиля и криволинейных поверхностей, течение в межпрофильных каналах решеток турбинных и компрессорных лопаток и т. п.) значительно осложняется тем, что при сверхзвуковых течениях сильные продольные градиенты давления или изменения кривизны обтекаемой поверхности могут сопровождаться возникновением скачков уплотнения и вызываемых ими отрывов пограничного слоя. Неоднородность основного потока, непостоянство давления поперек пограничного слоя и другие факторы, обусловленные взаимодействием скачка уплотнения с пограничным слоем, приводят к невозможности применения уравнений пограничного слоя в обычном виде. Описанные в литературе методы расчета как ламинарного, так и турбулентного пограничного слоя у поверхностей, обтекаемых сжимаемым газом с продольным градиентом давления, основаны на допущении

об идеализированном (бескачковом и безотрывном) обтекании. Это нужно иметь в виду, используя эти методы для решения практических задач.

Опытный материал по турбулентному обтеканию поверхностей с продольным градиентом давления еще более ограничен, чем для случая обтекания плоской пластины.

В настоящее время появился ряд опытных данных, указывающих на то, что при некоторых условиях (очень больших ускорениях потока, очень большом повышении температуры потока и т. п.) возможно возникновение явления обратного перехода от турбулентного режима течения в пограничном слое к ламинарному. Имеются опытные данные, наглядно иллюстрирующие обратную перестройку профилей скорости в пограничном слое и соответствующие изменения коэффициентов сопротивления. Не вдаваясь в подробный физический анализ этого явления, который сейчас еще недостаточно ясен, можно дать следующую качественную оценку этого явления.

Напишем интегральное соотношение импульсов в виде

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} \left[(2 + H) \frac{U'}{U} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \right].$$

Пусть профиль скорости в пограничном слое соответствует закону одной седьмой. Тогда $\delta^*/\delta^{**} \approx 1,28$. Соответственно допустим, что для τ можно использовать выражение [118]

$$\tau = 0,0128\rho U^2 \left(\frac{U\delta^{**}}{\nu} \right)^{-0,25}.$$

Введя эти значения в интегральное соотношение импульсов после преобразований получим

$$\frac{dR^{**}}{dx} \frac{\nu}{2,29UR^{**}} = \frac{0,0128}{2,29(R^{**})^{1,25}} - \frac{\nu}{U^2} \frac{dU}{dx}. \quad (\text{IV.98})$$

Если принять, что обратный переход происходит при тех же значениях R^{**} , что и обычный переход от ламинарного к турбулентному течению, т. е. при $R^{**} \approx 360$, то

$$\frac{dR^{**}}{dx} \frac{\nu}{825U} = 3,55 \cdot 10^{-6} - \frac{\nu}{U^2} \frac{dU}{dx}. \quad (\text{IV.99})$$

Поскольку при обратном переходе величина $\frac{dR^{**}}{dx}$ должна уменьшаться, т. е. $\frac{dR^{**}}{dx} < 0$, то условием обратного перехода будет

$$\frac{\nu U'}{U^2} > 3,5 \cdot 10^{-6}.$$

Существующие в настоящее время полуэмпирические методы расчета теплового и динамического пограничных слоев при гра-

диентном обтекании можно разбить на две группы. К первой группе относятся методы, базирующиеся на решении дифференциальных уравнений в частных производных [уравнения (VII)—(X) в гл. I] с привлечением эмпирических соотношений для зависимостей так называемых эффективных коэффициентов переноса (вязкость, теплопроводность, число Прандтля и т. д.). Ко второй группе относятся методы, часто называемые эмпирическими, основанные на решении обыкновенных дифференциальных уравнений (обычно интегральные соотношения импульсов и энергии).

В настоящей монографии рассмотрены только те методы расчета, которые могут быть применены или уже применяются для расчета теплового и динамического пограничного слоя в элементах проточной части турбомашин.

Из работ первой группы в этом плане особого внимания заслуживает метод Патанкора и Сполдинга [226]. Эта работа является дальнейшим развитием идей метода Сполдинга и Чи [241], описанного в предыдущем параграфе. Широкое применение ЭВМ позволило авторам произвести подробный численный эксперимент и сопоставить результаты расчетов с экспериментальными данными с целью отбора гипотез, определяющих коэффициенты турбулентного обмена, использование которых дает наилучшее совпадение расчетных результатов с непосредственными измерениями для конкретных задач. На основе этих сопоставлений проведено дальнейшее развитие метода и усовершенствование основных физических гипотез, а также усовершенствование математического аппарата с точки зрения повышения его точности и экономичности. Метод численного решения основной системы дифференциальных уравнений пограничного слоя является конечно-разностным, он подразумевает использование ломаных профилей из прямолинейных отрезков. Независимой переменной в поперечном сечении пограничного слоя служит безразмерная функция тока. Непрерывное изменение эффективной вязкости μ_{eff} поперек пограничного слоя характеризуется модифицированной гипотезой Ван-Дриста [252]:

$$\mu_{eff} = \mu + \rho \chi^2 y^2 \left[1 - \exp \left(-y \frac{\sqrt{\tau_p}}{\mu A^+} \right) \right]^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (IV.100)$$

где величина

$$\rho \chi^2 y^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

называется турбулентным аналогом вязкости.

Метод решения задачи запрограммирован на ЭВМ, программа записана на алгоритмическом языке «Фортран-IV», подробное ее изложение приведено в книге [226], недавно вышедшей на русском языке.

Эмпирические методы решения (методы второй группы) в основном строятся на решении интегральных соотношений импульсов

и энергии. Наибольшее распространение из них получили так называемые однопараметрические методы расчета в силу своей простоты и удовлетворительной точности при решении сравнительно простых практических задач, возникающих в авиации, турбостроении и других отраслях техники. Сущность этих методов заключается, как уже говорилось выше, в предположении, что все многообразие профилей скорости в пограничном слое обтекаемого тела можно представить в виде однозначной функции некоторого форм-параметра f , изменяющегося вдоль обтекаемой поверхности. Здесь также сначала были созданы методы расчета пограничного слоя при обтекании поверхности потоком несжимаемого газа, которые впоследствии тем или иным путем распространились на сжимаемый поток газа.

Так, известный метод Солodka для расчета обтекания сжимаемым потоком представляет собой обобщение известного однопараметрического метода расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемом газе Лойцянского [115]. Распространение идей этого метода расчета на тепловой пограничный слой шло двумя путями [60, 150].

В работе [60] разработан приближенный полуэмпирический метод, позволяющий рассчитывать единообразно все три области теплового пограничного слоя (ламинарного, переходного и турбулентного режимов течения), возникающие при обтекании поверхности сжимаемым газом. Рассматривается обтекание поверхности плоским потоком вязкой сжимаемой жидкости при наличии теплообмена в предположении постоянства температуры поверхности. Интегральное соотношение энергии

$$\frac{d\delta_T^{**}}{d\xi} + \delta_T^{**} \frac{U'_\xi}{U} = \frac{T_0^*}{T_w} \frac{Nu_x}{Pr R_x} \quad (IV.101)$$

решается в переменных Дородницына. Здесь переменные ξ и η определяются по (I.53), δ_T^{**} — по (I.77), t^* и t_0^* — по (I.39); $Nu_x = \alpha x / \lambda$; $Pr = \nu^* / a^*$.

Используя соотношения (I.54), (I.56), (I.61), можно уравнение (IV.101) привести к виду

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} \delta_T^{**} = \frac{T_0^*}{T_w} (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}} \frac{Nu_x}{Pr R_x}. \quad (IV.101a)$$

Вводятся параметры:

$$\left. \begin{aligned} f_T &= \frac{U'}{U} \delta_T^{**} G_T; \\ \chi &= \frac{T_0^*}{T_w} (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}} \frac{Nu_x}{Pr R_x} G_T, \end{aligned} \right\} \quad (IV.102)$$

и предполагается, что эти параметры, изменяющиеся вдоль обтекаемой поверхности, однозначно определяют все характеристики теплового пограничного слоя. Принимается допущение, что в пер-

вом выражении (IV.102) влияние продольного градиента давления характеризуется комплексом $(U'/U) \delta_{\tau}^{**}$, а функция G_{τ} не зависит от dU/dx , а характеризует только влияние числа Рейнольдса. В этом случае значение функции G_{τ} будет одинаковым как для обтекания профиля, так и для обтекания пластины. Тогда функцию G_{τ} можно определить на основании данных о теплоотдаче пластины.

На рис. 35 были приведены экспериментальные данные по теплоотдаче пластины, обтекаемой потоком газа при $0,24 \leq M \leq 1,43$ и при $\psi = T_w/T_0^* \approx 1$. Из рассмотрения опытных точек видно, что при отнесении физических констант к параметрам торможения формулы для расчета теплоотдачи сохраняют такой же вид, как и для случая обтекания несжимаемым потоком: для ламинарного пограничного слоя (линия 2) — формула (III.27), для турбулентного пограничного слоя (линия 1) — формула (IV.74).

Для переходной области пограничного слоя влияние сжимаемости сказывается на координатах начала и конца перехода (x_n, x_k), развитие же процесса перехода после его возникновения происходит таким образом, что линии $Nu_x = N(R_x)$ остаются параллельными друг другу во всем исследованном диапазоне изменения числа M . Очевидно, эти кривые могут быть аппроксимированы семейством

$$Nu_x = B R_x^n, \quad (IV.103)$$

в котором значения B и n различны, но неизменны для каждого режима течения в пограничном слое. Для переходной области коэффициент B является, как показывают опыты, величиной переменной, изменяющейся с изменением числа Рейнольдса R_{x_n} , соответствующего точке начала перехода. Эта величина определяется начальной турбулентностью потока, температурным фактором и числом M , т. е. величина B сохраняет постоянное значение в пределах каждого конкретного опыта, но может изменяться с изменением начальных и режимных условий процесса.

Подставляя выражение (IV.103) в интегральное соотношение энергии для пластины

$$\frac{d\delta_{\tau}^{**}}{dx} = \frac{T_0^*}{T_w} (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}} \frac{Nu_x}{Pr R_x} \quad (IV.104)$$

и используя первую из формул (IV.102), можно получить для функции G_{τ} следующее выражение:

$$G_{\tau} = (m+1) \left[\frac{Pr}{(m+1)B} \right]^{m+1} \frac{\chi}{\left[\frac{T_0^*}{T_w} (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}} \right]^{m+1}} (R_{\tau}^{**})^m, \quad (IV.105)$$

где

$$m = (1 - n)/n. \quad (IV.106)$$

Функция χ определяется таким образом, чтобы для пластины можно было принять

$$\frac{\chi}{\left[\frac{T_0^*}{T_w} (1 - \alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}} \right]^{m+1}} = 1, \quad (\text{IV.107})$$

Тогда

$$G_T = A (R_T^{**})^m. \quad (\text{IV.108})$$

Вводя соотношения (IV.102) и (IV.108) в уравнение (IV.101a), можно с помощью несложных выкладок привести его к виду

$$\frac{df_T}{dx} = [(m+1)\chi - 2f_T] \frac{U'}{U} - \frac{U''}{U'} f_T. \quad (\text{IV.109})$$

Для несжимаемого потока было экспериментально показано [56], что функция

$$(m+1)\chi - 2f_T = F_T, \quad (\text{IV.110})$$

стоящая в квадратных скобках (IV.109), с хорошей точностью может быть выражена соотношением

$$F_T = a - 2f_T, \quad (\text{IV.111})$$

где $a = (m+1)\chi$. При этом величина a оказалась не зависящей от градиента давления и определялась только режимом течения в пограничном слое. Экспериментально установлено: для ламинарного пограничного слоя $a = 0,48$; $A = 0,703$; $m = 1$; для переходной области $a = 0,9$; $A = 970$; $m = -0,1$; для турбулентного пограничного слоя $a = 1,25$; $A = 61,7$; $m = 0,25$.

Принимается допущение, что для сжимаемого потока также можно написать аналогичное соотношение. Если величина a не зависит от продольного градиента давления, то она, очевидно, должна иметь одинаковое значение как при обтекании профиля, так и при обтекании пластины. Тогда, используя выражение (IV.107), можно определить

$$a = (m+1) \left[\frac{T_0^*}{T_w} (1 - \alpha_\infty^2)^{\frac{k}{k-1}} \right]^{m+1}, \quad (\text{IV.112})$$

где α_∞ — значение α_0 для невозмущенного потока.

Если рассматривать обтекание, характеризуемое условием $T_w/T_0^* = \text{const}$, то тогда, очевидно, для каждого режима обтекания величина a будет величиной постоянной ($a = \text{idem}$) и зависящей только от режима обтекания.

В этом случае уравнение (IV.109) легко интегрируется, и из него можно определить δ_T^{**} для теплового пограничного слоя:

$$\delta_T^{**} = \left(\frac{a}{A} \right)^{\frac{1}{m+1}} \frac{\nu_0^*}{U} \left[\int_{x_n}^x \frac{U dx}{\nu_0^*} + (R_{\text{TH}}^{**})^{m+1} \frac{A_n}{a} \right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (\text{IV.113})$$

Здесь A_l соответствует значению коэффициента A в формуле (IV.108) для ламинарного пограничного слоя, если расчет ведется для переходной области, и значению A для переходной области, если расчет ведется для турбулентной части пограничного слоя. Соответственно число

$$R_{\text{TH}}^{**} = \frac{U \delta_{\text{TH}}^{**}}{v_0^*}$$

определяется для координаты начала перехода из расчета ламинарного участка в первом случае и для координаты конца перехода из расчета переходной области — во втором.

Используя (IV.113), (IV.102), (IV.110), (IV.111), можно получить формулу для расчета локальных значений коэффициента теплоотдачи

$$Nu_x = \left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{1}{m+1}} \frac{T_w}{T_0^*} \frac{Pr}{(1+m)(1-\alpha_0^2)^{\frac{k}{k-1}}} \frac{R_x}{\left[\int_{x_H}^x \frac{U dx}{v_0^*} + (R_{\text{TH}}^{**})^{m+1} \frac{A_l}{a} \right]^{\frac{m}{m+1}}}. \quad (\text{IV.114})$$

Если величину a в формуле (IV.114) выразить по (IV.112), можно получить зависимость

$$Nu_x = \left(\frac{m+1}{A}\right)^{\frac{1}{m+1}} \frac{Pr}{m+1} \left(\frac{1-\alpha_\infty^2}{1-\alpha_0^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{R_x}{\left[\int_{x_H}^x \frac{U dx}{v_0^*} + (R_{\text{TH}}^{**})^{m+1} \frac{A_l}{a} \right]^{\frac{m}{m+1}}}. \quad (\text{IV.115})$$

В случае обтекания поверхности потоком несжимаемого газа решение упрощается [57]. В этом случае основные функции, описываемые выражениями (IV.102), приобретают вид:

$$f_\tau = \frac{U'}{U} \delta_\tau^{**} G_\tau; \quad \chi = \frac{Nu_x}{Pr R_x} G_\tau.$$

Уравнение для теплового форм-параметра (IV.109) остается неизменным.

В результате решения получается следующее выражение для толщины потери теплосодержания:

$$\delta_\tau^{**} = \left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{1}{m+1}} \frac{1}{v^{\frac{m}{m+1}} U} \left(\int_{x_H}^x U d\xi + \frac{\delta_{\text{TH}}^{**} G_{\text{TH}} U_H}{a} \right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (\text{IV.116})$$

Здесь индекс n соответствует координате точки начала перехода x_n . В случае расчета турбулентного участка пограничного слоя параметры последнего члена уравнения (IV.116) приобретают индекс n и относятся к координате конца переходной области x_n .

В соответствии с (IV.102), учитывая, что $a = (m + 1) \chi$, для числа Нуссельта можно получить выражение

$$Nu_x = \frac{a}{1+m} \frac{Pr R_x}{G_T (R_T^{**})}, \quad (IV.117)$$

или после несложных преобразований

$$Nu_x = \frac{1}{m+1} \left(\frac{a}{A} \right)^{\frac{1}{m+1}} \frac{Pr R_x}{\left[\int_{x_n}^x \frac{U dx}{\nu} + \frac{(R_{ТН}^{**})^{m+1} A_{л.}}{a} \right]^{\frac{m}{m+1}}}. \quad (IV.118)$$

С учетом экспериментальных значений a , A , m формула (IV.118) примет вид:

1) для ламинарного течения в пограничном слое

$$Nu_x = 0,297 \frac{R_x}{\left(\int_0^x \frac{U dx}{\nu} \right)^{0,5}}; \quad (IV.119)$$

2) для переходной области пограничного слоя

$$Nu_x = 0,000343 R_x \left[\int_{x_n}^x \frac{U dx}{\nu} + \frac{0,047}{\left(\frac{Nu_{x_n}}{R_{x_n}} \right)^2} \right]^{1/6}; \quad (IV.120)$$

3) для турбулентного течения в пограничном слое

$$Nu_x = 0,0255 \frac{R_x}{\left[\int_{x_n}^x \frac{U dx}{\nu} + 0,72 \left(2915 \frac{Nu_{x_n}}{R_{x_n}} \right)^9 \right]^{1/6}}. \quad (IV.121)$$

Из сравнения формул (IV.118) и (IV.114) можно обнаружить, что при отнесении физических констант к температуре торможения потока T_0^* существует формальная аналогия между видом формул для расчета интенсивности теплообмена в сжимаемом потоке газа ($Nu_x^{сж}$) и в несжимаемом ($Nu_x^{нсж}$):

$$Nu_x^{сж} = Nu_x^{нсж} \left(\frac{1 - \alpha_{\infty}^2}{1 - \alpha_0^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \equiv Nu_x^{нсж} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_{\infty}^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_0^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (IV.122)$$

Из этой формулы видно, что для случая обтекания пластины, когда скорость на внешней границе пограничного слоя равна скорости набегающего потока и, соответственно, $\alpha_0 = \alpha_\infty$ и $M_0 = M_\infty$, должно иметь место формальное равенство $Nu_x^{cж}$ и $Nu_x^{ncж}$ при отнесении физических констант к температуре торможения.

В работе [150] решается задача о теплообмене в турбулентном пограничном слое при обтекании поверхности потоком несжимаемого газа для $Pr = 1$. Рассматривается задача о теплообмене и сопротивлении при малых и больших температурных напорах. Решение строится аналогично решению [149] для ламинарного пограничного слоя. Рассматриваются интегральные соотношения импульсов и энергии. Вводятся переменная Дородницына

$$\eta = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_0} dy = \int_0^y \frac{T_0}{T} dy,$$

условные толщины динамического и теплового пограничного слоя:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta; \quad \delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta;$$

$$\delta_\tau^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) d\eta; \quad \delta_\tau^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{t^*}{t_0^*}\right) d\eta$$

(для случая малых температурных напоров гидродинамическая и тепловая задачи разделяются и решаются отдельно) и параметры:

$$\chi = \frac{q_w}{\rho c_p t_0^* U} G_1(R_\tau^{**}); \quad f_\tau = \frac{U' \delta_\tau^{**}}{U} G_1(R_\tau^{**}).$$

Для функции $G_1(R_\tau^{**})$ принимается то же значение, что и в гидродинамической задаче по методу Лойцянского [115], только вместо R^{**} в формулу вводится R_τ^{**} , и получается

$$G_1(R_\tau^{**}) = 153,2 (R_\tau^{**})^{1/6}.$$

Для пластины принимается

$$\chi = \chi_0 = 1. \quad (IV.123)$$

Вводятся нормированные параметры:

$$\bar{f}_\tau = \frac{f_\tau}{(f_\tau)_{отр}}; \quad \bar{\chi} = \frac{\chi}{\chi_0}, \quad (IV.124)$$

где $(f_\tau)_{отр}$ — значение f_τ в точке отрыва.

Эти форм-параметры вводятся в интегральное соотношение энергии, которое после преобразований и упрощений сводится к виду

$$\frac{df_\tau}{dx} = \frac{U'}{U} \bar{F}_\tau(\bar{f}_\tau; R_\tau^{**}) + \frac{U''}{U'} \bar{f}_\tau, \quad (IV.125)$$

где

$$\bar{F}_\tau(\bar{f}_\tau; R_\tau^{**}) = \frac{1+m}{(f_\tau)_{отр}} \bar{\chi} - 2\bar{f}_\tau.$$

Далее принимается допущение о наличии аналогии между нормированными функциями $\bar{\chi}$ и \bar{f}_τ в ламинарном и турбулентном пограничных слоях и рекомендуется эти функции определять по табл. 4 в зависимости от динамического форм-параметра. Для определения $(f_\tau)_{отр}$ принимается допущение

$$\frac{(f_\tau)_{отр. турб}}{(f_\tau)_{отр. лам}} = \frac{f_{отр. турб}}{f_{отр. лам}}. \quad (IV.126)$$

Отсюда при $f_{отр. турб} = -2$, $f_{отр. лам} = -0,0681$ для $(f_\tau)_{отр. лам} = -0,22$ и $(f_\tau)_{отр. лам} = -0,033$ получается соответственно $(f_\tau)_{отр. турб} = -0,650$ при $Pr = 1$ и $(f_\tau)_{отр. турб} = -0,970$ при $Pr = 0,73$.

Таким образом,

$$Nu_x = \bar{\chi} \frac{R_x}{G_1(R_\tau^{**})}. \quad (IV.127)$$

При значительных температурных напорах вводятся параметры:

$$\left. \begin{aligned} \bar{f} &= \frac{U'}{U} \frac{\delta^{**}}{f_{отр. турб}} \frac{T_w}{T_0} G(R^{**}); & \bar{f}_\tau &= \frac{U'}{U} \frac{\delta_\tau^{**}}{(f_\tau)_{отр. турб}} \frac{T_w}{T_0} G_1(R_\tau^{**}); \\ \bar{\xi} &= \frac{\tau_w}{\xi_0 \rho_0 U^2} \frac{T_w}{T_0} G(R^{**}); & \bar{\chi} &= \frac{q_w}{\rho_0 c_p f_0^* U \chi_0} \frac{T_w}{T_0} G_1(R_\tau^{**}). \end{aligned} \right\} \quad (IV.128)$$

Предполагается, что влияние теплообмена полностью учитывается:

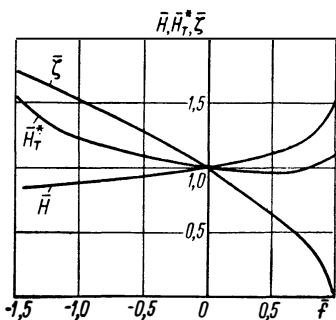


Рис. 45. Зависимость функций $\bar{\xi}$, \bar{H} , \bar{H}_τ^* от \bar{f}

1) введением в уравнения T_w/T_0 ; 2) изменением форм-параметра \bar{f}_τ ; 3) выражением величин δ^* , δ^{**} , δ_τ^* и т. п. в новой переменной. На основе этих допущений принимается, что для пластины ($H = H_0 = 1,4 = \text{const}$) $f_{отр}$ не зависит от T_w/T_0 , вид нормированных функций $\bar{\xi}(\bar{f})$, $\bar{H}(\bar{f})$, $\bar{H}_\tau^*(\bar{f})$ не зависит от T_w/T_0 и может быть взят таким, как для ламинарного пограничного слоя. Эти функции приведены на рис. 45. Далее решение строится аналогичным образом и получаются соотношения для определения локальных коэффициентов сопротивления и теплоотдачи:

$$\left. \begin{aligned} c_f &= \frac{2\bar{\xi}(\bar{f})}{G(R^{**})} \frac{T_0}{T_w}; \\ Nu_x &= \bar{\chi} \frac{R_x}{G_1(R_\tau^{**})} \frac{T_0}{T_w}. \end{aligned} \right\} \quad (IV.129)$$

Применимость этого метода расчета ограничивается пределами справедливости принятых допущений, а также условием постоянства $f_{отр}$, о чем уже говорилось выше.

22 Турбулентное движение вязкой жидкости в гладкой цилиндрической трубе

Использование результатов классических опытов Никурадзе по измерению профилей скорости при турбулентном движении жидкости в гладкой круглой трубе, описанных в п. 20, позволило аналитически решить вопрос о потерях на трение в таких трубах.

Логарифмический профиль скорости, описываемый уравнением (IV.52), как уже говорилось выше, имеет место во всех участках трубы, кроме тонкого пристенного слоя, названного ламинарным подслоем.

Рассмотрим круглую трубу радиусом a . На оси трубы $u = U_{max}$, следовательно, уравнение (IV.52) можно записать в виде

$$\frac{U_{max}}{v_*} = 5,75 \lg \frac{av_*}{\nu} + 5,5. \quad (IV.130)$$

Если произвести почленное вычитание формул (IV.130) и (IV.52), получим

$$\frac{U_{max} - u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{a}{y}; \quad (IV.131)$$

если вместо u взять среднюю скорость

$$U_{cp} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u 2\pi (a - y) dy,$$

то

$$\frac{U_{max} - U_{cp}}{v_*} = 3,75. \quad (IV.132)$$

В отличие от ламинарного движения в трубе, когда $U_{max}/U_{cp} = 2$, при турбулентном движении это отношение зависит от R и изменяется от 1,3 (при $R \approx 5 \cdot 10^3$) до 1,15 (при $R \approx 3 \cdot 10^6$). Объясняется это отмечавшейся выше зависимостью от R степенных профилей скорости при турбулентном движении.

Формулы для логарифмических профилей скорости содержат динамическую скорость v_* , связанную с касательным напряжением трения τ_w . Для того чтобы формулы были определенными, необходимо найти связь между τ_w , U_{max} и U_{cp} . Эта связь определяется формулой сопротивления трубы турбулентному движению жидкости.

Определяемое этим сопротивлением падение давления Δp на участке длиной L трубы диаметром d может быть выражено формулой

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho U_{cp}^2}{2}, \quad (IV.133)$$

где λ — коэффициент сопротивления.

При равномерном движении жидкости по трубе перепад $\Delta p \frac{\pi d^2}{4}$ уравнивается сопротивлением трения $\tau_w \pi dL$, т. е.

$$\Delta p \frac{\pi d^2}{4} = \tau_w \pi dL.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta p = \tau_w \frac{4L}{d}.$$

Подставляя значение Δp в (IV.133), получим

$$\tau_w = \lambda \frac{\rho U_{cp}^2}{8},$$

откуда

$$v_*^2 = \lambda \frac{U_{cp}^2}{8},$$

или

$$\frac{U_{cp}}{v_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda}. \quad (IV.134)$$

Найдем связь между λ и $R_{cp} = U_{cp}d/v$. Для этого из (IV.130) с помощью тождественного преобразования получим

$$\frac{U_{max} - U_{cp}}{v_*} + \frac{U_{cp}}{v_*} = 5,75 \lg \left(\frac{U_{cp}d}{v} \frac{v_*}{2U_{cp}} \right) + 5,5. \quad (IV.135)$$

Отсюда, используя (IV.132) и (IV.134), найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= \left[5,75 \lg \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{2}} R_{cp} \right) + 5,5 - 3,75 \right] = \\ &= 2 \lg (R_{cp} \sqrt{\lambda}) - 0,8. \end{aligned} \quad (IV.136)$$

Экспериментальные исследования ряда авторов подтверждают эту формулу. Неудобство ее в том, что она дает связь между λ и R_{cp} в неявном виде.

Никурадзе на основе обработки опытных данных получил для коэффициента сопротивления формулу

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{R^{0,237}}. \quad (IV.137)$$

Сопоставление формул (IV.136) и (IV.137) с формулой (III.121) для коэффициента сопротивления при ламинарном течении в трубах показывает, что при турбулентном течении коэффициент сопротивления выше.

Логарифмический профиль скорости и логарифмическая формула сопротивления являются полуэмпирическими соотношениями,

справедливыми в той мере, в какой возможно использование численных значений полуэмпирических констант турбулентности $\kappa = 0,4$ и $\eta_0 = 11,5$ и в какой справедлива идея о существовании ламинарного подслоя и турбулентного ядра при течении в трубе. Наряду с этими формулами — так называемыми универсальными формулами — до настоящего времени широкое распространение имеют чисто эмпирические соотношения, соответствующие эмпирическим степенным профилям скорости

$$\frac{U}{U_{\max}} = \left(\frac{y}{a}\right)^n. \quad (\text{IV.138})$$

Профилям скорости этого типа соответствуют эмпирические формулы для коэффициента сопротивления, также являющиеся степенными зависимостями вида

$$\lambda = c R_{\text{ср}}^{-m}. \quad (\text{IV.139})$$

При этом коэффициенты n , c , m являются функциями числа Рейнольдса. В частности, известная формула Блазиуса, широко используемая в гидравлике и имеющая вид

$$\lambda = \frac{0,3164}{R_{\text{ср}}^{0,25}}, \quad (\text{IV.140})$$

соответствует профилю скорости с $n = 1/7$ и хорошо согласуется с экспериментом до значений $R_{\text{ср}} < 2 \cdot 10^5$.

Используя формулу (IV.138), можно найти для степенных профилей скорости соотношения:

$$\frac{U_{\text{ср}}}{U_{\max}} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}; \quad (\text{IV.141})$$

$$m = \frac{2n}{n+1}; \quad (\text{IV.142})$$

$$c = 2^{\frac{5n+1}{n+1}} \eta_0^{\frac{2(n-1)}{n+1}} [(n+1)(n+2)]^{\frac{2}{n+1}}. \quad (\text{IV.143})$$

Кроме степенного профиля скорости типа (IV.138) часто используется также степенной профиль в координатах u/v_* ; yv_*/ν , имеющий вид

$$\frac{u}{v_*} = A \left(\frac{yv_*}{\nu}\right)^n. \quad (\text{IV.144})$$

Если применить это выражение для границы ламинарного подслоя, где

$$\frac{u}{v_*} = \frac{yv_*}{\nu} = \eta_0,$$

можно получить выражение для A в виде

$$A = \eta_0^{n-1}, \text{ или } \eta_0 = A^{\frac{1}{n-1}}. \quad (\text{IV.145})$$

Экспериментально установлено, что в диапазоне $40 < \frac{yv_*}{v} < 700$ с опытом хорошо согласуется формула

$$\frac{u}{v_*} = 8,74 \left(\frac{yv_*}{v} \right)^{1/7}, \quad (\text{IV.146})$$

в диапазоне $80 < \frac{yv_*}{v} < 1100$ — формула

$$\frac{u}{v_*} = 9,60 \left(\frac{yv_*}{v} \right)^{1/8}. \quad (\text{IV.147})$$

Применим формулу (IV.144) к оси трубы, где $y = a$, $u = U_{\max}$, тогда

$$\frac{U_{\max}}{v_*} = A \left(\frac{av_*}{v} \right)^n = A \left(\frac{U_{\max}a}{v} \right)^n \left(\frac{v_*}{U_{\max}} \right)^n,$$

или

$$\left(\frac{U_{\max}}{v_*} \right)^{n+1} = A \left(\frac{U_{\max}a}{v} \right)^n = A R_{\max}^n. \quad (\text{IV.148})$$

Так как

$$\frac{v_*}{U_{\max}} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho U_{\max}^2}},$$

то

$$\left(\frac{\tau_w}{\rho U_{\max}^2} \right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{A} R_{\max}^{-n},$$

или

$$\tau_w = 2 \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{2}{n+1}} R_{\max}^{\frac{-2n}{n+1}} \rho \frac{U_{\max}^2}{2}.$$

Если обозначить

$$\zeta = \frac{2}{A^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (\text{IV.149})$$

то получим формулу сопротивления

$$\tau_w = \zeta R_{\max}^{\frac{-2n}{n+1}} \rho \frac{U_{\max}^2}{2}. \quad (\text{IV.150})$$

В частности, при $n = 1/7$ и $A = 8,7$ из (IV.150) получится формула

$$\frac{\tau_w}{\rho U_{\max}^2} = 0,0225 R_{\max}^{-1/4}, \quad (\text{IV.151})$$

аналогичная хорошо известной формуле для пластины, соответствующей закону «одной седьмой».

При турбулентном течении в трубе основное изменение скорости, как уже говорилось выше, происходит в тонком пристенном слое, при этом оно слабо зависит от присутствия других стенок. В связи с этим сопротивление труб слабо зависит от конфигурации их поперечного сечения (за исключением угловых областей) и формула (IV.136) хорошо аппроксимирует опытные данные для труб различных некруглых сечений, если только вместо радиуса вводить в формулу так называемый эквивалентный гидравлический радиус

$$a_r = \frac{\text{площадь поперечного сечения}}{\text{периметр}}, \quad (\text{IV.152})$$

для круглой трубы $a_r = d/4$.

В случае, если труба не прямая, а изогнутая, коэффициент сопротивления λ изменяется вследствие возникновения вторичных течений. Для развитого турбулентного течения по рекомендациям работы Ито отношение $\lambda_{\text{из}}$ (изогнутой трубы) к $\lambda_{\text{пр}}$ (прямой трубы) выражается формулой

$$\frac{\lambda_{\text{из}}}{\lambda_{\text{пр}}} = \left[R \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \right]^{0,05}, \quad (\text{IV.153})$$

для ламинарного течения

$$\frac{\lambda_{\text{из}}}{\lambda_{\text{пр}}} = \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{11,6}{R \sqrt{a/r_0}} \right)^{0,45} \right]^{2,22} \right\}^{-1}$$

при

$$11,6 < R \left(\frac{a}{r_0} \right)^{0,5} < 2000.$$

Здесь r_0 — радиус кривизны оси трубы.

При расчете теплоотдачи в трубах до недавнего времени широко использовалась аналогия Рейнольдса, сущность которой заключается в предположении равенства коэффициентов турбулентного обмена импульса и тепла ($E = K$) в уравнениях (IV.40) и (IV.85). Позже оказалось, что такое равенство имеет место только при $Pr = 1$. Аналогия Рейнольдса была впоследствии в соответствии с опытными данными для очень больших и очень малых значений числа Pr уточнена Карманом, Белтером, Мартинелли, и в настоящее время считается, что для трубы, так же как и для пластины,

$$\frac{\tau}{\rho} = (E + \nu) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad \frac{q}{\rho c_p} = (K + a) \frac{\partial T}{\partial y}$$

и что коэффициенты K и E связаны друг с другом, но не равны друг другу. Существующие опытные данные по этому вопросу освещены в п. 20.

В настоящее время имеются аналитические решения для расчета теплоотдачи в круглой трубе, основанные на той или иной модели турбулентного обмена (краткий обзор приведен в работе [108]), однако каждое из этих решений справедливо в узком диапазоне изменения чисел Pr . В связи с этим для практических расчетов правильнее пользоваться частными критериальными уравнениями, апробированными экспериментально. Основные из этих уравнений:

1) для газов при $0,5 < Pr < 1,0$:

$$Nu_q = 0,022R^{0,8}Pr^{0,6}; \quad Nu_T = 0,021R^{0,8}Pr^{0,6}, \quad (IV.154)$$

где Nu_q — соответствует теплообмену при постоянной плотности теплового потока q на поверхности, Nu_T — теплообмену при постоянной температуре стенки;

2) для жидких металлов при $Pr < 0,1$:

$$Nu_q = 6,3 + 0,003R Pr; \quad Nu_T = 4,8 + 0,003R Pr; \quad (IV.155)$$

3) для воды и легких жидкостей при $1 < Pr < 20$

$$Nu_q = Nu_T = 0,0155R^{0,83}Pr^{0,5}, \quad (IV.156)$$

4) для тяжелых жидкостей и масел при $Pr > 20$

$$Nu_q = Nu_T = 0,0118R^{0,9}Pr^{0,3}. \quad (IV.157)$$

Теплоотдача в трубах, так же как и сопротивление, мало зависит от формы поперечного сечения, и практически с удовлетворительной точностью формулы (IV.154)—(IV.157) могут применяться и для труб некруглого сечения при условии замены диаметра трубы в формулах гидравлическим диаметром

$$d_r = 4a_r.$$

Однако некоторые задачи (продольное обтекание пучка труб, течение в трубе с переменной по периметру температурой стенки и др.) такому обобщению не поддаются.

Эксперименты показывают, что при входе потока в трубу в ней не сразу устанавливается стабильное течение. Вследствие влияния условий входа происходят возмущения потока, которые затухают на некотором участке стабилизации. Для ламинарного течения длина участка стабилизации $L_{вх} = 0,06aR$, для турбулентного течения $L_{вх} \approx 2a$ (25÷40). Опыты показывают, что интенсивность теплообмена на начальном участке Nu_x выше интенсивности при стабилизированном течении. На рис. 46 приведены экспериментальные значения интенсивности теплообмена при различных условиях входа, полученные в работе [183] для течения воздуха. Обработка этих данных применительно к средним по длине числам Нуссельта позволила получить формулу

$$\frac{Nu_{cp}}{Nu_{\infty}} = 1 + \frac{c}{\frac{x}{2a}}. \quad (IV.158)$$

При этом коэффициент c определяется условиями на входе:

Развитый турбулентный профиль скорости	1,4
Внезапное сужение	6
Колено с изгибом на 90°	7
Колено с поворотом на 180°	6

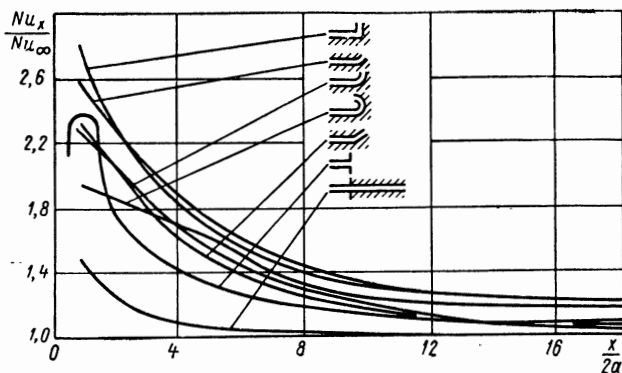


Рис. 46. Локальная теплоотдача на начальном участке круглой трубы при различных условиях входа

В работе [126] в экспериментах с воздухом получено следующее соотношение средних коэффициентов теплоотдачи в изогнутых ($Nu_{ср. из}$) и прямых ($Nu_{ср. пр}$) трубах:

$$\frac{Nu_{ср. из}}{Nu_{ср. пр}} = 1 + 3,5 \frac{a}{r_0}. \quad (IV.159)$$

Здесь a — радиус трубы; r_0 — радиус поворота.

23. Турбулентное течение вдоль шероховатых труб и пластин

В практике обычно не встречается абсолютно гладких труб, все они являются в той или иной степени шероховатыми, однако в ряде случаев шероховатую трубу можно считать аэродинамически гладкой и влияние шероховатости не учитывать.

Обычно при рассмотрении течения вдоль шероховатых поверхностей вводят понятие равномерно распределенной зернистой шероховатости с высотой бугорка k . Абсолютное значение k (в мм) обычно называется абсолютной шероховатостью, а отношение его к радиусу трубы k/a — относительной.

Подробное исследование турбулентного течения в шероховатых трубах было проведено Никурадзе. На рис. 47 приведены полученные в этих опытах значения коэффициентов сопротивления λ .

Из рассмотрения этих кривых можно сделать следующие выводы.

1. Относительная шероховатость не влияет на значение R_n и на развитие процесса в переходном режиме.

2. При турбулентном течении наступает режим, когда сопротивление начинает определяться только значением относительной шероховатости κ/a и не зависит от R , причем чем больше κ/a , тем раньше наступает этот режим, чем меньше κ/a , тем до больших значений числа R сохраняется обычная для гладких труб зависимость $\lambda = \lambda(R)$. В автомодельном относительно R режиме величина λ тем больше, чем больше κ/a . Физически такой характер зависимости был объяснен из сопоставления величин абсолютной

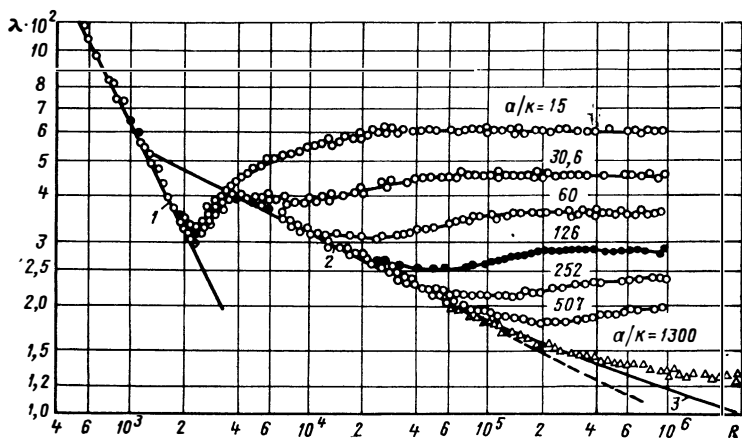


Рис. 47. Коэффициенты сопротивления при движении в шероховатых трубах:

$$1 - \lambda = \frac{64}{R}; \quad 2 - \lambda = \frac{0,3164}{R^{0,25}}; \quad 3 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(R \sqrt{\lambda}) - 0,8$$

шероховатости κ и толщины ламинарного подслоя δ_l . Очевидно, могут быть рассмотрены три предельных случая:

1) $\kappa \ll \delta_l$ — бугорки шероховатости тонут в ламинарном подслое, и шероховатая труба практически является гладкой;

2) $\kappa \gg \delta_l$ — бугорки шероховатости выходят за пределы ламинарного подслоя, обтекание их становится отрывным, и сопротивление поверхности трубы движению жидкости внутри нее практически определяется сопротивлением плохообтекаемых тел, не зависящим от числа R и пропорциональным скоростному напору; такой режим обтекания называется режимом развитой шероховатости;

3) $\kappa \approx \delta_l$ — промежуточный режим, когда наблюдается совместное влияние и шероховатости, и трения.

При построении полуэмпирической теории турбулентного течения в шероховатых трубах вводится допущение

$$\frac{\tau_w}{\rho u_{\kappa}^2} = f\left(\frac{\kappa u_{\kappa}}{v}\right). \quad (IV.160)$$

При этом под τ_w подразумевается суммарное сопротивление бугорков шероховатости, отнесенное к единице поверхности; u_κ — некоторая условная средняя скорость на уровне границы бугорков шероховатости; величина $\kappa u_\kappa / \nu$ играет роль некоторого условного числа Рейнольдса при обтекании бугорков.

Соотношение (IV.160) может быть преобразовано к виду

$$\frac{v_*^2}{u_\kappa^2} = f \left(\frac{\kappa v_*}{\nu} \frac{u_\kappa}{v_*} \right), \quad (\text{IV.161})$$

или

$$\frac{u_\kappa}{v_*} = \Phi \left(\frac{\kappa v_*}{\nu} \right). \quad (\text{IV.162})$$

Вид функции Φ заранее неизвестен и определяется экспериментально. Очевидно, для внешней области вплоть до границы бугорков шероховатости справедливы все допущения о турбулентном течении в трубе. В частности, профиль скорости [см. (IV.50)]

$$u = \frac{2,3}{\kappa} v_* \lg y + C$$

может быть конкретизирован с учетом граничного условия: $u = u_\kappa$ при $y = \kappa$. Тогда распределение скоростей при турбулентном течении в трубе примет вид

$$\frac{u}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y}{\kappa} + \frac{u_\kappa}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y}{\kappa} + \Phi \left(\frac{\kappa v_*}{\nu} \right). \quad (\text{IV.163})$$

Применяя (IV.163) к оси трубы и используя (IV.132), (IV.134), можно получить формулу сопротивления

$$3,75 + \frac{2\sqrt{2}}{\lambda} - 5,75 \lg \frac{a}{\kappa} = \Phi \left(\frac{\kappa v_*}{\nu} \right). \quad (\text{IV.164})$$

Таким образом, функция Φ может быть определена не только экспериментально, но и расчетным путем или по формуле (IV.163) из анализа профилей скорости, или по формуле (IV.164) из анализа данных по сопротивлению шероховатых труб.

Экспериментальные данные Никурадзе позволили произвести такой двойной анализ и установить вид функции Φ для двух предельных режимов (*I* и *III*) из трех наблюдавшихся (рис. 48).

Для режима *I* — режима гладкой трубы

$$\Phi \left(\frac{\kappa v_*}{\nu} \right) = 5,75 \lg \left(\frac{\kappa v_*}{\nu} \right) + 5,5. \quad (\text{IV.165})$$

Этот режим имеет место при

$$\lg \left(\frac{\kappa v_*}{\nu} \right) < 0,47, \text{ или } \frac{\kappa v_*}{\nu} < 3. \quad (\text{IV.166})$$

Из этих соотношений находится предельная высота бугорков шероховатости, при которой шероховатую трубу можно рассматривать как гладкую:

$$\frac{\kappa}{a} < \frac{16,3}{R(0,0032 + 0,221R^{-0,237})^{0,5}} \quad (IV.167)$$

Для режима III — режима развитой шероховатости

$$\Phi\left(\frac{\kappa v_*}{\nu}\right) = \text{const} = 8,48. \quad (IV.168)$$

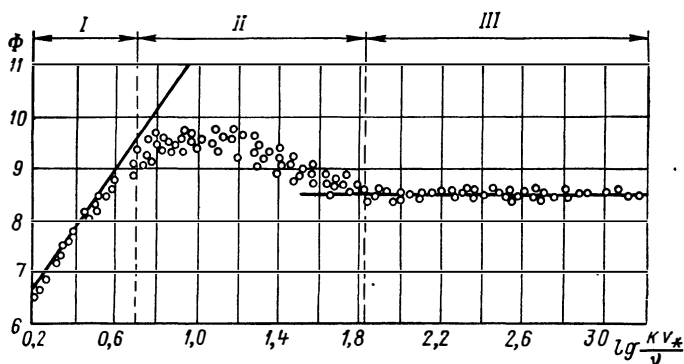


Рис. 48. Функция Φ по опытным данным Никурадзе:
I — режим гладкой трубы; II — переходный режим; III — режим развитой шероховатости

Область существования этого режима определяется условиями:

$$\lg\left(\frac{\kappa v_*}{\nu}\right) > 1,8; \quad \frac{\kappa v_*}{\nu} > 60; \quad (IV.169)$$

$$\kappa/\delta_{л} < 6, \quad (IV.170)$$

или

$$\frac{\kappa}{a} > \frac{390}{R(0,0032 + 0,221R^{-0,237})^{0,5}} \quad (IV.171)$$

Очевидно, для этого предельного режима профиль скорости определяется выражением

$$\frac{u}{v_*} = 5,75 \frac{y}{\kappa} + 8,48. \quad (IV.172)$$

Формула сопротивления после элементарных преобразований (IV.164) приобретает вид

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{a}{\kappa} + 1,74\right)^2} \quad (IV.173)$$

Универсальный закон сопротивления, охватывающий все три области, был получен в работе [184] в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 - 2 \lg \left(\frac{\kappa}{a} + \frac{18,7}{R \sqrt{\lambda}} \right). \quad (\text{IV.174})$$

Зависимость от шероховатости коэффициента сопротивления плоской пластины имеет такой же характер, как для шероховатых труб. Для области развитой шероховатости, когда сопротивление не зависит от числа Рейнольдса и определяется только ше-

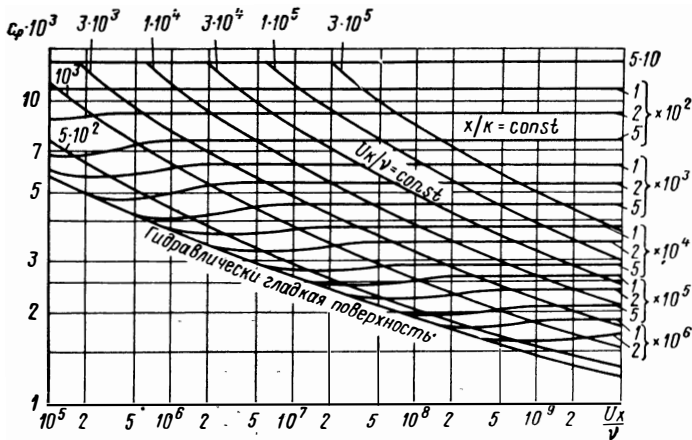


Рис. 49. Локальный коэффициент сопротивления трения для шероховатой пластины

роховатостью, в работе Дробленкова предложен эмпирический степенной закон сопротивления

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0,0031 \left(\frac{\delta^{**}}{\kappa} \right)^{-1/6}, \quad (\text{IV.175})$$

или после преобразований

$$c_f = \frac{\tau_w}{0,5\rho U^2} = 0,0139 \left(\frac{x}{\kappa} \right)^{-1/7}. \quad (\text{IV.176})$$

Более обобщенная закономерность получается при использовании логарифмического профиля скорости в пограничном слое пластины. На рис. 49 приведена номограмма для расчета локального коэффициента сопротивления шероховатой пластины. Два типа кривых нанесены на этих рисунках для удобства пользования.

В практике часто бывает очень важно знать, какова должна быть чистота обработки поверхности той или иной детали, для того чтобы поверхность можно было считать технической гладкой и не учитывать увеличения сопротивления, обусловленного

шероховатостью. Анализ опытных данных показал, что в диапазоне $R = 10^5 \div 10^9$ допустимая величина шероховатости

$$\kappa_{\text{доп}} \leq 100 \frac{\nu}{U}, \quad (\text{VI.177})$$

или

$$\frac{\kappa_{\text{доп}}}{l} \leq \frac{100}{R}, \quad (\text{IV.178})$$

где l — длина пластины; $R = u_{\infty} l / \nu$.

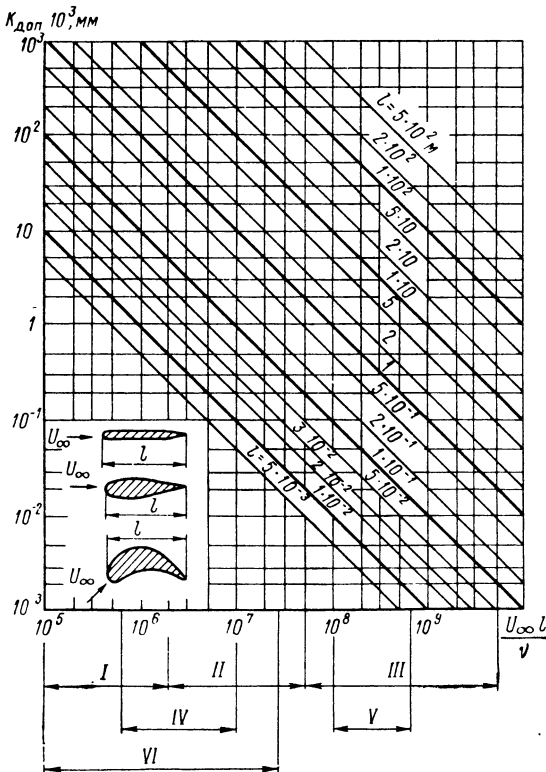


Рис. 50. Допустимая шероховатость для пластин, крыльев и лопаток:

I — лопатки воздуховодов; *II* — лопатки самолетов;
III — корпуса кораблей; *IV* — лопатки паровых турбин;
V — корпуса дирижаблей; *VI* — аэродинамические трубы

Эта формула оказывается справедливой, как показали опыты, не только для пластин, но и для турбинных и компрессорных лопаток, для корпусов кораблей, крыльев самолетов и других хорошо обтекаемых тел. На рис. 50 приведена серия кривых, представляющих собой результаты расчетов по формуле (IV.178). В табл. 5

Профиль	l , м	u_{∞} , м/с	p/t , ата/°С	$10^6 v$	R	$\kappa_{\text{доп}}$, мм
Крыло самолета	4	166	1/15	15	$5 \cdot 10^7$	0,01
Лопатка воздухо- дувки	0,1	150	1/15	15	10^6	0,01
Лопатки паровой турбины	0,01	200	100/300	0,4	$5 \cdot 10^6$	0,0002
	0,01	200	100/500	0,8	$2,5 \cdot 10^6$	0,0005
	0,1	400	5/200	8	$5 \cdot 10^6$	0,0020

приведены результаты расчетов по этой формуле для нескольких конкретных случаев [167].

Как видно, допустимая величина шероховатости для лопаток паровых турбин весьма мала и практически неосуществима. Если учесть еще неизбежность возникновения на поверхности лопаток отложений солей и коррозии, то практически следует всегда считать поверхность лопаток паровых турбин шероховатой.

Влияние шероховатости на теплообмен изучено только экспериментально и только при $Pr \approx 1$. В опытах [223] с воздухом получено соотношение

$$\frac{Nu_{\text{ш. тр}}}{Nu_{\text{гл. тр}}} = \left(\frac{\lambda_{\text{ш. тр}}}{\lambda_{\text{гл. тр}}} \right)^{0,5}. \quad (\text{IV.179})$$

Индекс ш. тр относится к шероховатым трубам; индекс гл. тр — к гладким.

По-видимому, при $Pr \ll 1$ (жидкие металлы) доминирующим в теплообмене будет молекулярный перенос тепла, и тогда, так же как при ламинарном течении, влияние шероховатости на теплообмен будет незначительным. При $Pr \gg 1$, когда основное термическое сопротивление сосредоточено в подслое, влияние возмущений, вызываемых шероховатостью, должно быть значительным. Кроме таких качественных оценок в литературе не имеется каких-либо более конкретных количественных рекомендаций.

24. Теплообмен на вращающемся диске при турбулентном режиме течения

Задача о формировании пограничного слоя и о теплообмене на вращающемся диске имеет большое практическое значение, особенно для турбомашин. Представляют интерес две постановки задачи: исследование сопротивления и теплообмена при вращении

диска в свободном пространстве (свободный диск) и при вращении диска в кожухе.

При вращении диска в неограниченном пространстве часть жидкости, находящаяся в непосредственной близости у диска, увлекается им и под действием центробежной силы отбрасывается к периферии. Таким образом, скорость в пограничном слое имеет не только окружную, но и радиальную составляющую. Оценка, основанная на рассмотрении равновесия между силами трения и центробежными, показывает, что в случае ламинарного течения толщина пограничного слоя δ не зависит от радиуса r и пропорциональна $(\nu/\omega)^{0,5}$; для турбулентного пограничного слоя величина δ увеличивается по мере удаления от оси вращения:

$$\delta = 0,526r \left(\frac{\nu}{r^2\omega} \right)^{0,2}. \quad (\text{IV.180})$$

В гл. III были рассмотрены результаты исследований ламинарного пограничного слоя на диске.

Экспериментальные исследования показывают, что переход от ламинарного режима течения в пограничном слое к турбулентному начинается при $R_L \approx 1,8 \cdot 10^5$, полностью турбулентное течение устанавливается при $R_L \approx 2,8 \cdot 10^5$. С увеличением шероховатости критическое значение числа R_L уменьшается.

В работе Крейца [97] приведен полуэмпирический метод решения системы уравнений для турбулентного пограничного слоя на вращающемся в неограниченном пространстве диске, основывающийся на предположении о допустимости применения обычных упрощений пограничного слоя для рассматриваемой задачи и выполнения условий

$$\begin{aligned} Pr = 1; \quad E = K; \quad \frac{d^2\bar{T}}{d(r\bar{\omega})^2} &= -(c_p r^2)^{-1}; \quad r(x) = x \sin \alpha; \\ \bar{\omega} &= x\omega \sin \alpha \end{aligned}$$

на поверхности диска. В результате решения получено соотношение

$$\frac{Nu}{R Pr} = \frac{c_f}{2}, \quad (\text{IV.181})$$

которое при степенном законе изменения температуры

$$T_w - T_\infty = Bx^n \quad (\text{IV.182})$$

приобретает вид

$$Nu = 0,0212 (n + 2,6)^{0,2} R^{0,8}. \quad (\text{IV.183})$$

Локальный коэффициент сопротивления трению для этого случая

$$c_f = \frac{\sin^2 \alpha (5 + 2n)}{4\pi} c_M, \quad (\text{IV.184})$$

где c_M — коэффициент момента, который для полностью турбулентного течения может быть определен по полуэмпирической формуле

$$c_M = 0,15R_L^{-0,2},$$

дающей хорошее совпадение с экспериментом при $R_L = (3 \div 20)10^5$.
Средний коэффициент теплоотдачи

$$\overline{Nu} = Pr R_L \frac{c_M}{2\pi \sin^2 \alpha}.$$

В работе [45] для локального коэффициента теплоотдачи при $Pr \neq 1$ получена формула

$$Nu_x = \frac{0,5Pr R c_f}{1 + \sqrt{0,5c_f} [5Pr + 5 \ln(5Pr + 1) - 14]}. \quad (IV.185)$$

Рабочие колеса турбомашин обычно вращаются в довольно узких кожухах: $2\delta \ll a$ (2δ — ширина кожуха; a — радиус диска).

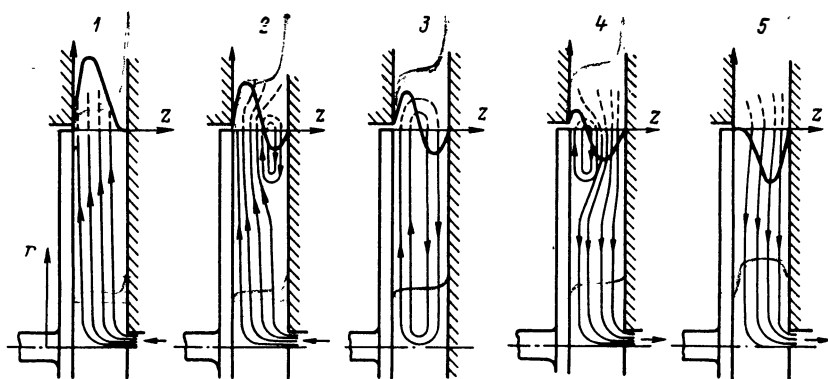


Рис. 51. Режимы течения, возникающие в зазоре между вращающимся и неподвижным дисками

Если величина δ не очень мала, то момент сил трения в этом случае не зависит от ширины зазора δ .

В случае вращения диска в кожухе характер течения существенно отличается от характера течения при вращении диска в свободном пространстве. На рис. 51 показаны типичные режимы течения (1—5), возникающие в сравнительно узком незамкнутом зазоре между вращающимся и неподвижным дисками. Режимы 1, 4 соответствуют большим расходам, 2, 5 — малым расходам, недостаточным для заполнения всего зазора. Режим 3 соответствует чисто рециркуляционному режиму течения. Тип течения в зазоре в этом случае зависит от числа Рейнольдса $R_a = \rho\omega(2a)^2/\nu$

(здесь $2a$ — диаметр диска) и от отношения ширины зазора к диаметру диска δ/a . На рис. 52 приведены экспериментальные данные Крейца по изменению отношения среднего числа \overline{Nu} для диска

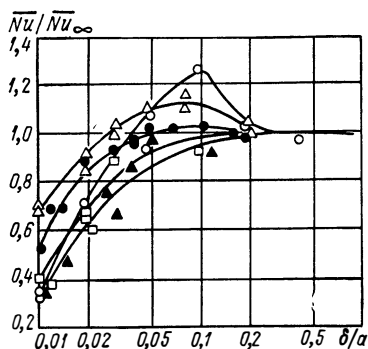


Рис. 52. Зависимость отношения $\overline{Nu}/\overline{Nu}_\infty$ от относительной ширины зазора δ/a при следующих значениях R_a :

○ — $4,45 \cdot 10^5$; △ — $2,96 \cdot 10^5$; ● — $1,19 \cdot 10^5$;
 □ — $0,296 \cdot 10^5$; ▲ — $0,146 \cdot 10^5$

в кожухе к числу \overline{Nu}_∞ для диска, вращающегося в свободном пространстве, в зависимости от R_a и δ/a .

Теплообмен при турбулентном движении с источником (режимы 1, 2 на рис. 51) исследован в работе Капиноса для случая, когда один диск вращается, а другой неподвижен [85], и для двух вращающихся дисков. При аналитическом решении предполагалось, что ширина зазора достаточна для того, чтобы пограничные слои, образовавшиеся на вращающихся и неподвижных поверхностях, не смыкались. Поток в источнике предполагался незакрученным. Профили скорости в турбулентном пограничном слое выбирались таким образом, чтобы при нулевом расходе из источника они удовлетворяли условиям течения у свободного диска.

Формула для расчета среднего коэффициента теплоотдачи была получена в виде

$$\overline{Nu} = \frac{\alpha 2a}{\lambda} = 0,268 \frac{\delta}{a} R_a^{0,8} \frac{\bar{x}^{0,8}}{\left(\frac{a}{r_i}\right)^{0,6} \left[\left(\frac{a}{r_i}\right)^{0,4} - 1\right]}. \quad (\text{IV.186})$$

Здесь

$$\bar{x} = \int_0^{\frac{r_0}{r_i}} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{4,75} \left[1 + \left(0,162 \frac{R_s r_i^2}{R_a a^2}\right)^2\right]^{0,375} \times \\ \times \left(0,162 + 1,4 \frac{R_s r_i^2}{R_a a^2}\right)^{0,25} d\left(\frac{r}{r_i}\right). \quad (\text{IV.187})$$

Экспериментальные данные при отношении радиуса диска a к радиусу входного отверстия в диске r_i порядка $a/r_i \approx 2,7$ и при $R_a = (5 \div 40) 10^5$; $R_a/R_s = 0,6 \div 7,0$; $\delta/a = 0,008 \div 0,0375$ аппроксимируются формулой

$$\overline{Nu} = 0,035 R_a^{0,7} R_s^{0,1} \left(\frac{r_i}{a}\right)^{0,3} \left(\frac{2\delta}{a}\right)^{1,06}. \quad (\text{IV.188})$$

Для дисков большего размера экспериментально была обнаружена [97] нечувствительность к изменению числа Рейнольдса вращательного движения R_a и получена эмпирическая формула

$$\overline{Nu} = 1,98 \left(\frac{\delta}{a} \right) R_s^{0,625}, \quad (IV.189)$$

справедливая при $R_s = (0,24 \div 1,0) 10^5$ и значениях R_a/R_s , равных 1,9; 3,65; 7,2.

При $R_a/R_s \approx 0$ и $a/r_i \gg 1$ эти данные аппроксимируются формулой

$$\overline{Nu} = 2,46 \left(\frac{\delta}{a} \right)^{1,6} R_s^{0,8}. \quad (IV.190)$$

Для этих же условий результаты расчета по формуле Капиноса (для малых дисков) аппроксимируются формулой

$$\overline{Nu} = 0,1 \frac{\delta}{a} R_s^{0,8}. \quad (IV.191)$$

Как видно, эти формулы дают существенно различные значения и нуждаются, по-видимому, в дальнейшей экспериментальной апробации. Вследствие сложности характера течения жидкости в междисковом зазоре и невыявленности физической модели и влияния на теплообмен всех факторов, важных для этого процесса, следует особо подчеркнуть возможность использования формул, полученных различными исследователями, только в том диапазоне изменения параметров, которые были в экспериментах, и только для исследованных конкретных конструктивных модификаций.

Задача о теплообмене для случая двух вращающихся дисков решена в работе Капиноса в приближенной постановке. В настоящее время не имеется опытных данных, которые могли бы быть использованы для апробации полученных расчетных формул.

Значительный интерес представляют задачи определения коэффициентов теплоотдачи от диска к охлаждающему воздуху при струйном обдуве, так как в ряде конструкций газовых турбин применяется именно эта система охлаждения дисков. Теоретических решений для этой задачи при турбулентном обтекании до настоящего времени не имеется, эмпирические соотношения были получены для частных случаев обдува диска малым [99] и большим [50] числом дискретных струй и кольцевой струей [101]. Для случая обдува диска малым числом струй ($z = 2 \div 8$) имеется два типа формул. Для зоны, расположенной на радиусе обдува,

$$Nu_1 = AR_c^{0,8} \left[1 + b \left(\frac{u}{c_0} \right)^{0,8} \right].$$

Здесь

$$A = 0,0542^{0,85} \frac{2a}{r_1} \exp [-0,1836 (y - 0,5)];$$
$$b = \frac{0,5 (y - 0,5)}{z},$$

где r_1 — радиус обдува; $y = (r - r_1)/d$; r — текущий радиус; d — диаметр сопел; u — окружная скорость диска на радиусе обдува; c_0 — средняя расходная скорость истечения воздуха из сопел; $Nu = \alpha d/\lambda$; $R_c = c_0 d/v$.

Эта же формула справедлива для зоны, расположенной выше радиуса обдува.

Для зоны, расположенной ниже радиуса обдува,

$$Nu = Nu_1 \exp [-0,1836 (y - 0,5)].$$

Обе эти формулы справедливы в исследованном диапазоне изменения параметров: $R_c = (2,5 \div 23,0) 10^4$; $u/c_0 = 0,0037 \div 0,965$; $d/r_1 = 0,0193 \div 0,0386$; $z = 2 \div 8$; $d = 4 \div 8$ мм; $r_1 = 170 \div 243$ мм. Физические константы в формулах относились к заторможенной температуре воздуха на выходе из сопел.

25. Расчет турбулентного пограничного слоя при наличии поперечного потока вещества

За последние 10—15 лет очень интенсивно начали развиваться исследования пограничного слоя при наличии поперечного потока от поверхности в пограничный слой. Объясняется это тем, что при интенсивном разогреве поверхности в случае обтекания ее высокотемпературным газом или при движении с очень большими сверхзвуковыми скоростями (явление аэродинамического нагрева) эффективными средствами защиты поверхности оказались покрытие ее теплозащитными веществами, уносимыми или разлагающимися при разогреве, или подача различных охлаждающих газов через пористую стенку. Первый тип тепловой защиты нашел широкое применение при создании ракет и космических аппаратов, для которых используются конструктивные пластики, составленные на основе терморепактивных фенольно-формальдегидных и эпоксидных смол с армированием текстолитом, асбестом, кремнием, нейлоном и другими материалами.

Материалы типа полиэтилена, органического стекла, тефлона и т. п. разлагаются при температурах примерно 1000 К. В результате этого разложения в пограничный слой начинают интенсивно поступать газы, обладающие различными молекулярными весами, которые создают эффект вдувания, уменьшая тепловые потоки к поверхности.

При проработке конструкций высокотемпературных газовых турбин в ряде иностранных фирм широко применяется так назы-

ваемое испарительное (иначе транспираторное или пористое) охлаждение лопаток, которое связано с подачей в пограничный слой лопатки через специальные отверстия или поры на ее поверхности холодных газов.

Присутствие поперечного потока в пограничном слое, вызванное вдувом, сублимацией или испарением, оказывает значительное влияние на структуру пограничного слоя и процессы обмена в нем. Это влияние должно быть тем больше, чем интенсивнее поперечный поток вещества. Опыты показывают, что вдувание, как правило, приводит к уменьшению трения и теплового потока на стенке. Возникает так называемый эффект блокировки.

Проблема теплообмена в турбулентном пограничном слое при наличии массообмена еще более сложна, чем в случае непроницаемой поверхности, поэтому в настоящее время получены лишь первые теоретические и экспериментальные данные в этой области, которые в некоторых случаях противоречивы и неясны и требуют дальнейших исследований. Исследованы в основном только вопросы, связанные с безградиентным обтеканием пластины.

Решение задачи о пограничном слое со вдувом возможно в настоящее время только в приближенной полуэмпирической или эмпирической постановке.

Большинство полуэмпирических методов расчета строится на допущении о возможности обобщения формул Прандтля и Кармана (с логарифмическим профилем скорости) или использования степенных профилей скорости в пограничном слое при наличии массообмена.

Обычно принимается, что напряжение трения в пограничном слое

$$\tau = \tau_w + (\rho v)_w u,$$

или

$$\tau = \tau_w (1 + Bi), \quad (IV.192)$$

где $(\rho v)_w$ — массовый поток вещества на поверхности.

Это допущение равносильно допущению о постоянстве поперечного расхода в сечении пограничного слоя, что не соответствует действительности, как это видно из рис. 53, на котором представлены опытные данные, полученные в работе [254], по распределе-

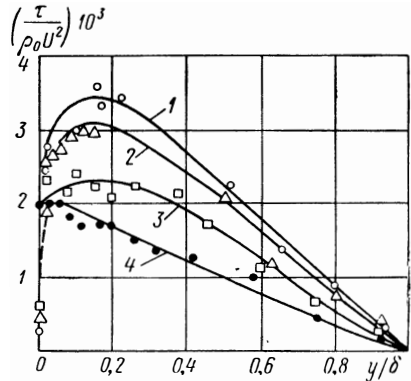


Рис. [53]. Распределение $\tau/(\rho_0 U^2)$ поперек пограничного слоя при следующих значениях параметра вдува B :

1 — 20; 2 — 10; 3 — 5; 4 — 0

нию $\tau/(\rho_0 U^2)$ поперек пограничного слоя при различных значениях параметра вдува

$$B = \frac{\rho_w v_w U}{\tau_w}. \quad (\text{IV.193})$$

Как видно из рисунка, с увеличением параметра вдува максимальное значение сопротивления перемещается от стенки в пристенный пограничный слой. Опытные данные в пристенной области (примерно до $u \leq 0,6$) аппроксимируются формулой (IV.192).

Использование соотношения (IV.192) позволяет получить из формул Прандтля и Кармана следующие выражения для профиля скоростей в турбулентном ядре пограничного слоя [110]:

$$\eta = \frac{1}{c_4} \exp \left[\kappa \zeta \int \left(\frac{\rho}{\rho_w} \frac{1}{1 + B\bar{u}} \right)^{0,5} d\bar{u} \right]; \quad (\text{IV.194})$$

$$\eta = \frac{1}{c_5} + c_6 \zeta \int \exp \left[\kappa \zeta \int \left(\frac{\rho}{\rho_w} \frac{1}{1 + B\bar{u}} \right)^{0,5} d\bar{u} \right] d\bar{u}, \quad (\text{IV.195})$$

где c_4 , c_5 , c_6 — постоянные интегрирования;

$$\eta = \frac{y v_*}{v_w}; \quad \zeta = \frac{U}{v_*}; \quad \bar{u} = \frac{\varphi}{\zeta}; \quad \varphi = \frac{u}{v_*}.$$

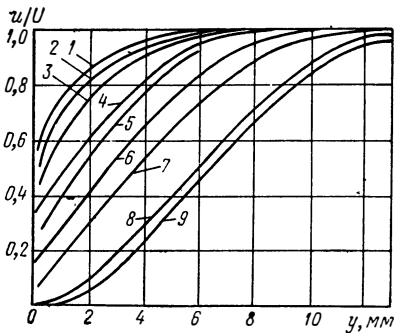
Из этих выражений можно получить уравнения для δ^{**} . Работы различных авторов отличаются друг от друга методами интегрирования этих уравнений и выбором значений постоянных интегрирования c_i . Имеется ряд теоретических работ в этом направлении, анализ которых приведен в [110].

Практическое использование всех этих решений затруднено громоздкостью и трудоемкостью расчетов, поэтому наибольший интерес для практических целей имеют эмпирические соотношения и данные экспериментальных исследований.

На рис. 54 приведены полученные в работе [190] профили скорости в пограничном слое пластины при различных интенсивностях вдува.

Рис. 54. Профили скорости в пограничном слое пластины при следующих значениях интенсивности вдува v_w/U :

1 — 0; 2 — 0,00195; 3 — 0,00390; 4 — 0,00798; 5 — 0,00993; 6 — 0,0159; 7 — 0,0202; 8 — 0,0267; 9 — 0,0293



интенсивностях вдува, характеризующимся отношением скорости вдувания v_w к скорости потока на внешней границе пограничного слоя U . Как видно, с увеличением интенсивности вдува профили скорости становятся все менее заполненными и при $v_w/U > 0,02$ они деформируются, образуя перегиб, и $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \rightarrow 0$.

В работе [190] измерялись также коэффициенты теплоотдачи в интервале изменения параметров $0 \leq M \leq 3,7$; $10^5 \leq R \leq 10^7$; $T_w/T_0 = 0,5 \div 1,0$. На рис. 55, а приведены отношения теплового потока через поверхность пластины q_w к тепловому потоку непроницаемой пластины $(q_w)_{B=0}$ от параметра вдува, характеризующего

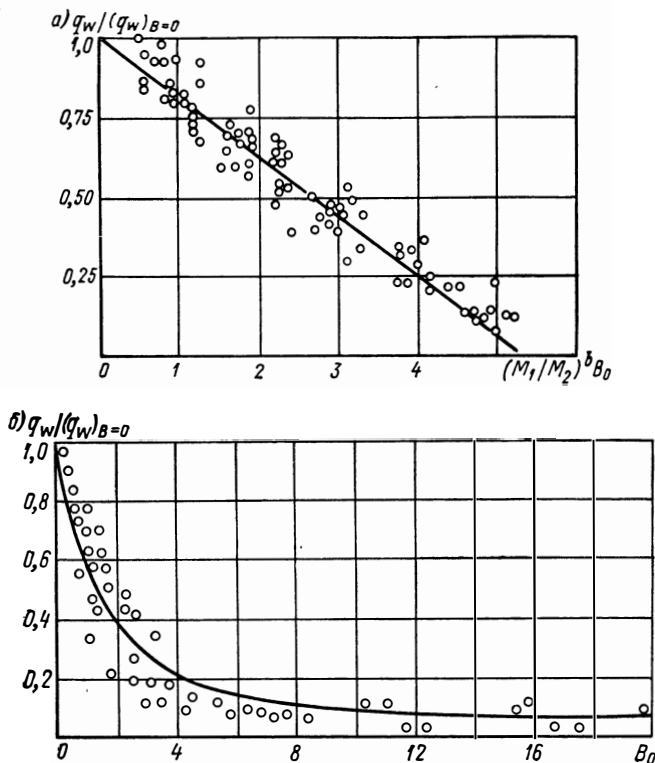


Рис. 55. Изменение теплового потока через поверхность при изменении параметра вдува: а — для пластины; б — для конуса

мого отношением молекулярных весов воздуха на внешней границе пограничного слоя M_1 и вдуваемого газа M_2 , умноженным на параметр

$$B_0 = \frac{\rho_w v_w}{\rho_0 U St_{B=0}},$$

где

$$B = \frac{\rho_w v_w}{\rho_0 U St}.$$

Линия на рис. 55, а соответствует соотношению

$$\frac{q_w}{(q_w)_{B=0}} = 1 + 0,19 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^b B_0. \quad (\text{IV.196})$$

Показатель степени в этой формуле: $b = 0,35$ при $0,2 < M_1/M_2 < 1$; $b = 0,7$ при $1 < M_1/M_2 < 8$; $b = 1$ при $M_1/M_2 = 14,5$.

Формула (IV.196) справедлива только в исследованном экспериментально диапазоне изменения параметров, в том числе при $q_w/(q_w)_{B=0} \geq 0,1$.

Как видно из расположения опытных точек, величину теплового потока, поступающего к стенке, можно уменьшить за счет вдува в десять раз.

На рис. 55, б приведена аналогичная зависимость, полученная экспериментально в работе [190] при исследовании обтекания

конуса: $M = 5,3$; $M = 8,1$; вдуваемый газ — воздух ($M_1/M_2 = 1$); $0 \leq B_0 \leq 20$. Опытная кривая аппроксимируется зависимостью

$$\frac{q_w}{(q_w)_{B=0}} = \left[\left(\frac{1}{2} B_0 \right)^2 + 1 \right]^{0,5} - \frac{1}{2} B_0. \quad (\text{IV.197})$$

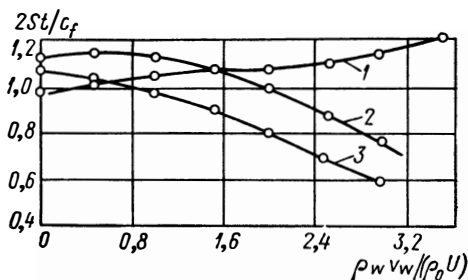


Рис. 56. Зависимость фактора аналогии Рейнольдса от вдува:

1 — $M = 0,7$; $R_x = 2,24 \cdot 10^6$; 2 — $M = 4,35$; $R_x = 2,35 \cdot 10^6$; 3 — $M = 3,67$; $R_x = 3,96 \cdot 10^6$

Экспериментальные исследования показывают, что влияние вдува на теплоотдачу и сопротивление пластины различно, с увеличением вдува нарушается аналогия Рейнольдса и параметр $S = 2St/c_f$ начинает очень сильно отличаться от единицы, причем абсолютные значения параметра S сильно зависят от числа M . На рис. 56 приведено несколько опытных кривых, полученных в работе [224] при вдувании воздуха.

Для расчета изменения коэффициента сопротивления трения при

$$\frac{\rho_w v_w}{\rho_0 (v_*)_{B=0}} \leq 0,08$$

в работе [110] приводится формула, обобщающая экспериментальные результаты некоторых авторов:

$$\frac{\tau_w}{(\tau_w)_{B=0}} = \exp \left[-6,94 \frac{\rho_w v_w}{\rho_0 U} \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho_0} \frac{2}{(c_f)_{B=0}}} \left(1 + \sqrt{\frac{(\tau_w)_{B=0}}{\tau_w}} \right) \right]. \quad (\text{IV.198})$$

Механизм воздействия вдува на пограничный слой и механизм массообмена в настоящее время нельзя считать полностью ясным. В этой области имеется ряд спорных вопросов, в том числе спорным является вопрос о механизме движения в пограничном слое. Некоторые авторы [106, 130, 132] считают, что при сильных вдувах происходит полное оттеснение пограничного слоя основного

потока вдуваемым потоком. В работах [106, 130] приводится критическое значение параметра вдува, при котором возникает отеснение:

$$b_{кр} = 3.$$

Здесь $b_{кр} = B(1 + 0,25b)^{-0,4}$; величина B определяется по формуле (IV.193).

В работе [132] приведены интерферограммы течения в пограничном слое пластинки малых размеров при вдуве в ее погранич-

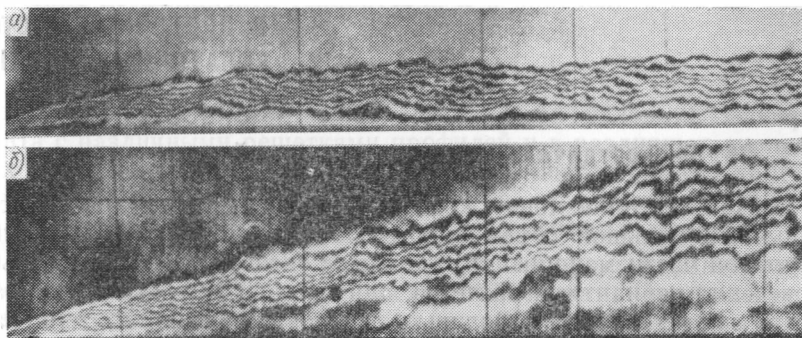


Рис. 57. Интерферограммы движения в пограничном слое пластины при вдуве:

a — вдув малой интенсивности; *б* — вдув большой интенсивности

ный слой CO_2 , He, Kг, фреона-12, Xe (рис. 57). На основании этих исследований авторы также определяют значение $b_{кр}$.

Однако ряд исследователей считает, что полного отеснения не возникает. Из теоретического решения [110], основанного на законе изменения трения в подслое, получается формула для предельного значения

$$c_m = \frac{\rho w^2 w}{\rho U},$$

при котором трение на стенке равно нулю:

$$c_{m \text{ пред}} = \frac{c_f}{2} \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{d\bar{u}}{\bar{u}}} \right)^2. \quad (\text{IV.199})$$



КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОБМЕН ПРИ ДВИЖЕНИИ ОДНОФАЗНЫХ СРЕД В ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ЛОПАТОЧНЫХ МАШИН

26. Теплоотдача в решетках профилей

При создании новых конструкций турбомашин приходится выполнять большой объем работы по выбору и формированию проточной части машины. Этот процесс связан с необходимостью проведения вариантных расчетов, для которых нужно знать показатели эффективности различных лопаточных решеток, температурные поля в элементах статора и ротора, показатели эффективности систем охлаждения охлаждаемых элементов проточной части и т. д. Обычно эти данные берутся из специально поставленных экспериментальных исследований. Объем необходимых экспериментов при проектировании турбин зачастую бывает настолько большим, что требует значительных затрат времени и средств. В настоящее время такую организацию работы вряд ли можно считать целесообразной, так как широкое развитие вычислительной техники и быстродействующих ЭВМ позволяет ставить вопрос о возможности замены целого ряда экспериментов аналитическими расчетами, ранее не применявшимися в силу своей трудоемкости. Применение ЭВМ позволит с помощью этих методов в очень сжатые сроки провести такое широкое аналитическое исследование, какое практически неосуществимо экспериментально. Следует, однако, подчеркнуть, что при использовании расчетных методов очень важно иметь отчетливое представление о пределах применимости каждого метода расчета и о точности получаемых результатов.

При дозвуковом обтекании решетки профилей охлаждаемых лопаток система дифференциальных уравнений, определяющих течение газа в межпрофильном канале, позволяет отдельно выполнять расчет потенциального обтекания решетки и получать на его основе распределение скорости и давлений вдоль обвода профиля, а затем определять теплоотдачу и сопротивление из расчета теплового и динамического пограничных слоев. Как было видно из предыдущей главы, даже в этом простом случае, являю-

щемся типичным случаем градиентного обтекания поверхности, расчет пограничного слоя обладает определенными трудностями и громоздкостью, в результате чего при проработке различных вариантов обводов лопаточных профилей и их систем охлаждения до недавнего времени наблюдалось стремление к использованию простых степенных эмпирических формул несмотря на недоказанность возможности их использования в том или ином случае.

В частности, при расчете теплоотдачи в проточной части эта тенденция выражается в стремлении вводить в расчеты среднее значение коэффициента теплоотдачи $\bar{\alpha}$ и определять его из эмпирических соотношений типа

$$\bar{Nu} = cR^n. \quad (V.1)$$

Эти соотношения, получаемые в различных условиях эксперимента с различными решетками профилей и в различных диапазонах изменения числа Рейнольдса R , отличаются обычно друг от друга значениями коэффициентов c и n , и расчеты по разным формулам дают зачастую существенно отличные данные.

Характер зависимости числа \bar{Nu} от режимных характеристик процесса определяется особенностями обтекания. При натекании газа на профиль лопатки, начиная от точки разветвления и далее вниз по потоку вдоль контура профиля, образуется тепловой пограничный слой, который вблизи точки разветвления является ламинарным, а затем на некотором расстоянии, зависящем от начальных условий обтекания, конфигурации межпрофильного канала, интенсивности нагрева или охлаждения и т. п., он начинает переходить в турбулентный.

Каждая из областей пограничного слоя (ламинарная, переходная, турбулентная) характеризуется своей интенсивностью теплообмена, поэтому естественно, что в зависимости от протяженности той или иной области вдоль обвода профиля среднее значение теплоотдачи для данной лопатки будет различным. Для иллюстрации на рис. 58 в логарифмическом масштабе представлена одна из зависимостей, полученная в результате обработки подробных опытных данных Вильсона и Поупа [253] по измерению локальной теплоотдачи в решетках турбинных профилей при различных значениях угла натекания β и при двух значениях числа R на входе. Как видно из рисунка, и у спинки, и у вогнутой стороны профиля пограничный слой имеет три участка, характеризующихся ярко выраженными зависимостями от числа Рейнольдса R_x : ламинарный с показателем степени $n = 0,5$ (линии 1), переходный с $n = 1,1$ (штриховые линии) и турбулентный с $n = 0,8$ (линии 2). При этом в зависимости от числа Рейнольдса на входе в решетку и от угла натекания переход возникает при разных значениях R_{x_n} , т. е. на разных участках контура профиля. Таким образом, значение среднего коэффициента теплоотдачи $\bar{\alpha}$ или \bar{Nu} будет существенно зависеть от того, на каком участке

приведенной на рис. 58 ломаной линии будет находиться исследованный в эксперименте диапазон изменения чисел R_x и какова будет протяженность этого диапазона. Соответственно при проведении через все опытные точки одной кривой $\overline{Nu} = cR_x^n$ показатель степени n и коэффициент c в этой формуле также будут различными в зависимости от местоположения исследованного диапазона R_x на ломаной линии.

В связи с этим целесообразно оперировать с локальными коэффициентами теплоотдачи и определять среднее значение $\overline{\alpha}$ как

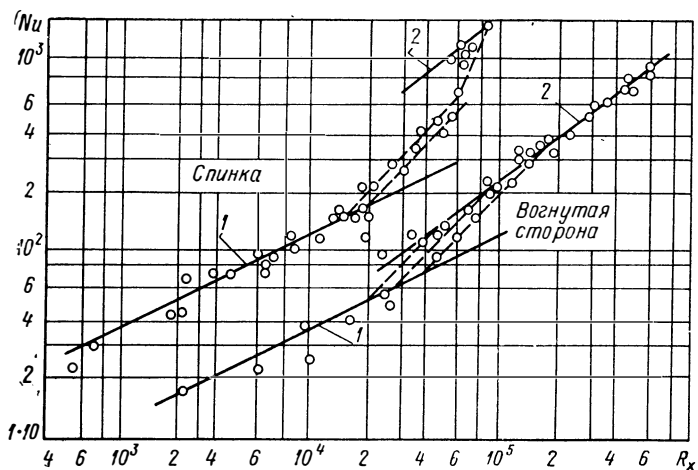


Рис. 58. Распределение локальных коэффициентов теплоотдачи по контуру профиля турбинной лопатки

среднее интегральное или определять $\overline{\alpha}$ по формулам, построенным на расчете теплового пограничного слоя. Один из таких методов расчета был предложен в работе [56]. Метод строится на идеях, аналогичных положенным в основу построения метода расчета потерь в решетках профилей [116]. Эти идеи применяются в данном случае при анализе уравнений сохранения энергии и теплового баланса решетки профилей. Сущность метода заключается в следующем. Рассматривается решетка газотурбинных профилей, схема которой и условные обозначения представлены на рис. 59. Выделяется элемент потока, ограниченный сечением 1_∞ , расположенным далеко перед решеткой, и сечением 2_∞ , расположенным далеко за решеткой. Сечение 2_∞ определяется условием, что около него все неравномерности в потоке, вызванные обтеканием решетки, успевают сгладиться. Сечение, проходящее через плоскость задних кромок, обозначается значком k .

Допустим, что на некотором расстоянии от плоскости задних кромок (в сечении 2) температурные и скоростные по-

граничные слои, сходящиеся с задних кромок профилей, сливаются¹.

Примем, что за сечением 2 неоднородности по скорости и температуре невелики, и поэтому можно пренебрегать величинами $\left(\frac{T-T_2}{T_2}\right)^2$, $\left(\frac{u-u_2}{u_2}\right)^2$. Здесь T , u — текущие значения температуры и скорости; T_2 , u_2 — значения этих величин на внешней границе пограничного слоя.

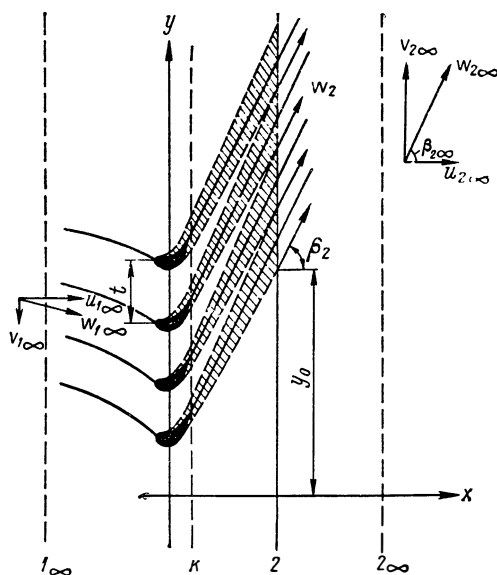


Рис. 59. Схема задачи об обтекании решетки профилей

Введем следующие размерные и безразмерные условные толщины скоростного и температурного пограничного слоев (см. рис. 59):

$$\delta_{2y}^* = \int_{y_0}^{y_0+t} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_2 u_2}\right) dy; \quad (V.2)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta_{2y}}{t} = \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_2 u_2}\right) dy; \quad (V.3)$$

¹ Очевидно, что это допущение справедливо строго только для $Pr \ll 1$. Действительно, при $Pr = 1$ температурные и скоростные пограничные слои сольются в одной плоскости; при $Pr < 1$ температурный пограничный слой окажется толще скоростного и поэтому температурные пограничные слои сольются раньше скоростных.

$$\delta_{2Ty}^{**} = \int_{y_0}^{y_0+t} \left(1 - \frac{T}{T_2} \frac{\rho u}{\rho_2 u_2} \right) dy; \quad (V.4)$$

$$\Delta = \frac{\delta_{2Ty}^{**}}{t} = \frac{1}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \left(1 - \frac{T}{T_2} \frac{\rho u}{\rho_2 u_2} \right) dy. \quad (V.5)$$

Рассмотрим течение жидкости между сечением 2 и 2_∞ . Из условия сохранения расхода имеем

$$\int_{y_0}^{y_0+t} \rho u dy = \rho_{2\infty} u_{2\infty} t. \quad (V.6)$$

Тогда легко получается

$$\rho_2 u_2 - \rho_{2\infty} u_{2\infty} = \frac{\rho_2 u_2}{t} \int_{y_0}^{y_0+t} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_2 u_2} \right) dy = \frac{\rho_2 u_2}{t} \delta_{2y}^* = \rho_2 u_2 \varepsilon.$$

Можно показать, что с точностью до малых высших порядков

$$u_2 = u_{2\infty} (1 + \varepsilon) \frac{\rho_{2\infty}}{\rho_2}. \quad (V.7)$$

Применив уравнение сохранения энергии к области между сечениями 2 и 2_∞ , т. е.

$$\int_{y_0}^{y_0+t} \left(c_p T + \frac{u_2}{2} \right) \rho u dy = \left(c_p T_{2\infty} + \frac{u_{2\infty}^2}{2} \right) \rho_{2\infty} u_{2\infty} t, \quad (V.8)$$

можно получить соотношение

$$(1 - \Delta) T_2 \rho_2 u_2 = T_{2\infty} \rho_{2\infty} u_{2\infty} - \frac{u_{2\infty}}{2c_p} \rho_{2\infty} u_{2\infty} \left[\left(\frac{u_2}{u_{2\infty}} \right)^2 \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2\infty} u_{2\infty}} - 1 \right] + \frac{u_{2\infty}^2 \rho_{2\infty} u_{2\infty}}{2c_p t} \int_{y_0}^{y_0+t} \left(1 - \frac{u}{u_2} \frac{\rho u}{\rho_2 u_2} \right) dy. \quad (V.9)$$

Произведя оценку порядка членов уравнения (V.9) в пределах принятых допущений, можно получить приближенное соотношение

$$T_2 \rho_2 u_2 (1 - \Delta) \approx T_{2\infty} \rho_{2\infty} u_{2\infty}, \quad (V.10)$$

которое с точностью до малых высших порядков приводится к выражению

$$T_2 = T_{2\infty} (1 + \Delta) \frac{\rho_{2\infty} u_{2\infty}}{\rho_2 u_2}. \quad (V.11)$$

Составим уравнение теплового баланса для области между сечениями 1_∞ и 2_∞ . Очевидно, можно написать

$$c_p T_{1_\infty} + \frac{u_{1_\infty}^2}{2} + \frac{v_{1_\infty}^2}{2} - c_p T_{2_\infty} - \frac{u_{2_\infty}^2}{2} - \frac{v_{2_\infty}^2}{2} = \frac{L}{t} \frac{q}{\rho u_2}. \quad (\text{V.12})$$

Поскольку в рассматриваемых сечениях, согласно их определению, нельзя предположить неподобия полей удельной энергии и полей ρu , то такое написание уравнения (V.12) допустимо.

Введем тождественное преобразование

$$c_p (T_{1_\infty} - T_{2_\infty}) \equiv c_p \left[T_{1_\infty} - T_2 (1 - \Delta) \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2_\infty} u_{2_\infty}} \right]. \quad (\text{V.13})$$

Используя соотношение (V.7), (V.11) и (V.13) и уравнение постоянства расхода, можно уравнение (V.12) привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[(1 + \varepsilon)^2 \frac{\rho_{2_\infty}}{\rho_2} - 1 \right] (u_{2_\infty}^2 + v_{2_\infty}^2) = \\ = \frac{L}{t} \frac{q}{\rho u_{2_\infty}} - c_p T_2 \Delta \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2_\infty} u_{2_\infty}}, \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

или после несложных преобразований

$$\frac{q}{\rho u_{2_\infty}} \frac{L}{t} = c_p T_2 \frac{\delta_{2Ty}^*}{t} \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2_\infty} u_{2_\infty}} + \frac{w_{2_\infty}^2}{2} \left[\left(1 + 2 \frac{\delta_{2y}^*}{t} \right) \frac{\rho_{2_\infty}}{\rho_2} - 1 \right]. \quad (\text{V.15})$$

Легко показать, что в пределах принятых допущений о малой неоднородности полей температур и скоростей в сечении 2 можно заменить условные толщины δ_{2Ty}^* и δ_{2y}^* толщинами потерь тепло-содержания δ_{2Ty}^{**} и импульса δ_{2y}^{**} в этом же сечении.

Если произвести эту замену и ввести вместо δ_{2Ty}^{**} и δ_{2y}^{**} , рассчитанных в направлении оси y (см. рис. 59), соответствующие величины δ_{2T}^{**} и δ_2^{**} , рассчитанные поперек следа, то из (V.15) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{q}{c_p \rho u_{2_\infty}} \frac{L}{t} = T_2 \frac{\delta_{2T}^{**}}{t \cos \beta_2} \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2_\infty} u_{2_\infty}} + \\ + \frac{w_{2_\infty}^2}{2 c_p} \left[\left(1 + 2 \frac{\delta_2^{**}}{t \cos \beta_2} \right) \frac{\rho_{2_\infty}}{\rho_2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

Для перехода от значений толщины потери теплосодержания в сечении 2 к его значению в сечении задних кромок κ напомним уравнение интегрального соотношения энергии для области, заключенной между сечениями 2 и κ , которое в силу равенства $q_w = 0$ в следе за решеткой будет иметь вид

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \left(\frac{w'}{w} + \frac{T'}{T} \right) = 0. \quad (\text{V.17})$$

После интегрирования получим

$$\delta_{2\tau}^{**} = \frac{\omega_{кр}}{\omega_2} \frac{T_{кр}}{T_2} \delta_{\tau.кр}^{**}. \quad (V.18)$$

Здесь и ниже индекс кр относится к значению параметров в сечении задних кромок лопаток.

Для толщины потери импульса δ_2^{**} используем соотношение [116]

$$\frac{\delta_2^{**}}{\delta_{кр}^{**}} = \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega_{2\infty}} \right)^{(H_{кр}+5) \frac{1}{2}}.$$

Подстановка этого выражения и соотношения (V.18) в формулу (V.16) позволяет получить уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\bar{Nu}_b}{PrR_b} \frac{L}{t} &= \frac{\delta_{\tau.кр}^{**}}{t \cos \beta_2} \frac{\omega_{кр}}{\omega_{2\infty}} \frac{T_{кр}}{t_0^*} + \frac{\omega_{2\infty}^2}{2c_p t_0^*} \times \\ &\times \left\{ \left[1 + 2 \frac{\delta_{кр}^{**}}{t \cos \beta_2} \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega_{2\infty}} \right)^{3,2} \right] \frac{\rho_{2\infty}}{\rho_2} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (V.19)$$

Здесь

$$\bar{Nu}_b = \frac{\bar{ab}}{\lambda}; \quad R_b = \frac{Ub}{v}; \quad Pr = \frac{v}{a}; \quad t_0^* = T_2 - T_w,$$

где b — хорда профиля.

Для несжимаемой жидкости второе слагаемое правой части уравнения (V.19) примерно на два порядка меньше первого слагаемого, поэтому им можно пренебречь. Тогда

$$\frac{\bar{Nu}_b}{PrR_b} \frac{L}{t} = \frac{\delta_{\tau.кр}^{**}}{t \cos \beta_2} \frac{\omega_{кр}}{\omega_{2\infty}} \frac{T_{кр}}{t_0^*}. \quad (V.20)$$

Эта формула дала удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными для решеток профилей. На рис. 60, а приведено сопоставление результатов расчетов по (V.20) с экспериментальными данными работы [253]. Экспериментальные данные для различных углов натекания отмечены светлыми кружочками, расчетные — темными. Основная трудность в пользовании формулой (V.20) заключается в необходимости определения толщины потери энергии у задней кромки $\delta_{\tau.кр}^{**}$, что требует полного расчета теплового пограничного слоя. Этот метод будет рассмотрен в следующем параграфе.

В том случае, когда расчет теплового пограничного слоя не производится и нет необходимости определения локальных значений коэффициента теплоотдачи, возможно использование и более простых эмпирических формул непосредственно для расчета средних коэффициентов теплоотдачи.

В литературе имеется большое количество эмпирических формул, рекомендуемых различными авторами для расчета средних значений $\bar{\alpha}$, причем результаты расчета могут отличаться друг от друга на 100%. Это объясняется геометрическим неподобием ис-

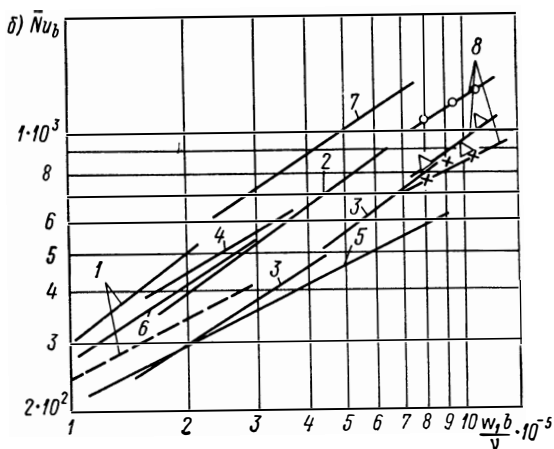
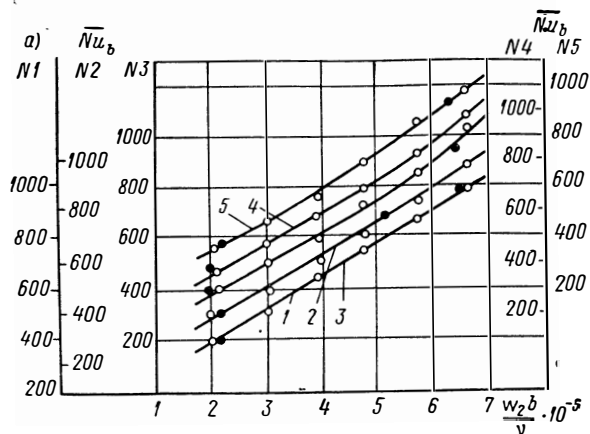


Рис. 60. Средний коэффициент теплоотдачи в решетках профилей: а — сопоставление опытных данных [253] с расчетами по формуле (V.20); б — опытные данные различных авторов

следовавшихся различными авторами решеток профилей и особенностями развития пограничного слоя на профилях в решетках, разными условиями эксперимента (уровнем турбулентности, подготовкой потока, значением температурного фактора).

На рис. 60, б приведены значения средних коэффициентов теплоотдачи, полученные некоторыми исследователями на различных

решетках профилей: 1 — [172] (сплошные линии — турбина; штриховые линии — решетка); 2 — [253]; 3 — [201]; 4 — [176]; 5 — [173]; 6 — [192]; 7 — [196]; 8 — [247]. Кривые 8 построены для различных значений турбулентности набегающего на решетку потока: \times — 0,45%; \triangle — 2,2%; \circ — 5,9%. Как видно, изменение турбулентности от 0,45% до 5,9% приводит к параллельному смещению линий примерно на 55% и может пролить свет на причины расхождения данных работы [172] по теплообмену одного и того же профиля в решетке и в турбине или на возможные причины расхождения данных работ [173] и [196] на 100% и т. д.

Из опубликованных в печати рекомендаций по расчету $\bar{\alpha}$ наиболее обоснованными являются рекомендации работы [120], так как они обобщают наибольшее количество опытных данных. По этим рекомендациям средние значения $\bar{\alpha}$ для лопатки считаются по трем участкам: участку передней кромки, средней части лопатки, участку задней кромки. Для каждого из этих участков предлагаются различные формулы. Для расчета $\bar{\alpha}$ в основной (средней) части обвода профиля рекомендуется формула

$$\bar{Nu} = 0,206R_2^{0,66}S_r^{-0,58}. \quad (V.21)$$

Здесь

$$R_2 = \frac{\omega_2 b}{v};$$

$$S_r = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \sqrt{\frac{2b_0}{\bar{t} b \sin(\beta_1 - \beta_2) \cos^2\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}} \quad (V.22)$$

где β_1 и β_2 — геометрические угол входа и угол выхода газа из решетки; b_0 — ширина решетки; b — хорда профиля; $\bar{t} = t/b$; t — шаг решетки.

В формуле (V.21) за определяющий размер принята хорда профиля b , за определяющую скорость — скорость газа на выходе из решетки ω_2 . Физические константы газа определяются по статической температуре на выходе из решетки. Формула справедлива для дозвукового обтекания решеток активного и реактивного типов при $R_2 = (2 \div 15) 10^5$; $1,5 \leq S_r \leq 6$; $0,45 \leq T_w/T \leq 1$.

Формула (V.21) справедлива для так называемых расчетных условий безударного входа потока в решетку. В случае необходимости рассчитывать интенсивность теплоотдачи при нерасчетных режимах обтекания (режимах частичных нагрузок) в формуле (V.21) необходимо вводить поправку на влияние угла атаки i . В формулах (V.20) и (V.19) это влияние автоматически учитывается изменением эпюры скорости и соответствующим изменением $\delta_{т.кр}^{**}$. Для внесения такой поправки можно пользоваться рекомендациями [13], полученными на основе обобщения опытов КАИ и других авторов:

$$\bar{Nu}(i) = \bar{Nu}(0) [0,97 + 0,78 (\bar{i} - 0,2)^2], \quad (V.23)$$

где $\overline{Nu}(i)$ рассчитывается по $\overline{\alpha}(i)$ — коэффициенту теплоотдачи при угле атаки $i \neq 0$; $\overline{Nu}(0)$ — по $\overline{\alpha}(0)$ — коэффициенту теплоотдачи при нулевом угле атаки, но при R_1 , соответствующем углу атаки i ; $\bar{i} = i/\beta_1$ — относительный угол атаки.

Зависимость (V.23) экспериментально апробирована для различных решеток активного и реактивного типов при изменении основных параметров в следующих пределах; $\bar{i} = (-0,5) \div (+0,4)$; $r_{\text{вх}}/b = 2,26 \div 7,26\%$ ($r_{\text{вх}}$ — радиус входной кромки); $R_1 = (1,5 \div 4) \cdot 10^5$; $\beta_1 = 40 \div 66,5^\circ$; $t/b = 0,57 \div 0,77$; $\sin \beta_1 / \sin \beta_2 = 0,52 \div 0,93$.

Средний коэффициент теплоотдачи по обводу входной кромки можно определять по формуле, полученной на основе обобщения опытов [253, 14],

$$\overline{Nu}_{1d} = 0,635 R_{1d}^{0,5}. \quad (\text{V.24})$$

Здесь за определяющую температуру принята температура торможения газа на входе в решетку, за определяющую скорость — скорость газа перед решеткой, за определяющий размер — удвоенный радиус входной кромки. Формулой (V.24) можно пользоваться при нулевых углах атаки в диапазоне $R_{1d} = 5 \cdot 10^3 \div 4 \cdot 10^4$ и $M \leq 0,9$.

Применяя эту формулу для практических расчетов, следует соблюдать определенную осторожность по следующей причине. Течение в пограничном слое, образующемся вблизи точки разветвления у передней кромки лопатки, обычно бывает ламинарным, однако поток, набегающий на лопатку, большей частью является турбулентным, причем степень турбулентности его может быть различной. Известны опытные данные, показывающие, что турбулентность внешнего потока не влияет на ламинарный пограничный слой, образующийся при обтекании плоской пластины [167]. Однако при поперечном обтекании круглого цилиндра имеет место совершенно другая картина. На рис. 61 приведены опытные данные работы [207] по распределению локальных значений Nu/\sqrt{R} от точки разветвления по контуру поперечно обтекаемого круглого цилиндра при различных степенях турбулентности ε набегающего потока. Как видно, в этом случае влияние ε весьма существенно. Например, при $\varepsilon \approx 2,2\%$ превышение Nu над теоретическим значением при одинаковых R составляет около 80%. Так как это влияние начинается от самой точки разветвления ($\varphi = 0$), то оно не может быть объяснено обычным перемещением точки перехода вперед навстречу обтекающему потоку.

На рис. 62 приведены результаты экспериментальных исследований [205] по влиянию турбулентности набегающего потока воздуха на среднюю теплоотдачу в районе точки разветвления поперечно обтекаемого круглого цилиндра. Эксперименты ставились таким образом, что при фиксированном значении числа R

степень турбулентности ϵ изменялась от 0,8 до 5,2%. При всех исследованных значениях числа R было обнаружено значительное возрастание интенсивности теплообмена при $\epsilon > 1\%$. Визуа-

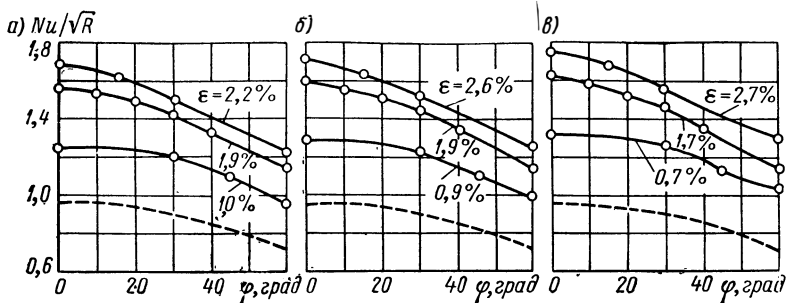


Рис. 61. Распределение локальных значений $Nu/(c\sqrt{R})$ от точки разветвления по контуру поперечно обтекаемого круглого цилиндра при различных степенях турбулентности набегающего потока: а — $R = 1,4 \cdot 10^5$; б — $R = 1,8 \cdot 10^5$; в — $R = 2,2 \cdot 10^5$

— — опытные кривые; - - - - расчетные кривые

лизация течения вблизи критической точки [205] обнаружила наличие в пограничном слое вихрей, оси которых совпадают с направлением линий тока набегающего потока. Вследствие наличия этих вихрей течение вблизи точки разветвления становится су-

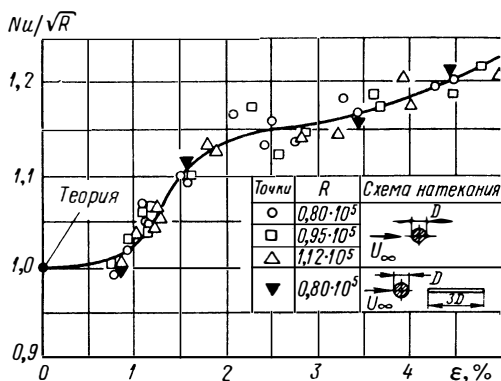


Рис. 62. Влияние степени турбулентности набегающего потока на интенсивность теплообмена в окрестности точки разветвления поперечно обтекаемого круглого цилиндра

щественно трехмерным, что может вызвать значительное увеличение интенсивности теплообмена.

Кривые, приведенные на рис. 61, 62, не обнаруживают тенденции к стабилизации влияния ϵ на интенсификацию теплообмена. В связи с этим следует с большой осторожностью относиться к фор-

мулам для расчета теплоотдачи передней кромки лопатки, полученным при некотором определенном (малом) значении степени турбулентности ε . Передняя кромка является некоторым аналогом поперечно обтекаемого цилиндра, и влияние ε на теплоотдачу весьма вероятно.

Средний по обводу выходной кромки коэффициент теплоотдачи на основе опытов КАИ [13, 14] может определяться по формуле

$$\overline{Nu}_{2d} = 0,0031 R_{2d}^{0,93}. \quad (V.25)$$

Здесь за определяющую температуру принята температура торможения газа за решеткой, за определяющую скорость — действительная скорость на выходе из решетки ω_2 , за определяющий размер — удвоенный радиус выходной кромки лопаток d .

Формула (V.25) справедлива в диапазоне $i = \pm 10^\circ$; $R_{2d} = (0,6 \div 3,0) 10^4$ и $M_2 \leq 0,5$.

При $R = (0,5 \div 10) 10^3$ можно пользоваться формулой ХПИ

$$\overline{Nu}_d = 0,026 R_d^{0,69}, \quad (V.26)$$

где

$$\overline{Nu}_d = \frac{\bar{\alpha}d}{\lambda}; \quad R_d = \frac{\omega_2 d \rho}{\mu}.$$

Здесь d — диаметр выходной кромки; λ и μ определяются по температуре лопатки.

В области общих значений R формулы (V.25) и (V.26) дают совпадающие результаты.

В натуральных условиях реальной турбины характер обтекания лопаток рабочего колеса существенно изменяется как вследствие воздействия массовых (центробежных и кориолисовых) сил, так и вследствие появления периодической нестационарности, изменения уровня и поля турбулентных пульсаций и т. д. Проблема переноса результатов экспериментальных исследований на статических моделях на вращающиеся объекты является одной из труднейших проблем современной теоретической аэродинамики и до настоящего времени не имеет рационального решения. В литературе имеются только отдельные, построенные на основе частных экспериментов рекомендации об увеличении значений коэффициентов теплоотдачи при вращении в 1,2—1,8 раза по сравнению с результатами, полученными при статических испытаниях [230, 171, 46].

Для ориентировочной оценки влияния вращения на средний коэффициент теплоотдачи можно использовать расчетные формулы, полученные в работах [120, 46]. Эти формулы построены на основе обобщения опытов с ограниченным количеством решеток, и поэтому их можно использовать только для ориентировочной оценки.

В [120] для расчета среднего по обводу профиля коэффициента теплоотдачи рекомендуется формула

$$\overline{Nu}_{вр} = \overline{Nu}_{неподв} (1 + 0,8S_u^{0,42}), \quad (V.27)$$

или с учетом формулы (V.21)

$$\overline{Nu}_{вр} = 0,206 R_2^{0,66} S_r^{-0,58} (1 + 0,8S_u^{0,42}).$$

Здесь

$$S_u = \frac{u_{ср}}{\omega_2 \theta},$$

где $u_{ср}$ — окружная скорость на среднем диаметре турбины;
 ω_2 — скорость газа на выходе из рабочих лопаток в относительном движении; $\theta = d_{ср}/l$ ($d_{ср}$ — средний диаметр рабочего колеса турбины; l — высота рабочих лопаток).

Т а б л и ц а 6

Участок профиля	k	q
Входная кромка	0,2	0,17
Выходная кромка	0,87	0,37
Спинка	1,80	0,56
Вогнутая поверхность	0,40	0,17
Торцовая поверхность межлопаточного канала	1,10	0,59

Для отдельных участков обвода профиля интенсификация теплообмена за счет вращения различна. Запишем формулу (V.27) в общем виде:

$$\overline{Nu}_{вр} = \overline{Nu}_{неподв} (1 + kS_u^q). \quad (V.28)$$

Значения коэффициентов k и q для различных участков профиля, рекомендуемые КАИ на основании обобщения результатов опытов с тремя решетками при вращении с $n \leq 9000$ об/мин, приведены в табл. 6.

Формула, предлагаемая в работе [46] для расчета среднего коэффициента теплоотдачи, имеет вид

$$\overline{Nu}_{вр} = 0,057R^{0,754}. \quad (V.29)$$

Формула построена на основе обобщения опытных данных с двумя решетками профилей при вращении с $n = 4000$ об/мин.

В исследованном авторами диапазоне изменения чисел Рейнольдса [$R = (1 \div 6,6) 10^5$] отклонение результатов расчета по формулам (V.27) и (V.29) не превышает 15%.

Влияние угла атаки на теплообмен во вращающихся решетках по данным КАИ [122, 123] оказывается таким же, как и в неподвижных, поэтому формула (V.23) может быть также использована для приближенных оценок значений α при вращении на нерасчетных режимах.

27. Расчет локальных значений коэффициентов теплоотдачи по контуру лопатки

При расчете лопаточных аппаратов газовых турбин возникает необходимость знать не только средние коэффициенты теплоотдачи в решетке $\bar{\alpha}$, но и локальные их значения по обводу профиля α_x , что особенно важно при расчете температурных полей и разработке систем охлаждения лопатки. Характер зависимости локальных значений коэффициентов теплоотдачи от режимных и геометрических параметров решетки (шаг, угол натекания и т. д.) определяется особенностями обтекания лопатки.

Обтекание профиля в решетке при варьировании режимных и геометрических параметров характеризуется, как уже выше отмечалось, эпюрой скорости или давления вдоль контура профиля.

Расчет локальных коэффициентов теплоотдачи вдоль контура профиля базируется на эпюре скорости (экспериментальной или расчетной), влияющей на развитие теплового пограничного слоя, образующегося при обтекании лопатки. Для таких расчетов можно использовать любой из описанных в п. 13 и 21 методов расчета теплового пограничного слоя. В частности, в работах [179, 247] отмечается хорошее совпадение экспериментальных данных по теплоотдаче лопатки с результатами расчетов по методу Патанкара—Сполдинга [226]. Применение этого метода в наших условиях затруднено большой его сложностью, программа вычислений требует использования вычислительных машин с очень большим быстродействием и памятью.

Для практического использования при конструктивной проработке различных систем охлаждения лопаток газовых турбин и при анализе различных режимов их работы определенными преимуществами обладает однопараметрический метод, разработанный в работах [60, 57] и описанный в п. 21. Преимущества этого метода заключаются в следующем.

Характер обтекания профилей в решетке таков, что в пограничном слое, развивающемся вдоль контура лопатки, сосуществуют ламинарный, переходный и турбулентный режимы течения, причем протяженности каждой из этих областей соизмеримы. В этом случае для создания единого непрерывного машинного счета параметров пограничного слоя очень удобно, чтобы формульные зависимости для расчета теплового пограничного слоя при всех трех режимах течения были однотипными. Кроме того, конструктивная отработка системы охлаждения лопатки с точки зрения тепловой эффективности должна сопровождаться сравнительными расчетами потерь в решетке. При этом удобно иметь однотипную формульную систему для расчета и теплового, и динамического пограничных слоев в решетке, чтобы расчеты теплоотдачи и потерь могли быть совмещены в одной программе машинного счета.

Метод [57] обладает этими свойствами и позволяет объединить программу для расчета теплового пограничного слоя и теплоотдачи с программой расчета потерь в решетках профилей, описанной в [78], причем программа получилась настолько несложной, что оказалось возможным при использовании ЭВМ типа М-220 объединить ее с программой расчета потенциального обтекания решеток профилей.

Расчетные формулы этого метода для теплового пограничного слоя и локальной теплоотдачи вдоль контура лопатки после несложных алгебраических преобразований приводятся к следующему виду.

Толщина потери теплосодержания

$$\delta_{\tau}^{**} = \bar{\delta}_{\tau}^{**} b = \frac{b}{\bar{U}R} \left(\frac{G_{1\tau}}{A} \right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (V.30)$$

Локальные значения числа Нуссельта

$$Nu_x = \frac{a_{\tau}}{m+1} Pr \frac{R_x R_{\tau}^{**}}{G_{1\tau}}. \quad (V.31)$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha_x = \frac{Nu_x \lambda}{\bar{s}b}, \quad (V.32)$$

где λ — коэффициент теплопроводности газа.

В этих формулах ¹

$$G_{1\tau} = R_{\tau}^{**} G_{\tau} = R \left(a_{\tau} \int_{\bar{s}_t}^{\bar{s}} \bar{U} d\bar{s} + \bar{C}_{\tau t} \right); \quad (V.33)$$

$$\bar{s} = \frac{s}{b}; \quad \bar{U} = \frac{w}{w_1}; \quad R_x = \frac{ws}{v} = \bar{U} \bar{s} R,$$

где R в зависимости от масштаба скорости имеет вид

$$R_1 = \frac{w_1 s}{v} \quad \text{или} \quad R_2 = \frac{w_2 s}{v}.$$

Функция

$$\bar{C}_{\tau t} = \frac{G_{1\tau t}}{R}. \quad (V.34)$$

Индекс t соответствует индексу n (точка начала перехода), если считается пограничный слой в переходной области:

$$\bar{C}_{\tau t} = \bar{C}_{\tau n} \frac{G_{1\tau n} R_{\tau n}^{**}}{R}; \quad \bar{s}_t = \bar{s}_n,$$

¹ Для сопловых решеток в качестве масштаба скорости вводят не w_1 , а w_2 .

или индексу k (точка конца перехода), если считается турбулентный участок пограничного слоя на профиле:

$$\bar{C}_{\tau t} = \bar{C}_{\tau k} \frac{G_{1\tau k} R_{\tau k}^{**}}{R}; \quad \bar{s}_t = \bar{s}_k.$$

Значения констант для различных режимов течения в тепловом пограничном слое приведены в табл. 7.

Т а б л и ц а 7

Режим течения	a_T	A	m	G_T	G_{1T}	$\frac{a_T}{m+1}$
Ламинарный ($0 < \bar{s} \leq \bar{s}_H$)	0,48	0,703	1	$0,703 R_T^{**}$	$0,703 (R_T^{**})^2$	0,24
Переходный ($\bar{s}_H < \bar{s} \leq \bar{s}_K$)	0,90	970	$\frac{-1}{10}$	$970 (R_T^{**})^{-\frac{1}{10}}$	$970 (R_T^{**})^{\frac{2}{10}}$	1
Турбулентный ($\bar{s} > \bar{s}_K$)	1,25	61,7	$\frac{1}{4}$	$61,7 (R_T^{**})^{\frac{1}{4}}$	$61,7 (R_T^{**})^{\frac{5}{4}}$	1

Созданная в ЦКТИ объединенная программа для расчета теплоотдачи и потерь в решетках профилей [78] записана на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 и в кодах М-220. Для расчета теплового и динамического пограничного слоя по этой программе необходимо знание эпюры скоростей вдоль контура лопатки. Программа построена так, что позволяет производить расчет потерь и теплоотдачи или как непосредственное продолжение расчета потенциального обтекания решетки, или по заданному независимо (из эксперимента или независимого расчета) распределению скоростей.

Исходные данные для расчета записываются в специальном бланке-задании, приведенном в [78]. По этим данным наносится числовой материал на перфокарту и выполняется расчет по программе. Результаты расчета выдаются в виде ленты, на которой в определенном порядке в столбик напечатаны цифровые значения вычисленных величин. В печать выводятся значения U , δ^{**} , δ_T^{**} , ζ , Nu_x .

Большое значение для хорошего соответствия результатов расчета и экспериментальных данных имеет правильность определения режимов течения в пограничном слое, т. е. правильность нахождения координаты начала s_H и конца s_K переходной области.

В программе [78] координаты точек s_H и s_K могут быть заданы независимо, в частности следующим образом.

Если кроме режимных параметров и эпюры скорости вдоль профиля известны турбулентность потока ε на входе в решетку и температурный фактор ψ (или известно, что $\psi \approx 1$), то можно определять локальное значение числа Рейнольдса $R_{x_H} = \omega_H s_H / \nu$, при котором начинается переходная область, по методу, описанному в п. 17 и по формуле (IV.21).

По известному R_{x_H} и эпюре распределения скорости $\bar{U} = \bar{U}(s)$ определяется координата начала перехода

$$s_H = \bar{s}_H b = \frac{R_{x_H} \nu}{\omega_H}. \quad (\text{V.35})$$

Координата s_K , соответствующая возникновению развитого турбулентного течения в пограничном слое, может быть определена с помощью параметра $r_x = R_{x_K} / R_{x_H}$, значения которого в соответствии с конкретной эпюрой скорости можно определить по рис. 23. По известным r_x и R_{x_H} находят:

$$R_{x_K} = R_{x_H} r_x; \quad (\text{V.36})$$

$$s_K = \bar{s}_K b = \frac{R_{x_K} \nu}{\omega_K}. \quad (\text{V.37})$$

В том случае, когда неизвестна турбулентность потока, а $\psi \approx 1$, можно определять s_H как точку, непосредственно расположенную за точкой минимума давления на эпюре скорости, а s_K — по рис. 23.

При малой турбулентности потока, набегающего на решетку, и малой изогнутости профилей можно определять s_H по одному из эмпирических методов, описанных в п. 17. В частности, в программу [78] заложено автоматическое определение s_H по методу [43] и s_K — по рис. 23.

Использование для определения s_H методов, основанных на анализе устойчивости ламинарного пограничного слоя (см. п. 17), нецелесообразно, потому что, как уже говорилось, координаты точки потери устойчивости ламинарного пограничного слоя и точки начала заметного перехода к турбулентному режиму течения в реальных условиях (в турбомашинах) сильно отличаются друг от друга.

Остановимся на вопросе влияния больших отрицательных градиентов давления на возникновение перехода. Увеличение положительных градиентов давления, как известно, приводит к отрыву пограничного слоя, после чего теория пограничного слоя в обычной постановке становится неприменимой.

Большие отрицательные градиенты давления, т. е. большие ускорения потока, могут вызвать, как уже отмечалось, явление так называемой реламинаризации пограничного слоя — обратного перехода из турбулентного режима течения в пограничном слое к ламинарному. Исследования последних лет показали, что

такое явление возможно и в условиях обтекания решеток профилей [238, 215, 227, 182]. В работе [227] показано, что процесс реламинаризации практически не зависит от числа R и толщины пограничного слоя. Авторы работы [215] отмечают, что эффект реламинаризации особенно ярко проявляется при таких эпюрах скорости вдоль профиля в решетке, когда

$$K = \frac{\nu}{U^2} \frac{dU}{dx} > 2 \cdot 10^{-6}. \quad (V.38)$$

В работе [247] величина α_x определялась косвенным путем (на основе измерения температурных полей в лопатках) и было

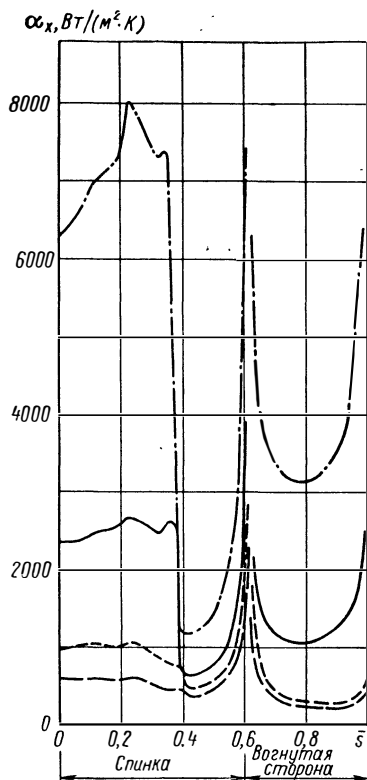


Рис. 63. Распределение локальных коэффициентов теплоотдачи вдоль контура профиля в решетке при четырех различных значениях R_1

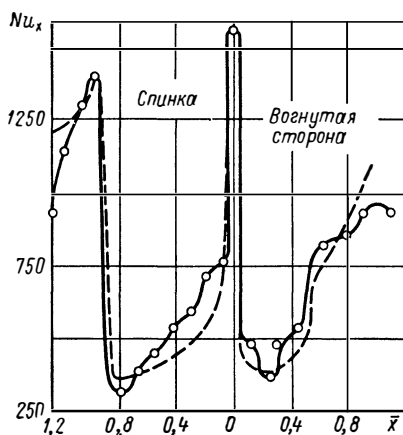


Рис. 64. Сопоставление расчетных и экспериментальных локальных значений коэффициента α_x по контуру лопатки:

— — — опытные данные [14, 50];
 - - - - - расчетные [78]

обнаружено, что на вогнутой стороне лопатки при $K > 1,5 \cdot 10^{-6}$ переход не возникал даже при турбулентности набегающего потока $\varepsilon = 5,9\%$. Аналогичный результат был обнаружен в исследованиях ЦКТИ при непосредственных измерениях α_x во вращающихся решетках профилей при $\varepsilon \leq 10\%$.

На рис. 63 показан характер изменения локальных значений коэффициентов теплоотдачи α_x вдоль контура профиля в решетке. Как видно, распределение α_x очень неравномерное. Значения α_x на кромках, особенно на передней, в несколько раз больше значений на основной части контура лопатки, т. е. условия работы

кромки очень неблагоприятны, что усугубляется трудностью охлаждения непосредственно кромок.

Результаты расчета локальных значений коэффициентов теплоотдачи вдоль контура профиля лопатки, полученные согласно рассматриваемому в настоящем параграфе методу, неоднократно сравнивались с экспериментальными данными и при правильном определении s_n и s_k хорошо согласовывались с опытными данными (рис. 64). Однако следует подчеркнуть, что этот метод разработан для обтекания несжимаемым газом при условии сравнительно неинтенсивного теплообмена. Применительно к условиям газовых турбин это соответствует обтеканию лопаток потоком газа с температурой $T \leq 800 \div 900^\circ \text{C}$ при $M \leq 0,5 \div 0,6$.

Проектирующиеся в настоящее время перспективные газовые турбины рассчитываются на температуру газа $T \approx 1200 \div 1500^\circ \text{C}$. В этом случае возникает уже проблема охлаждения не только сопловых, но и рабочих лопаток, причем значение температурного фактора становится значительно меньше единицы ($\psi \approx 0,5$), что требует учета влияния на теплообмен величины ψ и вращения рабочего колеса. Кроме того, в перспективных газовых турбинах увеличиваются тепловые перепады на ступень, что приводит к возникновению местных сверхзвуковых течений в межпрофильных каналах и в косом срезе. Таким образом, возникает необходимость учета влияния на теплоотдачу числа M и сжимаемости. В связи со сказанным очевидна необходимость разработки метода расчета локальной теплоотдачи, учитывающего влияние ψ , M , а также турбулентности и вращения. При этом важно, чтобы метод был удобным для применения при тепловых расчетах и конструктивных проработках систем охлаждения лопаток перспективных высокотемпературных газовых турбин.

28. Влияние сжимаемости и температурного фактора на локальную теплоотдачу профиля в турбинной решетке

При рассмотрении вопросов, связанных с влиянием сжимаемости и температурного фактора на локальную теплоотдачу в решетках профилей, следует различать три возможных случая:

1) обтекание профилей невысокотемпературным потоком со скоростями, близкими к сверхзвуковым и выше, когда температура стенки определяется явлением так называемого аэродинамического нагрева, связанного с выделением тепла при торможении быстро движущегося газа в пограничном слое у стенки, и теплообмен зависит от числа M ;

2) обтекание профилей высокотемпературным потоком с малыми скоростями при интенсивном охлаждении поверхности, когда все явления в пограничном слое определяются отношением температур T_w/T ;

3) обтекание профилей высокотемпературным потоком с большими скоростями при интенсивном охлаждении поверхности, когда

имеет место совместное влияние на интенсивность теплоотдачи и температурного фактора и числа M .

Как видно из материалов, приведенных в п. 20 и 21, наиболее исследованным является первый случай обтекания. Однако и здесь исследования относятся в основном к безградиентному обтеканию пластины. Для задач, связанных с теплообменом в турбинных лопатках, когда максимальное значение числа M не превышает 2,0—2,5, в рассматриваемом случае может быть использовано решение [60], описанное в п. 21. Если сравнить формулы (IV.114) и (IV.118) для локальной теплоотдачи соответственно при сжимаемом и несжимаемом обтекании, то легко показать, что при отнесении всех физических констант к температуре торможения потока получается соотношение

$$\frac{St_x}{St_x^{нсж}} = \left(\frac{1 - \alpha_\infty}{1 - \alpha_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{2} \lambda_\infty^2}{1 - \frac{k-1}{2} \lambda_0^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (V.39)$$

Таким образом, при расчете локальной теплоотдачи по контуру профиля при обтекании его сжимаемым потоком с большими до- и сверхзвуковыми скоростями и $T \leq 750 \div 900^\circ \text{C}$ можно использовать метод, описанный в предыдущем параграфе, а затем полученные локальные значения $St_x^{нсж}$ следует умножить на изменяющийся вдоль контура профиля (в соответствии с эпюрой скорости) коэффициент

$$K = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{2} \lambda_\infty^2}{1 - \frac{k-1}{2} \lambda_0^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (V.40)$$

Второй случай является характерным для высокотемпературных газовых турбин со ступенями, срабатывающими сравнительно небольшие докритические тепловые перепады. В пограничном слое сопловых лопаток таких турбин возникают значительные поперечные градиенты температур, вызываемые интенсивным охлаждением поверхности лопаток. Определяющей теплообмен величиной здесь будет температурный фактор $\psi = T_w/T$.

Из сравнения формул (III.84) и (III.63), а также (IV.129) и (IV.127) можно получить следующие соотношения соответственно для ламинарного и турбулентного пограничного слоя:

$$\frac{Nu_x}{(Nu_x)_{\psi=1}} = \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{n - \frac{1}{2}}; \quad (V.41)$$

$$\frac{Nu_x}{(Nu_x)_{\psi=1}} = \frac{T_0^*}{T_w} = \frac{1}{\psi}, \quad (V.42)$$

где $n \approx 0,7 \div 1,0$,

Эти соотношения экспериментально не проверены, кроме того, целый ряд допущений, принятых при выводе формул (IV.129) и (IV.127), также экспериментально не апробированных, затрудняет использование формул (V.41) и (V.42) для практических расчетов.

Экспериментальные исследования, проведенные в ЦКТИ [67] по исследованию теплоотдачи при градиентном и безградиентном обтекании пластины потоком газа с температурой $T \approx 1500 \div 1800^\circ \text{C}$ при интенсивном охлаждении поверхности ($T_w \approx 300 \div 400^\circ \text{C}$) в области значений $R \approx 10^4 \div 10^5$ и $M \leq 0,1$, показали, что интенсификация теплообмена за счет уменьшения температу-

рного фактора ψ в турбулентном пограничном слое оказывается меньше, чем получается по формуле (V.42). Эти опытные данные показаны на рис. 65. Сплошная линия, аппроксимирующая опытные данные, соответствует формуле

$$K_1 = \frac{St_\psi}{St_{\psi=1}} = \frac{1}{\psi^{0,6}}. \quad (V.43)$$

Линия, соответствующая формуле (V.42), обозначена на рисунке штрихами. Значения $St_{\psi=1}$ определялись при градиентном обтекании из расчета локальной теплоотдачи вдоль пластины, имитирующей профиль в решетке (одна из исследованных эпюр скорости вдоль пластины длиной l приведена на рис. 66). Расчет производился по методу, описанному в предыдущем параграфе, с использованием экспериментальной эпюры скорости. В опытах локальные значения числа Маха не превышали значений $M \approx 0,35$.

Таким образом, для приближенной оценки влияния температурного фактора на локальную теплоотдачу в решетках профилей газовых турбин при высоких температурах газа ($\psi \approx 0,2 \div 0,4$) и малых скоростях течения ($M \leq 0,3$) можно использовать формулу (V.43). При этом расчет локальных коэффициентов теплоотдачи по контуру профиля производится по методу [57, 78], описанному в п. 27 [формулы (V.31), (V.33)], и затем каждое полученное локальное значение числа St умножается на коэффициент K_1 .

В третьем случае (см. с. 184), когда имеет место совместное влияние числа M и температурного фактора на интенсивность теплообмена, имеющиеся в литературе исследования относятся главным образом к безградиентному обтеканию пластин.

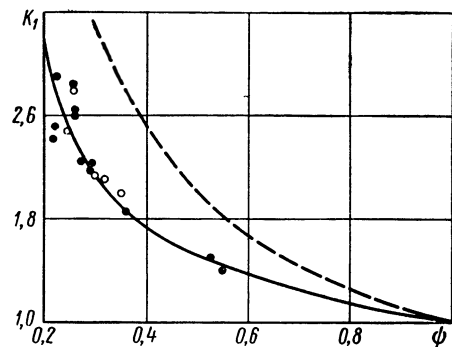


Рис. 65. Зависимость K_1 от температурного фактора ψ при обтекании пластины:

● — при $\frac{dU}{dx} = 0$; ○ — при $\frac{dU}{dx} \neq 0$

Для приближенной оценки влияния этих факторов на интенсивность теплоотдачи к внешней поверхности турбинных лопаток можно использовать результаты работы [74]. Как уже отмеча-

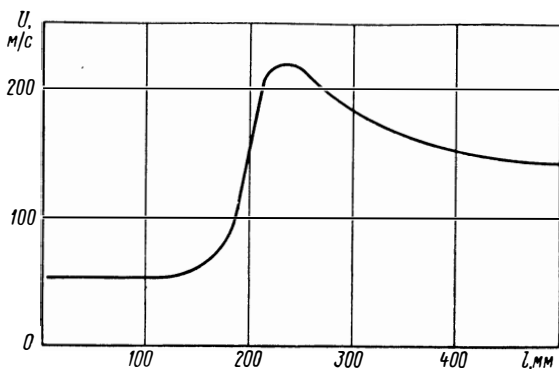


Рис. 66. Эюра изменения давления вдоль экспериментальной пластины

лось в гл. IV, в этой работе решение уравнения энергии для обтекания сжимаемым потоком с теплообменом выполнено только применительно к турбулентному пограничному слою у пластины. На

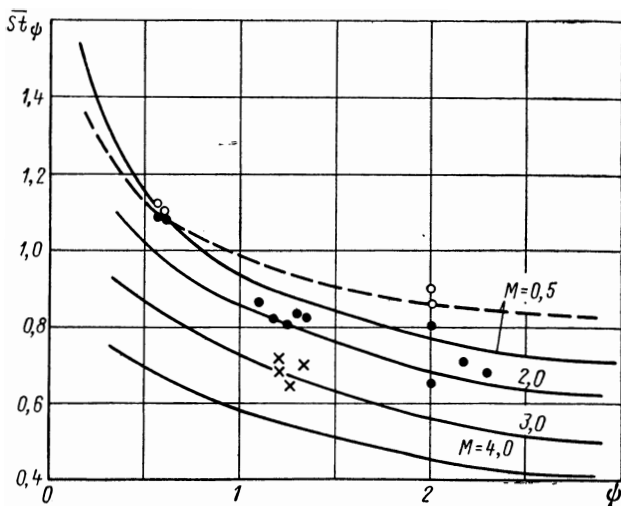


Рис. 67. Сравнение экспериментальных и расчетных значений \overline{St}_ψ при различных M и ψ :

— — $R = 10^7$; - - - - $R = 10^6$

рис. 67 линиями показаны расчетные данные [74] по изменению отношения $\overline{St}_\psi = St/St_{M \approx 0}$ в зависимости от M и $\psi = T_w/T_{aw}$. Величина $St_{M \approx 0}$ соответствует значению числа St при $M \approx 0$ и

$\psi \approx 1$. Различными значками нанесены экспериментальные данные различных авторов [74, 15, 134, 19]. Как видно, расчетные данные близки к экспериментальным, при этом имеет место почти параллельный сдвиг кривых при изменении M .

Рассмотрим параметр \overline{St} при различных значениях ψ и M . На рис. 68, а приведена зависимость St_ψ от M при $\psi \approx 1$. Обозначим эти значения \overline{St}_ψ через $\overline{St}_{\psi \approx 1}$. Если отнести любое значение \overline{St}_ψ

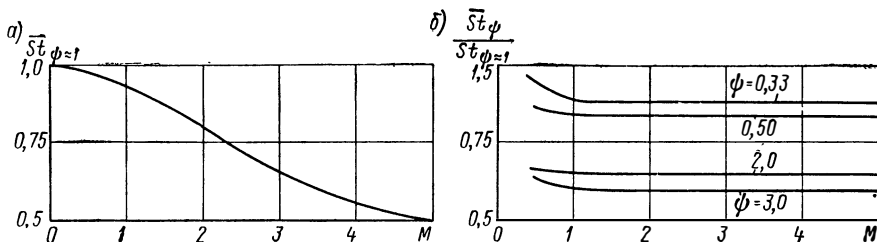


Рис. 68. Зависимость относительного изменения числа St от числа M

(при различных значениях ψ и M) к соответствующему значению $\overline{St}_{\psi \approx 1}$, представленному на рис. 68, а, то это отношение оказывается независимым от M при сверхзвуковых скоростях (рис. 68, б). При дозвуковых скоростях намечается тенденция к увеличению этого отношения с уменьшением M .

Отмеченная на рис. 68, б особенность зависимости $\overline{St}_\psi / \overline{St}_{\psi \approx 1} = \overline{S}$ от числа M позволяет для сверхзвуковых обтеканий ($M \leq 4$) построить единую кривую $\overline{S}(\psi)$ для различных M (рис. 69). Она аппроксимируется соотношением

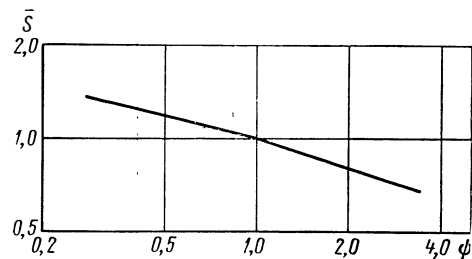


Рис. 69. Зависимость $\overline{S} = f(\psi)$

$$\overline{S} = \frac{\overline{St}_\psi}{\overline{St}_{\psi \approx 1}} = \psi^{-n}, \quad (V.44)$$

где $\psi = T_w/T_{aw}$; $n = 0,23$ при $\psi < 1$ и $n = 0,33$ при $\psi > 1$.

Если допустить, что при градиентном течении сохранится такая же зависимость, как и при безградиентном, то можно использовать формулу (V.44) для приближенной оценки значений локальных коэффициентов теплоотдачи в лопатках высокотемпературных газовых турбин, преобразовав ее к виду

$$\frac{St_{\psi, M}}{St_{\psi \approx 1, M \approx 0}} = \overline{S} K_1 \left(\frac{St_M}{St_{M \approx 0}} \right)_{\psi \approx 1}.$$

Из этой формулы видно, что для внесения необходимых поправок нужно локальные значения коэффициентов теплоотдачи, расчи-

танные по методу, описанному в предыдущем параграфе (при $\psi \approx 1$; $M \approx 0$), умножить на произведение коэффициентов \bar{S} и K_1 , рассчитываемых соответственно по формулам (V.44) и (V.43), и на соответствующие локальные значения $\bar{St}_{\psi \approx 1}$, которые берутся по рис. 68, а.

Так как формула (V.44) справедлива только при $M > 1$, то при малых дозвуковых скоростях и $\psi = T_w/T_{aw} < 0,5$ поправкой является множитель K_1 , рассчитываемый по формуле (V.43).

Приведенные в п. 20, 21 и 12 материалы показывают, что параметры M и ψ оказывают влияние не только на теплоотдачу, но и на сопротивление поверхности потоку. Таким образом, кроме влияния этих факторов на локальную теплоотдачу в общем случае следует учитывать влияние их и на потери в решетках. Однако в настоящее время таких данных в литературе нет.

Для приближенной оценки относительного изменения потерь в решетке под действием сжимаемости и температурного фактора можно использовать, например, кривые на рис. 41 [202] или формулы типа (IV.84) и (IV.94a).

29. Влияние турбулентности и вращения на локальную теплоотдачу профиля в турбинной решетке

Как уже отмечалось в п. 28, в условиях реальной турбины характер обтекания лопаток рабочего колеса существенно отличается от обтекания неподвижных решеток.

Если рассматривать теплоотдачу профиля в турбинной решетке в условиях вращения, то в основном уравнении движения (I.13) необходимо сохранить массовые силы, т. е. это уравнение должно быть написано в общем виде:

$$v \left[\frac{\partial w}{\partial \tau} + w (\text{grad } w) \right] = T - \text{grad } p + \mu \nabla^2 w. \quad (\text{V.45})$$

Здесь $T = \rho j$ — массовая сила, отнесенная к единице объема.

В случае вращения решетки скорость w представляет собой относительную скорость потока. Тогда сила T равна сумме сил: центробежной, связанной с переносным центростремительным ускорением $j_{\text{ц}}$, и кориолисовой, связанной с поворотным ускорением $j_{\text{к}}$. Соотношение между силой T и силой, создающей вынужденное движение, $\text{grad } p$, определяет воздействие массовых сил на теплообмен и сопротивление поверхности. В работе [92] показывается, что влияние центробежных и кориолисовых сил выражается через одни и те же параметры. При этом на основе опытных данных авторы делают вывод о независимости от вращения интенсивности теплообмена в охлаждаемых воздухом лопатках. Имеющиеся в литературе отдельные опытные данные других авторов [230, 171] не согласуются с этими результатами. Аналитического решения этой задачи в настоящее время не имеется, ограниченность

и противоречивость опытных данных связана с большой сложностью и многопараметричностью задачи о влиянии соотношения сил T и $\text{grad } p$ на развитие пограничного слоя. Как уже говорилось, вращение рабочего колеса связано не только с возникновением центробежных и кориолисовых сил, но также и с возникновением периодической нестационарности, неоднородности потока, с изменением его турбулентности. Таким образом, задача о влиянии вращения на локальную теплоотдачу является сложной комплексной задачей.

В работе [248] приведены экспериментальные данные по влиянию турбулентности набегающего потока на локальные значения коэффициента теплоотдачи α вдоль контура лопатки $\bar{s} = s/b$ (рис. 70). Как видно, влияние степени турбулентности ϵ на локальные значения α весьма заметно. Так, на вогнутой стороне при изменении ϵ от 0,45 до 2,2% (рис. 70, а) интенсивность теплообмена увеличивается примерно в 1,5 раза, а до $\epsilon = 5,9\%$ — примерно в 2 раза.

При вращении рабочего колеса степень турбулентности потока, набегающего на лопатки, изменяется и влияние этого изменения накладывается на влияние центробежных и кориолисовых сил.

В работе [61] приведены результаты экспериментального исследования влияния вращения на локальную теплоотдачу в различных типах решеток профилей. На рис. 71 приведены пять исследованных эпюр скорости, типичных для газотурбинных профилей (номер кривой соответствует определенному профилю). Для характеристики влияния вращения введен коэффициент интенсификации \bar{N} , представляющий собой отношение локального значения числа Nu_x в любой точке поверхности профиля во вращающейся решетке к локальному значению Nu_x^H на контуре профиля в неподвижной решетке при одном и том же значении числа R_x :

$$\bar{N} = \frac{Nu_x}{Nu_x^H}. \quad (\text{V.46})$$

Анализ результатов экспериментального исследования показывает, что коэффициент интенсификации зависит от скорости вращения решетки, от режима течения в пограничном слое, от величины и знака продольного градиента скорости, от кривизны поверхности.

Наибольшая интенсификация теплообмена достигается при ламинарном режиме течения в пограничном слое, здесь она в отдельных точках при больших градиентах давления может достигать 120—130% ($\bar{N} \approx 2,2 \div 2,3$). При турбулентном режиме течения в пограничном слое интенсификация теплоотдачи незначительна и в пределах исследованных градиентов давления не превышает 20—30%, что практически находится в пределах точности промышленных экспериментов и поэтому могло быть замечено в некоторых опытах.

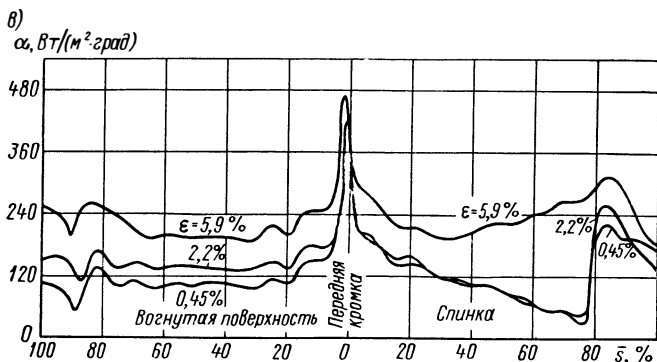
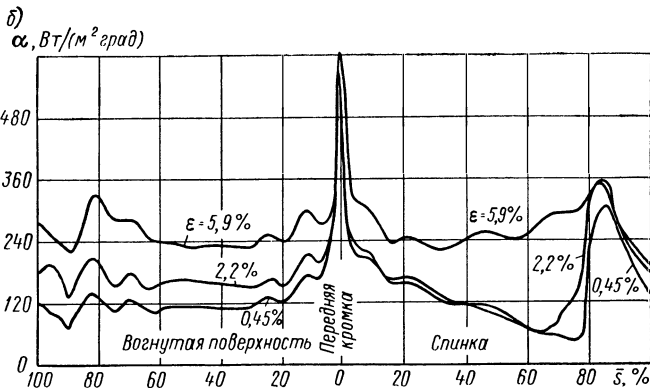
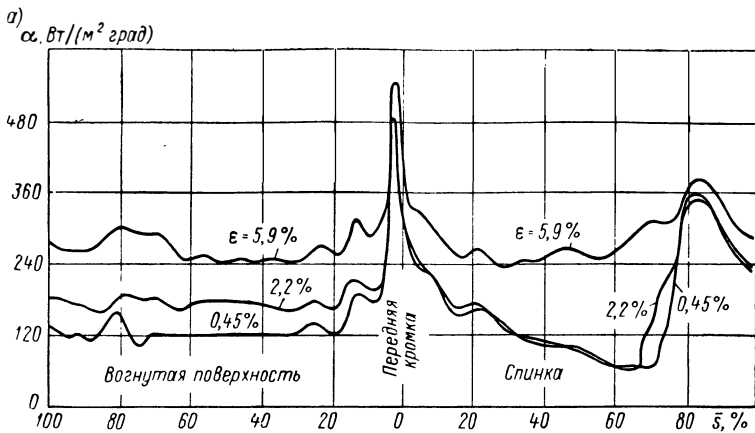


Рис. 70. Распределение коэффициентов теплоотдачи вдоль контура лопатки при различных степенях турбулентности набегающего потока:

а — $M_2 = 0,75$; б — $M_2 = 0,65$; в — $M_2 = 0,55$

Для характеристики скорости вращения введем относительное угловое ускорение

$$\bar{j} = j/g, \quad (V.47)$$

где j — центростремительное ускорение; g — ускорение силы тяжести.

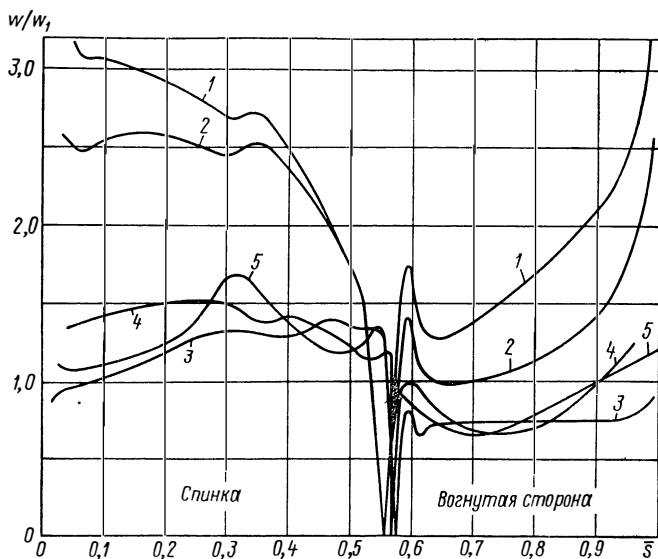


Рис. 71. Эпюры скоростей вдоль контура профилей в исследованных решетках

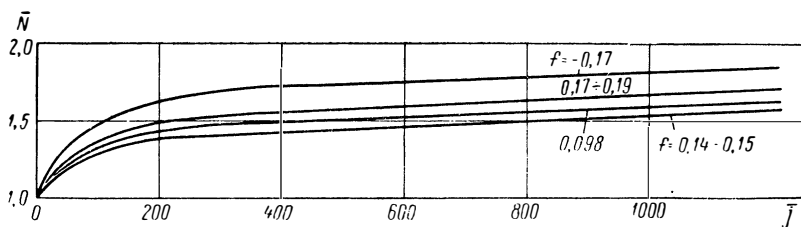


Рис. 72. Зависимость \bar{N} от \bar{j} при различных значениях f для ламинарного режима течения в пограничном слое у спинки профиля

Градиент давления на эпюре скорости будем характеризовать форм-параметром

$$f = \frac{U'}{U} \frac{\delta^{**2}}{\nu}. \quad (V.48)$$

На рис. 72 приведена зависимость \bar{N} от \bar{j} для различных точек на спинке профиля при ламинарном режиме течения в пограничном слое. Как видно, при достижении некоторого предельного

значения \bar{j} величина \bar{N} стабилизируется и наступает автомодельность относительно этого параметра. Для ламинарного режима течения эта область достигается при $\bar{j} > 800$, для турбулентного — при $\bar{j} > 350$. На рис. 73 приведена зависимость коэффициента \bar{N}

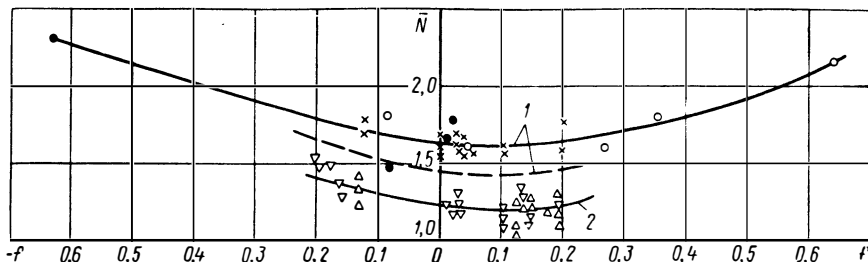


Рис. 73. Зависимость \bar{N} от \bar{f} при $\bar{j} > 800$ для ламинарного режима течения в пограничном слое (— — $\epsilon = 12\%$; - - - — $\epsilon = 6\%$):

Точки	Эпюра скорости	Номер профиля	Точ к		
			Эпюра скорости		Номер профиля
●	Выпуклая диффузорная	2; 3	△	Выпуклая конфузурная	2
○	Вогнутая конфузурная	1; 2	▽	»	1
×	Выпуклая диффузорная	4			

при ламинарном режиме течения в пограничном слое от форм-параметра \bar{f} в области автомодельности относительно \bar{j} , т. е. в области максимальной возможной интенсификации теплоотдачи за счет вращения. Кривые 1 соответствуют эпюрам скорости,

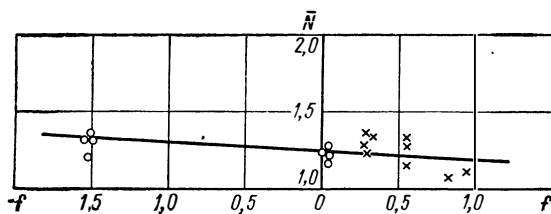


Рис. 74. Зависимость \bar{N} от \bar{f} при $\bar{j} > 800$ для турбулентного режима течения в пограничном слое:

○ — участок эпюры скорости с $\frac{dw}{ds} \approx 0$; × — с вогнутым конфузуром

имеющим вогнутую конфузурную и выпуклую диффузорную формы, кривая 2 соответствует выпуклой конфузурной эпюре скорости.

На рис. 74 приведена такая же зависимость для турбулентного режима течения в пограничном слое.

Характер этих зависимостей позволяет объяснить противоречивость данных, полученных различными исследователями по влиянию вращения на средние значения коэффициентов теплоотдачи в различных решетках профилей.

Приведенные на рис. 73 и 74 значения \bar{N} могут быть использованы в качестве локальных поправок на влияние вращения при выполнении расчета по методу, описанному в п. 27, для заданного профиля в неподвижной решетке:

$$Nu_x = \bar{N} Nu_x^H.$$

30. Теплообмен на торцовых стенках межпрофильных каналов

Как известно, суммарный тепловой поток, отводимый от потока газа к ротору турбины непосредственно в турбинной ступени, складывается из двух составляющих: теплового потока, передаваемого через торцы лопаток, и теплового потока, передаваемого через торцовые стенки межпрофильных каналов. При этом в турбинах современных конструкций имеет место такое соотношение площади корневого сечения лопаток и шага, что примерно две трети всего теплового потока передается через торцовые стенки. Интенсивность теплообмена между газом и торцовой стенкой нельзя считать по формулам для плоской пластины даже при большом значении отношения D_{cp}/l (где D_{cp} — диаметр колеса; l — высота лопатки), так как благодаря разности давлений на спинке и на вогнутой стороне профиля в соответствующих точках межпрофильного канала в пограничном слое, образующемся на торцовой стенке, возникает перетекание жидкости от вогнутой стороны к спинке, что создает пространственность обтекания стенки. Кроме того, в местах стыков лопаток друг с другом и с торцовыми стенками возникает взаимодействие пограничных слоев, образующихся на каждой из этих поверхностей, в результате чего в угловых областях дополнительно возникает сложное пространственное движение.

В настоящее время не имеется метода расчета теплообмена при таком сложном пространственном течении в пограничном слое. Существующие методы расчета динамического пространственного пограничного слоя [12, 152 и др.] не могут быть в данном случае использованы.

Вопрос взаимодействия плоских пограничных слоев в угловой области без теплообмена рассмотрен в [119]. В работе [55] идеи этого метода распространены на анализ теплового пограничного слоя двух пересекающихся плоских поверхностей и проведена оценка влияния угловых областей на суммарный теплообмен поверхности применительно к условиям торцовой стенки. В результате решения получены приближенные соотношения для оценки изменения теплового потока через торцовые стенки за счет взаимодействия. Эти соотношения можно представить в следующем виде.

Если обозначить через $Q_{\text{п}}$ полный поток, передаваемый через поверхность при наличии взаимодействия пограничных слоев в угловых областях, а через Q_0 — тепловой поток через ту же поверхность, рассчитываемый по формулам для пластины, то для ламинарных пограничных слоев

$$\frac{Q_{\text{п}}}{Q_0} = 1 - 0,8K \frac{L}{l} \text{Ri}^{-0,5}. \quad (\text{V.49})$$

Здесь L и l — длина и ширина пластины; величина K определяется из соотношения

$$\ln K = \frac{0,96 + 0,75T_w/t_0^*}{0,66 + 0,50T_w/t_0^*}. \quad (\text{V.50})$$

Для турбулентного пограничного слоя

$$\frac{Q_{\text{п}}}{Q_0} = 1 + \frac{K\delta_{0\text{т}}}{l} \left(\ln K + \ln \frac{\delta_{0\text{т}}}{\delta_{\text{л}}} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{V.51})$$

где $\delta_{0\text{т}}$ — толщина пограничного слоя; $\delta_{\text{л}}$ — толщина ламинарного подслоя; величина K определяется из соотношения

$$\ln K = \frac{0,77 \ln \frac{\delta_{0\text{т}}}{\delta_{\text{л}}} - 2,77 - 1,88T_w/t_0^*}{1 + T_w/t_0^*}. \quad (\text{V.52})$$

Рассмотренная задача значительно отличается от задачи о взаимодействии пограничных слоев, образующихся на поверхностях лопатки газовой турбины и на торцевой стенке межлопаточного канала. Если торцевую стенку, учитывая диаметры дисков стационарных турбин и соотношение между шагом решетки и длиной окружности диска, можно приближенно считать плоской, то лопатки реальных машин в корневых сечениях являются сильно изогнутыми, и их обтекание нельзя считать безградиентным. Естественно, что вследствие наличия продольного градиента давления толщина пограничного слоя $\delta_{0\text{т}}$ в турбинной решетке будет больше, чем на пластинах. Однако расчеты показывают, что эта разница будет меньше чем на порядок, поэтому соотношения (V.49) и (V.51) можно использовать для приближенной оценки влияния взаимодействия пограничных слоев в угловых областях на теплообмен в конкретных решетках.

Расчеты показали, что при значениях температурного фактора $\psi = T_w/T \approx 1$ изменение количества теплоты, отбираемой стенкой от газа, за счет взаимодействия пограничных слоев не превышает величины: для ламинарных пограничных слоев $Q_{\text{п}}/Q_0 - 1 = 0,1\%$; для турбулентных пограничных слоев $Q_{\text{п}}/Q_0 - 1 = 6\%$.

Из формул (V.49)—(V.52) видно, что это взаимодействие может быть существенным в решетках с тесным шагом, когда поперечные размеры соизмеримы с $\delta_{0\text{т}}$ и при значении T_w/t_0^* , значительно отличающемся от единицы.

Для оценки влияния пространственности течения в пограничном слое торцевой стенки межпрофильного канала, которая вызывается перетеканием жидкости под воздействием продольных и поперечных градиентов давления, обусловленных характером эпюры скорости вдоль обводов спинки и вогнутой стороны, профиля, можно использовать эмпирическую зависимость, полученную в работе [76].

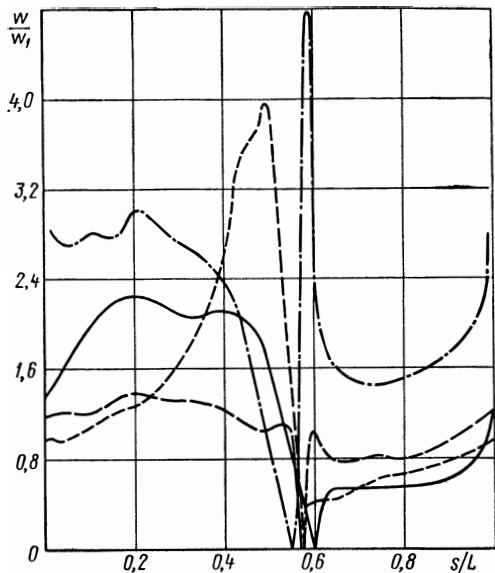


Рис. 75. Распределение скоростей вдоль обвода профилей в некоторых из исследованных решеток

Были исследованы турбинные решетки с тремя типами профилей при разных углах натекания и относительных шагах с целью изучения основных эпюр скоростей, характерных для различных условий обтекания турбинных решеток. Основные из исследованных эпюр скоростей представлены на рис. 75. Эксперименты проводились при малых скоростях при $R = \omega_1 b / \nu = (0,3 \div 4,5) \cdot 10^5$; $\psi = 0,54 \div 0,90$. На рис. 76 приведены экспериментальные средние значения \overline{Nu} на торцевых стенках в различных решетках при различных значениях R . Штриховые линии соответствуют формулам теплообмена при

ламинарном и турбулентном обтекании пластины. Как видно, экспериментальные данные для всех опытов дают две отчетливые зависимости: при $R < 6 \cdot 10^4$

$$\overline{Nu} = c_d^i R^{0,5}; \quad (V.53)$$

при $R > 1 \cdot 10^5$

$$\overline{Nu} = c_t^i R^{0,8}. \quad (V.54)$$

В промежуточной области $6 \cdot 10^4 < R < 10^5$ имеется переходная область с очень резким возрастанием числа \overline{Nu} при увеличении R .

Значения коэффициентов c_d^i и c_t^i в формулах (V.53) и (V.54), соответствующие параллельному смещению линий для различных решеток, определяются продольными и поперечными градиентами давления, влияние которых, как показал анализ опыт-

ных данных, можно приближенно выразить комплексным параметром I :

$$I = \int_0^1 \frac{\Delta \bar{\omega}^2}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2} d\bar{x} = \int_0^1 \frac{\Delta \omega^2}{\omega_2^2} d\bar{x}. \quad (\text{V.55})$$

Здесь ω_1, ω_2 — скорости на входе и на выходе из решетки; \bar{x} — криволинейная координата, отсчитываемая по средней линии межпрофильного канала; $\Delta \omega^2$ — разность квадратов локальных зна-

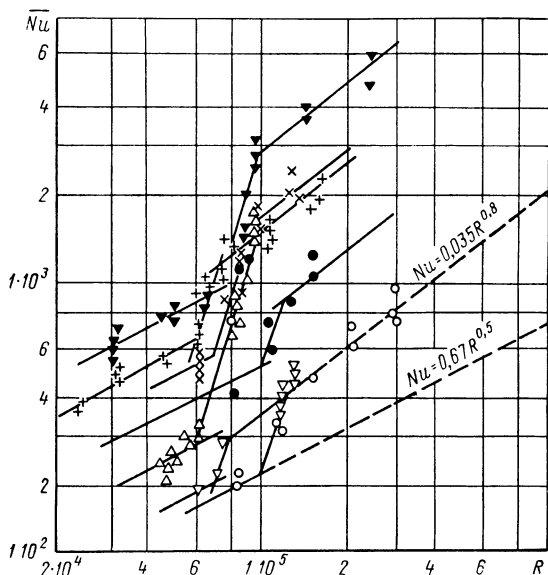


Рис. 76. Теплообмен на торцевой стенке межпрофильных каналов для различных решеток

чений скоростей в сходственных точках на спинке ($\omega_{i \text{ сп}}$) и на вогнутой стороне профиля ($\omega_{i \text{ вогн}}$), сходственные точки определяются как точки касания вписанных в межпрофильный канал окружностей; $\Delta \bar{\omega}^2$ — то же для относительных скоростей:

$$\Delta \omega^2 = \omega_{i \text{ сп}}^2 - \omega_{i \text{ вогн}}^2; \quad \Delta \bar{\omega}^2 = \left(\frac{\omega_{i \text{ сп}}}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega_{i \text{ вогн}}}{\omega_1}\right)^2.$$

На рис. 77 приведены значения $c_{\text{л}}$ и $c_{\text{т}}$ для различных решеток при различных значениях I . Как видно, зависимости получаются однозначными и могут быть аппроксимированы соотношениями:

$$c_{\text{л}} = 1,95I^{-1}; \quad (\text{V.56})$$

$$c_{\text{т}} = 0,11I^{-1,6}. \quad (\text{V.57})$$

Параметр I при наличии эпюры скоростей вдоль обвода профиля определяется с помощью элементарных расчетов.

В работе Сидун¹ приводится следующая эмпирическая формула для расчета теплоотдачи на торцевой стенке межпрофильного канала:

$$Nu = \left(0,032 + 0,014 \frac{\beta}{100} \right) \left(\frac{t}{b} \right)^{-0,175} R^{0,8}, \quad (V.58)$$

где β — угол поворота потока в канале; t — шаг решетки; b — хорда профиля. Здесь Nu и R считаются по хорде профиля b , по скорости на входе в решетку w_1 и по физическим константам, отнесенным к осредненной по каналу температуре потока.

Применимость этой формулы для практических расчетов ограничивается исследованной областью изменения определяющих параметров ($1,4 \cdot 10^5 \leq R \leq 6 \cdot 10^5$) и геометрических характеристик решеток профилей.

31. Теплообмен в полостях двухстенных корпусов

Развитие энергетики на современном этапе характеризуется стремлением к созданию мощных паросиловых блоков около- и сверхкритических параметров.

При этом наряду с требованиями повышения мощности единичных агрегатов и параметров их рабочих тел возникает дополнительное требование повышения маневренности машины. Следовательно, очень серьезным становится вопрос обеспечения надежности машины не только на номинальном, но и на переменных режимах работы, в связи с чем большое значение приобретает проблема правильного расчета температурных напряжений в элементах статора и расчета перемещений вследствие нагрева или охлаждения близлежащих конструктивных элементов, разделенных фиксированными зазорами. Основой для решения этой задачи является расчет температурных полей в элементах статора и ротора. Для того чтобы найти распределение температуры в каком-либо теле, недостаточно рассматривать только дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье, которое устанавливает связь между пространственными и временными изменениями температуры. Для решения задачи необходимо задать исходное температурное состояние для каждой

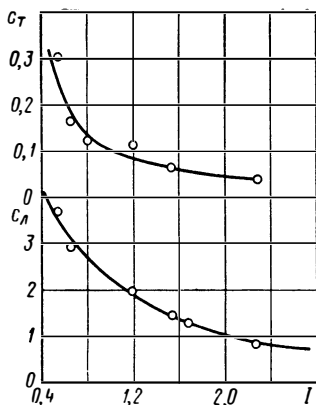


Рис. 77. Коэффициенты $c_{л}$ и $c_{т}$ для различных решеток

¹ Институт технической теплофизики АН УССР.

точки поля; кроме того, для элементов пространства, расположенных на границе поля и непосредственно контактирующих с внешней средой, необходимо задать совокупность пространственно-временных граничных условий, т. е. совокупность значений коэффициентов теплоотдачи на омываемых потоком теплопринимающих или теплоотдающих поверхностях рассматриваемого конструктивного элемента. Очевидно, что точность решения задачи о температурном поле в ряде случаев в одинаковой мере зависит как от точности метода решения уравнения теплопроводности, так и от точности задания граничных условий.

Методы решения задач теплопроводности будут рассмотрены в гл. VIII. В настоящем параграфе рассмотрим вопросы, связанные с заданием граничных условий теплообмена применительно к элементам конструкции корпуса турбины.

В настоящее время в паротурбостроении все большее распространение приобретают двухстенные конструкции корпусов, обеспечивающие уменьшение их тепловой инерции. Значительное место в этих конструкциях занимают различные камеры: межцилиндровые пространства, через которые пропускаются различные расходы пара (от небольшой доли всего потока пара, проходящего через проточную часть турбины, в так называемых прямоточных конструкциях), а также камеры отбора, выхлопа, камеры паровпуска. Аналогичного типа камеры начинают появляться и в некоторых конструкциях газовых турбин. В этих камерах происходит очень сложное движение основного потока пара, что связано с наличием выступов, поворотов, неровностей на стенках, с наличием встречных, боковых потоков и т. п.

Экспериментальные исследования теплоотдачи на моделях в межцилиндровых пространствах ЦВД и ЦСД современных мощных турбин, описанные в работах [73, 77], показали, что теплообмен в межцилиндровом пространстве определяется взаимодействием вынужденной и естественной конвекции. На рис. 78 приведены картины течения, полученные с помощью теневого прибора ИАБ-451 в плоских моделях трех типов межцилиндровых пространств.

Стрелками показано направление движения основного потока. Рабочий участок первой модели (рис. 78, а) соответствует прямоточной конструкции, рабочие участки второй (рис. 78, б) и третьей (рис. 78, в) моделей соответствуют петлевым конструкциям. В первой модели режим течения в пограничном слое был переходный, во второй и третьей — турбулентный. Визуальные исследования показали, что при различных соотношениях чисел Gr и R или возникают интенсивные флуктуации, связанные с преобладающим влиянием естественной конвекции, причем в этом случае наблюдается асимметрия процессов турбулентного обмена на нижней и верхней стенках, или эти флуктуации подавляются вынужденной конвекцией и картина течения становится симметричной,

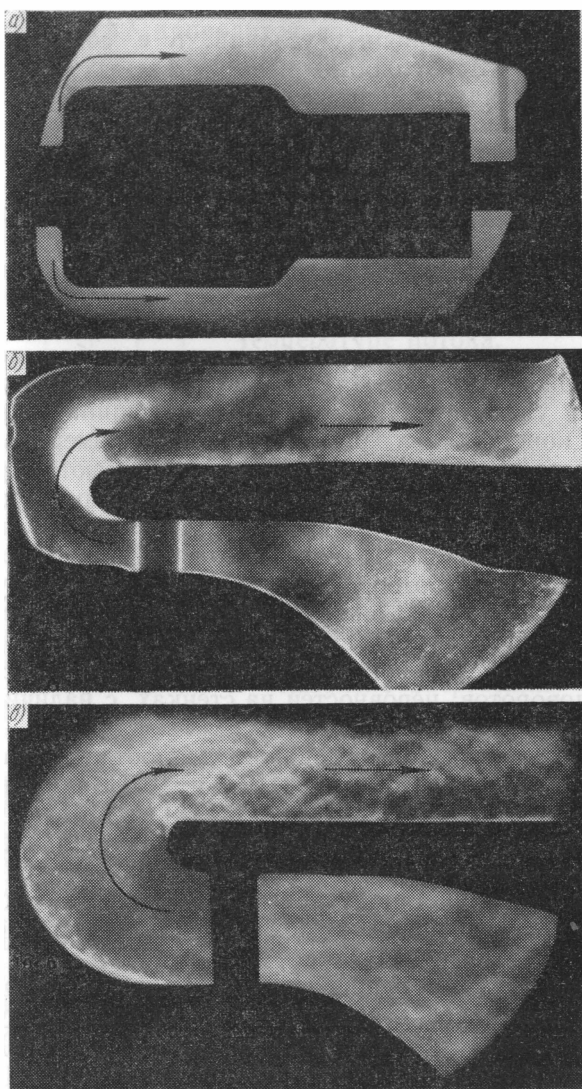


Рис. 78. Картины течения в плоских моделях трех типов межцилиндрового пространства

или имеет место взаимодействие влияний вынужденной и естественной конвекции.

Основные исследования были проведены на объемных моделях, плоские оптические модели в основном применялись не для количественных, а для качественных исследований.

В этих исследованиях установлено, что главными параметрами, определяющими интенсивность теплообмена в межцилиндровых пространствах, являются числа Рейнольдса R , Грасгофа Gr и отношения Gr/R ; $\Delta T/\delta T$, где ΔT — разность температур противоположащих стенок; δT — разность температур стенки и потока.

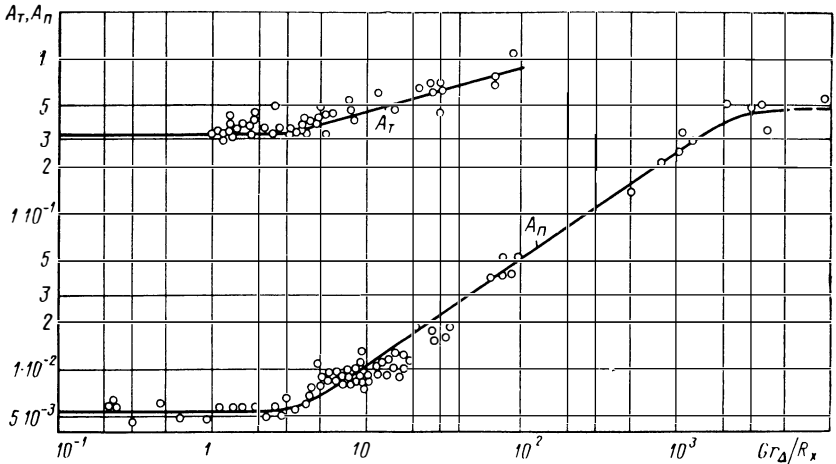


Рис. 79. Зависимость интенсивности теплообмена в межцилиндровом пространстве от параметра Gr_{Δ}/R_x

Если число Грасгофа рассчитывается по разности температур ΔT и по расстоянию δ между наружной и внутренней стенками межцилиндрового пространства, оно обозначается Gr_{Δ} . В области значений $\delta T/\Delta T > 1,5$ при $Gr_{\Delta}/R_x \leq 3$ влияние этого параметра на интенсивность теплообмена практически не обнаруживается и

$$Nu_x = c R_x^n Gr_{\Delta}^{-0,15}, \quad (V.59)$$

где $n = 1,15$ для переходного режима течения в пограничном слое и $n = 0,8$ для турбулентного режима. Число Рейнольдса R_x рассчитывается по средней расходной скорости и координате x , отсчитываемой от входа в межцилиндровое пространство, при этом коэффициент ν рассчитывается по температуре потока.

При $Gr_{\Delta}/R_x > 3$ начинается заметное возрастание интенсивности теплообмена. Из приведенных на рис. 79 данных виден характер изменения комплексов

$$A_T = \frac{Nu_x Gr_{\Delta}^{0,15}}{R_x^{0,8}} \quad \text{и} \quad A_n = \frac{Nu_x Gr_{\Delta}^{0,15}}{R_x^{1,15}}$$

соответственно в турбулентном и переходном режимах.

При значениях $Gr_{\Delta}/R_x > 2 \cdot 10^3$, достигнутых в опытах [77] только на переходном режиме течения в пограничном слое, намечается стабилизация комплекса A_n (около 0,47), причем возрастание этого комплекса по отношению к его значению в первой автомодельной области (при $Gr_{\Delta}/R_x \leq 3$) достигает примерно двух порядков. Этот факт может иметь очень существенное значение на режимах пуска и остановки, когда возможны большие значения параметра Gr_{Δ}/R_x . Кроме того, в области этих режимов возможны значительные колебания параметра $\frac{\delta T}{\Delta T}$. Опыты [77] показали, что при $\frac{\delta T}{\Delta T} < 1,5$ возможны очень сильные колебания

численных значений комплекса A_n . Например, при $\frac{\delta T}{\Delta T} = 0,5$ диапазон колебаний A_n составляет примерно 300% (от 0,006 до 0,015). Так как такие колебания сопряжены с возникновением температурных колебаний в стенке и связанных с ними дополнительных усталостных напряжений, то, очевидно, следует избегать режимов с $\frac{\delta T}{\Delta T} < 1$ при работе машины на нерасчетных режимах.

Обработка опытных данных, полученных в работах [77, 73], позволила получить следующее соотношение для расчета теплоотдачи в межцилиндровом пространстве:

$$Nu_x = a_0 \frac{R_x^n}{Gr_{\Delta}^{0,15}} \left[1 + 0,16 \left(\frac{Gr_{\Delta}}{R_x} - 3 \right)^m \right]. \quad (V.60)$$

Эмпирические коэффициенты a_0 , m , n имеют следующие численные значения: при турбулентном режиме течения в пограничном слое межцилиндрового пространства (линия A_T на рис. 79) $n = 0,8$; $m = 0,5$; $a_0 = 0,33$; при переходном режиме течения (линия A_n на рис. 79) $n = 1,15$; $m = 0,8$; $a_0 = 9,5 \cdot 10^{-3}$ для стенок, ориентированных так, что направление теплового потока соответствует направлению свободной конвекции, и $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ в случае несоответствия этих направлений.

При $Gr_{\Delta}/R_x \approx 3$ экспериментальные данные аппроксимируются формулой

$$Nu_x = a_0 \frac{R_x^n}{Gr_{\Delta}^{0,15}}. \quad (V.61)$$

В случае $Gr_{\Delta}/R_x > 2 \cdot 10^3$ при переходном режиме течения наступает вторая область стабилизации, в которой

$$Nu_x = 0,47 \frac{R_x^{1,15}}{Gr_{\Delta}^{0,15}}. \quad (V.62)$$

Сравнение этой зависимости с опытными данными ХТГЗ [77] по измерению интенсивности теплообмена в межцилиндровом про-

странстве ЦВД турбины К-300-240 при натуральных испытаниях дало удовлетворительное соответствие данных. Формулы (V.59)—(V.61) справедливы в исследованном диапазоне изменения определяющих параметров:

для турбулентного режима течения

$$4 \cdot 10^5 \leq R_x \leq 3 \cdot 10^6; \quad 10^4 \leq Gr_{\Delta} \leq 2 \cdot 10^7;$$

$$1 \leq Gr_{\Delta}/R_x \leq 100; \quad 1 \leq \delta T/\Delta T \leq 40;$$

для переходного режима

$$10^3 \leq R_x \leq 10^5; \quad 3 \cdot 10^3 \leq Gr_{\Delta} \leq 3 \cdot 10^6;$$

$$1 \leq \delta T/\Delta T \leq 10; \quad 0,2 \leq Gr/R_x \leq 8 \cdot 10^3.$$

Полученные зависимости следует использовать только для оценки порядка величин коэффициентов теплоотдачи в межцилиндровых пространствах ЦВД и ЦСД, так как в реальных турбинах эти пространства имеют более сложную конфигурацию, связанную с наличием дополнительных выступов и поворотов потока в проточной части. Кроме того, некоторые данные говорят о возможности закрутки потока на входе. В связи с этим для надежной апробации формул необходимо проведение опытов по измерению теплоотдачи на натуральных турбинах непосредственно.

Для межцилиндровых пространств ЦНД мощных турбин, где возможно возникновение дисперсных влажнопаровых потоков и соответственно выпадение влаги на стенках, полученные соотношения не могут быть применены. Этот вопрос рассмотрен в гл. VI.

Еще более сложной является картина течения в камерах отбора, выхлопа и паровпуска. Наиболее распространенной конструкцией камер отбора и выхлопа является кольцевая замкнутая камера с центральным кольцевым вводом потока пара и выхлопом его через параллельный оси турбины эксцентричный патрубок, камер паровпуска — кольцевая замкнутая камера с вводом потока через эксцентричный параллельный оси патрубок и выхлопом через концентричную кольцевую щель.

Результаты исследований ЦКТИ характера течения и интенсивности теплообмена в таких типовых камерах показали, что они определяются характером ввода и вывода потока из камеры.

Параметры, определяющие интенсивность теплообмена в пределах камеры одного типа, оказались теми же, что и в случае межцилиндрового пространства, т. е. и в этом случае имело место совместное действие естественной и вынужденной конвекции. При кольцевом вводе в камерах отбора и выхлопа (при отводе в первой через один патрубок, а во второй — через два) интенсивность

теплообмена кольцевых поверхностей с погрешностью, не превышающей $\pm 25\%$, аппроксимируется соотношением¹

$$Nu = 1,2 \cdot 10^4 \frac{R^{0,8}}{Gr_\delta} [1 + 0,06 (\bar{G} - 3)^{1,3}], \quad (V.63)$$

а при $Gr_\delta/R < 3$ — более простой формулой

$$Nu = 1,2 \cdot 10^4 R^{0,8} Gr_\delta^{-1}. \quad (V.64)$$

Число Грасгофа Gr_δ в этих формулах рассчитывается по разности температур δT и по эквивалентному диаметру. Параметр \bar{G}

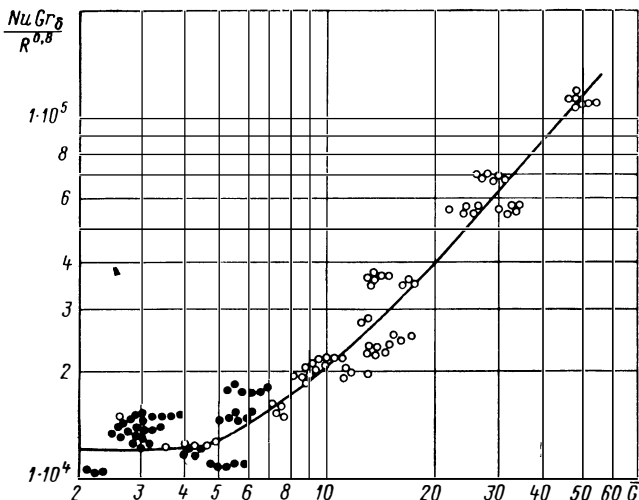


Рис. 80. Зависимость интенсивности теплообмена от определяющих параметров в моделях камер отбора и выхлопа:

○ — камера отбора; ● — камера выхлопа

представляет собой отношение Gr_δ/R и учитывает некоторую неравномерность скорости по развертке кольцевой щели; при изменении угла поворота φ от 0 до 180°

$$\bar{G} = \frac{Gr_\delta}{R} \left(\frac{\varphi}{90^\circ} \right)^{-0,3} \quad (V.65)$$

На рис. 80 приведено сопоставление результатов расчетов по формуле (V.63), обозначенных линией, с опытными данными, нанесенными точками. Опыты проведены в следующем диапазоне изменения параметров: в модели камеры отбора

$$R = (1,5 \div 5,5) 10^4; \quad Gr_\delta = (0,2 \div 2,0) 10^6; \\ Gr_\delta/R = 0,6 \div 30; \quad \delta T/\Delta T > 1;$$

¹ В формулах число R считается по средней расходной скорости и эквивалентному диаметру; ν относится к средней температуре $0,5 (T + T_w)$.

в модели камеры выхлопа

$$R = (1 \div 4) 10^5; \text{Gr}_\delta = (5 \div 7) 10^5; \text{Gr}_\delta/R = 1,6 \div 6,5; \\ \delta T/\Delta T > 1.$$

Практическое совпадение данных для этих двух камер говорит о малом влиянии выхлопных патрубков на характер течения в камерах. Аналогичные выводы были получены в результате численного эксперимента, выполненного¹ в ЦКТИ на установке ЭГДА-6/53. В этой работе подробно исследовалось расположение линий тока φ и линий равного потенциала ψ в сечении кольцевого канала при равномерном распределении источников (ввод пара) по внутреннему кольцу и различном количестве и расположении стоков (патрубки выхлопа пара). Как видно из рис. 81, возмущающее действие патрубков является значительным только в ближайшей к ним области.

Для теплоотдачи на торцевой стенке камеры отбора в работе ЦКТИ получена формула

$$\text{Nu} = 2,6 \cdot 10^4 \frac{R^{0,8}}{\text{Gr}_\delta}, \quad (\text{V.66})$$

справедливость которой проверена в диапазоне изменения параметров:

$$R = (1 \div 4) 10^5; \text{Gr}_\delta = (5 \div 7) 10^5; \text{Gr}_\delta/R = 1,6 \div 6,0.$$

Течение в камере паровпуска, в которой имеет место ввод через два цилиндрических патрубка и выход через концентрическую кольцевую щель, имеет гораздо менее упорядоченный характер, и точность измерения интенсивности теплоотдачи здесь меньше. В опытах ЦКТИ для этой модели получена приближенная формула

$$\text{Nu} = 0,7 \cdot 10^4 \frac{R^{0,8}}{\text{Gr}_\delta} [1 + 1,32 (\bar{G}_1 - 0,3)^{0,9}], \quad (\text{V.67})$$

где

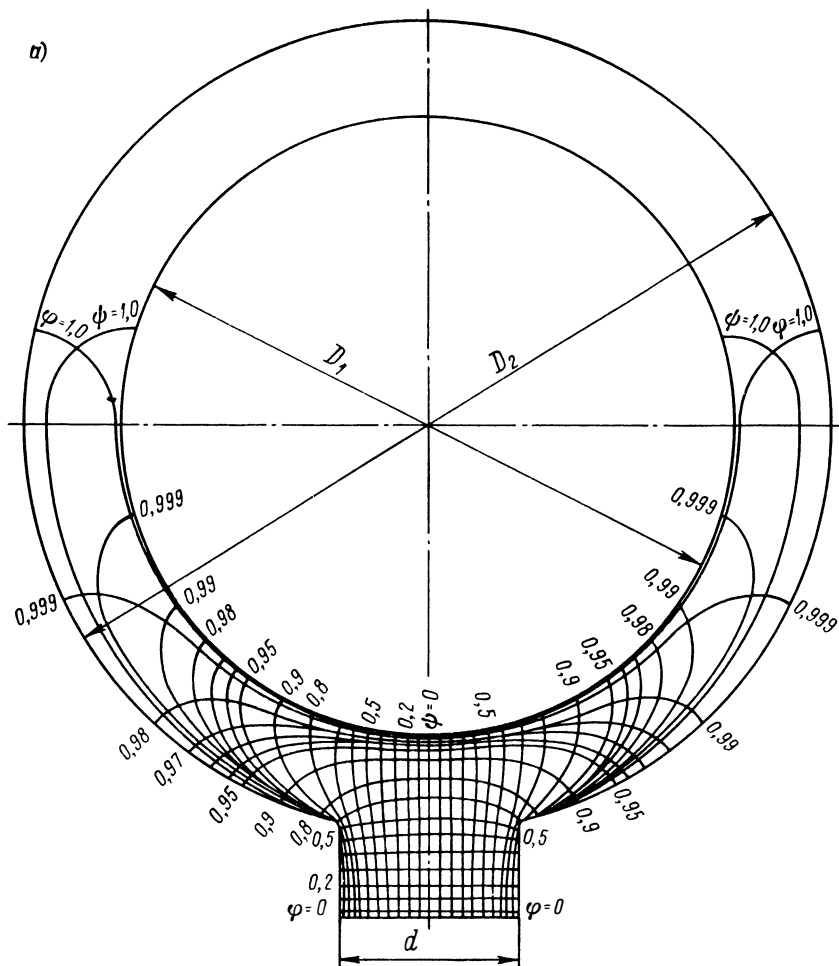
$$\bar{G}_1 = \frac{\text{Gr}_\delta}{R} \left(\frac{\varphi}{90^\circ} \right)^{-1}. \quad (\text{V.68})$$

Формула (V.67) с погрешностью $\pm 25\%$ аппроксимирует опытные данные в диапазоне изменения параметров:

$$R = (1,8 \div 4,2) 10^5; \text{Gr}_\delta = (0,1 \div 1,0) 10^6; \text{Gr}_\delta/R = 0,33 \div 4,25.$$

Других систематических опытных данных в этой области не имеется, поэтому формулы (V.63), (V.67) могут использоваться для приближенной оценки значений интенсивности теплоотдачи для камер типа исследованных в указанном диапазоне изменения параметров.

¹ Работа была выполнена Н. Я. Есипенко.



32. Теплообмен в кольцевых зазорах

Отдельные участки ротора и статора паровых и газовых турбин омываются потоком, проходящим по кольцевому зазору между соответствующими элементами ротора и статора, причем особенность этих кольцевых зазоров заключается в том, что из двух соосных цилиндров, образующих зазор, внутренний цилиндр вращается, а наружный является неподвижным. Течение газа в кольцевом канале такого типа имеет сложный характер, так как оно происходит в поле активного действия массовых инерционных сил. На основное осевое движение газа или пара накладывается так называемое вторичное течение второго рода — течение с макровихрями. В отличие от неупорядоченного турбулентного дви-

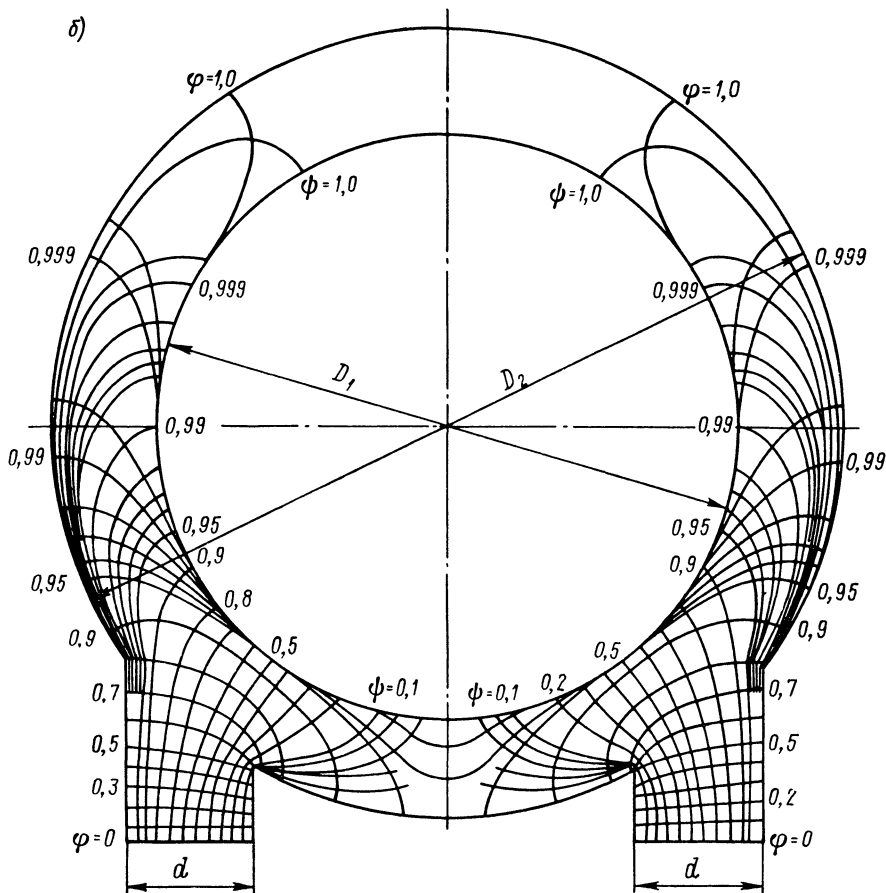


Рис. 81. Линии тока и линии равных потенциалов в кольцевых камерах: а — $\bar{D} = 0,773$; $\bar{d} = 0,223$; б — $\bar{D} = 0,736$; $\bar{d} = 0,156$ ($\bar{D} = D_1/D_2$; $\bar{d} = d/D_2$)

жения с нерегулярными пульсациями в этом случае регулярно возникают кольцеобразные вихри, симметричные относительно оси цилиндра и расположенные на фиксированном расстоянии друг от друга. На рис. 82 схематично изображены вихри, возникающие в кольцевом канале при вращении внутреннего цилиндра и при отсутствии вынужденного (аксиального) движения. При наличии аксиального движения до определенных значений аксиальной скорости эти вихри не разрушаются, а двигаются вместе с потоком, не изменяя своих размеров и формы. Возникновение в потоке макровихрей способствует трех- или даже четырехкратному увеличению интенсивности теплообмена.

В работе [206] с помощью измерений пульсаций скорости, фотографирования потока и визуальных наблюдений были

обнаружены четыре режима, характерные для осевого течения в кольцевом канале с внутренним вращающимся цилиндром: ламинарный, ламинарный с вихрями Тейлора, турбулентный, турбулентный с вихрями Тейлора. Эти данные позже были подтверждены и другими исследователями [93, 94, 245; и др.].

Интенсивность теплообмена в кольцевом канале существенно зависит от режима течения и определяется, как показали теоре-

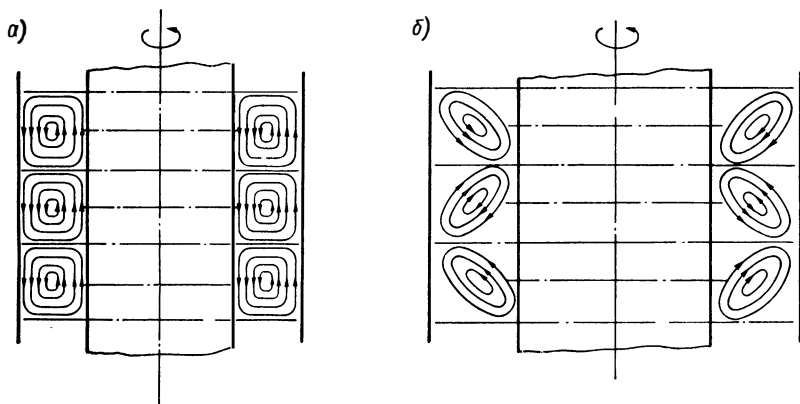


Рис. 82. Схема движения вихрей Тейлора: а — ламинарный режим течения; б — турбулентный режим течения

тические и экспериментальные исследования, следующими параметрами: значениями чисел Рейнольдса

$$R_z = \frac{v_z 2b}{\nu} \quad \text{и} \quad R_\varphi = \frac{v_\varphi 2b}{\nu},$$

рассчитанных соответственно по аксиальной v_z и окружной v_φ скоростям; соотношением R_φ/R_z ; числом Pr ; геометрической характеристикой, в качестве которой вводится отношение удвоенной ширины кольцевого зазора $2b = 2(r_2 - r_1)$ к среднему радиусу $r_{\text{ср}} = (r_2 + r_1)/2$.

Вместо числа R_φ часто вводят критерий Тейлора Ta , который связан с R_φ следующим соотношением:

$$Ta = \frac{\omega r_1^{0,5} b^{1,5}}{\nu} = \frac{1}{2} R_\varphi \sqrt{\frac{r_2 - r_1}{r_1}}. \quad (\text{V.69})$$

Условие перехода от ламинарного режима течения в кольцевом канале, образованном вращающимися цилиндрами при отсутствии аксиального потока, к ламинарному с вихрями Тейлора было получено аналитически и экспериментально в работе [8] в следующем виде:

$$R_{\varphi \text{ кр}} = \frac{v_\varphi (r_2 - r_1)}{\nu} = 41,2 \sqrt{\frac{r_1}{r_2 - r_1}}, \quad (\text{V.70})$$

где $R_{\phi, \text{кр}}$ — критическое значение числа R_{ϕ} , или, если перейти к критерию Тейлора,

$$Ta_{\text{кр}} = 20,6. \quad (V.71)$$

При наличии осевого потока устойчивость ламинарного движения повышается и критические значения R_{ϕ} или Ta возрастают. На рис. 83 приведены линии раздела областей с различными режимами течения, полученные экспериментально в работах [206, 93]. Как видно, наличие того или иного режима течения зависит от абсолютных значений чисел R_z и Ta , а также и от их соотно-

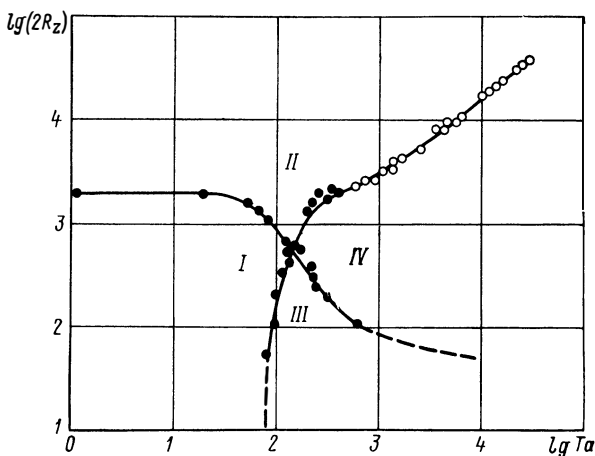


Рис. 83. Границы областей с различными режимами течения в кольцевом канале между вращающимися цилиндрами

шения. При сравнительно небольших значениях R_z и Ta имеет место ламинарное течение (область I), при больших значениях R_z и небольших и средних значениях Ta — турбулентное течение (область II), при больших значениях Ta и небольших R_z возникает ламинарное течение с вихрями Тейлора (область III), при больших Ta и R_z — турбулентное течение с вихрями Тейлора (область IV).

В общем случае интенсивность теплоотдачи зависит от критериев R_z и Ta (или R_{ϕ}), однако в зависимости от соотношения между R_z и R_{ϕ} могут возникнуть два предельных режима течения: 1) когда R_z очень велико и влияние вращения подавляется основным движением, что равносильно движению по кольцевой щели между неподвижными цилиндрами; 2) когда R_{ϕ} очень велико и влияние вращения становится определяющим, что равносильно движению с вращением, но при отсутствии осевого потока. Основные исследования, опубликованные в литературе, относятся именно к этим крайним случаям.

На рис. 84 приведены опытные данные различных авторов [8, 181] по теплоотдаче в кольцевом канале ($b/r_{\text{ср}} = 0,054 \div 0,246$) при вращении внутреннего цилиндра, но при отсутствии аксиального потока для ламинарного режима течения. Как видно, интенсивность теплообмена для кольцевых зазоров различной ширины b однозначно определяется значением модифицированного числа Тейлора

$$Ta_{\text{мод}} = \frac{\omega^2 r_{\text{ср}} b^3}{\nu^2} \frac{1}{F_d},$$

где F_d — геометрический фактор, зависящий от b . Из рис. 84 видно, что для $Ta_{\text{мод}} \leq 1700$ $Nu = \text{const} = 2$, что соответствует

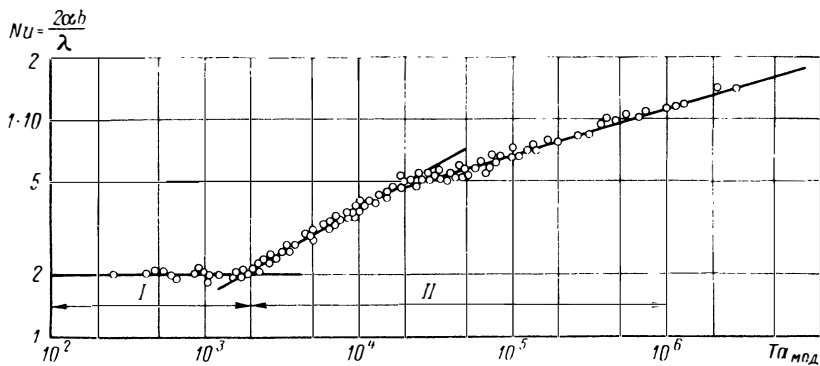


Рис. 84. Зависимость $Nu = N(Ta_{\text{мод}})$ для ламинарного режима течения

чисто ламинарному режиму (область I), когда теплообмен осуществляется только за счет теплопроводности. При дальнейшем увеличении $Ta_{\text{мод}}$ интенсивность теплоотдачи начинает возрастать и возникает ламинарный режим с вихрями Тейлора (область II). Для определения интенсивности теплоотдачи в этой области рекомендуются следующие зависимости:

при $1,7 \cdot 10^3 < Ta_{\text{мод}} < 10^4$

$$Nu = 0,128 Ta_{\text{мод}}^{0,36}, \quad (V.72)$$

при $10^4 < Ta_{\text{мод}} < 10^7$

$$Nu = 0,409 Ta_{\text{мод}}^{0,241}. \quad (V.73)$$

На рис. 85 приведены аналогичные опытные данные для ламинарного течения при наличии аксиального движения. Как видно, с увеличением R_z интенсивность теплоотдачи в ламинарном режиме с вихрями Тейлора уменьшается.

Результаты аналогичных исследований для турбулентных режимов течения приведены на рис. 86¹, из которого видно, что

¹ Здесь Nu^* отличается от Nu тем, что коэффициент теплоотдачи α^* отнесен к разности температур ротора и статора.

при малых значениях числа Ta интенсивность теплоотдачи от него не зависит и определяется только значениями R_z . Это область чисто турбулентного режима, когда вихри практически не возникают. Для этого режима в работе [93] получено соотношение

$$Nu^* = 0,018R_z^{0,8}. \quad (V.74)$$

При дальнейшем увеличении скорости вращения коэффициент теплоотдачи начинает плавно возрастать — наступает турбулентный режим течения с макровихрями, при котором интенсивность теплоотдачи зависит и от R_z , и от R_ϕ (или Ta). При $Ta > 10^4$ наступает зона автомодельности относительно R_z и интенсив-

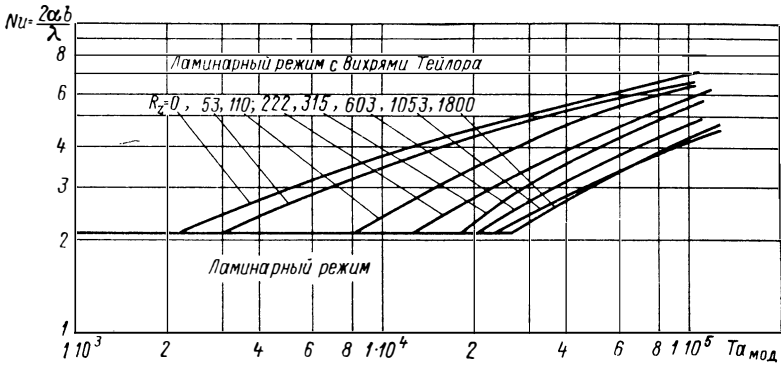


Рис. 85. Зависимость $Nu = N(Ta_{\text{мод}}, R_z)$ для ламинарного режима течения

ность теплообмена определяется только значением Ta (или R_ϕ). Этот режим в работах [245, 169] выделен как особый (пятый режим течения) и назван развитым турбулентным с вихрями Тейлора. Интенсивность теплоотдачи для этого режима по данным работ [245, 169] определяется зависимостями:

$$Nu^* = 0,015R_\phi^{0,8}, \quad (V.75)$$

$$Nu^* = 0,092(Ta^2 Pr)^{0,33}. \quad (V.76)$$

Формуле (V.76) соответствует сплошная линия в правой части рис. 86. Эти же опытные точки могут быть аппроксимированы формулой

$$\frac{Nu^*}{Pr^{1/3}} = 0,038Ta^{0,8} \quad (V.77)$$

(штриховая линия на рис. 86).

Для определения условий перехода от турбулентного режима течения к турбулентному режиму с вихрями Тейлора в работе [93] предлагается формула

$$Ta_{кр} \approx 0,015R_z^{1,5}, \quad (V.78)$$

а для определения условий возникновения развитого турбулентного режима с вихрями Тейлора [169] — формула

$$Ta_{кр} = 133,5 R_z^{0,445}. \quad (V.79)$$

Для учета влияния критериев R_z и R_Φ в области их совместного действия на интенсивность теплоотдачи в работах [194, 94] предложен условный критерий Рейнольдса

$$R_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon^2 (r_2 - r_1)}{\nu}. \quad (V.80)$$

Здесь $v_\varepsilon = \sqrt{v_z^2 + A^2 v_\Phi^2}$ — так называемая эффективная скорость; $A = f\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1}\right)$ — некоторая функция от относительной ширины зазора.

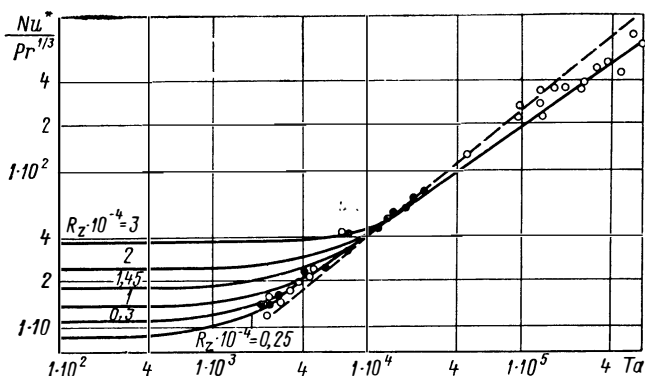


Рис. 86. Зависимость $Nu = N(Ta, R_z)$ для турбулентного режима течения:

○ — $(r_2 - r_1)/r_1 = 0,06 \div 3,5$ [245, 169]; ● — $(r_2 - r_1)/r_1 = 0,271$ [93]

В литературе имеется много различных эмпирических формул для расчета частных случаев течения в кольцевом канале при каждом из режимов течения и обобщенных рекомендаций.

В задачах турбостроения наиболее вероятно существование турбулентных режимов течения в кольцевых зазорах, поэтому на них следует остановиться подробнее.

В работе [70] предлагаются следующие обобщенные зависимости, построенные на основе анализа всех опубликованных опытных материалов для трех турбулентных режимов течения.

Идея обобщения сводится к предположению, что в качестве основных критериев, определяющих интенсивность теплообмена, следует рассматривать R_ε и R_Φ/R_z , связанные соотношением

$$R_\varepsilon = R_\Phi \sqrt{A^2 + \frac{R_z^2}{R_\Phi^2}} = R_z \sqrt{1 + A^2 \frac{R_\Phi^2}{R_z^2}}. \quad (V.81)$$

При $R_\varphi/R_z \ll 1$ для воздуха имеет место соотношение

$$Nu = 0,018R_z^{0,8}, \quad (V.82)$$

или

$$Nu = 0,018R_z^{0,8} \left(1 + A^2 \frac{R_\varphi^2}{R_z^2} \right)^{0,4}. \quad (V.83)$$

Если обозначить $Nu_0 = 0,018R_z^{0,8}$, то

$$\bar{N} = \frac{Nu}{Nu_0} = \left(1 + A^2 \frac{R_\varphi^2}{R_z^2} \right)^{0,4},$$

или

$$\bar{N}^{2,5} = 1 + A^2 \frac{R_\varphi^2}{R_z^2}. \quad (V.84)$$

На рис. 87 точками показаны значения этой функции, полученные из обработки опытных данных различных авторов для

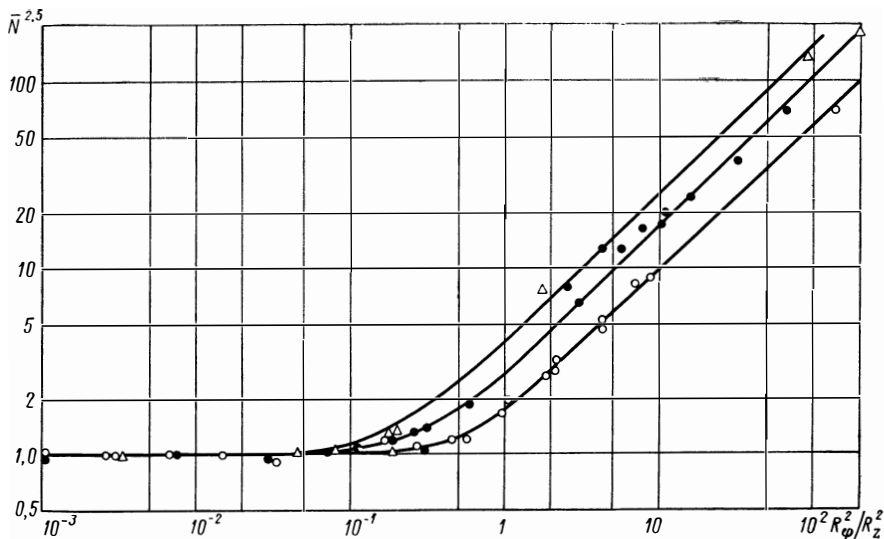


Рис. 87. Зависимость $\bar{N} = N \left(\frac{R_\varphi^2}{R_z^2} \right)$:

○ — $(r_2 - r_1)/r_1 = 0,271$; ● — $(r_2 - r_1)/r_1 = 0,05$; △ — $(r_2 - r_1)/r_1 = 0,04$

зазоров различной ширины. Как видно, влияние R_φ^2/R_z^2 становится заметным при $R_\varphi^2/R_z^2 > 0,1$, до этих значений $Nu \approx Nu_0$, при увеличении R_φ^2/R_z^2 становится заметным и влияние ширины зазора. Из последующей обработки этих данных было получено выражение

$$A = 0,65 \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1} \right)^{-0,3}. \quad (V.85)$$

Результаты расчета по формуле (V.84) с использованием (V.85) показаны на рис. 87 линиями.

Используя полученные соотношения и формулы (V.74) и (V.77), можно получить обобщенную формулу

$$\frac{Nu}{Pr^{1/3}} = \left\{ \frac{0,020}{\left(1 + A^2 \frac{R_\varphi^2}{R_z^2}\right)^{0,4}} + 0,038 \frac{\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1}\right)^{0,4}}{\left[4 \left(A^2 + \frac{R_\varphi^2}{R_z^2}\right)\right]^{0,4}} \right\} R_e^{0,8} = (A_1 + A_2) R_e^{0,8}. \quad (V.86)$$

На рис. 88 приведены расчетные значения коэффициентов A_1 и A_2 и их суммы при различных значениях R_φ^2/R_z^2 . По характеру

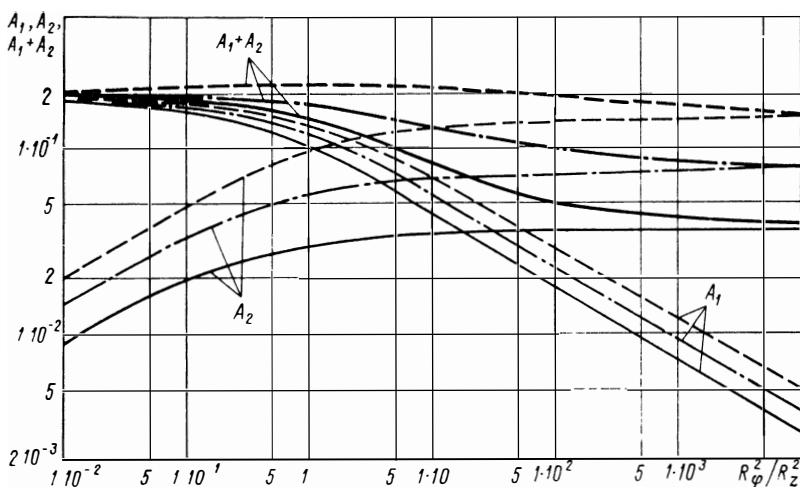


Рис. 88. Функции A_1 и A_2 :

--- $\bar{b} = 0,271$; -.-.- $\bar{b} = 0,105$; — $\bar{b} = 0,040$

изменения кривых можно судить об изменении роли аксиальной и вращательной составляющих скорости, если учесть, что первая характеризуется коэффициентом A_1 , а вторая — коэффициентом A_2 . В исследованных пределах изменения относительной ширины зазора $\bar{b} = (r_2 - r_1)/r_1 = 0,04 \div 0,44$ суммарный коэффициент в формуле (V.86) при $R_\varphi^2/R_z^2 < 0,1$ практически не зависит от ширины зазора и колеблется в пределах $A_1 + A_2 = 0,019 \div 0,021$. При увеличении R_φ^2/R_z^2 влияние \bar{b} начинает проявляться, значение $A_1 + A_2$ уменьшается, приближаясь асимптотически к некоторым предельным для каждого \bar{b} значениям. Такой характер изменения определяется характером изменения коэффициентов A_1 и A_2 . При $R_\varphi^2/R_z^2 < 0,1$ суммарный коэффи-

циент почти полностью определяется коэффициентом A_1 , который очень мало зависит от \bar{b} . По мере увеличения R_φ^2/R_z^2 абсолютное значение A_1 начинает уменьшаться, и при $R_\varphi^2/R_z^2 \geq 10^3$ его доля в значении суммарного коэффициента не превышает 10%. Коэффициент A_2 , наоборот, сильно зависит от \bar{b} , но при малых R_φ^2/R_z^2 его абсолютные значения составляют не более 1% от суммарного коэффициента. По мере возрастания R_φ^2/R_z^2 значения A_2 возрастают примерно до $R_\varphi^2/R_z^2 \approx 10$, после чего они очень мало изменяются и при $R_\varphi^2/R_z^2 \geq 10^3$ практически полностью определяют значение суммарного коэффициента. Наиболее сильно совместное действие коэффициентов A_1 и A_2 проявляется в области, заключенной в диапазоне $R_\varphi^2/R_z^2 = 0,5 \div 100$, где возможны наибольшие отклонения различных опытных данных друг от друга.

Формула (V.86) аппроксимирует все опубликованные экспериментальные данные по теплообмену в кольцевом канале с погрешностью, не превышающей $\pm 20\%$, в следующем диапазоне изменения параметров: $R_e = 3 \cdot 10^3 \div 10^6$; $R_\varphi^2/R_z^2 = 0,01 \div 10^4$; $(r_2 - r_1) r_1 = 0,04 \div 0,44$.

33. Теплообмен в лабиринтовых уплотнениях

Лабиринтовые уплотнения, служащие для уменьшения протечек пара в турбине, в общей сложности занимают около 40% длины ее проточной части. Надежность работы турбины в значительной мере зависит от возможности правильного определения теплового состояния участков ротора и статора, занятых концевыми и промежуточными уплотнениями, как с точки зрения точности определения теплонапряженности этих элементов, так и с точки зрения правильности определения их тепловых расширений. Так как для уменьшения протечек через лабиринтовое уплотнение, т. е. для повышения эффективности уплотнения, необходимо уменьшение зазоров между частями уплотнения, расположенными на статоре и роторе, то очень важно уметь правильно рассчитать тепловые расширения элементов, образующих зазор малой ширины. При неправильном учете тепловых расширений возможно возникновение задевания, которое неизбежно приведет к аварии турбины.

Чтобы заранее предусмотреть условия возникновения подобных неблагоприятных явлений, необходимо уметь расчетным путем определять коэффициенты теплоотдачи в зоне уплотнений и затем с достаточной степенью достоверности рассчитать тепловое и напряженное состояние соответствующих участков ротора и статора.

На рис. 89 приведены четыре наиболее характерных для современного паро-, газотурбостроения типа лабиринтовых уплотнений

На пути движения газа в уплотнениях находятся пережимы, поперечные перегородки, которые способствуют возникновению отрывных течений и не позволяют формироваться в потоке вихрям Тейлора, как это имело место в кольцевых каналах, описанных в предыдущем параграфе.

Задача об обтекании и теплообмене в лабиринтовых уплотнениях является весьма сложной с точки зрения физической и математической постановки; до настоящего времени она не решена аналитически, поэтому единственно возможным путем получения данных по интенсивности теплоотдачи в уплотнениях является путь прямого эксперимента. Условия работы уплотнений в турбине исключают возможность постановки натурного эксперимента,

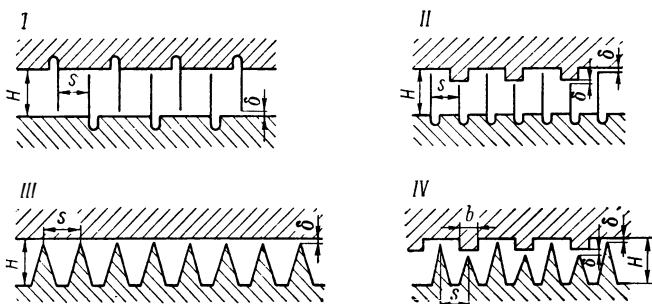


Рис. 89. Основные типы уплотнений паровых и газовых турбин

поэтому все имеющиеся в литературе данные относятся к исследованиям на модельных установках.

В работах [71, 163] исследования проводились на осесимметричных моделях с вращающимся ротором и неподвижным статором. Было показано, что интенсивность теплообмена в уплотнениях значительно больше, чем в гладком кольцевом канале, и что при $R_\phi/R_z \leq 2,5 \div 3,0$ (больших значений R_ϕ/R_z в эксперименте не удалось получить) влияния вращения на интенсивность теплообмена в лабиринтовых уплотнениях практически не наблюдается. В связи с этим фактом и трудностью создания в эксперименте условий вращения, а также трудностью измерений в условиях вращения все остальные исследования проводились на плоских моделях [86, 100].

В исследованиях [71, 163] было установлено, что интенсивность теплообмена зависит от типа уплотнения, числа R_z , пропорционального расходу воздуха через уплотнение и геометрических характеристик уплотнения H/δ , s/δ , где H — высота камеры лабиринта; s — расстояние между гребнями; δ — толщина зазора над уплотнительным гребнем (рис. 89). На рис. 90 приведены картины течения в трех типах уплотнений, полученные в работе [71] с помощью гидрлотка. Направление движения основного потока показано на фотографиях стрелками, нижняя стенка

канала соответствует поверхности ротора, верхняя — поверхности статора. Характер течения в различных уплотнениях сильно отличается. В уплотнении I картина течения в камерах между уплотнительными гребнями является симметричной. Весь поток разбивается как бы на две зоны. Центральная часть основного потока, следуя за характером лабиринта, омывает примерно половину поверхности гребня и стенок ячеек. Вторая половина по-

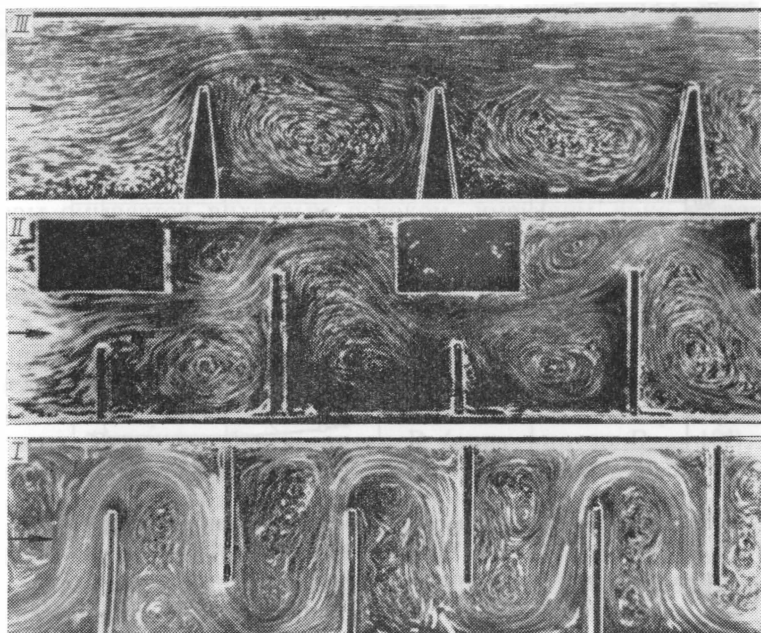


Рис. 90. Характер течения в различных типах лабиринтовых уплотнений

верхностей, формирующих камеру, омывается вихревым потоком, образовавшимся вследствие возникновения вихревого течения. Из фотографий видно, что вихри движутся в одной камере по часовой стрелке, в другой — против часовой стрелки, что вихревая структура является пространственной и что в каждом вихре движение начинается с перемещения слоев жидкости навстречу основному движению.

Картина, изображенная на рис. 90, устойчиво воспроизводилась в различных опытах и свидетельствует о более высокой интенсивности теплообмена в этом уплотнении по сравнению с другими. Эффективность уплотнения с точки зрения гашения в нем кинетической энергии потока также оказалась высокой: на расстоянии порядка 25 камер уплотнения (число уплотнительных гребней 48) избыток давления в уплотнении над давлением ка-

меры выхлопа уже был практически равен нулю. Было установлено, что интенсивность теплообмена вдоль уплотнения изменяется: сначала имеется некоторый участок стабилизации, на котором среднее значение числа Nu возрастает, и только по достижении некоторого максимального значения устанавливается стабильное течение с $\overline{Nu} = idem$ во всех камерах.

Длина участка стабилизации зависит от типа уплотнения и от числа Рейнольдса. На рис. 91 приведены соответствующие экспериментальные кривые. По оси ординат отложено предельное число уплотнительных гребней N , после которого устанавливается стабильное для данного R значение числа Nu . Как видно, в уплот-

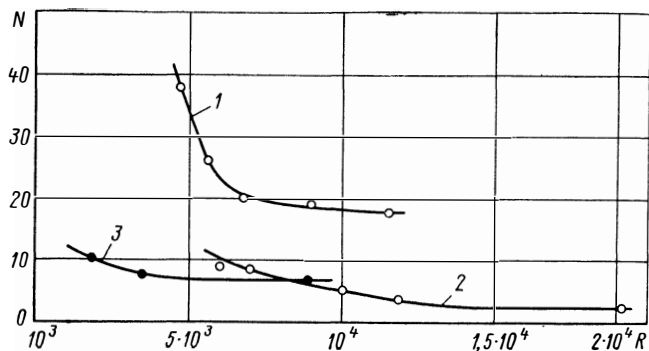


Рис. 91. Протяженность участков стабилизации для различных типов уплотнений:

1 — уплотнение I; 2 — уплотнения II и IV; 3 — уплотнение III (см. рис. 89)

нении I при $R > 8 \cdot 10^3$ величина N начинает мало зависеть от числа R . Интенсивность теплообмена в этом уплотнении исследовалась в работах [71, 100].

В этих работах было обнаружено турбулентное течение в лабиринтах, и число Nu оказалось пропорциональным величине $R^{0,8}$. Абсолютные значения Nu отличались примерно на 10%, что может быть объяснено тем, что в работе [100] не выделялся участок стабилизации. Расчетная формула для средней теплоотдачи в этом уплотнении на участке стабилизированного теплообмена имеет вид

$$Nu = 0,12 \left(\frac{\delta}{H} \right)^{0,15} \left(\frac{\delta}{s} \right)^{0,5} R^{0,8}. \quad (V.87)$$

На входном участке средняя интенсивность теплообмена в 1,6 раза меньше.

Уравнение (V.87) справедливо в следующем диапазоне изменения определяющих параметров: $R = 1,5 \cdot 10^3 \div 1,3 \cdot 10^5$; $\delta/H = 0,05 \div 0,35$; $\delta/s = 0,58 \div 0,8$.

Физические константы в этом уравнении определяются по средней по длине лабиринта температуре воздуха, за определяющий размер в числах Nu и R принята удвоенная высота зазора δ под уплотнительным гребнем, за определяющую скорость — среднерасходная скорость в этом зазоре. Коэффициент теплоотдачи отнесен к полной поверхности теплообмена и к разности между среднemasсовой температурой воздуха и температурой поверхности лабиринта (их средних значений по длине лабиринта).

В лабиринтовых уплотнениях типа *II* и *IV* характер течения, как видно из рис. 90, отличается от характера течения в уплотнении *I*. Центральная часть потока, значительно искривляясь, все же практически не омывает уплотнительных гребней на валу, она обтекает только кольца на статоре. Большая часть стенок камеры омывается вихревым потоком, имеющим ярко выраженную структуру и пространственный характер. Все вихри вращаются навстречу движению. Участок стабилизации течения в этих уплотнениях, как видно из рис. 91, значительно короче, чем в уплотнении *I*.

Интенсивность теплообмена в уплотнениях типа *II* и *IV* исследовалась в работах [71, 86, 163]. Данные получились близкими, только режим ламинарного течения в [71] распространялся на большую область чисел R (примерно до $R \approx 10^4$), чем в работе [86]. Вопросы перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в каналах лабиринтовых уплотнений и факторы, влияющие на переход, практически не изучены.

Формула для расчета теплоотдачи к оребренной поверхности уплотнения на участке стабилизированного теплообмена, обобщающая опытные данные работ [71 и 86], имеет вид

$$Nu = 3,3 \left(\frac{\delta}{H} \right)^{0,7} \left(\frac{H}{s} \right)^{0,1} \left(\frac{b}{s} \right)^{0,32} R^{0,5}, \quad (V.88)$$

где b — ширина выступа (см. рис. 89).

В уравнении (V.88) $R = 120 \div 4,8 \cdot 10^3$; $\delta/H = 0,06 \div 0,24$; $b/s = 0,07 \div 0,5$, $H/s = 0,3 \div 1,25$, коэффициент теплоотдачи отнесен к цилиндрической поверхности ротора, остальные параметры и физические константы определяются так же, как в уравнении (V.87).

В исследованиях [86] переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в каналах лабиринтовых уплотнений происходил без отчетливо выраженной переходной области, в исследованиях же [163] имела место только переходная область в большом диапазоне чисел R , и значения Nu в 1,4—2,3 раза превышали значения, полученные в работе [86]. По данным работы [71], в которой, так же как и в [163], исследовалась осесимметричная модель, при этих же значениях числа R в каналах продолжался еще ламинарный режим течения. Этот факт, по-видимому, говорит

о наличии некоторых неучитываемых факторов, влияющих на режим течения в лабиринтовом уплотнении.

Прямоточное уплотнение типа III характеризуется, как видно из рис. 90, своеобразным характером течения. Значительная часть основного потока, примыкающего к статору, движется практически прямолинейно, как в обычном кольцевом канале. В каналах между гребнями имеется организованное вихревое движение, в которое вовлекается часть основного потока. Вихревая структура также пространственная, причем вихри вращаются по часовой стрелке навстречу потоку. Протяженность участка стабилизации для этого уплотнения невелика ($N \approx 7$), причем зависимость N от числа R выражена очень слабо.

Это уплотнение исследовалось в работах [71, 86, 100, 163], в которых были получены турбулентный и переходный режимы течения.

Для определения интенсивности теплоотдачи к оребренной поверхности прямоточного уплотнения получены следующие критериальные зависимости.

В работе [100]

$$Nu = 0,043 \left(\frac{\delta}{H} \right)^{0,3} \left(\frac{\delta}{s} \right)^{0,2} R^{0,8}, \quad (V.89)$$

где

$$R = 1,8 \cdot 10^3 \div 2,2 \cdot 10^5; \quad \frac{\delta}{H} = 0,055 \div 0,36; \quad \frac{\delta}{s} = 0,006 \div 0,5.$$

В работе [86]

$$Nu = 0,22 R^{0,65} \left(\frac{s}{l} \right)^{0,24} \left(\frac{\delta}{l} \right)^{0,045}, \quad (V.90)$$

где

$$R = 4 \cdot 10^3 \div 10^6; \quad \frac{s}{l} = 0,44 \div 1,87; \quad \frac{\delta}{l} = 0,07 \div 1,31.$$

В (V.90) $l = H - \delta$ — высота гребня.

В работе [71]

$$Nu = 0,0011 R^{1,1}. \quad (V.91)$$

Эта формула получена для участка стабилизированного теплообмена при $R = 1,7 \cdot 10^3 \div 1,7 \cdot 10^4$ и постоянных геометрических размерах ($\delta = 1$ мм; $s = 14$ мм; $H = 5$ мм). На входном участке средний коэффициент теплоотдачи вдвое меньше.

Интенсивность теплоотдачи к гладкой поверхности прямоточного уплотнения может быть определена по зависимостям, полученным в [86]:

при $R = 2,4 \cdot 10^2 \div 8,7 \cdot 10^3$

$$Nu = 0,22 R^{0,6} \left(\frac{\delta}{s} \right)^{0,085} \left(\frac{\delta}{H} \right)^{0,075}; \quad (V.92)$$

при $R = 8,7 \cdot 10^3 \div 1,7 \cdot 10^5$

$$Nu = 0,039R^{0,8} \left(\frac{\delta}{s}\right)^{0,1} \left(\frac{\delta}{H}\right)^{0,1}, \quad (\text{V.93})$$

где $\delta/s = 0,12 \div 0,26$; $\delta/H = 0,05 \div 0,17$.

В уравнениях (V.89), (V.91)—(V.93) определяющим размером является удвоенная высота зазора δ , определяющей скоростью — среднерасходная скорость в зазоре, а коэффициент теплоотдачи отнесен к полной поверхности теплообмена.

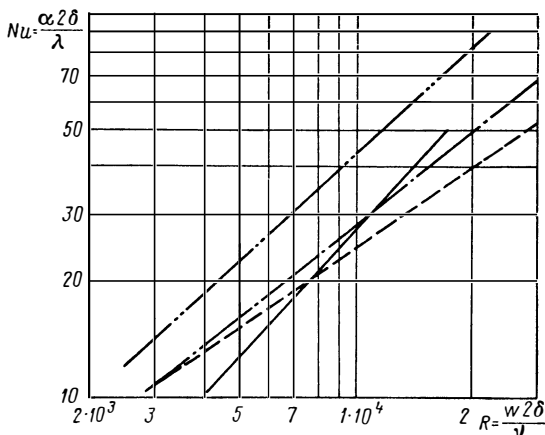


Рис. 92. Интенсивность теплообмена в прямоточных уплотнениях по данным различных авторов:

— [71]; - - - [86]; — · — [100];
- · - - [163]

В уравнении (V.90) за определяющий размер выбрана удвоенная высота камеры лабиринта, за определяющую скорость — скорость в зазоре под гребнем, а коэффициент теплоотдачи отнесен к гладкой поверхности (без учета гребней).

Формула (V.91) соответствует данным, полученным в работе [250] для плоской оребренной поверхности.

Численные значения критерия Nu , полученные в работах [71, 86, 100] в исследованном диапазоне изменения чисел R , оказались близкими друг другу, расхождение не превышает $\pm 25\%$ (рис. 92).

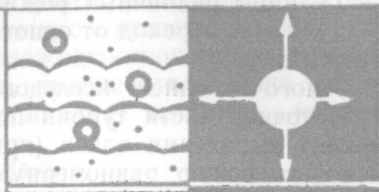
Для уплотнений типов III и IV с небольшим количеством гребней можно пользоваться зависимостью [163]

$$Nu = \frac{0,0475}{k} R^{0,9} \left(\frac{\delta}{H}\right)^{-0,7}, \quad (\text{V.94})$$

где $k = 0,63 \div 1,27$ (в зависимости от типа уплотнения); $\delta/H = 0,12 \div 0,45$; $R = 3,5 \cdot 10^3 \div 2,5 \cdot 10^4$, а коэффициент теплоотдачи отнесен к цилиндрической поверхности ротора или статора.

В уравнении (V.94) определяющим размером является удвоенная высота камеры лабиринта, определяющей скоростью — среднерасходная скорость в камере, определяющей температурой — средняя по длине лабиринта среднemasсовая температура воздуха.

Полученная при сопоставлении результатов исследований различных авторов неоднозначность в определении режимов течения в лабиринтовых уплотнениях при одинаковых значениях числа R говорит о необходимости исследования факторов, влияющих на режимы течения в лабиринтовых уплотнениях, для уточнения условий теплообмена применительно к конкретным условиям в натуральных турбинах. Кроме того, в мощных паровых турбинах отношения R_{ϕ}/R_z могут достигать величин порядка 10—15, и не исключена возможность, что в этом случае вращение может оказывать влияние на теплоотдачу в уплотнениях. Этот вопрос также нуждается в дальнейшем экспериментальном изучении.



ТЕПЛОБМЕН ПРИ ДВИЖЕНИИ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ ПОТОКОВ В ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ТУРБИН

34. Особенности теплообмена при движении газожидкостных потоков

Среди проблем, возникающих при проектировании турбин, особое место занимают вопросы теплоотдачи к газожидкостным потокам. Взаимосвязь процессов переноса вещества и энергии двухфазных, в частности газожидкостных, потоков очень сложна. Это объясняется значительно бóльшим многообразием по сравнению с однофазными потоками режимов течения в пристеночном слое и значительным влиянием на режим течения величины тепловой нагрузки и теплового состояния поверхности. Последовательные теоретические методы расчета таких систем в настоящее время не разработаны, поэтому решающее значение имеют экспериментальные исследования.

Классификация режимов течения газожидкостных потоков основана на изучении течения в круглых каналах. Различные авторы выделяют здесь около 10 режимов течения. Перечислим основные из них, представляющие наибольший интерес для рассматриваемых в настоящей книге вопросов:

1) дисперсный режим течения, при котором вся влага содержится в потоке в виде отдельных взвешенных капель и пленка на стенке канала не образуется;

2) дисперсно-кольцевой режим, при котором часть влаги движется в виде пленки по стенке канала, а часть взвешена в потоке;

3) кольцевой режим, характерный для меньших массовых скоростей, при нем вся влага движется в виде пленки по стенкам канала;

4) расслоенный режим, при котором вся жидкая фаза движется по нижней образующей канала; такой режим возникает в горизонтальных трубах при очень малых значениях массовых скоростей;

5) снарядный (толчкообразный) режим, при котором относительно большие объемы только жидкости и только газа следуют друг за другом.

Границы различных режимов течения носят условный характер, так как переход от одного режима к другому осуществляется постепенно.

Многочисленные исследования адиабатного движения влаги в проточной части турбин показывают, что только в начальный момент выпадения влаги (при скачке конденсации) поток имеет монодисперсную равномерную структуру. Вообще же характер течения газожидкостного потока в проточной части близок к дисперсному и дисперсно-кольцевому режимам. Специфика заключается в том, что условия образования, сепарации и дробления жидкости, а следовательно, и режимы течения в пристеночном слое в этом случае более сложны и многообразны, причем дисперсность потока может изменяться в пределах $d_k = 10^{-9} \div 10^{-5}$ м (d_k — диаметр капли).

В патрубках, органах парораспределения, трубопроводах, где скорости потока обычно небольшие, жидкость в основном движется по стенкам канала, что соответствует кольцевому или расслоенному режимам течения. Наконец, в охлаждающих каналах может существовать любой из вышеназванных режимов течения газожидкостного потока. Наличие теплообмена на стенке канала приводит к существенным изменениям в пристеночном слое и увеличивает многообразие режимов.

Рассмотрим некоторые критические явления при кипении. При определенной тепловой нагрузке число центров парообразования на поверхности, около которой кипит жидкость, становится настолько большим, что паровые пузыри смыкаются и между жидкостью и стенкой образуется сплошная паровая пленка. Теплоотдача при этом резко ухудшается, наступает так называемый кризис теплообмена *Ирода*. Явление кризиса теплообмена при кипении иллюстрируется на рис. 93, где показана одна из экспериментальных кривых изменения коэффициента теплоотдачи α при кипении воды в свободном объеме при атмосферном давлении. Докризисному состоянию соответствует кривая *A*. В рассматриваемом случае кризис наступает в точке *1* при тепловой нагрузке $q_{кр1} \approx 8,2 \cdot 10^5$ Вт/м², чему соответствует перегрев поверхности $T_w - T_s \approx 30^\circ$ С. В момент, предшествующий кризису, $\alpha \approx 25\,000$ Вт/(м²·К). Наступление кризиса отражается переходом по штриховой линии из точки *1* в точку *1'* на кривой *B*; интенсивность теплоотдачи падает до $\alpha \approx 1000$ (теплоотдача ухудшилась в 25 раз). При этом перегрев стенки достигает 740° С. После наступления кризиса теплообмена для возвращения к докризисному состоянию необходимо значительно снизить тепловую нагрузку, чтобы жидкость вновь могла вступить в контакт с поверхностью. На рис. 92 это соответствует переходу к точке *2*, из которой процесс скачкообразно переходит в точку *2'* на кривой *A*. Обратный переход с кривой *B* на кривую *A* оказался возможным при $q_{кр2} \approx 2 \cdot 10^5$ Вт/м², что соответствует перегреву поверхности примерно на 80° С. В зависимости от условий про-

текания процесса кризис может наступить раньше или позже, чем это указано на рис. 93, однако сущность остается неизменной.

При вынужденном движении газожидкостного потока, если степень влажности последнего мала, кризис теплоотдачи может возникать при значительно более низких тепловых нагрузках. Такой тип кризиса называют кризисом теплообмена II рода, его возникновение связано с исчезновением пленки жидкости на поверхности. В зависимости от влажности и гидродинамических условий причины этого исчезновения могут быть различными.

Сложный и многообразный механизм теплообмена в газожидкостных потоках носит в известной мере вероятностный характер, что затрудняет исследования. Результаты изучения частных процессов иногда оказываются неприемлемыми для оценки как количественных, так и качественных сторон явления.

В этих условиях при расчете теплоотдачи в газожидкостных потоках следует весьма внимательно относиться к определению режимов течения и сепарации жидкости, тепловой нагрузки поверхности и ее теплового состояния. Только с учетом этих обстоятельств могут быть определены расчетные зависимости или поставлены задачи экспериментального исследования. В противном случае возможны принципиальные ошибки.

35. Некоторые особенности теплообмена в жидких пленках

Рассмотрим более подробно вопрос о влиянии на теплообмен закономерностей движения жидкости по поверхности.

Если газожидкостный поток омывает смачиваемую поверхность, температура которой T_w ниже некоторого критического значения $T_{кр} > T_s$, соответствующего возникновению кризиса теплоотдачи, то обычно на этой поверхности возникает пленка жидкости.

Следует иметь в виду, что все известные жидкости (кроме ртути) смачивают конструкционные стали, применяемые в турбиностроении, при условии, что жидкости и поверхности металла не загрязнены. Однако незначительное загрязнение может

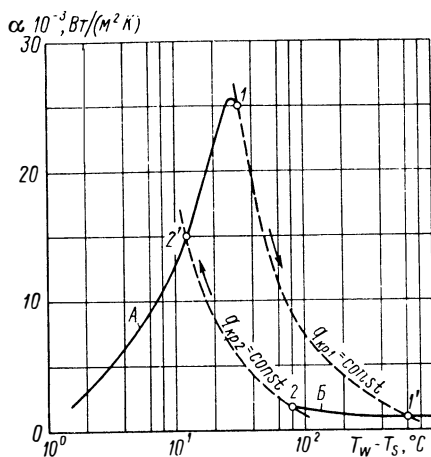


Рис. 93. Кризис теплоотдачи при кипении воды в свободном объеме

изменить картину: например, достаточно $(2 \div 3) 10^{-8}$ г оливкового масла на 1 см^2 поверхности, чтобы водяная пленка распалась на отдельные капли.

Образование пленки обусловлено сепарацией влаги из ядра потока на стенку. Для плоскопараллельного безградиентного течения перенос жидкости связан прежде всего с турбулентными пульсациями. Количество жидкости, выпадающей в единицу времени на единицу поверхности, равно

$$G_{\text{вып}} = \omega_n c_0, \quad (\text{VI.1})$$

где ω_n — средняя скорость движения частиц к поверхности; c_0 — концентрация частиц в потоке.

На основании обобщения экспериментальных данных по дисперсно-кольцевому течению в круглых и прямоугольных трубах в работе [109] были получены следующие эмпирические зависимости для коэффициента обмена $k = \omega_n / \omega_0$ (здесь ω_0 — скорость газа в основном потоке):

1) при $c_0 / \gamma' \leq 8 \cdot 10^{-4}$

$$k = 2,61 R^{-0,45} \left(\frac{c_0}{\gamma' 10^4} \right)^{-0,725}; \quad (\text{VI.2})$$

2) при $c_0 / \gamma' > 8 \cdot 10^{-4}$

$$k = 1,03 R^{-0,45} \left(\frac{c_0}{\gamma' 10^4} \right)^{-0,29}. \quad (\text{VI.3})$$

Зависимости (VI.2) и (VI.3) установлены для диапазона $R = \omega_0 d / \gamma_0 = (6 \div 16,5) 10^4$ и $c_0 = 0,1 \div 1,5 \text{ кг/м}^3$. Анализ приведенных зависимостей показывает, что с увеличением скорости газа сепарация частиц уменьшается, аналогичное влияние оказывает увеличение концентрации. Последнее обстоятельство, очевидно, объясняется сглаживающим влиянием на турбулентные пульсации взвешенной в потоке жидкости.

При движении газожидкостных потоков в криволинейных каналах на условия сепарации начинают оказывать значительное влияние инерционные силы. Часто влияние этих сил оказывается преобладающим, и тогда можно рассчитывать процесс сепарации с достаточной точностью. Теоретический и экспериментальный материал по сепарации в проточной части турбин при отсутствии теплообмена со стенками канала приводится в работах [38, 88].

Различают ламинарное и турбулентное течение пленки по поверхности, а также переходную область (волновое течение). Для характеристики режима течения удобно пользоваться числом Рейнольдса пленки

$$R_{\text{пл}} = \frac{\omega'_{\text{ср}} \delta}{\nu'} = \frac{G_{\text{пл}}}{\mu'}. \quad (\text{VI.4})$$

Здесь $\omega'_{\text{ср}}$ — средняя скорость пленки; δ — толщина пленки; $G_{\text{пл}}$ — расход жидкости через единицу площади сечения; ν' и

μ' — соответственно кинематическая и динамическая вязкость жидкости при средней температуре.

В диапазоне $R_{пл} < 50$ поверхность пленки гладкая или покрыта мелкомасштабными волнами (рябью) и течение пленки носит ламинарный характер. Уравнение движения для такого случая течения существенно упрощается: для свободного движения пленки под действием силы тяжести вдоль вертикальной стенки, пренебрегая кривизной поверхности и инерционными силами, получим

$$\mu' \frac{d^2 \omega'}{dn^2} = -\rho' g \quad (VI.5)$$

(где n — координата по нормали к стенке), откуда профиль скоростей в произвольном сечении пленки

$$\omega'(n) = \frac{\rho' g}{\mu'} \left(\delta n - \frac{n^2}{2} \right); \quad (VI.6)$$

среднеинтегральное значение скорости

$$\omega'_{ср} = \int_0^{\delta} \frac{\omega'(n) dn}{\delta} = \frac{\rho' g \delta^2}{3\mu'}. \quad (VI.7)$$

При вынужденном движении газожидкостного потока на поверхности раздела фаз существуют постоянные касательные напряжения τ_0 . В этом случае, пренебрегая массовыми силами, уравнение движения можно записать в виде [38]

$$\frac{\mu'}{\rho'} \frac{d^2 \omega'}{dn^2} = 0. \quad (VI.8)$$

Тогда получим

$$\omega'(n) = \frac{\tau_0}{\mu'} n. \quad (VI.9)$$

Значение τ_0 определяется так же при течении однофазной жидкости. При интенсивном массообмене через поверхность раздела фаз использование зависимостей для однофазных потоков является слишком грубым приближением. Так, при интенсивной сепарации жидкости в пленку возникает дополнительное касательное напряжение

$$\Delta \tau \approx \frac{G_{вып}}{g} \omega'_0. \quad (VI.10)$$

При $R_{пл} > 50$ кроме мелкомасштабных на поверхности пленки начинают образовываться крупномасштабные волны, имеющие неправильную форму. С гребней этих волн происходит срыв части жидкости, вследствие чего над пленкой образуется газожидкостный поток с повышенной концентрацией влаги и возникает

градиент концентрации, направленный к ядру потока. Распределение жидкости в потоке при наличии срывных явлений тесно связано с режимными параметрами. При увеличении влагосодержания в потоке ($\omega_0^* = \text{const}$) расход жидкости в пленке увеличивается, при увеличении скорости потока ($G_0^* = \text{const}$) — уменьшается. При скоростях газа $\omega_0^* = 250 \div 300$ м/с количество влаги, срываемой с поверхности, составляет 40—70%. При достаточно больших скоростях потока на некотором расстоянии от входа в канал для плоскопараллельного безградиентного течения режим массообмена стабилизируется и расход жидкости в пленке становится постоянным. Детальное экспериментальное исследование такого течения предпринято в работе [109]. Для плоскопараллельного течения установлено предельное значение числа Рейнольдса $R_{\text{пл}}^* = 75$, при котором расход жидкости в пленке перестает зависеть от скорости газа и общего расхода жидкости. Если для жидкости в канале $R' = G'/\mu' < 75$, то на достаточном удалении от входа в канал вся жидкость будет двигаться в пленке. Если $R' > 75$, то установится дисперсно-кольцевой режим течения со стабилизированным срывом и выпадением влаги. Для такого режима по данным [109]

$$R_{\text{пл}} = 8,2 R'^{0,55} We^{-0,4} \left(\frac{\mu'}{\rho' \sigma d} \right)^{-0,2}. \quad (\text{VI.11})$$

Здесь $We = \rho'' \omega''^2 d / \sigma$ — число Вебера; σ — коэффициент поверхностного натяжения. Границы применения зависимости (VI.11): $100 \leq R' \leq 1560$; $200 \leq We \leq 20\,000$.

При образовании на поверхности пленки крупномасштабных волн характер течения в ней некоторое время может сохраняться ламинарным. Однако при незначительных возмущениях течение пленки переходит в турбулентное. Область возникновения режима развитого турбулентного течения пленок различные исследователи определяют в диапазоне $R_{\text{пл}} = 100 \div 500$.

Следует отметить, что при высоких скоростях и малой влажности газожидкостного потока возможны случаи, когда устойчивая пленка не образуется на всей поверхности и влага движется в виде отдельных жгутов. Такие явления наблюдались при течениях в проточной части влажнопаровых турбин [38, 88].

Теплообмен при течении жидкой пленки вдоль поверхности, нагретой выше температуры насыщения ($T_s < T_w < T_{\text{кр}}$), обусловлен конвекцией, связанной, с одной стороны, с направленным движением пленки, а с другой — с образованием и движением паровых пузырей. Большой интерес для практических целей представляют режимы с достаточно высокими тепловыми нагрузками, когда парообразование оказывает преобладающее влияние на теплообмен. При развитом пузырьковом кипении вынужденная конвекция практически не оказывает влияния на теплообмен; это подтверждается тем, что интенсивность теплоотдачи зависит

только от давления и температуры стенки и не зависит от скорости потока и температуры в его ядре [3].

Процесс образования и развития газовых пузырей, носящий вероятностный характер [64], в настоящее время изучен недостаточно. Известно, что скорость роста пузыря можно представить в виде соотношения

$$\frac{dR}{dt} = \frac{q_{гр}}{r\gamma'}, \quad (\text{VI.12})$$

где R — радиус пузыря; $q_{гр}$ — плотность теплового потока на поверхности пузыря; r — скрытая теплота парообразования. Отсюда может быть получено условие термодинамического равновесия для сферического пузыря в неподвижной жидкости [104]:

$$T''_{гр} = T'' + \frac{2\sigma\gamma'}{R(\gamma' - \gamma'')} \frac{dT''}{dp}, \quad (\text{VI.13})$$

где $T''_{гр}$ — температура пара на поверхности пузыря; T'' — температура пара внутри пузыря.

Для того чтобы размер пузыря увеличивался, необходимо, чтобы его температура превышала $T''_{гр}$, т. е. в пузыре должно быть избыточное давление. Упрощенно связь между перепадом давления Δp и плотностью теплового потока на поверхности пузыря может быть представлена в виде известной из кинетической теории газов формулы

$$q_{гр} = \xi r \Delta p \sqrt{\frac{gm}{2\pi BT''}}, \quad (\text{VI.14})$$

где $\xi \leq 1$ — коэффициент аккомодации; B — универсальная газовая постоянная; m — молекулярный вес.

Отсюда соответствующий перепад температур

$$\Delta T'' = \frac{q_{гр}}{\xi r} \sqrt{\frac{2\pi BT''}{gm}} \frac{dT''}{dp}, \quad (\text{VI.15})$$

а температура пара на поверхности пузыря

$$T''_{гр} = T'' + \left[\frac{r\sigma\gamma'}{R(\gamma' - \gamma'')} + \frac{q_{гр}}{\xi r} \sqrt{\frac{2\pi BT''}{gm}} \right] \frac{dT''}{dp}. \quad (\text{VI.16})$$

При пузырьковом кипении теплоотдача может быть очень высокой, соответствующие эмпирические формулы приводятся в справочной литературе.

При высоких скоростях движения газожидкостного потока турбулентность на поверхности раздела фаз становится столь высокой, а пленка столь тонкой, что механизм теплоотдачи изменяется. В тонких пленках процесс пузырькового кипения подавляется, передача тепла осуществляется только за счет теплопроводности, испарение происходит непосредственно с поверхности жидкости. Высказывается предположение, что подавление пузырь-

кового кипения происходит в том случае, когда толщина динамического ламинарного подслоя $\delta_{\text{подсл}}$ при турбулентном однофазном течении меньше толщины теплового пограничного слоя $\delta_{\text{тепл}}$.

Измерения температур в пленках при подавленном кипении показали, что величины перегрева в этом случае превышают значения, необходимые для начала развитого пузырькового кипения [157].

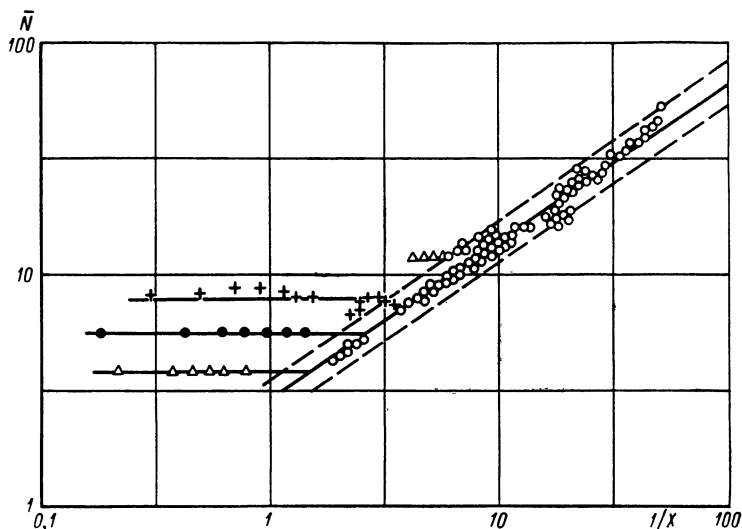


Рис. 94. Теплоотдача при подавленном кипении на различных режимах:

Параметры	Режим			
	○	+	●	△
$\rho'w' \cdot 10^{-5}$, кг/(м ² ·ч)	4,88	4,88	9,76	9,76
$q \cdot 10^{-5}$, Вт/м ²	3,95	1,95	3,95	1,95

Характер изменения теплоотдачи (параметра \bar{N}) при подавленном кипении показан на рис. 94. В области высоких значений параметра Мартинелли

$$\frac{1}{X} = \left(\frac{x}{1-x} \right)^{0,9} \left(\frac{\rho'}{\rho''} \right)^{0,5} \left(\frac{\mu''}{\mu'} \right)^{0,1} \quad (\text{VI.17})$$

коэффициент теплоотдачи сильно зависит от паросодержания x и практически не зависит от тепловой нагрузки, что характерно для теплоотдачи некипящей жидкости; по-видимому, здесь имеет место испарение при вынужденной конвекции. При малых значениях $1/X$ теплообмен зависит от тепловой нагрузки, т. е. имеет место пузырьчатое кипение, которое уже не подавляется конвекцией.

Имеющиеся экспериментальные данные по подавленному кипению удается аппроксимировать зависимостью

$$\bar{N} = \alpha/\alpha_0 = A (1/X)^n, \quad (\text{VI.18})$$

где α_0 — коэффициент теплоотдачи, рассчитанный в предположении, что жидкость заполняет все сечение канала. Значения констант в формуле (VI.18) по данным Ройта: $A = 2,72$; $n = 0,58$; по данным Денглера и Адамса: $A = 3,5$; $n = 0,50$ [157].

В том случае, когда жидкая пленка на нагретой поверхности не образуется, капли жидкости, попадая в пристенный слой, начинают интенсивно испаряться. В результате у стенки возникает слой перегретого пара толщиной δ_s'' . Для двухфазного равновесного потока величина δ_s'' равна толщине пограничного слоя δ . В общем случае газожидкостного потока температура в ядре T_0 может быть ниже температуры насыщения T_s и $\delta > \delta_s''$. В результате испарения жидкости в пограничном слое возникает избыточное давление и в направлении нормали n к поверхности образуется поток пара. Естественно предположить, что нормальная составляющая скорости пара w_n'' (рис. 95) увеличивается по мере

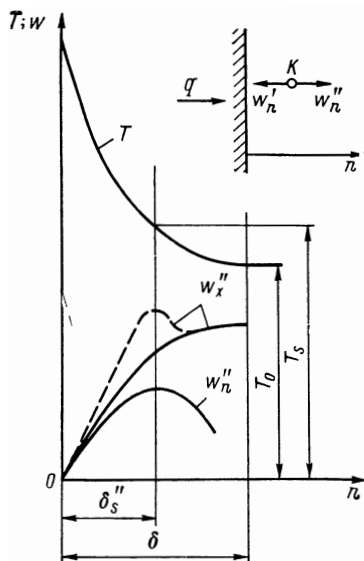


Рис. 95. К анализу процесса теплоотдачи в двухфазном пограничном слое

удаления от стенки, достигая максимума при $n = \delta_s''$, в этом случае неконденсируемый газ может полностью вытесниться из пограничного слоя, чем и объясняется совпадение результатов экспериментов на влажном паре и воздушно-водяной смеси. Капля K (рис. 95), движущаяся в направлении n к поверхности со скоростью w_n' , попадая в пограничный слой, начинает взаимодействовать со встречным паровым потоком, имеющим скорость w_n'' . Отметим, что при потенциальном течении в результате испарения обычный характер изменения составляющей скорости w_x'' в пограничном слое (сплошная линия на рис. 95) может быть нарушен (штриховая линия). Встречный поток пара, реактивная сила, возникающая из-за неравномерного испарения капли, и силы термофореза действуют против инерционной составляющей, которая обуславливала сепарацию в дисперсно-кольцевом режиме, и могут полностью воспрепятствовать выпадению влаги на стенку.

Допустим, что для капли применим закон Стокса, а также, что скорость нормального парового потока w_n'' постоянна по толщине

пограничного слоя и капля имеет форму сфероида. Тогда, пренебрегая испарением капли, дифференциальное уравнение ее движения в пограничном слое можно записать в виде

$$m \frac{d\omega'_n}{dt} = c_x \frac{\pi d_k^2 \rho'' (\omega'_n - \omega''_n)^2}{8}, \quad (\text{VI.19})$$

где m — масса капли; d_k — диаметр капли.

Примем $c_x = 24/R$, где

$$R = \frac{d_k (\omega'_n - \omega''_n) \rho'}{\mu''}.$$

Решая (VI.19), получим

$$\frac{\omega'_n}{\omega''_n} = 1 - e^{-At/d_k^2}, \quad (\text{VI.20})$$

где $A = 18\mu''/\rho'$; t — время полного торможения капли нормальным к поверхности паровым потоком.

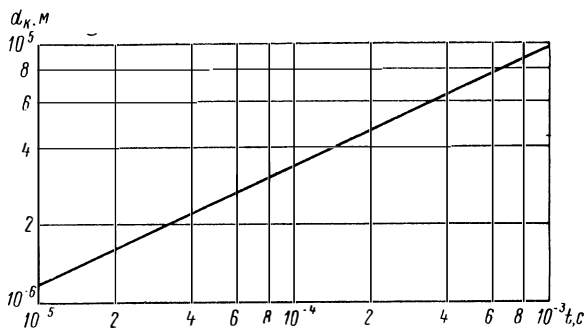


Рис. 96. Торможение капли у поверхности нормальным паровым потоком

На рис. 96 приведены результаты расчетов, выполненных с помощью зависимости (VI.20), показывающие, как влияет диаметр капли на время t (в расчетах принималось, что начальная скорость капли равна половине средней скорости пара).

Перечисленные обстоятельства позволяют сделать вывод о том, что интенсивность сепарации на несмоленную стенку при прочих равных условиях ниже, чем на жидкую пленку, и должна зависеть от дисперсности потока. Значительные трудности, связанные с получением монодисперсных потоков, объясняют отсутствие в настоящее время экспериментальных работ, посвященных детальному изучению этого вопроса.

На основании визуальных наблюдений отмечается что при температуре поверхности $T_w \geq 220^\circ \text{C}$ капли, выпадающие на стенку, принимают форму сфероида и отделяются от стенки устойчиво.

чивой паровой пленкой. Интенсивность теплоотдачи при этом невысокая. Для оценки времени испарения сферической капли, достигшей нагретой поверхности, может быть использована полученная в работах С. С. Кутателадзе и В. М. Боришанского зависимость

$$\frac{\lambda' t}{c' \gamma' d_k^2} \left[\frac{d_k^2 (\gamma' - \gamma'')}{\sigma} \right]^{0,5} = 2,5 e^{-35,4\beta} + 0,18, \quad (\text{VI.21})$$

где

$$\beta = \frac{c' (T_w - T_s)}{r} \frac{\lambda''}{\lambda'}.$$

36. Теплоотдача в переходном режиме

Унос влаги из пленки в результате срыва жидкости с гребней длинных волн при $R_{пл} > R_{пл}^*$ (см. п. 35), парообразование внутри пленки и интенсивное испарение влаги с поверхности создают предпосылки для механического разрушения пленки. Пленка вырождается в пульсирующие жгуты, площадь смоченной поверхности постепенно уменьшается, пока не исчезнет полностью [54]. Переход к кризису в данном случае носит не резкий характер, изменение температуры происходит постепенно. Подобные режимы, наиболее характерные для условий, возникающих в проточной части и системах охлаждения турбомашин, являются одновременно наиболее сложными для аналитического изучения. Здесь рассмотренные выше элементарные процессы чередуются во времени и находятся в сложном взаимодействии. Привести полную систему уравнений, описывающих данный процесс, не представляется возможным; речь может идти только о приближенной постановке задачи.

Приняв допущение, что при малом влагосодержании основного потока процесс обтекания можно описывать уравнением однофазного потока — уравнением Навье-Стокса, получим при обычных упрощениях, соответствующих рассматриваемой задаче, в качестве единственного критерия, характеризующего аэродинамическую обстановку процесса, критерий Рейнольдса $R'' = \omega'' b / \nu$ (здесь b — характерный размер обтекаемого тела или текущая координата вдоль обвода поверхности в направлении движения).

Если теперь абстрагироваться от сносящего действия основного потока и рассматривать процесс теплообмена между каплями, движущимися параллельно поверхности нагрева в пограничном слое, то изменение теплового потока в элементе пограничного слоя можно записать в виде

$$dQ = \lambda'' \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy dF. \quad (\text{VI.22})$$

Из данного уравнения при пренебрежимо малом торможении капель на участке dy получается уравнение

$$\lambda'' \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy = \frac{\partial}{\partial y} [G_k (i_s'' - i_s')] dy, \quad (\text{VI.23})$$

где G_k — количество жидкости в данном элементе. Отсюда можно получить еще один определяющий критерий

$$K = \frac{i_s'' - i_s'}{c' (T_w - T_s)}. \quad (\text{VI.24})$$

Для случая, когда несущим взвешенные капли потоком является неконденсируемый газ, можно принять, что температура капель вне пограничного слоя будет равна температуре газа T_0 .

Если температуру и давление потока в процессе обтекания принять постоянными, то отношение (VI.24) может быть связано с температурным фактором (см. гл. III) следующим образом:

$$K = \frac{\text{const}}{T_0 (\psi - 1)} = \frac{C}{\psi - 1}, \quad (\text{VI.25})$$

где C — некоторая константа, зависящая от температуры и давления потока.

Пародинамическую сторону процесса можно характеризовать количеством влаги $G_{\text{вып}}$, выпадающей на поверхность, и режимом теплообмена при испарении этой влаги. На основании (VI.1) в число определяющих процесс критериев кроме числа R следует ввести относительное влагосодержание

$$\bar{G} = \frac{G'}{G'' + G'}. \quad (\text{VI.26})$$

Однако формула (VI.1) не учитывает процесса испарения, противодействующего процессу выпадения влаги. Уравнение теплообмена при парообразовании позволяет, как известно [105], получить еще два основных критерия:

$$R_* = \frac{q}{r \gamma'' \gamma'} \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma' - \gamma''}}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}. \quad (\text{VI.27})$$

Таким образом, интенсивность процесса теплообмена является функцией следующих определяющих критериев:

$$\text{Nu} = N (R'', \text{Pr}'', \bar{G}, K, R_*, \gamma''/\gamma', f). \quad (\text{VI.28})$$

Здесь f — некоторый параметр, определяющий геометрию канала.

Если $\frac{dp_0}{dx}$ и $\frac{dT_0}{dx}$ принимаются постоянными, уравнение (VI.28) примет вид

$$\text{Nu} = \frac{\alpha b}{\lambda''} = Z (R'', \text{Pr}'', \bar{G}, \psi, \bar{q}, f), \quad (\text{VI.29})$$

где \bar{q} — безразмерный тепловой поток, который может нормироваться параметром $q_0 = \text{const}$.

Полагая, что влияние чисел R'' и Pr'' при малых значениях \bar{G} будет таким же, как и в однофазном газовом потоке, представим (VI.29) в виде

$$Nu = X(R, Pr) Y(\bar{G}, \psi, \bar{q}, f). \quad (\text{VI.30})$$

Введем коэффициент интенсификации теплоотдачи \bar{N} и получим следующую форму записи для (VI.30):

$$\bar{N} = \frac{Nu}{Nu''} = W(\bar{G}, \psi, \bar{q}, f). \quad (\text{VI.31})$$

Обратимся теперь к имеющимся экспериментальным данным. В работах КАИ [50] был исследован процесс теплообмена между стенкой полой турбинной лопатки и охлаждающей жидкостью. Рабочим телом служили воздушно-жидкостные смеси. Увеличение коэффициента теплообмена при температуре стенки 450—480° С было двукратным для воды, а для керосина составило 5—10%. Полученная обобщающая зависимость для воздушно-водяной смеси имеет вид:

$$\bar{N} = 1 + 0,75 \bar{G}^{0,8} \psi^{-1,65} R_{\text{см}}^{-0,08}, \quad (\text{VI.32})$$

где $R_{\text{см}}$ — число Рейнольдса для смеси.

В ЛПИ проводились исследования теплообмена плоских гладкостенных и оребренных радиаторов для лопаток с двухконтурной системой охлаждения [54]. Опыты проводились при давлении, близком к атмосферному, на воздушно-водяной смеси и влажном паре в диапазоне изменения режимных параметров: $q = (0,5 \div 4,8) 10^5 \text{ Вт/м}^2$; $\bar{G} = 0 \div 0,14$; $\psi_s = T_w/T_s = 1,05 \div 2,5$; $R'' = (3 \div 10) 10^4$. Коэффициент оребрения f составлял 2,6 и 3,5. Исследования сопровождалось визуальными наблюдениями поверхности теплообмена. Обнаружена сильная зависимость

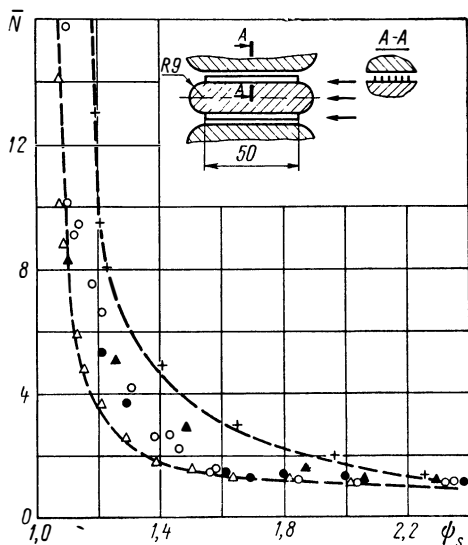


Рис. 97. Зависимость интенсивности теплоотдачи от температуры поверхности для лопаточных радиаторов при $\bar{G} = 8,55\%$ и $q = 3,6 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$:

Δ — влажный пар; \blacktriangle , \circ , \bullet , $+$ — воздушно-водяная смесь (Δ и \blacktriangle — решетка радиаторов при $f = 3,5$; \circ — решетка радиаторов при $f = 2,6$; \bullet и $+$ — одиночный радиатор соответственно при $f = 2,6$ и $f = 1$)

интенсивности теплоотдачи \bar{N} от режимных параметров. Наибольшее значение $\bar{N} = 10 \div 35$ наблюдалось, как и следовало ожидать, в случаях, когда вся модель была покрыта жидкой пленкой (рис. 97). Область существования этих режимов ограничивается значением $\psi_s \leq 1,15$. При увеличении тепловой нагрузки пленка жидкости разрывается на отдельные жгуты, которые с видимой при визуальном наблюдении частотой перемещаются по поверхности нагрева в направлении, перпендикулярном течению потока.

На участках поверхности модели, находящихся в аэродинамической тени, вместо жгутов образовывались мокрые пятна, медленно изменяющиеся очер-

тания ξ которых позволяют предположить, что характер процесса здесь не такой, как в жгутах жидкости. Кипения жидкости в пятнах не наблюдалось. Область существования подобного режима лежит в интервале $1,15 < \psi_s < 2,0$ (рис. 97). Значения коэффициента интенсификации теплоотдачи по мере возрастания ψ_s уменьшаются, и при $\psi_s \approx 2$ имеем $\bar{N} \rightarrow 1$. Отметим, что при определении \bar{N} теплоотдача как в опытах на влажном паре, так и в опытах на

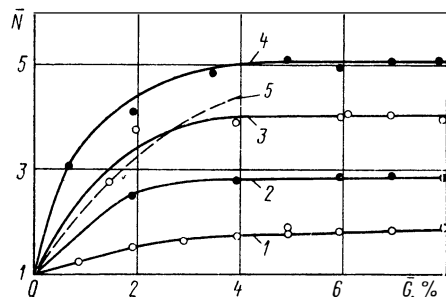


Рис. 98. Влияние концентрации влаги в потоке на теплоотдачу лопаточных радиаторов при $\psi_s = 2$ (кривая 1) и $\psi_s = 1,3$ (кривые 2—5) и следующих значениях q (в Вт/м²):

1 — $4,0 \cdot 10^5$; 2 — $1,9 \cdot 10^5$; 3 — $3,0 \cdot 10^5$; 4 — $4,0 \cdot 10^5$; 5 — расчет по формуле (VI.32)

воздушно-водяной смеси относилась к коэффициенту теплообмена для сухого насыщенного пара, результаты с достаточной точностью совпали. Этим подтверждается выдвинутое выше предположение о наличии двухфазного (жидкостно-парового) пограничного слоя для общего случая газожидкостного потока.

При $\psi_s > 2$ жидкости на поверхности не наблюдалось и $\bar{N} = 1,0 \div 1,2$.

Во всей области переходного режима теплоотдача примерно линейно зависела от удельного теплового потока. Увеличение влажности потока в интервале $0 < \bar{G} < 6\%$ приводило к увеличению теплоотдачи, при больших значениях \bar{G} теплообмен стабилизировался (рис. 98).

Интересно отметить особенность переходного режима на орбренных поверхностях. Здесь пленка при $\psi_s \approx 1,2$ полностью исчезала на межреберной части стенки. Движение жидкости при больших значениях ψ_s осуществлялось только по поверхности ребер, т. е. пленка оттеснялась в область меньших тепловых потоков. Этим, очевидно, объясняется то обстоятельство, что

значения коэффициента интенсификации для ребренных поверхностей ниже, чем для гладких.

Экспериментальные данные по средней и локальной теплоотдаче с точностью $\pm 20\%$ описываются корреляцией:

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= 1 + Y\bar{q}\bar{G}^{0,27}\psi^{-4,65} \\ Y &= 92,5f^{-1,1}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI.33})$$

где f — коэффициент ребрения ($f = 1,0 \div 3,5$).

В практических расчетах применение соотношения (VI.33) связано с необходимостью искать один из определяющих критериев косвенным путем.

Заслуживают внимания данные работы [1], где получено следующее выражение для критических тепловых нагрузок в трубках диаметром $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м и длиной $l = 0,240 \div 0,425$ м при $G = 0,1 \div 0,5$ и $p = (1,96 \div 9,8) 10^5$ Па:

$$q_{кр} = \frac{\Delta i}{\pi dx_{кр}} \left\{ G_{пл} + G_b \left[1 - \exp \left(- \frac{0,3164R'^{-0,25}x_{кр}}{2d} \right) \right] \right\}. \quad (\text{VI.34})$$

Здесь Δi — изменение энтальпии при парообразовании; $x_{кр}$ — значение координаты, отсчитываемой в направлении потока, при которой наступает кризис; $G_b = G' - G_{пл}$; $G_{пл}$ — расход жидкости в пленке для сечения на входе в канал.

Явления кризиса, изучавшиеся в работе [1], носили явно выраженный характер. Там же предлагается корреляция для определения расхода жидкости в пленке

$$\frac{G_{пл}}{G'} = 0,985 - 0,44 \lg \left[\frac{\bar{p}}{\rho'} \left(\frac{\mu' w_0}{\sigma} \right)^2 10^4 \right]. \quad (\text{VI.35})$$

Формулу (VI.35) можно рекомендовать для практического использования при расчетах, например, трактов охлаждения лопаток. Однако распространение данной зависимости на более короткие трубы не рекомендуется. Необходимы специальные исследования областей существования переходного режима и режима с явно выраженным кризисом.

37. Теплообмен при течении влажнопаровых потоков в межцилиндровых пространствах корпусов паровых турбин

Приведенные в п. 33 данные о теплообмене в моделях полостей корпусов паровых турбин могут быть использованы при анализе течения перегретого пара, когда последний можно рассматривать как однородный газ. Такое рассмотрение допустимо применительно к условиям ЦВД и ЦСД мощных паровых турбин, однако при исследовании течения пара в полостях корпуса ЦНД этих турбин нельзя абстрагироваться от влажности пара и дисперсной структуры влажнопарового потока. Аналогичное явление имеет

место и при течении в условиях влажнопаровых турбин АЭС. Эти турбины благодаря сравнительно низкому рабочему давлению обладают известными преимуществами перед турбинами сверхкритических параметров и по мнению ряда специалистов являются предпочтительными при работе на переменных режимах [141].

Для выработки обоснованных рациональных графиков пуска и остановки машины необходима правильная оценка температурных напряжений и тепловых расширений ее элементов. В условиях переменных режимов работы результаты расчетов температурных полей в элементах ротора и статора турбины будут существенно зависеть от точности задания граничных условий теплообмена.

В потоке влажного пара, как уже отмечалось выше, интенсивность теплообмена в значительной мере определяется характером контактирования влаги с поверхностью и характером ее выпадения на поверхность.

В настоящее время практически отсутствуют экспериментальные и теоретические данные по теплообмену во влажнопаровых потоках, которые могли бы быть использованы для определения коэффициентов теплоотдачи в межцилиндровых полостях корпусов современных влажнопаровых турбин. Пограничный слой во влажнопаровых потоках не изучен, имеются только первые опытные исследования, которые относятся к течению без теплообмена [38]. По этим данным режим течения пленки (ламинарный, волновой, турбулентный) существенно зависит от сепарации влаги и скорости течения пара. Наличие теплообмена, как уже говорилось выше, еще более усложняет задачу, при этом возможно возникновение большого количества различных режимов течения, которые вкратце были описаны в предыдущих параграфах. Для межцилиндровых полостей современных влажнопаровых турбин из всех возможных режимов течения интерес представляют дисперсный, когда пленка на поверхности не возникает, и дисперсно-кольцевой, когда на поверхности имеется пленка, а в остальной части — дисперсный поток пара. При пусковых режимах, когда температура стенки ниже температуры насыщения, возникает дисперсно-кольцевой режим течения. При сбросах нагрузки, сопровождающихся резким снижением параметров пара, возможно возникновение таких режимов, когда пленка конденсата вся испарится или будет отделена от поверхности паровой прослойкой. В этом случае интенсивность теплоотдачи может значительно уменьшиться. При больших скоростях движения пара и при наличии на стенке тонкой пленки может произойти вышеописанное подавление кипения, когда теплообмен будет осуществляться только за счет конвективного переноса в пленке, а испарение происходит только с поверхности пленки.

Обширный экспериментальный материал, имеющийся в литературе по теплообмену во влажнопаровых потоках применительно к задачам парогенераторостроения, не может быть исполь-

зован для рассматриваемых задач вследствие значительно больших скоростей движения пара и существенно меньших степеней влажности, характерных для турбин.

Выполненная в ЦКТИ работа по исследованию теплоотдачи пластины, обтекаемой влажнопаровым потоком, в условиях, близких к условиям течения пара в межцилиндровых пространствах влажнопаровых ступеней турбин, показала, что в этом случае возникают другие закономерности. Опыты проводились с плоской пластиной, находящейся в пародинамической трубе, и с пластиной, являющейся одной из стенок плоской модели, геометрически подобной продольному сечению выхлопной части ЦВД турбины АЭС. Исследования проводились при следующем изменении параметров: влажность $y = 0 \div 30\%$; давление $p_0 = (0,5 \div 2,0) 10^5$ Па; $R'' = (1,5 \div 20) 10^5$; $K = 80 \div 2700$.

Режимы течения в опытах соответствовали пусковым, температура стенки T_w всегда была ниже температуры насыщения T_s . Средние коэффициенты теплоотдачи в зависимости от режимных параметров колебались в широком диапазоне: $\alpha \approx (2 \div 200) \times 10^3$ Вт/(м²·К). Для оценки влияния скорости движения пара на интенсивность теплоотдачи обычно вводится параметр $\bar{N} = \alpha/\alpha_n$, где α_n — средний коэффициент теплоотдачи в неподвижном паре. Значение α_n можно определить с помощью приведенного в работе [131] соотношения

$$\bar{\alpha}_n = 0,72 \sqrt[4]{\frac{\gamma^{2\lambda^3}}{\mu}} \sqrt{\frac{r}{L(T_s - T_w)}}. \quad (\text{VI.36})$$

Для медленно движущегося пара в работе [105] приводится формула, позволяющая определить \bar{N} при турбулентном движении в пленке:

$$\bar{N} = 1 + 0,013 \left(\frac{\gamma''}{\gamma'} \right)^{0,5} \frac{w''}{(g\nu')^{1/3}}. \quad (\text{VI.37})$$

Сопоставление опытных данных ЦКТИ со значениями, вычисленными по этим формулам, показывает, что параметры, входящие в формулы (VI.36) и (VI.37), не учитывают всех особенностей теплообмена в быстро движущемся влажнопаровом потоке. Как видно из рис. 99, расчетные данные (сплошная линия), полученные по формуле (VI.37), отличаются от опытных данных в несколько раз, причем в разные стороны. Анализ этих опытных данных позволил обнаружить следующую зависимость параметра \bar{N} от чисел Рейнольдса $R_L'' w'' d/\nu''$ и $K = r/(c\Delta T)$:

$$\bar{N} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_n} = 1 + 0,0018K \left(\frac{\gamma''}{\gamma'} \right)^{0,5} (R_L'')^{0,4}. \quad (\text{VI.38})$$

На рис. 100 приведено сопоставление значений, вычисленных по этой формуле (сплошная линия), с теми же опытными данными,

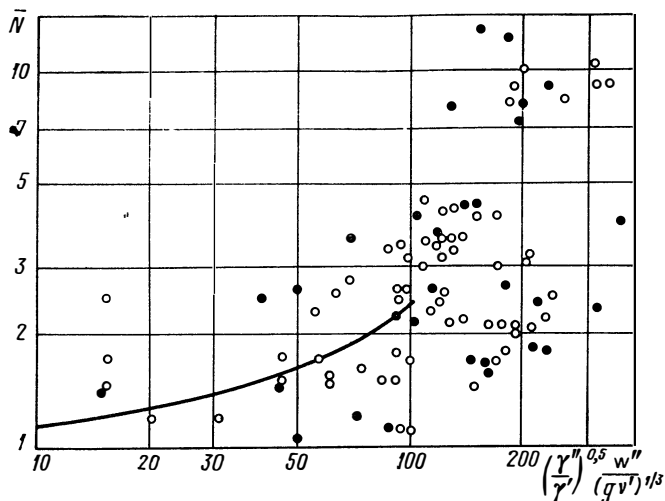


Рис. 99. Сопоставление опытных данных по теплоотдаче с расчетными, полученными для медленно движущегося пара:

● — $y = 0$ (сухой насыщенный пар); ○ — $y = 1 \pm 30\%$ (влажный пар)

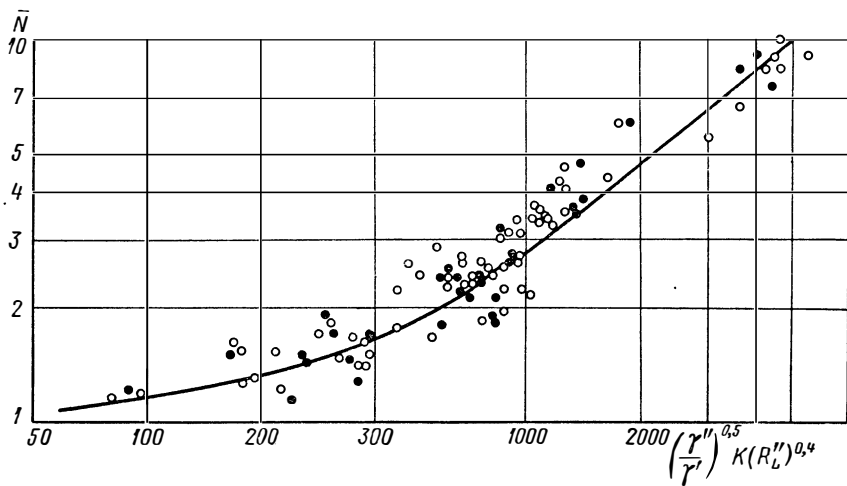
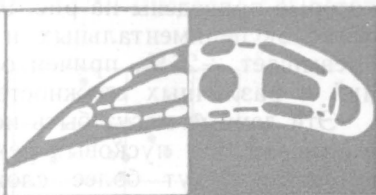


Рис. 100. Зависимость \bar{N} от определяющих параметров:

● — $y = 0$; ○ — $y = 1 \pm 30\%$

которые приведены на рис. 99. Как видно, в этом случае расхождение экспериментальных и расчетных данных практически не превышает $\pm 25\%$, причем опытные точки для различных давлений и различных влажностей практически совпадают.

Эти данные могут быть использованы для оценки теплоотдачи в камерах при пусковых режимах, однако в натуральных условиях процессы будут более сложными: в криволинейных каналах при наличии градиента давления будет возникать дополнительная сепарация влаги, возможно возникновение отрывов пограничного слоя, поток может быть пространственным и т. д. Все эти явления скажутся на величине коэффициентов теплоотдачи. При режимах остановки турбины характер теплообмена будет отличаться от вышеописанного; так как в этом случае температура стенки будет выше температуры потока и вместо конденсации возможно возникновение испарения или кипения. Эти процессы в условиях турбомашин в настоящее время не исследованы.



СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ОХЛАЖДАЕМЫХ ТУРБИННЫХ ЛОПАТКАХ



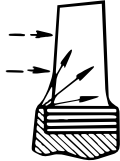






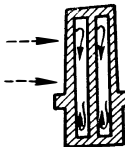
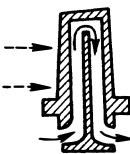
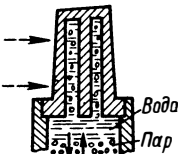
38. Основные схемы охлаждения лопаток газовых турбин

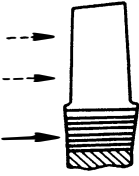
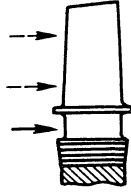
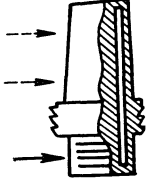
При создании системы охлаждения высокотемпературной турбины приходится решать комплекс различных научно-технических задач, среди которых основными являются выбор конструкции и технологии, а также вопросы прочности, термодинамики цикла, потерь, связанных с охлаждением, и др. Однако на первом месте находится задача теплообмена в лопатке, правильное решение которой в известной мере определяет целесообразность постановки остальных вопросов.

Не будем останавливаться на конструктивных особенностях отдельных систем охлаждения; эти вопросы достаточно широко отражены в специальной литературе [50, 80]. Существует ряд принципов классификации систем охлаждения: по конструктивным признакам, по термодинамическим свойствам, по виду теплоносителя и др. Однако ни одна из предложенных классификаций не является универсальной.

Для анализа тепловых свойств систем охлаждения целесообразно выделить типовые схемы тепло- и массообмена в охлаждаемых лопатках. Основные из этих схем и наиболее характерные конструктивные варианты их реализации показаны в табл. 8. Рассмотрим особенности приведенных схем.

Наружное охлаждение (схема I). При наружном охлаждении, которое применимо только для рабочих лопаток, поверхность лопатки вступает попеременно в контакт с охладителем и высокотемпературным газом, при этом каждый раз изменяется знак теплового потока. Однако температурные колебания распространяются на незначительный по глубине слой у поверхности профиля, основная часть металла лопатки имеет практически постоянную температуру. Охлаждающий агент при наружном охлаждении может подводиться парциально с основным рабочим телом, а также впрыскиваться в газовый тракт или непосредственно на лопатку. Важное практическое значение имеет то обстоятельство, что при данной схеме теплоотвода рабочие ло-

Номер схемы	Охлаждение	Конструктивные варианты		
		1	2	3
I	Наружное	 <p>Парциальный подвод охлажда- теля</p>	 <p>Впрыск охла- дителя в газовый тракт</p>	 <p>Впрыск охла- дителя непосред- ственно на лопа- тку</p>
II	Заградительное	 <p>Пленочное (ще- левое) охлажде- ние</p>	 <p>Пористое (эф- фузионное) охла- ждение</p>	 <p>Твердые по- крытия</p>
III	Внутреннее проточное	 <p>Дефлекторная лопатка</p>	 <p>Гильзовая ло- патка</p>	 <p>Монолитная лопатка</p>
IV	Термо- сифонное (центро- бежная конвекция)	 <p>Закрытый тер- мосифон</p>	 <p>Открытый тер- мосифон</p>	 <p>Система с кип- ящим теплоно- сителем</p>

Но- мер схе- мы	Охлаждение	Конструктивные варианты		
		1	2	3
V	Корневое	 <p>Отвод тепла в сопряженные детали</p>	 <p>Двухъярусная лопатка (с удлиненной комлевой частью)</p>	 <p>Лопатка с корневым теплообменником</p>
<p>Примечание. Обозначения: — → — высокотемпературный газ; → — охладитель.</p>				

патки турбины имеют такую же конструкцию, как и в неохлаждаемых турбинах.

Для успешной реализации преимуществ, связанных с повышением температуры газа, при такой схеме охлаждения необходимо свести к минимуму время пребывания лопаток в зоне подачи охладителя (в противном случае потери существенно увеличиваются), поэтому коэффициенты теплоотдачи при отводе тепла от лопатки должны быть достаточно велики. Еще А. Стодола показал, что охлаждение с помощью парциальной подачи воздуха не перспективно. В настоящее время такое охлаждение применяется только в специфических случаях, когда экономичность не имеет значения. Применение мелкодисперсных газожидкостных и жидкостных потоков более эффективно. В качестве охлаждающих жидкостей применяются вода или топливо, возможно также применение влажного пара, самоиспаряющихся жидкостей и других теплоносителей.

Заградительное охлаждение (схема II). Заградительное охлаждение предусматривает создание на поверхности лопаток защитных слоев, сильно увеличивающих термическое сопротивление между газом и стенкой лопатки и тем самым уменьшающих тепловой поток в лопатку. Этот уменьшенный тепловой поток обычно снимается агентом, с помощью которого создается защитный слой. В отдельных случаях бывает необходимо предусматривать дополнительные меры для отвода теплового потока.

С точки зрения организации процесса заградительное охлаждение является более совершенным, чем наружное, однако при

этом существенно изменяется конструкция лопатки и возникает ряд новых проблем прочностного и технологического характера.

Разновидностью такой схемы является так называемое **плечное** (щелевое) охлаждение, при котором охладитель подается на поверхность лопатки через ряд дискретно расположенных щелей. Между поверхностью профиля и газом постоянно существует тонкая прослойка холодного воздуха. Так как эта прослойка быстро размывается газовым потоком, то для обеспечения равномерности температур лопатки необходимо относительно большое количество точек ввода охладителя на поверхность профиля. Вдув охладителя через пористую стенку позволяет избавиться от указанного недостатка, в этом случае практически на любом участке профиля и при любом режиме работы двигателя могут быть обеспечены достаточно надежное охлаждение и защита поверхности от воздействия высоких температур. Необходимо отметить, что в настоящее время еще не решены технологические вопросы образования поверхности профиля турбинных лопаток из пронцаемого материала, обеспечивающего надежную и стабильную работу такой системы охлаждения. Это обстоятельство сдерживает применение одного из наиболее рациональных способов охлаждения — **пористого**.

К одной из разновидностей заградительного охлаждения следует отнести системы, где на поверхности лопатки создается **твердое покрытие** — слой из твердого материала с высоким термическим сопротивлением. В этом случае при прочих равных условиях величина теплового потока, направленного в лопатку, и температурные градиенты значительно уменьшаются. Однако остается необходимость отвода этого уменьшенного теплового потока от пера лопатки с помощью, например, внутреннего корневого охлаждения.

Обычно, говоря о твердых покрытиях, имеют в виду материалы, наносимые на поверхность лопатки в стадии изготовления. Имеется принципиальная возможность при соответствующих условиях создавать на лопатках поверхностный слой с низкой теплопроводностью за счет веществ, выпадающих непосредственно из газового потока в процессе работы двигателя, например тугоплавких составляющих продуктов сгорания.

Внутреннее проточное охлаждение (схема III). При этом способе охлаждения охладитель прокачивается через систему специально организованных каналов внутри профиля. Эффективность такой схемы в основном определяется тем, насколько удачна форма и расположение охлаждающих каналов сочетаются с типом и параметрами профиля. Стремление добиться оптимального сочетания приводит к усложнению формы каналов и, как следствие, усложняет конструкцию лопатки.

Специфической особенностью и существенным недостатком внутреннего охлаждения является наличие значительных удельных тепловых потоков в стенке лопатки. В этих условиях, для

того чтобы избежать опасных градиентов температур, необходимы точные данные об условиях теплообмена на поверхностях теплоподвода и теплоотвода. Однако на нерасчетных режимах работы турбины в лопатке, даже при удачно спроектированной для номинального режима системе охлаждения, могут возникать значительные градиенты температур. В результате допустимую температуру газа приходится снижать по сравнению со значениями, которые принципиально может обеспечить система охлаждения. Уменьшение температуры охлаждающего агента на входе также ведет к росту продольных и поперечных градиентов температур. Данные системы чувствительны к технологическим отклонениям при изготовлении. Перечисленные обстоятельства ограничивают возможность применения внутреннего проточного охлаждения при дальнейшем повышении начальной температуры в газовых турбинах и должны учитываться при проектировании.

Другая особенность схемы внутреннего проточного охлаждения заключается в том, что поверхность теплоподвода, как правило, получается больше, чем поверхность теплоотвода. Причем с уменьшением размеров лопатки эта разность усугубляется. Дефицит поверхности теплоотвода особенно сказывается в зоне входной и выходных кромок, т. е. в местах, где как раз необходимо наиболее эффективное охлаждение.

Одним из конструктивных вариантов схемы внутреннего проточного охлаждения является так называемая *дефлекторная лопатка*. Существенным недостатком этой конструкции является наличие значительных тепловых потоков в несущем корпусе лопатки, что приводит обычно к возникновению больших градиентов температур на нерасчетных режимах. В известной мере этого недостатка лишена *гильзовая лопатка*, в которой центральный (несущий) стержень, воспринимающий основную нагрузку от газовых и центробежных сил, отделен системой охлаждающих каналов от тонкостенной оболочки, образующей наружную поверхность профиля. При такой конструкции возникают известные трудности, связанные с обеспечением прочности и устойчивости наружной оболочки.

Термосифонное охлаждение (схема IV). С теплофизической точки зрения одним из эффективных путей интенсификации теплоотвода во внутренних каналах рабочих лопаток является переход к термосифонной схеме теплопереноса. Эта схема, применяемая только для рабочих лопаток, основана на естественной циркуляции промежуточного теплоносителя в охлаждающих каналах под действием центробежных сил. Находящийся на меньшем радиусе (за пределами проточной части) более холодный, а следовательно, имеющий большую плотность теплоноситель отбрасывается к периферии, вытесняя из профильной части лопатки нагретый и, следовательно, менее плотный агент. Условия массообмена в термосифонах существенно отличаются от условий при конвективном проточном охлаждении. При соответствующем

подборе теплоносителя такая схема позволяет в 10—100 раз увеличить теплосъем внутри пера лопатки. Отвод тепла от промежуточного теплоносителя производится в теплообменниках, вынесенных за пределы профиля. При этом для увеличения поверхности теплосъема нет принципиально непреодолимых препятствий.

Высокие теплопередающие свойства термосифонов приводят к тому, что температура пера лопатки приближается практически к температуре промежуточного теплоносителя. В этих условиях для того, чтобы избежать нежелательного переохлаждения, приходится применять высококипящие теплоносители, например натрий или его сплавы.

Корневое охлаждение (схема V). Очевидно, что из-за значительного термического сопротивления пера лопатки такая схема мало эффективна и позволяет снизить температуру лопатки практически только вблизи корневого сечения. Наиболее эффективны при этом лопатки с удлиненной комлевой частью, в которых между профилем и диском создается прослойка из охлаждающего воздуха. Однако в сочетании с методами интенсификации теплопереноса внутри пера лопатки, например с помощью промежуточного теплоносителя, схема корневого охлаждения оказывается весьма эффективной. В этом случае в корневой части лопатки располагается специальный теплообменник с развитой поверхностью, в комбинированных установках возможно также применение двухъярусных лопаток.

В практике обычно встречаются различные комбинации приведенных схем теплопереноса, например внутреннее конвективное охлаждение и заградительное охлаждение выходной кромки и т. д.

39. Оценка эффективности охлаждения и выбор теплоносителя

Эффективность охлаждения газовой турбины определяется большой группой параметров и прежде всего тепловой схемой и мощностью установки, схемой охлаждения, быстроходностью, геометрией проточной части и др. В процессе проектирования охлаждаемых лопаток, как отмечалось выше, теплофизическая сторона вопроса является важнейшей, но не единственной. Технологические, прочностные, термодинамические аспекты заставляют иногда иначе взглянуть на достоинства той или иной системы. Действительно, если с теплофизической стороны пористое охлаждение следует рассматривать как наиболее целесообразное, то с учетом технологических особенностей такие системы в настоящее время не могут быть рекомендованы для широкого внедрения. Некоторые способы охлаждения, например паровое, связаны с конкретными тепловыми схемами и в отрыве от них не могут обеспечить общую эффективность установки. Различная степень изученности отдельных методов охлаждения также затрудняет сравнение их эффективности. Однако несмотря на это делаются

попытки введения некоторых коэффициентов, учитывающих отдельные стороны вопроса. С учетом отмеченных выше обстоятельств влияние этих коэффициентов, различное для каждой системы, при сравнении общей эффективности определить затруднительно.

В настоящее время при выборе способа охлаждения на стадии проектирования следует проводить комплекс сравнительных расчетов, а вследствие ограниченности данных по отдельным типам охлаждения необходимо предусматривать экспериментальную доводку и исследования. Конечным результатом такой работы должно являться создание охлаждаемой ступени, применение которой возможно на ряде двигателей.

Сравнение отдельных вариантов одной системы охлаждения для конкретной тепловой схемы и параметров установки осуществить проще. Необходимость сопоставления многочисленных экспериментальных исследований различных конструктивных вариантов принципиально одинаковых систем охлаждения, проведенных при различных режимных параметрах и геометрических размерах, вызвала появление в литературе целого ряда предложений и разработок, направленных на решение этого вопроса.

Общий анализ условий подобия применительно к теплообмену в лопатке показывает, что процесс теплообмена определяется значительным количеством параметров, использование которых для обобщения и сопоставления экспериментальных данных, содержащих ограниченную информацию, практически невозможно. Ограниченность информации заставила искать более простые характеристики. Широкое распространение в практике для оценки систем охлаждения получили понятия безразмерной температуры лопатки θ или η и безразмерного расхода охладителя $\bar{G}_{\text{охл}}$:

$$\theta = \frac{T_{\Gamma}^* - T_w}{T_w - T_{\text{охл}}^*}; \quad \eta = \frac{T_{\Gamma}^* - T_w}{T_{\Gamma}^* - T_{\text{охл}}^*}; \quad (\text{VII.1})$$

$$\bar{G}_{\text{охл}} = \frac{G_{\text{охл}}}{G_{\Gamma}} 100\%. \quad (\text{VII.2})$$

Здесь T_{Γ}^* и $T_{\text{охл}}^*$ — температура торможения газа и охладителя соответственно.

Практически эти параметры правомочны только для сравнения различных вариантов системы охлаждения, испытанных на одной и той же турбине при одинаковых значениях режимных параметров.

В. И. Локай предложил использовать в качестве характеристики эффективности внутреннего охлаждения лопаток при заданной геометрии проточной части удельный коэффициент расхода охлаждающего воздуха, который может быть представлен в виде [80]

$$g = \frac{\bar{G}_{\text{охл}}}{\theta} \approx k_{\lambda} \left(\frac{T_{\Gamma}}{T_{\text{охл}}} \right)^{0,25} \alpha_{\Gamma} f(\alpha_{\text{охл}}). \quad (\text{VII.3})$$

Здесь

$$\alpha'_r = \frac{\alpha_r F_r}{c_r G_r}; \quad \alpha'_{охл} = \frac{\alpha_{охл} F_{охл}}{c_{охл} G_{охл}}; \quad f(\alpha'_{охл}) = \frac{e^{\alpha'_{охл}}}{e^{\alpha'_{охл}} - 1}, \quad (\text{VII.4})$$

где F_r и $F_{охл}$ — поверхности лопаток, омываемые в фиксированный момент времени соответственно газом и охладителем.

Коэффициент k_λ , учитывающий термическое сопротивление лопатки, равен

$$k_\lambda = \frac{1}{1 - \text{Bi} \theta}.$$

Параметр g показывает, какое относительное количество воздуха требуется для снижения средней температуры лопатки на один градус при одинаковом температурном напоре со стороны охлаждающего воздуха. Параметры α'_r и $\alpha'_{охл}$ могут быть выражены через критерий Стэнтона, тогда легко установить связь удельного коэффициента расхода с основными критериями подобия, описывающими теплообмен в лопатке.

Из выражения (VII.3) вытекают некоторые известные принципы проектирования систем внутреннего охлаждения: чем больше геометрические размеры лопатки (т. е. чем больше число R), тем проще решается при прочих равных условиях задача ее охлаждения; каналы вытянутой формы предпочтительнее, чем круглые, и др. Данное выражение может использоваться также для переноса результатов модельных испытаний на натурные объекты. Подробно эти вопросы рассмотрены в работе [80].

Вопрос о способах сравнения различных систем охлаждения в целом остается открытым. Существенное значение в ряде случаев приобретают сопротивление тракта охлаждения и максимальные градиенты температур на охлаждаемых поверхностях. Особое значение эти показатели приобретают при использовании газожидкостных хладагентов [158]. Так, выше было показано, что теплоотдача увлажненных потоков при определенных условиях может быть в несколько раз выше, чем однофазных охладителей, сопротивление при этом возрастает незначительно. Отсюда возникает возможность существенного снижения потерь работы, связанных с охлаждением. Однако газожидкостное охлаждение в силу многообразия возможных режимов теплоотдачи обычно приводит к более резким градиентам температур на поверхности.

Оценивая эффективность систем с газожидкостным охлаждением, необходимо учитывать также следующее обстоятельство. Обычно в трактах охлаждения современных ГТУ температурный фактор ψ равен 1,6—2,2. В предыдущей главе было показано, что для газожидкостных потоков температурный фактор существенно влияет на теплоотдачу: так, при $\psi = 1,0 \div 1,2$, могут быть получены значения коэффициентов теплоотдачи в несколько раз более высокие, чем при $\psi = 1,6 \div 2,2$. Резкое увеличение

теплосъема при снижении ψ , (т. е. снижении температуры T_w поверхности, омываемой охладителем) при определенных условиях может скомпенсировать некоторое снижение температурного напора в тракте охлаждения и соответствующее увеличение температурного напора в проточной части турбины. В связи с этим возникает вопрос об оптимальной температуре охлаждаемой лопатки [52].

В качестве примера на рис. 101 приведены результаты расчетов теплового состояния лопатки определенной конструкции с двухконтурной системой охлаждения при изменении ψ в широком диапазоне. Снижение значений ψ в интервале 1,65—1,50 в данном случае приводит к снижению теплосъема в системе охлаждения, вызванному уменьшением температурного напора в тракте охлаждения. В результате допустимая температура газа T_g^* снижается в указанном интервале ψ от 1250 до 1100° С. Однако при дальнейшем снижении ψ уменьшение температурного напора уже компенсируется возрастанием коэффициента интенсификации теплоотдачи \bar{N} [см. формулу (VI.31)], теплосъем в тракте охлаждения начинает увеличиваться и, следовательно, растет допустимая температура газа. При $\psi \approx 1,35$

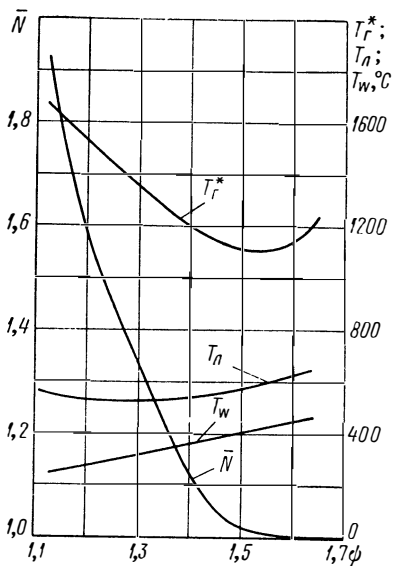


Рис. 101. Результаты расчета теплового состояния лопатки I ступени газовой турбины

несколько ниже. Дальнейшее уменьшение ψ ведет к увеличению допустимой температуры газа. Таким образом, для систем с газожидкостным теплоносителем при определенных значениях ψ существует минимум эффективности. Говоря об эффективности систем с газожидкостным теплоносителем в данном случае, мы предполагаем, что они используются в тепловых схемах, предусматривающих глубокую утилизацию тепла, отбираемого в тракте охлаждения.

Необходимая интенсивность охлаждения лопаточного аппарата зависит не только от принятой рабочей температуры, но и от рабочего давления. Упрощенный теоретический анализ внутреннего охлаждения показывает, что для двух геометрически идентичных турбинных ступеней, работающих при различных давлениях, одинаковые температурные режимы лопатки ($T_{л}$) возможны

при выполнении равенства

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{T_{1r}^*}{T_{2r}^*} \left(\frac{T_{1r}^* - T_{л}}{T_{2r}^* - T_{л}} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{VII.5})$$

где ε — степень увеличения давления; n — показатель степени в критериальном уравнении теплоотдачи. На основании равенства (VII.5) построена расчетная зависимость (рис. 102) для случаев турбулентного (кривая 1) и ламинарного (кривая 2) течения в охлаждающих каналах, средняя температура лопатки при расчетах принята равной 600°C . Учитывая, что при внутреннем охлаждении существует предельный тепловой поток, превысить который не удастся при сколь угодно высокой интенсификации теплоотдачи, следует признать преимущество для данных систем охлаждения тепловых схем с меньшей степенью сжатия (например, схем с регенерацией) [53].

Остановимся теперь на вопросе выбора теплоносителя для некоторых из рассмотренных в предыдущем параграфе схем тепло- и массопереноса.

Наиболее распространенным и одним из наиболее эффективных по теплофизическим свойствам теплоносителем в системах охлаждения газовых турбин является воздух. В открытых системах охлаждения (с однократным использованием теплоносителя) воздух может с наименьшими потерями сбрасываться в проточную часть турбины. При этом практически отсутствует требование герметизации системы охлаждения, что приводит к значительному упрощению конструкции охлаждаемой турбины в целом и поэтому в известной мере окупает основные недостатки воздуха как охлаждающего агента: низкие значения теплоемкости и теплопроводности и большие удельные объемы. Однако при дальнейшем повышении начальной температуры газа возможности воздушного охлаждения быстро исчерпываются и возникает необходимость искать более эффективный теплоноситель.

Более эффективен в качестве охладителя водяной пар. За счет более высокой теплоемкости при прочих равных условиях необходимые для охлаждения расходы пара на 30—50% ниже, чем расходы воздуха. Однако применение пара возможно лишь в установках, работающих по специальным тепловым схемам, например по схеме ЦКТИ—ЛПИ, предусматривающей генерацию влажного пара и его вакуумную конденсацию. Температура

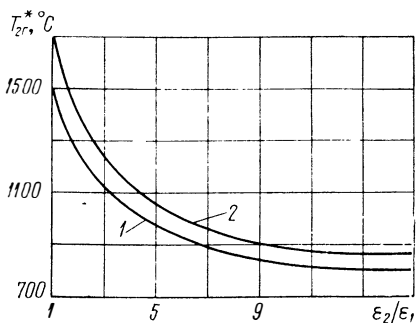


Рис. 102. Влияние степени повышения давления на изменение допустимой температуры газа перед турбиной с внутренним охлаждением лопаток

уходящих газов в современных ГТУ обеспечивает возможность получения необходимого для охлаждения количества пара. Пар может оправдать применение некоторых конструкций, нецелесообразных при использовании воздуха. Например, значительно повышается эффективность турбин с парциальным охлаждением, в которых водяной пар (в отличие от воздуха) создает положительный баланс работы [53].

Для интенсификации теплоотдачи в замкнутых системах охлаждения могут применяться различные газы и капельные жидкости под высоким давлением. Возможно применение таких газов, как гелий, азот, углекислый газ и др. Однако следует учитывать свойства гелия проникать через поры и неплотности материалов вследствие высокого коэффициента диффузии. В среде углекислого газа нержавеющие хромоникелевые стали коррозионно устойчивы только до температуры 600° С.

Весьма высокие коэффициенты теплоотдачи в тракте охлаждения может обеспечить вода, но при высоких тепловых нагрузках следует опасаться возникновения кризиса теплоотдачи. Докризисные режимы, возможные при малых перегревах стенки относительно температуры насыщения жидкости, обуславливают переохлаждение теплообменной поверхности. Для уменьшения переохлаждения приходится повышать давление воды в системе охлаждения, однако даже при значительном повышении давления температура охлаждаемой водой поверхности не может быть выше 550—600° С.

Избавиться от переохлаждения позволяют высококипящие теплоносители, прежде всего натрий, калий и их сплавы. Жидкие металлы рассматривают в качестве основного теплоносителя при термосифонном охлаждении. Недостаток жидкометаллических теплоносителей заключается в том, что при температуре выше 500° С они неблагоприятно влияют на стойкость конструкционных материалов.

Применение в трактах охлаждения газожидкостных потоков позволяет, как уже отмечалось выше, при определенных условиях сочетать простоту конструкции, свойственную системам с газообразным теплоносителем, с более высокой эффективностью охлаждения, чем в случае применения капельных жидкостей [52, 158].

40. Внешнее охлаждение

Внешнее охлаждение лопаток газовых турбин достаточно эффективно только в случае применения в качестве хладагента водяного пара или газожидкостных потоков.

В турбинах с подачей охладителя в газовый тракт хладагент безвозвратно теряется. Энергетические затраты на подачу капельно-жидкого охладителя в турбину меньше, чем на подачу воздуха, но необходимость непрерывно снабжать установку жидкостью в количестве 0,3—2,0% от весового расхода воздуха обуславливает

применение таких схем охлаждения в основном для форсажных режимов работы двигателя.

В турбинах с парциальным охлаждением путем специальных конструктивных мероприятий можно улавливать основную часть теплоносителя за ступенью [53], что позволяет осуществить замкнутую по тракту охладителя схему. Однако такие охлаждаемые турбины практически могут быть только одноступенчатыми, что также ограничивает область их применения.

Уравнение теплового баланса при парциальном охлаждении имеет вид

$$\alpha_r (T_r^* - T_w) F_r = \alpha_{\text{охл}} (T_w - T_{\text{охл}}^*) F_{\text{охл}}. \quad (\text{VII.6})$$

Если при парциальном охлаждении используется воздух, то как средние, так и локальные значения α_r и $\alpha_{\text{охл}}$ определяются в соответствии с рекомендациями гл. V. В случае применения водяного пара задача осложняется отсутствием экспериментальных данных. Для сильно перегретого пара есть все основания рекомендовать те же расчетные зависимости, что и для воздуха, учитывая изменение теплоотдачи с помощью критерия Рг. Для влажного пара такой подход будет неправильным. Принимая во внимание предыдущий материал, учитывая формулы (V.1) и (VI.31), а также предполагая, что режимы течения газа и пара в проточной части одинаковы, можно для общего случая парциального охлаждения из (VII.6) получить

$$\frac{T_r^* - T_w}{T_w - T_{\text{охл}}^*} = \bar{N} \frac{G_{\text{охл}} \lambda_{\text{охл}}}{G_r \lambda_r} \left(\frac{\omega_r \rho_r}{\omega_{\text{охл}} \rho_{\text{охл}}} \right)^{1-n} \left(\frac{\mu_r}{\mu_{\text{охл}}} \right)^n. \quad (\text{VII.7})$$

Коэффициент интенсификации \bar{N} определяется экспериментально. При отсутствии опытных данных зависимость \bar{N} от $\psi = T_w / T_{\text{охл}}^*$ может быть принята по (VI.33).

В целом вопросы, связанные с расчетом высокотемпературных турбин с парциальным паровым охлаждением, еще недостаточно экспериментально исследованы.

Рассмотрим особенности внешнего жидкостного охлаждения. При подаче охлаждающей жидкости непосредственно в газовый тракт турбины задача расчета системы охлаждения включает следующие элементы:

- 1) определение дисперсности распыла и структуры охлаждающего потока на выходе из устройства ввода;
- 2) определение испарения и траекторий движения капель охлаждающей жидкости в проточной части турбины;
- 3) расчет теплоотдачи охлаждаемой лопатки.

Остановимся здесь только на последнем вопросе, используя материал, изложенный в гл. VI. На рис. 103 представлены экспериментальные результаты ряда авторов по интенсивности внешнего охлаждения рабочих лопаток. Опыты проводились на различных турбинах в диапазоне окружных скоростей $u = 7 \div 280$ м/с при

температуре газа $T_r = 430 \div 550^\circ \text{C}$. Во всех опытах наблюдалось резкое снижение температуры лопатки в интервале изменения относительного расхода жидкости $\bar{G}_ж = G_ж/G_r = 0,4 \div 2\%$. При достижении некоторого предельного значения $\bar{G}_ж^*$ дальнейшее увеличение подачи охлаждающей жидкости не приводило к заметному снижению температуры лопатки. В опытах на статической установке [65] характер зависимости качественно не изменился, однако стабилизация температуры наступала при $\bar{G}_ж > 6 \div 7\%$.

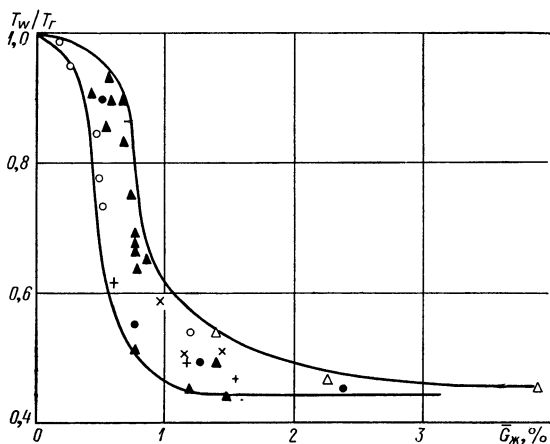


Рис. 103. Интенсивность внешнего жидкостного охлаждения:

Δ — $u = 280$ м/с [9]; \circ — $u = 135 \div 195$ м/с [111]; \blacktriangle — $u = 135$ м/с [65]; \bullet — $u = 118$ м/с [65]; $+$ — $u = 100$ м/с [65]; \times — $u = 70$ м/с [65]

На рис. 104 приведено соотношение между $\bar{G}_ж^*$ и температурой газа перед ступенью T_r , полученное на основании данных [65]. Как видно, повышение T_r влечет за собой и повышение значений $\bar{G}_ж^*$.

Неравномерность температуры вдоль обвода профиля по данным ХТГЗ [65] на отдельных режимах, как видно из рис. 105 [159], достигает 250°C . Кривые на рис. 105 относятся к отдельным точкам профиля, положение которых показано на развертке. На спинке профиля, где условия сепарации хуже, темп падения температуры значительно меньше, чем на входной кромке и на вогнутой части.

На основании имеющихся опытных данных можно утверждать, что в зависимости от режимных параметров на поверхности лопатки развиваются, как минимум, три различных режима теплообмена. При малых значениях $\bar{G}_ж$ влага практически не оказывает влияния на температурное состояние лопатки, так как, очевидно, нормальная к поверхности составляющая скорости

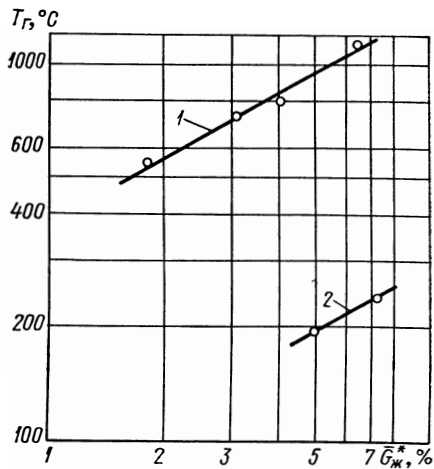


Рис. 104. Предельные значения относительного расхода жидкости при внешнем охлаждении при различных температурах газа: 1 — опыты на турбине; 2 — опыты на статической установке

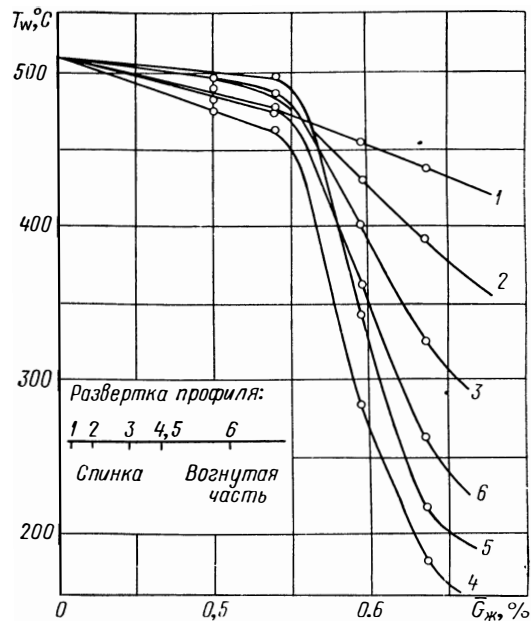


Рис. 105. Локальная температура поверхности лопатки при внешнем жидкостном охлаждении

полностью гасится и капли испаряются вне пограничного слоя. При значениях $\bar{G}_{ж} > 0,5 \div 0,7\%$ для исследовавшихся случаев на участках профиля, где условия сепарации оказались более благоприятными, наблюдается постепенное снижение температуры, что указывает на изменение режима теплообмена. В этом случае жидкость оказывает уже существенное влияние на пограничный слой, в котором увеличивается содержание пара. Жидкость в пограничном слое в соответствии с данными п. 35 находится в сфероидальном состоянии. Дальнейшее увеличение расхода жидкости приводит к тому, что на участках с наиболее благоприятными

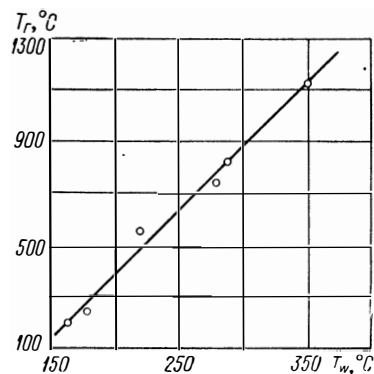


Рис. 106. Зависимость средней температуры лопатки от температуры газа при $\bar{G}_{ж} > \bar{G}_{ж}^*$:

○ — опыты ХТГЗ на турбине; ● — опыты ЦКТИ на статической установке

пазоне зависимость средней температуры лопатки T_w от температуры газа T_g (при $\bar{G}_{ж} > \bar{G}_{ж}^*$) носит практически линейный характер. Отсюда следует, что средний коэффициент теплоотдачи для лопатки меняется незначительно. Постоянство среднего коэффициента теплоотдачи в столь широком диапазоне изменения T_w для полностью смоченной лопатки не соответствует представлениям о наличии (в зависимости от степени недогрева поверхности) трех режимов с существенно отличными уровнями теплоотдачи (см. гл. VI). Остается предположить, что на поверхности профиля при всех значениях $\bar{G}_{ж} > \bar{G}_{ж}^*$, имевших место в опытах, существовали участки профиля, не покрытые непрерывной пленкой, а результирующий коэффициент теплоотдачи был получен путем осреднения существенно различных режимов теплоотдачи. При этом площади поверхностей, на которых имелся тот или иной режим теплоотдачи, зависели от температуры газа.

Приведенные выше результаты показывают, что при внешнем жидкостном охлаждении существует тенденция к значительной

условиями сепарации температура падает до значений, достижимых обычно при существовании на поверхности пленки жидкости. Одновременно с режимом жидкой пленки должны существовать участки с описанным выше переходным режимом.

Факт существования предельного расхода жидкости позволяет провести аналогию с параметром $R_{пл}^*$ (см. п. 35). Однако в данном случае следует предположить, что при $R_{пл} < R_{пл}^*$ не вся поверхность лопатки покрыта пленкой жидкости. Действительно, из приведенной на рис. 106 аппроксимации [65] можно видеть, что как для динамических, так и для статических опытов в широком диапазоне

неравномерности температур, связанная с возникновением принципиально различных условий теплообмена, обусловленных сепарацией влаги. Применение данного метода охлаждения требует введения специальных мер, обеспечивающих равномерные условия сепарации для вогнутой и выпуклой сторон профиля. Исследования, выполненные на ХТГЗ [65], показали, что определенных успехов можно достичь применением специальных распыливающих устройств.

41. Заградительное охлаждение

Заградительное охлаждение, целью которого является создание изолирующей прослойки между высокотемпературным газом и поверхностью лопатки, в настоящее время является предметом широких обсуждений в литературе, особенно зарубежной, и рассматривается как один из наиболее перспективных принципов охлаждения для высокотемпературных газовых турбин. В этой проблеме есть два аспекта: 1) эффективность понижения температуры металла лопатки и возможность создания равномерного поля температур в ее теле; 2) оценка влияния системы охлаждения на к. п. д. ступени.

С точки зрения к. п. д. ступени твердые покрытия поверхности обладают тем преимуществом, что они не требуют дополнительного расхода воздуха на охлаждение, однако применение их связано с трудностями. Очевидно, что покрытие является эффективным в том случае, если оно обладает достаточно большой толщиной и малой теплопроводностью. Выполнение этих требований приводит к ухудшению сопротивляемости покрытия и тепловым скачкам. Многочисленные исследования керамических покрытий показывают, что увеличение толщины покрытия приводит после испытаний при переменных режимах или к растрескиванию наружной поверхности керамики, или к отделению керамического покрытия от основного материала. Эти обстоятельства заставляют переходить от чисто керамических покрытий к металлокерамическим. Фирма «Дженерал моторс» [187] рекомендует два типа металлокерамических покрытий.

Первый тип представляет собой соты из сплава Hastelloy-X (Ni-Cr-Mo), заполненные керамикой и покрытые керамической оболочкой. Проведены исследования серий высокоплотных и низкоплотных керамик.

Второй тип представляет собой композицию из слоев металлокерамики различного состава. Описана композиция, хорошо себя зарекомендовавшая в условиях высокотемпературных газовых турбин (1100—1670° С). На защищаемую поверхность наносится пять слоев, отличающихся процентным содержанием металла и керамики. В слое, прилегающем к поверхности, содержится 100% металла, во втором слое — 75% металла и 25% керамики, в третьем — 50% металла и 50% керамики, в четвертом — 25%

металла и 75% керамики, в наружном слое — 100% керамики. В качестве металла используются сплавы Ni-Cr-Mo или Ni-Al, в качестве керамики — окись циркония ZrO_2 .

Вопросам конструкции и эффективности пленочного и его разновидности — пористого охлаждения в литературе последних лет уделяется большое внимание. Необходимость теоретического расчета эффективности таких систем была одним из стимулов для развития теории теплового пограничного слоя при наличии поперечного потока вещества.

Широкий цикл работ по исследованию конкретных конструкций этих систем охлаждения проводится рядом английских и американских фирм. Одним из центров этих исследований является NASA [83].

Обычно пленочное охлаждение применяется для локального охлаждения передних и задних кромок лопаток. Современные методы технологии позволяют изготовить лопатку с большим количеством отверстий, и в связи с этим становится возможным применять пленочное охлаждение для всей поверхности лопатки. В исследовательском центре им. Льюиса [83] ведутся исследования, связанные с изучением свойств охлаждающей воздушной пленки в газовых потоках больших скоростей. Показано, что наиболее эффективным является вдув охлаждающего воздуха под острым углом к направлению потока.

В ряде работ рассматриваются конструктивные вопросы, связанные с расположением, количеством и типом охлаждающих отверстий.

В работе [219] приведены результаты экспериментального исследования эффективности охлаждения турбинной лопатки при выпуске охладителя через щели вблизи задней кромки. Исследованы два типа отверстий: 1) сплошная щель по всей высоте лопатки с выпуском охладителя под различными углами β к направлению потока; 2) цепочка цилиндрических сверлений с осями, расположенными под углом β к направлению основного потока. В эксперименте варьировались: ширина щели (s), диаметр отверстий и расстояние между ними (c), относительный расход охладителя b . Показано, что отношение Φ количества теплоты $Q_{вд}$, поступающей в лопатку при наличии вдува, к соответствующему количеству теплоты $Q_{б.вд}$ при тех же условиях, но без вдува, практически не зависит от числа R и $R\Gamma$, а зависит в основном от значений b и θ , от отношения длины охлаждаемой поверхности к ширине щели l/s , от геометрических характеристик. Более эффективным оказалось охлаждение при вдуве через сплошную щель.

В работе [222] показано, что эффективность охлаждения через плоскую щель с острой кромкой является максимальной при угле заострения кромки $\alpha = 5^\circ$.

В работе [213] исследовалась эффективность охлаждения лопаток с помощью выпуска охлаждающего воздуха через два

ряда отверстий, расположенных так, как это указано на рис. 107. Исследовалась локальная теплоотдача на различных расстояниях от линии расположения отверстий. На рис. 108 приведено изменение интенсивности теплоотдачи за отверстиями для двух типов лопаток. Как видно, максимальное повышение ($\sim 50\%$) коэффициента теплоотдачи за счет вдува $\alpha_{вд}$ по сравнению с соответствующим коэффициентом без вдува α достигается в непосредственной близости от отверстий; на расстоянии $x/s \approx 50$ повышение оказывается не больше 10%. Таким образом, видно, что поток, выходящий из охлаждающих щелей, довольно быстро размывается и теряет свои защищающие свойства.

При экспериментальном исследовании пленочного охлаждения плоской пластины в работах [165, 197, 236, 51] получены данные, которые позволяют выделить три участка в развитии пленки, которые характеризуют так называемым коэффициентом эффективности охлаждения

$$\eta_* = \frac{T_r - T_{aw}}{T_r - T_c},$$

где T_r — температура адиабатного восстановления основного газа; T_{aw} — температура адиабатного торможения на стенке; T_c — температура охладителя на выходе из щели.

На I участке защищаемая поверхность контактирует только с охладителем; на II участке происходит перемешивание, когда величина η_* начинает уменьшаться; III участок — основной, когда величина η_* быстро снижается. Эмпирические формулы для η_* на этих участках имеют вид:

I участок ($A = 0 \div 1$)

$$\eta_* = 1; \quad (\text{VII.8})$$

II участок ($A = 1 \div 10$)

$$\eta_* = 0,98A^{-0,27}; \quad (\text{VII.9})$$

III участок ($A = 10 \div 20$)

$$\eta_* = 3,47A^{-0,8}. \quad (\text{VII.10})$$

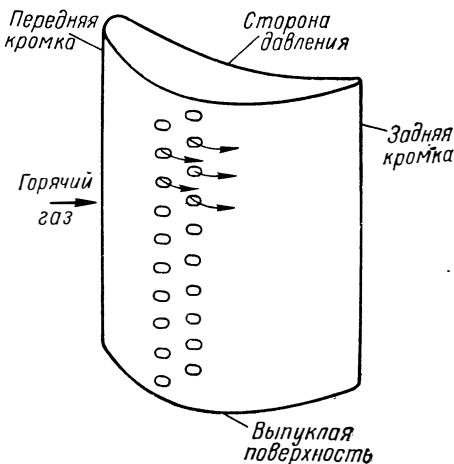


Рис. 107. Схема охлаждаемой турбинной лопатки

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A &= R^{-0,25} b^{-1,25} \frac{x}{s} \psi^{-1,25}, \\ R &= \frac{\rho_0 \mu_0 x}{\mu_0}; \quad b = \frac{\rho_c \mu_c}{\rho_0 \mu_0}; \quad \psi = \frac{T_w}{T_0}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII.11})$$

где T_0 — температура газа.

В опытах $R = (0,5 \div 4,0) 10^4$; $b = 0,5 \div 1,1$; $\psi = 1,0 \div 1,2$.

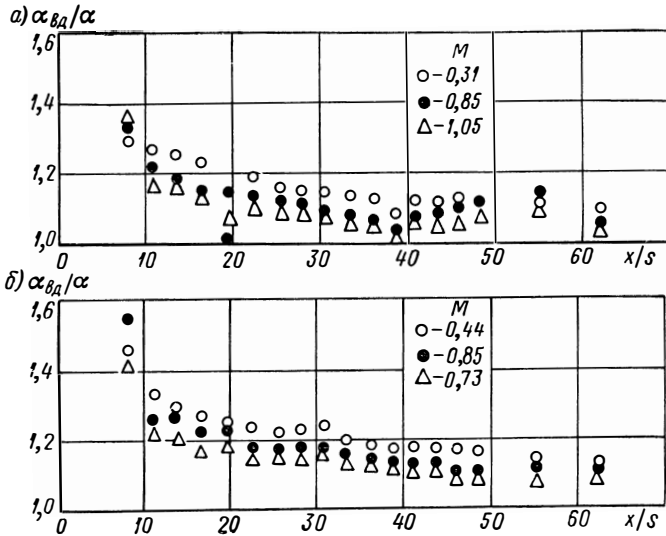


Рис. 108. Возрастание коэффициента теплоотдачи при вдуве:
а — для профиля № 1; б — для профиля № 2

Эмпирическая формула для оценки интенсивности теплообмена на II участке имеет вид

$$\text{Nu}_x = 0,25 b^{0,15} R^{0,66b-0,55}. \quad (\text{VII.12})$$

На основном участке опытные данные аппроксимируются обычной формулой для расчета теплоотдачи пластины с турбулентным пограничным слоем.

В работе [177] на основе анализа различных схем и типов охлаждения лопаток газовых турбин отмечается, что наиболее эффективным в тепловом отношении является проникающее (пористое) охлаждение. Это охлаждение, как отмечалось выше, предполагает наличие стенки с множеством каналов-пор; через них проходит охлаждающий воздух, который отбирает сперва тепло от стенки, а затем, выходя из пор, изолирует охлаждаемую поверхность от непосредственного контакта с горячим газом, образуя на всем ее протяжении защитный слой сравнительно низ-

кой температуры. В работе [83] приведены конструкции таких пористых материалов на проволочной основе: расплющенная проволока наматывается на специальную оправку до необходимой толщины и проницаемости. Структурная целостность материала достигается путем последующего его спекания. Такой материал должен укрепляться на соответствующей несущей конструкции.

Принципиальной трудностью, с которой приходится сталкиваться при практическом использовании этого типа охлаждения, является склонность пористых материалов к понижению своей проницаемости (за счет окисления) и уменьшению проходных сечений (пор) с течением времени. В связи с этим возникли конструкции псевдопористых стенок, представляющих собой монолитную стенку с множеством сверлений в ней. По данным [83] пористая стенка на проволочной основе из сплава Hastelloy-X (Ni-Cr-Mo) при выдержке в воздухе с температурой 980° С через 380 ч работы забивается полностью. Изготовленная из того же материала сплошная стенка с мелкими отверстиями сохранила через 600 ч 75% пропускной способности. Фирмой им. Льюиса получен новый перспективный материал GE1541 (Fe-Cr-Al — 1% итрия). Стенки на проволочной основе из этого материала через 600 ч работы в тех же условиях сохранили свою пропускную способность неизменной.

Некоторые успехи, достигнутые в этой области, не решили проблему охлаждения в целом. В настоящее время ведутся широкие исследования ламинарного и турбулентного пограничного слоя на пористой стенке. Экспериментальные исследования обнаружили ряд специфических особенностей. Так, например, при обтекании пористых вставок в трубах было обнаружено [188], что при прохождении вдоль пористых стенок ламинарного потока переход к турбулентному режиму течения затягивается, а при прохождении турбулентного потока наблюдается тенденция обратного перехода к ламинарному режиму течения. Это явление существенно осложняет картину течения и теплообмена на пористых стенках. Кроме того, отмечавшаяся в п. 29 зависимость внешней теплоотдачи лопатки от турбулентности потока ставит перед исследователями целый комплекс вопросов, связанных с необходимостью определения уровня турбулентности в различных турбинах и закономерностей ее влияния на теплообмен и необходимую глубину охлаждения. Как видно из предыдущего, наличие вдува будет сказываться на турбулентности пограничного слоя и вносить осложнения в решение проблемы в целом.

При наличии нерешенных проблем, связанных с недостаточной изученностью механизма теплообмена при заградительном охлаждении, возникают вопросы экономической эффективности систем охлаждения, т. е. влияния того или иного типа охлаждения на к. п. д. турбины. На рис. 109, построенном по данным работы [198], показана зависимость термодинамического к. п. д. турбины η_T от относительного расхода охладителя b для трех разных систем

охлаждения. Как видно, минимальное ухудшение к. п. д. ступени вызывает первая система, здесь даже при $b = 1\%$ вдвое несколько увеличивает к. п. д., так как уменьшается эффективная толщина задней кромки и потери за ней; наибольшее ухудшение к. п. д. вызывает третья система.

В работе [229] приведены данные по сравнению потерь кинетической энергии в решетках профилей с охлаждением и без охлаждения при одинаковых условиях входа. На рис. 110 приведено сопоставление этих данных для трех систем охлаждения. По оси ординат на графике отложено отношение потери кинетической энергии за счет

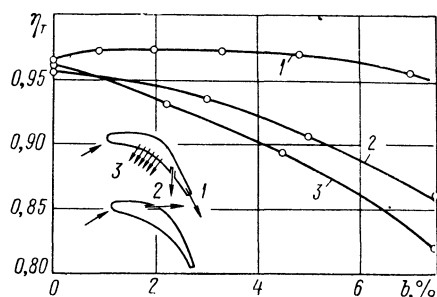


Рис. 109. Влияние охлаждения на к. п. д. турбины при различных системах охлаждения:

1 — выпуск воздуха через заднюю кромку; 2 — пленочное охлаждение; 3 — пористое охлаждение

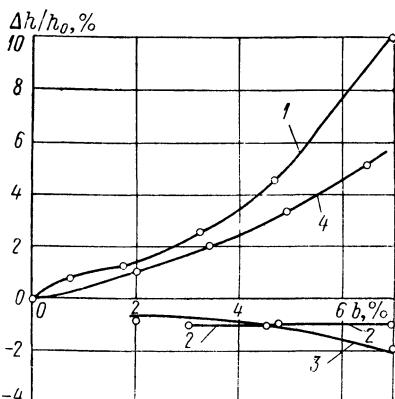


Рис. 110. Относительная потеря кинетической энергии в решетке при различных системах охлаждения:

1 — выпуск охладителя через заднюю кромку; 2 — пленочное охлаждение; 3 — пористое охлаждение по всей поверхности; 4 — пористое охлаждение на части поверхности

наличия охлаждения (Δh) к кинетической энергии в решетке тех же лопаток без охлаждения (h_0), по оси абсцисс — относительный расход охладителя b . Как видно, величина Δh в зависимости от системы и конкретной конструкции охлаждения может быть и положительной, и отрицательной.

Все эти сравнения, конечно, не совсем объективные, так как не учитывается тепловая эффективность системы охлаждения. Например, в работе [177] указывается, что при пористом охлаждении охлаждающий эффект при одном и том же значении b значительно больше, чем в двух других рассмотренных случаях.

Таким образом, при создании конструкций охлаждения высокотемпературных газовых турбин нельзя решать изолированно тепловую и динамическую проблемы, необходимо рассматривать задачу комплексно, учитывая как тепловую эффективность, так и потери энергии в проточной части.

42. Особенности теплообмена в охлаждающих каналах

Охлаждающие каналы лопаток с внутренним конвективным теплоотводом могут быть разной длины и иметь разнообразную форму поперечного сечения. При определении коэффициентов теплоотдачи в канале необходимо учитывать форму канала, условия входа и турбулентность потока, а также протяженность участка тепловой стабилизации.

В реальных конструкциях перечисленные факторы варьируются в широких пределах. Строгие аналитические решения получены для ограниченного круга задач, поэтому в основном расчеты базируются на большом количестве сугубо частных эмпирических зависимостей, полученных для вполне конкретных условий. Следует различать две принципиально различные расчетные задачи: стабилизированное течение, когда теплоотдача по длине канала практически постоянна и можно оперировать значением среднего коэффициента теплоотдачи для всей поверхности (величина теплового потока при этом будет обусловлена только поверхностью теплоотвода и изменением температурного напора по длине канала); нестабилизированное течение, когда коэффициент теплоотдачи изменяется вдоль канала. Вопросы стабилизации теплообмена были рассмотрены в п. 22, здесь отметим только, что неравномерное распределение температур и тепловых потоков в тракте охлаждения, различная турбулентность на входе и другие специфические особенности, свойственные трактам охлаждения турбин, могут оказывать существенное влияние на протяженность участков стабилизации теплообмена. Ниже приводятся основные расчетные зависимости.

При турбулентном движении охлаждающего агента (газообразного или капельно-жидкого) средняя теплоотдача в канале круглого сечения длиной l на достаточном удалении от входа определяется зависимостью¹

$$\text{Nu} = 0,023R^{0,8}Pr^{0,4}\psi^{-0,55}\epsilon_l, \quad (\text{VII.13})$$

где ϵ_l — коэффициент, учитывающий влияние участка тепловой стабилизации и определяемый по рис. 111 [5].

Формула (VII.13) справедлива при $R > 10^4$, $0,6 < Pr < 100$ и $\psi < 3,5$; определяющий размер здесь — эквивалентный диаметр $d_s = 4f/u$, где f — проходное сечение канала, u — периметр канала (для круглой трубы $d_s = d$); физические константы и скорость определяются по средним значениям между условиями на входе и на выходе.

Для воздуха ($Pr \approx 0,7$) формула (VII.13) часто используется в виде

$$\text{Nu} = 0,018R^{0,8}. \quad (\text{VII.14})$$

¹ См. также формулы (IV.154)—(IV.157).

При течении газообразного теплоносителя с большими скоростями ($M > 0,2$) возникает необходимость учитывать сжимаемость потока. В этом случае в формулы (VII.13) и (VII.14) вводится определяющая температура

$$T = 0,5 (T_{\text{вх}} + T_{\text{вых}}) \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2 \right), \quad (\text{VII.15})$$

где $r \approx \sqrt[3]{\text{Pr}}$ — коэффициент восстановления температуры; k — показатель адиабаты.

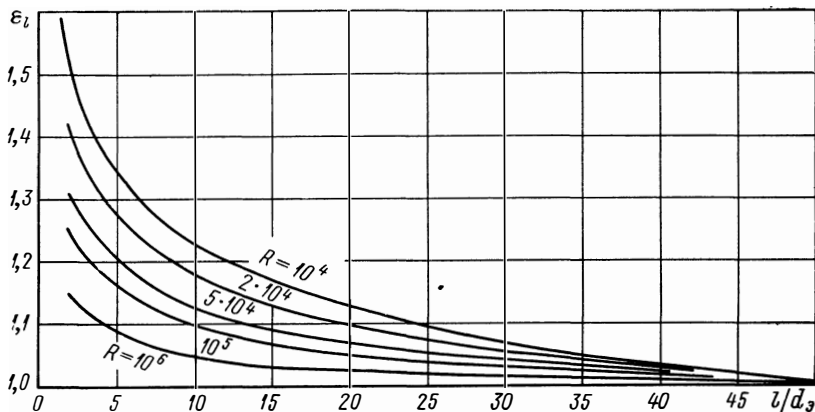


Рис. 111. Влияние относительной длины канала на среднюю теплоотдачу при турбулентном течении

Удельный тепловой поток находится с учетом (VII.15):

$$q = \alpha \left[T_w - T_{\text{охл}} \left(1 + r \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right]. \quad (\text{VII.16})$$

Если температура охлаждающего потока $T_{\text{охл}}$ превышает 400°C , то может быть учтено влияние излучения:

$$q = \alpha (T_w - T_{\text{охл}}) + 5,75 \cdot 10^{-8} \epsilon (T_w^4 - T_{\text{охл}}^4), \quad (\text{VII.17})$$

где ϵ — коэффициент степени черноты стенки; q — в Вт/м^2 .

Для криволинейных каналов средний уровень теплоотдачи несколько выше¹ и может определяться из выражения [89]

$$\text{Nu} = 0,021 R^{0,8} \text{Pr}^{0,43} \psi^{-0,55} \epsilon_l \left(1 + 1,77 \frac{d_3}{r_0} \right), \quad (\text{VII.18})$$

где r_0 — радиус кривизны канала.

Формула (VII.18) применима при $R > 2300 + 10\,500 (d_3/l)^{0,3}$; $3 < r_0/d_3 < 12$. Значения ϵ_l принимаются по рис. 111.

¹ Поправка на криволинейность канала находится по формуле (IV.159).

При ламинарном течении в прямой трубе ($R \leq 2300$) расчетные зависимости для теплоотдачи имеют вид [135]:

при $GrPr < 5 \cdot 10^5$ и $Pe \frac{d_3}{l} < 12$

$$Nu = 3,66 (\mu_{охл}/\mu_w)^{0,14}, \quad (VII.19)$$

при $GrPr < 5 \cdot 10^5$ и $Pe \frac{d_3}{l} > 12$

$$Nu = 1,6 \left(Pe \frac{d_3}{l} \right)^{0,33} \left(\frac{\mu_{охл}}{\mu_w} \right)^{0,14}; \quad (VII.20)$$

при $5 \cdot 10^5 < GrPr < 1,5 \cdot 10^7$ и $R < R_{кр}$ [4]

$$Nu = [0,74Pe^{0,2}\varepsilon_l + k(\beta\Delta T)^{0,02}](GrPr)^{0,1}. \quad (VII.21)$$

Здесь ΔT — разность температур на входе и на выходе из канала; ε_l — коэффициент, принимаемый по рис. 112; k — коэффициент,

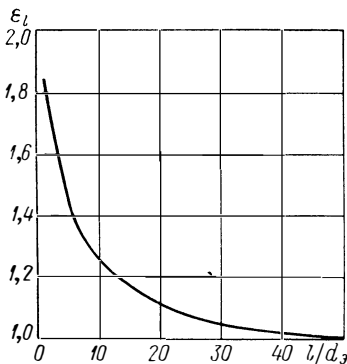


Рис. 112. Влияние относительной длины канала на среднюю теплоотдачу при ламинарном течении

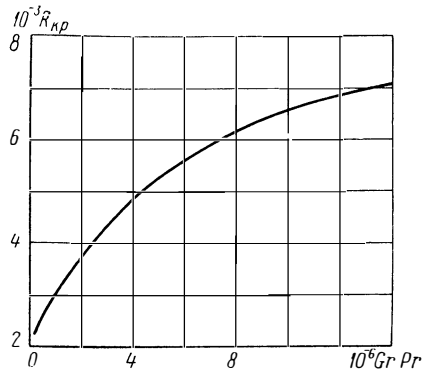


Рис. 113. Критическое значение числа Рейнольдса, соответствующее окончанию ламинарного режима течения

учитывающий взаимное действие свободной и вынужденной конвекции. В сопловых лопатках следует принимать для горизонтальных каналов $k = 0$, для вертикальных — $k = 1$. Критическое значение $R_{кр}$, соответствующее началу переходной области течения, принимается обычно равным 2300. При совпадении в канале направлений действия свободной и вынужденной конвекции значения $R_{кр}$ принимаются по графику на рис. 113 [5].

Для переходной области ($2300 < R < 10^4$) теплоотдача характеризуется выражением

$$Nu \approx 0,01R^{1,2}. \quad (VII.22)$$

Часто встречающейся задачей при расчете охлаждаемых лопаток является определение теплоотдачи в плоских щелях различной формы. При этом используются, как правило, экспериментальные данные, полученные в опытах на кольцевых каналах.

Детальное исследование теплоотдачи в кольцевых каналах проведено в работе [5].

При $R \leq 10^4$ расчет проводится раздельно для наружной и внутренней стенок. На участке стабилизированного течения справедливы формулы:

$$Nu_1 = Nu 0,86 (d_1/d_2)^{-0,16\xi}; \quad (\text{VII.23})$$

$$Nu_2 = Nu [1 - 0,14 (d_1/d_2)^{0,6}]. \quad (\text{VII.24})$$

Здесь и далее индекс 1 относится к внутренней поверхности, а индекс 2 — к наружной. Коэффициент ξ определяется из соотношений: при $d_1/d_2 > 2$ $\xi = 1$, а при $0,14 < d_1/d_2 < 0,2$

$$\xi = 1 + 7,5 \left(\frac{d_2/d_1 - 5}{R} \right)^{0,6}.$$

Значение Nu в формулах (VII.23) и (VII.24) рассчитывается по формулам для круглой трубы — (VII.13) или (VII.14).

На участке тепловой стабилизации, длина которого находится по формуле

$$l_0 = 30\delta(1 + 1,2d_1/d_2), \quad (\text{VII.25})$$

где $\delta = (d_2 - d_1)/2$ ширина щели, локальные значения коэффициента теплоотдачи определяются зависимостью

$$\frac{Nu_x}{Nu_{1,2}} = 0,86 + 0,54 \left[\left(\frac{d_2 - d_1}{x} \right)^{0,4} \left(1 + 1,2 \frac{d_1}{d_2} \right) - 0,188 \frac{d_1}{d_2} \right]. \quad (\text{VII.26})$$

Здесь $Nu_{1,2}$ — значения критерия Нуссельта, рассчитанные соответственно по формулам (VII.23) или (VII.24); x — текущая координата, отсчитываемая от входа в канал.

Следует подчеркнуть, что выражение (VII.26) применяется только при $x < l_0$; при $x > l_0$ расчет следует вести по формулам (VII.23) и (VII.24).

Для случая плоской щели расчетные зависимости упрощаются и имеют вид:

$$Nu_{1,2} = 0,86Nu = 0,208R^{0,8}Pr^{0,4}\psi^{-0,55}; \quad (\text{VII.27})$$

$$Nu_x = Nu_{1,2} \left[0,86 + 0,54 \left(\frac{2\delta}{x} \right)^{0,4} \right]; \quad (\text{VII.28})$$

$$l_0 = 30\delta. \quad (\text{VII.29})$$

43. Теплообмен в дефлекторной лопатке

Для обеспечения равномерного поля температур в лопатке с внутренним охлаждением теплоотвод по периметру профиля должен соответствовать эюре коэффициентов теплоотдачи от газа к лопатке, т. е. быть существенно неравномерным. Стремление изменять в широких пределах значения коэффициента теплоот-

дачи в тракте охлаждения привело к созданию конструкции охлаждаемой лопатки с дефлектором. В такой конструкции несколько упрощается задача создания каналов сложной формы, расширяются возможности искусственной турбулизации охлаждающего потока на отдельных участках за счет широкого применения струйного охлаждения.

При ударе газовой струи о поверхность коэффициент теплоотдачи по данным отдельных авторов может быть на порядок выше, чем при конвективном охлаждении. Изменяя диаметры

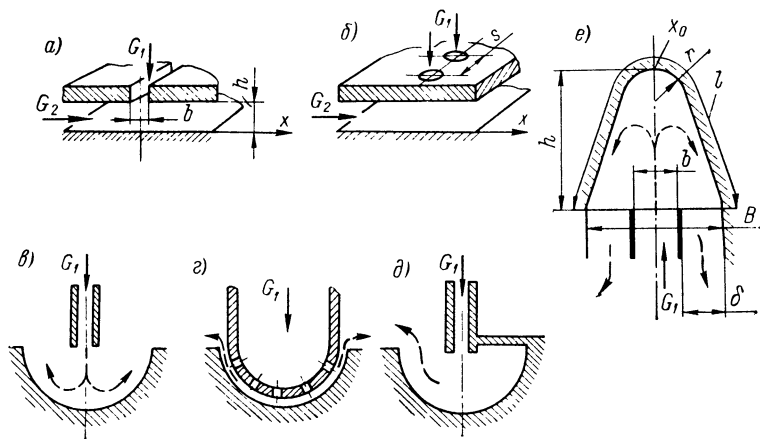


Рис. 114. Схемы струйного охлаждения: *a* и *б* — пластины, охлаждаемые соответственно плоской струей и рядом круглых струй; *в*, *г*, *д* — цилиндрические поверхности, охлаждаемые соответственно плоской струей, пучком круглых струй и плоской струей с односторонним отводом охладителя; *e* — тупиковая полость

струй, шаги отверстий, их форму и расстояние от охлаждаемой поверхности, можно обеспечить переменное значение коэффициентов теплоотдачи в тракте охлаждения, что необходимо для создания равномерного поля температур. Сочетание различных механизмов теплообмена, оказывающих взаимное влияние в пределах одного тракта охлаждения, существенно усложняет задачу определения абсолютных значений коэффициентов теплоотдачи.

Теоретические решения даже в приближенной постановке в большинстве случаев оказываются невозможными. Имеющиеся экспериментальные данные посвящены в основном изучению частных процессов, поэтому использование их в проекторочных расчетах не позволяет исключить этап экспериментальной доводки системы охлаждения. Остановимся на основных имеющихся в литературе данных, которые могут быть использованы при разработке дефлекторной лопатки со струйным охлаждением.

Схемы струйного охлаждения поверхностей с обозначением характерных размеров показаны на рис. 114. Кроме числа

Рейнольдса на условия теплоотдачи существенное влияние оказывают отношение массового расхода струи G_1 к массовому расходу поперечного потока G_2 и геометрические соотношения x/b (или l/b), h/b , s/b (обозначения см. на рис. 114). Если струя истекает не из плоской щели шириной b , а из круглого отверстия, в качестве характерного размера рассматриваются эквивалентная по площади ширина плоской щели $b_э$ или диаметр отверстия d .

В работе [26] экспериментально определялись локальные коэффициенты теплоотдачи $\alpha(x)$ при ударе одиночной плоской струи и параллельного ряда струй в плоскую стенку при $G_2 = 0$ (при отсутствии поперечного потока). Было отмечено, что в зависимости

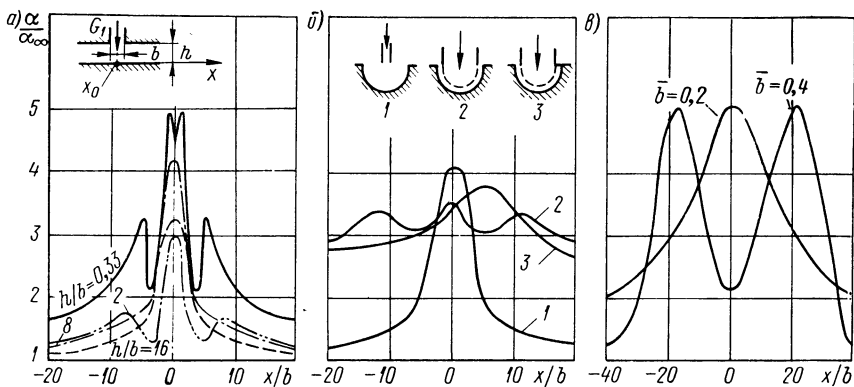


Рис. 115. Локальная теплоотдача при струйном охлаждении: а — плоская поверхность, $R = 11\,000$ [26]; б — вогнутая цилиндрическая поверхность; $R = 10\,000$ [153]; в — тупиковая полость, $R = 10\,000$ [48]

от соотношения геометрических размеров эпора изменения локальной теплоотдачи вдоль поверхности при натекании одиночной струи изменяет свою форму.

На рис. 115, а приведены типичные зависимости изменения теплоотдачи при $G_2 = 0$. При уменьшении относительного расстояния от среза сопла до теплоотдающей поверхности $\bar{h} = h/b$ в пределах 8—80 коэффициент теплоотдачи в критической точке x_0 , лежащей на оси сопла, возрастает, а эпора локальных коэффициентов теплоотдачи α носит симметричный характер с максимумом в точке x_0 , по мере удаления от точки x_0 величина α монотонно убывает. При $\bar{h} < 8$ на расстоянии $x/b \approx 3$ (здесь x — координата по поверхности, отсчитываемая от x_0) от оси струи намечаются провалы уровней теплоотдачи, которые увеличиваются при дальнейшем снижении параметра \bar{h} . Одновременно с возникновением провалов в эпоре теплоотдачи начинается снижение значений α в точке x_0 . Дальнейшее уменьшение \bar{h} приводит, начиная с $\bar{h} < 2$, к образованию промежуточного минимума при $x_0 = 0$. Таким образом, максимальное значение среднего коэффициента тепло-

отдачи получается при $\bar{h} \approx 8$. Такой характер теплообмена сохраняется во всей области турбулентного течения. Выражение для $\alpha(x_0)$ при $R > 2000$ и $x/b < 14$ в случае одиночной струи имеет вид

$$Nu_b = 1,2R_b^{0,58}\bar{h}^{-0,62}. \quad (\text{VII.30})$$

Здесь число Рейнольдса определяется для условий на срезе сопла, через которое вытекает струя.

Для средней теплоотдачи на участке шириной x , охлаждаемом одиночной струей или рядом струй, авторы [26] предлагают зависимость

$$Nu_{cp} = 0,36R_x^{0,62}. \quad (\text{VII.31})$$

Здесь

$$R_x = \frac{w_x x}{\nu}; \quad w_x = w_b \sqrt{\frac{7}{\bar{h}}},$$

где w_b — скорость струи на срезе сопла.

Выражение (VII.31) справедливо при $R_b > 2000$, $\bar{h} > 8$ и $16 < s/b < 64$ (s — расстояние между осевыми линиями струй).

При натекании на поверхность цепочки струй в случае $\bar{h} < 6$ взаимное влияние их сказывается незначительно. Более длинные струи начинают взаимодействовать еще до соударения с поверхностью, что приводит к неустойчивости положений максимумов теплоотдачи. Для цепочки струй характерен также промежуточный максимум теплоотдачи на середине расстояния между осями соседних струй.

В том случае, если струя, распространяясь от выходного отверстия до охлаждающей поверхности, пересекает поток охладителя, движущийся вдоль стенки ($G_2 \neq 0$), то, как отмечается рядом исследователей, средняя теплоотдача несколько ухудшается по сравнению со случаем $G_2 = 0$. Влияние поперечного потока сказывается в том, что струя отклоняется вниз по потоку и ударяет в стенку не перпендикулярно, а под некоторым углом. Развивающийся при этом несимметричный вихрь сносится вниз по потоку и быстро размывается; эпюра теплоотдачи несимметрична. На некотором расстоянии вниз по потоку коэффициент теплоотдачи α имеет большие, а вверх — меньшие значения, чем для случая $G_2 = 0$. С уменьшением параметра s/d степень отклонения возрастает.

Область влияния струи на α вверх и вниз по потоку может достигать значений $x/b = 10$, причем вверх по потоку влияние распространяется на меньшем участке и для $\bar{h} < 3$ не превышает обычно значений $x/b = 4 \div 5$.

Следует подчеркнуть, что при струйном охлаждении теплоотдача обычно всегда увеличивается с уменьшением диаметра струи d при неизменном проходном сечении. В работе [128]

предлагается следующая зависимость для учета влияния поперечного потока воздуха при охлаждении рядом круглых струй:

$$St = \frac{\alpha}{w_d c_p} = 0,0822 \left(\frac{G_2}{G_1} \right)^{-0,049} R^{-0,338} . \quad (\text{VII.32})$$

Здесь α — средний коэффициент теплоотдачи; w_d — скорость струи на выходе из отверстия; критерий Рейнольдса определяется для условий на выходе из отверстия.

Данная зависимость получена в интервале $G_1/G_2 = 1 \div 3$. Отсутствие предельного перехода (при $G_1/G_2 = 0$) не позволяет установить связь между зависимостями (VII.31) и (VII.32), хотя авторы работы [128] и подтвердили экспериментально формулу (VII.31).

Задача струйного охлаждения вогнутой полуцилиндрической поверхности (см. рис. 114, в, г, д) рассмотрена в работе [153]. Эпюры локальной теплоотдачи в данном случае качественно согласуются со случаем плоской стенки для $\bar{h} > 2$. Как видно из рис. 115, б, наиболее высокие значения среднего коэффициента теплоотдачи были получены при охлаждении поверхности пучком круглых струй (кривая 2); для одного ряда круглых струй коэффициенты теплоотдачи несколько меньше; наименьшие значения α получены для одиночной плоской струи (кривая 1). Локальные значения α в точке x_0 для плоской струи и одного ряда круглых струй по абсолютной величине выше, чем для пучка круглых струй. Кроме того, скорость изменения α по мере удаления от x_0 для пучка круглых струй меньше. Это приводит к более высоким значениям средней теплоотдачи.

В том случае, когда с одной стороны полуцилиндрической поверхности выход для воздуха закрыт, в работе [153] указывается, что для ряда круглых струй и плоской струи на закрытой половине теплоотдача снижается, а на открытой повышается при сохранении среднего уровня теплоотдачи практически постоянным. Для пучка круглых струй (кривая 3 на рис. 115, б) максимум теплоотдачи в аналогичных условиях смещается в сторону закрытой полости.

Зоны входной и выходной кромок лопаток, характеризующиеся наиболее высокой теплоотдачей со стороны газа, одновременно, как отмечалось, наименее доступны для размещения охлаждающих каналов, поэтому осуществление на этих участках струйного охлаждения особенно заманчиво.

Систематическое исследование внутреннего струйного охлаждения при истечении в тупиковую полость, форма которой показана на рис. 114, е, было предпринято Е. П. Дыбаном с сотрудниками [48, 49]. В опытах, проведенных в следующем диапазоне изменения геометрических и режимных параметров: $r = 5 \div 12$ мм, $h = 4 \div 191$ мм, $b = 2 \div 2,5$ мм, $B = 12 \div 80$ мм, $R = 10^3 \div 10^5$, распределение коэффициентов теплоотдачи на поверхности модели определялось параметрами \bar{h} и $\bar{b} = b/B$. При $\bar{h} < 1,0 \div 1,5$

независимо от величины \bar{b} максимальные значения коэффициента теплоотдачи получены вблизи точки x_0 , эпюра теплоотдачи носит симметричный характер. При $\bar{h} \leq 1,0 \div 1,5$ наблюдалось два режима течения, определяемые значением параметра \bar{b} (рис. 115, в). Если $\bar{b} \geq 0,27 \div 0,3$, плоская струя разворачивается непосредственно у выхода из дефлектора и не распространяется в глубину

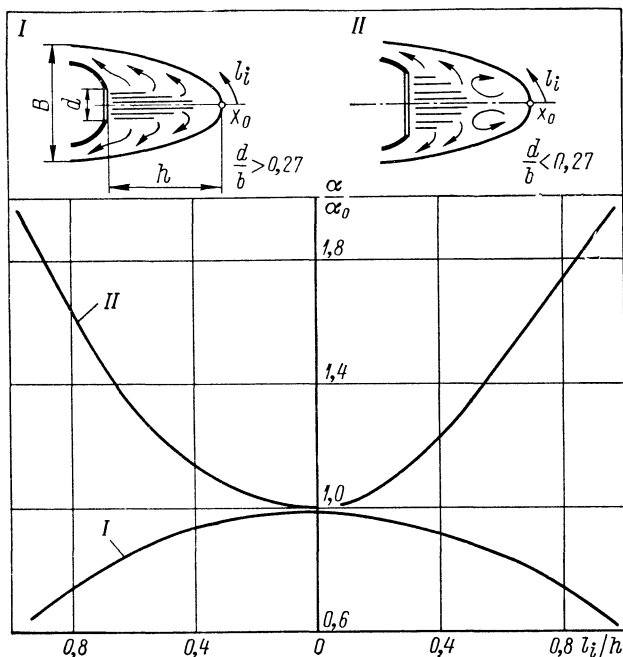


Рис. 116. Локальная теплоотдача [48] при обдуве входной кромки круглыми струями (α_0 — коэффициент теплоотдачи в точке x_0)

тупиковой плоскости, максимум теплоотдачи находится в зоне разворота струи.

Если $\bar{b} < 0,27 \div 0,3$, плоская струя распространяется в глубину тупиковой полости, но, не достигая точки x_0 , отклоняется в сторону, ударяя в одну из боковых стенок. При этом 60—70% от общего расхода газа отводится в канал, противоположной стенке, в которую ударяется струя. Если перекрыть один из боковых каналов, то струя ударяется в боковую стенку перекрытого канала. Положение максимума теплоотдачи (при $\bar{b} < 0,27 \div 0,3$) наблюдалось при $x \approx 0,4\bar{b}$.

Наибольший интерес для практического использования представляют режимы с максимальной теплоотдачей в окрестности точки x_0 .

Следует отметить, что характер течения в тупиковой полости в известной степени зависит от радиуса скругления тупика r . Чем меньше r , тем резче выражен провал в эпюре теплоотдачи вблизи точки x_0 .

При истечении в тупик не плоской струи, а ряда круглых струй [48] эпюра локальной теплоотдачи всегда была симметричной. Однако для струй большего диаметра — при $d/B < 0,27$ — максимум α находится на поверхности вблизи выходного среза дефлектора, а при $d/B > 0,27$ — в точке x_0 , т. е. характер течения принципиально изменяется в зависимости от величины d/B (рис. 116). Отмечается также, что несоосность круглых струй (нормированная по B) порядка 0,10—0,15 вызывает перекося расходов по каналам в 1,5—2,3 раза.

На основании анализа обширного опытного материала получены соотношения для локальной и средней теплоотдачи в зоне входной кромки [49]. Приведем основные из них.

Средний коэффициент теплоотдачи при охлаждении одиночной плоской струей в случае $b > 0,3$; $h/b = 3,5 \div 7$; $R = 10^3 \div 10^5$ (условия эксперимента: $r = 5 \div 12$ мм; $h = 4 \div 191$ мм; $b = 2 \div 25$ мм; $B = 12 \div 80$) может быть определен из соотношения

$$Nu_b = 0,17R_b^{0,65}. \quad (\text{VII.33})$$

Здесь критерий Рейнольдса определяется по условиям на срезах выходной щели.

Средний коэффициент теплоотдачи при охлаждении круглыми струями в случае $d/B < 0,25$; $l/b_s = 10 \div 140$; $h/B = 0,5 \div 2,0$; $R_l = 5 \cdot 10^4 \div 10^6$ (условия эксперимента: $r = 5 \div 10$ мм; $d = 1,5 \div 10$ мм; $s = 3 \div 21$ мм; $h = 4 \div 30$ мм; $B = 12 \div 25$ мм) определяется из выражения

$$Nu_l = 0,025R_l^{0,98} \left(\frac{l}{b_s} \right)^{-0,6}. \quad (\text{VII.34})$$

Здесь критерии Рейнольдса и Нуссельта определяются по параметрам на выходе из дефлектора, а за определяющий размер принята полная длина охлаждаемой поверхности l .

С учетом приведенных выше данных можно сказать, что струйное охлаждение зоны выходной кромки вряд ли целесообразно, так как стеснение потока здесь будет велико и дальнобойность струи мала. В зоне выходной кромки интенсификация теплоотдачи может достигаться путем искусственной турбулизации. Непосредственно за дефлектором (в силу конечной толщины его выходной кромки) проходное сечение при поперечном течении охладителя увеличивается, что приводит к некоторому локальному снижению теплоотдачи, которое может быть скомпенсировано существенным укорочением дефлектора — до величины 0,5—0,3 хорды [47].

Расчет теплоотдачи в плоских каналах, образованных дефлектором и стенкой лопатки, приближенно может производиться по

зависимостям, приведенным в предыдущем параграфе. Следует подчеркнуть, что в условиях тракта дефлекторной лопатки течение, как правило, носит нестабилизированный характер, обусловленный малой длиной канала, переменностью теплового потока, односторонним теплоподводом и др.

На рис. 117, заимствованном из работы [47], показано изменение коэффициентов теплоотдачи в тракте охлаждения для деф-

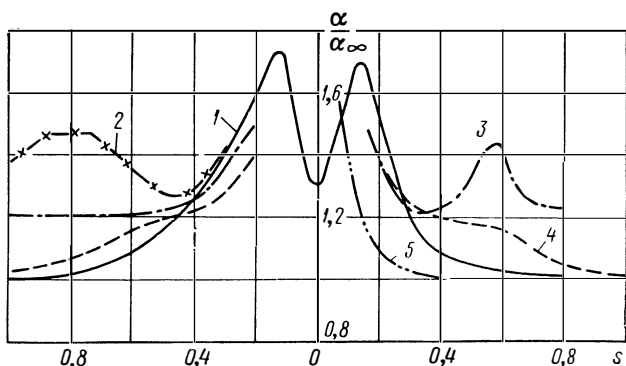


Рис. 117. Локальная теплоотдача в лопатках с различной конструкцией дефлектора (α_∞ — коэффициент теплоотдачи при стабилизированном течении в плоской щели):

- 1 — длинный дефлектор; 2 — укороченный дефлектор (1/3 хорды);
3 — дефлектор с турбулизатором; 4 — укороченный дефлектор (2/3 хорды); 5 — длинный дефлектор с увеличенным зазором

флекторов различной конструкции. Можно видеть, что применение струйного охлаждения и сложных конструкций дефлекторов позволяет в широких пределах изменять уровень теплоотдачи по тракту охлаждения.

В заключение необходимо подчеркнуть, что в дефлекторных лопатках интенсивность теплоотдачи весьма чувствительна к отклонениям от формы, т. е. в силу чисто технологических причин коэффициенты теплоотдачи могут в два-три раза отличаться от расчетных. Это обстоятельство следует обязательно принимать во внимание при выборе конструкции, разработке технологии и доводке системы охлаждения.

44. Термосифонное охлаждение

Как уже отмечалось в п.38, термосифонное охлаждение является одним из эффективных методов жидкостного охлаждения рабочих лопаток газовых турбин. Охлаждающие каналы при этом способе охлаждения пронизывают по длине все тело лопатки, причем верхний конец канала нагревается в пере лопатки, а нижний охлаждается в хвостовике. Под влиянием центробежных сил при вращении в таких каналах возникают значительные градиенты

давления вдоль высоты канала и большие центростремительные ускорения j , которые могут превосходить ускорение силы тяжести g в десятки и сотни тысяч раз (в зависимости от высоты лопатки и диаметра колеса). Под влиянием разности плотностей, обусловленной наличием градиентов давлений и температур, в канале возникает движение, способствующее интенсивному теплообмену. Сложность задачи о движении жидкости в таком канале усугубляется наличием кориолисовых сил, которые вызывают поперечную деформацию картины движения.

Основная система дифференциальных уравнений, описывающих процесс теплообмена и движение в каналах термосифонов, соответствует полной системе основных уравнений, полученной в общем виде в п.2. Уравнения сохранения энергии и сплошности будут иметь вид (I.26) и (I.12) соответственно. Уравнение движения с учетом массовых сил можно написать в виде [139]

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\rho \operatorname{grad} \frac{\omega^2 r^2}{2} - 2\rho (\omega \mathbf{w}) - \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} (\epsilon \operatorname{div} \mathbf{w}) + 2\operatorname{div} (\mu \Pi), \quad (\text{VII.35})$$

где Π — тензор скоростей деформаций:

$$\Pi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} & \frac{\partial \omega_y}{\partial x} & \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial y} & \frac{\partial \omega_y}{\partial y} & \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_x}{\partial z} & \frac{\partial \omega_y}{\partial z} & \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (\text{VII.36})$$

Уравнения движения (VII.35) и энергии (I.26) в общем случае сводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые аналитически не решены. Приближенные решения зависят от того, какой характер движения в термосифоне принят за основу. Очевидно, что в открытом и закрытом термосифонах характер течения должен быть различным. В работе Лайтхилла на основе наблюдений за конвективными токами в вертикальных неподвижных трубах предлагается следующая схема движения в термосифонах.

Открытый термосифон. При ламинарном движении наблюдается три режима течения. В том случае, когда отношение длины трубы l к радиусу a мало, у боковых стенок возникает течение нагретой жидкости вверх — типа движения под влиянием свободной конвекции вдоль вертикальной плиты. Этот поток аналогичен пограничному слою, который для ламинарного течения может быть рассчитан, например, по методу Польгаузена. Подъем вверх должен компенсироваться опусканием вниз в центре трубы (рис. 118, а). Такой тип движения практически возможен, когда объем ненагретой жидкости является подавляюще большим.

При нарушении этого условия по мере увеличения l/a возможны проскоки ненагретой жидкости в пристенный слой, в результате чего потоки в центральном ядре и пристенном слое перемешиваются, заполняя всю трубу. Возникает второй режим, характеризующийся подобием распределения скоростей и температур в каждом сечении и линейным возрастанием их абсолютных значений вдоль трубы в направлении к открытому концу.

При достижении некоторого критического значения l/a этот режим нарушается и возникает третий режим (рис. 118, б), характеризующийся наличием подобных профилей вблизи открытого конца и вихревых движений вблизи закрытого конца, где жидкость движется в середине так же быстро, как и по бокам.

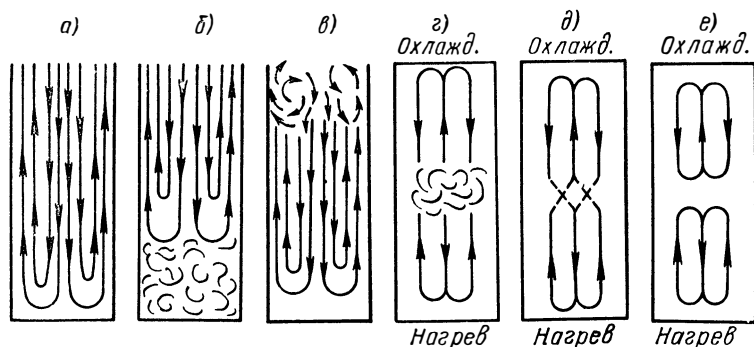


Рис. 118. Схемы течения жидкости в термосифонах: а, б, в — открытые термосифоны; г, д, е — закрытые термосифоны

В работе [139] предлагается вариант схемы течения (рис. 118, в), наблюдавшийся автором в неподвижных стеклянных каналах, заполненных воздухом, при пропускании через них дыма.

При турбулентном течении было обнаружено возникновение тех же трех режимов, что и при ламинарном, только переход возникал значительно раньше, чем в обычных трубах (при $R_\delta = U_{\max} \delta / \nu \approx 300$), причем распределение скоростей даже при полном заполнении трубы сильно отличалось от распределения, характерного для обычного турбулентного течения в трубе. При этом во втором и третьем режимах наблюдалась большая разница между характером течения у открытого и закрытого концов. Лайтхилл высказывает предположение, что у закрытого конца возможно наличие короткого участка, где локальные значения числа R настолько малы ($R \approx 100$), что турбулентность может гаситься и возникнет ламинарный режим течения.

Закрытый термосифон. В работе Лайтхилла, а также в работах [139, 178] предлагается рассматривать закрытый термосифон как два открытых, считая, что процессы в зонах нагрева и охлаждения закрытого термосифона аналогичны, и учитывать взаимодействие потоков только в области сочленения. При этом

для течения в области сочленения в работе [178] предлагаются три схемы (рис. 118, *з*, *д*, *е*).

Описанные схемы течения в термосифонах были положены в основу ряда приближенных решений задачи о теплообмене в открытых и закрытых термосифонах [139, 178, 162, 79 и др.]. Задачи решались в приближениях пограничного слоя, и решения апробировались небольшим количеством экспериментальных данных, имевшихся в распоряжении авторов и полученных в основном на статических установках.

Анализ дифференциальных уравнений, определяющих процесс теплообмена в термосифонах, методами теории подобия приводит к следующей системе определяющих параметров [139]:

$$Nu = \varphi \left(Gr_l, Pr, Fr, \frac{l}{d}, \frac{\lambda}{\lambda_0}, \frac{\mu}{\mu_0}, \frac{c_p}{c_{p0}} \right). \quad (\text{VII.37})$$

Здесь

$$Gr_l = \frac{g l^3 \beta \Delta t}{\nu^2}; \quad Fr = \frac{\omega^2}{g l}.$$

Вместо числа Fr часто вводится параметр $\bar{j} = j/g$.

В случае моделирования натурной жидкостью

$$Nu = \varphi \left(Gr_l, Pr, Fr, \frac{l}{d} \right) = \varphi_1 \left(Gr, Pr, \bar{j}, \frac{l}{d} \right).$$

В работе [139] приближенное решение сводится к следующим критериальным уравнениям. Для ламинарного течения локальное значение числа Нуссельта

$$Nu_x = \frac{0,509}{\varepsilon} (Gr_x Pr)^{0,25}. \quad (\text{VII.38})$$

Соответственно среднее по всей поверхности число Нуссельта

$$\bar{Nu}_a = \frac{0,676}{\varepsilon} \left(\frac{d}{l} Gr_d Pr \right)^{0,25}, \quad (\text{VII.39})$$

или

$$\bar{Nu}_l = \frac{0,676}{\varepsilon} (Gr_l Pr)^{0,25}. \quad (\text{VII.40})$$

Здесь ε — эмпирическая функция от Pr , при $Pr \approx 2 \div 10$ $\varepsilon \approx 1,15$, при $Pr \approx 1$ $\varepsilon \approx 1,3$, при $Pr < 1$ величина ε очень сильно возрастает с убыванием числа Pr .

Для турбулентного течения получены соотношения:

$$Nu_x = 0,023 Gr_x^{0,4}, \quad (\text{VII.41})$$

$$\bar{Nu}_d = 0,0192 \left(\frac{d}{l} \right)^{-0,2} Gr_d^{0,4}, \quad (\text{VII.42})$$

$$\bar{Nu}_l = 0,0192 Gr_l^{0,4}. \quad (\text{VII.43})$$

Полученные формулы автор считает справедливыми вплоть до смыкания пограничных слоев, которое определяется соотношением

$$\left(\frac{l}{d}\right)_{\text{пред}} \leq 1,5 \text{Gr}_d^{0,1}. \quad (\text{VII.44})$$

Как видно, в этих решениях не присутствуют параметры, определяющие влияние вращения. Однако в ряде работ это влияние учитывается тем, что в критерий Грасгофа вместо g вводится центростремительное ускорение j , переменное по высоте канала. Иногда в этом случае вместо числа Gr вводится критерий Реля [178]

$$\text{Ra}_d = \frac{\beta (T_w - T_{\text{ж}}) j d^3}{\nu a}, \quad (\text{VII.45})$$

где a — температуропроводность.

В работе [178] экспериментально исследовался теплообмен в закрытых термосифонах в диапазоне $1 \leq \text{Pr} \leq 2 \cdot 10^4$. Аналитическое решение было выполнено для ламинарного течения, характер которого показан на рис. 118, ∂ . В результате получено следующее выражение для средней теплоотдачи в нагреваемой части:

$$\overline{\text{Nu}}_d = 0,682 \left[\frac{\text{Pr } t_{d\text{H}}}{\text{Pr} + 4/5} \right]^{0,25} \left[1 - \frac{1}{0,41 \left(\frac{\text{Pr } t_{d\text{H}}}{\text{Pr} + 4/5} \right)^{0,25} - 2} \right]^{0,25}, \quad (\text{VII.46})$$

где

$$t_{d\text{H}} = \text{Ra}_d \frac{d}{L_{\text{H}}}. \quad (\text{VII.47})$$

Экспериментальные данные подтвердили теоретическое формулы, полученные в результате приближенных решений. Однако авторы справедливо отмечают, что при вращении влияние кориолисовых сил в поле центробежных сил должно вызвать поперечное перемещение ядер течения, причем в нагреваемой части ядро должно сместиться в сторону задней поверхности, а в охлаждаемой части — в сторону передней поверхности. Это должно вызвать асимметрию в зоне сочленения нагреваемой и охлаждаемой частей термосифона и может привести к таким изменениям характера течения, что принятая модель сочленения может оказаться неприемлемой.

В работе [75] приведены результаты исследования теплообмена в закрытых термосифонах в условиях вращения при изменении частоты вращения в диапазоне $n = 100 \div 1000$ об/мин. Кроме результатов количественных исследований в работе получены картины течения жидкости во вращающемся термосифоне. Для визуализации течения применялся метод электролитического

подкрашивания, основанный на использовании явлений электрофореза с применением гидрозоль теллура.

Фотографирование картин течения производилось с помощью стробоскопического метода или метода скоростной фотокинорегистрации.

На рис. 119 показано несколько типичных картин течения жидкости в таких термосифонах при разных скоростях вращения



Рис. 119. Характер течения жидкости во вращающихся закрытых термосифонах

для каналов разных калибров. При рассмотрении этих картин можно установить два характерных режима течения.

1. Интенсивное винтовое течение в ядре потока по всей высоте канала с выраженным течением в пограничном слое у стенок (рис. 119, а, б). В этом случае, как видно из рис. 120, а, б, температура непрерывно изменяется по всей длине канала.

2. Движение, характеризующееся возникновением замкнутой области вращения в районе так называемого участка нулевого подвода тепла между нагреваемой и охлаждаемой частями термосифона и замкнутых участков интенсивного вихреобразования и поперечных течений у концов канала (рис. 119, в, г, д). Этому режиму течения соответствует характерное распределение темпе-

ратур (рис. 120, в), когда их изменение происходит только на участке, занятом замкнутой областью вращения, а на верхнем и нижнем участках канала температуры практически остаются неизменными по высоте.

Переход ко второму режиму течения происходит при увеличении частоты вращения канала, причем чем больше удлинение канала \bar{l} , тем при больших значениях частоты вращения этот переход возникает.

Обработка опытных данных по теплообмену устанавливает два различных режима теплоотдачи, соответствующих вышеописанным режимам течения.

Для первого режима течения интенсивность теплоотдачи на участках нагрева и охлаждения для всех исследованных каналов с погрешностью, не превышающей $\pm 25\%$, аппроксимируется зависимостью

$$Nu = 0,036 (Gr_l Pr)^{0,4} \bar{l}^{-0,35}. \quad (VII.48)$$

Здесь в Gr_l входит разность температур жидкости между рассматриваемыми сечениями; $\bar{l} = l/d$ — относительная длина термосифона.

Эта формула близка по структуре к формулам, полученным в ряде работ [79, 139 и др.].

Теплоотдача между боковыми стенками термосифона и жидкостью аппроксимируется формулой

$$Nu_l = 3 \frac{(Gr_l Pr)^{0,25}}{\bar{l}^{0,7}}, \quad (VII.49)$$

которая также согласуется с опубликованными в литературе формулами. В частности, при $\bar{l} = 12$ расчеты по формулам (VII.49) и (VII.40) практически совпадают в диапазоне $10^8 \leq Gr_l Pr \leq \leq 2 \cdot 10^9$.

При наличии второго режима течения характер теплообмена изменяется. Интенсивность теплоотдачи на участке так называемого нулевого подвода теплоты (т. е. практически в области сочленения верхней части термосифона с подводом тепла и нижней части с отводом тепла), аппроксимируется соотношением

$$Nu_l = 0,98 (Gr_l Pr)^{0,29} \bar{l}^{-0,35}. \quad (VII.50)$$

Теплообмен между стенками термосифона и охлаждающей жидкостью для второго режима течения при $Gr_l Pr \leq 10^{10}$

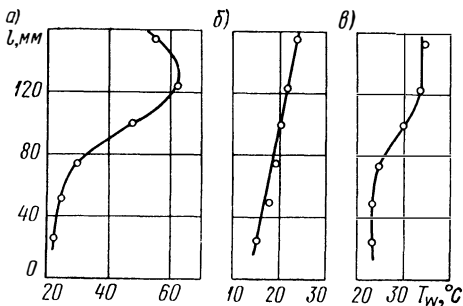


Рис. 120. Распределение температур по длине вращающихся закрытых термосифонов

оказывается ниже, чем для первого режима, и выражается соотношением

$$\text{Nu}_l = 0,47 (\text{Gr}_l \text{Pr})^{0,29} \bar{l}^{-0,7}; \quad (\text{VII.51})$$

при $\text{Gr}_l \text{Pr} \approx 10^9$ снижение числа Nu_l составляет примерно 20%.

Таким образом, использование для расчетов формул, полученных из предположения о существовании в канале течений, схематически изображенных на рис. 118, правомерно только для первого режима течения. Ухудшение охлаждающей способности закрытых термосифонов при возникновении второго режима течения следует учитывать при конструктивной проработке двухконтурных систем охлаждения лопаток высокотемпературных газовых турбин.

В настоящее время не получены опытные данные, позволяющие установить условия возникновения второго режима течения; рекомендации работы [75] в этом плане сводятся только к установлению того факта, что при $\bar{l} = 30$ этот режим возникает при $n > 1000$ об/мин, а при $\bar{l} = 18$ — при $n > 600$ об/мин. Учитывая быстроходность современных газовых турбин, вероятно, следует ожидать возникновения в охлаждающих каналах реальных машин именно второго режима течения. Для более полной характеристики этого режима необходимо проведение опытов в более широком диапазоне частоты вращения ротора.



РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ТУРБИН

45. Постановка задачи и выбор метода решения

Повышение начальных параметров рабочего тела и необходимость ускорения пуска турбины требуют создания конструкций, обеспечивающих надежность, маневренность и экономичность турбины в указанных условиях.

Для обоснования выбора конструкции, материала, системы охлаждения наиболее напряженных узлов, режимов пуска и эксплуатации и для решения ряда других вопросов, связанных с обеспечением надежности, экономичности и маневренности турбин, конструктору необходима достоверная и подробная информация по распределению температуры в основных элементах турбин, так как известно, что максимальные температурные напряжения возникают в зонах максимальных температурных градиентов. Для эффективной разработки улучшенных конструкций очень важно располагать такой информацией на этапе проектирования.

Отсутствие опыта эксплуатации и возможности получить данные по температурному состоянию элементов ротора и статора расчетным путем на этапе проектирования приводит к необходимости длительных экспериментальной отработки и доводки турбин в стендовых и промышленных условиях.

Проблема аналитического исследования температурного состояния элементов турбомашин, имеющих самую разнообразную форму, сводится, как и все проблемы теории переноса тепла, к решению краевых задач математической физики, в общем случае — к решению многомерного нестационарного уравнения распространения тепла с коэффициентами, зависящими от температуры, координат и времени, и со сложными условиями теплообмена на границах.

Сформулируем задачу аналитической теории теплопроводности, методы и пути решения которой применительно к элементам турбомашин будут рассмотрены в этой главе.

Искомая функция t , с помощью которой требуется отобразить картину пространственного и временного распределения температуры, должна удовлетворять дифференциальному уравнению теплопроводности, наиболее общая математическая запись которого имеет вид

$$\frac{\partial(\rho ct)}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) + W, \quad (\text{VIII.1})$$

где W — внутренний источник или сток тепла.

Это уравнение в общем случае является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с частными производными.

В декартовой системе координат дифференциальный оператор переноса имеет вид ($x = x_1$; $y = x_2$; $z = x_3$)

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x_i} \right)$$

и уравнение (VIII.1) можно записать так:

$$\frac{\partial(\rho ct)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + W. \quad (\text{VIII.2})$$

В цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho ct)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + W. \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

В сферической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho ct)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{2\lambda}{r} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\lambda}{r^2} \operatorname{tg} \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + W. \end{aligned} \quad (\text{VIII.4})$$

Выбор системы координат имеет принципиальное значение для решения задачи, так как от него зависит число переменных в уравнении и, следовательно, процесс нахождения решения. Одномерное сферическое поле, например, в декартовой системе координат должно рассматриваться как трехмерное. Переход к сферической системе позволяет уменьшить количество пространственных координат вдвое.

Если принять допущение, что величина λ не зависит от координат, а значения ρ и c не зависят от времени, то уравнение (VIII.1) преобразуется к более простому виду

$$\frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla^2 t + W', \quad (\text{VIII.5})$$

где $a = \lambda/(c\rho)$ — коэффициент температуропроводности по Максвеллу, зависящий только от свойств вещества; $W' = w/\lambda$; ∇^2 — дифференциальный оператор второго порядка, который имеет несколько обозначений [$\nabla^2 t = \text{div}(\text{grad } t) = \Delta t$] и называется оператором Лапласа.

Для стационарных процессов уравнение (VIII.5) переходит в обычное уравнение Пуассона

$$\nabla^2 t = W', \quad (\text{VIII.6})$$

а при отсутствии внутренних источников (стоков) тепла — в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 t = 0. \quad (\text{VIII.7})$$

Уравнения (VIII.2)—(VIII.4) в последнем случае запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0; \quad (\text{VIII.8})$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0; \quad (\text{VIII.9})$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\text{tg } \theta}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (\text{VIII.10})$$

Таким образом, стационарное температурное поле в теле без внутренних источников и стоков тепла не зависит от его физических свойств, а определяется только формой тела и распределением температуры на его границах (об условиях на границах будет сказано ниже).

В различных частных случаях поле температур может не зависеть от одной или нескольких координат. Тогда члены уравнений, содержащие соответствующие частные производные, равны нулю и уравнения (VIII.8)—(VIII.10) еще более упрощаются.

Таким образом, задача теплопроводности, в которой независимыми переменными являются время τ и пространственные координаты, а зависимой переменной — температура t , представляет собой задачу интегрирования параболического (в нестационарных процессах) или эллиптического (в стационарных процессах) уравнений. При постановке задачи требуется доказать существование решения и его единственность.

До настоящего времени доказательств существования и единственности решения в общем виде для уравнения теплопроводности не существует. Доказательство существования решения — чисто математическая проблема. При решении физических задач существование решения вытекает из самой постановки задачи. В этом случае необходимо установить корректность сформулированной системы уравнений и единственность решения.

Поскольку дифференциальное уравнение теплопроводности имеет первый порядок по времени и второй по пространственным

координатам, для единственности решения должны быть известны одно условие в некоторый фиксированный момент времени, принятый за начальный, и два условия для каждой из координат. Иными словами, для однозначного описания теплового процесса необходимо иметь дополнительную информацию о характере теплообмена на границах указанной пространственно-временной области, характеризующую конкретную физическую обстановку — краевые условия задачи.

Для каждой точки поля должно быть известно исходное (начальное) состояние. В начальный момент времени $\tau = \tau_0$ задается некоторая функция

$$t(x, y, z, \tau_0) = f(x, y, z). \quad (\text{VIII.11})$$

Распределение (VIII.11) представляет собой начальное условие задачи.

На практике часто встречаются задачи с простым начальным условием

$$t(x, y, z, \tau_0) = t_0 = \text{const}, \quad (\text{VIII.12})$$

например при разогреве системы из холодного состояния, при охлаждении после работы на стационарном режиме и т. д.

Для точек, расположенных на границах области и потому подверженных внешним влияниям, требуется описать характер этих влияний, т. е. задать пространственные краевые (граничные) условия.

Рассмотрим четыре типичных граничных условия.

1. Для каждой точки на границе области s задается температура как функция времени:

$$t_s = f_1(\tau); \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1, \quad (\text{VIII.13})$$

где τ_1 — промежуток времени, в течение которого изучается процесс. Требуется найти функцию $t(x, y, z, \tau)$, удовлетворяющую внутри заданной области уравнению теплопроводности и принимающую на границе области s заданное значение $f_1(\tau)$. Это — так называемое граничное условие первого рода [32, 105, 125]. Согласно терминологии математической физики, эта задача называется первой краевой задачей, а для условий, в которых справедливо уравнение Лапласа (VIII.7), — задачей Дирихле.

2. На границе области s задается плотность теплового потока как функция времени

$$q_s = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = f_2(\tau). \quad (\text{VIII.14})$$

В этом случае решение сводится к определению функции $t(x, y, z, \tau)$, которая внутри области удовлетворяет соответствующему уравнению теплопроводности, а ее нормальная производная на границе области s принимает значение

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = -\frac{f_2(\tau)}{\lambda}.$$

Это — граничное условие второго рода, вторая краевая задача математической физики, задача Неймана для уравнения Лапласа (VIII.7).

3. На границе области s может быть указана линейная комбинация искомой величины и ее градиента:

$$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = \alpha [t_n(\tau) - t(\tau)]. \quad (\text{VIII.15})$$

Это — третья краевая задача, граничные условия третьего рода, характеризующие теплообмен между поверхностью тела и средой. В этом случае температура среды t_n и коэффициент теплоотдачи α считаются известными. Аналогичная задача для уравнения Лапласа носит название смешанной задачи.

Граничные условия третьего рода — наиболее широко распространенный вид граничных условий в практических задачах, в том числе в задачах турбостроения.

4. Если между двумя телами с теплопроводностью λ_1 и λ_2 существует идеальный контакт, то на соприкасающихся поверхностях s_1 и s_2 имеет место равенство температур и тепловых потоков

$$\left. \begin{aligned} t_{s_1}(\tau) &= t_{s_2}(\tau), \\ \lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_{s_1} &= \lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_{s_2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.16})$$

Задание равенства температур и тепловых потоков на идеально соприкасающихся поверхностях составляет содержание граничного условия четвертого рода.

Рассмотренные крайевые условия являются частным случаем условий однозначности, по существу являющихся условиями единственности решения. Это значит, что если некоторая функция $t(x, y, z, \tau)$ удовлетворяет одному из дифференциальных уравнений теплопроводности (VIII.1), (VIII.5) или (VIII.7), начальному (VIII.11) и граничным (VIII.13)—(VIII.16) условиям, то она является единственным решением задачи [125].

Но это не значит, однако, что данному известному уравнению теплопроводности соответствует только одна совокупность условий однозначности. Другими словами, условия однозначности определяют единственное температурное поле, в то время как само поле не определяет единственным образом условий однозначности.

Решение задачи может быть получено в разных функциональных соотношениях, но это не противоречит теореме единственности решения, так как указанные неодинаковые по написанию соотношения не являются разными решениями.

Таким образом, общую прямую задачу аналитической теории теплопроводности можно сформулировать следующим образом: требуется определить распределение температуры t в однородном изотропном теле в данный момент времени τ , если известно

начальное распределение температуры (начальные условия) и условия на его границах (граничные условия).

Обратные, инверсные и индуктивные задачи мы не рассматриваем.

Решать эту задачу можно различными путями:

а) применяя известные аналитические методы решения, найти явное выражение для функции температуры в виде аналитической зависимости;

б) с помощью различных подстановок, интегральных преобразований и т. п. свести решение сложной задачи к более простой; например, решение уравнения в частных производных — к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейной задачи — к линейной;

в) создав аналоговую модель, решить экспериментально задачу другой физической природы, а затем выразить результаты в параметрах первоначальной задачи;

г) пользуясь численными методами (в том числе и вероятностными), создать машинный алгоритм, который позволит с помощью ЭВМ найти приближенное решение задачи с заданной точностью за разумное время.

Каким же из указанных путей и методов решения следует отдать предпочтение при исследовании температурного состояния элементов турбомашин?

Однозначного ответа на этот вопрос дать нельзя. Выбор пути и метода исследования зависит от сложности задачи, требуемой точности и трудоемкости вычислений при применении того или другого метода. Сложность задачи обуславливается такими факторами, как форма конструкции, особенности теплового процесса (вид уравнения теплопроводности) и сложность граничных условий. Требуемая точность связана с целью исследования. Если, например, при конструировании узла удовлетворяет заданная ограниченная точность, целесообразно использовать менее точное, но более простое, приближенное решение.

Построение решения в явном виде — в виде аналитических зависимостей — возможно лишь для весьма узкого класса задач, но если возможно, то им следует непременно воспользоваться ввиду неоспоримых преимуществ аналитических зависимостей, имеющих наибольшую общепознавательную ценность, позволяющих оценивать влияние на температурное поле различных факторов и наиболее удобных для использования при определении температурных напряжений. Этот путь исследования эффективен для одномерных задач, т. е. для тел правильной геометрической формы и с тепловой симметрией.

В зависимости от особенностей конструкции и физической обстановки процесса должен решаться вопрос, в какой постановке — одно-, дву- или трехмерной — следует проводить исследование. Часто постановка задачи упрощается для преодоления математических, вычислительных или экспериментальных труд-

ностей, связанных с полным анализом трехмерного температурного поля. В таких случаях требуется проверка достоверности решения. Например, математические модели, в которых распределение температуры и напряжения в цилиндрах и роторах турбин предполагаются одномерными, оправданы лишь для сечений в средней части цилиндров, где отсутствуют (или незначительны) осевые перетечки тепла и цилиндр испытывает напряжение, характерное для бесконечного цилиндра. В общем случае одномерная математическая модель для цилиндров и роторов далека от реальных физических условий, соответствующих их термическому нагружению, и может привести к существенным ошибкам в оценке их напряженного состояния.

Тепловое состояние корпуса в переходных режимах нельзя оценить правильно только по результатам его моделирования как осесимметричного (двумерного) тела, так как фланцы горизонтального разъема нарушают осевую симметрию как самого корпуса, так и его температурного поля [82]. Достоверное распределение температуры в этом случае может быть получено в результате решения трехмерной задачи нестационарной теплопроводности. Однако при решении этих задач с помощью аналоговых моделей в силу большой трудоемкости и сложности подготовки трехмерной модели в ряде случаев считают возможным решать задачу на плоских моделях. Для цилиндрической части корпуса, удаленной от зоны влияния фланцев, такая постановка в определенной мере оправдана [147]. В других случаях необходима проверка достоверности решения.

Рассмотрим лопатку газовой турбины. Вообще говоря, она имеет сложное пространственное температурное поле. В этом случае правомерна только трехмерная постановка задачи, хотя окончательное решение вопроса зависит еще и от цели исследования. А в ряде других случаев тепловой поток имеет такой характер, что допустимо решение двумерной задачи. К таким случаям относятся некоторые конструкции лопаток с внутренним охлаждением. Например, в лопатке с охлаждающими каналами (имеется в виду перо лопатки) при интенсивном охлаждении результирующая теплопроводность в продольном направлении отсутствует. О температурном состоянии такой лопатки достаточно точно можно судить по решениям двумерных задач [69, 242].

Наибольшее число работ по расчетному исследованию температурных полей в элементах турбин выполнено в предположении постоянства теплофизических свойств материала, т. е. путем решения линейного уравнения нестационарной теплопроводности (VIII.5).

При определении температурных полей на режимах пуска турбины, на некоторых переходных режимах и остановах следует принимать во внимание не только зависимость теплофизических характеристик материалов от температуры, но и изменение коэффициентов теплоотдачи во времени, т. е. решать нелинейное

уравнение нестационарной теплопроводности (VIII.1) при переменных граничных условиях третьего рода (VIII.15).

Аналитическая теория решения нелинейного уравнения нестационарной теплопроводности до настоящего времени не разработана. Имеющиеся в литературе решения посвящены лишь некоторым частным задачам. Это объясняется трудностью выполнения математического анализа. Точное решение уравнения (VIII.1) при $\alpha = f(\tau)$ не получено даже для одномерных задач, за исключением некоторых частных случаев зависимости $\alpha = f(\tau)$.

В такой постановке задачи могут быть решены в настоящее время только численными методами, реализованными или с помощью быстродействующих ЭВМ, или посредством аналоговых моделей. В этом случае задача ставится в конкретно-числовой форме, что предельно индивидуализирует решение и полностью исключает возможность какого-либо обобщения [36]. Однако это единственный путь для решения многих сложных задач.

Наиболее перспективными следует назвать методы с использованием ЭВМ. Это могут быть и аналитические, и численные методы исследования, и разумное сочетание различных методов. Возможность применения быстродействующих ЭВМ — важный показатель эффективности метода.

46. Численные методы расчета полей температур с использованием ЭВМ

Появление современных быстродействующих ЭВМ должно привести к своего рода революции в области численных методов [138]. Мы еще, по-видимому, и близко не подошли к использованию всех огромных возможностей ЭВМ. В настоящее время существует значительный разрыв между тем, что могут дать эти машины, и тем, что мы умеем эффективно использовать.

Методы, реализуемые в настоящее время с помощью ЭВМ, в основном представляют собой простое объединение методов, разработанных для ручного счета и задач с малым объемом вычислений. Однако и на этом уровне численные методы, реализуемые на ЭВМ с большой памятью, применяются там, где лет двадцать тому назад об их применении нельзя было и думать. Прогресс в области вычислительной техники сделал доступным многое из того, что раньше казалось невозможным. Вероятно, в будущем будут созданы новые мощные численные методы как для тех задач, которые мы уже сейчас умеем решать, но решаем не экономично, так и для тех, которые пока представляются неразрешимыми.

Процессы переноса тепла в элементах турбомашин описываются дифференциальными уравнениями в частных производных эллиптического (для стационарных процессов) и параболического (для нестационарных процессов) типов — см. уравнения (VIII.7) и (VIII.1). Для многих из этих уравнений численные методы ре-

шения являются единственно пригодными, так как решение другими методами или очень сложно для практического использования, или вовсе невозможно. Но и численное решение этих уравнений для элементов турбомашин, имеющих сложную, неклассическую, форму и сложные условия теплообмена на границах, — дело нелегкое, и в последнее время методы решения таких задач являются предметом активных исследований.

Существует много численных методов решения уравнений в частных производных, но самым универсальным можно назвать метод конечных разностей (метод сеток), он может применяться для решения как линейных, так и нелинейных задач. Хотя в принципе разностные методы известны давно, практическое их использование наталкивалось на серьезные трудности, связанные с чрезвычайно большим объемом вычислений. Положение резко изменилось с появлением быстродействующих ЭВМ, явившихся прекрасным средством реализации этих методов.

В связи с этим обстоятельством разностные методы претерпели в последние годы большие изменения: началось интенсивное развитие их теории и создание эффективных разностных схем для решения сложнейших практических задач, в том числе задач, связанных с нестационарными тепловыми процессами и с переменными коэффициентами переноса. Число опубликованных за последние годы работ, посвященных этим методам и их практическим приложениям, возросло в несколько раз по сравнению с тем, что вышло за все время до появления быстродействующих вычислительных машин.

Суть метода конечных разностей (метода сеток) состоит в следующем. Исходная континуальная система заменяется дискретной — конечным множеством точек (сеткой). Частные производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются конечно-разностными отношениями, выраженными через разности значений функции в этих дискретных точках — узлах сетки. В результате вместо уравнения в частных производных получается формальное эквивалентное соотношение в конечных разностях, решение которого сводится к алгебраическим операциям.

Простейшей конечно-разностной аппроксимацией, например параболического уравнения теплопроводности, описывающего одномерный нестационарный тепловой процесс,

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (\text{VIII.17})$$

является соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{t(x, \tau + k) - t(x, \tau)}{k} = \\ & = a \frac{t(x + h, \tau) - 2t(x, \tau) + t(x - h, \tau)}{h^2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.18})$$

Оно получается заменой частных производных $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ и $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ конечно-разностными отношениями, в которых через k и h обозначены приращения независимых переменных соответственно вдоль осей τ и x . Разностное уравнение (VIII.18) можно записать в виде рекуррентной формулы

$$t(x, \tau + k) = rt(x + h, \tau) + (1 - 2r)t(x, \tau) + rt(x - h, \tau), \quad (\text{VIII.19})$$

где

$$r = a \frac{k}{h^2}. \quad (\text{VIII.20})$$

Это уравнение позволяет вычислить последовательно шаг за шагом (явный метод) значение $t(x, k)$ по значению $t(x, 0)$, $t(x, 2k)$ — по $t(x, k)$, $t(x, 3k)$ — по $t(x, 2k)$ и т. д. до $t(x, nk)$. Если рассматривается интервал времени τ , то $nk = \tau$.

Таким образом, классические явные схемы позволяют определять температуру во всех точках пространственной сетки на $(n + 1)$ -м временном слое, если известно распределение температуры в сеточной области на n -м слое. Начальные и граничные условия для сеточной функции тоже записываются в конечно-разностной форме. Эта дискретная, чисто алгебраическая задача неизмеримо проще, чем исходная дифференциальная (операция интегрирования заменяется операциями сложения и вычитания).

При аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности по неявной разностной схеме неизвестные значения связываются между собой системой алгебраических уравнений, число которых равно количеству внутренних узлов пространственной сетки.

Шаги k и h выбираются такими, чтобы обеспечить требуемую точность данной задачи при минимальной затрате вычислительной работы. Слишком большие шаги являются причиной большой погрешности, а слишком малые требуют большой затраты вычислительного труда. Обычно задача решается сначала при большом шаге, т. е. при малом числе клеток, а затем переходят к более мелкой сетке или во всей области, или в какой-нибудь ее части. Контур сеточной области выбирается так, чтобы он возможно лучше аппроксимировал контур заданной области. Особые трудности аппроксимации контура возникают при криволинейных границах тел, которые пересекают сетку не в узловых точках. Единственным средством, обеспечивающим представление граничной кривой с требуемой точностью, в этом случае является измельчение сетки у границ, что приводит к увеличению объема вычислительной работы.

Для многих краевых задач вместо прямоугольной сетки целесообразно использовать сетки другой структуры — треуголь-

ную, цилиндрическую, полярную и др. Использование этих сеток, построение и решение разностных уравнений различными способами в таких задачах показано в работах [91, 129, 156, 170 и др.].

Авторы большинства работ пользуются явными разностными схемами, так как явные аппроксимации проще, требуют меньшей затраты времени на расчет одного временного слоя и позволяют свести к минимуму необходимый объем памяти, что существенно при решении многомерных задач. Однако явные схемы имеют существенный недостаток, связанный с вопросами сходимости и устойчивости решения. При решении практических задач эта теоретическая сторона вопроса часто не учитывается инженерами, однако вопросы сходимости и устойчивости вычислительных схем при численном интегрировании уравнений теплопроводности имеют решающее значение, и именно эти свойства разностных уравнений определяют пригодность или непригодность последних для практического счета.

Уравнение (VIII.18) представляет формальную конечно-разностную аппроксимацию уравнения (VIII.17) в следующем смысле: для каждой функции $t(x, \tau)$, имеющей первые и вторые частные производные, разностные отношения в (VIII.18) будут стремиться к соответствующим производным в дифференциальном уравнении (VIII.17) при k и h , стремящихся к нулю. Отсюда не следует, однако, что решение разностной задачи, формально аппроксимирующей дифференциальную, будет всегда стремиться к решению дифференциальной задачи при $k \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$. Уже в самых простых случаях, даже при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, может оказаться, что разумная, казалось бы, разностная схема дает приближенные решения, не сходящиеся при измельчении шагов сетки к ожидаемому пределу.

Если точное решение дифференциального уравнения (VIII.17) подставить в разностное уравнение (VIII.19), то появится остаточный член — ошибка аппроксимации (погрешность решения). Проблема сходимости сеточного метода заключается в нахождении условий, при которых эта погрешность при неограниченном измельчении сетки, т. е. при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$, равномерно стремится к нулю. Ясно, что расходящиеся сеточные методы не представляют интереса ни с теоретической, ни с практической точек зрения.

При использовании формулы (VIII.19) мы оперируем с конечным числом разрядов — десятичных при ручном счете и двоичных на ЭВМ. Это обстоятельство вызывает необходимость округления всех промежуточных результатов, вследствие чего появляется ошибка округления.

В случае неустойчивости разностного метода ошибка аппроксимации и малые ошибки округления, допускаемые на промежуточных этапах вычислительного процесса, будут возрастать при измельчении сетки. Наоборот, в случае устойчивого разностного

метода эти погрешности будут убывать (или хотя бы не возрастать), а решение разностного уравнения будет близко к решению дифференциального уравнения при малых шагах и стремиться к нему при неограниченном измельчении сетки.

Таким образом, проблема устойчивости разностных методов состоит в нахождении условий, при которых все погрешности (аппроксимации, округления или любого другого рода) при неограниченном измельчении сетки равномерно стремятся к нулю (или, по крайней мере, остаются ограниченными). Эти условия представляют собой ограничения, налагаемые на допустимую величину Δt , выраженную через другие приращения.

При несоблюдении условий устойчивости накапливающиеся погрешности могут достигнуть такой величины (особенно при расчете на ЭВМ, когда совершается большое число операций), что полученное численное решение не будет иметь ничего общего с действительным решением задачи! Такие неустойчивые сеточные уравнения непригодны для практики, и всякие вычисления теряют смысл.

Таким образом, сходимость решения связана с погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения (VIII.17) сеточным уравнением (VIII.19), а устойчивость (или неустойчивость) являются внутренним свойством самого сеточного уравнения (VIII.19).

Рассмотрим основные трудности, возникающие при решении параболических уравнений в частных производных, описывающих нестационарные процессы теплопроводности. Наиболее простые и удобные методы особенно чувствительны к фактору устойчивости: для обеспечения устойчивости приходится накладывать существенные ограничения на шаг по времени относительно шага по пространственным координатам. А схемы, хорошие с точки зрения устойчивости, неудобны для практического применения. При решении прикладных задач целью является отыскание решения, в известном смысле промежуточного между указанными двумя крайними типами решений, содержащего более слабые ограничения устойчивости и сравнительно легко поддающегося вычислениям. Существуют безусловно устойчивые и безусловно неустойчивые разностные уравнения [138, 143].

Все вопросы, указанные выше, а также различные методы решения разностных уравнений рассмотрены подробно в специальных монографиях [18, 29, 138, 140, 143, 170, 133], в отдельных разделах книг и учебников [40, 91, 129, 156], в большом количестве журнальных статей.

С появлением мощных ЭВМ оказалось возможным создать разностные схемы для решения с высокой точностью многомерных уравнений с переменными коэффициентами. Одним из эффективных конструктивных приемов является метод сведения многомерных задач к последовательности одномерных, для которых имеются эффективные разностные схемы [142].

Решение многомерного уравнения теплопроводности

$$c(x, \tau) \rho(x, \tau) \frac{\partial t}{\partial \tau} = Lt = \sum_{i=1}^k L_i t, \quad (\text{VIII.21})$$

где L_i — дифференциальный оператор

$$L_i t = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda_i(x, \tau) \frac{\partial t}{\partial x_i} \right], \quad (\text{VIII.22})$$

а k — число пространственных координат, сводится к последовательному решению одномерных уравнений

$$\frac{1}{k} c(x, \tau) \rho(x, \tau) \frac{dt}{d\tau} = L_i t \quad (\text{VIII.23})$$

в каждом из пространственных направлений путем введения дробных шагов по времени. Такой метод оказался пригодным при решении уравнений теплопроводности для тел сложной формы.

Остановимся кратко на некоторых работах, в которых для исследования теплового состояния элементов турбин применяются различные модификации метода конечных разностей.

Двумерная задача нестационарной теплопроводности при постоянных теплофизических константах для облопаченного диска газовой турбины решена методом сеток в работе [41]. Решение задачи по тепловой схеме, приведенной в этой работе (диск и нижняя половина бандажированных лопаток), возможно только численным методом.

Одной из разновидностей конечно-разностных методов является метод элементарных балансов Ваничева, сущность которого состоит в том, что координатными плоскостями тело разбивается на ряд правильных геометрических элементарных объемов, в пределах каждого из которых закон изменения температуры принимается линейным, а теплофизические характеристики постоянными. В декартовой системе координат таким элементарным объемом является прямоугольный параллелепипед со сторонами Δx , Δy , Δz , а в полярной системе — цилиндрический или шаровой слой с радиусами R и $R + \Delta R$.

Расчетными точками, в которых определяется температура в последовательные моменты времени, являются точки пересечения поверхностей разбивки. Для групп элементов, примыкающих к каждой расчетной точке, на основании закона сохранения энергии с использованием гипотез Фурье и Ньютона, составляется уравнение теплового баланса. В результате для всех узловых точек сетки получаются расчетные зависимости в конечно-разностной форме, для которых выбирается тот или иной метод решения. При выводе расчетных зависимостей предполагаются пропорциональность среднего за некоторый промежуток времени Δt теплового потока начальному температурному градиенту в пределах этого промежутка и пропорциональность изменения

теплосодержания группы элементов, относящихся к некоторой расчетной точке, изменению температуры в этой точке.

Точность решения зависит от размеров элементарного объема и от выбранного расчетного промежутка времени. Вопрос об устойчивости конечно-разностной схемы по-прежнему играет большую роль, и это нужно учитывать при выборе временного шага в явных вычислительных схемах.

В [166] приводятся расчетные зависимости для определения методом элементарных балансов температурных полей в элементах турбин (рассматриваются различные варианты расположения расчетных точек — внутри тела, на границе и т. д.). Авторы [166] решают осесимметричные задачи нестационарной теплопроводности: $t = t(r, z, \tau)$. В качестве примера практического применения указанного метода в [166] приводится расчет температурного поля (распределения температуры по радиусу и оси) цельнокотанного ротора.

В цилиндрической и сферической системах координат число разновидностей элементарных объемов, на которые можно разбить тело, чрезвычайно велико. В [6] разработаны метод и программа для ЭВМ «Урал-4», позволяющие получить расчетную формулу для элементарного объема любой формы в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Это осуществляется следующим образом. Объем, окружающий внутреннюю точку, разбивается на восемь октантов, и любая разновидность элементарного объема получается путем удаления одного, двух и т. д. октантов. Составленная программа предусматривает линейную аппроксимацию зависимости коэффициентов теплопроводности и теплоемкости материала от температуры и позволяет менять во времени граничные условия по разным законам для различных участков тела. Общее количество расчетных точек практически не ограничено.

Основным недостатком алгоритмов, использующих метод элементарных балансов для тел сложной формы с переменными условиями на границах, является большая продолжительность счета, связанная с особенностями вычислительных схем и с необходимостью выдерживать минимальный расчетный размер тела. В связи с этим все шире применяются комбинации численного и других методов решения. В работе [193], например, показана возможность использования функций Грина в численных решениях краевых задач для уравнений Лапласа, Пуассона и Фурье. Решение получается путем умножения матрицы, порядок которой определяется выбранной сеткой, на некоторый вектор. Для реализации этого способа решения требуется намного меньше времени, чем для прямого итеративного решения уравнений разностной системы, аппроксимирующей исходное уравнение.

Отмечая несомненную перспективность численных методов, реализуемых на ЭВМ, следует отметить, что успех численного анализа невозможен без четкой физической и математической

постановок, без знания физических параметров, без применения других методов исследования. Все средства, дающие какую-либо информацию о решаемой задаче, должны дополнять численный анализ, а часто и предшествовать ему.

47. Численный метод расчета температурного состояния лопатки с внутренним охлаждением

Одним из путей повышения надежности работы высокотемпературных газовых турбин является управление температурным полем наиболее напряженных деталей с помощью искусственного охлаждения. Большую сложность составляет решение проблемы охлаждения элементов роторной группы — наиболее напряженных вращающихся деталей турбины — дисков и рабочих лопаток. Хотя в этом направлении ведутся обширные исследования, проблему охлаждения лопаток стационарных газовых турбин до настоящего времени нельзя считать решенной.

Для решения таких вопросов, как выбор схемы охлаждения и ее конструктивных параметров, выбор теплоносителя, его расхода и температуры, выбор материала лопатки, необходимо располагать сведениями о характере распределения температуры в теле лопатки. Эти сведения можно получить, зная метод решения соответствующего уравнения теплопроводности и имея информацию о граничных условиях теплообмена. Естественно, что эти задачи должны решаться современными методами, обеспечивающими, с одной стороны, достоверность результатов, с другой — быстроту расчетов. Последнее обстоятельство особенно важно на стадии проектирования, когда требуется исследовать большое количество вариантов. В этих случаях особенно удобны и эффективны расчетные методы, запрограммированные на ЭВМ.

Одной из перспективных систем охлаждения рабочих лопаток, как уже отмечалось в гл. VII, является система охлаждения с помощью теплоносителя, движущегося по внутренним радиальным сверлениям лопатки. Это могут быть или одноконтурные системы с естественной или вынужденной циркуляцией охладителя, или двухконтурные системы, в которых тепло, передаваемое горячим газом активной профильной части лопатки, отводится промежуточным теплоносителем, заполняющим замкнутые каналы, в корень лопатки (первичный контур), а затем от корня отводится вторичным теплоносителем, омывающим основание лопатки (вторичный контур).

Количество теплоты, отбираемой лопаткой от горячего потока газа, определяется интенсивностью теплообмена между газом и поверхностью лопатки, с одной стороны, и интенсивностью теплообмена между стенками каналов и охлаждающей жидкостью в них — с другой. Решающим в этом процессе теплопередачи является меньший коэффициент теплоотдачи.

В лопатках турбин, омываемых с внешней стороны горячим газом и интенсивно охлаждаемых изнутри, градиенты температур в сечениях могут достигать нескольких сотен градусов. В лопатке с внутренними охлаждающими каналами такие градиенты температур ведут к возникновению значительных дополнительных термических напряжений, в то время как внутренние каналы с охладителем ослабляют сечение лопатки. Для снижения уровня температуры, уменьшения температурной неравномерности и избежания локального перегрева кромок такой лопатки нужно рационально выбрать охладитель, его расход и температуру и обеспечить оптимальное количество, расположение и форму охлаждающих каналов. Для этого требуется детальный расчет температурного поля.

Для определения поля температур в теле лопатки с внутренними охлаждающими каналами следует решать, строго говоря, пространственную нелинейную задачу теплопроводности для многосвязной области с переменными граничными условиями третьего рода по контуру и высоте лопатки. В такой постановке задача не может быть решена из-за больших математических трудностей. Ввиду того что в лопатке с вертикальными охлаждающими каналами при интенсивном охлаждении результирующая теплопроводность в продольном направлении практически отсутствует (имеется в виду перо лопатки) и температура пера мало изменяется по высоте [50, 69, 242], о температурном состоянии такой лопатки можно судить по решению двумерных задач для ее поперечных сечений.

Ниже приводится численный метод решения двумерной задачи теплопроводности при граничных условиях третьего рода, построенный с учетом переменности α по обводу профиля лопатки. Последнее обстоятельство является необходимым условием при создании расчетного метода, так как неравномерность температурного поля в сечении лопатки определяется в основном неодинаковой интенсивностью теплообмена между газом и боковой поверхностью лопатки на различных ее участках. Как уже отмечалось в гл. V, коэффициенты теплоотдачи в различных местах профиля могут отличаться в несколько раз в зависимости от характера развития пограничного слоя: на кромках, как правило, α в несколько раз больше, чем в средней части профиля. А так как температурный режим выходной кромки по существу определяет жизнеспособность конструкции, не учитывать этого обстоятельства нельзя.

В первом приближении решаем линейную задачу теплопроводности, считая физические характеристики постоянными, т. е. определяем функцию температуры t , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{VIII.24})$$

и граничным условиям третьего рода:

$$\alpha(t_n - t_s) = \lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s;$$

$$\alpha_{\text{охл}}(t_s - t_{\text{охл}}) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s. \quad (\text{VIII.25})$$

Уравнение Лапласа может быть сведено к интегральному уравнению [30]. Пользуясь свойством гармонических функций, выражаем значение функции температуры в некоторой точке M , лежащей внутри области, через ее значение и значение ее нормальной производной на границе области:

$$t_M = \frac{1}{2\pi} \int_s \left(t_s \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial t_s}{\partial n} \right) ds.$$

Здесь r — расстояние от точки M до границы области; n — внешняя нормаль к границе.

Значение температуры в некоторой i -й точке, лежащей на границе, можно получить как предельное при приближении точки M к границе. Поэтому для i -й точки можно написать

$$t_{si} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_s t_s \frac{\cos(r_i, n)}{r_i} - \int_s \ln r_i \frac{\partial t_{si}}{\partial n} \right]. \quad (\text{VIII.26})$$

Учитывая (VIII.25), уравнение (VIII.26) можно записать так:

$$\begin{aligned} 2\pi t_{si} = & \int_{s_0} t_s \frac{\cos(r_i, n)}{r_i} ds - \int_{s_0} \ln r_i \frac{\alpha(x, y)}{\lambda(x, y)} (t_n - t_s) ds + \\ & + \int_{s_1} t_s \frac{\cos(r_i, n)}{r_i} ds - \int_{s_1} \ln r_i \frac{\alpha_{\text{охл}1}(x, y)}{\lambda(x, y)} (t_{\text{охл}1} - t_s) ds + \\ & + \dots + \\ & + \int_{s_k} t_s \frac{\cos(r_i, n)}{r_i} ds - \int_{s_k} \ln r_i \frac{\alpha_{\text{охл}k}(x, y)}{\lambda(x, y)} (t_{\text{охл}k} - t_s) ds, \quad (\text{VIII.27}) \end{aligned}$$

где $\alpha_{\text{охл}1}, \alpha_{\text{охл}2}, \dots, \alpha_{\text{охл}k}$ — коэффициенты теплоотдачи от стенок охлаждающих каналов к охлаждающей среде; s_0 — внешний контур сечения лопатки; $s_1 - s_k$ — внутренние контуры охлаждающих каналов.

Таким образом, дифференциальное уравнение Лапласа (VIII.24) для области свелось к интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода для контура, ограничивающего эту область, а решение двумерной задачи — к определению интегралов вдоль линии.

В рассматриваемой задаче область, ограниченная контуром s , является многосвязной, а сам контур s , по которому производится интегрирование, состоит из контура s_0 и внутренних контуров $s_1 - s_k$.

2) решения полученной системы (определения температуры на внешнем контуре профиля и стенках охлаждающих каналов);
 3) определения температуры во внутренних точках сечения по уравнению (VIII.30).

Для хранения коэффициентов системы используется магнитный барабан. В оперативной памяти машины хранятся программа расчета и вся исходная информация.

В качестве исходной информации требуется задать следующие величины: координаты x , y точек деления контуров на участки

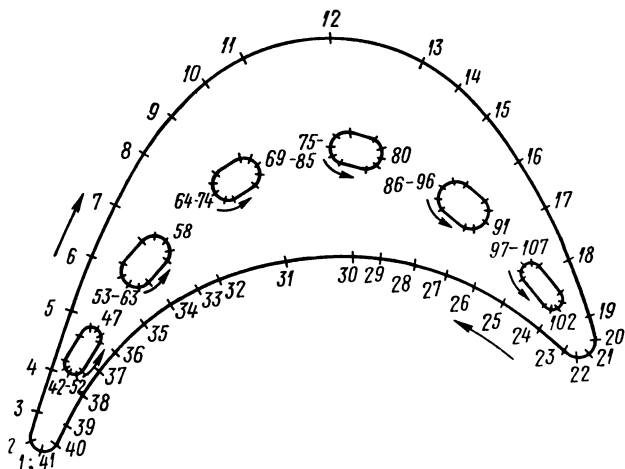


Рис. 121. Схема деления лопатки на участки и порядок нумерации точек

(порядок нумерации точек показан на рис. 121), значения коэффициентов теплоотдачи α и теплопроводности λ в них, температуру потока (газа) t_n и температуру охлаждающей среды $t_{\text{охл}}$. Для определения температуры во внутренних точках сечения необходимо задать координаты x' , y' этих точек. Значение λ в первом приближении задается одинаковым для всех расчетных точек, во втором приближении задается функция $\lambda = \lambda(t)$ по значениям температуры в расчетных точках, полученным в результате расчета в первом приближении. Следует отметить, что все исходные граничные условия (распределение α по профилю лопатки и значения $\alpha_{\text{охл}}$ на стенках каналов) могут быть получены расчетным путем [78, 216].

Результат решения печатается на ленте в виде последовательности чисел (сначала печатается порядок числа, затем само число). Кроме полученных значений температуры в печать выдается для контроля и удобства вся исходная информация.

Для расчета одного варианта на ЭВМ М-220 при условии определения температуры в 100 точках контуров и 170 внутренних

точках профиля лопатки, т. е. при условии получения подробной картины распределения температуры, требуется 16 мин машинного времени.

На рис. 122 в качестве примера приведены результаты расчета температурного поля в лопатке с двухконтурной системой охлаждения (s — текущая координата; L — длина обвода профиля). Распределение температуры получено для лопатки, в первичном контуре которой находится жидкий натрий, заполняющий шесть внутренних каналов. Благодаря высоким значениям коэффициента теплоотдачи теплоноситель такого рода способен отвести все тепло, которое может быть передано от газа к поверхности лопатки и затем к стенкам охлаждающих каналов.

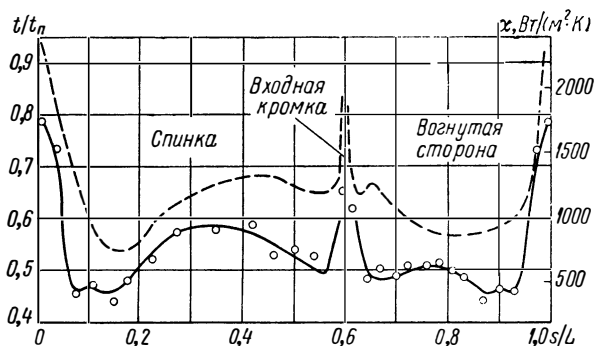


Рис. 122. Распределение температуры и коэффициентов теплоотдачи по контуру турбинной лопатки

Сплошной линией на рис. 122 представлено распределение температуры (t/t_n) по внешнему контуру лопатки, полученное на ЭВМ (плоская задача) для 40 расчетных точек контура, точками обозначены значения температуры, полученные на сеточном интеграторе СЭИ-02 (пространственная задача).

Максимальная относительная разница температур, получающихся при решении задачи на ЭВМ и на сеточном интеграторе, во внутренних точках сечения (сплошная кривая на рис. 122) в области кромок не превышает 2%, в остальных же точках она составляет десятые доли процента. Это говорит о том, что о тепловом состоянии лопатки с указанной схемой охлаждения достаточно точно можно судить по решениям двумерных задач.

По распределению температуры в сечении лопатки (рис. 122) можно судить о неблагоприятном состоянии кромок (особенно выходной), обусловленном неравномерным характером распределения коэффициентов теплоотдачи α по профилю (штриховая линия на рис. 122) и недостаточным охлаждением этой зоны лопатки.

Таким образом, описанный метод расчета позволяет определять поля температур в плоских сечениях лопатки с внутренним

охлаждением с достоверностью, не меньшей, чем на сеточном интеграторе, но значительно проще, быстрее и подробнее. В то время как при электромоделировании с помощью сеточного интегратора увеличение расчетных точек (количества участков) усложняет электрическую схему и в значительной мере увеличивает время расчета, добавление каждой расчетной точки при решении на ЭВМ — это доли секунды машинного времени. Число исследуемых вариантов при решении задачи на ЭВМ определяется любым желаемым объемом сведений. Это особенно важно в начальный период проектирования, когда для нахождения лучшего решения необходимо проанализировать большое количество вариантов.

48. Численный метод расчета температурного состояния лопатки, охлаждаемой через хвостовик

Практическая необходимость определения поля температур в лопатке, охлаждаемой через хвостовик (см. схему V в табл. 8), возникает при применении одного из наиболее простых способов охлаждения ротора турбины — продувкой воздуха через щелевые зазоры хвостовика лопатки. Но такое охлаждение сопровождается

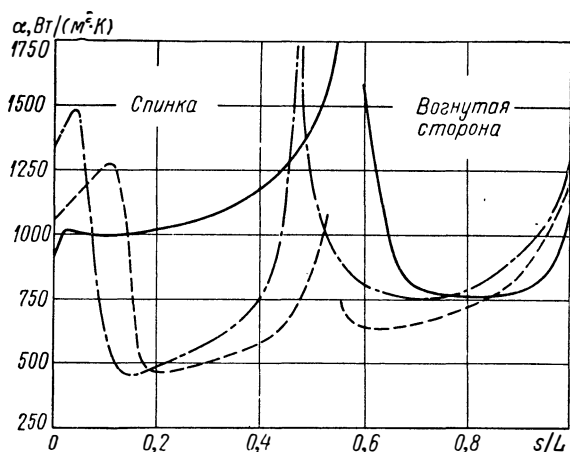


Рис. 123. Распределение коэффициентов теплоотдачи по контурам сечений лопатки:

—•—•— периферийное сечение; — — — — среднее сечение; — — — — корневое сечение

отводом тепла от лопатки через ее нижний торец путем теплопроводности. Вследствие этого градиенты температур в корневом и близлежащих сечениях лопатки при интенсивном теплоотводе могут достигать больших значений и являться причиной появления недопустимо высоких температурных напряжений. Расчеты показывают, что при охлаждении лопаток по этой простейшей схеме у корня лопатки могут возникнуть напряжения, в полтора раза превышающие напряжения от центробежных сил [28].

Для оценки температурного состояния такой лопатки требуется решать трехмерную задачу теплопроводности при весьма сложных граничных условиях, так как лопатки современных газовых турбин являются закрученными и имеют переменный по высоте профиль, что определяет существенное различие в характере обтекания их сечений по высоте. Кроме того, в каждом поперечном сечении лопатки имеется значительная неоднородность коэффициентов теплоотдачи вдоль контура [72]. На рис. 123 показано распределение коэффициентов теплоотдачи α по контурам периферийного, среднего и корневого сечений лопатки газовой турбины ГТ-700-5 НЗЛ, полученное спомощью расчета по методу, описанному в гл. V [78]. Сравнение кривых на рис. 123 показывает, что в данном случае имеет место пространственная задача распространения тепла в теле лопатки. Получить строгое аналитическое решение этой сложной задачи не представляется возможным.

В литературе известны решения в одномерной постановке: предполагается, что температура лопатки вследствие неоднородности потока газа за камерой сгорания и теплоотвода (путем теплопроводности) в охлаждаемый диск ротора изменяется по высоте, но не меняется по ее сечению. Только в таком простейшем случае удастся проинтегрировать уравнение теплопроводности. В этом случае задача, заключающаяся в интегрировании очевидного дифференциального уравнения теплового баланса элемента лопатки (рис. 124)

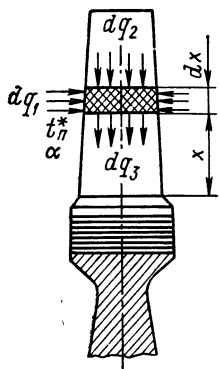


Рис. 124. Схема тепловых потоков в лопатке, охлаждаемой через хвостовик

$$dq_1 + dq_2 - dq_3 = 0, \quad (\text{VIII.31})$$

или (при $\lambda = \text{const}$ и $\partial t / \partial \tau = 0$)

$$\frac{d}{dx} \left(F \frac{dt}{dx} \right) + \frac{\alpha \Pi}{\lambda} (t_n^* - t) = 0, \quad (\text{VIII.32})$$

решается в конечном виде. Здесь F и Π — площадь и периметр поперечного сечения лопатки; t_n^* — температура торможения потока (газа) в межлопаточном канале; x — ордината по высоте лопатки.

Уравнение (VIII.32) справедливо для стационарного теплового потока при $\lambda = \text{const}$ и при любом характере изменения площади поперечного сечения F и температуры газа t_n^* по высоте лопатки.

Ниже приводится метод расчета поля температур в теле лопатки переменного сечения, охлаждаемой через хвостовик, с учетом неравномерности граничных условий третьего рода на боковой поверхности лопатки.

Вводим допущение о том, что сплошную металлическую лопатку можно разбить на достаточно большое количество продольных участков с переменным по высоте сечением и решать задачу о температурном состоянии каждого участка самостоятельно, пренебрегая поперечными перетечками тепла между ними. Лопатку необходимо разбить продольными сечениями на элементарные объемы таким образом, чтобы на наружной поверхности каждого объема можно было считать коэффициенты теплоотдачи α постоянными. Выбрав число объемов достаточно большим, можно на каждом участке получить среднее значение α , очень близкое к локальному. Полученные в результате такого расчета градиенты температуры будут преувеличенными, но это преувеличение будет в сторону некоторого запаса прочности, а не наоборот.

Для каждого из выбранных таким образом продольных участков с постоянным значением α используем решение [164], полученное при $\alpha = \text{const}$

$$t = \frac{m^2}{b(k_1 - k_2)} \left\{ \left[C_1^* - \int_0^y \frac{t_n^* dy}{(1 + by)^{k_1 + 1}} \right] (1 + by)^{k_1} + \left[\frac{A}{m} \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) + \int_0^y \frac{t_n^* dy}{(1 + by)^{k_2 + 1}} - \frac{k_1}{k_2} C_1^* \right] (1 + by)^{k_2} \right\}. \quad (\text{VIII.33})$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} C_1^* &= \int_0^B \frac{t_n^* dy}{(1 + by)^{k_2 + 1}} - \frac{k_2}{k_1} \int_0^B \frac{t_n^* dy}{(1 + by)^{k_1 - k_2}}; \\ y &= \int_0^{\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{\bar{F}}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{F} = \frac{F}{F_0}; \\ B(y)_{\bar{x}=1} &= \int_0^1 \frac{d\bar{x}}{\bar{F}}; \quad m^2 = \frac{\alpha \Pi_0 l}{\lambda F_0}; \\ A &= \frac{Q_0 l}{\lambda F_0 m} = \frac{Q_0}{V \alpha \Pi_0 F_0 \lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.34})$$

Индекс 0 в уравнениях (VIII.34) означает принадлежность величины к корневому сечению лопатки; l — длина лопатки; k_1, k_2 — корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{m^2}{b^2}}. \quad (\text{VIII.35})$$

В этих формулах b — коэффициент в гиперболе второго порядка, аппроксимирующей функцию

$$\bar{P}\bar{F} = \frac{1}{(1+by)^2}. \quad (\text{VIII.36})$$

Подбирая коэффициент b в уравнении (VIII.36) и решая уравнение (VIII.33) для каждого продольного элементарного объема лопатки, получаем поле температур по всей поверхности лопатки.

При $t_n^* = \text{const}$ уравнение (VIII.33) значительно упрощается. В этом случае

$$C_1^* = \frac{t_n^* [(1+bB)^{k_1-k_2} - 1]}{k_1 b (1+bB)^{k_1-k_2}}, \quad (\text{VIII.37})$$

и уравнение (VIII.33) принимает вид

$$t = t_n^* + t_n^* \frac{k_1(1+by)^{k_2} - k_2(1+by)^{k_1}}{(k_1 - k_2)(1+bB)^{k_1-k_2}} + \frac{Am(1+by)^{k_2}}{bk_2}. \quad (\text{VIII.38})$$

Можно показать, что при условии определения температуры с точностью до $\Delta t = 1^\circ \text{C}$ в большинстве практических случаев можно пренебречь вторым слагаемым. Для этого должно выполняться условие

$$b > \frac{(t_n^*)^{-\frac{1}{k_2}} - 1}{B}. \quad (\text{VIII.39})$$

Таким образом, при расчете температурного поля с точностью до $\Delta t = 1^\circ \text{C}$ можно пользоваться упрощенным уравнением

$$t = t_n^* + \frac{Am(1+by)^{k_2}}{bk_2}, \quad (\text{VIII.40})$$

если выполняется неравенство (VIII.39).

Для получения правильной картины температурного поля лопатку необходимо разбить на такое количество участков, чтобы, принимая на каждом из участков $\alpha = \text{const}$, предельно правильно учесть неравномерность распределения α по ее поверхности. Практическое осуществление такого решения возможно лишь при создании машинного алгоритма и программы для ЭВМ.

Описанный метод определения температурного поля запрограммирован на ЭВМ «Урал-1» [68, 136]. Программа предусматривает деление лопатки на девятнадцать продольных объемов (40 расчетных точек на контуре каждого поперечного сечения: 20 — на спинке и 20 — на вогнутой стороне). Анализ распределения локальных значений α по контуру лопатки показывает, что для всех современных аэродинамически совершенных профилей этого количества участков оказывается вполне достаточно для правильного воспроизведения распределения α по контуру лопатки. Пример разбивки сечения турбинной лопатки и распределение α по его контуру показаны на рис. 125.

Для расчета поля температур по описанной программе необходимо задать следующие величины: координаты x, y сорока точек, делящих контур на участки (20 на спинке и 20 на вогнутой стороне

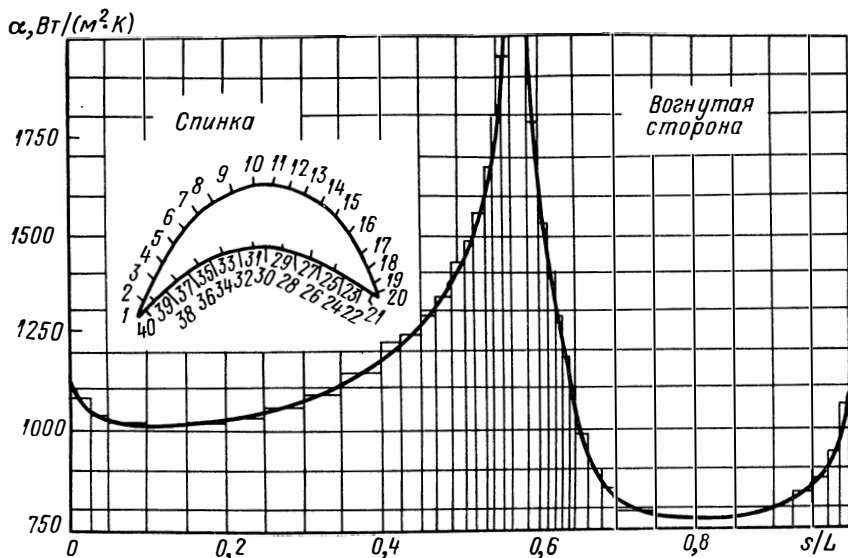


Рис. 125. Схема разбивки сечения лопатки на участки

профиля), для трех поперечных сечений лопатки, значения локальных коэффициентов теплоотдачи $\alpha_{x,y}$ в этих точках, температуру газа $t_{п}^*$, теплопроводность материала лопатки λ , длину

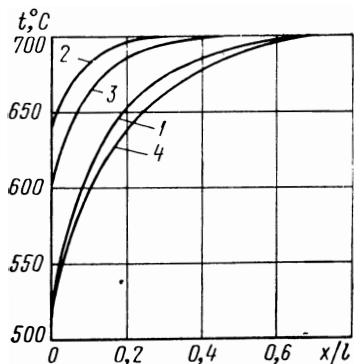


Рис. 126. Распределение температуры по высоте лопатки ($Q_0 = 232$ Вт):

1 — расчет по среднеинтегральному значению α ; 2 — расчет по локальным значениям α в продольном сечении в области задней кромки; 3 — то же в зоне передней кромки; 4 — то же в средней части лопатки

лопатки l и величину теплоотода q_0 или Q_0 через корневое сечение. В печать выдается поле температур в виде девятнадцати столбцов чисел, состоящих из десяти строк каждый, т. е. для каждого из девятнадцати продольных участков, на которые разбита лопатка, выдается десять точечных значений температуры по е

высоте. В результате расчета, таким образом, получается подробная сетка значений температур по всей поверхности лопатки.

На рис. 126 показано полученное из расчета на ЭВМ распределение температур по высоте лопатки в области кромок и средней части лопатки, а на рис. 127 — по контуру одного из поперечных сечений.

Из рис. 126 видно, что охлаждение лопатки через замковое соединение хвостовика может оказывать влияние на температурное поле только в прикорневой области, заметно снижая темпера-

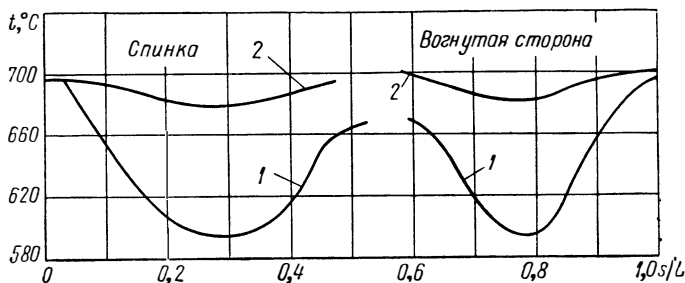


Рис. 127. Распределение температуры по контуру лопатки:

1 — при $Q_0 = 232$ Вт; 2 — при $Q_0 = 40$ Вт

туру примерно на одной четвертой части общей высоты лопатки. При этом в прикорневых сечениях при интенсивном теплоотводе возникает сложное температурное поле. Уровень температуры в области кромок существенно выше, чем в средней части лопатки. Даже в случае эффективного охлаждения, при больших значениях Q_0 , участки лопатки в области кромок, т. е. участки с большими значениями α (распределение α по контуру для этого случая показано штрих-пунктирной линией на рис. 123), охлаждаются слабее, имеют более высокую температуру и, следовательно, худшие условия работы.

Из рис. 126 видно, что изменения функции $t(x/l)$ в средней части лопатки, полученные из расчета по среднеинтегральному (кривая 1) и по локальным (кривая 4) значениям α , сравнительно мало отличаются друг от друга, но в области задней кромки (кривые 1 и 2) расхождение составляет 8—20%.

Следовательно, расчет температуры лопатки при использовании среднего по контуру коэффициента теплоотдачи приводит к завышению охлаждающего эффекта в области кромок, а значит, к неправильной оценке температурных напряжений.

Сопоставление расчета с экспериментом [72] позволило оценить принятые в методе расчета допущения. Так, для стальной лопатки расчетные и экспериментальные данные практически совпадают [72].

49. Расчет температурных полей с помощью моделирующих устройств

Как указывалось в гл. II и п. 45, одним из путей решения задач теплопроводности является создание моделей другой физической природы, описываемых теми же, что и исследуемый тепловой процесс, дифференциальными уравнениями, но более удобных для исследования.

Если скорость счета не играет решающей роли, а требуемая точность не выходит за пределы нескольких процентов, то этот путь решения является весьма эффективным и в настоящее время широко применяется для решения сложных задач тепло- и массопереноса.

Для решения задач теплопроводности наибольшее распространение в практике турбостроения получили гидравлические [124] и электрические [33, 225] аналогии. Первая основана на одинаковости дифференциальных уравнений, описывающих явления распространения тепла и движения вязкой жидкости, во второй используется аналогия между тепловыми и электрическими явлениями.

Что касается выбора моделей при электрическом и гидравлическом моделировании физических полей, то в основном применяются два метода — сплошных сред и дискретных сеток. В первом случае моделью служит сплошная среда — электролит, электропроводная бумага, фольга, электропроводный картон, электропроводные лаки и краски и т. д., во втором — дискретные сетки омических или гидравлических сопротивлений, сетки емкостей и др. Кроме того, применяются комбинированные модели — сочетания сплошных сред с сетками.

При гидравлическом моделировании тепловых процессов моделью-аналогом теплопроводящей среды служит гидравлическая сетка, представляющая собой систему сообщающихся сосудов, аналогом температуры является гидравлический напор, тепловое сопротивление моделируется гидравлическим сопротивлением, а теплоемкость — гидравлической емкостью.

Установки, названные гидравлическими интеграторами, позволяют с большой точностью решать задачи нестационарной теплопроводности, в том числе и нелинейные. К достоинствам этих установок следует отнести и возможность моделирования граничных условий третьего рода, изменяющихся во времени.

С помощью гидравлического моделирования решается широкий круг задач. В частности, в ВТИ гидроинтегратор системы В. С. Лукьянова применяется для решения задач по определению температурного состояния деталей паровых и газовых турбин.

Однако при исследовании больших областей со сложными граничными условиями, когда число расчетных точек велико, как это имеет место, например, при определении температурных полей ротора и статора паровых турбин (несколько сотен расчет-

ных точек), гидравлическая модель становится очень громоздкой, а ее эксплуатация весьма сложной. Для таких задач использование гидроинтегратора нерационально.

Более просты по устройству и эксплуатации и в то же время более универсальны электрические модели.

Для электрического моделирования температурных полей обычно используется поле электрического тока, но могут быть использованы и магнитные, и электромагнитные поля. Как указывалось выше, этот метод основан на аналогии между переносом тепла в твердом теле и прохождением электрического тока через проводник.

Аналогом нелинейного уравнения теплопроводности

$$c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} t)$$

является уравнение напряженности

$$c_3 \frac{\partial U}{\partial \tau} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad} U \right),$$

где c_3 — емкость конденсатора; r — омическое сопротивление; U — электрический потенциал модели.

Выбор поля электрического тока для моделирования многих неэлектрических полей обусловлен тем, что здесь применяются наиболее простые и точные методы измерений. Распределение температуры в этом случае моделируется распределением электрического потенциала, потоку тепла соответствует электрический ток, тепловому сопротивлению — электрическое сопротивление. Электрическая аналогия реализуется многими экспериментальными установками.

Метод электроанalogий успешно развивается в трех направлениях: моделирование на электрических сетках, моделирование в электролитической ванне и моделирование на электропроводной бумаге.

Для моделирования стационарных и нестационарных полей температуры разработаны и построены различные типы электрических сеточных моделей — электроинтеграторов. Проводящей средой в электроинтеграторах сеточного типа служит дискретная сетка, набранная из постоянных или переменных сопротивлений с возможным подключением емкостей и индуктивностей.

Для решения задач нестационарной теплопроводности для роторов и корпусов паровых и газовых турбин применяется электрическое моделирование на R -сетках (сетках омических сопротивлений) и RC -сетках (сетках омических сопротивлений и емкостей). Принцип действия этих интеграторов основан на возможности воспроизведения с помощью электрических схем конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, описывающих тепловые процессы. С их помощью, применяя метод сеток, можно приближенно решать уравнения Лапласа,

Пуассона и Фурье для задач Дирихле (граничных условий первого рода), Неймана (граничных условий второго рода) и смешанные краевые задачи (граничные условия третьего рода).

Для тех нестационарных режимов, когда необходимо учитывать зависимость коэффициентов переноса от температуры и переменность граничных условий, целесообразно пользоваться R -сетками, применяя метод Либмана. Этот метод позволяет решать нестационарные задачи с помощью сеток омических сопротивлений. Идея метода состоит в дискретном задании интервалов времени, как это делается в сетках для элементов пространства, т. е. в использовании конечно-разностной пространственной и временной аппроксимаций. С помощью этого метода можно решать нелинейные задачи теплопроводности (с нелинейностями первого рода и второго рода). Однако, обладая указанными достоинствами, метод Либмана имеет и существенный недостаток — большую трудоемкость счета и малую универсальность (для каждой новой задачи необходимо менять все сопротивления). Поэтому его использование рационально, когда исследуемая область имеет ограниченное количество узловых точек.

Этот недостаток устранен в статических интеграторах Л. А. Вулиса, И. Ф. Жеребятьева и А. П. Лукьянова [25]. В последнем варианте (промышленном образце) этого интегратора подвижный счетный элемент, составленный из ограниченного числа омических сопротивлений, может быть аналогом любого разностного оператора в соответствии с требованиями задачи. Переход от одних конечно-разностных уравнений к другим связан только с переключением в схеме решающего элемента. Квантование времени позволяет решать сравнительно легко трехмерные уравнения параболического типа с коэффициентами, зависящими от температуры или координат.

В Харьковском политехническом институте разработан метод нелинейных сопротивлений [127], позволяющий отказаться от процесса итераций. В отличие от традиционного способа моделирования термического сопротивления на границе посредством линейных омических сопротивлений, в основе этого метода лежит другой подход к моделированию нелинейных физических явлений: физические нелинейности моделируются с помощью электрических нелинейностей (нелинейных электрических элементов). Благодаря этому из процесса решения исключаются итерации и линеаризация граничных условий.

В ЦКТИ для решения нестационарных задач теплопроводности применительно к элементам турбомашин разработан электроинтегратор СЭИ-02 [146, 147], состоящий из RC -сеток и основанный на методе элементарных балансов. Главное преимущество RC -сеток — в непрерывности решения во времени. Однако они приспособлены для решения линейных задач нестационарной теплопроводности с постоянными граничными условиями третьего рода. Хотя в сочетании с дополнительным устройством БПС-1

(блоком переменных сопротивлений), позволяющим ступенчато изменять величину граничных сопротивлений на RC -сетке электроинтегратора в процессе решения задачи [146], RC -сетки могут применяться для решения задач с переменными во времени граничными условиями третьего рода и для решения нелинейных задач, возможности их применения для решения таких задач до последнего времени остаются ограниченными.

Когда требуется учитывать зависимость λ , c , ρ , α и q от температуры и времени, технически проще и дешевле решать задачу с помощью R -сеток и метода Либмана.

Невозможность непрерывного моделирования проводимости $R_\alpha(\tau)$ — аналога коэффициента теплообмена $\alpha(\tau)$ на RC -сетках — приводит к попыткам разработки различных приближенных методов [81].

В тех же случаях, когда в силу конструктивной сложности узлов ротора и корпуса или в силу существенной неравномерности температурного поля необходимо производить разбивку этих объектов на большое число элементов или когда необходим анализ различных вариантов, отличающихся конструктивными или режимными параметрами, целесообразнее пользоваться RC -сетками, задавая λ , c , γ , α и q постоянными (последнее необходимо обосновать).

Методика решения задач по определению теплового состояния роторов и корпусов паровых турбин с помощью интегратора СЭИ-02 в течение ряда лет применяется в ЦКТИ и на турбостроительных заводах и подробно описана [144].

Для моделирования температурных полей в телах сложной формы особый интерес представляют асимметричные R - и RC -сетки и комбинированные модели.

Обширная информация и подробная библиография по использованию электрических сеточных моделей и по методике решения с их помощью различных задач теплопроводности приводится в [87, 90].

Отдавая должное возможностям и достоинствам метода сеток, следует, однако, заметить, что реализация конечно-разностных схем на аналоговых вычислительных устройствах связана с серьезными трудностями. Прежде всего это относится к многомерным задачам с переменными коэффициентами. Для каждой конкретной задачи требуется создание новой сетки из многих десятков или сотен сопротивлений. Кроме того, создание схем с большим количеством элементов необходимо во избежание одного из основных источников ошибок — замены дифференциальных уравнений конечно-разностными. Это процесс трудоемкий и дорогостоящий. Поэтому, когда позволяет постановка задачи, следует использовать более простые специализированные интеграторы.

Для определения стационарных температурных полей широко используется моделирование на электрических моделях из сплошных проводящих сред — на электролитах и электропроводной

бумаге, при этом аналогом температурного поля служит поле электрического тока в жидкой или твердой проводящей среде.

Удобной моделью для определения поля потенциалов в проводнике является электролитическая ванна, к преимуществам которой относятся однородность жидкой моделирующей среды (электролита), простота моделирующих устройств, наглядность, доступность к внутренним точкам области при моделировании объемных полей, возможность создания моделей больших размеров и большая точность соответствия граничных условий модели и природы.

В работах [16, 112] разработана конструкция электролитической ванны для моделирования температурных полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа при граничных условиях первого, второго и третьего родов. С помощью электролитической ванны моделируются и нестационарные процессы [155]. Для исследования распределения температуры в деталях турбин моделирование в электролитической ванне использовано в [112, 175]. В этих работах подробно описаны методика моделирования, электрические схемы питания и измерения. В зависимости от типа решаемых задач электролитические ванны могут быть плоскими и объемными. Возможность исследования пространственной модели является одним из основных достоинств такого моделирования. Однако громоздкость установок, непостоянство сопротивлений электролитов и их зависимость от температуры и других факторов, трудность (практически невозможность) учета неоднородности свойств материала ограничивают область применения электролитических ванн.

Наиболее распространенными моделирующими устройствами, работающими по принципу геометрического аналога, являются модели из твердых электропроводящих материалов и покрытий (электропроводной бумаги, фольги и т. п.). Техника моделирования в этом случае значительно проще, чем при моделировании любым другим способом.

Из электропроводного материала непосредственно вырезается модель, геометрически подобная натуре. По контуру модели накладываются металлические шины, на которых задаются граничные условия в виде напряжений или токов, соответствующих граничным условиям первого или второго рода. Граничные условия третьего рода задаются в виде напряжений через сопротивление, моделирующие коэффициенты теплоотдачи. После задания граничных условий на модели с помощью измерительного устройства измеряются потенциалы, в результате чего получается картина эквипотенциальных линий, соответствующая картине изотерм.

Наиболее удобны с точки зрения практического осуществления такого моделирования серийно выпускаемые нашей промышленностью интеграторы типа ЭГДА, в которых в качестве проводящей среды используется электропроводная бумага. Примене-

ние электропроводной бумаги позволяет существенно упростить технику моделирования задач и саму конструкцию прибора. Вследствие электронной проводимости бумаги можно работать на постоянном токе, что упрощает измерительную схему и позволяет получать более точные, чем на электролитах, результаты измерений. Эти модели непрерывно совершенствуются, и класс решаемых на них задач расширяется. Модели из электропроводной бумаги применяются, в частности, для моделирования двумерных температурных полей различных деталей паровых и газовых турбин — дисков, лопаток и др. К недостаткам этого метода следует отнести трудность моделирования областей с различными физическими константами, т. е. трудность учета неоднородности материала (это общий недостаток всех моделей из сплошных однородных проводников). Изготовление многослойной модели существенно усложняет моделирование и ликвидирует основное преимущество этого метода — простоту. В таких случаях, когда необходимо учесть неоднородность материала, лучше использовать устройства, где непрерывный проводник заменен схемой из проводящих элементов.

Методика моделирования на электропроводной бумаге при граничных условиях первого — четвертого рода, техника изготовления моделей, описание схем и инструкция по эксплуатации серийных интеграторов типа ЭГДА содержатся в книге П. Ф. Фильчакова и В. И. Панчишина.

Подробная библиография работ, в которых используется этот метод моделирования, содержится во многих обзорах по методам моделирования, в частности в [90].

Для решения широкого круга задач применяются различные комбинированные модели, в частности состоящие из элементов сеточных моделей и сплошных сред. В качестве последних может применяться любая сплошная среда — электролит, электропроводная бумага и др. С помощью таких комбинированных моделей можно более точно задать форму тела и условия теплообмена на его границах, сократив при этом объем вычислений. На комбинированных моделях можно решать как стационарные, так и нестационарные задачи [90].

Для решения сложных проблем энергетики, в частности для определения оптимальных условий переходных процессов в турбомашинах, эффективно создание и использование аналого-цифровых комплексов.

50. Решение задач теплопроводности вероятностными методами

О принципиальной возможности решать дифференциальные и разностные уравнения теплопроводности вероятностными методами известно давно. Однако до недавнего времени эти методы находились на стадии формальной возможности, которая

представляла теоретический интерес, но практически мало использовалась. Широкое развитие и практическое применение эти методы получили в связи с исключительными возможностями, которые дают ЭВМ.

Рассмотрим метод статистических испытаний, известный в литературе также как метод Монте-Карло [17]. Свойства этого метода делают его особенно удобным для создания алгоритмов, хорошо приспособленных к реализации на цифровых вычислительных машинах.

Идея метода статистических испытаний состоит в решении различных задач вычислительной математики путем построения для каждой задачи случайного процесса с параметрами, равными искомым величинам этой задачи. При этом приближенное определение этих величин происходит путем наблюдения за случайным процессом и вычисления его статистических характеристик, приближенно равных искомым параметрам. Основное в этом методе — совокупность приемов, позволяющих переходить от реальной вычислительной задачи к удобно реализуемому в вычислительной машине случайному процессу с конечным числом состояний и дискретным временем. Таким образом, вместо решения аналитической задачи моделируется случайный процесс и для приближенного решения данной аналитической задачи используются статистические оценки вероятностей.

Неверно мнение, на наш взгляд, что метод статистических испытаний может с успехом применяться только к задачам, вероятностным по своей природе, для исследования случайных процессов. Разумеется, для таких задач его использование наиболее логично и эффективно, и в настоящее время наибольшие успехи в применении этих методов достигнуты именно в этой области. Однако метод Монте-Карло может эффективно применяться и к задачам, которые в своей постановке не связаны с теорией вероятностей, в частности к краевым задачам для эллиптических и параболических уравнений, к которым относится и уравнение теплопроводности. Моделирование случайных процессов в этом случае оказывается очень удобным методом для нахождения решений дифференциальных уравнений в частных производных. Привлекательность и перспективность этого нового подхода выявляются в исследовании наиболее трудных задач теплопроводности — многомерных задач и задач с произвольно меняющимися граничными условиями, которые могут содержать производные от температуры в направлении нормали к поверхности [160], т. е. в тех случаях, когда невозможно аналитическое интегрирование. И если до недавнего времени метод статистических испытаний считали применимым только для задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями и линейными граничными условиями, то в настоящее время он уже используется для решения нелинейных задач второго рода, т. е. при нелинейных граничных условиях [195, 242]. Вполне естественно ожидать

появления вероятностных схем, связанных с нелинейными уравнениями первого рода (нелинейно само дифференциальное уравнение).

Рассмотрим основной принцип метода Монте-Карло и покажем, почему случайное блуждание может служить моделью для описания процесса теплопроводности.

Сначала рассмотрим задачу стационарной теплопроводности, затем более сложный случай — задачу нестационарной теплопроводности.

Пусть требуется найти функцию $t(x, y, \tau)$ внутри некоторой плоской области G , удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{VIII.41})$$

и на границе области принимающую заданные значения (первая краевая задача для уравнения Лапласа — задача Дирихле).

Предположим, что на двумерное тело наложена, как это показано на рис. 128, *a*, квадратная сетка ($\Delta x = \Delta y = 1$). При обычной конечно-разностной аппроксимации уравнение (VIII.41) может быть заменено уравнением вида

$$t(x, y) = \frac{1}{4} [t(x+1, y) + t(x-1, y) + t(x, y+1) + t(x, y-1)] \quad (\text{VIII.42})$$

при условии

$$\Delta x = \Delta y = 1. \quad (\text{VIII.43})$$

Теперь рассмотрим процесс случайного блуждания частицы и связанную с ним теоретико-вероятностную схему.

Частица, находящаяся в данный момент во внутренней точке (x, y) , имеет равную вероятность перейти из этой точки в любую из соседних точек $(x+1, y)$, $(x-1, y)$, $(x, y+1)$, $(x, y-1)$ сетки. Так как вероятность попадания частицы в каждую из четырех точек равна $1/4$, то по теореме сложения вероятностей вероятность достижения частицей точки (x, y) на квадратной сетке можно представить равенством

$$P(x, y) = \frac{1}{4} [P(x+1, y) + P(x-1, y) + P(x, y+1) + P(x, y-1)]. \quad (\text{VIII.44})$$

Конечно-разностное уравнение (VIII.42), определяющее температуру во внутренней точке (x, y) области, по форме одинаково

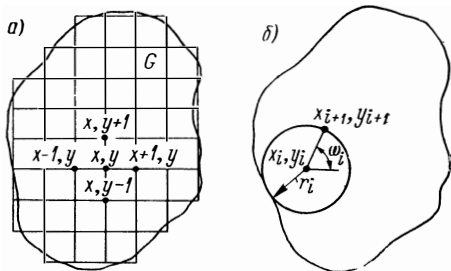


Рис. 128. Схема двумерного тела произвольной формы

с уравнением (VIII.44), описывающим вероятность нахождения частицы в точке (x, y) в процессе ее случайного блуждания. На этом основана возможность использования такого типа блуждания в качестве модели для описания процесса теплопроводности.

Интересно отметить, что когда связь между краевыми задачами и случайными процессами была обнаружена впервые, то основной интерес вызвала возможность применить методы теории дифференциальных уравнений к исследованию случайных процессов. В методе Монте-Карло, наоборот, моделирование случайных процессов используется для нахождения решений дифференциальных уравнений.

Для определения температуры в точке (x, y) в этой точке приводится в движение случайно блуждающая частица, которая начинает блуждать от одной узловой точки к другой. Кое-то время она может блуждать взад и вперед вдоль одного отрезка. История блуждания такой частицы является цепью Маркова, в которой вероятность последующего события не зависит от вероятностей предыдущих событий. Блуждание частицы продолжается до тех пор, пока она не достигнет некоторой границы. При достижении частицей узловой точки на границе блуждание прекращается и записывается известная в этой граничной точке температура $t_{грi}$. Затем из точки (x, y) выпускается вторая частица и т. д. Если через $t_{грi}$ обозначить температуру в конце i -го блуждания, то решение для $t(x, y)$ по методу Монте-Карло выражается в виде суммы

$$t(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{грi}, \quad (\text{VIII.45})$$

где n — общее число блужданий.

Таким образом, температура внутренней точки (x, y) определяется осреднением n температур граничных точек, достигнутых беспорядочно блуждающими частицами. Принятие решения о прекращении вычислений зависит от того, как меняется величина температуры относительно среднего из предварительно найденных величин.

Рассмотрим теперь нестационарную двумерную задачу теплопроводности, описываемую при отсутствии источников тепла уравнением

$$a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial t}{\partial \tau}. \quad (\text{VIII.46})$$

В конечных разностях это уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{4(\Delta x)^2} [t(x+1, y, \tau) - 2t(x, y, \tau) + t(x-1, y, \tau)] + \\ & + \frac{a}{4(\Delta y)^2} [t(x, y+1, \tau) - 2t(x, y, \tau) + t(x, y-1, \tau)] = \\ & = \frac{t(x, y, \tau+1) - t(x, y, \tau)}{\Delta \tau}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.47})$$

Если приращения расстояний Δx , Δy и времени $\Delta \tau$ выбрать такими, чтобы

$$\frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} = \frac{a \Delta \tau}{(\Delta y)^2} = 1, \quad (\text{VIII.48})$$

то уравнение (VIII.47) запишется следующим образом:

$$t(x, y, \tau + 1) = \frac{1}{4} [t(x + 1, y, \tau) + t(x - 1, y, \tau) + t(x, y + 1, \tau) + t(x, y - 1, \tau)]. \quad (\text{VIII.49})$$

Вероятностная интерпретация этого уравнения подобна той, которая соответствовала уравнению (VIII.42), а именно: частица, находящаяся в точке (x, y) , имеет равную вероятность перейти в любую из четырех окружающих точек. Поэтому вероятность ее нахождения в точке $(x, y, \tau + 1)$ должна составлять $1/4$ от вероятности нахождения в окружающих точках на предыдущем шаге:

$$P(x, y, \tau + 1) = \frac{1}{4} [P(x + 1, y, \tau) + P(x - 1, y, \tau) + P(x, y + 1, \tau) + P(x, y - 1, \tau)], \quad (\text{VIII.50})$$

т. е. и в этом случае конечно-разностное уравнение (VIII.50) для определения вероятности нахождения частицы в некоторой точке аналогично по форме уравнению в конечных разностях (VIII.49), определяющему температуру тела в этой точке.

Подобно тому как это было сделано для стационарной задачи, можно описать применение способа случайного блуждания для определения нестационарного поля температур.

Пусть требуется найти температуру во внутренней точке в момент времени $\tau_k = \bar{k} \Delta \tau$ для случая, когда температура поверхности тела задана в виде функции времени и координат. В точке (x, y) в момент времени $n \Delta \tau$ приводится в движение частица, которая отправляется в путь по узловым точкам в соответствии с получаемыми случайными числами. Обозначим через m накопленное число шагов в процессе блуждания. Если частица достигла граничной точки, когда $n - m > 0$, то записывается температура этой точки в момент времени $(k - m) \Delta \tau$. Если же частица при $k - m = 0$ находится еще внутри тела, то записывается начальная температура той точки, в которой справедливо равенство $k - m = 0$. Величины, которые записаны для каждой из n частиц, начавших случайное блуждание в точке (x, y) в момент времени $k \Delta \tau$, суммируются. После деления суммы на n получается решение для температуры.

Размер сетки следует выбирать так, чтобы случайным образом блуждающие частицы достигли границы за приемлемое время, но чтобы число узловых точек было достаточным для правильного представления о распределении температуры.

В рассмотренном выше методе определения температуры положения узловых точек сетки и размер шага заранее фиксированы. В связи с этим метод Монте-Карло с фиксированным случайным блужданием, так же как и конечно-разностный метод, сталкивается с трудностью, связанной со сложностью границ, в задачах, содержащих в граничных условиях производные в направлении нормали. В случае тел сложной конфигурации линии сетки не выходят на границу под прямыми углами, поэтому представление граничных условий с производными в направлении нормали становится весьма приближенным.

Эти трудности устраняются при использовании идеи так называемого плавающего случайного блуждания [27, 160, 195].

Температура в точке (x, y) , являющейся центром круга радиуса r , может быть точно выражена через температуру $t(r, \omega)$ на границе [160]:

$$t(x, y) = \int_0^1 t(r, \omega) dF(\omega); \quad F = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (\text{VIII.51})$$

где ω — угловая координата.

Величина F может рассматриваться как вероятностная функция распределения. Из уравнения (VIII.51) очевидно, что $\frac{dF}{d\omega} = \text{const}$, т. е. для элементарной дуги $d\omega$ вероятность dF не зависит от ω . Следовательно, для случайно блуждающей частицы, находящейся в данный момент в центре круга и готовой к своему следующему шагу, каждое положение на окружности с угловой координатой ω является равновероятным.

Допустим, что случайно блуждающая частица после i шагов находится в некоторой точке (x_i, y_i) . Строим окружность с центром в точке (x_i, y_i) и радиусом r_i , равным кратчайшему расстоянию от точки (x_i, y_i) до границы (рис. 128, б). Так как существует равная вероятность достижения частицей любой точки окружности, то все случайные блуждания внутри круга можно исключить, поместив частицу на окружности в некоторой произвольно выбранной точке (x_{i+1}, y_{i+1}) , координаты которой равны

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + r_i \cos \omega_i; \\ y_{i+1} &= y_i + r_i \sin \omega_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.52})$$

Следующий шаг случайного блуждания выполняется с помощью окружности с центром в точке (x_{i+1}, y_{i+1}) и радиусом r_{i+1} , равным кратчайшему расстоянию от нового центра до границы, и т. д. Процесс можно повторять до тех пор, пока частица не окажется вблизи границы. Ни положение центра, ни величина шага случайного блуждания заранее не фиксированы, а изменяются в соответствии с выбором в процессе блуждания. Поэтому эти величины называются плавающими. При использовании плавающего случайного блуждания исчезают трудности

воспроизведения граничных условий, содержащих производные в направлении нормали, так как частица, приближающаяся к границе, движется по нормали к ней. Кроме того, сокращается время вычислений без уменьшения точности.

Остановимся кратко на вопросах оценки точности и времени решения задач по методу Монте-Карло.

В вычислительной практике оценить погрешность сложного расчета по теоретической формуле почти никогда не удастся. О точности сложных расчетов судят по разным дополнительным соображениям: по сопоставлению результатов, полученных различными методами; по просчету модельных задач, точные решения которых известны; по сопоставлению результатов, полученных при разных сетках, и т. п.

При вычислении методом Монте-Карло строгая оценка погрешности невозможна. Однако все указанные дополнительные соображения сохраняют силу. И в этом смысле метод Монте-Карло мало отличается от классических вычислительных методов, а зачастую имеет даже преимущество перед ними, так как даже в очень сложных расчетах нередко удается получить статистическую оценку погрешности.

Поскольку решения, получаемые методом Монте-Карло, являются средними из ряда отдельных испытаний, то уточнение этих решений может быть достигнуто увеличением числа испытаний. Погрешность метода имеет порядок $\delta \approx 1/\sqrt{n}$, где n — общее число испытаний.

Время решения задачи по методу Монте-Карло определяется по формуле

$$\tau_{\text{реш}} = \vartheta (v_1 + v_2 + \dots + v_n), \quad (\text{VIII.53})$$

где v_1 — число пройденных узлов при i -м блуждании частицы; n — полное число блужданий, которое надо промоделировать, чтобы достичь требуемой точности решения; ϑ — время одного перехода в соседний узел.

Число узлов, проходимых частицей за одно блуждание — случайная величина. Поэтому сумма этих величин приближенно равна математическому ожиданию величины v , умноженной на n , т. е. время решения задачи равно

$$\tau_{\text{реш}} \approx \vartheta n (Ev). \quad (\text{VIII.54})$$

Доказано, что $Ev \sim r^2$ (r — радиус области G). Вообще говоря, время решения задачи имеет порядок $\tau_{\text{реш}} \approx vr^2/\varepsilon^2$ (ε — требуемая точность решения). Существенно, что это справедливо при любой размерности решетки, т. е. для любого числа независимых переменных, от которых зависит искомая функция.

Машинное время решения задач по методу Монте-Карло зависит от возможностей машины и в большой мере от выбора рационального алгоритма счета и, следовательно, от опытности и изобретательности программиста.

Метод Монте-Карло обладает рядом особенностей, благодаря которым является особенно удобным для реализации на ЭВМ. Основными из этих особенностей являются следующие:

1) сравнительная простота и однородность последовательности операций;

2) использование сравнительно малого числа промежуточных результатов (при решении нужно помнить только величины x , y , x_0 , y_0);

3) точность результата, позволяющая оперировать с числами малой разрядности.

На этих особенностях основана идея создания простых специализированных машин, приспособленных к решению краевых задач по методу Монте-Карло [17]. Эти машины должны иметь малую разрядность чисел, небольшую оперативную память, простой состав команд и простую систему управления. Для реализации на такой машине простейшего алгоритма — задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоской прямоугольной области — методом блужданий требуется в десять раз меньше времени, чем на универсальной машине, только за счет сокращения служебных операций.

Можно и в универсальной машине ввести наиболее приспособленный для решения задач по методу Монте-Карло набор операций и соответственно систему команд, в результате чего будут выполняться только минимально необходимые преобразования величин в машине. За счет этого производительность универсальной машины при решении таких задач можно довести до максимума, достижимого при данных технических характеристиках используемых элементов. Система команд универсальной машины позволяет при решении задачи Дирихле свести основной цикл всего к трем операциям вместо тринадцати и приближает производительность универсальной машины к производительности специализированной.

В настоящее время намечается тенденция к серийному выпуску отдельных компонентов таких машин. Это позволит конструировать для различных задач простые и дешевые монте-карловские модели, используя стандартные блоки и готовые датчики случайных чисел, разработанных для универсальных машин [17].

На основании изложенного можно сформулировать основные преимущества метода Монте-Карло перед другими численными методами.

Методом Монте-Карло можно определять температуру в любой точке тела без одновременного расчета температуры во всех внутренних точках, в то время как обычные конечно-разностные методы требуют одновременного определения температуры во всех узловых точках сетки.

При итерационных способах решения нужно многократно использовать значения неизвестной функции t во всех узлах решетки. А так как количество узлов обычно велико, то это вы-

зывает трудности при хранении значений функции t в оперативной памяти машины и требует большого количества обращений к внешней памяти. Это приводит к большой потере машинного времени, а при решении многомерных задач вообще быстро выводит за пределы возможностей машинной памяти (оперативной и внешней) современных универсальных цифровых машин.

В методе Монте-Карло каждая точка сетки является просто местом, где произошло некоторое событие в цепи Маркова, поэтому каждую частицу, проходящую через промежуточную узловую точку, можно рассматривать как частицу, история которой началась в этой точке. В связи с этим, используя информацию, содержащуюся в таких предысториях, можно быстро построить полное распределение температуры во всей области без расчета температуры для каждой внутренней точки в отдельности. При этом время, затрачиваемое на определение одного значения температуры, не зависит от количества переменных в задаче. Это свойство метода приобретает особую практическую ценность, когда требуется определить температуру в отдельных характерных точках сложного многомерного тела. Независимость вычисления температуры в одном узле от размерности решетки, т. е. приспособленность к решению многомерных задач, — основная особенность метода Монте-Карло.

Выше отмечалось, что при решении задач конечно-разностными методами возникают определенные трудности при аппроксимации сложных криволинейных границ. При решении же методом Монте-Карло этих трудностей нет. Время прогона программы Монте-Карло очень слабо зависит от формы границ. Почти одинаково решаются задачи для тела со сложной границей и для такого простого, например, тела, как диск. Влияние небольшого изменения границ на внутренние температуры можно определить обрыванием или продлением отдельных историй.

Точность результатов, полученных методом Монте-Карло, можно увеличить, рассматривая большее число историй (ограничения здесь накладываются только имеющимся машинным временем). Это не всегда верно при использовании других методов конечных разностей из-за ошибок, возникающих вследствие отбрасывания членов, и проблем сходимости.

Краевые задачи для эллиптических и параболических уравнений, описывающие, в частности, процессы переноса тепла в элементах турбомашин, являются одной из перспективных областей применения рассмотренного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонова Ф. А., Филиппович Б. С. Исследование критических нагрузок в высокотемпературном потоке пароводяной смеси при низких давлениях. — ИФЖ, 1966, т. 10, № 5, с. 620—625.
2. Азизов А., Зысина-Моложен Л. М. и др. Исследование влияния температурного фактора на переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое. — ИФЖ, 1969, т. 16, № 2, с. 218—224.
3. Аладьев И. Т., Додонов Л. Д., Удалов В. С. Критические тепловые нагрузки при течении воды в трубах. — «Атомная энергия», 1959, № 1, с. 74—78.
4. Аладьев И. Т., Михеев М. А., Федышкин О. С. Зависимость теплоотдачи в трубах от направления теплового потока и естественной конвекции. — «Известия АН СССР. ОТН», 1951, № 1, с. 53—67.
5. Андреев П. А., Гремилов Д. И., Федорович Е. Д. Теплообменные аппараты ядерных энергетических установок. Л., «Судостроение», 1969, 352 с.
6. Аркадьев Б. А., Варвасинская Л. И., Шатровская Г. Н. Решение нелинейной задачи нестационарной теплопроводности в твердых телах произвольной формы. — «Теплоэнергетика», 1968, № 12, с. 60—61.
7. Баронти П. О., Либби П. А. Профиль скорости в турбулентных сжимаемых пограничных слоях. — «Ракетная техника и космонавтика», 1966, № 2, с. 3—5.
8. Беккер К. М., Кей Д. Влияние радиального градиента температур на устойчивость течения между двумя концентрическими цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний неподвижен. — «Теплопередача», 1962, т. 82, № 2, с. 13—17.
9. Берк Е, Кемени Дж. А. Новый метод охлаждения газовых турбин. — «Труды американского общества инженеров-механиков», 1955, № 2, с. 187—196.
10. Бетчелор Д. К. Теория однородной турбулентности. М., ИЛ., 1955, 200 с.
11. Богданова В. В. Ламинарный пространственный пограничный слой с продольным и поперечным перепадом давления. — «Известия АН СССР. Механика и машиностроение», 1960, № 1, с. 12—19.
12. Богданова В. В. Универсальные уравнения теории пространственного пограничного слоя. — «Известия АН СССР. Механика жидкости и газа», 1968, № 6, с. 34—42.
13. Бодунов Н. М. Влияние угла атаки на средний коэффициент теплоотдачи турбинных лопаток. — «Труды КАИ», 1961, вып. 63, 34 с.
14. Бодунов Н. М. Исследование местных коэффициентов теплоотдачи турбинных лопаток при различных углах атаки. — «Известия вузов. Авиационная техника», 1961, № 2, с. 78—93; 1967, № 2, с. 136—139.
15. Брэдли В., Де-Курзин Д. Ф. Экспериментальное изучение теплообмена в турбулентном пограничном слое на телах вращения в сверхзвуковом потоке. — ВРТ, 1957, № 1, с. 67—70.
16. Бурдак Н. М., Нетушилл А. В., Сорокин П. Г. Электролитическая ванна для моделирования плоскопараллельных потенциальных полей

- с произвольными граничными условиями. — «Труды МЭИ», 1956, вып. 18, с. 229—240.
17. Бусленко Н. И., Шнейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1961, 226 с.
 18. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ, 1963, 487 с.
 19. Ван-Дрифт Е. Р. Проблемы аэродинамического нагрева. — «Вопросы ракетной техники», 1957, № 5, с. 36—65.
 20. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., Физматгиз, 1963, 708 с.
 21. Вебер М. Е. Повышение точности численного решения Крэнко—Никольсона для уравнения теплопроводности. — «Труды американского общества инженеров-механиков. Сер. С», 1969, № 1, с. 160—162.
 22. Войтович Л. Н. Влияние поджатия сопла на затухание турбулентных пульсаций. — «Известия СО АН СССР. Сер. Т. Н», 1969, № 13, вып. 3, с. 24—27.
 23. Волчков Э. П., Кузьменко В. К., Лебедев В. П. Влияние предвключенного динамического участка на теплообмен в турбулентном пограничном слое со вдувом. — «Журнал прикладной механики и технической физики», 1971, № 6, с. 126—131.
 24. Волюнский М. Л., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960, 451 с.
 25. Вулис Л. А., Исаев Н. У., Лукьянов А. Т. Статические аналоговые устройства. — «Вестник АН Каз. ССР», 1959, № 9/174.
 26. Гардон, Акфират. Характеристики теплоотдачи при ударе двухмерных воздушных струй. — «Теплопередача», 1966, № 1, с. 110—118.
 27. Гельфанд И. М. О применении метода случайных испытаний (Монте-Карло) для решения кинетического уравнения. — «Труды 2-й международной Женевской конференции по применению атомной энергии в мирных целях», 1958, № 141.
 28. Герцберг Е. Я. Температурные напряжения в турбинной лопатке. — «Энергомашиностроение», 1963, № 5, с. 27—28.
 29. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962, 340 с.
 30. Голубева О. И. К определению температурного поля лопаток газовых турбин. — «Труды института им. П. И. Баранова», 1947, № 129, с. 1—16.
 31. Гольдштейн С. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. М., ИЛ, 1948, с. 408.
 32. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. М., ИЛ, 1958, 566 с.
 33. Гутенмахер Л. И. Электрические модели. М.—Л., изд-во АН СССР, 1955, 47 с.
 34. Гухман А. А. Физические основы теплопередачи. М., Энергоиздат, 1934, 315 с.
 35. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. М., «Высшая школа», 1963, 254 с.
 36. Гухман А. А. Универсализация результатов количественного исследования. — «Теплоэнергетика», 1972, № 9, с. 9—14.
 37. Давыдов В. С., Зысин Л. В., Усков И. Б. О влиянии дисперсности увлажненного потока на теплообмен. — «Энергомашиностроение», 1969, № 10, с. 42—44.
 38. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Газодинамика двухфазных сред. М., «Энергия», 1968, 423 с.
 39. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Некоторые научно-технические проблемы исследований турбин влажного пара. — «Известия высших учебных заведений. Энергетика», 1972, № 5, с. 58—65.
 40. Демидович Б. П., Марон И. Л., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М., «Наука», 1967, 368 с.
 41. Денисов Е. Е., Петровский В. С. Численное решение задачи нестационарной теплопроводности для ротора газовой турбины с бандажиро-

- ванными лопатками на ножке. — «Труды Московского авиационного технологического института», 1971, вып. 72, с. 60—69.
42. Дор од ни цы н А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. — «Прикладная математика и механика», 1942, т. 6, вып. 6, с. 449—486.
 43. Дор од ни цы н А. А., Лой ц я н с к и й Л. Г. К теории перехода ламинарного слоя в турбулентный. — «Прикладная математика и механика», 1945, т. 9, вып. 4, с. 269—285.
 44. Дор од ни цы н А. А., Лой ц я н с к и й Л. Г. Пограничный слой крылового профиля при больших скоростях. «Труды ЦАГИ», 1944, № 551, 17 с.
 45. Дор ф м а н Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. Л., «Физматгиз», 1960, 232 с.
 46. Ды б а н Е. П., Кур о ш В. Д. Сравнительные исследования теплоотдачи на профиле сопловой лопатки в аэродинамической трубе и в воздушных турбинах. — В кн.: Конвективный теплообмен. Киев, «Наукова думка», 1968, с. 61—70.
 47. Ды б а н Е. П., М а з у р А. И., Фи ли п ч у к В. Е. Влияние геометрии дефлектора на теплообмен в охлаждающем тракте дефлекторных лопаток. — «Теплофизика и теплотехника», 1972, вып. 21, с. 67—73.
 48. Ды б а н Е. П., Эп и к Э. Я., М а з у р А. И. и др. Теплообмен при струйном обдуве входной кромки турбинной лопатки. — «Известия вузов. Энергетика», 1972, № 5, с. 90—96.
 49. Ды б а н Е. П., Эп и к Э. Я., М а з у р А. И. Теплообмен в охлаждаемых воздухом дефлекторных лопатках. — «Теплоэнергетика», 1971, № 6, с. 74—77.
 50. Жи ри ц к и й Г. С., Ло к а й В. И., М а с к у т о в а М. К. и др. Газовые турбины двигателей летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1971, 620 с.
 51. Зо ло то го ро в М. С. Эффективность охлаждения и теплообмена при защите поверхностей элементов ГТУ вдувом воздуха в пограничный слой газа. — «Теплоэнергетика», 1972, № 10, с. 36—38.
 52. Зы си н В. А., Зы си н Л. В. О рациональной температуре охлаждаемых лопаток газовых турбин. — «Энергомашиностроение», 1969, № 5, с. 41—42.
 53. Зы си н Л. В. Высокотемпературные турбины с парциальным подводом газа и пара. — «Труды ЛПИ», 1964, вып. 232, с. 20—25.
 54. Зы си н Л. В. Исследование охлаждения элементов проточной части высокотемпературных газовых турбин увлажненным потоком газа. — «Теплоэнергетика», 1969, № 6, с. 22—24.
 55. Зы си на - Мо ло же н Л. М. Расчет теплообмена двух пересекающихся под прямым углом поверхностей. — ИФЖ, 1963, т. 6, № 5, с. 34—41.
 56. Зы си на - Мо ло же н Л. М. Приближенный метод расчета теплоотдачи в решетках профилей. — «Известия АН СССР», ОТН, 1957, № 10, с. 28—35.
 57. Зы си на - Мо ло же н Л. М. Приближенный метод расчета теплового пограничного слоя. — ЖТФ, 1959, т. 29, вып. 5, с. 632—639.
 58. Зы си на - Мо ло же н Л. М. Исследование влияния продольного градиента давления на развитие пограничного слоя. — ЖТФ, 1959, т. 29, вып. 4, с. 450—561.
 59. Зы си на - Мо ло же н Л. М. Расчет теплоотдачи в решетках профилей. — ЖТФ, 1959, т. 29, вып. 5, с. 625—631.
 60. Зы си на - Мо ло же н Л. М. Расчет теплового пограничного слоя в потоке сжимаемого газа. — ИФЖ, 1962, т. 5, № 6, с. 21—26.
 61. Зы си на - Мо ло же н Л. М., Дер г а ч А. А., Цей т ли н Л. М. Исследование влияния вращения на развитие теплового пограничного слоя. — В кн.: Тепло и массообмен. Т. 1. Ч. 3. Минск, ИТМО, 1972, с. 31—38.
 62. Зы си на - Мо ло же н Л. М., Ку з не ц о в а В. М. Исследование переходного режима в пограничном слое. — «Теплоэнергетика», 1969, № 7, с. 16—20.
 63. Зы си на - Мо ло же н Л. М., Кур о ш В. Д. Влияние турбулентности на переход в пограничном слое газотурбинных профилей. — «Теплоэнергетика», 1971, № 12, с. 45—46.

64. Зысина - Моложен Л. М., Кутателадзе С. С. К вопросу о влиянии давления на механизм парособразования в кипящей жидкости. — ЖТФ, 1950, т. 20, вып. 1, с. 110—116.
65. Зысина - Моложен Л. М., Левин Я. А., Поволоцкий Л. В. и др. Экспериментальное исследование эффективности внешнего воздушно-водяного охлаждения лопаток газовых турбин. — «Труды ЦКТИ», вып. 91, 1969, с. 94—103.
66. Зысина - Моложен Л. М., Медведева М. А. Влияние турбулентности и числа Re на потери энергии в решетках профилей. — «Известия вузов. Авиационная техника», 1971, № 4, с. 79—86.
67. Зысина - Моложен Л. М., Петухов Л. С., Савельева Э. М. Разработка метода исследования пограничного слоя в высокотемпературном газе. — «Теплофизика высоких температур», 1968, т. 6, № 5, с. 879—884.
68. Зысина - Моложен Л. М., Поляк М. П. Программирование расчета поля температур в турбинных лопатках, охлаждаемых через хвостовик. — «Энергомашиностроение», 1963, № 8, с. 43—48.
69. Зысина - Моложен Л. М., Поляк М. П. Расчет полей температур в лопатке высокотемпературной газовой турбины при внутреннем охлаждении. — «Труды ЦКТИ», 1965, вып. 54, с. 80—89.
70. Зысина - Моложен Л. М., Поляк М. П. Теплообмен в кольцевом канале, образованном неподвижным и вращающимся соосными цилиндрами. — «Теплоэнергетика», 1970, № 6, с. 47—50.
71. Зысина - Моложен Л. М., Поляк М. П., Ткаченко Г. М. и др. Теплообмен в кольцевых каналах и лабиринтовых уплотнениях паровых и газовых турбин. — В кн.: Тепломассообмен. Т. 1. Ч. 3. Минск, ИТМО, 1972, с. 68—74.
72. Зысина - Моложен Л. М., Поляк М. П., Усков И. Б. Теплоотдача в турбинных решетках. — «Теплоэнергетика», 1962, № 7, с. 77—80.
73. Зысина - Моложен Л. М., Сафонов Л. П., Забежинский Л. Д. и др. Теплообмен в кольцевом пространстве между двумя соосными цилиндрами при совместном действии вынужденной и естественной конвекции. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 1. Ч. 2. Минск, ИТМО, 1972, с. 110—116.
74. Зысина - Моложен Л. М., Соскова И. Н. Исследование теплообмена и сопротивления при турбулентном течении сжимаемого газа. — В кн.: Тепломассоперенос. Т. 1. Ч. 1. М., «Энергия», 1968, с. 86—100.
75. Зысина - Моложен Л. М., Ткаченко Г. М. Теплообмен в термосифонах в поле действия центробежных и кориолисовых сил. — ИФЖ, 1971, т. 20, № 1, с. 157—160.
76. Зысина - Моложен Л. М., Усков И. Б. Экспериментальное исследование теплообмена на торцевой стенке межпрофильного канала. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 1. Минск, «Наука и техника», 1965, с. 93—103.
77. Зысина - Моложен Л. М., Усков И. Б., Поволоцкий Л. В. и др. Теплообмен в межцилиндровом пространстве корпусов паровых турбин большой мощности. — «Теплоэнергетика», 1973.
78. Зысина - Моложен Л. М., Шапиро И. Г. Расчет потерь энергии и теплоотдачи в решетках профилей. — В кн.: Руководящие технические материалы. № 24—026—02. Л., ЦКТИ, 1971, 26 с.
79. Иванов В. Л., Лапин Ю. Д. Торцевой теплообмен в цилиндрическом канале в условиях свободной конвекции. — «Теплоэнергетика», 1966, № 6, с. 81—83.
80. Иванов В. Л., Локай В. И. Высокотемпературные охлаждаемые газовые турбины (исследования и расчет). М., «Машиностроение», 1971, 226 с.
81. Иващенко М. М., Золотоголов М. С. К решению задач нестационарной теплопроводности на электрических моделях. — ИФЖ, 1966, т. 11, № 2, с. 224—229.

82. Ильченко О. Т., Галацан В. Н., Сухарев Ф. М. Тепловое состояние цилиндров среднего давления в пусковых и переходных режимах. «Теплоэнергетика», 1971, № 12, с. 27—31.
83. Исследования NASA по газотурбинным двигателям. — «Новое в зарубежном авиадвигателестроении», 1972, № 2, с. 3—24.
84. Калихман Л. Е. Газодинамическая теория теплообмена. — «Труды НИИ-1», 1946, № 4, 32 с.
85. Капинос В. М. О теплообмене вращающегося в кожухе диска при радиальном обдуве. — ИФЖ, 1965, т. 8, № 1, с. 48—52.
86. Капинос В. М., Гура Л. А. Исследование теплообмена в лабиринтовых уплотнениях на статических моделях. «Теплоэнергетика», 1970, № 11, с. 38—41.
87. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., ИЛ, 1962, 487 с.
88. Кириллов И. И., Блоник Р. М. Основы теории влажнопаровых турбин. Л., «Машиностроение», 1968, 264 с.
89. Кирпиков В. А. Теплоотдача в винтовых змеевиках. Автореф. канд. дисс. Московский институт химического машиностроения, 1955.
90. Коздоба Л. А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М., «Энергия», 1972, 296 с.
91. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1953, 459 с.
92. Копелев С. З., Гуров С. В., Авилова-Шульгина М. В. Теплообмен в охлаждаемой проточной части турбины. — «Известия АН СССР. Энергетика и транспорт», 1971, № 4, с. 105—111.
93. Костерин С. И., Кошмаров Ю. А., Финатьев Ю. П. Экспериментальные исследования гидродинамики турбулентного потока воздуха в зазоре между вращающимися коаксиальными цилиндрами. — ИФЖ, 1962, № 5, с. 15—20.
94. Костерин С. И., Финатьев Ю. П. К вопросу о структуре турбулентного потока в кольцевом канале при вращении внутреннего цилиндра. — ИФЖ, 1962, № 8, с. 3—9.
95. Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя. — ДАН СССР, 1942, т. 36, вып. 9, с. 278—284.
96. Коэн Б. М. Перенос тепла теплопроводностью и излучением в случае, когда теплопроводность изменяется с температурой. «Труды американского общества инженеров-механиков. Сер. С», 1969, № 1, с. 130—131.
97. Крейц Ф. Конвективный теплообмен во вращающихся системах. — В кн.: Успехи теплопередачи. М., «Мир», 1971, 169 с.
98. Кузнецов А. Л., Миронов Б. А., Кореневский Л. Г. Исследование температурных полей дисков и корпусов газовых турбин. — «Энергетическое машиностроение», ЦИНТИАМ, 1964, вып. 4, с. 10—13.
99. Кузнецов А. Л. Определение местных коэффициентов теплоотдачи диска, вращающегося в кожухе, при струйном обдуве воздухом. — «Энергомашиностроение», 1967, № 3, с. 8—10.
100. Кузнецов А. Л., Журавлев О. А. Теплообмен в лабиринтовых уплотнениях газовых турбин. — «Энергомашиностроение», 1972, № 5, с. 10—12.
101. Кузнецов Е. Ф. Теплоотдача диска, вращающегося в кожухе при обдуве кольцевой струей воздуха. — «Энергомашиностроение», 1967, № 12, с. 35—37.
102. Кузнецов Л. А. и др. Газотурбинная установка ГТ-700-5. М.—Л., «Машиностроение», 1964, 192 с.
103. Курош В. Д., Эпик Э. Я. О влиянии турбулентности потока на теплообмен в проточной части турбомашин. — «Теплофизика и теплотехника», 1969, вып. 15, с. 120—124.
104. Кутателадзе С. С. Теплообмен при кипении. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 2. Минск, изд-во АН БССР, 1962, с. 44—59.
105. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М., «Наука», 1970, 659 с.

106. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой на проникающей поверхности. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 2. Минск, ИТМО, 1965, с. 351—360.
107. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Законы сопротивления и теплообмена в турбулентном потоке сжимаемого газа. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 3. Минск, Госэнергоиздат, 1963, с. 106—129.
108. Кейс В. М. Конвективный тепло- и массообмен. М., «Энергия», 1972, 446 с.
109. Лаврентьев М. Е. Исследование некоторых вопросов течения дисперсно-кольцевого газожидкостного потока. Автореф. канд. дисс. ЛПИ, 1968, 16 с.
110. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М., «Наука», 1970, 343 с.
111. Левин Я. А. Изучение охлаждения турбинных лопаток воздушно-водяной смесью. — «Теплоэнергетика», 1959, № 12, с. 43—45.
112. Литвинов М. М. Определение стационарных температурных полей в охлаждаемых турбинных лопатках и дисках методом электроанalogии. — «Известия АН СССР». ОТН. 1956, № 5, с. 12—22.
113. Линь-Цзя-Цзяо. Турбулентные течения и теплопередача. М., ИЛ, 1968.
114. Лойцянский Л. Г. Взаимодействие пограничных слоев. — «Труды ЦАГИ», 1936, вып. 249, с. 13—16.
115. Лойцянский Л. Г. Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя на профиле крыла. — «Прикладная математика и механика», 1958, т. 22, вып. 5, с. 600—611.
116. Лойцянский Л. Г. Сопротивление решетки профилей, обтекаемой вязкой несжимаемой жидкостью. — «Прикладная математика и механика», 1947, т. 11, вып. 4, с. 449—458.
117. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., ГИФМЛ, 1962, 480 с.
118. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970, 904 с.
119. Лойцянский Л. Г., Большаков В. П. О движении жидкости в пограничном слое вблизи линии пересечения двух поверхностей. — «Труды ЦАГИ», 1936, вып. 279, с. 3—19.
120. Локай В. И. К вопросу обобщения опытных данных по теплообмену в охлаждаемой проточной части высокотемпературной газовой турбины. — «Известия вузов. Авиационная техника», 1968, № 3, с. 67—78.
121. Локай В. И. Исследование эффективности воздушного охлаждения лопаток газовых турбин. — «Теплоэнергетика», 1970, № 7, с. 48—52.
122. Локай В. И., Трушин В. А. К вопросу об экспериментальном исследовании коэффициента теплоотдачи от газа к лопаткам турбинной решетки в условиях вращения. — «Труды КАИ», 1968, вып. 101, с. 39—46.
123. Локай В. И., Трушин В. А. Влияние угла атаки на теплообмен во вращающихся турбинных решетках. — «Теплоэнергетика», 1970, № 1, с. 84—85.
124. Лукьянов В. С. Возможные классы и области применения гидравлических интеграторов и методы решения на них краевых задач. — В кн.: Расчет физических полей методом моделирования. М., «Машиностроение», 1968, с. 41—51.
125. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967, 599 с.
126. Мак Адамс В. Х. Теплопередача. М., Металлургиздат, 1961, 686 с.
127. Мазевитый Ю. М. Новый метод моделирования нелинейных граничных условий при решении задач стационарной теплопроводности. — «Известия вузов. Энергетика», 1965, № 8, с. 101—105.
128. Мецгер Корстад. Влияние поперечного потока на теплоотдачу от плоской поверхности при ударе воздушных струй. — «Энергетические машины и установки», 1972, № 1, с. 38—45.

129. Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1955, 290 с.
130. Мионов Б. П., Зелентур А. А., Луговский П. П. и др. Исследование турбулентного переноса в условиях сильного вдува, продольного градиента давления и неизотермичности. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 1. Ч. 1. Минск, ИТМО, 1972, с. 33—40.
131. Михеев М. А. Основы теплопередачи. М.—Л., «Госэнергоиздат», 1956, 392 с.
132. Мотулевич Ю. П., Ерошенко В. М., Ермаков А. Л. и др. Исследование осредненных и пульсационных характеристик турбулентного пограничного слоя на проницаемой пластине. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 1. Ч. 1. Минск, ИТМО, 1972, с. 176—180.
133. Никитенко Н. И. Исследование нестационарных процессов тепло- и массообмена методом сеток. Киев, «Наукова думка», 1971, 266 с.
134. Петухов Б. С., Кириллов В. В. Исследование теплообмена при турбулентном движении в трубах с высокой скоростью. — «Научные доклады Высшей Школы. Энергетика», 1958, № 1.
135. Петухов Б. С., Краснощекоев Е. А., Нольде Л. Д. Теплообмен при вязком движении жидкости в трубах и каналах. — «Теплоэнергетика», 1956, № 12, с. 41—47.
136. Поляк М. П., Сидоров В. П. Расчет температуры в турбинной лопатке при торцевом охлаждении. — «Труды ЦКТИ», 1966, вып. 71, с. 65—75.
137. Поляк М. П., Сидоров В. П. Разработка алгоритма решения и программирование метода расчета полей температур в турбинной лопатке, охлаждаемой изнутри. — «Труды ЦКТИ», 1966, вып. 71, с. 60—69.
138. Рихтмайер Р., Мартон К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972, 418 с.
139. Романов А. Г. О теплообмене в глухом канале с естественной конвекцией. — «Известия АН СССР». ОТН, 1956, № 6, с. 63—76.
140. Рябенский В. С., Филиппов А. В. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956, 171 с.
141. Савин В. Н., Косак Ю. Ф., Паншин Б. М. и др. Турбины ХТГЗ на насыщенном паре атомных электростанций. — «Теплоэнергетика», 1971, № 4, с. 15—23.
142. Самарский А. А. О численных методах решения задач математической физики. — В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 11. Минск, ИТМО, 1969, с. 990—1006.
143. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960, 324 с.
144. Сафонов Л. П. Турбины паровые стационарные. Расчет температурных полей роторов и цилиндров паровых турбин методом электромоделирования. — РТМ, 24—020—16. Л., ЦКТИ, 1973.
145. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967, с. 428.
146. Селезнев К. П., Сафонов Л. П., Бровцин Н. Н. и др. Развитие методики электромоделирования температурных полей роторов и корпусов мощных паровых турбин при различных эксплуатационных режимах. — «Энергомашиностроение», 1969, № 12, с. 1—4.
147. Селезнев К. П., Таранин А. И., Тырышкин В. Г. Тепловое состояние роторов и цилиндров паровых и газовых турбин. М.—Л., «Машиностроение», 1964, 283 с.
148. Сквайр Г. Б., Юнг А. Д. Расчет профильного сопротивления крыла. — В кн.: К вопросу о максимальной скорости самолета. М., Оборонгиз, 1941, с. 100—126.
149. Скопец М. Б. Приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя в понижаемом газе при наличии теплообмена. ЖТФ, 1953, т. 23, вып. 1, с. 76—92.
150. Скопец М. Б. Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя при наличии теплообмена. — ЖТФ, 1955, т. 25, вып. 5, с. 864—876.

151. Сперроу Е. М., Хаджи-Шейх А. Исследование нестационарного и стационарного процессов теплопроводности в телах произвольной формы с произвольно заданными граничными и начальными условиями. — «Труды американского общества инженеров-механиков. Сер. С», 1968, № 1, с. 109—116.
152. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962, 512 с.
153. Табаков В., Клеванджер В. Интенсификация теплоотдачи при ударном охлаждении газотурбинных лопаток воздушными струями различной конфигурации. — «Энергетические машины и установки», 1972, № 1, с. 53—63.
154. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., ИЛ, 1959, с. 400.
155. Тетельбаум И. М., Ельмишад А. Я. Электрическое моделирование неустановившихся процессов теплопередачи и диффузии в электролитической ванне. — Межвузовская научная конференция по применению физического и математического моделирования. Т. 1. М., МЭИ, 1962.
156. Тихонов А. Н., Самарский А. Л. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966, 724 с.
157. Тонг Л. Теплоотдача при кипении и двухфазное течение. М., «Мир», 1969, 344 с.
158. Уваров В. В. и др. О создании высокотемпературных газотурбинных установок. — «Труды МВТУ», № 134, 1970.
159. Усков И. Б., Зысин Л. В. Интенсивность теплосъема при внешнем воздушно-водяном охлаждении лопаток ГТУ. — «Труды ЦКТИ», 1969, вып. 91, с. 104—108.
160. Хаджи-Шейх А., Сперроу Е. М. Решение задач теплопроводности вероятностными методами. — «Труды американского общества инженеров-механиков. Сер. С», 1967, № 2, с. 1—13.
161. Хомяков М. И. Исследование теплообмена в замкнутом пространстве в условиях естественной конвекции. — «Труды института им. П. И. Баранова», 1959, № 348, 34 с.
162. Хоуарт Л. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Т. 2. М., ИЛ, 1956, 328 с.
163. Швец И. Т., Дыбан Е. П., Хавин В. Ю. Теплообмен в лабиринтовых уплотнениях роторов газовых турбин. — «Энергомашиностроение», 1963, № 12, с. 8—11.
164. Швец И. Т., Дыбан Е. П. Воздушное охлаждение роторов газовых турбин. Киев, изд-во Киевского университета, 1959, 350 с.
165. Швец И. Т., Дыбан Е. П., Репухов В. М. Влияние начальной неравномерности профиля температуры основного потока на эффективность тепловой защиты поверхности вдувом воздуха через щель или пористый поясok. — «Известия вузов. Авиационная техника», 1968, № 4, с. 96—103.
166. Швец И. Т., Федоров В. И. Вопросы нестационарного теплообмена в роторах турбин. Киев, изд-во Киевского университета, 1960, 282 с.
167. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969, 744 с.
168. Шнэе Я. М., Шубенко-Шубин Л. М., Капинос В. М. и др. Исследование температурного поля лопаток оболочкового тела с неравномерной раздачей воздуха по обводу. — «Теплоэнергетика», 1967, № 9, с. 36—41.
169. Щукин В. К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. М., «Машиностроение», 1970, 331 с.
170. Юшков П. Приближенное решение задач нестационарной теплопроводности методом конечных разностей. — «Труды института энергетики АН БССР», 1958, вып. 6, с. 3—158.
171. Ainley D. G. Research on internally air cooled gas turbines blades. — «The Engineer», 1953, N 5078.
172. Ainley D. G. An experimental single-stage air-cooled turbine, Part II. — «Proc. Inst. Mech. Eng.», 1953, May.

173. Andrews S. I., Bradley F. C. Heat transfer to turbine blades. — ARC CP, 1948, N 294.
174. Armistead R. A., Keys I. I. A Study of Wall-Turbulence Phenomena Using Heat-Film Sensors. — Trans. ASME, ser. C, 1968, N 3, p. 13.
175. Bauman H. Bestimmung der Temperaturverteilung in Gasturbinenrotoren und Zylindern mit dem elektrolytischen Trog. — Bronn Boveri Mitt, 1953, N 5/6.
176. Bammert F., Hahne mann H. Heat Transfer in the Gas Surrounding Cooled Turbine Blades, Ministry of Supply. — Rep. G. D. C., 1951, N 2466.
177. Bayley F. J. Heat transfer problems in the cooled gas turbine. — «AIAA Paper», 1972, N 10.
178. Bayley F. J., Lock G. S. H. Heat Transfer characteristics of the Closed Thermosyphon. — «Trans. ASME. Ser. C», 1965, N 1.
179. Bayley F. J., Morris W. D., Owen I. M., Turner A. B. Boundary Layer Prediction Methods Applied to Cooling Problems in the Gas Turbine. — Aeronaut. Research Council Current Papers, 1961, N 28061, C. P. N. 1164.
180. Bayley F., Turner A. The transpiration gas turbine. — «Trans. ASME. Ser. A», 1970, vol. 92, N 4, pp. 351—358.
181. Bjorklund I. S., Kays W. M. — «Trans. ASME. Ser. C», 1959, 81, N 3.
182. Boedman D. R., Schmidt J. F., Gallagher A. K. Laminarisation of Turbulent Boundary Layer as Observed from Heat Transfer and Boundary Layer Measurements in conical nozzles. — NAGA T. N. D-4788, 1968, September.
183. Boelter L. M. K. Young G., Iversen H. W. — NACA T. N 1451 (Washington), D. C., 1948, July.
184. Colebrook C. F. Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth a. rough pipe laws. — «J. Inst. Civil. Eng», 1939.
185. Coles D. — «Journ. of Fl. Mech.», 1956, v. 1, p. 191.
186. Corino E. R., Brodkey R. S. A visual investigation of the wall region in turbulent flow. — «Journ. of Fluid Mech.», 1969, v. 37, N 1, pp. 1—30.
187. Covanagh J. R., Cross K. R. The graded Thermal Barrier — a New Approach for Turbine Engine Colling. — «AIAA-Paper», 1972, N 361.
188. Eckert E. R. G., Rodi Wolfgang. — «Trans. ASME. Ser. E», 1968, 35, N 4, p. 817—819.
189. Einstein H. A., Huon Li. — Division Proceedings of the Amer. Society of Civil Engineers. «Journ. Eng. Mech.», 1956, April, p. 945; 1972, 17—19, pp. 1—7.
190. Faragoli R. P., Saydah A. R. Turbulent Heat Transfer and skin friction measurements on a porous cone with air injection at high Mach number. — «AIAA Journ.», 1966, vol. 4, N 6.
191. Fried I. Finite-element analysis of time-dependent phenomena. — «AIAA Journal», 1969, v. 7, N 6, pp. 1170—1173.
192. Froy D. E., Barnes J. F. An experimental high-temperature turbine (N 126). Part I. The cooling performance of a set of extruded air-cooled turbine blades. — ARC R. a. M. 1962, N 3405.
193. Callio S., Kaplan B. Numerical solution and utilization of Greens functions. — «Int. J. Numer. Methods Eng.», 1969, 1, N 2, pp. 169—175.
194. Gazley C. — «Journ. of Aeronaut., Sciences, 1953, vol. 20, N 1.
195. Haji-Sheikh, Sparrow E. M. The floating Random Walk and its Application to Monte-Carlo Solutions of Heat Equations. — «Journ. of SIAM. Applied Mathematics», 1966, vol. 14.
196. Halls G. A. Air cooling of turbine blades and vanes. AGAR Dograph 120, Supersonic turbojet propulsion system a. components. — «E. Journ. Chavin», 1967.
197. Hartnett J. P., Birkelok R. C., Eckert E. R. C. Velocity Distribution, Temperature Distribution, Effectiveness a Heat Transfer for Air injected through a Tangential slot into a Turbulent boundary Layer. —

- «Trans. ASME. Journ. of Heat-Transfer.», 1961, vol. 83, August, pp. 293—306.
198. H a r t s e l J. E. Predicting of Effects of Mass-Transfer Colling on the Blade-Rew Efficiency of Turbine Airfolis. — «AIAA Paper», 1972, 17—19, pp. 1—7.
 199. K. H e b b o r S h e s h a g i r i, P a r a n j p e P. A. — «AIAA Journ.», 1969, vol. 7, N 4.
 200. H i g g i n s R. W., P a p p a s C. C. An experimental investigation of the effect of surface heating on boundary layer transition on a flat plate in supersonic flow. — NACA T. N., 1951, N 2351.
 201. H o d g e R. I. A turbine nozzle cascade for cooling studies. Part 1, ARCCP Nos. 492, 493, 1958.
 202. H o p k i n s R. A., N e r e m R. M. — «AIAA Journ.», 1968, N 10.
 203. K a t a y a m a K o z o, S a i t o A k i o. Numerical methods in transient heat conduction. 2-nd Rept. Methods using a digital computer. — «Bull. ASME», 1969, 12, N 52, pp. 857—864.
 204. K a v a s n a y L. S., K o m o d a H., V a s u e d v a B. R. Proc. Heat Transfer a. Fluid Mech. Inst., Stanford Univ. Press., 1962, p. 1.
 205. K a y a l a r L. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über den Einfluss des Turbulenzgrads auf den Wärmeübergang in der Umgebung des Stanpunkts eines Kreiszyinders. — «Forschung in Ingenieurwesen», 1969, vol. 35, S. 157—167.
 206. K a y e J., E l g a r E. C. Modes of Adiabatic and Diabatic Fluid Flow in an Annulus with an Jnner Rotating Cylinder. — «Trans. ASME», 1958, vol. 80, N 3, p. 753.
 207. K e s t i n J., M a e d e r P. F., S o g i n N. H. The influence of turbulence on the transfer of heat to cylinders near the stagnation point. LAMP 12, 1961.
 208. K i m H. T., K l i n e S. J., R e y n o l d s W. S. An Experimental Study of Turbulence Production near a Smooth Wall in a Turbulent Boundary Layer with zero Pressure Gradient. — Rep. M. D. 20, Dept. of Engineering Stanford Univ., Calif., 1968.
 209. K l e b a n o f f P. S. Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient. — «NACA Report», 1955, N 1247.
 210. K l i n e S. J., R u n d s t a d l e r P. W. Some Preliminaire Results of Visual Studies of the Flow Mod. of the Wall Lauers of the Turbul. Bound. Layer. — «Trans. ASME. Ser. E, 1959, N 2, S. 166—170.
 211. K l i n e S. J., R a y n o l d s W. C., S h r a u b F. A., R u n d s t a d l e r P. W. The strukture of turbulent boundary layers. — «Journ. of Fluid Mech.», 1962, 30, pt. 4, pp. 741—773.
 212. K ö h n e H. Numerische Verfahren zur Berechnung instationärer Temperaturfelder unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Stoffgrössen. — «Wärme», 1969, 75, N 4.
 213. L a n d e r R. D., F i s h R. W., S u o M. The external Heat Transfer Distribution on film cooled Turbine Vanes. — «AIAA Paper», 1972, N 72—9, pp. 1—10.
 214. L a u f e r J. The Stucture of Turbulence in fully Developed Pipe Flow. «NACA Report», 1174, 1954.
 215. L a u n d e r B. E., J o n e s W. P. On the prediction of laminarization. — ARC CP, N 1036, 1968.
 216. L i g h t h i l l M. I. Theoretical considerations of free convection in tubes. — «Quart. Journ. Mech. and Applied Math.», 1953, vol. 6, pt. 4.
 217. L o b b R., W i n k l e r E. J., P e r s h. Experimental Investigation of the Turbulent Boundary Layer in Hypersonic Flow. — «Journ. Aeron. Science», 1956, N 1.
 218. L o C h i n g — F a n g. Numerical solutions of the insteady heat equation. — «AIAA Journal», 1969, 7, N 5.
 219. M e t z g e r D a r r y l E., F l e t c h e r D a r r e l. — «Journ. Aircraft», 1971, 8, N 1, pp. 33—38.
 220. M i l e s J. B., K i m J. H. Evolution Coles Turbulent Compressible Boundary Layer Theory. — «AIAA Journ.», 1968, 6, N 6.

221. Millsaps K., Pohlhausen K. — «Journ. Aeronaut. Sciences», 1952, 19, N 2.
222. Nery R. Nina Morio. — «Tecnica» (Port), 1971, 34, N 412, pp. 73—75.
223. Nunner W. «Z. Ver. Deut. Ing. Forschungsch», 1956, vol. 455.
224. Pappas C. C., Okuno A. F. The relation between skin-friction and heat transfer for compressible turbulent boundary layer with gas injection. — «NACA TN», 1965, D 2857.
225. Paschakis V. Combined Geometric and Network Analog Computer for Transient Heat Flow. — «Journ. of Heat Transfer, Trans. ASME. Ser. C», 1959, vol. 81, May.
226. Patancar S. V., Spalding D. B. Heat and Mass Transfer in Boundary Layers. — «Morgan—Grampian», London, 1967, p. 128.
227. Patel V. C., Head M. R. Reversion of turbulent to laminar flow. — ARC 29859, 1968, January.
228. Pletcher R. H. — «AIAA Journ.», 1969, N 2.
229. Prust H. W. An analitical study of the effect of coolant Flow variables on the kinetic energy output of a cooled Turbine Blade Row. — «AIAA Paper», 1972, N 12, pp. 1—12.
230. Reeman I., Buswell K. An experimental single-stage air cooled turbine — «Aircraft Eng.», 1953, N 294.
231. Rubesin W. W., Jonson H. A. Los Angeles Fluid Mech. and Heat Transfer Inst., 1948, June.
232. Runge C. Über eine Methode die partielle Differential gleichung U-const numerisch zu integrieren — «Zeitschrift für Mathematik und Physik.», Bg. 56, 1908.
233. Rotta J. Experimenteller Beitrag zur Entstehung turbulenter Strömung im Rohr. — «Ing. Arch.», 1956, 24, S. 258—281.
234. Scholz H. Z. Z. f. Flügwissensch., 1959, N 2, 33—39.
235. Schubauer G. B., Skromstad H. K. Laminar boundary Loyer oscillations a stability of laminar flow. — «Journ. of Res. Nat. Bureau of Stand.», 1947, 38, p. 281.
236. Seban R. Heat Transfer and Effectiveness for a Turbulent Boundary Layer with Tangential Fluid Injection. — «Trans. ASME. Ser. C», 1960, vol. 82, N 4.
237. Seif A. «NACA TN», 1954, N 3284.
238. Senoo J. The boundary layer on the end wall of turbine nozzle cascade.— «ASME Paper A», 172, 1968.
239. Sherwood T. K., Smith M., Folins P. E. — «Chem. Eng. Sciences», 1968, 23, N 10, pp. 225—236.
240. Sommer S. C., Short B. J. — «Journ. Aeronaut. Sciences», 1956, 23, N 6.
241. Spalding D. B., Chi S. W. The Drag of a compressible turbulent boundary layer on a smooth flat plate with and without heat transfer. — «Journ. of fluid Mechanics», 1964, vol. 18, p. 1, p. 117.
242. Sparrow E. M. Temperature Distribution in an Internally Cooled Heat-Generating Solid. — «Journ. of Heat-Transfer, Trans. of ASME», 1960, vol. 82, p. 389—392.
243. Stewartson K. Correlated incompressible and compressible boundary layers. — «Proc. Soc.», A200, 1949, N 1060, pp. 91—92.
244. Szarneski K. R., Jackson M. W., Monta W. J. Confer. on Supersonic Transport Flasibility studies a supporting Research, «TM X—305, NASA», 1963, dec.
245. Tachibana F., Fukui S. Japan Soc. Mech. Engrs, 1964, Bull. 7, N 26; a. 1960, Bull. 3, N 9.
246. Tucker M. NACA Techn. Note N 2337, 1951.
247. Turner A. B. The measurement of heat transfer in convection-cooled turbine blades. School of Appl. Sciences, Unvers. of Succex, Mech. Rep. 69/ME/15, 1969.
248. Turner A. B. Local Heat Transfer Measurements on a Gas Turbine Blade.— «Journ. of Mech. Eng. Scie.», 1971, vol. 13, N 1.

249. U b e r o i M. S. Effect of Wind-Tunnel Contraction on Freestream Turbulence. — JAS, 1958, vol. 23, N 8.
250. U e d a T., H a r a d a J. Experiment of heat transfer on surfaces with transverse Fins for flow direction. — Bulletin of ISME, 1964, v. 7, N 28, p. 759—768.
251. V a n D r i e s t E. R. The Turbulent Boundary Layer for Compressible Fluids on a Flat Plate with Heat Transfer. — JAS, 1951, 18, N 3.
252. V a n D r i e s t E. R., B a i s o n C h r i s t o p h e r. Experiments of boundary layer transition of supersonic Speeds. — «Journ. Aeron. Sciences, 1957, vol. 24, N 12, pp. 885—899.
253. W i l s o n D. C. and P o p e J. A. Convective heat transfer to gasturbine blade surface. — «Proc. of the Inst. of Mech. Eng.», 1954, v. 168, N 36.
254. W o d d r i d g e C. E., M u z z y R. J. Boundary layer turbulence measurements with mass addition and combustion. — «AIAA Journ.», 1966, 4, N 11.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные условные обозначения	7
Глава I. Основные уравнения теории теплообмена	9
1. Некоторые определения и основные понятия	—
2. Основная система дифференциальных уравнений динамики реального газа	15
3. Уравнения плоского пограничного слоя	20
4. Вывод основных интегральных соотношений пограничного слоя	28
5. Представление интегральных соотношений пограничного слоя в переменных Дородницына	33
Глава II. Элементы теории подобия	39
6. Основные представления	—
7. Условия подобия	40
8. Основы моделирования	45
9. Физические аналогии	46
10. Анализ размерностей	47
Глава III. Основные закономерности ламинарного обтекания поверхностей	50
11. Расчет ламинарного пограничного слоя, образующегося при обтекании пластины потоком больших скоростей	—
12. Расчет динамического ламинарного пограничного слоя при течении с продольным градиентом давления	58
13. Расчет теплового ламинарного пограничного слоя при течении с продольным градиентом давления	62
14. Расчет ламинарного пограничного слоя на вращающемся диске	70
15. Ламинарное движение вязкой жидкости в гладкой цилиндрической трубе	75
Глава IV. Основные закономерности турбулентного обтекания поверхностей	82
16. Понятие турбулентности	—
17. Возникновение перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое	87
18. Основные уравнения развитого турбулентного движения	101
19. Современные представления о механизме турбулентного обмена	108
20. Сопротивление и теплообмен при турбулентном обтекании пластины потоком сжимаемого газа	118
21. Расчет турбулентного пограничного слоя при обтекании с продольным градиентом давления	133

	22. Турбулентное движение вязкой жидкости в гладкой цилиндрической трубе	143
	23. Турбулентное течение вдоль шероховатых труб и пластин	149
	24. Теплообмен на вращающемся диске при турбулентном режиме течения	155
	25. Расчет турбулентного пограничного слоя при наличии поперечного потока вещества	160
Глава	V. Конвективный теплообмен при движении однофазных сред в проточной части лопаточных машин	166
	26. Теплоотдача в решетках профилей	—
	27. Расчет локальных значений коэффициентов теплоотдачи по контуру лопатки	179
	28. Влияние сжимаемости и температурного фактора на локальную теплоотдачу профиля в турбинной решетке	184
	29. Влияние турбулентности и вращения на локальную теплоотдачу профиля в турбинной решетке	189
	30. Теплообмен на торцовых стенках межпрофильных каналов	194
	31. Теплообмен в полостях двухстенных корпусов	198
	32. Теплообмен в кольцевых зазорах	206
	33. Теплообмен в лабиринтовых уплотнениях	215
Глава	VI. Теплообмен при движении газожидкостных потоков в проточной части турбин	223
	34. Особенности теплообмена при движении газожидкостных потоков	—
	35. Некоторые особенности теплообмена в жидких пленках	225
	36. Теплоотдача в переходном режиме	233
	37. Теплообмен при течении влажнопаровых потоков в межцилиндрических пространствах корпусов паровых турбин	237
Глава	VII. Специальные вопросы конвективного теплообмена в охлаждаемых турбинных лопатках	242
	38. Основные схемы охлаждения лопаток газовых турбин	—
	39. Оценка эффективности охлаждения и выбор теплоносителя	247
	40. Внешнее охлаждение	252
	41. Заградительное охлаждение	257
	42. Особенности теплообмена в охлаждающих каналах	263
	43. Теплообмен в дефлекторной лопатке	266
	44. Термосифонное охлаждение	273
Глава	VIII. Расчет температурных полей в элементах турбин	281
	45. Постановка задачи и выбор метода решения	—
	46. Численные методы расчета полей температур с использованием ЭВМ	288
	47. Численный метод расчета температурного состояния лопатки с внутренним охлаждением	295
	48. Численный метод расчета температурного состояния лопатки, охлаждаемой через хвостовик	302
	49. Расчет температурных полей с помощью моделирующих устройств	308
	50. Решение задач теплопроводности вероятностными методами	313
	Список литературы	322

Лариса Михайловна Зысина-Моложен
Леонид Владимирович Зысин
Мая Павловна Поляк

ТЕПЛОБМЕН В ТУРБОМАШИНАХ

Редактор издательства В. М. Рошаль
Переплет художника И. М. Сенского
Технический редактор А. А. Бардина
Корректоры Л. Ф. Борисова и Н. К. Кротова

Сдано в производство 14/III 1974 г.
Подписано к печати 25/VII 1974 г.
М-07846 Формат бумаги 60×90¹/₁₆.
Бумага типографская № 2.
Печ. л 21. Уч.-изд. л 20,8. Тираж 3000 экз.
Зак. № 839 Цена 2 р. 28 к.

Ленинградское отделение
издательства «МАШИНОСТРОЕНИЕ»
191065, Ленинград, ул. Дзержинского, 10
Ленинградская типография № 6 Союзполи-
графпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР
по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10



Рр.2Бк.



МАШИНОСТРОЕНИЕ