

**Zur Berechnung
des beiderseits eingemauerten Trägers
unter besonderer Berücksichtigung
der Längskraft**

Von

Fukuhei Takabeya

japanischer a. o. Professor und Dr.-Ing.
an der Kaiserl. Kyushu-Universität, Japan

Mit 28 Textabbildungen
und 2 Formeltafeln



Berlin
Verlag von Julius Springer
1924

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1924 by Julius Springer in Berlin.

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1924

ISBN-13: 978-3-642-47303-6

e-ISBN-13: 978-3-642-47748-5

DOI: 10.1007/978-3-642-47748-5

Vorwort.

Als mich die Japanische Regierung zur Vollendung meiner Studien in den Ingenieurwissenschaften, besonders auf dem Gebiete der Festigkeitslehre, nach Deutschland schickte, faßte ich den Entschluß, meine in Japan begonnene Arbeit über den beiderseits eingemauerten Balken als Resultat meines Aufenthaltes in Deutschland in Buchform erscheinen zu lassen.

Den Anlaß zu diesem Thema gab mir die Arbeit meines hochverehrten Lehrers und Landsmannes Dr. K. Hayashi, der in einem Kapitel des Trägers auf elastischer Unterlage kurz auf dieses Problem aufmerksam macht.

In den bekannten Lehrbüchern der Statik findet man meist die Untersuchung des beiderseits eingespannten Trägers, wobei stillschweigend feste Einspannung vorausgesetzt wird. Bei einer solchen Befestigungsart müssen infolge der Durchbiegung des Trägers Längskräfte entstehen; diese werden jedoch bei statischen Berechnungen gewöhnlich nicht berücksichtigt. Da aber unserer Ansicht nach in der Praxis feste Einspannungen wegen der Nachgiebigkeit des Einmauerungsmaterials kaum denkbar sind, so treten neben den Längskräften auch Drehmomente auf. Bei einer exakten Untersuchung dürfen diese Kräfte nicht außer acht gelassen werden, da sie unter Umständen einen erheblichen Wert annehmen können.

Im folgenden ist eine Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe der Elastizitätstheorie versucht. Erschöpfend ist aber die Aufgabe nicht gelöst; vorerst ist die Untersuchung auf einen Spezialfall beschränkt, nämlich auf den, daß der Träger durch eine Einzelast in der Mitte belastet ist; nur kurz ist der Fall behandelt, daß auf dem Träger eine gleichmäßig über die Spannweite verteilte Last ruht.

Zum Schluß sei es mir gestattet, auch an dieser Stelle meinen besonderen Dank Herrn S. Senga auszusprechen, der

meine wissenschaftlichen Bestrebungen stets förderte, sowie Herrn Dr. K. Hayashi, durch dessen freundliche Winke, namentlich in den Bemerkungen zum fünften Kapitel, mir die Herausgabe dieser Arbeit bedeutend erleichtert wurde.

Habe ich mit meiner Arbeit einen kleinen Beitrag zu dem schwierigen Problem über die Einspannung geliefert und vielleicht einige meiner Fachgenossen zu weiteren Untersuchungen angeregt, so erfüllt das Büchlein vollkommen seinen Zweck.

Berlin-Friedenau, im Sommer 1923.

F. Takabeya.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Entwicklung der allgemeinen Gleichungen	3
§ 1. Vorbemerkungen	3
§ 2. Gleichung der elastischen Linie	4
§ 3. Beziehungen zwischen den äußeren Kräften P , X , M_a und den Verschiebungen α , β	6
§ 4. Sonderfälle	10
§ 5. Bemerkungen	13
II. Der Träger ist vollkommen eingespannt und trägt nur eine Einzellast in der Mitte	23
§ 6. Aufstellung der Gleichungen	23
§ 7. Ergänzungsbeispiel	27
III. Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig	29
§ 8. Vorbemerkungen	29
§ 9. Der Träger ist beiderseits mit wagerecht unverschieb- baren Gelenken versehen	30
§ 10. Die Mauer ist gegen wagerechten Zug vollkommen fest, aber gegen Verdrehung in gewissem Grade nach- giebig	34
§ 11. Die Mauer ist gegen Verdrehung des Trägerendes voll- kommen unnachgiebig, gestattet aber eine gewisse wagerechte Verschiebung desselben	36
§ 12. Der Träger ist beiderseits gelenkartig befestigt; eines der Gelenke ist in gewissem Grade wagerecht ver- schiebbar	38
§ 13. Die Mauer ist sowohl für wagerechte Verschiebung als für Verdrehung des Trägers in gewissem Grade nachgiebig	39
§ 14. Zusammenfassung der Rechnungsergebnisse	40
§ 15. Nachbemerkungen	43
IV. Der Träger ist gleichmäßig beschwert	43
§ 16. Allgemeine Gleichungen	43
§ 17. Der Träger ist vollkommen eingespannt	45
§ 18. Eines der Einmauerungsenden ist wagerecht verschiebbar	47
Formelübersicht	als Anhang

Einleitung.

Bei der statischen Untersuchung eines eingemauerten Trägers setzt man ein vollkommen unnachgiebiges Einmauerungsmaterial voraus; die elastische Linie des Trägers besitzt danach an der Einmauerungsstelle eine unveränderliche Tangente.

Die Längskraft, durch die der Träger unter Umständen beansprucht werden kann, wird dabei gewöhnlich vollständig vernachlässigt. Es ist also unter einem eingemauerten Träger etwa ein solcher von der in Abb. 1 angedeuteten Konstruktion zu verstehen, bei der eines der Trägerenden in wagerechter Richtung verschiebbar ist. Dieses Trägerende möge als „verschiebbar eingemauert“ bezeichnet werden.



Abb. 1.

In der Praxis kommt bei derartigen Trägern gewöhnlich keine wagerechte Verschiebung in Frage, man sucht sogar eine solche durch konstruktive Ausbildung zu vermeiden. Erfährt der Träger durch lotrechte Belastung eine Durchbiegung, so existiert keine Nulllinie im Träger, deren Länge nach der Formänderung unveränderlich bleibt. Der Träger wird also gleichzeitig mit dem Biegemoment auch noch durch eine Längskraft beansprucht. Sie ist, wie einige Untersuchungen¹⁾ darüber zeigen, eine Zugkraft, die in der Regel auf die Beanspruchung des Trägers eine günstige Wirkung ausübt, indem sie eine Verminderung des Feldmomentes hervorruft.

Die statische Untersuchung des Trägers unter dieser Bedingung ist also eine in der Technik ziemlich häufig vor-

¹⁾ Bleich, F.: Die Theorie der nachgiebigen Tragsysteme. Der Eisenbau. 1916, S. 185. Hayashi, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin 1921, S. 197.

kommende Aufgabe; trotzdem scheint diese Frage bisher in der Literatur noch nicht behandelt worden zu sein. Im folgenden soll versucht werden, mit Hilfe der Elastizitätstheorie eine Lösung dieser Aufgabe zu finden; und zwar wollen wir, von der Voraussetzung gewisser Verschiebungen des Trägers an der Einmauerungsstelle ausgehend, den wirklich herrschenden Gleichgewichtszustand, unter dem die Längskraft zur Wirkung gelangt, bestimmen.

I. Entwicklung der allgemeinen Gleichungen.

§ 1. Vorbemerkungen.

Um die allgemeine Gleichung zu entwickeln, beginnen wir mit der Untersuchung eines frei aufliegenden Trägers.

Der gerade Träger AB sei an beiden Enden unterstützt (Abb. 2). Eine der Stützen, z. B. die bei A sei wagerecht verschiebbar; eine derartige wagerechte Verschiebung wird in der Festigkeitslehre gewöhnlich nicht berücksichtigt, wenigstens nicht solange es sich um einen geraden Träger handelt. Doch wollen wir hierauf hindeuten, denn es wird die wagerechte Verschiebung des Stützpunktes A wegen der elastischen Formänderung in der Folge eine wichtige Rolle spielen.

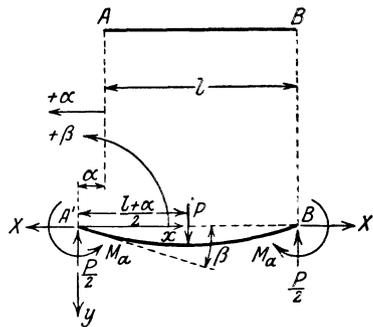


Abb. 2.

Als äußere Kräfte seien eine Einzellast P in der Mitte, eine wagerechte Kraft X am Ende A und ein Moment M_a an derselben Stelle angenommen. Der Träger nehme infolge dieser Kräfte die neue, in Abb. 2 dargestellte Gleichgewichtsform $A'B$ an; das Ende B bleibt dabei unbeweglich.

Es werde am linken Ende X nach links, M_a gegen den Sinn des Uhrzeigers positiv gerechnet. Die wagerechte Verschiebung α sowie die Verdrehung β des Trägersendes A soll in der positiven Richtung von bzw. X , M_a positiv gerechnet werden.

§ 2. Gleichung der elastischen Linie.

Erfährt ein Stabquerschnitt eine Biegung durch ein Moment M , und nimmt die ursprünglich gerade Stabachse eine krumme Linie mit dem Krümmungshalbmesser ϱ an, so gilt die bekannte Formel

$$\varrho = \frac{EJ}{M}.$$

Kommt eine Beanspruchung durch die Zugkraft N hinzu, so bleibt diese Grundgleichung bestehen, nur ist statt des Elastizitätsmaßes E der Wert

$$(1) \quad K = E + \sigma_z = E + \frac{N}{F}$$

einzuführen¹⁾. F bedeutet die Querschnittsfläche des Stabes. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet daher

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{\left[E + \frac{N}{F} \right] J} = - \frac{M}{KJ},$$

wenn die Ordinaten y lotrecht nach unten positiv gerechnet werden. Da bei den gebräuchlichen Spannungswerten der Wert $\sigma_z = \frac{N}{F}$ gegen E zu vernachlässigen ist, so darf man an Stelle von K in der Praxis ohne weiteres E setzen. Wählt man den Punkt A' als Koordinatennullpunkt, so ist

$$(2) \quad M = \frac{P}{2}x - M_a - Xy.$$

Somit nimmt unsere Differentialgleichung die lineare Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{X}{KJ}y + \frac{1}{KJ} \left[\frac{P}{2}x - M_a \right] = 0$$

an. Im allgemeinen ist σ_z und somit die Größe K mit X veränderlich. Da aber im vorliegenden Fall eine geringe Durchbiegung in Frage kommt, so setzen wir die Längskraft N und daher auch σ_z über die ganze Trägerlänge als gleichbleibend

¹⁾ Tolle, M.: Die steife Kettenlinie. Z. V. d. I. 1897, S. 855—856.

voraus. Die Koeffizienten der Gleichung sind mithin konstant, und das allgemeine Integral lautet:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = C_1 e^{\frac{2\omega x}{l+\alpha}} + C_2 e^{-\frac{2\omega x}{l+\alpha}} + \frac{P}{2X} x - \frac{M_a}{X}, \\ \text{wobei} \\ \omega = \frac{l+\alpha}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}. \end{array} \right.$$

Die Größe ω ist eine reelle oder imaginäre natürliche Zahl, je nachdem X positiv oder negativ ist.

Die zwei Integrationsfestwerte C_1, C_2 lassen sich folgendermaßen bestimmen: da am Ende A' , also für $x=0$ y verschwinden muß, ist

$$M_a = X [C_1 + C_2].$$

Der Symmetrie wegen muß für $x = \frac{l+\alpha}{2}$ $\frac{dy}{dx} = 0$ sein; dies liefert

$$C_1 e^{\omega} - C_2 e^{-\omega} + \frac{P(l+\alpha)}{4\omega X} = 0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man:

$$C_1 = \frac{1}{2X \mathfrak{Cof} \omega} \left[M_a (\mathfrak{Cof} \omega - \mathfrak{Sin} \omega) - \frac{P(l+\alpha)}{4\omega} \right],$$

$$C_2 = \frac{1}{2X \mathfrak{Cof} \omega} \left[M_a (\mathfrak{Cof} \omega + \mathfrak{Sin} \omega) + \frac{P(l+\alpha)}{4\omega} \right].$$

Es folgt:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P(l+\alpha)}{4\omega X \mathfrak{Cof} \omega} \left[\frac{2\omega x}{l+\alpha} \mathfrak{Cof} \omega - \mathfrak{Sin} \left(\frac{2\omega x}{l+\alpha} \right) \right] \\ \quad + \frac{M_a}{X \mathfrak{Cof} \omega} \left[\mathfrak{Cof} \left(\frac{2\omega x}{l+\alpha} - 1 \right) \omega - \mathfrak{Cof} \omega \right]. \end{array} \right.$$

Die zweite Ableitung der Funktion lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_a}{KJ} \frac{\mathfrak{Cof} \left(\frac{2\omega x}{l+\alpha} - 1 \right) \omega}{\mathfrak{Cof} \omega} - \frac{P\omega}{X(l+\alpha)} \frac{\mathfrak{Sin} \left(\frac{2\omega x}{l+\alpha} \right)}{\mathfrak{Cof} \omega}.$$

In bezug auf die ursprüngliche Differentialgleichung erhält man somit

$$(5) \quad M = \frac{P(l + \alpha) \operatorname{Sin} \left(\frac{2x\omega}{l + \alpha} \right)}{4\omega \operatorname{Cos} \omega} - \frac{M_a \operatorname{Cos} \left(\frac{2x}{l + \alpha} - 1 \right) \omega}{\operatorname{Cos} \omega}.$$

§ 3. Beziehungen zwischen den äußeren Kräften P, X, M_a und den Verschiebungen α, β .

Die Verschiebungen α, β rühren von der elastischen Beschaffenheit des Trägers her. Sie können also durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen festgestellt werden. Das Prinzip bezieht sich auf eine unendlich kleine Verrückung des Körpers. Wir setzen aber voraus, daß das Prinzip noch auf unsere Aufgabe anwendbar ist, da die Verrückungen α, β im Vergleich zu den Abmessungen des Trägers als kleine Größen aufgefaßt werden können. Es gelten dann zwischen α, β und den äußeren Kräften die bekannten Arbeitsgleichungen von der Form

$$(6)^1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\frac{l+\alpha}{2}} \left[\frac{M M_1}{K J} + \frac{N N_1}{K F} \right] dx = \alpha, \\ \int_0^{\frac{l+\alpha}{2}} \left[\frac{M M_2}{K J} + \frac{N N_2}{K F} \right] dx = \beta. \end{array} \right.$$

P, X, M_a stecken in M, N . Die virtuellen Größen M_1, N_1 und M_2, N_2 sind aus den in Abb. 3a, 3b angegebenen Belastungszuständen zu ersehen.

Wir befinden uns jetzt vor der großen Schwierigkeit, welche Trägerform wir für die virtuellen Belastungen annehmen sollen.

Bei der statischen Berechnung von statisch unbestimmten Konstruktionen, wie Rahmen, Gewölben, die man mit Hilfe der

¹⁾ Gl. (6a) s. S. 13.

Arbeitsgleichungen auszuführen pflegt, nimmt man für virtuelle Belastungen einen bestimmten Hauptträger an. Diesen denkt man sich in der Regel unabhängig von den äußeren Kräften also unabhängig von der Form der Konstruktion nach der

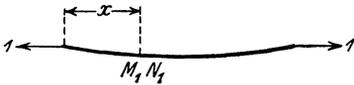


Abb. 3a.

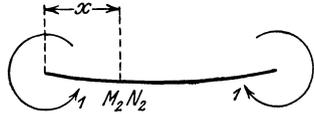


Abb. 3b.

Deformation. Im vorliegenden Fall aber bedingt die eingetretene Durchbiegung des Trägers die Wirkung der äußeren Kraft X wesentlich oder unter Umständen gar ausschließlich. Würde man daher als Trägerform für virtuelle Belastungen entweder die ursprüngliche, gerade oder die deformierte, wenig gekrümmte annehmen, so würde man erkennen, daß die resultierenden virtuellen Größen in beiden Fällen nicht völlig übereinstimmen.

Bei der letzteren Annahme beträgt $M_1 = y$, während es bei der ersteren verschwindet.

Damit wir dennoch die angegebenen Arbeitsgleichungen in Anwendung bringen können, wollen wir uns in der Folge eine praktische Annäherung gestatten: Wir stellen uns für die virtuellen Belastungen einen von vornherein gekrümmten Träger vor, dessen Achse als mittlere der soeben erwähnten zwei Trägerformen entstanden sein möge; seine Spannweite sei $l + \alpha$, die Ordinaten seien halb so groß wie die wirklich auftretenden Durchbiegungen des in Rede stehenden Trägers (Abb. 4).

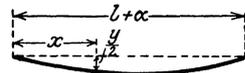


Abb. 4.

Von der Zulässigkeit unserer Annahme wenigstens für praktische Zwecke werden wir uns in § 5 überzeugen.

Es ist nun

$$(7) \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{y}{2}, & N_1 = 1, \\ M_2 = -1, & N_2 = 0. \end{cases}$$

Da $N=X$, nimmt Gl. (6) die Gestalt

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\frac{l+\alpha}{2}} \left[\frac{M}{KJ} y - \frac{2X}{KF} \right] dx = -\alpha \\ \int_0^{\frac{l+\alpha}{2}} \frac{M}{KJ} dx = -\beta \end{array} \right.$$

an.

Führt man den Ausdruck für M aus Gl. (5) ein und wertet die Integrale aus¹⁾, so hat man

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{P^2}{16X^2 \mathfrak{Cof}^2 \omega} \left[\frac{3 \mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega} - 2 - \mathfrak{Cof} 2\omega \right] \\ \quad + \frac{PM_a}{X^2(l+\alpha) \mathfrak{Cof} \omega} \left[\mathfrak{Cof} \omega - 1 - \frac{\omega}{2} \mathfrak{I}g \omega \right] \\ \quad + \frac{M_a^2}{4XKJ \mathfrak{Cof}^2 \omega} \left[1 - \frac{\mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega} \right] + \frac{X}{KF} - \frac{\alpha}{l+\alpha} = 0 \\ M_a = \frac{2\omega KJ}{(l+\alpha) \mathfrak{I}g \omega} \left[\beta + \frac{P}{2X} \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2} \mathfrak{I}g \omega \right]. \end{array} \right.$$

¹⁾ Wir erinnern hierbei an die Formeln:

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{Sin} kx dx &= \frac{\mathfrak{Cof} kx}{k} + C & \int \mathfrak{Cof} k \left(x - \frac{l}{2} \right) dx &= \frac{\mathfrak{Sin} k \left(x - \frac{l}{2} \right)}{k} + C \\ \int \mathfrak{Sin}^2 kx dx &= \frac{\mathfrak{Sin} 2kx}{4k} - \frac{x}{2} + C \\ \int \mathfrak{Cof}^2 k \left(x - \frac{l}{2} \right) dx &= \frac{\mathfrak{Sin} k(2x-l)}{4k} + \frac{x}{2} + C \\ \int \mathfrak{Sin} kx \mathfrak{Cof} k \left(x - \frac{l}{2} \right) dx &= \frac{\mathfrak{Cof} k \left(2x - \frac{l}{2} \right)}{4k} + \frac{x}{2} \mathfrak{Sin} \frac{kl}{2} + C \\ \int x \mathfrak{Sin} kx dx &= \frac{x \mathfrak{Cof} kx}{k} - \frac{\mathfrak{Sin} kx}{k^2} + C \\ \int x \mathfrak{Cof} k \left(x - \frac{l}{2} \right) dx &= \frac{x \mathfrak{Sin} k \left(x - \frac{l}{2} \right)}{k} - \frac{\mathfrak{Cof} k \left(x - \frac{l}{2} \right)}{k^2} + C. \end{aligned}$$

Dies sind die Gleichungen, aus denen X, M_a bei gegebenen α, β festgestellt werden können. Setzt man den Ausdruck für M_a in die erste Gleichung ein und für X den aus Gl. (3) gewonnenen Wert

$$X = \frac{4\omega^2 KJ}{(l + \alpha)^2},$$

so folgt

$$(8a) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}} - \frac{8\beta KJ [\mathfrak{Sin} \omega - \omega]}{P(l + \alpha)^2 \omega^5 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}} \\ & + \frac{32\beta^2 K^2 J^2 [\mathfrak{Sin} 2\omega - 2\omega]}{P^2 (l + \alpha)^4 \omega^3 \mathfrak{Sin}^2 \omega} \\ & - \frac{1024 K^2 J^3}{P^2 (l + \alpha)^6 F} + \frac{256\alpha K^2 J^2}{P^2 (l + \alpha)^5 \omega^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Mit dem Wert M_a aus Gl. (8) nimmt Gl. (4) weiter die Form

$$(4a) \left\{ \begin{aligned} & y = \frac{P}{2X} \left[x - \frac{(l + \alpha) \mathfrak{Sin} \left(\frac{x\omega}{l + \alpha} \right) \mathfrak{Cof} \left(1 - \frac{2x}{l + \alpha} \right) \frac{\omega}{2}}{\omega \mathfrak{Cof} \frac{\omega}{2}} \right] \\ & + \frac{\beta(l + \alpha) \mathfrak{Sin} \left(\frac{x\omega}{l + \alpha} \right) \mathfrak{Sin} (x - l - \alpha) \frac{\omega}{l + \alpha}}{\omega \mathfrak{Sin} \omega} \end{aligned} \right.$$

an. Setzt man darin $x = \frac{l + \alpha}{2}$, so erhält man

$$(9) \quad y_{\text{Mitte}} = \frac{P(l + \alpha)}{2\omega X} \left[\frac{\omega}{2} - \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2} \right] - \frac{\beta(l + \alpha)}{2\omega} \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2}.$$

Für M ergibt sich

$$(5a) \quad M = \frac{P(l + \alpha)}{4\omega} \frac{\mathfrak{Sin} \left(\frac{2\omega x}{l + \alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{\mathfrak{Cof} \frac{\omega}{2}} - \frac{2\beta\omega KJ \mathfrak{Cof} \left(\omega - \frac{2x\omega}{l + \alpha} \right)}{(l + \alpha) \mathfrak{Sin} \omega}$$

Schließlich, da $Q = \frac{dM}{dx}$, gilt

$$(10) \quad Q = \frac{P \operatorname{Coj} \left(\frac{2\omega x}{l+\alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{2 \operatorname{Coj} \frac{\omega}{2}} + \frac{\beta X \operatorname{Sin} \left(\omega - \frac{2x\omega}{l+\alpha} \right)}{\operatorname{Sin} \omega}.$$

§ 4. Sonderfälle.

Es sei $M_a = 0$, $X = 0$. Dem Fall entspricht der sogenannte

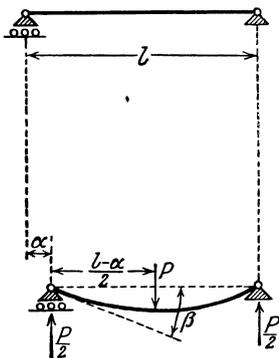


Abb. 5.

beiderseits unterstützte Träger mit einer Einzellast in der Mitte (Abb. 5). Man setzt dabei stillschweigend voraus, daß die Stützgelenke wagerecht vollkommen verschiebbar sind, und redet nicht von einer Längskraft, welche, bei unvollkommen verschiebbaren Stützgelenken, infolge der, wenn auch sehr kleinen, Längenänderung des Trägers entstehen könnte. G. (8) liefert für die Verschiebungen am linken Ende:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{P^2 l^5}{960 E^2 J^2} \left[1 - \frac{\alpha_0}{l} \right]^5 \sim \frac{P^2 l^5}{960 E^2 J^2} \\ \beta_0 = \frac{P l^2}{16 E J} \left[1 - \frac{\alpha_0}{l} \right]^2 \sim \frac{P l^2}{16 E J}. \end{cases}$$

Die für diesen Fall erfolgenden Verschiebungen α_0 , β_0 gehen aus Abb. 5 hervor. Ferner erhält man aus Gln. (4), (5), indem man darin $\alpha = -\alpha_0$ setzt:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \lim_{\substack{X=0 \\ M_a=0 \\ \alpha=-\alpha_0}} \left[\frac{P(l+\alpha)}{4\omega X \operatorname{Coj} \omega} \left(\frac{2\omega x}{l+\alpha} \operatorname{Coj} \omega - \operatorname{Sin} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_a}{X \operatorname{Coj} \omega} \left(\operatorname{Coj} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega \right) - \operatorname{Coj} \omega \right) \right] \\ &= \frac{P}{16 E J} \left[x l^2 \left(1 - \frac{P^2 l^4}{960 E^2 J^2} \right)^2 - \frac{4}{3} x^3 \right], \end{aligned} \right.$$

$$M = \lim_{\substack{X=0 \\ M_a=0 \\ \alpha=-\alpha_0}} \left[\frac{P(l+\alpha)}{4\omega} \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{2x\omega}{l+\alpha}\right)}{\operatorname{Cos}\omega} - \frac{M_a \operatorname{Cos}\left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega\right)}{\operatorname{Cos}\omega} \right] = \frac{P}{2} x.$$

Die eben gefundenen Formeln für y und M finden sich bei Vernachlässigung des Gliedes $P^2 l^4 / 960 E^2 J^2$ in zahlreichen Lehrbüchern.

Weiter folgt

$$(13) \quad \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \frac{Pl^3}{48 EJ} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{960 E^2 J^2} \right]^3, \\ M_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{4} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{960 E^2 J^2} \right]. \end{cases}$$

An zweiter Stelle sei $\beta = 0$, $X = 0$. Beschränkt man sich auf eine einzige äußere Kraft P , so liegt der sogenannte beiderseits eingespannte Träger vor, bei dessen Berechnung man auf einer Seite ein wagrecht vollkommen verschiebares Einmauerungsende annimmt, ohne darauf besonders aufmerksam zu machen [Abb. 6]. Man hat danach für α , M_a

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_a \sim \frac{P^2 l^5}{15360 E^2 J^2}, \\ M_a \sim \frac{Pl}{8}. \end{cases}$$

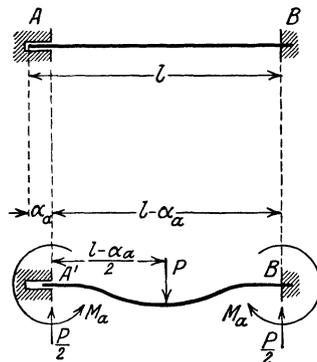


Abb. 6.

Die Verschiebung α_a findet ebenfalls nach rechts statt. Setzt man $\alpha = -\alpha_a$ in Gln. (4a) (5a), so erhält man

$$(15) \left\{ \begin{aligned} y &= \lim_{\substack{X=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=-\alpha_a}} \left[\frac{P}{2\bar{X}} \left(x \frac{(l+\alpha) \operatorname{Sin} \left(\frac{x\omega}{l+\alpha} \right) \operatorname{Cos} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{x\omega}{l+\alpha} \right)}{\omega \operatorname{Cos} \frac{\omega}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(l+\alpha) \operatorname{Sin} \left(\frac{x\omega}{l+\alpha} \right) \operatorname{Sin} \left(\frac{\omega x}{l+\alpha} - \omega \right)}{\omega \operatorname{Sin} \omega} \right] \\ &= \frac{P}{16EJ} \left[x^2 l \left(1 - \frac{P^2 l^4}{15360 E^2 J^2} \right) - \frac{4}{3} x^3 \right], \\ M &= \lim_{\substack{X=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=-\alpha_a}} \left[\frac{P(l+\alpha)}{4\omega} \frac{\operatorname{Sin} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{\operatorname{Cos} \frac{\omega}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\beta\omega KJ \operatorname{Cos} \left(\omega - \frac{2x\omega}{l+\alpha} \right)}{(l+\alpha) \operatorname{Sin} \omega} \right] \\ &= \frac{P}{2} x - \frac{Pl}{8} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{15360 E^2 J^2} \right] \end{aligned} \right.$$

und daher

$$(16) \left\{ \begin{aligned} y_{\text{Mitte}} &= \frac{Pl^3}{192EJ} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{15360 E^2 J^2} \right]^3, \\ M_{\text{Mitte}} &= \frac{Pl}{8} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{15360 E^2 J^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Als Beispiel diene ein Doppel-T-Träger NP.10 mit

$$J = 170 \text{ cm}^4; \quad F = 10,6 \text{ cm}^2;$$

$$E = 2100000 \text{ kg / cm}^2; \quad l = 400 \text{ cm};$$

$$P = 100 \text{ kg}.$$

Die Berechnung liefert:

	im Fall $X=0, \beta=0$	im Fall $X=\theta, M_a=0$
α	0,000052 cm	0,00084 cm
β	0	0,00280
y_{Mitte}	0,093371 cm	0,37348 cm
M_{Mitte}	5000,00 cm kg	10000,00 cm kg
M_a	5000,00 cm kg	0

§ 5. Bemerkungen.

Zur Prüfung der Genauigkeit der vorhergehenden Theorie wollen wir eine weitere Untersuchung folgen lassen.

Wir machen darauf aufmerksam, daß gewöhnlich nur die Formänderungen des Trägers nach Eintritt der Deformation in Rechnung gestellt werden.

Setzt man aber ganz allmählich wachsende äußere Kräfte voraus, so erleidet der Träger in jedem Stadium der äußeren Kräfte in bezug auf Verschiebung sowie Verdrehung Zuschläge, welche von den bis zum betrachteten Augenblick erfolgenden Formänderungen des Trägers herrühren. Wir erteilen jetzt den äußeren Kräften irgendeine unendlich kleine mögliche Verrückung, infolge deren N , M die Veränderungen dN , dM erfahren mögen.

Bezeichnet man mit $d\alpha$ die dadurch erzeugte wirkliche Verschiebung, so lautet die Arbeitsgleichung:

$$(6a) \quad \int_s \frac{M_1 dM}{KJ} ds + \int_s \frac{N_1 dN}{KF} ds = d\alpha.^1)$$

Mit dieser Gleichung hat sich meines Wissens zum erstenmal Hayashi befaßt.

Unsere Gleichung gestattet den in Frage stehenden Hauptträger für verschiedene Annahmen zu entwickeln.

a) Es sei AB ein frei aufliegender Träger mit der Einzelast P in der Mitte, bei dem das Ende A wagrecht verschiebbar ist [Abb. 7a].

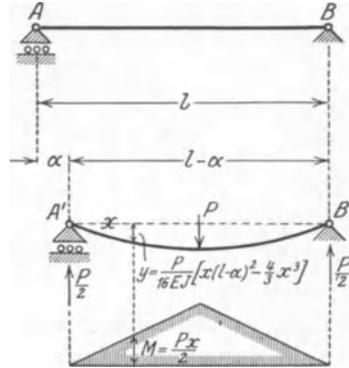


Abb. 7a.

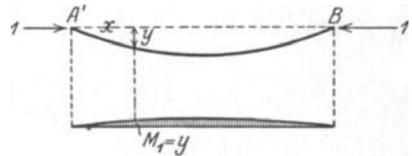


Abb. 7b.

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, H.: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig, 1913. S. 95. Man setzt in der dort angegebenen Formel $t = 0$, ferner dN , dM an Stelle von N , M .

Die wagerechte Verschiebung α des Punktes A ist zu ermitteln.

Da $X=0$ ist, ergibt sich die Gl. (6a), wenn man $ds = dx$ setzt, in der Form

$$x = \frac{l - \alpha}{2}$$

$$\frac{2}{EJ} \int_{x=0}^{\frac{l-\alpha}{2}} M_1 dM dx = d\alpha,$$

welche sich, da $dM = \frac{x dP}{2}$ ist,

$$(17) \quad \frac{dP}{EJ} \int_0^{\frac{l-\alpha}{2}} xy dx = d\alpha$$

schreiben läßt. Führt man den in Abb. 7a angegebenen Ausdruck für y ein, so vereinfacht sie sich zu

$$\frac{P(l - \alpha)^5 dP}{480(EJ)^2} = d\alpha.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{480(EJ)^2} \int_0^P P dP = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{(l - \alpha)^5}.$$

Daraus hat man endgültig

$$(18) \quad \alpha = l \left[1 - \sqrt[4]{\frac{240(EJ)^2}{P^2 l^4 + 240(EJ)^2}} \right].$$

Entwickelt man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in einer Reihe, so ist

$$\sqrt[4]{\frac{240(EJ)^2}{P^2 l^4 + 240(EJ)^2}} = 1 - \frac{1}{4} \frac{P^2 l^4}{P^2 l^4 + 240(EJ)^2} + \dots$$

Vernachlässigen wir in dieser Entwicklung die dem dritten Glied folgenden Glieder, ferner $P^2 l^4$ gegen $240(EJ)^2$, so gelangt man für α zu dem in Gl. (11) erhaltenen Ausdruck.

Es fragt sich nun wieder, ob sich ein Hauptträger finden läßt, aus dem man α durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen bestimmen kann.

Setzt man in (17) l an Stelle von $l - \alpha$, was bei zahlenmäßiger Durchführung der Rechnung immer gestattet ist, so haben wir

$$\frac{dP}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} xy dx = d\alpha.$$

Für y hat man den Ausdruck

$$\begin{aligned} y &= \frac{P}{16EJ} [xl^2 - \frac{4}{3}x^3] \\ &= mP, \end{aligned}$$

wenn m eine von P unabhängige Größe bezeichnet. Es folgt somit

$$d\alpha = \frac{PdP}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} mx dx$$

und

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{EJ} \int_0^P P dP \int_0^{\frac{l}{2}} mx dx \\ &= \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Px}{2} \frac{mP}{2} dx \\ (19) \quad &= \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{y}{2} dx. \end{aligned}$$

Die Gl. (19) zeigt, daß eine Kurvenform, deren Ordinaten gerade die Hälfte der wirklich auftretenden Durchbiegungen y betragen, als Hauptträger dienen kann (Abb. 8).

Die letzte Formel für α mit $M = \frac{Px}{2}$, $y = mP$ führt zu (11).

Man sieht ohne weiteres, daß, wenn die Durchbiegung y des Trägers als eine lineare Funktion von P darstellbar ist, der durch (19) angegebene Satz immer bewiesen werden kann.

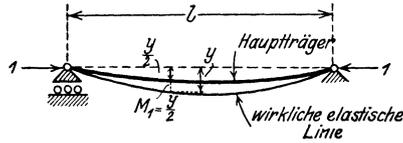


Abb. 8.

Die Verschiebung α in Abb. 7a werde noch auf einem anderen Wege ermittelt. Unter der Annahme der Unveränderlichkeit der Trägerlänge nach der Formänderung erhält man

$$l = 2 \int_0^{\frac{l-\alpha}{2}} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx$$

oder

$$l \sim 2 \int_0^{\frac{l-\alpha}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx.$$

In dieser Gleichung führen wir den Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ ein und integrieren zwischen den angegebenen Grenzen von x . Setzt man näherungsweise in der dadurch entstandenen Gleichung für α statt $l - \alpha$ l , so resultiert wiederum die Formel (11).

Unter analoger Erwägung gelangt man für den allgemeinen Fall (s. Abb. 2) zu der Gleichung

$$\frac{P^2}{16 X^2 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 \omega} \left[\frac{3 \mathfrak{E} \sin 2 \omega}{2 \omega} - 2 - \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 2 \omega \right] + \frac{P M_a}{X^2 (l + \alpha)} \frac{[\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 \omega - 1 - \frac{\omega}{2} \mathfrak{X} g \omega]}{\mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 \omega} \\ + \frac{M_a^2 \left[1 - \frac{\mathfrak{E} \sin 2 \omega}{2 \omega} \right]}{4 X K J \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 \omega} + \frac{X}{K F} - \frac{\alpha}{l + \alpha} = 0,$$

welche völlig mit Gl. (8) übereinstimmt.

b) Wir nehmen jetzt an, AB sei ein beiderseits gelenkartig gestützter, wagrecht unverschiebbarer Träger, d. h. es sei bei

dem oben behandelten frei aufliegenden Träger das Gelenk A auch wagerecht nicht verschiebbar. Wenn sich der Träger infolge der Mittellast P durchbiegt, tritt in ihm eine wagerechte Längskraft X auf (Abb. 9 a). Es soll X bestimmt werden.

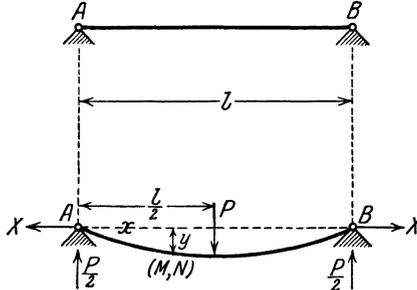


Abb. 9 a.

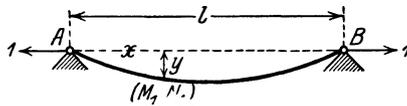


Abb. 9 b.

Man stelle sich vor, daß das Gelenk A für einen Augenblick wagerecht verschiebbar sei. Da aber an dieser Stelle keine wagerechte Verschiebung stattfindet, also $\alpha = 0$ ist, muß die Gleichung [vgl. Gl. (6 a)]

$$(20) \quad \int_P \int_x \frac{M_1 dM}{KJ} dx + \int_P \int_x \frac{N_1 dN}{KF} dx = 0$$

befriedigt werden. Unter M_1, N_1 versteht man die virtuellen Größen, welche die im Punkt A angreifende virtuelle Belastung 1 in dem durch die äußere Kraft P wirklich deformierten Träger erzeugt (Abb. 9 b). Es ist danach $M_1 = -y$, $N_1 = 1$.

Um die Gleichung für y zu erhalten, geht man von der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{KJ}$ aus, in der $M = \frac{Px}{2} - Xy$ ist.

Ziehen wir ferner die zwei Randbedingungen

$$\begin{cases} \text{für } x=0, & y=0 \\ \text{„ } x=\frac{l}{2}, & \frac{dy}{dx}=0 \end{cases}$$

in Betracht, so folgt schließlich:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P}{2X} \left[x - \frac{l \operatorname{Sin} \left(\frac{2\omega x}{l} \right)}{2\omega \operatorname{Cos} \omega} \right], \\ \text{worin} \\ \omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}} \end{array} \right.$$

gesetzt ist.

Die Größe X hängt von der angreifenden äußeren Kraft P ab. Man setzt also $X=f(P)$ und hat aus (20) die Funktion $f(P)$ zu bestimmen. Da M, N als Funktionen von $f(P)$ darzustellen sind, erhält man für dM, dN Ausdrücke, die $f(P)$ und $\frac{\partial f(P)}{\partial P}$ in sich fassen. Die Beziehung (20) wird also eine

Funktionalgleichung ergeben, die $f(P)$ und $\frac{\partial f(P)}{\partial P}$ in einer äußerst komplizierten Form enthält. Die Auflösung einer solchen Gleichung würde große Schwierigkeiten bereiten.

Wir wollen daher einen anderen Weg einschlagen, um zu einer angenäherten Lösung zu gelangen. Das Problem sei folgendes:

Man lasse an dem Träger in Abb. 9a zuerst den Zug X wirken, wodurch die wagerechte Verschiebung α erfolgt; nach Eintritt der Ruhelage bringe man die Mittellast P an, um diese Verschiebung verschwinden zu lassen (Abb. 10a).

Die elastische Linie hat dann nach (21) die Gleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P}{X} F_1, \\ \text{wenn} \\ F_1 = \frac{1}{2} \left[x - \frac{l \operatorname{Sin} \left(\frac{2\omega x}{l} \right)}{2\omega \operatorname{Cos} \omega} \right]. \end{array} \right.$$

Aus dieser Gleichung und Abb. 10a geht hervor:

$$\begin{cases} dM = \left[\frac{x}{2} - F_1 \right] dP \\ dN = 0 \end{cases}$$

und $M_1 = y$. Mit Rücksicht auf die Beziehung (6a) erhält man

$$d\alpha = \frac{1}{KJ} \int_s M_1 dM ds.$$

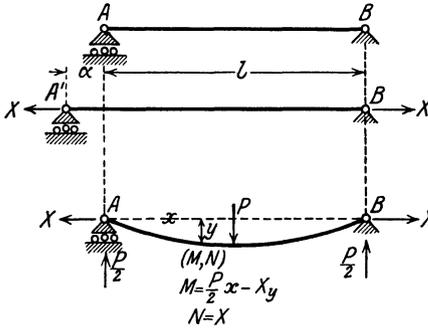


Abb. 10a.

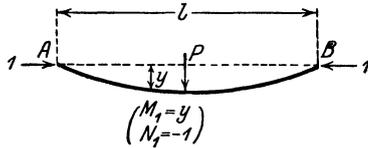


Abb. 10b.

Wenn man $ds = dx$ setzt, so ist

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2} \\ d\alpha &= \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} y dM dx \\ &= \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{PF_1}{X} \left[\frac{x}{2} - F_1 \right] dP dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{KJ} \int_{P=0}^{P=P} P dP \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{F_1}{X} \left[\frac{x}{2} - F_1 \right] dx \\ &= \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{P F_1}{2X} P \left[\frac{x}{2} - F_1 \right] dx \\ &= \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{y}{2} M dx. \end{aligned}$$

Mithin ergibt sich

$$(22) \quad \frac{Xl}{KF} = \frac{2}{KJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y}{2} M dx.$$

Dieser Ausdruck besagt, daß α als virtuelle Verschiebung eines gebogenen Hauptträgers berechnet werden kann, der $\frac{y}{2}$ als Ordinaten besitzt.

c) Schließlich sei AB ein beiderseits eingemauerter Träger, der eine Einzellast P in der Mitte trägt (Abb. 11a).

Wenn sich der Träger durchbiegt, entstehen nebst der Axialkraft X noch Biegemomente M_a an beiden Enden. Die Größen X , M_a hängen von P ab, also müßten sie bei ihrer Berechnung als Funktionen von P betrachtet werden. Eine exakte Lösung der Gleichungen würde zu weit führen. Daher greifen wir zu der folgenden Annäherung:

Wir denken uns vorläufig die Einmauerung des Trägers an den Enden beseitigt und statt derselben Gelenke angebracht, wobei dasjenige am Ende A außerdem wagerecht verschiebbar sein muß (Abb. 11b). Dann bringen wir am Träger den Zug X an; die Folge davon ist die wagerechte Verschiebung α_1 . Um diese Verschiebung rückgängig zu machen und gleichzeitig die Tangenten der elastischen Linie an beiden Enden in der horizontalen Lage zu halten, bringe man am Träger die Mittellast P und die Momente M_a an beiden Enden an.

Die zu erfüllenden zwei Bedingungen lassen sich in der Form

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{(0,0)}^{(P, M_a)} \int_x \frac{M_1 dM}{KJ} dx + \int_{(0,0)}^{(P, M_a)} \int_x \frac{N_1 dN}{KF} dx = \alpha, \\ \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 0 \end{array} \right.$$

darstellen, worin $M_1 = y$, $N_1 = -1$ ist.

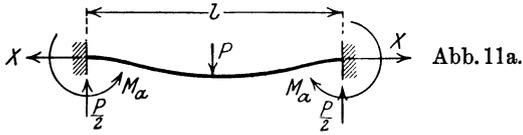


Abb. 11a.

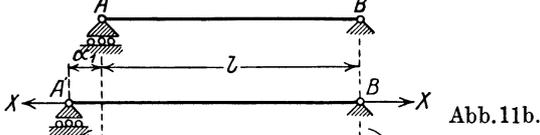


Abb. 11b.

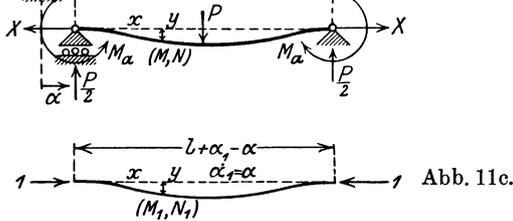


Abb. 11c.

Die elastische Linie hat die Gleichung

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P}{X} F_1, \\ \text{wenn} \\ F_1 = \frac{l}{4\omega} \mathfrak{Cof} \omega \left[\frac{2\omega x}{l} \mathfrak{Cof} \omega - \mathfrak{Cin} \frac{2x\omega}{l} \right] + \frac{M_a}{P \mathfrak{Cof} \omega} \left[\mathfrak{Cof} \left(\frac{2x}{l} - 1 \right) \omega - \mathfrak{Cof} \omega \right] \\ \omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}. \end{array} \right.$$

In diesem Falle ist das Moment M eine Funktion von P und M_a , worin die zwei Größen als voneinander unabhängig zu betrachten sind; dM läßt sich also durch ein vollständiges

Differential der Funktion darstellen. Die erste Gleichung von (23) führt daher zur Integration eines vollständigen Differentials. Da aber hierdurch die Aufgabe verwickelt wird, müssen wir noch eine Annahme zwischen P und M_a machen, um die Aufgabe eindeutig bestimmbar zu gestalten.

Wir setzen nämlich voraus, daß M_a von P abhängig und zwar als eine lineare Funktion von P darstellbar sei. Diese Annahme bedeutet für praktische Fälle eine sachgemäße Annäherung. Man setzt danach

$$(25) \quad M_a = mP.$$

Die Einführung dieser Beziehung in F_1 läßt erkennen, daß die Funktion F_1 eine von P unabhängige ist.

Wir haben

$$\begin{cases} M = P \left[\frac{x}{2} - F_1 - m \right] \\ N = X \end{cases}$$

und also

$$\begin{cases} dM = \left[\frac{x}{2} - F_1 - m \right] dP \\ dN = 0. \end{cases}$$

Da ferner $M_1 = y$ ist, gestaltet sich die Gl. (6a)

$$(26) \quad d\alpha = \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l+\alpha_1-\alpha}{2}} y dM dx,$$

wenn unter α eine von A' nach rechts gemessene Verschiebung des Trägerendes verstanden wird. Folglich ist

$$\int_0^{\alpha_1} d\alpha = \frac{2}{KJ} \int_{P=0}^{P=P} \int_{x=0}^{x=\frac{l+\alpha_1-\alpha}{2}} \frac{P F_1}{X} \left[\frac{x}{2} - F_1 - m \right] dP dx,$$

worin der Ausdruck in der Klammer von P unabhängig ist. Setzt man l an Stelle von $l + \alpha_1 - \alpha$, so ist

$$\begin{aligned}
 (27) \quad \alpha_1 &= \frac{Xl}{KF} = \frac{2}{KJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{PF_1}{2X} P \left[\frac{x}{2} - F_1 - m \right] dx \\
 &= \frac{2}{KJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y}{2} M dy.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß es nötig ist, für virtuelle Belastungen einen anfänglich gekrümmten Träger anzunehmen, der $\frac{y}{2}$ als Ordinaten hat.

Zu bemerken ist, daß in der obigen Entwicklung ein gerades Verhältnis von M_a zu P vorausgesetzt ist; sonst läßt sich die Formel (27) in strengem Sinne nicht beweisen und die Aufgabe kann, wie schon erörtert, nicht eindeutig gelöst werden.

II. Der Träger ist vollkommen eingespannt und trägt nur eine Einzellast in der Mitte.

(Abb. 11 a.)

§ 6. Aufstellung der Gleichungen.

Unter „vollkommen eingespannt“ versteht man die Befestigungsart eines Trägers, bei welcher der Träger weder einer Verschiebung noch einer Verdrehung unterworfen ist.

Dem vorliegenden Fall entspricht also der im vorigen Abschnitt behandelte Träger, wenn man die Bedingungen

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

stellt. Das Moment M_a sowie die Kraft X , die in § 1 als äußere Ursachen bezeichnet wurden, treten jetzt bei dem in Frage stehenden Träger als innere Ursachen auf, hervorgerufen infolge der durch die Wirkung von P eintretenden Formänderung und unter Berücksichtigung der angegebenen Bedingung.

24 Der Träger ist vollkommen eingespannt u. trägt nur eine Einzellast.

Die X-Gleichung (8) rechnet sich um zu

$$(28) \quad \frac{2 + \operatorname{Co}f \omega - \frac{3 \operatorname{Si}n \omega}{\omega}}{\omega^6 \operatorname{Co}f^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{1024 K^2 J^3}{P^2 l^6 F}.$$

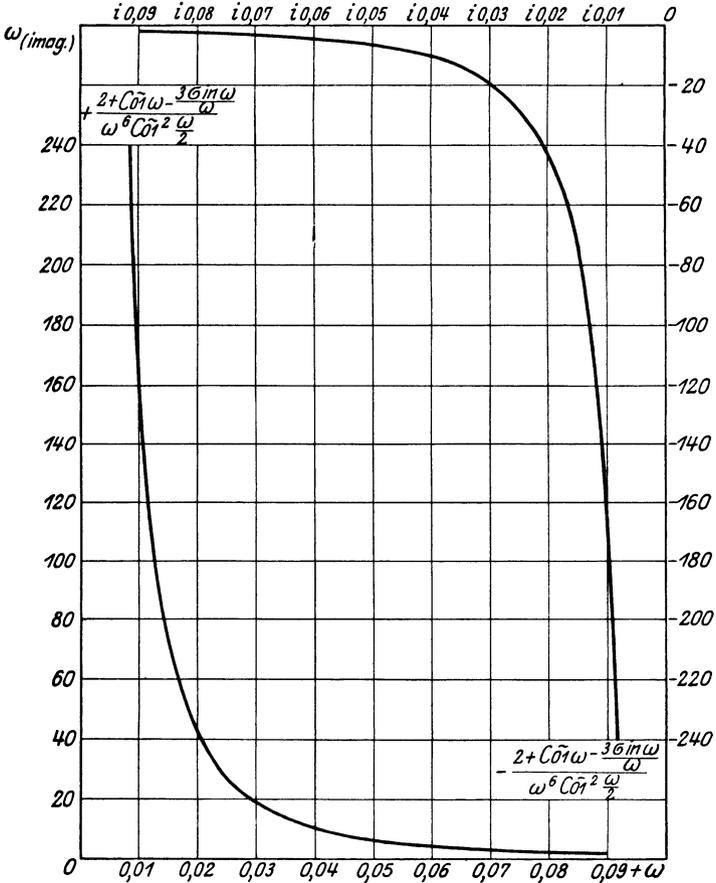


Abb. 12.

Die Gleichung ist in hohem Grade transzendent; man kann aus ihr keinen praktischen Schluß ziehen. Das Vorzeichen von X läßt sich indessen durch folgende Überlegung feststellen: es

handle sich um einen positiven Wert von X ; die Zahl $\omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}$

ist dann reell, und die Funktion $\frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}}$ bleibt

stets positiv. Sie nimmt, wie die Tabelle 1 zeigt, mit ω ab. Wenn ω imaginär ist, was bei negativem X eintritt, hat die Funktion negatives Vorzeichen und nimmt mit ω zu. Es folgt daraus, daß die Gl. (28) keine negative Wurzel X gestattet, denn die rechte Seite derselben stellt für ein positives ebenso wie für ein negatives P stets eine positive Zahl dar. Die Kraft X ist also stets ein Zug ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von P .

Die letzterwähnte Funktion ist in Abb. 12 graphisch dargestellt. Außerdem sind die Funktionswerte für imaginäre ω eingetragen.

Tabelle 1.

ω	$\frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}}$	ω	$\frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}}$
0	∞		
0,001	16 666,663 29	0,021	37,789 53
2	4 166,663 29	22	34,431 89
3	1 851,848 47	23	31,502 61
4	1 041,663 29	24	28,931 81
5	666,663 29	25	26,663 29
6	462,959 59	26	24,651 46
7	340,132 68	27	22,858 99
8	260,413 29	28	21,255 13
9	205,757 94	29	19,814 31
0,010	166,663 29	0,030	18,515 15
11	137,737 68	31	17,339 68
12	115,737 37	32	16,272 67
13	98,615 96	33	15,301 19
14	85,030 64	34	14,414 16
15	74,070 70	35	13,602 07
16	65,100 79	36	12,856 71
17	57,666 76	37	12,170 96
18	51,436 96	38	11,538 64
19	46,164 68	39	10,954 33
0,020	41,663 29	0,040	10,413 29

Tabelle 1 (Fortsetzung).

ω	$\frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}}$	ω	$\frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}}$
0,041	9,91136	0,071	3,30285
42	9,44485	72	3,21165
43	9,01051	73	3,12417
44	8,60544	74	3,04021
45	8,22708	75	2,95959
46	7,87312	76	2,88213
47	7,54152	77	2,80767
48	7,23042	78	2,73606
49	6,93818	79	2,66714
50	6,66329	0,080	2,60080
0,051	6,40442	81	2,53689
52	6,16034	82	2,47531
53	5,92994	83	2,41595
54	5,71222	84	2,35869
55	5,50627	85	2,30344
56	5,31126	86	2,25010
57	5,12641	87	2,19859
58	4,95105	88	2,14883
59	4,78453	89	2,10074
0,060	4,62626	0,090	2,05424
61	4,47571	91	2,00927
62	4,33239	92	1,96575
63	4,19584	93	1,92364
64	4,06564	94	1,88286
65	3,94140	95	1,84335
66	3,82277	96	1,80508
67	3,70953	97	1,76799
68	3,60101	98	1,73202
69	3,49729	99	1,69714
0,070	3,39799	100	1,66330
		∞	0

Wollen wir nun die Gleichung für die elastische Linie entwickeln, so benutzen wir Gl. (4a) unter Beachtung obiger Bedingungen und erhalten:

$$(29) \quad y = \frac{P}{2X} \left[x - \frac{l \mathfrak{Sin} \left(\frac{x \omega}{l} \right) \mathfrak{Cof} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega x}{l} \right)}{\omega \mathfrak{Cof} \frac{\omega}{2}} \right].$$

Setzt man darin $x = \frac{l}{2}$, so ergibt sich

$$(30) \quad y_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{2 \omega X} \left[\frac{\omega}{2} - \Im g \frac{\omega}{2} \right].$$

Gln. (5a), (8), (10) liefern

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{Pl}{4 \omega} \frac{\Im \sin \left(\frac{2 \omega x}{l} - \frac{\omega}{2} \right)}{\Im \cos \frac{\omega}{2}} \\ M_a = \frac{Pl}{4 \omega} \Im g \frac{\omega}{2} \\ Q = \frac{P \Im \cos \left(\frac{2 \omega x}{l} - \frac{\omega}{2} \right)}{2 \Im \cos \frac{\omega}{2}} \end{array} \right.$$

§ 7. Ergänzungsbeispiel.

Es soll der in § 4 angegebene Träger bei vollkommener Einmauerung berechnet werden.

Es ist

$$\begin{aligned} K &= 2100000 + \frac{X}{10,6} \text{ [Gl. (1)]} \\ \omega &= \frac{400}{2} \sqrt{\frac{X}{170 \left[2100000 + \frac{X}{10,6} \right]}} \\ &\sim \frac{\sqrt{X}}{94,4722 \left[1 + \frac{X}{10^7 \cdot 4,452} \right]}. \end{aligned}$$

Somit läßt sich die Kraft X mittels der Gl. (28) durch Probieren berechnen. Man findet

$$X = 2,9 \text{ kg}$$

und ferner

$$\begin{aligned} y_{\text{Mitte}} &= 0,093368 \text{ cm} \\ M_{\text{Mitte}} &= 4999,86 \text{ cm kg.} \end{aligned}$$

28 Der Träger ist vollkommen eingespannt u. trägt nur eine Einzellast.

In bezug auf S. 12 ist

$$\frac{0,093368}{0,093371} = 0,999968 \text{ für } y_{\text{Mitte}}$$

$$\frac{4999,86}{5000,00} = 0,999927 \text{ für } M_{\text{Mitte}}$$

Die Durchbiegung sowie das Biegemoment in der Trägermitte sind also bei Berücksichtigung der Längskraft kleiner als bei dem Träger mit wagerecht verschiebbaren Einmauerungsenden. Wir können daher die anfangs erwähnte Verminderung des Feldmomentes als zutreffend ansehen.

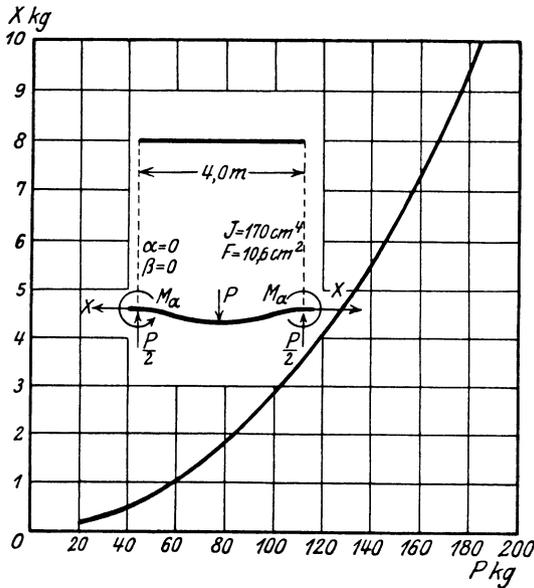


Abb. 13.

Aus den Rechnungsergebnissen geht hervor, daß der Einfluß von Kraft X auf y_{Mitte} , M_{Mitte} äußerst gering ist. Die Kraft X selbst dagegen beläuft sich auf etwa 3% von P . Bei der praktischen Bestimmung der Spannungen im Träger ist es zulässig, die Längskraft zu vernachlässigen. Dies kann aber bei nachgiebigem Einmauerungsmaterial nicht der Fall sein; davon werden wir uns in den folgenden Paragraphen überzeugen können.

In Abb. 13 ist X als Funktion von P aufgetragen. Man sieht daraus, daß die Zunahme von X mit P wächst.

Ferner sei bei unserem Träger die Lichtweite l veränderlich an Stelle von 400 cm eingeführt. In Abb. 14 sind die X -Kurven für $P=50, 100, 150$ kg dargestellt. Die Kraft X nimmt, wenn l größer ist als einige Meter, also mit l rasch zu.

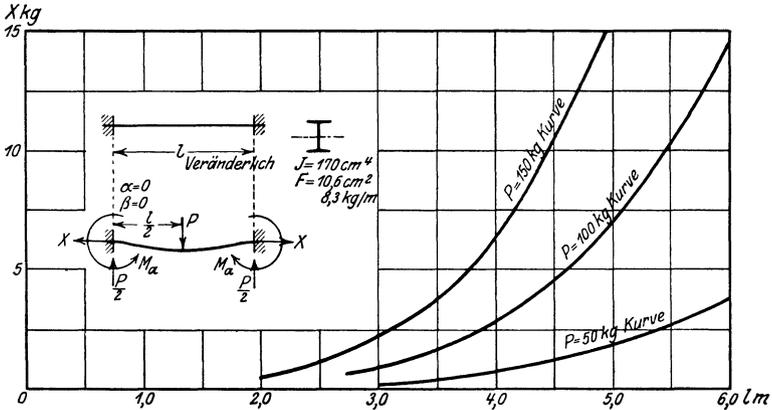


Abb. 14.

III. Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig.

§ 8. Vorbemerkungen.

Wir kommen jetzt zur Untersuchung des Falles, bei dem wir uns dem tatsächlichen Gleichgewichtszustand des Trägers am meisten nähern. Das Einmauerungsmaterial soll sich gegen Zug sowie gegen eine Drehung des eingemauerten Trägers im strengen Sinne des Wortes nicht widerstandsfähig erweisen; vielmehr möge es eine gewisse Nachgiebigkeit zeigen, die, wenn sie auch äußerst gering ist, doch auf den Gleichgewichtszustand des Trägers einen bedeutenden Einfluß ausüben kann.

Die Einspannung eines Trägers an einem eingemauerten Ende bei nachgiebigem Einmauerungsmaterial ist von Hayashi¹⁾

¹⁾ Hayashi, K., Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin 1921, S. 180.

so definiert, daß der Träger daselbst durch ein negatives Biegemoment beansprucht wird, indem man sich auf von oben nach unten wirkende Lasten beschränkt. Von der wagerechten Verschiebung des Trägerendes, die ein Träger bei diesen Belastungen erleiden kann (vgl. Abb. 15), ist bei Hayashi nicht die Rede. Zur

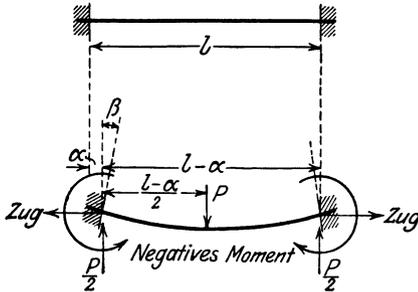


Abb. 15.

schärferen Definition der Bezeichnung **Einspannung** möge hinzugefügt werden, daß der beiderseits eingemauerte Träger mit lotrechter Last als äußere Kraft noch als an den Enden eingespannt angesehen werden soll, auch wenn das Endmoment Null ist, solange das Einmauerungsmaterial eine Zugkraft an den Enden des Trägers ausüben vermag.

Nach diesen Voraussetzungen lassen sich verschiedene Fälle von eingespannten Trägern unterscheiden. X, M_a können dabei als äußere oder als innere Ursache betrachtet werden. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir uns aber auf die Annahme beschränken, daß der Träger nur durch eine einzige äußere Kraft P belastet ist, also X, M_a nur als die von P herrührenden inneren Kräfte anzusehen sind.

Nach diesen Voraussetzungen lassen sich verschiedene Fälle von eingespannten Trägern unterscheiden. X, M_a können dabei als äußere oder als innere Ursache betrachtet werden. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir uns aber auf die Annahme beschränken, daß der Träger nur durch eine einzige äußere Kraft P belastet ist, also X, M_a nur als die von P herrührenden inneren Kräfte anzusehen sind.

§ 9. Der Träger ist beiderseits mit wagerecht unverschiebbaren Gelenken versehen.

Dem Fall entspricht $\alpha = 0, M_a = 0$ (Abb. 9 a oder 16).

Für X erhält man aus Gl. (8), in der X durch $\left(\frac{2\omega}{l}\right)^2 KJ$ ersetzt wird:

$$(32) \quad \frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega} = \frac{16 K^2 J^3}{P^2 l^6 F}.$$

Man sieht wieder ohne weiteres, daß am Trägerende eine Zugkraft herrscht.

Die Funktion $\frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega}$ ist in der Tabelle 2

zahlenmäßig angegeben.

Setzt man $M_a = 0$ in Gl. (8) so lautet der Ausdruck für die Verdrehung β

$$(33) \beta_1 = -\frac{P}{2X} \left[1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof} \omega} \right].$$

Das Minuszeichen zeigt, daß die Verdrehung im Sinne des Uhrzeigers stattfindet (Abb. 16).

Ferner folgt:

$$(34) \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{4X} \left[1 - \frac{\mathfrak{I}g \omega}{\omega} \right], \\ M_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{4\omega} \mathfrak{I}g \omega. \end{cases}$$

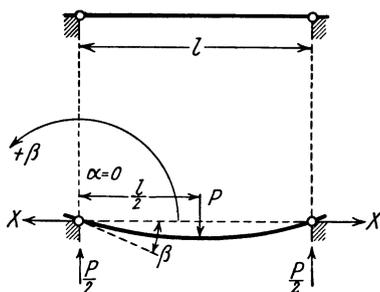


Abb. 16.

Tabelle 2.

ω	$\frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega}$	ω	$\frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega}$
0	∞		
0,001	4166,663 29	0,021	9,444 85
2	1041,663 29	22	8,605 44
3	462,959 59	23	7,873 12
4	260,413 29	24	7,230 42
5	166,663 29	25	6,663 29
6	115,737 37	26	6,160 34
7	85,030 64	27	5,712 22
8	65,100 79	28	5,311 26
9	51,436 96	29	4,951 05
0,010	41,663 29	0,030	4,626 26
11	34,431 89	31	4,332 39
12	28,931 81	32	4,065 64
13	24,651 46	33	3,822 77
14	21,255 13	34	3,601 01
15	18,515 15	35	3,397 99
16	16,272 67	36	3,211 65
17	14,414 16	37	3,040 21
18	12,856 71	38	2,882 13
19	11,538 64	39	2,736 06
0,020	10,413 29	0,040	2,600 80

Tabelle 2 (Fortsetzung).

ω	$\frac{2 + \mathcal{C}0f 2\omega - \frac{3 \mathcal{C}in 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathcal{C}0f^2 \omega}$	ω	$\frac{2 + \mathcal{C}0f 2\omega - \frac{3 \mathcal{C}in 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathcal{C}0f^2 \omega}$
0,041	2,47531	0,071	0,82319
42	2,35869	72	0,80039
43	2,25010	73	0,77852
44	2,14883	74	0,75753
45	2,05424	75	0,73738
46	1,96575	76	0,71801
47	1,88286	77	0,69940
48	1,80508	78	0,68150
49	1,73202	79	0,66427
50	1,66330	0,080	0,64768
0,051	1,59858	81	0,63171
52	1,53756	82	0,61631
53	1,47996	83	0,60147
54	1,42553	84	0,58716
55	1,37404	85	0,57334
56	1,32529	86	0,56001
57	1,27908	87	0,54713
58	1,23524	88	0,53469
59	1,19361	89	0,52267
0,060	1,15404	0,090	0,51105
61	1,11641	91	0,49980
62	1,08058	92	0,48893
63	1,04644	93	0,47840
64	1,01389	94	0,46820
65	0,98283	95	0,45833
66	0,95317	96	0,44876
67	0,92483	97	0,43948
68	0,89773	98	0,43049
69	0,87180	99	0,42177
0,070	0,84698	0,100	0,41331
		∞	0

Berechnet man nach der hier angegebenen Bedingung den in § 4 behandelten Träger, so erhält man als X -Kurve für das veränderliche P eine parabelförmige Kurve (Abb. 17).

Sie möge mit hinreichender Genauigkeit durch die Gleichung

$$X = 0,0047 P^2$$

bestimmt sein. Darnach verändert sich die Zugkraft X mit P^2 . In der Figur ist die letztere Kurve gestrichelt eingezeichnet.

Ist $P = 100$ kg, so berechnet sich

$$\begin{aligned} X &= 46 \text{ kg,} \\ |\beta| &= 0,0027978, \\ y_{\text{Mitte}} &= 0,37280 \text{ cm,} \\ M_{\text{Mitte}} &= 9982,87 \text{ cm kg.} \end{aligned}$$

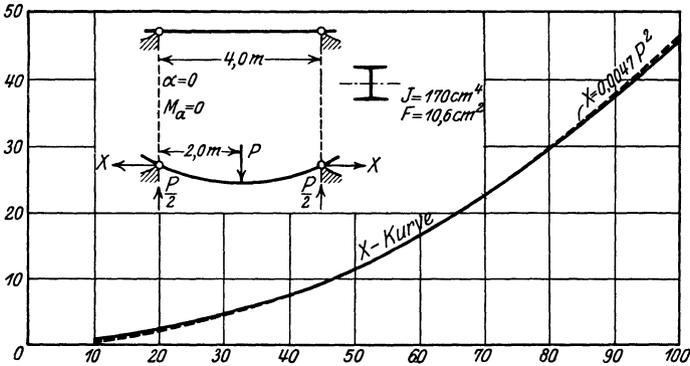


Abb. 17.

X ist etwa halb so groß wie P . Der Träger ist also durch eine verhältnismäßig große Längskraft beansprucht. Die größte Spannung in der Trägermitte berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_{\text{Mitte}}}{W} + \frac{X}{F} \\ &= \frac{9982,87}{34} + \frac{46}{10,6} \\ &= 297,95 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung derartiger Träger pflegt man unter der Annahme wagerecht verschiebbarer Enden die Kraft X völlig außer acht zu lassen. In bezug auf § 4 ist σ

$$\sigma = \frac{5000}{37} = 147,06 \text{ kg/cm}^2.$$

Man sieht also, daß unter Voraussetzung wagerecht nicht verschiebbarer Enden die Nachgiebigkeit der Mauer gegen Verdrehung ungefähr eine Verdoppelung der maßgebenden Spannung zur Folge hat.

§ 10. Die Mauer ist gegen wagerechten Zug vollkommen fest, aber gegen Verdrehung in gewissem Grade nachgiebig (Abb. 18).

Es ist $\alpha = 0$. Die Verdrehung β ist nicht mehr gleich β_1 [Gl. (33)], sondern fällt absolut kleiner aus als $|\beta_1|$ und zwar nimmt $|\beta|$ mit der Widerstandsfähigkeit des Einmauerungsmaterials ab, bis β bei einem gegen Verdrehung vollkommen unnachgiebigen Einmauerungsmaterial einen Nullwert hat.

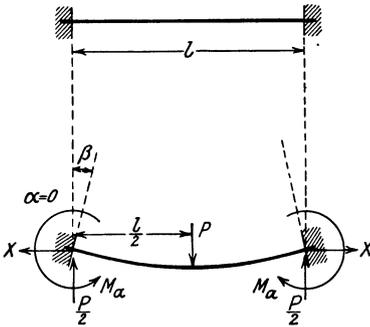


Abb. 18.

Das Endmoment M_α wächst dabei von Null an und erreicht schließlich einen bestimmten Wert; dies ist der Grenzwert, den der äußersten Widerstand ausdrückt, den die Mauer zu leisten vermag.

Der untere Grenzwert der Verdrehung ist also $\beta = 0$, denn eine weitere Abnahme von β würde eine Zunahme des positiven Betrages von β erfordern und nur dann möglich sein,

wenn ein äußeres Moment dem soeben genannten Wert von M_α hinzugefügt würde.

Setzt man in Gl. (8a) $\alpha = 0$, so gilt für die X-Gleichung

$$(35) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2 + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \omega - \frac{3 \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 \frac{\omega}{2}} - \frac{8 \beta K J}{P l^2 \omega^5 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^2 \frac{\omega}{2}} [\mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega - \omega] \\ & + \frac{32 \beta^2 K^2 J^2}{P^2 l^4 \omega^3 \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n}^2 \omega} [\mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} 2 \omega - 2 \omega] - \frac{1024 K^2 J^3}{P^2 l^6 F} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ferner folgt aus Gln. (9), (5a)

$$(36) \left\{ \begin{aligned} y_{\text{Mitte}} &= \frac{P l}{2 \omega X} \left[\frac{\omega}{2} - \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{\omega}{2} \right] - \frac{\beta l}{2 \omega} \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{\omega}{2}, \\ M_{\text{Mitte}} &= \frac{P l}{4 \omega} \mathfrak{X} \mathfrak{g} \frac{\omega}{2} - \frac{2 \beta \omega K J}{l \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \omega}. \end{aligned} \right.$$

Zur näheren Erklärung berechnen wir den Träger in § 4 unter der vorliegenden Annahme. Die Rechnungsergebnisse sind in Abb. 19 aufgetragen. Die Tabelle 3, S. 49, erleichtert die Berechnung obiger Formeln.

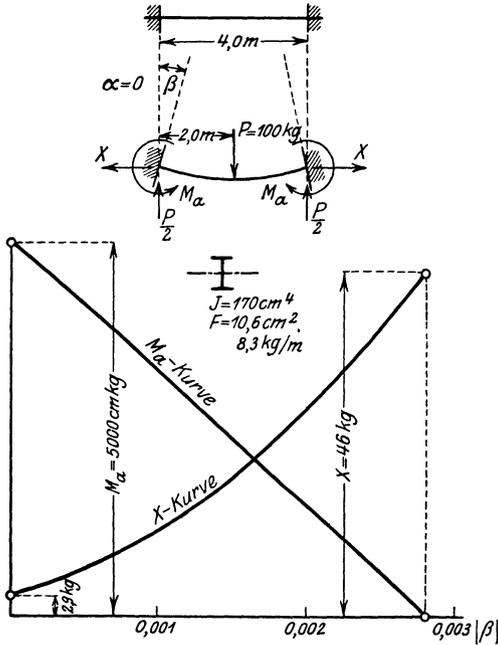


Abb. 19.

Die Längskraft X nimmt also mit $|\beta|$ verhältnismäßig rasch zu. Das Endmoment M_a nimmt mit wachsendem X ungefähr linear ab.

Ist

$$\beta = -0,001,$$

so berechnet sich

$$X = 12 \text{ kg}$$

und

$$y_{\text{Mitte}} = 0,19332 \text{ cm},$$

$$M_{\text{Mitte}} = 6784,04 \text{ cm kg}.$$

In bezug auf § 4 ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{0,19332}{0,093371} &= 2,070 \\ \frac{0,19332}{0,37348} &= 0,518 \end{aligned} \right\} \text{für } y_{\text{Mitte}},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{6784,04}{5000,00} &= 1,357 \\ \frac{6784,04}{10000,00} &= 0,678 \end{aligned} \right\} \text{für } M_{\text{Mitte}}.$$

Bei dem angenommenen β fällt also in der Trägermitte die Durchbiegung etwa zweimal, das Moment anderthalbmal so groß aus, als bei dem Träger, der mit wagerecht verschiebbarem Ende versehen ist. Im Vergleich zu dem Fall, wo der Träger mit wagerecht verschiebbaren Gelenken befestigt ist, vermindern sich diese Größen mit grober Annäherung auf 0,5.

§ 11. Die Mauer ist gegen Verdrehung des Trägerendes vollkommen unnachgiebig, gestattet aber eine gewisse wagerechte Verschiebung desselben (Abb. 20).

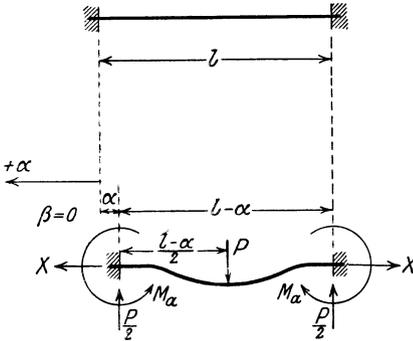


Abb. 20.

Das zu Anfang von § 10 für β Gesagte gilt hier für α . Es ist $\beta = 0$. Gl. (8a) liefert für X

$$(37) \quad \frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}} + \frac{256 \alpha K^2 J^2}{P^2 \omega^2 (l + \alpha)^5} - \frac{1024 K^2 J^3}{P^2 F (l + \alpha)^6} = 0.$$

Ferner erhält man

$$(38) \quad \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \frac{P(l + \alpha)}{2 \omega X} \left[\frac{\omega}{2} - \mathfrak{E}g \frac{\omega}{2} \right], \\ M_{\text{Mitte}} = \frac{P(l + \alpha)}{4 \omega} \mathfrak{E}g \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

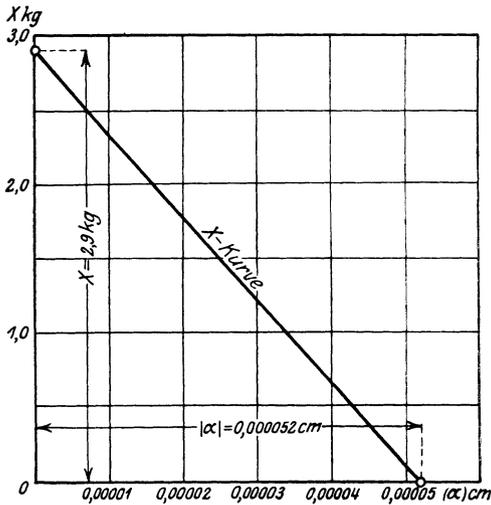
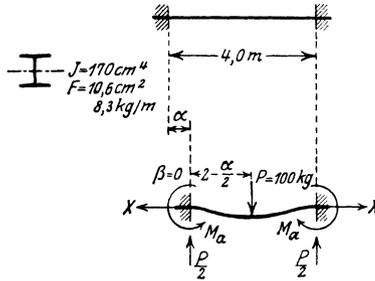


Abb. 21.

Zur Erläuterung diene folgendes Zahlenbeispiel:
Ist $\alpha = -0,00003 \text{ cm}$, so beträgt

$$\begin{aligned} X &= 1,2 \text{ kg}, \\ y_{\text{Mitte}} &= 0,093369 \text{ cm}, \\ M_{\text{Mitte}} &= 4999,94 \text{ cm/kg}. \end{aligned}$$

38 Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig.

Mit Rücksicht auf § 4 ist zu bemerken, daß die angenommene Bedingung keinen wesentlichen Einfluß auf die letzten zwei Größen ausübt (vgl. § 4 den Fall $X=0$, $\beta=0$). In Abb. 21 ist die X -Kurve als Funktion der Verschiebung α dargestellt.

§ 12. Der Träger ist beiderseits gelenkartig befestigt; eines der Gelenke ist in gewissem Grade wagerecht verschiebbar.

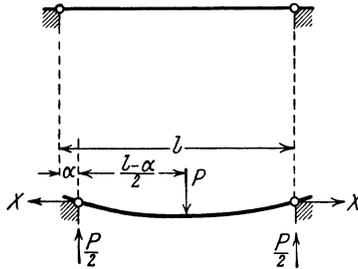


Abb. 22.

Ist $M_a=0$. Die X -Gleichung (8) geht somit in

$$(39) \quad \frac{2 + \mathfrak{C}0\{2\omega - \frac{3 \mathfrak{C}in 2\omega}{2\omega}}}{(2\omega)^6 \mathfrak{C}0\{^2\omega}} + \frac{4\alpha K^2 J^2}{P^2 \omega^2 (l + \alpha)^5} - \frac{16 K^2 J^3}{P^2 F (l + \alpha)^6} = 0$$

über.

Die Verschiebung α muß notwendig kleiner sein als $\frac{P^2 l^5}{960 E^2 J^2}$ [vgl. Gl. (11)]. Ferner liefern Gln. (4), (5)

$$(40) \quad \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \frac{P(l + \alpha)}{4X} \left[1 - \frac{\mathfrak{X}g\omega}{\omega} \right], \\ M_{\text{Mitte}} = \frac{P(l + \alpha)}{4\omega} \mathfrak{X}g\omega. \end{cases}$$

Nimmt man bei dem in § 4 angegebenen Doppel-T-Träger $\alpha = -0,0002$ cm an, so erhält man aus Gl. (39)

$$X = 35 \text{ kg.}$$

Die Kraft X läßt sich also, wenn α ein Viertel seines Grenz-

wertes $0,00084 \text{ cm}$ (s. § 4) beträgt, nur auf $\frac{35}{46} \sim 0,76$ ihres Größtwertes vermindern.

Man bekommt ferner

$$y_{\text{Mitte}} = 0,37345 \text{ cm},$$

$$M_{\text{Mitte}} = 9986,93 \text{ cm kg}.$$

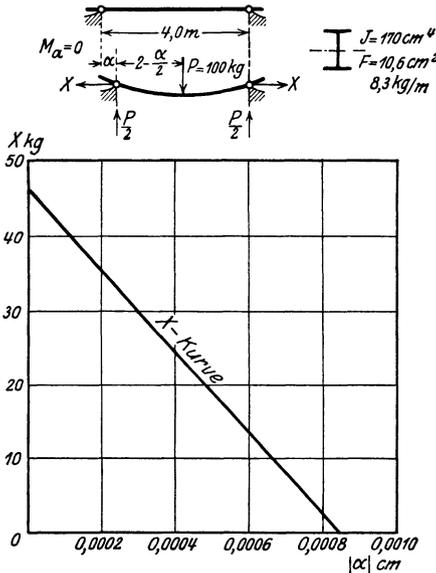


Abb. 23.

In Abb. 23 ist die X -Kurve als Funktion der Verschiebung α dargestellt. Wir erkennen daraus, daß die Gelenkkraft mit der Verschiebung etwa gleichmäßig abnimmt.

§ 13. Die Mauer ist sowohl für wagerechte Verschiebung als für Verdrehung des Trägers in gewissem Grade nachgiebig (Abb. 24).

Gln. (5 a), (9) und (8 a) gelten hierbei ohne weiteres. Es sei beispielsweise $\alpha = -0,00002 \text{ cm}$, $\beta = -0,002$.

40 Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig.

Mit den in § 4 angegebenen Zahlenwerten berechnet man

$$\begin{aligned} X &= 27 \text{ kg,} \\ y_{\text{Mitte}} &= 0,29331 \text{ cm,} \\ M_{\text{Mitte}} &= 8566,93 \text{ cm kg.} \end{aligned}$$

In bezug auf § 7 wird

$$\frac{0,29331}{0,093368} = 3,14 \text{ für } y_{\text{Mitte}},$$

$$\frac{8566,93}{4999,86} = 1,71 \text{ für } M_{\text{Mitte}}.$$

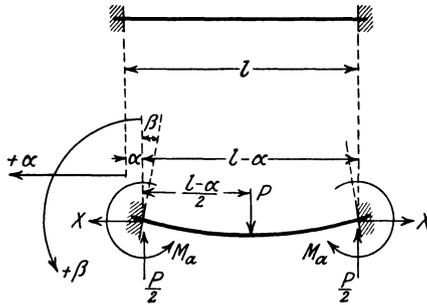


Abb. 24.

Der Träger erfährt also in der Mitte eine dreimal so große Senkung wie die eines entsprechenden vollkommen eingespannten Trägers, während das Moment etwa das Doppelte beträgt. Im Vergleich mit dem Beispiel in § 6 fällt X hier ungefähr zehnmal so groß aus, während es, da das Trägerende einer gewissen wagerechten Verschiebung unterworfen ist, im Gegenteil einen kleineren Wert erhalten müßte. Es ist leicht zu erkennen, daß dieser Unterschied nur durch die Voraussetzung $\beta = -0,002$ hervorgebracht ist; die Verdrehung β kann also, wie ersichtlich, einen bedeutenden Einfluß auf die Vermehrung der Gelenkkraft ausüben.

§ 14. Zusammenfassung der Rechnungsergebnisse.

Der Übersichtlichkeit halber mögen die gewonnenen Ergebnisse für die gewählten Zahlenbeispiele folgendermaßen angegeben werden:

$J = 170 \text{ cm}^4$

$F = 10,6 \text{ cm}^2$

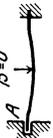
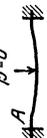
$8,8 \text{ kg/m}$

$E = 210000 \text{ kg/cm}^2$

	Gelenk A wagrecht vollkommen ver- schiebbar	Gelenk A in gewissem Grade verschiebbar	Gelenk A vollkommen starr	Ende A in gewissem Grade ver- schiebbar und verdrehbar	Ende A in gewissem Grade verdrehbar	Ende A wagrecht vollkommen verschiebbar	Ende A in gewissem Grade verschiebbar	Ende A vollkommen starr
y_{mitte} cm	0,37348	0,37345	0,37280	0,29331	0,19332	0,093371	0,093369	0,093368
M_{mitte} cm kg	10000,00	9986,93	9982,87	8566,93	6784,04	5000,00	4999,94	4999,86
X kg	0	35	46	27	12	0	1,2	2,9
	$M_a = 0$ $X = 0$	$M_a = 0$ $\alpha = -0,0002 \text{ cm}$	$M_a = 0$ $\alpha = 0$	$\alpha = -0,00002$ $\beta = -0,002$	$\alpha = 0$ $\beta = -0,001$	$\beta = 0$ $X = 0$	$\beta = 0$ $\alpha = -0,00003$	$\alpha = 0$ $\beta = 0$

42 Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig.

Um den Vergleich zu erleichtern, fügen wir noch folgende Tafel hinzu, in welcher z. B. unter Angabe I y_{Mitte} , M_{Mitte} für den Fall $M_a = 0$, $X = 0$ als Einheit angenommen wurde.

I	Gelenk A wagrecht vollkommen verschiebbar 	y_{Mitte}	1,0	0,999920	0,998179	0,785543	0,517618	0,250003	0,249997	0,249995
		M_{Mitte}	1,0	0,998693	0,998287	0,856693	0,678404	0,50000	0,499994	0,499986
II	Ende A wagrecht vollkommen verschiebbar 	y_{Mitte}	3,999957	3,999636	3,992674	3,141539	2,070450	1,0	0,999979	0,999968
		M_{Mitte}	2,000000	1,997386	1,996574	1,713386	1,356808	1,0	0,999988	0,999972
III	Ende A vollkommen starr 	y_{Mitte}	4,000086	3,999764	3,992803	3,141440	2,070517	1,000032	1,000011	1,0
		M_{Mitte}	2,000056	1,997442	1,996630	1,713434	1,356846	1,000028	1,000016	1,0

Die einzelnen Zahlen der Tafel sind der vorigen Tabelle entsprechend aufzufassen.

§ 15. Nachbemerkungen.

In den vorhergehenden Paragraphen betrachteten wir die Verschiebungen α, β als beliebig angenommene Größen und zwar als solche, welche sowohl voneinander als auch von den äußeren Kräften, wozu auch X und M_a zählen, ganz unabhängig sind. Dies trifft in Wirklichkeit natürlich nicht zu, wenn der Träger mit der Mauer gewissen Verschiebungen unterliegt. Eine nähere Erklärung des wirklichen Zustandes könnte also nur dadurch erfolgen, daß man die Verschiebungen α, β als Funktionen aller übrigen Größen betrachtet. Am einfachsten möge

$$(41) \quad \begin{cases} \alpha = k_1 X, \\ \beta = k_2 M_a \end{cases}$$

gesetzt werden, wenn unter k_1, k_2 zwei Erfahrungszahlen verstanden sind. Bei weiterer Vervollständigung der Theorie in dieser Hinsicht kann die vorliegende Arbeit zweifellos als Grundlage dienen.

Unsere Formeln sind daher in sich unvollkommen, sie bedürfen einer weiteren Behandlung. Um sie in Anwendung bringen zu können, müssen die Verschiebungen α, β im einzelnen Fall mit irgendwelchen Meßinstrumenten hinreichend genau beobachtet werden.

IV. Der Träger ist gleichmäßig beschwert.

§ 16. Allgemeine Gleichungen.

Schließlich mögen die Formeln für den Fall beigefügt werden, bei dem sich die Einzellast P über die ganze Spannweite verteilen läßt (Abb. 25).

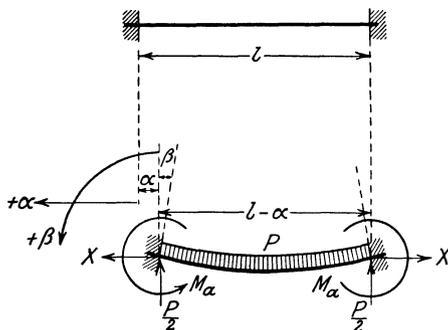


Abb. 25.

Es ist

$$q = \frac{P}{l + \alpha}.$$

Analog zu § 1 erhält man für die elastische Linie die Gleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} y = C_1 e^{\frac{2\omega x}{l+\alpha}} + C_2 e^{-\frac{2\omega x}{l+\alpha}} + \frac{Px}{2X} - \frac{qx^2}{2X} - \frac{M_a}{X} - \frac{qKJ}{X^2}, \\ \text{worin} \\ \omega = \frac{l+\alpha}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}. \end{array} \right.$$

Aus den Bedingungen $y = 0$ für $x = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = \frac{l+\alpha}{2}$ berechnet man

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{X M_a + q K J}{2 X^2 \mathfrak{Cof} \omega} [\mathfrak{Cof} \omega - \mathfrak{Sin} \omega], \\ C_2 = \frac{X M_a + q K J}{2 X^2 \mathfrak{Cof} \omega} [\mathfrak{Cof} \omega + \mathfrak{Sin} \omega]. \end{array} \right.$$

Es folgt somit:

$$(42) \quad y = \frac{Px}{2X} \left[1 - \frac{x}{l+\alpha} \right] - \left[\frac{M_a}{X} + \frac{PKJ}{X^2(l+\alpha)} \right] \left[1 - \frac{\mathfrak{Cof} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega \right)}{\mathfrak{Cof} \omega} \right]$$

und

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{PKJ}{X(l+\alpha)} \left[1 - \frac{\mathfrak{Cof} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega \right)}{\mathfrak{Cof} \omega} \right] - \frac{M_a \mathfrak{Cof} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega \right)}{\mathfrak{Cof} \omega}, \\ Q = \frac{\mathfrak{Sin} \left(\omega - \frac{2x\omega}{l+\alpha} \right)}{\mathfrak{Cof} \omega} \left[\frac{P}{2\omega} + \frac{2M_a\omega}{l+\alpha} \right]. \end{array} \right.$$

Wählt man den Hauptträger bei der vorliegenden gleichmäßig verteilten Last, so wie wir ihn bei einer Mittellast in § 5 gefunden haben, dann bekommt man zwischen den Verschiebungen α , β und übrigen gegebenen Größen die zwei Gleichungen:

$$(44) \left\{ \begin{aligned} & \frac{P^2}{96 \mathfrak{E} \sin^2 \omega} \left[4 \mathfrak{E} \sin^2 \omega - \frac{9 \mathfrak{E} \sin 2 \omega}{\omega} + \frac{24 \mathfrak{E} \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] \\ & - \frac{P X \beta}{8 \mathfrak{E} \sin^2 \omega} \left[2 + \frac{\mathfrak{E} \sin 2 \omega}{\omega} - \frac{4 \mathfrak{E} \sin^2 \omega}{\omega^2} \right] + \frac{X^2 \beta^2}{8 \mathfrak{E} \sin^2 \omega} \left[\frac{\mathfrak{E} \sin 2 \omega}{\omega} - 2 \right] \\ & - \frac{X^3}{K F} + \frac{\alpha X^2}{l + \alpha} = 0, \\ & M_a = \frac{P(l + \alpha)}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\mathfrak{X} g \omega} - 1 \right] + \frac{\beta X(l + \alpha)}{2 \omega \mathfrak{X} g \omega}. \end{aligned} \right.$$

§ 17. Der Träger ist vollkommen eingespannt.

Man nehme als äußere Kraft nur die verteilte Last q an; X, M_a werden als von der erfolgten Formänderung herrührend angesehen. Dann gelten die obigen Gleichungen, wenn darin $\alpha = 0, \beta = 0$ gesetzt wird. Sie rechnen sich um zu:

$$(45) \left\{ \begin{aligned} & \frac{P^2}{96 \mathfrak{E} \sin^2 \omega} \left[4 \mathfrak{E} \sin^2 \omega - \frac{9 \mathfrak{E} \sin 2 \omega}{\omega} + \frac{24 \mathfrak{E} \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] - \frac{X^3}{K F} = 0, \\ & M_a = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\mathfrak{X} g \omega} - 1 \right], \\ & \text{wenn} \\ & \omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{K J}}. \end{aligned} \right.$$

Die erste Gleichung gestaltet sich weiter zu

$$(46) \frac{1}{\omega^6 \mathfrak{E} \sin^2 \omega} \left[4 \mathfrak{E} \sin^2 \omega - \frac{9 \mathfrak{E} \sin 2 \omega}{\omega} + \frac{24 \mathfrak{E} \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] - \frac{6144 K^2 J^3}{P^2 F l^6} = 0.$$

Das erste Glied ist in der Tabelle 4 zahlenmäßig angegeben.

Setzt man in Gl. (42) $M_a = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\mathfrak{X} g \omega} - 1 \right], \alpha = 0$, so erhält man

$$(47) y = \frac{P}{2 X} \left[x \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{l \mathfrak{E} \sin \left(\frac{x \omega}{l} \right) \mathfrak{E} \sin \left(\omega - \frac{x \omega}{l} \right)}{\omega \mathfrak{E} \sin \omega} \right]$$

und ferner

$$(48) \quad y_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{8X} \left[1 - \frac{\Im g \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right].$$

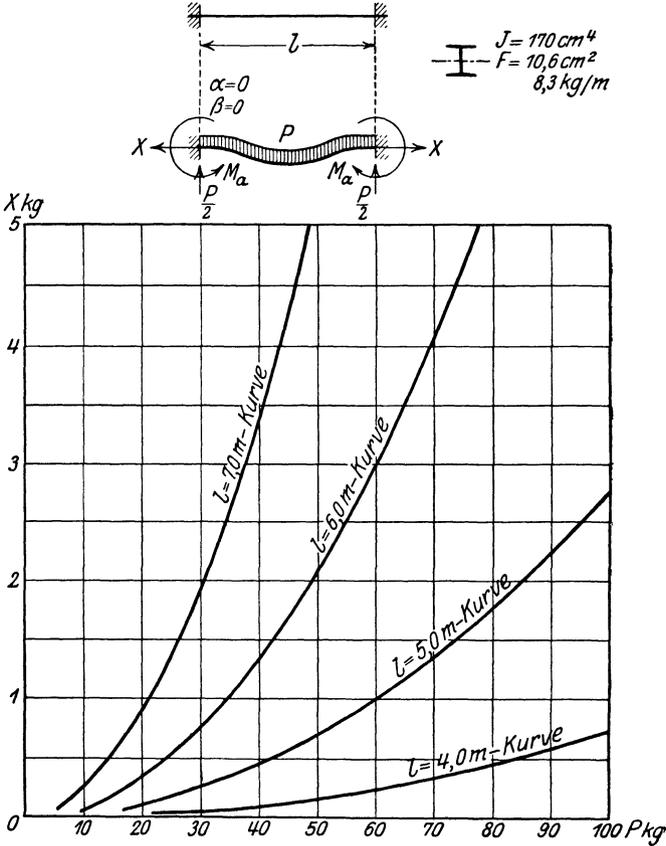


Abb. 26.

Der Ausdruck für M (Gl. 43) vereinfacht sich in

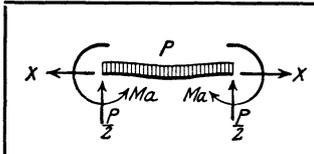
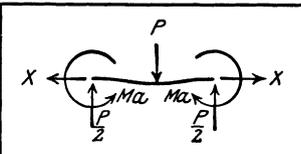
$$(49) \quad M = \frac{Pl}{4\omega^2} \left[1 - \frac{\omega \cos\left(\frac{2x\omega}{l} - \omega\right)}{\sin \omega} \right].$$

Mit den in § 4 angegebenen Zahlenwerten berechnet sich

$$\begin{aligned} \alpha_a &= 0,000013 \text{ cm,} \\ M_a &= 3333,33 \text{ cm kg,} \\ y_{\text{Mitte}} &= 0,04669 \text{ cm,} \\ M_{\text{Mitte}} &= 1666,67 \text{ cm kg.} \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf § 4 sieht man, daß diese Größen ohne Ausnahme eine beträchtliche Verminderung erfahren; der Träger ist also bei gleichmäßig verteilter Last weniger beansprucht, als wenn sich die Last in der Trägermitte konzentriert.

Die folgende Tafel erlaubt einen Vergleich der Rechnungsergebnisse beider Belastungsarten:

				
	Für $\alpha = 0$ $\beta = 0$	$X = 0$ $\beta = 0$	$\alpha = 0$ $\beta = 0$	$X = 0$ $\beta = 0$
$ \alpha $ cm	0	0,000013	0	0,000052
y_{Mitte} cm	0,04662	0,04669	0,093368	0,093371
M_{Mitte} cm kg	1666,64	1666,67	4999,86	5000,00
X kg	0,74	0	2,9	0
M_a cm kg	3333,13	3333,33	4999,86	5000,00

$$\begin{array}{ll} J = 170 \text{ cm}^4 & E = 2100000 \text{ kg/cm}^2 \\ F = 10,6 \text{ cm}^2 & P = 100 \text{ kg} \\ & 8,3 \text{ kg/m} \quad l = 4,0 \text{ m.} \end{array}$$

Sämtliche Formeln, zu denen wir in den vorhergehenden Paragraphen gelangten, enthalten transzendente Größen und gestatten leider keinen leicht erfaßbaren Schluß zu ziehen. Wir begnügen uns daher mit einer übersichtlichen Zusammenstellung

der graphischen Darstellungen, die wir im Verlauf der Ab-
handlung für einen bestimmten Träger aufgestellt haben (Abb. 28).

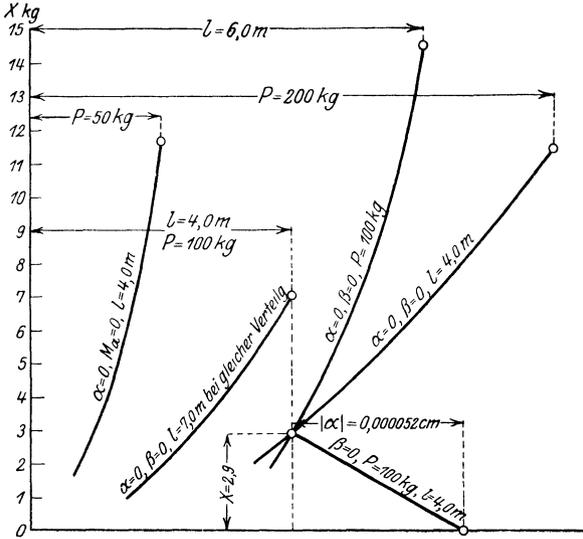


Abb. 28.

Tabelle 3.

ω	$\frac{\sin \omega - \omega}{\omega^5 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$	$\frac{\sin 2\omega - 2\omega}{\omega^3 \sin^2 \omega}$	ω	$\frac{\sin \omega - \omega}{\omega^5 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$	$\frac{\sin 2\omega - 2\omega}{\omega^3 \sin^2 \omega}$
0	∞	∞			
0,001	166666,6333	1333333,6000	0,016	651,0083	5208,1545
2	41666,6333	333333,6000	17	576,6679	4613,4330
3	18518,4851	148148,4148	18	514,3700	4115,0485
4	10416,6333	83333,6000	19	461,6472	3693,2668
5	6666,6333	53333,1733	0,020	416,6333	3333,1559
6	4629,5963	37036,8922	21	377,8956	3023,2540
7	3401,3272	27210,7068	22	344,3193	2754,6431
8	2604,6333	20833,1443	23	315,0265	2520,3011
9	2057,5798	16460,7249	24	289,3185	2314,6371
0,010	1666,6333	13333,1600	25	266,6333	2133,1556
11	1377,3771	11019,1042	26	246,5150	1972,2089
12	1157,3741	9259,0823	27	228,5903	1828,8116
13	986,1600	7889,3695	28	212,5517	1700,5045
14	850,3068	6802,5435	29	198,1434	1585,2364
15	740,7074	5925,7475	0,030	185,1518	1481,3038

Tabelle 3 (Fortsetzung).

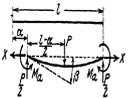
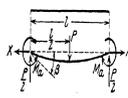
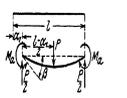
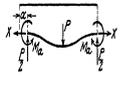
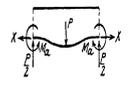
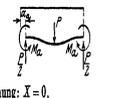
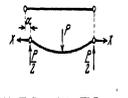
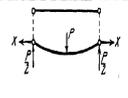
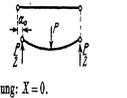
ω	$\frac{\sin \omega - \omega}{\omega^5 \text{Co}^2 \frac{\omega}{2}}$	$\frac{\sin 2\omega - 2\omega}{\omega^3 \text{Sin}^2 \omega}$	ω	$\frac{\sin \omega - \omega}{\omega^5 \text{Co}^2 \frac{\omega}{2}}$	$\frac{\sin 2\omega - 2\omega}{\omega^3 \text{Sin}^2 \omega}$
0,031	173,3971	1387,2659	0,066	38,2281	305,9135
32	162,7271	1301,9055	67	37,0945	296,8447
33	153,0123	1224,1871	68	36,0105	288,1730
34	144,1420	1153,2280	69	34,9733	279,8756
35	136,0211	1088,2576	0,070	33,9803	271,9310
36	128,5675	1028,6288	71	33,0289	264,3201
37	121,7100	973,7692	72	32,1169	257,0240
38	115,3868	923,1832	73	31,2421	250,0256
39	109,5437	876,4385	74	30,4025	243,3091
0,040	104,1333	833,1536	75	29,5963	236,8594
41	99,1140	793,0009	76	28,8217	230,6626
42	94,4489	755,6801	77	28,0771	224,7057
43	90,1055	720,9328	78	27,3609	218,9764
44	86,0548	688,5275	79	26,6718	213,4634
45	82,2712	658,2585	0,080	26,0084	208,1557
46	78,7316	629,9412	81	25,3693	203,0434
47	75,4156	603,4137	82	24,7535	198,1106
48	72,3046	578,5264	83	24,1598	193,3677
49	69,3822	555,1465	84	23,5873	188,7869
0,050	66,6333	533,1536	85	23,0347	184,3668
51	64,0446	512,4456	86	22,5014	180,1000
52	61,6038	492,4456	87	21,9863	175,9795
53	59,2998	474,4871	88	21,4887	171,9987
54	57,1226	457,0697	89	21,0078	168,1513
55	55,0631	440,5937	0,090	20,5428	164,4315
56	53,1129	424,9924	91	20,0931	160,8336
57	51,2645	410,1742	92	19,6579	157,3524
58	49,5109	396,1758	93	19,2368	153,9828
59	47,8457	382,8540	94	18,8289	150,7211
0,060	46,2630	370,1972	95	18,4339	147,5602
61	44,7575	358,1489	96	18,0512	144,4984
62	43,3243	346,6832	97	17,6802	141,5308
63	41,9588	335,7592	98	17,3206	138,6535
64	40,6568	325,3432	99	16,9718	135,8630
65	39,4144	315,4042	0,100	16,6334	133,1558
			∞	0	0

Tabelle 4.

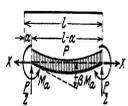
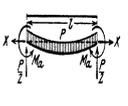
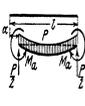
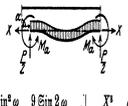
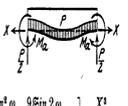
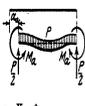
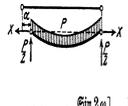
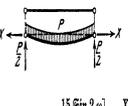
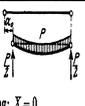
ω	$4 \sin^2 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - \frac{9 \sin 2 \omega}{\omega} - 6$	ω	$4 \sin^2 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - \frac{9 \sin 2 \omega}{\omega} - 6$
	$\omega^6 \sin^2 \omega$		$\omega^6 \sin^2 \omega$
0	∞		
0,001	25 396,8	0,041	15,1
2	6 349,2	42	14,4
3	2 821,9	43	13,8
4	1 587,3	44	13,1
5	1 015,9	45	12,5
6	705,5	46	12,0
7	518,3	47	11,5
8	396,8	48	11,0
9	313,5	49	10,6
0,010	254,0	0,050	10,2
11	209,9	51	9,76
12	176,4	52	9,39
13	150,3	53	9,04
14	129,6	54	8,70
15	112,9	55	8,39
16	99,2	56	8,09
17	87,9	57	7,81
18	78,4	58	7,54
19	70,3	59	7,29
0,020	63,5	0,060	7,05
21	57,6	61	6,82
22	52,5	62	6,60
23	48,0	63	6,39
24	44,1	64	6,20
25	40,6	65	6,01
26	37,6	66	5,83
27	34,8	67	5,65
28	32,4	68	5,49
29	30,2	69	5,33
0,030	28,2	0,070	5,18
31	26,4	71	5,03
32	24,8	72	4,89
33	23,3	73	4,76
34	22,0	74	4,63
35	20,7	75	4,51
36	19,6	76	4,39
37	18,5	77	4,28
38	17,6	78	4,12
39	16,7	79	4,06
0,040	15,9	0,080	3,96

Tabelle 4 (Fortsetzung).

ω	$4 \sin^2 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - \frac{9 \sin 2\omega}{\omega} - 6$	ω	$4 \sin^2 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - \frac{9 \sin 2\omega}{\omega} - 6$
	$\omega^6 \sin^2 \omega$		$\omega^6 \sin^2 \omega$
0,081	3,87	0,091	3,06
82	3,77	92	3,00
83	3,68	93	2,93
84	3,59	94	2,87
85	3,51	95	2,81
86	3,43	96	2,75
87	3,35	97	2,69
88	3,27	98	2,64
89	3,20	99	2,59
0,090	3,12	0,100	2,53
		∞	0

$\omega = \frac{l-\alpha}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}$	$\omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}$	$\omega = 0$
 <p>X-Gleichung:</p> $2 + 6\alpha \frac{\omega}{2} = \frac{3 \sin \omega}{\omega} + \beta K J (\sin \omega - \omega) + 32 \beta^2 K^2 J^2 (\sin 2\omega - 2\omega)$ $\frac{1024 K^2 J^2}{P^2 (1-\alpha)^2} + \frac{256 \alpha K^2 J^2}{P^2 (1-\alpha)^2 \omega^2} = 0$ $y = \frac{P}{2X} \left[z - \frac{(1-\alpha) \sin \frac{z\omega}{1-\alpha} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha z \omega}{1-\alpha} \right)}{\omega \cos \frac{\omega}{2}} \right] + \beta (1-\alpha) \frac{z\omega}{\omega \sin \omega} \sin \left(\frac{z\omega}{1-\alpha} - \omega \right)$ $y_{\text{max}} = \frac{P(1-\alpha)}{2\omega X} \left[\frac{2\omega}{3} - 2\frac{\omega}{3} \right] + \frac{\beta(1-\alpha) 2\frac{\omega}{3}}{2\omega}$ $M = \frac{P(1-\alpha) \sin \left(\frac{2z\omega}{1-\alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{4\omega \cos \frac{\omega}{2}} + \frac{2\beta \omega K J \cos \left(\omega - \frac{2z\omega}{1-\alpha} \right)}{(1-\alpha) \sin \omega}$ $M_z = \frac{P(1-\alpha)}{4\omega} 2\frac{\omega}{3} + \frac{2\omega K J \beta}{(1-\alpha) 2\frac{\omega}{3}}$ $Q = \frac{P \cos \left(\frac{2z\omega}{1-\alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{2 \cos \frac{\omega}{2}} + \beta X \sin \left(\omega - \frac{2z\omega}{1-\alpha} \right) \sin \omega$	 <p>X-Gleichung:</p> $2 + 6\alpha \frac{\omega}{2} = \frac{3 \sin \omega}{\omega} + \beta K J (\sin \omega - \omega) + 32 \beta^2 K^2 J^2 (\sin 2\omega - 2\omega) - \frac{1024 K^2 J^2}{P^2 \omega^2} = 0$ $y = \frac{P}{2X} \left[z - \frac{1 \sin \frac{z\omega}{1} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{z\omega}{1} \right)}{\omega \cos \frac{\omega}{2}} \right] + \beta (1-\alpha) \frac{z\omega}{\omega \sin \omega} \sin \left(\frac{z\omega}{1} - \omega \right)$ $y_{\text{max}} = \frac{P}{2\omega X} \left[\frac{\omega}{3} - 2\frac{\omega}{3} \right] + \frac{\beta \frac{\omega}{3}}{2\omega}$ $M = \frac{P \sin \left(\frac{2z\omega}{1} - \frac{\omega}{2} \right)}{4\omega \cos \frac{\omega}{2}} + \frac{2\beta \omega K J \cos \left(\omega - \frac{2z\omega}{1} \right)}{1 \sin \omega}$ $M_z = \frac{P}{4\omega} 2\frac{\omega}{3} + \frac{2\omega K J \beta}{1 2\frac{\omega}{3}}$ $Q = \frac{P \cos \left(\frac{2z\omega}{1} - \frac{\omega}{2} \right)}{2 \cos \frac{\omega}{2}} + \beta X \sin \left(\omega - \frac{2z\omega}{1} \right) \sin \omega$	 <p>X-Gleichung: X = 0.</p> $y = \frac{P}{16 E J} \left[z^2 (1-\alpha) - \frac{4z^3}{3} \right] \frac{1}{1-\alpha}$ $y_{\text{max}} = \frac{P(1-\alpha)^2}{192 E J} + \frac{\beta(1-\alpha)}{4}$ $M = \frac{P}{2} z - \frac{P(1-\alpha)}{8} + \frac{2\beta E J}{1-\alpha}$ $M_z = \frac{P(1-\alpha)}{8} + \frac{2\beta E J}{1-\alpha}$ $Q = \frac{P}{2}$
 <p>X-Gleichung:</p> $2 + 6\alpha \frac{\omega}{2} = \frac{3 \sin \omega}{\omega} - \frac{1024 K^2 J^2}{P^2 (1-\alpha)^2} - \frac{256 \alpha K^2 J^2}{P^2 (1-\alpha)^2 \omega^2} = 0$ $y = \frac{P}{2X} \left[z - \frac{(1-\alpha) \sin \frac{z\omega}{1-\alpha} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha z \omega}{1-\alpha} \right)}{\omega \cos \frac{\omega}{2}} \right] + y_{\text{max}} = \frac{P(1-\alpha)}{2\omega X} \left[\frac{\omega}{3} - 2\frac{\omega}{3} \right]$ $M = \frac{P(1-\alpha) \sin \left(\frac{2z\omega}{1-\alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{4\omega \cos \frac{\omega}{2}}$ $M_z = \frac{P(1-\alpha)}{4\omega} 2\frac{\omega}{3}$ $Q = \frac{P \cos \left(\frac{2z\omega}{1-\alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{2 \cos \frac{\omega}{2}}$	 <p>X-Gleichung:</p> $2 + 6\alpha \frac{\omega}{2} = \frac{3 \sin \omega}{\omega} - \frac{1024 K^2 J^2}{P^2 \omega^2} = 0$ $y = \frac{P}{2X} \left[z - \frac{1 \sin \frac{z\omega}{1} \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{z\omega}{1} \right)}{\omega \cos \frac{\omega}{2}} \right] + y_{\text{max}} = \frac{P}{2\omega X} \left[\frac{\omega}{3} - 2\frac{\omega}{3} \right]$ $M = \frac{P \sin \left(\frac{2z\omega}{1} - \frac{\omega}{2} \right)}{4\omega \cos \frac{\omega}{2}}$ $M_z = \frac{P}{4\omega} 2\frac{\omega}{3}$ $Q = \frac{P \cos \left(\frac{2z\omega}{1} - \frac{\omega}{2} \right)}{2 \cos \frac{\omega}{2}}$	 <p>X-Gleichung: X = 0.</p> $y = \frac{P}{16 E J} \left[z^2 \left(1 - \frac{P^2 P}{15360 E^2 J^2} \right) - \frac{4z^3}{3} \right]$ $y_{\text{max}} = \frac{P^2 P}{192 E J} \left[1 - \frac{P^2 P}{15360 E^2 J^2} \right]$ $M = \frac{P}{2} z - \frac{P}{8} \left[1 - \frac{P^2 P}{15360 E^2 J^2} \right]$ $M_z = \frac{P}{8} \left[1 - \frac{P^2 P}{15360 E^2 J^2} \right]$ $Q = \frac{P}{2} \cdot \alpha = \frac{P^2 P}{15360 E^2 J^2}$
 <p>X-Gleichung:</p> $2 + 6\alpha \frac{2\omega}{2} = \frac{3 \sin 2\omega}{2\omega} - \frac{1024 K^2 J^2}{P^2 (1-\alpha)^2} - \frac{256 \alpha K^2 J^2}{P^2 (1-\alpha)^2 \omega^2} = 0$ $y = \frac{P}{2X} \left[z - \frac{(1-\alpha) \sin \left(\frac{2z\omega}{1-\alpha} \right)}{2\omega \cos \omega} \right] + y_{\text{max}} = \frac{P(1-\alpha)}{4X} \left[1 - 2\frac{\omega}{\omega} \right]$ $M = \frac{P(1-\alpha) \sin \left(\frac{2z\omega}{1-\alpha} \right)}{4\omega \cos \omega}$ $M_z = 0$ $Q = \frac{P \cos \left(\frac{2z\omega}{1-\alpha} \right)}{2 \cos \omega}$	 <p>X-Gleichung:</p> $2 + 6\alpha \frac{2\omega}{2} = \frac{3 \sin 2\omega}{2\omega} - \frac{1024 K^2 J^2}{P^2 \omega^2} = 0$ $y = \frac{P}{2X} \left[z - \frac{1 \sin \left(\frac{2z\omega}{1} \right)}{2\omega \cos \omega} \right] + y_{\text{max}} = \frac{P}{4X} \left[1 - 2\frac{\omega}{\omega} \right]$ $M = \frac{P \sin \left(\frac{2z\omega}{1} \right)}{4\omega \cos \omega}$ $M_z = 0$ $Q = \frac{P \cos \left(\frac{2z\omega}{1} \right)}{2 \cos \omega}$	 <p>X-Gleichung: X = 0.</p> $y = \frac{P}{16 E J} \left[z^2 \left(1 - \frac{P^2 P}{960 E^2 J^2} \right) - \frac{4}{3} z^3 \right]$ $y_{\text{max}} = \frac{P^2 P}{48 E J} \left[1 - \frac{P^2 P}{960 E^2 J^2} \right]$ $M = \frac{P}{2} z \cdot \quad M_z = 0$ $Q = \frac{P}{2} \cdot \quad \alpha = \frac{P^2 P}{960 E^2 J^2}$

* Hier ist α und β absolut genommen.

$\omega = \frac{1-\alpha}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}$	$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}$	$\omega = 0$
 <p>X-Gleichung:</p> $\frac{P^2}{96 \sin^2 \omega} \left[4 \sin^4 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] - \frac{P X \beta}{8 \sin^2 \omega} \left[2 + \frac{\sin 2\omega}{\omega} - \frac{4 \sin^4 \omega}{\omega^2} \right] - \frac{X^2 \beta^2}{8 \sin^2 \omega} \left[2 - \frac{\sin 2\omega}{\omega} \right] \frac{X^2}{K F} \frac{\alpha X^2}{1-\alpha} = 0$ $y = \frac{P z}{2 X} \left[1 - \frac{z}{1-\alpha} \right] - \frac{(1-\alpha) \left(\frac{P}{2 X} - \beta \right) \sin \left(\frac{z \omega}{1-\alpha} \right) \sin \left(\omega - \frac{z \omega}{1-\alpha} \right)}{\omega \sin \omega}$ $y_{\max} = \frac{P(1-\alpha)}{8 X} \left[1 - \frac{2 \beta \frac{\omega}{2}}{\omega} \right] + \frac{\beta(1-\alpha) 2 \beta \frac{\omega}{2}}{2 \omega}$ $M = \frac{P(1-\alpha)}{4 \omega^2} \left[1 - \frac{\omega \cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{\sin \omega} \right] + \frac{\beta X(1-\alpha) \cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{2 \omega \sin \omega}$ $M_x = \frac{P(1-\alpha)}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{2 \beta \frac{\omega}{2}} - 1 \right] - \frac{1-\alpha}{2 \omega} \frac{X}{2 \beta \frac{\omega}{2}} \quad Q = \frac{P}{2} - \beta X \frac{\sin \left(\omega - \frac{2 z \omega}{1-\alpha} \right)}{\sin \omega}$	 <p>X-Gleichung:</p> $\frac{P^2}{96 \sin^2 \omega} \left[4 \sin^4 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] + \frac{P X \beta}{8 \sin^2 \omega} \left[2 + \frac{\sin 2\omega}{\omega} - \frac{4 \sin^4 \omega}{\omega^2} \right] - \frac{X^2 \beta^2}{8 \sin^2 \omega} \left[2 - \frac{\sin 2\omega}{\omega} \right] \frac{X^2}{K F} = 0$ $y = \frac{P z}{2 X} \left[1 - \frac{z}{1-\alpha} \right] - \frac{l \left(\frac{P}{2 X} - \beta \right) \sin \left(\frac{z \omega}{1-\alpha} \right) \sin \left(\omega - \frac{z \omega}{1-\alpha} \right)}{\omega \sin \omega}$ $y_{\max} = \frac{P l}{8 X} \left[1 - \frac{2 \beta \frac{\omega}{2}}{\omega} \right] + \frac{\beta l 2 \beta \frac{\omega}{2}}{2 \omega}$ $M = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[1 - \frac{\omega \cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{\sin \omega} \right] + \frac{l \beta X \cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{2 \omega \sin \omega}$ $M_x = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{2 \beta \frac{\omega}{2}} - 1 \right] - \frac{\beta l X}{2 \omega} \frac{\sin \left(\omega - \frac{2 z \omega}{1-\alpha} \right)}{\sin \omega} \quad Q = \frac{P}{2} - \beta X \frac{\sin \left(\omega - \frac{2 z \omega}{1-\alpha} \right)}{\sin \omega}$	 <p>X-Gleichung: $X = 0$.</p> $y = \frac{P}{24 E J} \left[\frac{z^4}{(1-\alpha)} - 2z^3 + z^2(1-\alpha) \right] + \beta \left[z - \frac{z^2}{(1-\alpha)} \right]$ $y_{\max} = \frac{P(1-\alpha)^2}{384 E J} + \frac{\beta(1-\alpha)}{4}$ $M = \frac{P}{2} z - \frac{P z^2}{2(1-\alpha)} - \frac{P(1-\alpha)}{12} + \frac{3 \beta E J}{1-\alpha}$ $M_x = \frac{P(1-\alpha)}{12} - \frac{3 \beta E J}{1-\alpha} \quad Q = \frac{P}{2} - \frac{P z}{1-\alpha}$
 <p>X-Gleichung:</p> $\frac{P^2}{96 \sin^2 \omega} \left[4 \sin^4 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] - \frac{X^2}{K F} \frac{\alpha X^2}{1-\alpha} = 0$ $y = \frac{P}{2 X} \left[z \left(1 - \frac{z}{1-\alpha} \right) - \frac{(1-\alpha) \sin \left(\frac{z \omega}{1-\alpha} \right) \sin \left(\omega - \frac{z \omega}{1-\alpha} \right)}{\omega \sin \omega} \right]$ $y_{\max} = \frac{P(1-\alpha)}{8 X} \left[1 - \frac{2 \beta \frac{\omega}{2}}{\omega} \right] \quad M = \frac{P(1-\alpha)}{4 \omega^2} \left[1 - \frac{\omega \cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{\sin \omega} \right]$ $M_x = \frac{P(1-\alpha)}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{2 \beta \frac{\omega}{2}} - 1 \right] \quad Q = -\frac{P \sin \left(\omega - \frac{2 z \omega}{1-\alpha} \right)}{2 \sin \omega}$	 <p>X-Gleichung:</p> $\frac{P^2}{96 \sin^2 \omega} \left[4 \sin^4 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] - \frac{X^2}{K F} = 0$ $y = \frac{P}{2 X} \left[z \left(1 - \frac{z}{1-\alpha} \right) - l \sin \left(\frac{z \omega}{1-\alpha} \right) \sin \left(\omega - \frac{z \omega}{1-\alpha} \right) \right]$ $y_{\max} = \frac{P l}{8 X} \left[1 - \frac{2 \beta \frac{\omega}{2}}{\omega} \right] \quad M = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[1 - \frac{\omega \cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{\sin \omega} \right]$ $M_x = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{2 \beta \frac{\omega}{2}} - 1 \right] \quad Q = \frac{P \sin \left(\omega - \frac{2 z \omega}{1-\alpha} \right)}{2 \sin \omega}$	 <p>X-Gleichung: $X = 0$.</p> $y = \frac{P}{24 E J} \left[(1-\alpha) - 2z^2 + z^2(1-\alpha) \right]$ $y_{\max} = \frac{P(1-\alpha)^2}{384 E J} \quad M = \frac{P}{2} z - \frac{P z^2}{2(1-\alpha)} - \frac{P(1-\alpha)}{12}$ $M_x = \frac{P(1-\alpha)}{12} \quad Q = \frac{P}{2} - \frac{P z}{1-\alpha}$ $\alpha_1 = \frac{P^2 l^3}{60480 E J^2}$
 <p>X-Gleichung:</p> $\frac{P^2}{96 \omega^2 \cos^2 \omega} \left[6 + 24 \cos^2 \omega - 4 \omega^2 \cos^4 \omega - 15 \frac{\sin 2\omega}{\omega} \right] - \frac{X^2}{K F} \frac{\alpha X^2}{1-\alpha} = 0$ $y = \frac{P}{2 X} \left[z^2 - \frac{z^2(1-\alpha)}{2 \omega^2} + \frac{P(1-\alpha) \cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{4 \omega^2 X \cos \omega} \right]$ $y_{\max} = \frac{P(1-\alpha)}{4 X} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\omega^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \omega} \right) \right]$ $M = \frac{P(1-\alpha)}{4 \omega^2} \left[1 - \frac{\cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{\cos \omega} \right] \quad Q = \frac{P \sin \left(\omega - \frac{2 z \omega}{1-\alpha} \right)}{2 \omega \cos \omega}$ $M_x = 0$	 <p>X-Gleichung:</p> $\frac{P^2}{96 \omega^2 \cos^2 \omega} \left[6 + 24 \cos^2 \omega - 4 \omega^2 \cos^4 \omega - 15 \frac{\sin 2\omega}{\omega} \right] - \frac{X^2}{K F} = 0$ $y = \frac{P}{2 X} \left[z^2 - \frac{z^2(1-\alpha)}{2 \omega^2} \right] + \frac{P l \cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{4 \omega^2 X \cos \omega}$ $y_{\max} = \frac{P l}{4 X} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\omega^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \omega} \right) \right]$ $M = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[1 - \frac{\cos \left(\frac{2 z \omega}{1-\alpha} - \omega \right)}{\cos \omega} \right]$ $M_x = 0 \quad Q = -\frac{P \sin \left(\omega - \frac{2 z \omega}{1-\alpha} \right)}{2 \omega \cos \omega}$	 <p>X-Gleichung: $X = 0$.</p> $y = \frac{P}{24 E J} \left[\frac{z^4}{(1-\alpha)} - 2z^3 + z^2(1-\alpha) \right]$ $y_{\max} = \frac{5 P(1-\alpha)^2}{384 E J} \quad M = \frac{P}{2} z - \frac{P z^2}{2(1-\alpha)}$ $M_x = 0 \quad Q = \frac{P}{2} - \frac{P z}{1-\alpha}$ $\alpha_2 = \frac{17 P^2 l^3}{40320 E J^2}$

*) Hier ist α und β absolut genommen.

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau

nebst einer Tafel

der Kreis- und Hyperbelfunktionen

Von

Keiichi Hayashi

Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität
Fukuoka-Hakosaki, Japan

Mit 150 Textfiguren. 1921

7.50 Goldmark; gebunden 9.40 Goldmark / 1.80 Dollar; gebunden 2.25 Dollar

Die Knickfestigkeit. Von Dr.-Ing. **Rudolf Mayer**, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 280 Textabbildungen und 87 Tabellen. 1921. 16 Goldmark / 4.30 Dollar

Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes. Von Ing. **Fr. Bleich**, Wien. Mit 108 Textfiguren. 1918. 10 Goldmark / 2.40 Dollar

Theorie und Berechnung der statisch unbestimmten Tragwerke. Elementares Lehrbuch. Von **H. Buchholz**. Mit 303 Textabbildungen. 1921. 8 Goldmark / 2 Dollar

Berechnung von Rahmenkonstruktionen und statisch unbestimmten Systemen des Eisen- und Eisenbetonbaues. Von Ingenieur **P. Ernst Glaser**. Mit 112 Textabbildungen. 1919. 3.60 Goldmark / 0.90 Dollar

Mehrteilige Rahmen. Verfahren zur einfachen Berechnung von mehrstieligen, mehrstöckigen und mehrteiligen geschlossenen Rahmen (Rahmenbalkenträgern). Von Ingenieur **Gustav Spiegel**. Mit 107 Textabbildungen. 1920. 5 Goldmark / 1.25 Dollar

Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzgleichungen. Von Dr. techn. **Josef Fritsche**, Ingenieur, Prag. 1923. 3 Goldmark / 0.75 Dollar

Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Von Dr. **Paul Funk**, Privatdozent an der Deutschen Universität und an der Technischen Hochschule in Prag. Mit 24 Textabbildungen. 1920. 2.50 Goldmark / 0.75 Dollar

Die Methode der Festpunkte zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktionen mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis insbesondere ausgeführten Eisenbetontragwerken. Von Dr.-Ing. Ernst Suter. Mit 591 Figuren im Text und auf 15 Tafeln. 1923.

19 Goldmark; gebunden 21 Goldmark / 4.55 Dollar; gebunden 5.05 Dollar

Statik der Vierendeelträger. Von Dr.-Ing. Karl Kriso. Mit 185 Textfiguren und 11 Tabellen. 1922.

11 Goldmark; gebunden 13 Goldmark / 2.55 Dollar; gebunden 3.10 Dollar

Kompodium der Statik der Baukonstruktionen. Von Privatdozent Dr.-Ing. J. Pirlet, Aachen. In zwei Bänden.

Erster Band: **Die statisch bestimmten Systeme.** Vollwandige Systeme und Fachwerke. In Vorbereitung.

Zweiter Band: **Die statisch unbestimmten Systeme.** In vier Teilen.

Zweiter Band, 1. Teil: Die allgemeinen Grundlagen zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Die Untersuchung elastischer Formänderungen. Die Elastizitätsgleichungen und deren Auflösung. Mit 136 Textfiguren. 1921.

6.50 Goldmark; gebunden 8.50 Goldmark / 1.55 Dollar; geb. 2 Dollar

Zweiter Band, 2. Teil: Berechnung der einfacheren statisch unbestimmten Systeme: Grade Balken mit Endeinspannungen und mehr als zwei Stützen. — Einfache Rahmengebilde. Zweigelenkbogen. — Gewölbe. — Armierte Balken. Mit 298 Textfiguren. 1923.

7.50 Goldmark; gebunden 9 Goldmark / 1.80 Dollar; geb. 2.15 Dollar

Zweiter Band, 3. Teil: Die hochgradig statisch unbestimmten Systeme. Durchlaufende Träger auf starren und elastischen Stützen. Fachwerke mit starren Knotenpunktverbindungen. — Stockwerkrahmen. — Vierendeelträger und verwandte Rahmengebilde. In Vorbereitung.

Zweiter Band, 4. Teil: Das statisch unbestimmte Fachwerk. Aufgaben des Brücken- und Eisenhochbaues. In Vorbereitung.

Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien. Von Dr.-Ing. C. Bach und R. Baumann, Professoren an der Technischen Hochschule Stuttgart. Zweite, stark vermehrte Auflage. Mit 936 Figuren. 1921. Geb. 15 Goldmark / Geb. 3.60 Dollar

Die Eisenkonstruktionen. Ein Lehrbuch für Schule und Zeichentisch nebst einem Anhang mit Zahlentafeln zum Gebrauch beim Berechnen und Entwerfen eiserner Bauwerke. Von Dipl.-Ing. Prof. L. Geusen, Studienrat in Dortmund. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 522 Figuren im Text und auf 2 farbigen Tafeln. 1921. Geb. 12 Goldmark / Geb. 2.90 Dollar

Taschenbuch für Bauingenieure. Unter Mitwirkung von Fachleuten herausgegeben von Geh. Hofrat Prof. Dr.-Ing. E. h. M. Foerster, Dresden. Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 3193 Textfiguren. In zwei Teilen. 1921. Geb. 24 Goldmark / Geb. 5.75 Dollar