MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN
VON
DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON
OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN
ERICH HECKE
IN HAMBURG

Sonderabdruck aus Band 107, Heft 2

Walther Rückert

Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale.

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH
1932

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Sie betragen nach einer Kalkulation 6 % des Gestehungspreises eines Bandes. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein (Schreibmaschine, Formeln aber *nur* handschriftlich).

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, bevor noch Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an Herrn Blumenthal zu schicken, der dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Größere Änderungen und Zusätze, die sich nicht auf die Berichtigung von Irrtümern beschränken, bedürfen der Zustimmung des annehmenden Redakteurs und sollen, auch um der geschichtlichen Genauigkeit willen, in einer Fußnote als nachträglich gekennzeichnet und datiert werden.

Als Norm soll gelten, daß der Verfasser von jeder Arbeit *eine Fahnenkorrektur und eine Korrektur in Bogen* liest. Wir bitten unsere Verfasser, sich hiermit begnügen zu wollen.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen.

Die **MATHEMATISCHEN ANNALEN**

erscheinen zwanglos in Heften, die zu Bänden von rd. 50 Bogen vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Mathematiker Vereinigung haben Anspruch auf einen Vorzugspreis.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Geschäftsführender Redakteur ist

O. Blumenthal, Aachen, Rütscherstraße 38.

Alle Korrektursendungen sind an ihn zu richten.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor **O. Blumenthal,** Aachen, Rütscherstraße 38,

Professor **E. Hecke,** Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 21,

Geheimrat **D. Hilbert,** Göttingen, Wilhelm-Weber-Straße 29.

ISBN 978-3-662-40662-5 ISBN 978-3-662-41142-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-41142-1

Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale.

Von

Walther Rückert in Heidelberg.

§ 1.

Einleitung.

In der Eliminationstheorie der konvergenten Potenzreihen mehrerer komplexen Veränderlichen werden die gemeinsamen Nullstellen eines Systems im Nullpunkt verschwindender Potenzreihen

$$P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m) \tag{1}$$

untersucht. Das Hauptergebnis der Theorie ist das folgende Theorem von Weierstraß[1]):

Die gemeinsamen Nullstellen des Systems (1) *in der Umgebung des Nullpunktes bilden eine endliche Anzahl irreduzibler analytischer Gebilde, die durch den Nullpunkt gehen.*

Die bisherigen Beweise[2]) dieses grundlegenden Ergebnisses stützen sich vorwiegend auf Hilfsmittel aus der Funktionentheorie. Die Gebilde werden aber in der folgenden *algebraischen* Darstellung gewonnen.

$$f(\omega) \equiv \omega^{\varrho} + a_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)\,\omega^{\varrho-1} + \ldots + a_{\varrho}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = 0 \tag{2}$$

sei eine irreduzible algebraische Gleichung mit konvergenten, im Nullpunkt verschwindenden Potenzreihen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ als Koeffizienten; es sei ferner $D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ die Diskriminante von $f(\omega)$ und

$$D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)\,\eta_i = g_i(\omega) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, s) \tag{3}$$

ein System ganzer rationaler Funktionen von ω wieder mit konvergenten, im Nullpunkt verschwindenden Potenzreihen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ als Koeffizienten; dann bestimmen die sich für die Umgebung des Nullpunktes im Raume der Variabeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ aus (2) und (3) ergebenden Werte[3])

---

[1]) K. Weierstraß, Math. Werke, Bd. III, S. 79.

[2]) H. Poincaré, Acta Mathematica **26**, S. 55—56; ferner Thèse (1879), S. 6—14; O. Blumenthal, Zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher, Math. Annalen **57** (1903), S. 356—368; W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 1. Lieferung, 1. Aufl., Leipzig-Berlin, Teubner, 1924 (zitiert Osgood), S. 103ff.

[3]) Dazu kommen noch die Grenzstellen.

der $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ ein irreduzibles analytisches Gebilde[4]) von der Dimension k im Raume von $n = k + s$ Veränderlichen.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß eine sachgemäße Behandlung des Eliminationsproblems bis zu der algebraischen Darstellung (2) und (3) der Gebilde nur formale Methoden, also keine funktionentheoretischen Hilfsmittel benötigt. Als solche Methoden erweisen sich die allgemeine Idealtheorie und die allgemeine Körpertheorie.

Zunächst geben wir der Eliminationsaufgabe eine zweckentsprechende Formulierung. Es ist klar, daß mit den Potenzreihen des Systems (1) auch jede Reihe von der Form

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4}$$

mit irgendwelchen $Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus dem Bereiche aller konvergenten Potenzreihen in n Veränderlichen innerhalb einer bestimmten Umgebung des Nullpunktes in den gemeinsamen Nullstellen von (1) verschwindet. Die Gesamtheit (4) ist aber gerade ein Ideal in diesem Bereich. Man wird daher ein Ideal zugrunde legen und nach den gemeinsamen Nullstellen eines Ideals im Bereich der konvergenten Potenzreihen in n Veränderlichen fragen.

Der Aufbau der Arbeit ist dann der folgende:

In § 2 entwickeln wir die Arithmetik im Bereich der konvergenten Potenzreihen in n Veränderlichen; wir bezeichnen diesen Bereich mit $\mathfrak{J}_n$. Der § 3 handelt von der Idealtheorie in $\mathfrak{J}_n$. Es wird der Basissatz für Ideale bewiesen, wodurch der Zerlegungssatz der allgemeinen Idealtheorie auf die Ideale von $\mathfrak{J}_n$ anwendbar wird. Jedes Ideal ist aufspaltbar in endlich viele Primärideale mit zugehörigen eindeutig bestimmten Primidealen. Das Eliminationsproblem allgemeiner Ideale ist hiermit auf das Eliminationsproblem von Primidealen zurückgeführt. In § 4 führen wir die formale Elimination eines Primideals $\mathfrak{p}$ aus durch Restklassenbildung in $\mathfrak{J}_n$ nach $\mathfrak{p}$ und gewinnen so das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Gebilde in algebraischer Darstellung. Damit ist das aufgestellte Ziel erreicht. Es bleibt in § 5 noch zu zeigen, daß in der Tat die durch die algebraische Darstellung gelieferte Punktmannigfaltigkeit einschließlich der Grenzstellen genau alle gemeinsamen Nullstellen des zugehörigen Primideals ausmacht und ferner ein irreduzibles analytisches Gebilde ist. Als Anwendung folgt in § 6 das Theorem von Weierstraß. Dieser Aufbau lehnt sich an eine Arbeit[5]) von B. L. van der Waerden an, die von dem Nullstellenproblem bei Polynomidealen handelt.

Für wertvolle Ratschläge bin ich den Herren A. Loewy in Freiburg i. Br. und W. Krull in Erlangen zu Dank verpflichtet.

---

[4]) Osgood, S. 103.

[5]) B. L. van der Waerden, Zur Nullstellentheorie der Polynomideale, Math. Annalen **96** (1927), S. 183—208.

§ 2.

Zur Arithmetik der Potenzreihen mehrerer Veränderlichen.

1. *Potenzreihenring*[6]). Wir legen den Bereich der konvergenten Potenzreihen in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zugrunde und bezeichnen diesen mit $\mathfrak{J}_n$. Dieser Bereich ist ein Integritätsbereich mit Einselement. Jedes Element von $\mathfrak{J}_n$ können wir in der Gestalt schreiben:

$$P \equiv p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_i + \ldots,$$

wo p_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ eine homogene Form von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von der Dimension i ist. Hat man $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots = p_{r-1} = 0$, $p_r \neq 0$, so heißt r der *Grad* der Reihe. — Ein Element E aus $\mathfrak{J}_n$ heißt *Einheit*, wenn ein F in $\mathfrak{J}_n$ existiert, so daß $E \cdot F = 1$ ist. Man schreibt dann $F = E^{-1}$. Da $\mathfrak{J}_n$ keine Nullteiler hat, ist das zu einer Einheit E zugehörige Element E^{-1} eindeutig bestimmt. Zu den Einheiten in $\mathfrak{J}_n$ gehört auch das Einselement 1. Eine triviale Ausrechnung ergibt, daß alle und nur die Potenzreihen vom Grade 0 Einheiten sind. — Eine von den Einheiten verschiedene Reihe aus $\mathfrak{J}_n$ heißt *regulär* in bezug auf x_j, wenn sie ein Glied von der Form $c x_j^l$ $(c \neq 0)$ enthält. — Ist P vom Grade $r > 0$, sonst beliebig in $\mathfrak{J}_n$, so gibt es wenigstens eine nicht singuläre lineare Transformation (n. s. l. T.) der Variabeln:

$$x_k = b_{k,1}\, x_1' + b_{k,2}\, x_2' + \ldots + b_{k,n}\, x_n' \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit $b_{k,i}$ aus dem Koeffizientenkörper von $\mathfrak{J}_n$, so daß dadurch P in eine Reihe P' vom selben Grade übergeht, die in bezug auf x_n' regulär ist[7]).

2. *Die Weierstraßsche Formel.* Die Gesamtheit derjenigen Elemente von $\mathfrak{J}_n$, die nur die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_j$ enthalten, bezeichnen wir mit $\mathfrak{J}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. In $\mathfrak{J}_n$ gilt nun der wichtige Satz:

Q sei regulär in bezug auf x_n und m sei die kleinste Zahl, für die es in Q einen Term von der Form $c\, x_n^m$ $(c \neq 0)$ gibt. Dann existiert zu jedem P ein eindeutig bestimmtes F, so daß in

$$(1) \qquad P^* = P - QF$$

x_n nur bis zum Grade $m-1$ ansteigt, P^* also die Form hat:

$$P^* = x_n^{m-1} A_1 + x_n^{m-2} A_2 + \ldots + A_m,$$

wo die A_i aus $\mathfrak{J}_{n-1}$ sind.

---

[6]) Bezüglich der Grundbegriffe aus der Theorie der Ringe, Ideale und Körper verweisen wir auf B. L. van der Waerden, Moderne Algebra (zitiert W), Springer, Berlin, Bd. I (1930) u. Bd. II (1931).

[7]) Osgood, S. 73.

Der Beweis[8]) findet sich in einer Arbeit von H. Späth (Journ. f. reine u. angew. Math. **161** (1929), S. 95—100). Der Satz ist eine Verallgemeinerung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes (§ 2, 3). Zur Unterscheidung von letzterem nennen wir die Beziehung (1) die Weierstraßsche Formel.

3. *Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz*[9]). *In* $\mathfrak{J}_n$ *sei* Q *regulär in bezug auf* x_n *und* m *sei die kleinste Zahl, für die es in* Q *einen Term von der Form* $c x_n^m$ $(c \neq 0)$ *gibt. Dann existiert zu* Q *eine eindeutig bestimmte Einheit* F, *so daß gilt*:

$$Q F = x_n^m + B_1 x_n^{m-1} + \ldots + B_m,$$

wo die B_i *Elemente aus* $\mathfrak{J}_{n-1}$ *sind und ferner keines der* B_i *eine Einheit ist.*

Beweis. Wir wenden die Weierstraßsche Formel speziell auf $P = x_n^m$ an; das ergibt:

$$x_n^m = Q \cdot F + A_1 x_n^{m-1} + \ldots + A_m,$$

$$Q F = x_n^m + B_1 x_n^{m-1} + \ldots + B_m,$$

wo $-A_i = B_i$ gesetzt ist. B_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ kann nicht Einheit sein; denn sonst käme rechts ein Term $c_0 x_n^l$ mit $l < m$ vor; dann müßte auch Q einen Term $c_1 x_n^r$ mit $r < m$ enthalten. Daß F Einheit sein muß, ist klar.

4. *Ausgezeichnete Polynome*[10]). In § 2, 3 hat sich ergeben, daß zu jedem in bezug auf x_n regulären Element Q aus $\mathfrak{J}_n$ eine Einheit F existiert, so daß das Produkt $Q \cdot F$ dem Polynombereich $\mathfrak{J}_{n-1}[x_n]$ angehört. Das Polynom

$$Q F = x_n^m + B_1 x_n^{m-1} + \ldots + B_m$$

hat noch die besondere Eigenschaft, daß der höchste Koeffizient 1 und von den übrigen Koeffizienten keiner eine Einheit ist. Wegen der Wichtigkeit solcher Elemente für das Folgende definieren wir allgemein:

Ein Polynom aus dem Polynombereich $\mathfrak{J}_j[z]$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ *heißt ausgezeichnet über* $\mathfrak{J}_j$, *wenn es den höchsten Koeffizienten* 1 *hat und sonst kein Koeffizient eine Einheit ist.*

5. *Teilbarkeit in* $\mathfrak{J}_n$. P und Q seien Elemente von den Graden $r_1 > 0$, $r_2 > 0$. Gibt es in $\mathfrak{J}_n$ ein Element R vom Grade $r > 0$, so daß $P = Q \cdot R$ ist, so heißt P durch Q teilbar; dazu ist notwendig $0 < r_2 < r_1$. — Ein Element P aus $\mathfrak{J}_n$ heißt *reduzibel*, wenn es in $\mathfrak{J}_n$ eine Zerlegung $P = Q \cdot R$ gestattet, wo weder R noch Q Einheit ist, andernfalls *irreduzibel*. — Zwei Elemente, die sich nur durch einen Einheitsfaktor unterscheiden, heißen *äquivalent*.

---

[8]) Vgl. ferner hierzu wie zu § 2, 3: W. Wirtinger, Journ. f. reine u. angew. Math. **158** (1927), S. 260—267; Osgood, S. 71. Dort finden sich auch weitere Literaturhinweise.

[9]) Siehe Fußnote [8]).

[10]) Osgood, S. 79ff.

Speziell für solche Elemente aus $\mathfrak{J}_n$, die ausgezeichnete Polynome aus $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$ ($j = 2, 3, \ldots, n$) sind, gelten die folgenden bemerkenswerten Sätze, die wir ohne Beweis[11]) bringen:

a) Zerfällt ein ausgezeichnetes Polynom aus $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$ über $\mathfrak{J}_{j-1}$, so sind die Faktoren bis auf Einheitsfaktoren aus $\mathfrak{J}_{j-1}$ ebenfalls ausgezeichnete Polynome über $\mathfrak{J}_{j-1}$.

b) Ist ein ausgezeichnetes Polynom $f(x_j)$ aus $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$ durch ein ausgezeichnetes Polynom $g(x_j)$ in $\mathfrak{J}_n$ (im vorhin definierten Sinne) teilbar, so ist der Quotient ebenfalls ausgezeichnetes Polynom aus $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$.

c) Zerfällt ein ausgezeichnetes Polynom $f(x_j)$ aus $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$ in $\mathfrak{J}_n$:

$$f(x_j) = P \cdot Q,$$

so sind zwar P und Q nicht notwendig ausgezeichnete Polynome aus $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$, aber P und Q sind ausgezeichneten Polynomen $p(x_j)$ bzw. $q(x_j)$ äquivalent, so daß sogar gilt:

$$f(x_j) = p(x_j) \cdot q(x_j).$$

Das Zerfallen eines ausgezeichneten Polynoms $f(x_j)$ aus $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$ in $\mathfrak{J}_n$ hat also immer ein Zerfallen in $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$ zur Folge. Da umgekehrt jedes Zerfallen von $f(x_j)$ in $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$ auch ein solches in $\mathfrak{J}_n$ ist, so hat man:

d) Für ausgezeichnete Polynome aus $\mathfrak{J}_{j-1}[x_j]$ decken sich die Begriffe irreduzibel über $\mathfrak{J}_{j-1}$ und irreduzibel in $\mathfrak{J}_n$.

In $\mathfrak{J}_n$ gilt der *Fundamentalsatz*:

Ist P vom Grade $r > 0$, sonst beliebig aus $\mathfrak{J}_n$, so läßt sich P auf eine, und sofern man zwischen äquivalenten Elementen nicht unterscheidet, auch nur auf eine Weise in ein Produkt irreduzibler Faktoren zerlegen.

Beweis. Wir benutzen vollständige Induktion. In $\mathfrak{J}_1$ ist der Satz trivial; denn jedes Element aus $\mathfrak{J}_1$ vom Grade $m > 0$ hat die triviale eindeutige Zerlegung $x_1^m E(x_1)$, wo E Einheit ist. Sei der Satz nun bewiesen für Elemente aus $\mathfrak{J}_{j_0-1}$ ($j_0 \leqq n$). Wir zeigen, daß er dann auch noch in $\mathfrak{J}_{j_0}$ gilt. Dazu bemerken wir zunächst: Ist P aus $\mathfrak{J}_{j_0}$ und in bezug auf x_{j_0} nicht regulär, so können wir (§ 2, 1) P in ein Element P' transformieren, das in bezug auf x'_{j_0} regulär ist. Da nun Teilbarkeitseigenschaften invariant sind gegenüber einer n. s. l. T., so können wir uns auf solche Elemente von $\mathfrak{J}_{j_0}$ beschränken, die in bezug auf x_{j_0} regulär sind, im wesentlichen also (§ 2, 3) auf ausgezeichnete Polynome aus $\mathfrak{J}_{j_0-1}[x_{j_0}]$. Für solche Polynome existiert aber eine eindeutige Zerlegung in Primelemente über $\mathfrak{J}_{j_0-1}$ nach einem bekannten Satz der Algebra[12]). Ist also $q(x_{j_0})$ ein ausgezeichnetes Polynom aus $\mathfrak{J}_{j_0-1}[x_{j_0}]$, so hat es in $\mathfrak{J}_{j_0-1}[x_{j_0}]$ die eindeutige Zerlegung in irreduzible Faktoren:

$$q(x_{j_0}) = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s. \tag{2}$$

[11]) Beweise siehe Osgood, S. 83, 85 u. 86.

[12]) W, Bd. I, S. 73.

Existieren nun für $q(x_{j_0})$ zwei verschiedene Zerlegungen in irreduzible Faktoren in $\mathfrak{J}_{j_0}$:

$$q(x_{j_0}) = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_r,$$
$$q(x_{j_0}) = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_l,$$

so müssen nach c) und d) die Q_i bzw. P_i gewissen irreduziblen ausgezeichneten Polynomen aus $\mathfrak{J}_{j_0-1}[x_{j_0}]$ äquivalent sein, deren Produkt gerade $q(x_{j_0})$ ist. Diese ausgezeichneten Polynome müssen aber wegen der Eindeutigkeit von (2) die q_i sein. Die Q_i sind also in geeigneter Reihenfolge den P_i äquivalent. Damit ist der Fundamentalsatz bewiesen.

§ 3.

Ideale im Potenzreihenring.

1. *Transformierte Ideale.* Zugrunde gelegt sei der Bereich der konvergenten Potenzreihen $\mathfrak{J}_n$. $\mathfrak{a}$ sei ein Ideal in $\mathfrak{J}_n$. Üben wir auf die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine n. s. l. T.

$$x'_k = a_{k,1}\, x_1 + a_{k,2}\, x_2 + \ldots + a_{k,n}\, x_n \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

aus, so geht jede konvergente Reihe $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in eine konvergente Reihe $P'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ über (§ 2, 1). Aus $\mathfrak{J}_n$ erhalten wir wieder den Bereich aller konvergenten Potenzreihen in n Variablen $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Aus dem Ideal $\mathfrak{a}$ wird ein Ideal $\mathfrak{a}'$ in diesem Bereich. Wir wollen sagen, daß das Ideal $\mathfrak{a}$ durch eine n. s. l. T. in ein Ideal $\mathfrak{a}'$ transformiert wird. Die Striche an den Variablen von $\mathfrak{a}'$ werden wir aber weglassen und $\mathfrak{a}'$ als Ideal in $\mathfrak{J}_n$ auffassen.

2. *Basissatz.* Es besteht in $\mathfrak{J}_n$ der grundlegende Satz:

Im Ring der konvergenten Potenzreihen in n Veränderlichen hat jedes Ideal eine endliche Basis.

Beweis. Wir benutzen vollständige Induktion. Für Ideale aus $\mathfrak{J}_1$ ist der Satz trivial; denn ein Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ in $\mathfrak{J}_1$ wird erzeugt durch ein Element x_1^ν, wo ν eine positive ganze Zahl ist. Sei jetzt bewiesen, daß der Satz in $\mathfrak{J}_{j_0-1}$ $(j_0 \leqq n)$ gilt; wir zeigen, daß er auch in $\mathfrak{J}_{j_0}$ noch gilt. $\mathfrak{a}$ sei Ideal in $\mathfrak{J}_{j_0}$. Wir können gemäß § 2, 1 $\mathfrak{a}$ so in $\mathfrak{a}'$ transformieren, daß ein Element Q von $\mathfrak{a}'$ in bezug auf x_n regulär ist. Hat $\mathfrak{a}'$ eine endliche Basis, so hat auch $\mathfrak{a}$ eine endliche Basis. Für ein beliebiges P aus $\mathfrak{a}'$ hat man nun nach der Weierstraßschen Formel:

$$\begin{aligned} P &= QF + P^*, \\ P^* &= x_{j_0}^{m-1} A_1 + x_{j_0}^{m-2} A_2 + \ldots + A_m, \end{aligned} \tag{1}$$

wo die A_i aus $\mathfrak{J}_{j_0-1}$ sind. Denken wir uns die Zerlegung (1) für alle Elemente aus $\mathfrak{a}'$ ausgeführt, so bildet die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ der P^* in $\mathfrak{J}_{j_0}$ einen Modul in bezug auf $\mathfrak{J}_{j_0-1}$. Bezeichnen nämlich P_1 und P_2 irgend zwei Elemente von

$\mathfrak{a}'$ und sind P_1^* und P_2^* die nach (1) zugehörigen Reste, so gehört $P_1^* - P_2^*$ eindeutig zu $P_1 - P_2$ als Rest, ist also in $\mathfrak{M}$ enthalten. Ferner ist mit jedem P^* auch BP^* in $\mathfrak{M}$, wo B irgendein Element aus $\mathfrak{J}_{j_0-1}$ bezeichnet; denn aus $P = Q \cdot F + P^*$ folgt $B \cdot P = Q \cdot (B \cdot F) + B \cdot P^*$. $\mathfrak{M}$ ist Untermodul des endlichen Moduls $(1, x_{j_0}, x_{j_0}^2, \ldots, x_{j_0}^{m-1})$ aus $\mathfrak{J}_{j_0}$ in bezug auf $\mathfrak{J}_{j_0-1}$. Da in $\mathfrak{J}_{j_0-1}$ jedes Ideal nach Voraussetzung eine endliche Basis hat, so ist $\mathfrak{M}$ nach dem Hilbert-Noetherschen Modulsatz[13]) endlich. Es gilt also:

$$\mathfrak{M} = (P_1^*, P_2^*, \ldots, P_l^*).$$

Jedes Element P von $\mathfrak{a}'$ hat dann gemäß (1) die Darstellung:

$$P = Q \cdot F + C_1 \cdot P_1^* + C_2 \cdot P_2^* + \ldots + C_l P_l^*,$$

wo die C_i aus $\mathfrak{J}_{j_0-1}$ sind. Da umgekehrt Q und die Basiselemente von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{a}'$ gehören, so hat $\mathfrak{a}'$ die Basisdarstellung:

$$\mathfrak{a}' = (Q, P_1^*, P_2^*, \ldots, P_l^*).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3. Auf Grund von 2. gilt in $\mathfrak{J}_n$ der Fundamentalsatz[14]):

Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{J}_n$ hat eine Darstellung als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen:

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s].$$

Die Darstellung kann speziell so gewählt werden, daß keines der $\mathfrak{q}_i$ überflüssig und ferner $[\mathfrak{q}_i \mathfrak{q}_k]$ nicht mehr primär ist. Dann sind s und die zu den $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ eindeutig bestimmt.

Die Untersuchung der gemeinsamen Nullstellen eines beliebigen Ideals wird hierdurch zunächst zurückgeführt auf die Untersuchung von Primäridealen. Ist nun $\mathfrak{q}$ Primärideal, $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal, so gilt auf Grund von 2. ferner[15]):

$$\mathfrak{q} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}^\sigma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}},$$

wo σ eine positive ganze Zahl ist. Es ist also jedes Element von $\mathfrak{q}$ in seinem zugehörigen $\mathfrak{p}$ enthalten, ferner aber eine Potenz jedes Elements von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{q}$ enthalten. Daraus folgt, wie wir später (§ 6, 2) genauer ausführen, daß die Nullstellen eines Primärideals, abgesehen von der Vielfachheit, diejenigen des zugehörigen Primideals sind, womit das Eliminationsproblem eines allgemeinen Ideals auf dasjenige der nach dem Satz eindeutig bestimmten zugehörigen Primideale zurückgeführt ist. Im folgenden Paragraphen wenden wir uns nun den Primidealen zu.

---

[13]) W, Bd. II, S. 87. Vgl. auch E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1927), S. 34 u. 35.

[14]) W, Bd. II, § 83 u. 84. Vgl. auch E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen **83** (1921), S. 24—66.

[15]) W, Bd. II, S. 34.

§ 4.

Primideal und Restklassenkörper[16]).

1. *Reguläres Primideal.* Ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{J}_n$ heißt *regulär,* wenn es eine positive ganze Zahl $k \leqq n$ gibt, so daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) In $\mathfrak{p}$ gibt es kein Element $\neq 0$, das nur die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ enthält.

b) Für jedes $i = 1, 2, 3, \ldots, s$ $(s = n - k)$ gibt es in $\mathfrak{p}$ wenigstens ein Element P_i, das von den Variablen $x_{k+i+1}, x_{k+i+2}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ frei und in bezug auf x_{k+i} regulär ist.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ sollen dann in bezug auf $\mathfrak{p}$ *unabhängig* heißen.

Ferner wollen wir die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ aller Elemente von $\mathfrak{J}_n$, die keine Einheiten sind, und das Einheitsideal $\mathfrak{J}_n$ zu den regulären Primidealen rechnen.

Jedes vom Einheitsideal und von $\mathfrak{S}$ verschiedene Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ läßt sich mittels einer n. s. l. T. in ein reguläres Primideal transformieren.

Beweis. P_n sei ein Element $\neq 0$ aus $\bar{\mathfrak{p}}$. Dann können wir gemäß § 2, 1 $\bar{\mathfrak{p}}$ mittels einer n. s. l. T. so in $\bar{\mathfrak{p}}_0$ transformieren, daß das P_n zugeordnete Element $P_n^{(0)}$ in bezug auf x_n regulär ist. Enthält nun $\bar{\mathfrak{p}}_0$ kein von x_n freies Element $\neq 0$, so ist $\bar{\mathfrak{p}}_0$ bereits regulär. Anderenfalls sei $P_{n-1}^{(0)}$ ein von x_n freies Element $\neq 0$ aus $\bar{\mathfrak{p}}_0$. Dann können wir durch eine weitere n. s. l. T. der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ zu einem Primideal $\bar{\mathfrak{p}}_1$ übergehen, in welchem das $P_{n-1}^{(0)}$ entsprechende Element $P_{n-1}^{(1)}$ von x_n frei und in bezug auf x_{n-1} regulär ist. Ist $P_n^{(1)}$ das Element von $\bar{\mathfrak{p}}_1$, das $P_n^{(0)}$ von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ entspricht, so ist auch $P_n^{(1)}$ noch regulär in bezug auf x_n. So fortfahrend gelangen wir nach s $(s \leqq n - 1)$ Schritten zu einem Primideal $\bar{\mathfrak{p}}^{(s-1)}$ mit den Elementen $P_n^{(s-1)}, P_{n-1}^{(s-1)}, \ldots, P_{n-s+1}^{(s-1)}$ und keinem Element, das nur $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(k + s = n)$ enthält. Dabei ist $P_{n-i}^{(s-1)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, s - 1)$ regulär in bezug auf x_{n-i} und frei von $x_{n-i+1}, x_{n-i+2}, \ldots, x_n$. $\bar{\mathfrak{p}}^{(s-1)}$ ist also regulär, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ sind die unabhängigen Variablen.

2. *Restklassenring nach einem regulären Primideal.* Im folgenden legen wir ein reguläres Primideal mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ $(k \leqq n)$ zugrunde. Die Variablen $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ bezeichnen wir mit $y_1, y_2, \ldots, y_s$ $(s = n - k)$.

Es gilt der Satz:

Ist $\mathfrak{p}$ regulär in $\mathfrak{J}_n$ mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, so hat der Restklassenring $\mathfrak{J}_n/\mathfrak{p} = \mathfrak{R}$ die folgende Gestalt:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{J}_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s].$$

[16]) Vgl. B. L. van der Waerden, Math. Annalen, l. c., S. 191—195. Siehe auch W, Bd. II, Kap. 13.

Dabei bedeutet $\mathfrak{J}_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$ *eine algebraische Erweiterung von* $\mathfrak{J}_k$; η_i *bezeichnet die Restklasse von* y_i *nach* $\mathfrak{p}$ *und hängt ganz*[17]) *ab von* $\mathfrak{J}_k$. *Das zugehörige irreduzible Polynom* $f_i(z)$ *ist ausgezeichnet über* $\mathfrak{J}_k$ (§ 2, 4). *Wir wollen deshalb* η_i *ein über* $\mathfrak{J}_k$ *ausgezeichnetes Element von* $\mathfrak{R}$ *nennen.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es in $\mathfrak{p}$ eine Reihe F_s, die in bezug auf y_s regulär ist. Die ihr äquivalente ausgezeichnete Reihe (§ 2, 3) sei:

$$\overline{F}_s = y_s^{m_s} + A_1^{(s)} y_s^{m_s - 1} + \ldots + A_{m_s}^{(s)},$$

wo die $A_i^{(s)}$ aus $\mathfrak{J}_{n-1}$ sind und keines der $A_i^{(s)}$ eine Einheit ist. Das ergibt in $\mathfrak{R} = \mathfrak{J}_n/\mathfrak{p}$ eine Relation:

$$(1) \qquad \{y_s\}^{m_s} + \{A_1^{(s)}\}\{y_s\}^{m_s-1} + \ldots + \{A_{m_s}^{(s)}\} = 0,$$

wo die geschweiften Klammern die Restklassen der Elemente mod $\mathfrak{p}$ kennzeichnen. Nennen wir die Gesamtheit der durch Elemente, die von x_n frei sind, repräsentierten Restklassen[18]) $\mathfrak{R}_{n-1}$, so ist wegen (1) $\{y_s\} = \eta_s$ ganz in bezug auf $\mathfrak{R}_{n-1}$. Ist nun P irgendein Element aus $\mathfrak{J}_n$, so ist nach der Weierstraßschen Formel:

$$P = \overline{F}_s G + y_s^{m_s - 1} B_1^{(s)} + y_s^{m_s - 2} B_2^{(s)} + \ldots + B_{m_s}^{(s)}$$

mit G aus $\mathfrak{J}_n$ und B_i aus $\mathfrak{J}_{n-1}$. Das ergibt in $\mathfrak{R}$:

$$(2) \qquad \{P\} = \eta_s^{m_s - 1}\{B_1^{(s)}\} + \eta_s^{m_s - 2}\{B_2^{(s)}\} + \ldots + \{B_{m_s}^{(s)}\},$$

wo die $\{B_i^{(s)}\}$ aus $\mathfrak{R}_{n-1}$ sind. Wegen (1) und (2) ist also:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{n-1}[\eta_s].$$

Nach Voraussetzung existiert in $\mathfrak{p}$ nun ferner ein Element

$$\overline{F}_{s-1} = y_{s-1}^{m_{s-1}} + A_1^{(s-1)} y_{s-1}^{m_{s-1}-1} + \ldots + A_{m_{s-1}}^{(s-1)},$$

wo die $A_i^{(s-1)}$ aus $\mathfrak{J}_{n-2}$ sind. Man hat also:

$$(3) \qquad \eta_{s-1}^{m_{s-1}} + \{A_1^{(s-1)}\}\eta_{s-1}^{m_{s-1}-1} + \ldots + \{A_{m_{s-1}}^{(s-1)}\} = 0.$$

Aus (3) und der Weierstraßschen Formel ergibt sich wie oben

$$\mathfrak{R}_{n-1} = \mathfrak{R}_{n-2}[\eta_{s-1}].$$

Ganz ähnlich hat man:

$$\mathfrak{R}_{n-2} = \mathfrak{R}_{n-3}[\eta_{s-2}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{R}_{k+2} = \mathfrak{R}_{k+1}[\eta_2],$$
$$\mathfrak{R}_{k+1} = \mathfrak{R}_k[\eta_1].$$

Dabei ist $\mathfrak{R}_k = \mathfrak{J}_k$, da zwei Elemente aus $\mathfrak{J}_k$ nach Voraussetzung dann und nur dann kongruent sind mod $\mathfrak{p}$, wenn sie gleich sind in $\mathfrak{J}_n$. Wir wollen aber trotzdem die Elemente aus $\mathfrak{R}_k$ von denen aus $\mathfrak{J}_k$ dadurch unterscheiden,

---

[17]) W, Bd. II, S. 88—91.

[18]) Diese Gesamtheit bildet einen Ring.

daß wir statt der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Variablen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ schreiben. Aus dem transitiven Gesetz der ganzen Abhängigkeit[18a]) folgt nun, daß η_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ganz ist in bezug auf $\mathfrak{J}_k$, also insbesondere:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{J}_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s].$$

Daß η_i über $\mathfrak{J}_k$ nur einem irreduziblen Polynom

$$f_i(z) = z^{r_i} + a_1^{(i)} z^{r_i - 1} + \ldots + a_{r_i}^{(i)} = 0 \tag{4}$$

genügt, folgt in bekannter Weise[19]). In (4) kann ferner keines der $a_j^{(i)}$ Einheit in $\mathfrak{J}_k$ sein; mit $a_{r_i}^{(i)}$ wäre nämlich auch $f_i(y_i)$ Einheit; wäre eines der übrigen $a_j^{(i)}$ Einheit, so enthielte $f_i(y_i)$ einen Term $c y_i^l$ mit $l < r_i$, in $\mathfrak{p}$ gäbe es daher gemäß § 2, 3 ein Polynom von y_i mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$ vom Grade $l < r_i$ gegen die Irreduzibilität von $f_i(y_i)$. $f_i(z)$ ist also ausgezeichnet über $\mathfrak{J}_k$. Damit ist der Satz bewiesen.

3. *Quotientenkörper.* Da $\mathfrak{R}$ keine Nullteiler hat, existiert ein Quotientenkörper M_n, der Restklassenkörper des Primideals $\mathfrak{p}$:

$$M_n = \Lambda_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s),$$

wo Λ_k den Quotientenkörper von $\mathfrak{J}_k$, also den Körper aller Potenzreihen aus $\mathfrak{J}_k$ und Quotienten solcher Potenzreihen bedeutet. Nach einem bekannten Satz der Algebra[20]) bleiben die $f_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ auch über Λ_k irreduzibel. In M_n gelten nun ferner die folgenden Tatsachen aus der Körpertheorie:

a) η_i genügt einer eindeutig bestimmten irreduziblen Gleichung mit höchstem Koeffizienten 1 über $\Lambda_k(\eta_1, \ldots, \eta_{i-1})$:

$$h_i(z) \equiv z^{\varrho_i} + c_1^{(i)} z^{\varrho_i - 1} + \ldots + c_{\varrho_i}^{(i)} = 0,$$

wo die $c_j^{(i)}$ aus $\Lambda_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{i-1})$ sind und wegen

$$\Lambda_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{i-1}) = \Lambda_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{i-1}]$$

speziell so dargestellt werden können, daß im Nenner nur Elemente aus $\mathfrak{J}_k$ vorkommen.

b) In M_n existiert ein in bezug auf Λ_k primitives Element ω. Dieses kann so bestimmt werden, daß es in bezug auf $\mathfrak{J}_k$ ganz ist und die Darstellung besitzt:

$$\omega = d_1\eta_1 + d_2\eta_2 + \ldots + d_s\eta_s,$$

wo die d_i aus $\mathfrak{J}_k$ sind. Das zugehörige über Λ_k irreduzible Polynom sei $g(z)$. ω ist dann ferner ausgezeichnet über $\mathfrak{J}_k$. Um dies nachzuweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß mit zwei in bezug auf $\mathfrak{J}_k$ ausgezeichneten Elementen

---

[18a]) E. Noether, Abstrakter Aufbau ..., l. c., S. 32.

[19]) Aus $f_i(\eta_i) = 0$ und $\bar{f}_i(\eta_i) = 0$ würde nämlich folgen, daß in $\mathfrak{p}$ ein nur von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ abhängiges Element wäre gemäß

$$f_i(y_i)\, g_i(y_i) + \bar{f}_i(y_i)\, \bar{g}_i(y_i) = c(x_1, \ldots, x_k).$$

[20]) W, Bd. I, S. 76.

α, β aus M_n auch $\gamma = e_1\alpha + e_2\beta$ ausgezeichnet ist, wo e_1 und e_2 aus $\mathfrak{J}_k$ sind. γ genügt der Gleichung:

$$G(z) \equiv \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{l} [z - (e_1\alpha^{(i)} + e_2\beta^{(j)})] = 0,$$

wo die $\alpha^{(i)}$ und $\beta^{(j)}$ die Konjugierten von α bzw. β sind. Der höchste Koeffizient von $G(z)$ ist 1, die übrigen Koeffizienten sind über $\mathfrak{J}_k$ ganze rationale symmetrische Funktionen der $\alpha^{(i)}$ und $\beta^{(j)}$ mit verschwindenden konstanten Gliedern, also auch ganze rationale Funktionen der elementaren symmetrischen Funktionen der $\alpha^{(i)}$ bzw. $\beta^{(j)}$ mit verschwindenden konstanten Gliedern; da diese elementaren symmetrischen Funktionen nach Voraussetzung keine Einheiten sind, so ist also $G(z)$ ausgezeichnet über $\mathfrak{J}_k$. Ist $p(z) = 0$ die irreduzible Gleichung für γ über $\mathfrak{J}_k$, so ist $p(z)$ ein Teiler von $G(z)$ und folglich auch ausgezeichnet (§ 2, 5a). Also ist γ ausgezeichnet über $\mathfrak{J}_k$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

c) Alle in bezug auf $\mathfrak{J}_k$ ganzen Größen α von M_n sind in der Form darstellbar:

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\varrho-1} b_i \frac{\omega^i}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)},$$

wo ϱ den Grad, D die Diskriminante von $g(z)$ bedeutet und b_i aus $\mathfrak{J}_k$ ist. Man zeigt das in der üblichen Weise[21]), indem man die Koeffizienten von $\alpha = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \ldots + a_{\varrho-1}\omega^{\varrho-1}$ aus den konjugierten Gleichungen

$$\alpha^{(j)} = a_0 + a_1\,\omega^{(j)} + a_2\,\omega^{(j)2} + \ldots + a_{\varrho-1}\,\omega^{(j)\varrho-1}$$

ausrechnet. Wegen der Irreduzibilität von $g(z)$ ist $D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \neq 0$.

4. *Reguläres Primideal zu gegebenem Körper.* Es besteht der Satz:

Ist $M_n = \Lambda_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$ $(k + s = n)$ *algebraische Erweiterung von* Λ_k, *dem Quotientenkörper von* $\mathfrak{J}_k$, *sind ferner* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ *ausgezeichnet über* $\mathfrak{J}_k$, *so existiert in* $\mathfrak{J}_n$ *ein reguläres Primideal* $\mathfrak{p}$ *mit den unabhängigen Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *dessen Restklassenkörper der gegebene Körper* $\Lambda_k(\eta_1, \ldots, \eta_s)$ *ist.*

Beweis. Wir ordnen jedem Element aus $\mathfrak{J}_n$ auf folgende Weise eindeutig einen „Wert" aus M_n zu:

$\mathfrak{J}_k$ ordnen wir elementweise sich selbst zu. Diese Zuordnung ist insbesondere homomorph. Die Zuordnung sei nun bereits für Elemente aus $\mathfrak{J}_{k+1}, \mathfrak{J}_{k+2}, \ldots, \mathfrak{J}_{k+j-1}$ $(j \leqq s)$ festgelegt, und es sei bewiesen, daß $\mathfrak{J}_{k+j-1}$ zum Bereich der zugeordneten Werte aus M_n homomorph sei. Sind $A, B, \ldots$ Elemente aus $\mathfrak{J}_{k+j-1}$, so bezeichnen wir die zugeordneten Werte in M_n mit $A', B', \ldots$ Ist nun Q beliebig aus $\mathfrak{J}_{k+j}$, $f_j(z)$ das irreduzible ausgezeichnete Polynom für η_j über Λ_k, so ist nach der Weierstraßschen Formel:

$$Q = f_j(y_j) \cdot G + q(y_j),$$

[21]) W, Bd. II, S. 93.

wo G aus $\mathfrak{J}_{k+j}$ und $q(y_j)$ ein zu Q eindeutig bestimmtes Polynom von y_j mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_{k+j-1}$ ist:

$$q(y_j) = y_j^{r_j - 1} B_1 + y_j^{r_j - 2} B_2 + \ldots + B_{r_j}.$$

Dem Element Q ordnen wir nun in M_n den Wert Q' zu:

$$Q' = \eta_j^{r_j - 1} B'_1 + \eta_j^{r_j - 2} B'_2 + \ldots + B'_{r_j}.$$

Sind P und Q zwei Elemente aus $\mathfrak{J}_{k+j}$ und

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} P &= f_j H + p_j, \\ Q &= f_j G + q_j, \end{aligned}$$

so folgt

$$P + Q = f_j \cdot (G + H) + (p_j + q_j),$$

wo $p_j + q_j$ in y_j vom Grade $r_j - 1$, also der zu $P + Q$ eindeutig existierende Rest mod f_j ist. Es ist daher:

$$(P + Q)' = P' + Q'.$$

Ferner folgt aus (5):

$$W = P \cdot Q = f_j \{f_j G \cdot H + G \cdot p_j + H q_j\} + p_j \cdot q_j.$$

Ist nun nach der Weierstraßschen Formel

$$W = f_j F + w_j,$$

so muß gelten:

$$\text{(6)} \qquad p_j \cdot q_j = f_j u + w_j,$$

wo auch u ein Polynom von y_j mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_{k+j-1}$ ist. Ordnen wir (6) auf beiden Seiten nach Potenzen von y_j, so sind die Koeffizienten bzw. einander gleich. Wir dürfen sie also durch die zugeordneten Werte aus M_n ersetzen; dabei bleibt (6) identisch in y_j richtig. Ersetzen wir noch y_j durch η_j, so folgt wegen $f_j(\eta_j) = 0$

$$P' \cdot Q' = (P \cdot Q)'.$$

Da die Gesamtheit der den Elementen von $\mathfrak{J}_n$ zugeordneten Werte aus M_n gerade den Bereich $\mathfrak{J}_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$ ausmacht, so ist also gezeigt, daß $\mathfrak{J}_n$ homomorph ist zu $\mathfrak{J}_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$.

Wir behaupten nun: Die Gesamtheit $\mathfrak{p}$ der Elemente von $\mathfrak{J}_n$, die in M_n den Wert 0 haben, bildet in $\mathfrak{J}_n$ ein reguläres Primideal mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

a) Mit P und Q aus $\mathfrak{p}$, also $P' = Q' = 0$, ist auch $(P - Q)' = P' - Q' = 0$, also $P - Q$ in $\mathfrak{p}$; ist ferner P aus $\mathfrak{p}$, R beliebig aus $\mathfrak{J}_n$, so folgt aus $P' \cdot R' = 0$, $P'R' = (PR)'$, daß auch PR zu $\mathfrak{p}$ gehört. $\mathfrak{p}$ ist also ein Ideal.

b) Aus $P \cdot Q$ in $\mathfrak{p}$, P nicht in $\mathfrak{p}$ folgt: $(P \cdot Q)' = P' \cdot Q' = 0$ mit $P' \neq 0$; also muß $Q' = 0$ und somit Q aus $\mathfrak{p}$ sein, da M_n keine Nullteiler hat. $\mathfrak{p}$ ist also prim.

c) In $\mathfrak{p}$ gibt es kein Element $\neq 0$, das zu $\mathfrak{J}_k$ gehört (§ 4, 1a); ferner gibt es in $\mathfrak{p}$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ ($s = n - k$) das Element $f_i(y_i)$, das von $y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots, y_s$ frei und in bezug auf y_i regulär ist (§ 4, 1b). $\mathfrak{p}$ ist also regulär mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Allen Elementen einer Restklasse nach $\mathfrak{p}$ ist somit dasselbe Element von M_n, spezieller von $\mathfrak{J}_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$ zugeordnet; da umgekehrt zwei Elemente von $\mathfrak{J}_n$, die in M_n denselben Wert haben, auch derselben Restklasse nach $\mathfrak{p}$ angehören, so folgt bei Beachtung der Homomorphie zwischen $\mathfrak{J}_n$ und $\mathfrak{J}_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$ die Isomorphie zwischen $\mathfrak{J}_n/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{J}_k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s]$ und schließlich diejenige der Quotientenkörper. M_n kann also als Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$ aufgefaßt werden. Damit ist 4. vollständig bewiesen.

5. *Primteiler eines regulären Primideals.* Es gilt der Satz:

Jedes reguläre Primideal mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(2 \leqq k \leqq n)$ *hat einen regulären Primteiler mit den unabhängigen Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$.

Beweis. $\mathfrak{p}$ sei das gegebene reguläre Primideal ,$M_n = \Lambda_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$ $(k + s = n)$ der Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$. Die jeweils für η_j irreduzible Gleichung mit Koeffizienten aus $\Lambda_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{j-1})$ sei:

$$h_j(z) \equiv z^{\varrho_j} + c_{1,j} z^{\varrho_j - 1} + \ldots + c_{\varrho_j, j} = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots s), \tag{7}$$

wobei man über die $c_{l,j}$ voraussetzen darf, daß sie im Nenner nur Elemente aus $\mathfrak{J}_k$ enthalten.

Der Beweis des Satzes beruht auf der Konstruktion eines Erweiterungskörpers

$$N = \Lambda_{k-1}(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_s)$$

von Λ_{k-1}, dessen (nach 4.) zugehöriges Primideal der gesuchte Primteiler von $\mathfrak{p}$ ist. Den Körper bekommen wir auf folgende Weise:

$\bar{\xi}_k$ sei Wurzel eines über $\mathfrak{J}_{k-1}$ irreduziblen ausgezeichneten Polynoms $t(\xi_k)$ in einer algebraischen Erweiterung von Λ_{k-1}. Über $t(\xi_k)$ wollen wir nur voraussetzen, daß es nicht Teiler des Produkts $n(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ sämtlicher in den Koeffizienten von (7) auftretenden Nenner sein soll. Durch Adjunktion von $\bar{\xi}_k$ zu Λ_{k-1} bekommen wir den Körper

$$\Lambda_{k-1}(\bar{\xi}_k).$$

In $\Lambda_{k-1}(\bar{\xi}_k)$ hat jedes Element a aus $\mathfrak{J}_k$ im Sinne von 4. einen Wert a'; insbesondere ist wegen der Voraussetzung über $t(\xi_k)$ der Wert n' von n von Null verschieden.

$\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_s$ bestimmen wir nun sukzessive folgendermaßen: In

$$h_j(z) \equiv z^{\varrho_j} + c_{1,j} z^{\varrho_j - 1} + \ldots + c_{\varrho_j, j}$$

ersetzen wir die in den Koeffizienten vorkommenden Elemente aus $\mathfrak{J}_k$ durch ihre Werte in $\Lambda_{k-1}(\bar{\xi}_k)$; dabei wird kein Nenner Null. Ersetzen wir nun ferner noch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{j-1}$ durch $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_{j-1}$, so möge dadurch $h_j(z)$ übergehen in:

$$\bar{h}_j(z) \equiv z^{\varrho_j} + c'_{1,j} z^{\varrho_j - 1} + \ldots + c'_{\varrho_j, j} \tag{8}$$

$\bar{\eta}_j$ sei dann irgendeine Wurzel von (8) in einer algebraischen Erweiterung von $A_{k-1}(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{j-1})$.

Wir behaupten, daß N den gesuchten Primteiler von $\mathfrak{p}$ liefert. Dazu ist zweierlei zu zeigen:

a) $\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_s$ sind ausgezeichnet über $\mathfrak{J}_{k-1}$. Dann gehört zu N nach § 4, 4 ein Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$.

b) Jedes Element von $\mathfrak{p}$ ist auch in $\bar{\mathfrak{p}}$ enthalten.

Wir beweisen die beiden Aussagen gleichzeitig durch vollständige Induktion.

$\bar{\xi}_k$ ist über $\mathfrak{J}_{k-1}$ ausgezeichnet nach Voraussetzung; die zweite Aussage ist für Elemente aus $\mathfrak{J}_k$ trivial.

Sei nun bewiesen, daß $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{j-1}$ $(j \leqq n)$ ausgezeichnet sind und daß ferner jedes Element aus $\mathfrak{J}_{k+j-1}$, das zu $\mathfrak{p}$ gehört, in $A_{k-1}(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{j-1})$ den Wert Null hat. Wir zeigen, daß dann auch $\bar{\eta}_j$ ausgezeichnet ist über $\mathfrak{J}_{k-1}$ und jedes Element Q aus $\mathfrak{J}_{k+j}$, das zu $\mathfrak{p}$ gehört, in $A_{k-1}(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_j)$ den Wert Null hat.

Zunächst setzen wir über Q voraus, daß es in bezug auf y_j ein Polynom sei, also

$$Q = y_j^\sigma e_0 + y_j^{\sigma-1} e_1 + \ldots + e_\sigma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{9}$$

wo die e_l aus $\mathfrak{J}_{k+j-1}$ sind. (9) ergibt in M_n die Gleichung:

$$\eta_j^\sigma \{e_0\} + \eta_j^{\sigma-1} \{e_1\} + \ldots + \{e_0\} = 0, \tag{10}$$

wo die $\{e_l\}$ nun Polynome von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{j-1}$ über $\mathfrak{J}_k$ sind. Die Gleichung (10) ist gleichbedeutend mit der Beziehung

$$z^\sigma \{e_0\} + z^{\sigma-1} \{e_1\} + \ldots + \{e_\sigma\} = h_j(z) \cdot v(z)$$

über $A_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{j-1})$ oder:

$$z^\sigma \{e_0\} + z^{\sigma-1} \{e_1\} + \ldots + \{e_\sigma\} - h_j(z) \cdot v(z) = 0. \tag{11}$$

Bei Ausführung der Division treten in $v(z)$ keine anderen Nenner auf wie in $h_j(z)$. Der Hauptnenner N des letzten Gliedes von (11) hat daher in $A_{k-1}(\bar{\xi}_k)$ einen von Null verschiedenen Wert N'. Multiplizieren wir in (11) mit N herauf, so bekommen wir eine Gleichung $L(z) = 0$, wobei die Koeffizienten der Potenzen von z Polynome von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{j-1}$ über $\mathfrak{J}_k$ und alle Null in $A_k(\eta_1, \ldots, \eta_{j-1})$ sind. Das Verschwinden eines solchen Polynoms ist aber gleichbedeutend damit, daß das Polynom in den x, y-Variablen ein Element von $\mathfrak{p}$ ist. Dann hat es aber nach Voraussetzung auch in $A_{k-1}(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{j-1})$ den Wert Null. Wir dürfen also in $L(z) = 0$ die Koeffizienten durch die Werte der in den x, y-Variablen geschriebenen Koeffizienten in $A_{k-1}(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{j-1})$ ersetzen. Dividieren wir dann noch durch N', so bekommen wir:

$$z^\sigma e_0' + z^{\sigma-1} e_1' + \ldots + e_\sigma' = \bar{h}_j(z) \cdot \bar{v}(z), \tag{12}$$

wo die Striche die genannte Ersetzung andeuten. Wir konnten dabei direkt e'_l schreiben, da ja e_l zu dem in den x, y-Variablen geschriebenen Polynom $\{e_l\}$ kongruent nach $\mathfrak{p}$ ist, beide also nach Voraussetzung in $\Lambda_{k-1}(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{j-1})$ denselben Wert haben. Aus (12) folgt nun

$$\bar{\eta}_j^{\sigma} e'_0 + \bar{\eta}_j^{\sigma-1} e'_1 + \ldots + e'_\sigma = \bar{h}_j(\bar{\eta}_j) \, . \, \bar{v}(\bar{\eta}_j)$$

und, da $\bar{h}_j(\bar{\eta}_j)$ nach Definition Null ist:

$$\bar{\eta}_j^{\sigma} e'_0 + \bar{\eta}_j^{\sigma-1} e'_1 + \ldots + e'_\sigma = 0.$$

Wenden wir dieses Ergebnis insbesondere auf das für η_j irreduzible ausgezeichnete Polynom mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$ an, so haben wir:

$$\bar{f}_j(\bar{\eta}_j) \equiv \bar{\eta}_j^{r_j} + a'_{1,j}\, \bar{\eta}_j^{r_j-1} + \ldots + a'_{r_j, j} = 0,$$

wo die $a'_{l,j}$ Polynome von $\bar{\xi}_k$ über $\mathfrak{J}_{k-1}$ sind, bei denen übrigens die konstanten Glieder keine Einheiten sind. Bildet man nun

$$H_j(z) = \prod_i \left(z^{r_j} + a'^{(i)}_{1,j} z^{r_j-1} + \ldots + a'^{(i)}_{r_j,j}\right),$$

wo die $a'^{(i)}_{l,j}$ die Konjugierten von $a'_{l,j}$ bedeuten, so ist der höchste Koeffizient von $H_j(z)$ gleich 1, die übrigen Koeffizienten sind ganze rationale Funktionen der symmetrischen Grundfunktionen von $\bar{\xi}_k^{(1)}, \bar{\xi}_k^{(2)}, \ldots, \bar{\xi}_k^{(m)}$, den Konjugierten von $\bar{\xi}_k$, mit von Einheiten verschiedenen konstanten Gliedern; die Koeffizienten sind also aus $\mathfrak{J}_{k-1}$ und keine Einheiten. $\bar{\eta}_j$ ist daher ausgezeichnet über $\mathfrak{J}_{k-1}$.

Wir lassen nun die früher gemachte Voraussetzung über Q fallen; es sei Q nun beliebig aus $\mathfrak{J}_{k+j}$ und Element von $\mathfrak{p}$. Nach der Weierstraßschen Formel hat man:

$$Q = f_j(y_j) \cdot F + y_j^{r_j-1} B_1 + \ldots + B_{r_j},$$

wo F aus $\mathfrak{J}_{k+j}$ und die B_i aus $\mathfrak{J}_{k+j-1}$ sind. Wie wir gezeigt haben, ist $\bar{\eta}_j$ ausgezeichnet über $\mathfrak{J}_{k-1}$; also ist für jedes Element aus $\mathfrak{J}_{k+j}$ sein Wert in $\Lambda_{k-1}(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_j)$ erklärt, und es gilt:

$$Q' = \bar{f}_j(\bar{\eta}_j) F' + \bar{\eta}_j^{r_j-1} B'_1 + \ldots + B'_{r_j}.$$

Nun ist aber wegen $\bar{f}_j(\bar{\eta}_j) = 0$ und $\bar{\eta}_j^{r_j-1} B'_1 + \ldots + B'_{r_j} = 0$ auch $Q' = 0$. Damit ist 5. vollständig bewiesen.

6. Es gilt der Satz:

Sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}$ *reguläre Primideale und ist* $\mathfrak{p}_1$ *ein echter Teiler von* $\mathfrak{p}$, *so kann es nicht vorkommen, daß in bezug auf* $\mathfrak{p}_1$ *dieselben unabhängigen Variablen* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ *bestehen wie in bezug auf* $\mathfrak{p}$.

Beweis. Unter der Annahme, daß die Behauptung des Satzes nicht stimmt, sei P Element von $\mathfrak{p}_1$, aber nicht von $\mathfrak{p}$. Im Restklassenkörper $\Lambda_k(\eta_1, \ldots, \eta_s)$ von $\mathfrak{p}$ gilt dann:

$$(13) \qquad \frac{1}{\{P\}} = \frac{p(\eta_1, \ldots, \eta_s)}{n(\xi_1, \ldots, \xi_k)},$$

wo $p(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$ ein Polynom von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ ist mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$; ebenso ist n Element aus $\mathfrak{J}_k$.

Aus (13) folgt

$$n = p(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s) \cdot \{P\}$$

und folglich

$$n \equiv p(y_1, y_2, \ldots, y_s) \cdot P \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Nach Voraussetzung ist also:

$$n \equiv p(y_1, y_2, \ldots, y_s) \cdot P \pmod{\mathfrak{p}_1}.$$

Aus $n(x_1, \ldots, x_k) \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$ würde nun aber folgen $P(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$, was gegen die Voraussetzung ist.

7. Zu jedem regulären Primideal mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ existiert gemäß § 4, 5 eine echte Primteilerkette aus $k+2$ regulären Gliedern

$$\mathfrak{p} > \mathfrak{p}_1 > \mathfrak{p}_2 > \ldots > \mathfrak{p}_k > \mathfrak{J}_n, \tag{14}$$

wobei berücksichtigt ist, daß $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{S}$ (§ 4, 1) Primteiler von $\mathfrak{p}_{k-1}$ ist. Primteilerketten aus regulären Gliedern wollen wir *reguläre Primteilerketten* nennen. Die Kette (14) ist dann nach § 4, 6 sogar eine maximale Kette dieser Art. Es gilt nun der Satz:

Ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein beliebiges vom Einheitsideal verschiedenes Primideal, das also nicht notwendig regulär zu sein braucht, und

$$\bar{\mathfrak{p}} > \bar{\mathfrak{p}}_1 > \bar{\mathfrak{p}}_2 > \ldots > \bar{\mathfrak{p}}_\nu > \ldots$$

eine echte Primteilerkette, so existiert eine n. s. l. T., die diese Kette in eine reguläre Kette überführt.

Beweis. Transformieren wir zunächst $\bar{\mathfrak{p}}$ durch eine n. s. l. T. in ein reguläres Primideal mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, so brauchen wir wegen $\bar{\mathfrak{p}}_1 < \bar{\mathfrak{p}}$ nur noch auf die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ eine weitere n. s. l. T. auszuüben, um auch $\bar{\mathfrak{p}}_1$ in ein reguläres Primideal überzuführen. Das Analoge gilt für $\bar{\mathfrak{p}}_2, \bar{\mathfrak{p}}_3, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_\nu, \ldots$ usf.; diejenige Transformation der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die sich aus den einzelnen Transformationen zusammensetzt, führt dann die Primteilerkette $\bar{\mathfrak{p}} > \bar{\mathfrak{p}}_1 > \bar{\mathfrak{p}}_2 > \ldots$ in eine reguläre Primteilerkette über.

8. *Dimension des Primideals.* Die Ergebnisse von 5., 6. und 7. liefern uns nun den folgenden Satz:

Jedes vom Einheitsideal und von $\mathfrak{S}$ verschiedene Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ aus $\mathfrak{J}_n$ besitzt eine maximale echte Primteilerkette

$$\bar{\mathfrak{p}} > \bar{\mathfrak{p}}_1 > \bar{\mathfrak{p}}_2 > \ldots > \bar{\mathfrak{p}}_r > \mathfrak{J}_n \qquad (0 < r \leqq n).$$

r ist gleich der Anzahl der unabhängigen Variablen irgendeines zu $\bar{\mathfrak{p}}$ gehörigen regulären Primideals. Insbesondere ergibt sich also immer dieselbe Anzahl unabhängiger Variablen, wie man auch $\bar{\mathfrak{p}}$ in ein reguläres Primideal transformiert.

Beweis. Wären nämlich $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}''$ reguläre Primideale, die aus $\bar{\mathfrak{p}}$ transformiert sind, mit den unabhängigen Variablen $x_1 \ldots, x_r$ bzw. $x_1 \ldots, x_s$, und wäre $s > r$, so müßte es nach dem vorangehenden Satze möglich sein, die zu $\mathfrak{p}''$ nach 5. existierende $s + 2$-gliedrige echte Primteilerkette durch eine n. s. l. T. in eine Kette von höchstens $r + 2$ Gliedern zu transformieren, was ein Widerspruch ist. Es ist also notwendig $r = s$.

Dieser Satz berechtigt uns nun zu der Definition:

r heißt Dimension von $\bar{\mathfrak{p}}$ wie von allen sich von $\bar{\mathfrak{p}}$ nur durch eine n. s. l. T. unterscheidenden Primidealen.

§ 5.

Die Nullstellen eines Primideals.

1. *Definition der Nullstellen eines Ideals.* Unter den gemeinsamen Nullstellen eines Ideals $\mathfrak{a}$, kurz unter den Nullstellen des Ideals $\mathfrak{a}$, versteht man die gemeinsamen Nullstellen einer Basis von $\mathfrak{a}$. Verschwindet eine Reihe aus $\mathfrak{J}_n$ innerhalb einer gewissen Umgebung des Anfangs im $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_s$-Raume in den gemeinsamen Nullstellen von $\mathfrak{a}$, so sagen wir: die Reihe verschwindet in den Nullstellen von $\mathfrak{a}$. Insbesondere verschwindet jedes Element von $\mathfrak{a}$ in den Nullstellen von $\mathfrak{a}$. Hat eine Punktmenge $\mathfrak{U}$ im $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_s$-Raume die Eigenschaft, daß jedes Element eines Ideals $\mathfrak{a}$ in einer gewissen Umgebung des Anfangs auf $\mathfrak{U}$ verschwindet, so stellt die Menge $\mathfrak{U}$ gemeinsame Nullstellen von $\mathfrak{a}$ dar.

2. *Der Restklassenkörper nach* $\mathfrak{p}$ *als Körper algebroider Funktionen.* $\mathfrak{p}$ sei reguläres Primideal,

$$M_n = \Lambda_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s) = \Lambda_k(\omega) \qquad (k + s = n)$$

der Restklassenkörper von $\mathfrak{p}$, wobei die Bezeichnungen die Bedeutung von § 4, 3 haben sollen.

Definition. *Die Elemente von M_n heißen algebroide Funktionen von* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Die Elemente von M_n erhalten in der Tat den Charakter von Funktionen durch die folgende Festlegung.

Jedes Element α von M_n hat eindeutig die Normaldarstellung

$$(1) \qquad \alpha = \frac{b_0(\xi_1, \ldots, \xi_k) + b_1(\xi_1, \ldots, \xi_k)\,\omega^1 + \ldots + b_{\varrho-1}(\xi_1, \ldots, \xi_k)\,\omega^{\varrho-1}}{n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)}$$

wo $b_0, b_1, \ldots, b_{s-1}, n$ teilerfremd sind. Mit (1) zusammen betrachten wir die für ω irreduzible Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$:

$$(2) \quad g(\omega) \equiv \omega^\varrho + e_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)\omega^{\varrho-1} + \ldots + e_\varrho(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = 0.$$

Der gemeinsame Konvergenzbereich der in (1) und (2) auftretenden Elemente aus $\mathfrak{J}_k$ sei $\mathfrak{B}$. Jedes Wertsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ der $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ innerhalb $\mathfrak{B}$ mit $n(a_1, a_2, \ldots, a_k) \neq 0$ heiße dann ein gewöhnliches *Argument-*

wertsystem, jeder bei simultaner Gültigkeit von (1) und (2) zugehörige α-Wert ein zu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ gehöriger *Funktionswert* der algebroiden Funktion α.

Zu jedem Argumentwertsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ gehören im allgemeinen mehrere Funktionswerte. Aber auf der Menge der ω-Werte ist α eindeutig. Die Funktion ω ist also für die algebroiden Funktionen eine Uniformisierende.

Haben wir ein *System* von algebroiden Funktionen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_l,$$

so heiße $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ein gewöhnliches Argumentwertsystem des Funktionensystems, wenn $(a_1, \ldots, a_k)$ für alle Funktionen des Systems ein solches ist; sind $b_1, b_2, \ldots, b_l$ zu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ und zu demselben ω-Wert gehörige Funktionswerte von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, so soll $(b_1, b_2, \ldots, b_l)$ ein zu $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ gehöriges Funktionswertsystem des Systems $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ heißen.

Jede ganz rationale Beziehung zwischen Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ von M_n:

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) = 0$$

bleibt richtig, wenn man das System der in der Gleichung vorkommenden Elemente durch ein Funktionswertsystem dieser Elemente ersetzt.

Beweis. Es sei

$$\alpha_i = \frac{h_i(\omega)}{n_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

die Normaldarstellung von α_i. Dann folgt

$$\underset{i=1,2,\ldots,l}{R}\left(\frac{h_i(\omega)}{n_i}\right) \equiv \frac{G(\omega)}{N(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)} = 0.$$

Dabei ist $G(\omega)$ ein Polynom von ω mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$ und $N(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ ist ein Element aus $\mathfrak{J}_k$, das nur Faktoren enthält, die auch in den $n_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ vorkommen. $\frac{G(\omega)}{N} = 0$ bleibt aber richtig für die gewöhnlichen Argumentwertsysteme $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ des Systems $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ und zugehörigen ω-Werte ω_0; denn $G(\omega) = 0$ ist gleichbedeutend mit

$$G(z) = g(z) \cdot \bar{g}(z),$$

wo $g(z)$ das irreduzible Polynom für ω mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$ und $\bar{g}(z)$ ein gleichartiges Polynom ist. Es ist also identisch in z

$$\frac{G(z)}{N(\xi_1, \ldots, \xi_k)} = \frac{g(z) \cdot \bar{g}(z)}{N(\xi_1, \ldots, \xi_k)},$$

folglich

$$\frac{G'(\omega_0)}{N(a_1, \ldots, a_k)} = \frac{g'(\omega_0) \cdot \bar{g}'(\omega_0)}{N(a_1, \ldots, a_k)} = 0,$$

wo die Striche andeuten, daß $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ durch $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ersetzt ist. Hieraus folgt aber die Behauptung des Satzes.

3. *Die ganzen algebroiden Funktionen.*

Definition. *Die in bezug auf $\mathfrak{J}_k$ ganzen Elemente von M_n heißen ganze algebroide Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$.*

Ist β eine solche Funktion, so hat sie nach § 4, 3 bis eventuell auf einen gemeinsamen Faktor in Zähler und Nenner die Normaldarstellung:

$$\beta = \frac{f(\omega)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)}, \tag{3}$$

wo $D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ die Diskriminante von $g(z)$ ist.

Besondere ganze Funktionen sind die Restklassen $\{P(x_1, \ldots, y_s)\}$ der Elemente von $\mathfrak{J}_n$ nach $\mathfrak{p}$. Dazu gehören auch die Funktionen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$. Ist

$$f_i(\eta_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{4}$$

die irreduzible Gleichung für η_i mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$, so folgt aus dem Satz von 2., daß (4) richtig bleibt, wenn man die in (4) vorkommenden Elemente durch ein Funktionswertsystem dieser Elemente ersetzt. Der ausgezeichnete Charakter der Gleichungen (4) besagt nun, daß man die Umgebung des Nullpunktes im $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$-Raume immer so wählen kann, daß die zu der Umgebung gehörenden Funktionswerte der $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ absolut unter einem beliebig wählbaren kleinen Wert bleiben.

Für die Funktionen $\{P\}$ gilt der wichtige Satz:

Ist $P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s)$ *irgendein Element aus* $\mathfrak{J}_n$, *ferner* $(a_1, \ldots, a_k)$ *irgendein gewöhnliches Argumentwertsystem*, $c, b_1, \ldots, b_s$ *ein zugehöriges Funktionswertsystem von* $\{P\}, \eta_1, \ldots, \eta_s$, *so gilt innerhalb einer gewissen von P abhängigen Umgebung des Anfangs im* $\xi_1, \ldots, \xi_k$*-Raume*:

$$c = P(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s).$$

Beweis. Wir benutzen vollständige Induktion. Für Elemente aus $\mathfrak{J}_k$ ist der Satz trivial; denn die Restklasse von $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ist $P(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Der Satz sei nun bewiesen für Elemente aus $\mathfrak{J}_{k+j-1}$. Wir zeigen, daß er dann auch noch für die Elemente aus $\mathfrak{J}_{k+j}$ gilt.

Ist $P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_j)$ ein solches Element, so ist nach der Weierstraßschen Formel:

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_j) = f_j(y_j) \cdot F + y_j^{r_j - 1} A_1^{(j)}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{j-1}) \\ + \ldots + A_{r_j}^{(j)}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{j-1}), \end{aligned} \tag{5}$$

wo die $A_i^{(j)}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{j-1})$ aus $\mathfrak{J}_{k+j-1}$ sind. Durch Restklassenbildung nach $\mathfrak{p}$ erhalten wir aus (5):

$$\begin{aligned} \{P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_j)\} = \eta_j^{r_j - 1} \{A_1^{(j)}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{j-1})\} \\ + \ldots + \{A_{r_j}^{(j)}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{j-1})\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ist nun $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ein gewöhnliches Argumentwertsystem, $(b_1, \ldots, b_s)$ ein zugehöriges Funktionswertsystem von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ derart, daß alle in (5) und (6) auftretenden Reihen für diese Werte absolut konvergent sind, so folgt aus (5):

$$P(a_1, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_j) = b_j^{r_j - 1} A_1^{(j)}(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{j-1}) + \ldots + A_{r_j}^{(j)}(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{j-1}).$$

Aus (6) ergibt sich:

$$\{P\}_{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s} = c = b_j^{r_j - 1} \{A_1^{(j)}\}_{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s} + \ldots + \{A_{r_j}^{(j)}\}_{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s},$$

wo die Indizes an den Funktionen andeuten, daß diese durch ihre Funktionswerte ersetzt sind, die zu demselben ω-Wert gehören wie $b_1, b_2, \ldots, b_s$.

Da nach Voraussetzung

$$A_l^{(j)}(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{j-1}) = \{A_l^{(j)}\}_{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{j-1}}$$

ist, haben wir somit die Behauptung bewiesen.

Wir bemerken noch: Wegen der Darstellung (3) haben alle ganzen algebroiden Funktionen und Funktionensysteme denselben Definitionsbereich in der Umgebung des Anfangs im $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$-Raume. Ausgeschlossen sind die Punkte, für welche die Diskriminante $D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ verschwindet. Insbesondere trifft dies für die Funktionen $\{P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s)\}$ zu.

4. *Die gewöhnlichen Nullstellen von* $\mathfrak{p}$. Aus dem vorigen Satz folgt unmittelbar, daß jedes Element von $\mathfrak{p}$ auf der Menge $\mathfrak{U} = \{(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s)\}$ verschwindet[22]), wo $(a_1, \ldots, a_k)$ ein gewöhnliches Argumentwertsystem, $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ ein zugehöriges Funktionswertsystem von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ bedeutet. Es gilt aber weitergehend der Satz:

Alle Nullstellen $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s)$ *von* $\mathfrak{p}$, *für die* $D(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k) \neq 0$ *ist, werden durch die Menge* $\mathfrak{U}$ *erschöpft. Wir wollen sie die gewöhnlichen Nullstellen von* $\mathfrak{p}$ *nennen. Ferner gehört jedes Element von* $\mathfrak{J}_n$, *das auf* $\mathfrak{U}$ *verschwindet, zu* $\mathfrak{p}$. *Es kann also höchstens noch Nullstellen geben, für welche* $D(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ *verschwindet.*

Beweis. Zu den Elementen von $\mathfrak{p}$ gehört insbesondere die Reihe

$$W^\varrho + e_1(x_1, \ldots, x_k) W^{\varrho-1} + \ldots + e_\varrho(x_1, \ldots, x_k),$$

wo

$$W = d_1(x_1, \ldots, x_k) y_1 + \ldots + d_s(x_1, \ldots, x_k) y_s$$

ist (§ 4, 3); daraus folgt aber, daß für jede Nullstelle $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s)$ mit $D(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k) \neq 0$ von $\mathfrak{p}$ der Ausdruck

$$d_1(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k)\bar{b}_1 + \ldots + d_s(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k)\bar{b}_s$$

[22]) Gemeint ist natürlich immer: innerhalb einer gewissen vom Element abhängigen Umgebung des Anfangs im $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$-Raume.

ein zu $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$ gehöriger ω-Wert ω_0 sein muß:

(7) $$\omega_0 = d_1(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k)\bar{b}_1 + \ldots + d_s(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k)\bar{b}_s.$$

Hat ferner η_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ die Normaldarstellung

$$\eta_i = \frac{h_i(\omega)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_k)},$$

so folgt:

$$D(x_1, \ldots, x_k)\, y_i - h_i(W) \equiv 0\ (\mathfrak{p}).$$

Hieraus und aus (7) ergibt sich aber, daß $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_s)$ zu $\mathfrak{U}$ gehören muß.

Den zweiten Teil des Satzes beweisen wir folgendermaßen:

$P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s)$ sei ein Element von $\mathfrak{J}_n$, das in allen[23]) Punkten von $\mathfrak{U}$ verschwindet, aber es sei $P \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{p}$). Dann können wir bilden:

(8) $$\frac{1}{\{P\}} = \frac{p(\eta_1, \ldots, \eta_s)}{n(\xi_1, \ldots, \xi_k)},$$

wo $p(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$ ein Polynom von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$ und $n(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ ein Element aus $\mathfrak{J}_k$ $(\neq 0)$ ist. Aus (8) folgt

$$\{P\} \cdot p(\eta_1, \ldots, \eta_s) = n(\xi_1, \ldots, \xi_k)$$

und hieraus

(9) $$P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) \cdot p(y_1, y_2, \ldots, y_s) \equiv n(x_1, x_2, \ldots, x_k)\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}).$$

Es gibt nun in jeder noch so kleinen Umgebung des Nullpunktes im $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$-Raume Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, für die

$$D(a_1, \ldots, a_k) \cdot n(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$$

ist; anderenfalls müßten $n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ und $D(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nach dem Identitätssatz[24]) für Potenzreihen identisch Null sein. Für einen solchen Punkt $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ kann aber nach (9) $P(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s)$ dann nicht verschwinden, was gegen unsere Annahme ist.

Aus dem zweiten Teil des Satzes folgt noch, daß die Funktionswerte einer Funktion $\{P(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_s)\}$ nur einer einzigen irreduziblen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$ genügen können.

5. *Die Nullstellenmenge von* $\mathfrak{p}$ *als analytisches Gebilde.* Genau nach dem bei algebraischen Funktionen üblichen Verfahren wird in der Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen bewiesen[25]), daß die Gleichung

$$g(\omega) \equiv \omega^{\varrho} + e_1(\xi_1, \ldots, \xi_k)\omega^{\varrho-1} + \ldots + e_{\varrho}(\xi_1, \ldots, \xi_k) = 0$$

in der Umgebung des Anfangs im Raume von $k + 1$ komplexen Dimensionen ein *irreduzibles analytisches Gebilde* definiert, das im *Verzweigungsgebilde*

---

[23]) Vgl. Fußnote 22.

[24]) Osgood, S. 39.

[25]) Osgood, S. 88—92.

$D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = 0$, $g(\omega) = 0$ noch stetig ist. Die Anzahl k der unabhängigen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ heißt die Dimension des Gebildes. Es wird ferner gezeigt[26]), daß dann auch die Menge

$$\mathfrak{U} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s)\},$$

wo $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ein gewöhnliches Argumentwertsystem, $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ ein zugehöriges Funktionswertsystem von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ bedeutet, in der Umgebung des Nullpunktes im $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_s$-Raume ein irreduzibles analytisches Gebilde $\mathfrak{g}$ von der Dimension k bestimmt. Es zeigt sich nämlich, daß eine ganze algebroide Funktion in jedem Punkt der Verzweigungsmannigfaltigkeit von $g(\omega) = 0$ einen bestimmten Grenzwert besitzt. Werden die Funktionen η_i in allen Punkten des Verzweigungsgebildes von $g(\omega) = 0$ durch ihre Grenzwerte dort definiert, so wird dadurch die Punktmenge $\mathfrak{U}$ zum irreduziblen analytischen Gebilde $\mathfrak{g}$.

Die Werte einer ganzen Funktion α in den Punkten des Verzweigungsgebildes von $g(\omega) = 0$ genügen ebenfalls der für α irreduziblen Gleichung[27]) mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$. Ist nun $P(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_s)$ eine Potenzreihe aus $\mathfrak{J}_n$, so ist diese auf $\mathfrak{g}$ ausnahmslos stetig. Nach dem Satz von 3. stimmt also $P(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_s)$ auf $\mathfrak{g}$ mit der auf $g(\omega) = 0$ ergänzten Funktion $\{P\}$ vollständig überein. Die Werte von $P(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s)$ auf $\mathfrak{g}$ genügen also durchweg der für $\{P\}$ irreduziblen algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}_k$. Da diese Gleichung für Elemente $Q(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s)$ aus $\mathfrak{p}$ speziell von der Form ist:

$$\{Q\} = 0,$$

so ist damit gezeigt, daß $Q(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s)$ auf $\mathfrak{g}$ ausnahmslos verschwindet.

6. *Die Nullstellen eines beliebigen Primideals.* Ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein beliebiges Primideal im Bereich der konvergenten Potenzreihen von $z_1, z_2, \ldots, z_n$, so existiert nach § 4, 1 eine n. s. l. T. der Variablen, so daß $\bar{\mathfrak{p}}$ in ein reguläres Primideal $\mathfrak{p}$ von der Dimension k $(k = n - s)$ übergeführt wird:

$$z_i = \gamma_{i,1} x_1 + \gamma_{i,2} x_2 + \cdots + \gamma_{i,k} x_k + \gamma_{i,k+1} y_1 + \gamma_{i,k+2} y_2 + \cdots + \gamma_{i,n} y_s \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ist $\mathfrak{g} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s)\}$ die Nullstellenmenge von $\mathfrak{p}$, so ist $\bar{\mathfrak{g}} = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n)\}$, wo

$$c_i = \gamma_{i,1} a_1 + \gamma_{i,2} a_2 + \cdots + \gamma_{i,k} a_k + \gamma_{i,k+1} b_1 + \gamma_{i,k+2} b_2 + \cdots + \gamma_{i,n} b_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, die Nullstellenmenge von $\bar{\mathfrak{p}}$. Dann ist auch $\bar{\mathfrak{g}}$ ein irreduzibles analytisches Gebilde von der Dimension k im Raume der n Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Wir haben somit in voller Allgemeinheit den Satz:

[26]) Osgood, S. 93 u. 103.

[27]) Osgood, S. 93.

Die sämtlichen Nullstellen eines Primideals aus $\mathfrak{J}_n$ *machen ein irreduzibles analytisches Gebilde im Raume von n komplexen Dimensionen aus. Die Dimension des Gebildes ist gleich der Dimension des Primideals.*

Aus § 4, 5 folgt noch der Satz:

Jedes k-dimensionale Gebilde enthält ein Gebilde $(k-1)$*-ter Dimension.*

§ 6.

Die Nullstellen beliebiger Ideale. Das Weierstraßsche Theorem.

1. Wie man unmittelbar sieht, gilt der Satz:

Die Nullstellenmenge des Durchschnitts von gewissen Idealen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$ *ist die Vereinigungsmenge der Nullstellenmengen der einzelnen Ideale* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\nu$.

2. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in $\mathfrak{J}_n$, so existiert nach den Ausführungen von § 3, 3 eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt gewisser endlich vieler Primärideale:

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_l]$$

mit eindeutig bestimmten zugehörigen verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$.

Wegen 1. ist die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$ die Vereinigung der Nullstellenmengen der $\mathfrak{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Die Nullstellen von $\mathfrak{q}_i$ sind aber auch diejenigen von $\mathfrak{p}_i$; denn wegen $\mathfrak{q}_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_i}$ verschwindet jedes Element von $\mathfrak{q}_i$ in den Nullstellen von $\mathfrak{p}_i$, weiter wegen $\mathfrak{p}_i^\sigma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}_i}$ (§ 3, 3) zunächst die σ-te Potenz eines jeden Elements von $\mathfrak{p}_i$ und daraus folgend das Element selbst in den Nullstellen von $\mathfrak{q}_i$. Damit haben wir:

Die Nullstellenmenge eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{J}_n$ *ist die Vereinigungsmenge der Nullstellenmengen der zugehörigen, also endlich vieler Primideale.*

Die Nullstellen eines beliebigen Ideals in $\mathfrak{J}_n$ bestimmen also eine endliche Anzahl irreduzibler analytischer Gebilde im Raume der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $y_1, y_2, \ldots, y_s$, die von verschiedenen Dimensionen sein können; damit haben wir aber das Weierstraßsche Theorem bewiesen.

(Eingegangen am 1. 9. 1931.)