

**ФИЗИКА  
ЯДЕРНЫХ  
РЕАКТОРОВ**

**Л.Н. УСАЧЕВ, Ю.Г. БОБКОВ**

**ТЕОРИЯ  
ВОЗМУЩЕНИЙ  
И ПЛАНИРОВАНИЕ  
ЭКСПЕРИМЕНТА  
В ПРОБЛЕМЕ  
ЯДЕРНЫХ ДАННЫХ  
ДЛЯ РЕАКТОРОВ**

Л.Н. УСАЧЕВ, Ю.Г. БОБКОВ

ТЕОРИЯ  
ВОЗМУЩЕНИЙ  
И ПЛАНИРОВАНИЕ  
ЭКСПЕРИМЕНТА  
В ПРОБЛЕМЕ  
ЯДЕРНЫХ ДАННЫХ  
ДЛЯ РЕАКТОРОВ



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1980

**Усачев Л. Н., Бобков Ю. Г.** Теория возмущений и планирование эксперимента в проблеме ядерных данных для реакторов. — М.: Атомиздат, 1980 — 88 с.

Излагается общий подход к физике реакторов, основанный на использовании методов математической статистики и обобщенной теории возмущений. Эта теория представляет зависимость любой измеряемой или рассчитываемой реакторной величины от изменения ядерных данных и концентраций веществ в составе реактора в виде линейного соотношения. А методы математической статистики дают возможность рассмотреть всю совокупность реакторных и ядерных экспериментов как единый статистический ансамбль и решить задачи о планировании эксперимента для достижения требуемой точности и о выборе оптимизированной системы констант, наилучшим образом описывающей интегральные эксперименты при наименьшем отклонении от микроскопических ядерных данных. Для реакторов на быстрых нейтронах этот подход реализован.

Изложение обобщает публикации авторов с 1955 г. Содержится новый впервые публикуемый вывод обобщенной теории возмущений.

Для специалистов в области исследования, проектирования, эксплуатации ядерных реакторов и лиц, занимающихся математической теорией планирования эксперимента в разных областях науки.

Рис. 2. Табл. 4. Список литературы 88 наименований.

Серия «Физика ядерных реакторов», № 16.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
Глава 1. Обобщенная теория возмущений для ядерных реакторов . . . . .	10
§ 1.1. Общие сведения . . . . .	10
§ 1.2. Цепная реакция деления: основные процессы и физическая картина перемещения нейтронов по шкале энергий . . . . .	11
§ 1.3. Уравнение для потока нейтронов . . . . .	16
§ 1.4. Уравнение для ценности нейтронов в реакторе . . . . .	21
§ 1.5. Реакторные величины в уравнении кинетики . . . . .	27
§ 1.6. Теория возмущений для реакторных величин, представляемых дробно-линейными и дробно-билинейными функционалами от потока и ценности нейтронов . . . . .	31
§ 1.7. О реализации обобщенной теории возмущений в программах для ЭВМ . . . . .	44
Глава 2. Постановка и решение оптимизационных задач деятельности по ядерным данным на основе математической статистики и теории возмущений . . . . .	46
§ 2.1. Проблема ядерных данных как объект применения математической статистики . . . . .	46
§ 2.2. Природа корреляций погрешностей и их учет в проблеме ядерных данных . . . . .	51
§ 2.3. Математическая формулировка задачи определения оптимальных потребностей в ядерных данных . . . . .	56
§ 2.4. Использование интегральных экспериментов в проблеме ядерных данных для реакторов . . . . .	63
§ 2.5. Планирование оптимальной совокупности микроэкспериментов и оценок, обеспечивающей требуемые точности расчета реакторных параметров с учетом интегральных экспериментов . . . . .	70
Глава 3. Некоторые практические результаты решения оптимизационных задач в проблеме ядерных данных для реакторов на быстрых нейтронах . . . . .	74
§ 3.1. Общие сведения . . . . .	74
§ 3.2. Потребности в ядерных данных для реакторов на быстрых нейтронах . . . . .	75
§ 3.3. Оптимизация системы констант для расчета реакторов . . . . .	80
Список литературы . . . . .	84

ИБ № 202

Лев Николаевич Усачев  
Юрий Георгиевич Бобков

### ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ПРОБЛЕМЕ ЯДЕРНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РЕАКТОРОВ

Редактор Г. Б. Казьмина. Художественный редактор А. Т. Кирьянов. Обложка художника О. В. Камаева. Технический редактор О. Н. Адашкина. Корректор М. В. Косарева.

Сдано в набор 03.05.79. Подписано к печати 26.11.79. Т-20441. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,5. Уч.-изд. л. 6,17. Тираж 1000 экз. Зак. изд. 74191. Зак. тип. 359. Цена 95 к.

Атомиздат 103031 Москва К-31, ул. Жданова, 5.

Московская типография № 5 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 109088 Москва Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

## ВВЕДЕНИЕ

В любой области науки и техники, так же как и в самой жизни, постоянно приходится сталкиваться с проблемой роли категорий детерминированности и случайности, их взаимосвязи. Для правильного описания и предсказания явлений необходимо найти соответствующий математический аппарат, в котором бы адекватно учитывалось соотношение между детерминированностью и случайностью, имеющее место в рассматриваемой области явлений. При этом ясно, что чем меньше места остается для случайности, тем более удовлетворительно описание. Однако поскольку случайность существует, это необходимо учитывать и использовать соответствующие понятия и математический аппарат. Только так можно наметить пути уменьшения случайной компоненты в предсказаниях. Отсюда ясна важность правильного проведения границы между детерминированным и вероятностным описанием явлений и удачного их синтеза.

Данная книга и посвящена изложению реализации указанных общих соображений в физике реакторов вообще и в проблеме ядерных данных для реакторов на быстрых нейтронах в частности.

Детерминированное описание в физике реакторов основано на решении уравнений переноса, описывающих средний поток нейтронов. Математические методы решения этого уравнения к настоящему времени разработаны настолько, чтобы с принципиальной точки зрения считать их точными. Но даже если расчеты для экономии времени ЭВМ делаются приближенными методами, то их погрешности имеют определенный знак и значение, которые обычно устанавливаются сравнением с результатами более точного расчета и могут быть устранены внесением соответствующих поправок. Исключение составляет метод статистических испытаний, или метод Монте-Карло, погрешность которого имеет случайную компоненту, которую, однако, можно свести к малой величине при увеличении числа проигранных историй.

Случайность проявляется через неопределенность в исходных величинах как из-за погрешностей при измерениях ядерных данных, так и вследствие колебаний размеров и состава в пределах технологических допусков при изготовлении элементов, из которых собирается ядерный реактор.

Для того чтобы учесть случайные отклонения многочисленных исходных данных и их влияние на интересующие нас реакторные

параметры, надо знать чувствительность каждого такого параметра к изменению каждой величины из набора исходных данных. При современном состоянии знаний о ядерных данных, а также возможностей современной технологии случайные компоненты исходных данных не велики, и поэтому в пределах их изменений вполне можно использовать линейное приближение. Конечно, надо проверять его применимость прямым расчетом и при необходимости делать линейное разложение около новой точки, удаление от которой будет меньше и будет лежать в пределах справедливости линейного приближения.

В линейном приближении чувствительность характеризуется коэффициентами чувствительности — множителями, умножая на которые относительные изменения исходных данных, мы получаем соответствующее относительное изменение интересующей нас реакторной величины. В дальнейшем понятия реакторный параметр и реакторная величина используются в одном и том же смысле.

Обобщенная теория возмущений, которая излагается в гл. 1, является наиболее эффективным математическим аппаратом для расчета коэффициентов чувствительности, когда число учитываемых случайных исходных данных больше числа интересующих нас реакторных параметров. Такое соотношение этих чисел чаще всего имеет место. В противоположном случае (большое число реакторных параметров и малое число случайных исходных данных) коэффициенты чувствительности рационально вычислять прямым решением уравнения переноса нейтронов с первоначальными и измененными исходными параметрами.

Во всяком случае расчет коэффициентов чувствительности основан на использовании решений уравнений переноса и относится к детерминистической части полной программы. Однако он закладывает основу для дальнейшего вероятностного рассмотрения.

Как уже отмечалось, случайный элемент в описание реакторных параметров вносят исходные данные, значения которых определяются, в конечном счете, из эксперимента, а результатам эксперимента присуща погрешность. Погрешность случайной величины характеризуется дисперсией ее распределения.

Для ядерных данных, получаемых из совокупности нескольких микроскопических опытов, средняя величина и дисперсия следуют из так называемой оценки данных из разброса результатов различных опытов. Очень существенны также корреляции погрешностей для различных ядерных данных, входящих в систему исходных данных. Для эффективного учета корреляций погрешностей последние представляются в виде суммы компонент с различными корреляционными свойствами.

Математический аппарат, созданный для обработки экспериментальных результатов и планирования эксперимента, применяется в гл. 2, во-первых, для решения задачи планирования эксперимента, т. е. для определения необходимой точности системы исходных ядерных данных, и, во-вторых, для выработки оптимизированной системы констант, наилучшим образом описывающей

интегральные эксперименты при наименьшем отклонении от исходных микроскопических данных.

Интегральные эксперименты должны быть надежны и адекватны расчетной модели, а для измеряемого параметра должны быть рассчитаны коэффициенты чувствительности к изменению ядерных данных. Учет интегральных экспериментов, т. е. использование оптимизированной системы констант, существенно уточняет предсказание реакторных параметров. Соответственно этому решение задачи планирования эксперимента с учетом интегральных экспериментов показывает ослабление требований к точности микроскопических данных.

Указанная общая идеология в книге доведена до конкретных результатов в применении к проблеме ядерных данных для реакторов на быстрых нейтронах.

Надо отметить, что описанный подход к проблеме предсказания свойств реакторов на быстрых нейтронах разрабатывается и успешно применяется во многих других странах. В Великобритании и Франции на подобном подходе основаны расчетные предсказания построенных и проектируемых там таких реакторов. Отличие их методики от нашей только в моделях корреляций микроскопических данных и в используемых наборах интегральных экспериментов.

Мы уверены, что и во многих других проблемах реакторной физики, возникающих при проектировании и эксплуатации реакторов, использование описанного подхода, существенной чертой которого является явное введение случайных погрешностей и описание их влияния с помощью коэффициентов чувствительности и методов математической статистики, чрезвычайно эффективно. Эта уверенность основана на том общем соображении, подтвержденном и при решении проблемы ядерных данных, что использование в математическом аппарате понятий, адекватных сути дела, является решающим условием эффективности этого аппарата.

Дадим краткий исторический обзор развития основных идей указанного подхода к физике реакторов. Благоприятным условием для его развития было международное сотрудничество со времени проведения в Женеве в 1955 г. Первой международной конференции по мирному использованию атомной энергии. В 1961 г. на Международный семинар по физике реакторов на быстрых и промежуточных нейтронах был представлен доклад Мурхэда [1] (Великобритания), где было введено понятие коэффициентов чувствительности воспроизводства реактора на быстрых нейтронах к изменению нейтронных ядерных данных. Для вычисления коэффициентов чувствительности были проведены прямые расчеты изменений коэффициента воспроизводства для двумерной модели энергетического реактора на быстрых нейтронах при изменении каждой ядерной величины в каждой из рассмотренных пяти групп. Полученные таким образом коэффициенты чувствительности были использованы для определения требуе-

мой точности ядерных данных, обеспечивающих требуемую точность расчета коэффициента воспроизводства. При этом были обсуждены предположения о статистической природе погрешностей и о законах сложения погрешностей различных величин и роль корреляций погрешностей. Нам представляется, что работой Мурхэда начато направление деятельности по определению потребностей в ядерных данных или, иначе говоря, по планированию эксперимента в этой области. По-видимому, аналогичная работа была выполнена в 1962 г. Гандини, о чем можно судить по названию ссылки из доклада [2], приведенной здесь под номером [4].

На Третьей международной конференции по мирному использованию атомной энергии в 1964 г. в двух докладах было предложено использовать метод наименьших квадратов (МНК) для подгонки ядерных данных в пределах их погрешностей из условия наилучшего описания интегральных экспериментов на критических сборках. Это были работы из Италии — Чеккини, Фаринелли, Гандини и Сальваторе [2] — и из Израиля — Хуми и др. [3], причем в последней дается ссылка на Ракави как на автора этого предложения. С этих докладов начинается второе направление работ интересующего нас подхода к физике реакторов.

Что же касается расчета необходимых коэффициентов чувствительности, то теорию возмущений можно было использовать лишь для одного реакторного параметра — критичности реактора. Для других параметров приходилось делать прямые расчеты, как в работе [1]. Советские исследователи развили эффективный метод расчета коэффициентов чувствительности с помощью теории возмущений для таких реакторных параметров, как отношения чисел различных процессов — отношения линейных функционалов потока нейтронов (Л. Н. Усачев [5]), реактивности образцов, времен жизни, и других отношений билинейных функционалов потока и ценности нейтронов (Л. Н. Усачев, С. М. Зарицкий [6]) \*. Практически все наблюдаемые реакторные параметры принадлежат к указанным классам.

Надо отметить, что эти работы явились развитием более ранних. Так, в докладе Л. Н. Усачева [8] даются ссылки на работы до 1955 г. по теории возмущений для критичности реактора с упоминанием работ Д. И. Блохинцева, Вайнберга, А. С. Романовича, Эрлиха и Гурвица, Н. С. Дмитриева, Фукса, Пэндлбэри, Л. Н. Усачева и др. Во время дискуссии на конференции выяснилось авторство Вигнера в понятии ценности нейтронов и было указано на первое упоминание в печати Судаком в 1946 г. [9] роли сопряженного уравнения в теории возмущений. В работе [8] кроме общего вывода уравнения кинетики котла и наиболее общих выражений для всех входящих в него величин (вклю-

---

\* Результаты работы [6] были независимо получены двумя годами позже Гандини [7]. В ней был предложен термин «обобщенная теория возмущений».

чая выражения для реактивности, времени жизни мгновенных нейтронов, эффективной доли запаздывающих нейтронов) был сформулирован принцип сохранения ценности нейтронов в реакторе, исходя из которого можно выводить сопряженные уравнения (как дифференциальные, так и интегральные), граничные условия, усматривать физический смысл различных соотношений.

Дальнейшее существенное развитие теории возмущений и теории ценности нейтронов на случай наиболее общих линейных операторов с правыми частями и зависимостью от времени сделано в работах Б. Б. Кадомцева [10], Г. И. Марчука и В. В. Орлова [11]. В частности, сопряженное уравнение выведено на основе принципа сохранения ценности относительно вклада в произвольный линейный функционал от потока излучения [11]. Указанные идеи были изложены позже в книге Льюинса [11a]. Теория возмущений для дробно-линейных и дробно-билинейных функционалов от потока и ценности нейтронов в критическом реакторе [5, 6] была следующим шагом в развитии теории. В этих работах также был использован принцип сохранения ценности применительно к отдельным нейтронным циклам.

Распространение обобщенной теории возмущений на более общие линейные функционалы от потока нейтронов было проделано в работе В. В. Орлова [12] и на произведение от отношений линейных и билинейных функционалов — в работе Гринспэна [13]. Ряд работ, включая и две только что упомянутые, а также работы Стёрера [14], Стейси [15] посвящены различным подходам к выводу обобщенной теории возмущений. Дискуссия Гандини, Стейси и Гринспэна о сравнительных достоинствах таких различных выводов была опубликована в 1975 г. [16, 17, 18].

Ограниченный объем данной книги диктует наиболее рациональный, с нашей точки зрения, вывод, основанный на принципе сохранения ценности нейтронов относительно вклада в интересующее нас отношение линейных или билинейных функционалов. Ближе всего этот вывод к работам В. В. Орлова и Гринспэна, однако отличается тем, что полученное авторами соотношение теории возмущений является точным, т. е. справедливым не только при малых возмущениях. Для отношений билинейных функционалов такой результат публикуется впервые. Для отношения линейных функционалов такой результат сообщался Л. Н. Усачевым и С. М. Зарицким в работе [19]\*. Более широкий обзор теории возмущений дан Э. А. Стумбуrom [19a].

Направление работ по определению потребностей в ядерных данных развивалось в историческом плане следующим образом. После работы Мурхэда [1] последовали работы Гриблера, Хатчинса, Литфорда, Коуэна [20, 21], в которых ставился вопрос о важности в рассматриваемой задаче учета корреляций в погрешностях. Авторы этих работ выразили мнение, что реально

---

\* Надо сказать, что в окончательную формулу этой работы вкралась ошибка в знаке перед одним из членов.

почти каждой ядерной константе можно сопоставить два-три корреляционных интервала на всей энергетической оси. Можно отметить, что в работе [1] фактически использовано пять корреляционных интервалов.

М. Ф. Троянов, С. М. Зарицкий и М. Н. Николаев [22—24] продолжили исследование влияния корреляций погрешностей, а также предложили выработать требования к точности отношений величин к стандартам, таким, как  $\nu_0^{252}\text{Cf}$  и сечение деления  $^{235}\text{U}$ , а также к точности самих стандартов. В качестве некоторого единого принципа для распределения требований к погрешностям различных величин было выдвинуто условие одинакового вклада от различных источников погрешности. Однако в более поздней работе тех же авторов [24] от этого принципа сделаны существенные отступления, исходя из интуитивных соображений.

В методическом отношении данное направление в значительной степени завершено работами авторов данной книги совместно с Л. Т. Пятницкой [25—27]. В этих работах удалось сформулировать задачу по определению потребностей в ядерных данных в виде задачи нелинейного программирования, критерием оптимальности в которой является минимум стоимости совокупности экспериментов, обеспечивающих получение требуемых точностей реакторных параметров. Последние выступают в алгоритме в качестве ограничений при поиске минимума стоимости. Та же задача решена и при наличии информации о выполненных интегральных экспериментах. Требования к точности микроскопических данных при этом снижаются. Указанные результаты авторов изложены в гл. 3. Что касается направления использования интегральных экспериментов для подгонки системы ядерных констант в рамках метода наименьших квадратов, то сразу вслед за первыми работами [2, 3] последовал целый ряд работ, выполненных исследователями разных стран: в Великобритании — Пэндлбэри, Роулэндсом, Кэмпбэлом и др. [28—33]; во Франции — Баррэ, Равье, Шода и др. [34—36]; в Италии — Чеккини, Гандини, Фаринелли, Сальваторе и др. [37—40]; в Японии — Курои и Митани [41—43]; в Швеции — Хёгбломом [44]; в Голландии — Драгтом [45—46] и др. Достаточно полная библиография по этому вопросу содержится в обзоре [43].

В СССР обобщенная теория возмущений развивалась, в частности, в целях систематического использования результатов интегральных экспериментов для коррекции ядерных данных. Об этом прямо говорилось в докладе на Третьей международной конференции по мирному использованию атомной энергии [19]. Однако МНК был применен авторами книги для указанной цели сначала в работе [47]. Формулировка задачи в этой работе такая же, как и в работе [32]. В дальнейших своих работах авторы несколько модифицировали формулировку в соответствии с представлением погрешности суммой компонент с различными корреляционными свойствами, сделанным в работе [25], посвященной определению потребностей в ядерных данных. Здесь важ-

но подчеркнуть единство понимания смысла погрешности как при определении потребностей в точности, так и при подгонке микроскопических констант для наилучшего описания интегральных экспериментов. Смыслу погрешности посвящена статья [48]. Существенную роль в практической реализации алгоритма МНК с большим числом параметров на ЭВМ малой мощности сыграли идеи последовательного планирования эксперимента, изложенные в книгах В. В. Налимова [49, 50] и В. В. Федорова [51]\* и реализованные в работах [52, 53]. Использование этих идей позволило получить также интересные формулы для информативности интегральных экспериментов [52] и на основе большой работы, описанной в публикациях [54—58], создать оптимизированную систему констант атомных реакторов ОСКАР. Эти результаты и легли в основу изложения соответствующих параграфов гл. 2.

В связи с использованием интегральных экспериментов в проблеме ядерных данных необходимо также отметить работы А. А. Ванькова, А. И. Воропаева, В. В. Орлова и Л. Н. Юровой [59—62], поставивших вопрос о важности учета корреляций в погрешностях интегральных экспериментов и исследовавших тенденции в оценках параметров критичности и коэффициента воспроизводства и ряд других вопросов.

Описанию некоторых конкретных результатов по потребностям в ядерных данных, информативности интегральных экспериментов и оптимизации систем констант посвящена гл. 3.

---

\* Аналогичные алгоритмы изложены Драгтом [45].

# Глава 1

## ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

### § 1.1. Общие сведения

Изложение обобщенной теории возмущений начнем с описания основных физических процессов, определяющих протекание цепной реакции деления и энергию нейтронов, при которой происходит их взаимодействие с ядрами. Затем будет дан вывод уравнений для потока и ценности нейтронов, а также уравнения кинетики котла. Этот материал делает изложение данного раздела теории реакторов замкнутым, т. е. позволяет разобраться в предмете, не обращаясь к другим источникам.

Далее будет дан вывод точных соотношений обобщенной теории возмущений для важного класса реакторных величин, являющихся отношениями функционалов, линейных по потоку нейтронов, по ценности нейтронов или по их произведению. Такими величинами, например, являются сами спектры и ценности нейтронов, проинтегрированные по любым энергетическим интервалам и любым объемам; отношения чисел различных ядерных реакций под действием нейтронов в специальных образцах или в любых объемах реактора; реактивности образцов или их отношения; время жизни мгновенных нейтронов.

Линеаризация с помощью теории возмущений перечисленных величин дает возможность включить широкий круг реакторных экспериментов по измерениям указанных выше величин в общую совокупность для рассмотрения методами математической статистики, чему посвящена гл. 2.

Для вывода соотношений обобщенной теории возмущений не требуется каких-либо приближений и поэтому используются строгие уравнения переноса для потока нейтронов в стационарном критическом реакторе и сопряженные им уравнения для ценности нейтронов. При выводе соотношения теории возмущений, определяющего условия критичности реактора, используют только однородные уравнения без источников, при выводе же соотношений для всего остального множества реакторных величин — как однородные, так и неоднородные. Уравнения для ценности нейтронов относительно вклада в асимптотическую мощность и относительно вклада в любое из упомянутых отношений линейных или билинейных функционалов выводятся из принципа сохранения ценности. Удалось получить точное, т. е. справедливое при произвольных возмущениях, соотношение теории возмущений, не содержащее разностей возмущенных и невозмущенных потоков и ценностей нейтронов. По-видимому, такой результат для отноше-

ний билинейных функционалов публикуется впервые. Преимущества такого точного соотношения состоят в надежности получения формулы для бесконечно малых возмущений и в возможности проверить расчетом влияние конечности возмущений.

Итак, в гл. 1 изложен метод получения соотношений обобщенной теории возмущений и приведены сами соотношения для различных реакторных величин. Эти соотношения дают линейную зависимость изменений реакторных параметров от малых изменений ядерных данных и состава реактора.

## § 1.2. Цепная реакция деления: основные процессы и физическая картина перемещения нейтронов по шкале энергий

Цепная реакция деления; качественное описание. В ядерных реакторах происходит цепная реакция деления ядер. Возможность цепной реакции обеспечивается тем, что деление ядра вызывается одним нейтроном, а при делении испускается в среднем 2,5—3 нейтрона. Для поддержания цепной реакции необходимо, чтобы один нейтрон из испущенных при делении вновь бы вызвал деление. Остальные нейтроны, претерпевающие радиационный захват в ядрах или вызывающие какую-либо другую ядерную реакцию, обуславливают этим накопление одних и выгорание других нуклидов. Судьба нейтронов зависит от соотношений вероятностей различных процессов взаимодействия нейтронов с ядрами, которые сильно зависят от энергии нейтронов, а также от концентраций нуклидов, которые различны в разных частях реактора. Поэтому определение условий поддержания цепной реакции деления сводится к расчету распределения потока нейтронов по энергиям и пространству и к проверке условий стационарности этого распределения. Оставляя строгую математическую формулировку этой задачи до следующего параграфа,

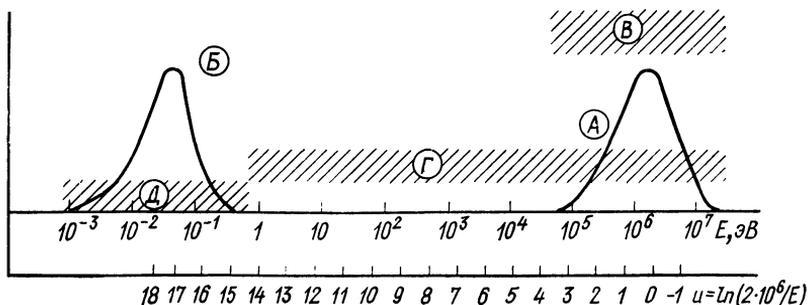


Рис. 1. Общая картина энергетического распределения нейтронов:

A — спектр нейтронов деления; B — максвелловский спектр теплового равновесия со средой; B — область неупругого рассеяния; Г — область упругого рассеяния—замедления; Д — область обмена энергией со средой

нарисуем здесь картину перемещения нейтронов по шкале энергий, которая определяет и методы решения полной пространственно-энергетической задачи.

Шкала энергий нейтронов в цепной реакции деления. Чтобы дать наглядную картину перемещения нейтронов по шкале энергий в процессе цепной реакции деления, приведем на рис. 1 шкалу энергии в логарифмическом масштабе с представленными на ней спектрами нейтронов деления и нейтронов в тепловом равновесии со средой. Эти два спектра ограничивают область энергий нейтронов любых реакторов сверху и снизу.

Далее объясняется физика всех отмеченных на рис. 1 процессов.

Спектр нейтронов деления. Деление ядра — уникальный по глубине перестройки структуры ядра процесс. При развале ядра на два осколка выделяется очень большая энергия (порядка 200 МэВ). Основная доля полной энергии — это кинетическая энергия осколков. Значительная доля полной энергии идет на возбуждение осколков, что проявляется в испускании вторичных нейтронов движущимися осколками деления. Имеет место широкое распределение осколков по массам, кинетическим энергиям и энергиям возбуждения.

В результате интенсивных экспериментальных и теоретических исследований оказалось, что все это многообразие процессов комбинируется таким образом, что спектр нейтронов деления вплоть до 10 МэВ для всех делящихся нуклидов от  $^{232}\text{Th}$  до  $^{252}\text{Cf}$  с хорошей точностью представляется максвелловским спектром

$$\chi(E) dE = (2/\sqrt{\pi T^3}) \sqrt{E} \exp(-E/T) dE, \quad (1.1)$$

а средняя энергия этого спектра может быть вычислена через среднее число вторичных нейтронов деления  $\nu$  по соотношению

$$\bar{E} = \int_0^{\infty} E \chi(E) dE = 0,78 + 0,62 \sqrt{1 + \nu}. \quad (1.2)$$

Параметр же максвелловского распределения  $T$  связан известным соотношением с  $\bar{E}$ :

$$\bar{E} = 3T/2. \quad (1.3)$$

В качестве единиц для  $E$  и  $T$  в этих формулах использован мегаэлектронвольт (МэВ).

Эти результаты были четко сформулированы в работе Терелла в 1959 году [63]. Оказалось, что формула (1.1) воспроизводит не только экспериментальные спектры, но и результаты теоретических расчетов, выполненных в следующих предположениях. Спектр испарения в системе координат осколка описывается формулой Вайскопфа  $E \exp(-E/T)$ , учитывается векторное сложение скорости нейтрона относительно осколка, а также распределения скоростей осколков и их энергий возбуждения и, следовательно,

температур. Энергия возбуждения осколков определяет как число испаряющихся нейтронов, так и их среднюю энергию относительно осколка. Благодаря этому и существует связь, выраженная вторым членом формулы (1.2). Независимый же от  $\nu$  член является вкладом в среднюю энергию спектра нейтронов в лабораторной системе координат от движения осколка. Ряд факторов здесь опять скомбинировался так, что этот член оказался примерно постоянным для всех нуклидов от  $^{232}\text{Th}$  до  $^{252}\text{Cf}$ .

Зависимость (1.2) выведена теоретически и удовлетворительно описывает экспериментальную ситуацию — наблюдаемую корреляцию  $\nu$  и  $\bar{E}$ .

Надо отметить, что спектры нейтронов деления измеряются с момента открытия деления со все возрастающей аккуратностью до настоящего времени. Есть указания на возможное 10—15%-ное превышение над формулой (1.1) в области энергий 0,3—0,7 МэВ, что иногда интерпретируется как указание на испускание 10—20% нейтронов до достижения осколками полной скорости.

В массовых вариантных расчетах реакторов в настоящее время используются формулы (1.1) и (1.2) или вместо формулы (1.1) используется так называемая формула Уатта:

$$\chi(E) = C \exp(-E/T) \operatorname{sh} 2\sqrt{EE_f}/T, \quad (1.4)$$

где  $C = \exp(-E_f/T) (\sqrt{\pi EE_f T})^{-1}$ . Для этого распределения средняя энергия равна  $\bar{E} = E_f + 3T/2$ .

При подходящих параметрах  $E_f$  и  $T$  спектр (1.4) очень мало отличается от (1.1). С помощью теории возмущений, излагаемой ниже, можно учесть любые отклонения от этих формул.

В заключение нам важно подчеркнуть, что спектр деления ограничивает сверху область спектра нейтронов в реакторе, так как при всех других процессах взаимодействия нейтронов с ядрами нейтроны могут только терять энергию.

На рис. 1 изображен спектр нейтронов деления, рассчитанный по формулам (1.1), (1.2), (1.3) при  $\nu=2,6$ . Энергией свыше 10 МэВ обладает около 0,1% всех нейтронов спектра деления, столько же нейтронов обладает энергией ниже 0,01 МэВ, а ниже 0,1 МэВ — 1%.

Неупругое рассеяние. При неупругом столкновении с ядром нейтрон теряет часть своей энергии, переводя ядро в одно из возбужденных состояний. Для того чтобы неупругое рассеяние оказалось возможным, необходимо выполнение законов сохранения энергии, углового момента, четности. Иными словами, надо, чтобы у ядра имелся хотя бы один уровень, для возбуждения которого у нейтрона хватило бы энергии, а также углового момента движения.

У легких ядер первые возбужденные уровни имеют энергию порядка нескольких мегаэлектронвольт, у средних и тяжелых эта энергия равняется сотням или десяткам килоэлектронвольт. Нейтроны с энергиями меньшими, чем энергия первого возбуж-

денного уровня, не могут передать свою энергию ядру, так как ее недостаточно для возбуждения этого уровня. Чтобы установить нижнюю границу области энергий, в которой на спектр нейтронов влияет неупругое рассеяние, надо учесть, что вероятность почти полной потери нейтроном своей энергии при неупругом столкновении мала. Это связано с тем, что с уменьшением энергии вылетающего нейтрона уменьшается проникаемость поверхности ядра.

Учитывая отмеченные обстоятельства, можно указать для определенности энергию 10 кэВ как границу, ниже которой неупругое рассеяние не может влиять на спектр нейтронов реактора. Это и отражено на рис. 1.

Упругое рассеяние. Если при столкновении нейтрона с ядром внутреннее состояние ядра остается первоначальным, то говорят об упругом столкновении нейтрона с ядром. Но и при таком соударении нейтрон теряет часть своей энергии, которая переходит в кинетическую энергию ядра отдачи. Если энергия нейтрона значительно больше энергии химической связи атома, которому принадлежит рассматриваемое ядро, с соседними атомами ( $\sim 0,1$  эВ), а значит, и энергии теплового движения атомов среды ( $\sim 0,025$  эВ при температуре среды  $20^\circ\text{C}$ ), то можно считать, что нейтрон сталкивается со свободным покоящимся ядром по закону соударений упругих шаров. При этом величина потери энергии зависит от отношения массы ядра к массе нейтрона и пропорциональна первоначальной энергии нейтрона. С этим последним обстоятельством связано удобство введения в качестве переменной, характеризующей энергию нейтрона  $E$ , величины  $u = \ln E_0/E$ , называемой летаргией. (Величину  $E_0$  часто принимают равной 2 МэВ, иногда 10 МэВ.) Когда энергия нейтрона уменьшается с  $E'$  до  $E$ , летаргия увеличивается на  $\ln E_0/E - \ln E_0/E' = \ln E'/E$ . Среднее увеличение летаргии нейтрона при одном столкновении с ядром атомной массы  $A'$  в предположении изотропности рассеяния в системе центра масс оказывается не зависящим от энергии нейтрона и равным

$$\xi_A = \ln E'/E = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \ln \frac{A-1}{A+1},$$

где  $A = A'/1,009$  (1,009 — атомная масса нейтрона). Приближенно при  $A \gg 1$  справедлива следующая формула:  $1/\xi_A = A/2 + 1/3 + 1/18A$ .

Ею можно пользоваться даже при  $A=2$  (погрешность меньше 0,5%). Неизотропность рассеяния в системе центра масс, имеющая место при энергиях порядка 1 МэВ и больших, несколько изменяет  $\xi_A$ . Однако это не нарушает общей картины упругого замедления нейтронов.

На рис. 1, где по оси абсцисс линейно отложены логарифмы энергии, а также соответствующие летаргии нейтронов, процесс упругого замедления наглядно представляется как движение на отрезок  $\xi_A$  справа налево при каждом упругом соударении

нейтрона с ядром атомной массы  $A$ . На этом рисунке есть отрезки летаргии, равные 1, т. е. среднему увеличению летаргии при соударении нейтрона с атомом водорода. От спектра деления до спектра теплового равновесия укладывается около 18 таких отрезков. Это означает, что при замедлении нейтронов деления на водороде в результате 18 соударений нейтроны приходят в область теплового равновесия со средой. Соответствующие числа соударений с более тяжелыми ядрами приблизительно равны  $18/\xi_A$ .

Таким образом, упругое рассеяние в отличие от неупругого может увести нейтрон в область энергии, лежащую существенно ниже области спектра деления.

Влияние теплового движения и химической связи атомов. При приближении энергии замедляющегося нейтрона к области энергий химической связи атомов (несколько десятых электронвольт) средние потери энергии при каждом соударении уменьшаются. Замедление нейтронов в среднем прекращается, когда их энергия становится сравнимой с энергией теплового движения ядер. Дело в том, что нейтроны при столкновении с ядрами могут не только отдавать, но и приобретать энергию. В результате достаточно большого числа соударений нейтроны должны прийти в тепловое равновесие с ядрами и их спектр при температуре среды  $T$  должен описываться максвелловским распределением

$$n(E) dE = 2\pi (\pi kT)^{-3/2} \exp(-E/kT) E^{1/2} dE.$$

Это распределение при  $T=300^\circ\text{C}$ ,  $kT=0,025$  эВ представлено на рис. 1.

Надо отметить, что эксперименты указывают на наличие максвелловского спектра с параметром  $T$ , равным температуре среды, лишь в чистых замедлителях, например в графите, в тяжелой воде, в парафине, но не в активной зоне реактора, где спектр нейтронов оказывается несколько сдвинутым в область больших энергий. Последнее, очевидно, обусловлено тем, что время жизни теплового нейтрона существенно уменьшено захватом в делящихся веществах и его недостаточно для установления полного теплового равновесия.

Влияние захвата и утечки нейтронов на их спектр. Если бы захвата нейтронов и их утечки не происходило, то даже в среде, состоящей из наиболее тяжелых ядер, после достаточно большого числа упругих соударений нейтроны снизили бы свою энергию до энергии теплового движения атомов. Захват же и утечка нейтронов ограничивают возможное число соударений нейтронов с ядрами. Следовательно, спектр нейтронов в реакторе должен существенно зависеть от отношения вероятностей захвата и замедления нейтронов, а также от утечки и замедления нейтронов. Физически утечка нейтронов состоит в том, что, прежде чем претерпеть тот или иной вид соударения с ядром,

нейтрон свободно летит между ядрами. В хаотическом движении нейтроны постепенно удаляются от точки их испускания при делении и часть их выходит из реактора наружу, теряясь для цепной реакции.

### § 1.3. Уравнение для потока нейтронов

В этом параграфе дается вывод уравнения переноса нейтронов из рассмотрения баланса чисел процессов, происходящих с нейтронами, обладающими любой энергией, любого направления скоростей в каждом единичном объеме реактора.

Определение основных величин. Поток нейтронов, энергии которых принадлежат единичному интервалу около энергии  $E$  и скорости которых направлены вдоль вектора  $\mathbf{n}$  ( $|\mathbf{n}|=1$ ) внутри единичного телесного угла, зависит от радиус-вектора точки  $\mathbf{r}$ . Поток нейтронов обозначим функцией  $F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$ . Эта функция дает число указанных нейтронов, пересекающих за 1 с площадку в  $1 \text{ см}^2$ , нормальную вектору  $\mathbf{n}$ . Для краткости будем говорить, что функция  $F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  — это поток нейтронов пучка  $(E, \mathbf{n})$  в точке  $\mathbf{r}$ .

Для нахождения полного числа взаимодействий типа  $\alpha$  с ядрами сорта  $i$  в  $1 \text{ см}^3$  около точки  $\mathbf{r}$  надо знать еще длину свободного пробега (в см)  $l_{i\alpha}(\mathbf{r}, E)$  нейтрона энергии  $E$  до соответствующего взаимодействия и воспользоваться формулой

$$\int \frac{F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{i\alpha}(\mathbf{r}, E)} dEd\Omega.$$

Интегрирование ведется по всем энергиям и направлениям скоростей нейтронов. Длина свободного пробега определяется ядерными данными — сечениями взаимодействия  $\sigma_{\alpha i}(E)$  и составом реактора, т. е. числом  $N_i(\mathbf{r})$  соответствующих ядер в  $1 \text{ см}^3$  около  $\mathbf{r}$  по формуле

$$[l_{i\alpha}(\mathbf{r}, E)]^{-1} = N_i(\mathbf{r}) \sigma_{\alpha i}(E).$$

Полное число взаимодействий типа  $\alpha$  в  $1 \text{ см}^3$  около точки  $\mathbf{r}$  равно

$$\int \frac{F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{i\alpha}(\mathbf{r}, E)} dEd\Omega = \int F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) \left( \sum_i \frac{1}{l_{i\alpha}(\mathbf{r}, E)} \right) dEd\Omega,$$

где суммирование ведется по всем сортам ядер, способных к такому взаимодействию.

При некоторых взаимодействиях нейтрона с ядром возникают нейтроны с другим направлением скорости, с другой энергией и иногда в большем числе. Так, при делении ядра сорта  $i$  нейтроном пучка  $(E', \mathbf{n}')$  возникает  $\nu_i(E')$  нейтронов, распределенных по энергиям и направлениям по закону  $\chi_i(E, E', \mathbf{n}\mathbf{n}')$  с нормировкой

$$\int \chi_i(E, E', \mathbf{n}\mathbf{n}') dEd\Omega = 1.$$

Поскольку числа вторичных нейтронов деления и их спектры несколько различны для разных нуклидов, а концентрации по-

следних меняются от точки к точке, то для средних величин на одно деление возникает зависимость от радиус-вектора точки  $\mathbf{r}$  в соответствии с формулами:

$$[l_f(\mathbf{r}, E')]^{-1} = \sum_i [l_{if}(\mathbf{r}, E')]^{-1};$$

$$\frac{v(E', \mathbf{r})}{l_f(\mathbf{r}, E')} = \sum_i \frac{v_i(E')}{l_{if}(\mathbf{r}, E')};$$

$$\frac{\chi(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) v(E', \mathbf{r})}{l_f(\mathbf{r}, E')} = \sum_i \frac{\chi_i(E, E', \mathbf{nn}') v_i(E')}{l_{if}(\mathbf{r}, E')}.$$

Аналогично возникает зависимость от  $\mathbf{r}$  и в вероятности рассеяния.

Уравнение для потока нейтронов и определение еще ряда величин. Уравнение, определяющее функцию потока нейтронов  $F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$ , записывается из соображения баланса нейтронов. Для стационарных решений сумма изменений числа нейтронов каждого пучка  $(E, \mathbf{n})$  в каждой точке  $\mathbf{r}$  за счет всех физических процессов равна нулю:

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{\partial s} + \frac{F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{aifs}(\mathbf{r}, E)} - \int \omega(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') dE' d\Omega' -$$

$$- \int \frac{F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}')}{l_f(\mathbf{r}, E')} v(E', \mathbf{r}) \chi(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) dE' d\Omega' - Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) = 0. \quad (1.5)$$

Первый член  $\partial F/\partial s$  по определению производной по направлению  $\mathbf{n}$ , т. е. по направлению скорости нейтрона, равен разности количества нейтронов пучка  $(E, \mathbf{n})$ , выходящих из рассматриваемого объема ( $1 \text{ см}^3$ ) и входящих в него за 1 с.

Второй член — число нейтронов, выводимых из пучка  $(E, \mathbf{n})$  в объеме  $1 \text{ см}^3$  за 1 с в результате захвата нейтронов в реакциях с испусканием  $\gamma$ -квантов, протонов,  $\alpha$ -частиц и в других возможных реакциях без испускания нейтрона (индекс «а»); неупругого рассеяния, включая также  $(n, 2n)$  и прочие процессы с испусканием вторичных нейтронов, кроме деления (индекс «i»); деления ( $f$ ); упругого рассеяния ( $s$ ). Надо иметь в виду, что

$$1/l_{aifs} = 1/l_a + 1/l_f + 1/l_i + 1/l_s.$$

Третий член — число нейтронов, попадающих в рассматриваемый пучок  $(E, \mathbf{n})$  из пучков  $(E', \mathbf{n}')$  в результате упругого и неупругого рассеяний, а также процесса  $(n, 2n)$  и т. д., причем величина  $\omega(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})$  определяет соответствующую вероятность перехода и может быть записана через длины свободного пробега до неупругого ( $l_i$ ) и упругого ( $l_s$ ) рассеяний и соответствующие распределения  $s(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})$  и  $f(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})$ :

$$\omega(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) = \frac{s(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})}{l_i(\mathbf{r}, E')} + \frac{f(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})}{l_s(\mathbf{r}, E')}.$$

Причем функция  $f(E, E', nn', \mathbf{r})$  нормирована по числу вторичных нейтронов на единицу, а  $s(E, E', nn', \mathbf{r})$  нормирована с учетом процесса  $(n, 2n)$ , а там, где этого процесса нет, — на единицу.

В области энергий нейтронов, сравниваемых с энергией теплового движения атомов среды и энергией химической связи, под  $\omega(E, E', nn', \mathbf{r})$  будем понимать вероятность столкновений нейтронов с кристаллической, жидкой или газообразной средой с переходом из пучка  $(E', \mathbf{n}')$  в  $(E, \mathbf{n})$ , причем  $E$  может быть как меньше, так и больше  $E'$ . Нормируется эта функция на полную вероятность столкновения.

Более детального определения этих функций в данной главе не требуется.

Четвертый член — число нейтронов деления, испускаемых в рассматриваемом объеме и принадлежащих пучку  $(E, \mathbf{n})$ . На каждое деление, вызываемое нейтроном пучка  $(E', \mathbf{n}')$ , испускается  $\nu(E', \mathbf{r})$  нейтронов деления, распределение которых по энергиям и направлениям скоростей описывается функцией  $\chi(E, E', nn', \mathbf{r})$ , нормированной на единицу:

$$\int \chi(E, E', nn', \mathbf{r}) dE d\Omega = 1.$$

При этом предполагается, что число и распределение запаздывающих нейтронов соответствующим образом учитывается в функциях  $\nu(E', \mathbf{r})$  и  $\chi(E, E', nn', \mathbf{r})$ . Запаздывающие нейтроны выделены при записи нестационарного уравнения в последнем пункте данного параграфа.

Пятый член  $Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  — некоторый источник нейтронов, конкретные виды которого и требования к нему будут обсуждаться в § 1.4 и 1.5. При рассмотрении же задачи об условиях критичности и стационарном распределении нейтронов следует положить

$$Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) = 0. \quad (1.6)$$

Граничные условия на поток нейтронов. Будем считать, что реактор (вместе с отражателем и, возможно, слоями защиты) ограничен выпуклой поверхностью и окружен пустотой. В этом случае в каждой точке границы  $\mathbf{r}_{\text{гр}}$  для всех  $\mathbf{n}$ , направленных из пустоты в реактор, надо принять

$$F(\mathbf{r}_{\text{гр}}, E, \mathbf{n}_{\text{внутр}}) = 0. \quad (1.7)$$

Описывающая поток нейтронов функция должна быть непрерывной:

$$F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) \text{ — непрерывна.} \quad (1.8)$$

Условия критичности реактора. При нулевом источнике, т. е. при выполнении соотношения (1.6), условия существования стационарного решения уравнения (1.5) при выполнении (1.7) и (1.8) являются условиями самоподдерживающейся

стационарной цепной реакции. При этом надо потребовать еще положительности функции потока нейтронов:

$$0 \leq F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) < \infty. \quad (1.9)$$

Эти условия выполняются лишь при вполне определенных соотношениях между формой реактора, его размерами, составом и значениями ядерно-физических констант. Значения параметров, характеризующих форму, размеры, состав реактора, при которых рассматриваемое уравнение имеет отличное от нуля решение, называются *критическими*.

Квазикритические реакторы и эффективный коэффициент размножения. Поскольку точно указать значения критических параметров до расчета нельзя, удобно ввести еще один параметр, явно входящий в стационарное уравнение для потока нейтронов. Эту величину, на которую надо разделить число вторичных нейтронов деления, чтобы обеспечить стационарность реактора, обозначим  $k_{\text{эф}}$ . При этом уравнение для потока нейтронов принимает вид

$$\frac{\partial F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{\partial s} + \frac{F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{\text{аи}} f_s} - \int \omega(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') dE' d\Omega' - \frac{1}{k_{\text{эф}}} \int \frac{F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}')}{l_f(\mathbf{r}, E')} \nu(E', \mathbf{r}) \chi(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) dE' d\Omega' = 0. \quad (1.10)$$

Реактор, описываемый этим уравнением, называется *квазикритическим*. Физический смысл параметра  $k_{\text{эф}}$  — эффективный коэффициент размножения. Это непосредственно следует из мысленного расчленения стационарной цепной реакции на нейтронные циклы, начинающиеся с испускания нейтронов деления и кончающиеся их полным поглощением, в результате которого испускается новое поколение нейтронов деления. Нетрудно усмотреть, что  $k_{\text{эф}}$  есть отношение числа нейтронов деления нового поколения к числу нейтронов деления предыдущего поколения [8]. Такое понятие нейтронных поколений лежит в основе метода последовательных приближений, чаще всего применяемого для решения уравнений (1.5) и (1.10) [8].

Существование единственного положительного решения, соответствующего наибольшему собственному числу  $k_{\text{эф}}$ , отделенному от следующих собственных чисел, в общей постановке к настоящему времени доказано математически. Это доказательство изложено в книге С. Б. Шихова [64].

Уравнение для нестационарного потока нейтронов в реакторе. В нестационарном случае баланс нейтронов, записанный для стационарного случая уравнением (1.5), несколько модифицируется. Во-первых, поток нейтронов становится зависящим от времени  $t$ :  $F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)$ . Во-вторых, изменение (уменьшение) числа нейтронов пучка  $(E, \mathbf{n})$  в точке  $\mathbf{r}$  в момент  $t$  за 1 с, происходящее в результате всех возможных взаимодействий с ядрами, записанное в левой части уравнения (1.5), надо

приравнять не нулю, а выражению —  $(1/v)[\partial F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)/\partial t]$ , которое и является этим изменением (уменьшением) по определению. Действительно, поток нейтронов, деленный на абсолютное значение скорости, есть число нейтронов в 1 см<sup>3</sup>, а производная по времени от этой величины со знаком минус есть уменьшение числа нейтронов за 1 с. В-третьих, из общего числа вторичных нейтронов деления должны быть выделены мгновенные и запаздывающие нейтроны и учтено временное запаздывание последних:

$$\begin{aligned} & \frac{\chi(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) v(E', \mathbf{r})}{l_f(E', \mathbf{r})} F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{\chi_p(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) v_p(E', \mathbf{r})}{l_f(E', \mathbf{r})} F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}', t) + \\ & + \int_{-\infty}^t \sum_i \frac{\lambda_i \chi_d^i(E) b_i(E', \mathbf{r})}{4\pi l_f(\mathbf{r}, E')} \exp\{-\lambda_i(t-t')\} F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}', t') dt'. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Здесь  $v_p$  и  $\chi_p$  — число мгновенных нейтронов деления и их спектр;  $b_i$  и  $\chi_d^i$  — выход носителей запаздывающих нейтронов  $i$ -го сорта на одно деление и спектр последних. Эти носители распадаются с вероятностью  $\lambda_i$  с<sup>-1</sup>, и если  $t'$  есть момент образования такого носителя, то в момент времени  $t$  за 1 с будет происходить  $\lambda_i \exp[-\lambda_i(t-t')]$  распадов.

Спектры нейтронов  $\chi_p$  и  $\chi_d$  нормированы на единицу:

$$\int \chi_p(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) dEd\Omega = 1; \quad \frac{1}{4\pi} \int \chi_d^i(E) dEd\Omega = 1.$$

Введенные ранее число нейтронов деления  $v(E, \mathbf{r})$  и их спектр  $\chi(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})$  выражаются через новые величины следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} v(E', \mathbf{r}) &= v_p(E', \mathbf{r}) + \sum_i b_i(E', \mathbf{r}); \\ \chi(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) v(E', \mathbf{r}) &= \chi_p(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) v_p(E', \mathbf{r}) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_i \chi_d^i(E) b_i(E', \mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Как уже отмечалось, зависимость от  $\mathbf{r}$  указанных величин проистекает от различия величин  $v_p$ ,  $b_i$ ,  $\chi$  для разных нуклидов и от зависимости их концентраций от  $\mathbf{r}$ . Не зависят от  $\mathbf{r}$  только  $\chi_d^i(E)$ , так как спектр запаздывающих нейтронов определяется конкретным осколком-предшественником, а не делящимся нуклидом. Нетрудно усмотреть, что указанная замена (1.11) в стационарном случае, когда интеграл по времени берется от экспоненты, оказывается тождественной, если учесть определение (1.12).

Итак, уравнение для нестационарного потока записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)}{\partial t} = & - \frac{\partial F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)}{\partial s} - \frac{F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)}{l_{aifs}} + \\ & + \int \omega(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}', t) dE' d\Omega' + \\ & + \int \frac{F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}', t)}{l_f(\mathbf{r}, E')} \mathbf{v}_p(\mathbf{r}, E') \chi_p(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) dE' d\Omega' + \\ & + \sum_i \frac{\lambda_i}{4\pi} \chi_d^i(E) \int_{-\infty}^t dt' \exp[-\lambda_i(t-t')] \times \\ & \times \int \frac{F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}', t')}{l_f(\mathbf{r}, E')} b_i(\mathbf{r}, E') dE' d\Omega' + Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t). \quad (1.13) \end{aligned}$$

Это уравнение будет использовано в § 1.5 для получения «одноточечного» уравнения кинетики реактора и выражений для входящих в него величин.

Математическое доказательство существования экспоненциального решения уравнения (1.13) дано в книге С. Б. Шихова [64].

#### § 1.4. Уравнение для ценности нейтронов в реакторе

Ценность нейтронов относительно асимптотической мощности\*. Наряду с распределением нейтронов по пространству, энергиям и направлениям скоростей можно ввести понятие ценности нейтронов и сформулировать для него интегродифференциальное уравнение, которое оказывается сопряженным уравнению для потока нейтронов.

Рассмотрим стационарный реактор, поток нейтронов в котором описывается уравнением (1.10). Стационарность этого реактора обеспечивается уменьшением числа вторичных нейтронов на деление в  $k_{эф}$  раз.

Пусть сначала в этом реакторе нет нейтронов, т. е. его мощность равна нулю. Если в некоторую точку  $\mathbf{r}$  впустить  $N$  нейтронов энергии  $E$  и направления  $\mathbf{n}$ , то через некоторое, достаточно продолжительное время нейтроны в реакторе распределятся по собственной функции и установится вполне определенный уровень мощности. Этот уровень, очевидно, зависит от радиус-вектора точки  $\mathbf{r}$ , энергии  $E$ , направления  $\mathbf{n}$  и пропорционален числу впущенных нейтронов  $N$ . Обозначим его  $M(t \rightarrow \infty, N, \mathbf{r}, E, \mathbf{n})$ . При этом необходимо рассматривать столь большие числа  $N$ , при которых можно пренебречь флуктуациями и считать, что нейтроны распределяются согласно соответствующим вероятностям распределения.

\* Эта часть параграфа почти дословно повторяет соответствующий параграф доклада [8].

Ценностью одного нейтрона  $F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  будем называть величину, пропорциональную указанному уровню мощности, отнесенному на один нейтрон:

$$F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) = AM(t \rightarrow \infty, N, \mathbf{r}, E, \mathbf{n})/N.$$

Ценность нейтрона определена с точностью до постоянного множителя, который следует выбирать из соображений удобства в каждом конкретном случае.

Для определения ценности не обязательно предполагать первоначальную мощность реактора, в который мы выпускаем нейтроны, равной нулю. Если начальная мощность реактора конечна, ценность впущенных нейтронов следует определять как величину, пропорциональную приращению его мощности.

Из определения ценности следует, что общая ценность нейтронов, происшедших от первоначальных нейтронов, равна суммарной ценности первоначальных. Иначе и не может быть, так как первоначальные нейтроны внесут некоторый вклад в цепную реакцию лишь постольку, поскольку такой вклад внесут нейтроны, происшедшие от них.

Применяя это соображение сохранения ценности к рассмотрению физических процессов, происходящих с нейтронами пучка  $(E, \mathbf{n})$  в точке  $\mathbf{r}$  на пути  $ds$ , получим интегро-дифференциальное уравнение для ценности.

Итак, пусть в точке  $\mathbf{r}_s$  по направлению  $\mathbf{n}$  впущено  $N$  нейтронов энергии  $E$ , причем ценность каждого нейтрона есть  $F^+(\mathbf{r}_s, E, \mathbf{n})$ . Из этих нейтронов до точки  $\mathbf{r}_{s+ds}$  дойдет, очевидно,  $N(1 - ds/l_{aifs}(\mathbf{r}, E))$  нейтронов, причем ценность каждого из них, по определению, равна  $F^+(\mathbf{r}_{s+ds}, E, \mathbf{n})$ . Из  $Nds/l_{aifs}$  претерпевших соударения нейтронов в пучок  $(E', \mathbf{n}')$  попадет  $NdsW(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r})$  нейтронов, если  $W(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r})$  является вероятностью нейтрону пучка  $(E, \mathbf{n})$  попасть в пучок  $(E', \mathbf{n}')$  при прохождении пути единичной длины около точки  $\mathbf{r}$ . Эта вероятность, как следует из пояснений § 1.2, записывается в следующем виде:

$$W(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r}) = w(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r}) + \frac{\nu(\mathbf{r}, E) \chi(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r})}{k_{эф} l_f(\mathbf{r}, E)}. \quad (1.14)$$

Ценность каждого из нейтронов пучка  $(E', \mathbf{n}')$ , по определению, есть  $F^+(\mathbf{r}_{s+eds}, E', \mathbf{n}')$  при  $(0 \leq e \leq 1)$ . Имая в виду, что суммарная ценность первоначальных нейтронов  $NF^+(\mathbf{r}_s, E, \mathbf{n})$  равна суммарной ценности всех нейтронов, происшедших от первоначальных, записываем

$$NF^+(\mathbf{r}_s, E, \mathbf{n}) = N \left( 1 - \frac{ds}{l_{aifs}(\mathbf{r}, E)} \right) F^+(\mathbf{r}_{s+ds}, E, \mathbf{n}) + Nds \iint W(E', E, \mathbf{nn}'|\mathbf{r}) F^+(\mathbf{r}_{s+eds}, E', \mathbf{n}') dE' d\Omega'. \quad (1.15)$$

Перенося  $NF^+(\mathbf{r}_s, E, \mathbf{n})$  в правую часть, деля обе части равенства на  $Nds$ , устремляя  $ds$  к нулю и пользуясь соотношением (1.14), получаем искомое интегро-дифференциальное уравнение

для ценности нейтронов

$$\frac{\partial F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{\partial s} - \frac{F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{\text{аif}}(\mathbf{r}, E)} + \int \omega(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r}) F^+(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') dE' d\Omega' + \frac{1}{k_{\text{эф}}} \int \frac{v(E')}{l_f(\mathbf{r}, E)} \chi(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r}) F^+(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') dE' d\Omega' = 0. \quad (1.16)$$

Это уравнение отличается от уравнения для потока нейтронов (1.10) знаком перед производной по направлению  $\mathbf{n}$  и перестановкой  $E$  и  $E'$  в выражении  $W(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})$ . А это обстоятельство является признаком взаимной сопряженности уравнений для потока нейтронов и их ценности. Следует подчеркнуть, что проделанный вывод уравнения (1.16) придает каждому его члену ясный физический смысл.

Запишем теперь граничные условия, налагаемые на  $F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$ . Если нейтрон находится на внешней выпуклой границе системы и его скорость направлена наружу, то он не может дать вклада в цепную реакцию и, следовательно, его ценность равна нулю. Отсюда следует условие на внешней границе

$$F^+(\mathbf{r}_{\text{гр}}, E, \mathbf{n}_{\text{внеш}}) = 0. \quad (1.17)$$

Очевидны также условия непрерывности на любой границе раздела:

$$F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) \text{ — непрерывна} \quad (1.18)$$

и условия ограниченности и положительности

$$0 \leq F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) \leq \infty. \quad (1.18a)$$

Уравнение (1.16) вместе с условиями (1.17), (1.18), (1.18a) однозначно (с точностью до мультипликативной постоянной) определяет функцию ценности нейтронов относительно асимптотической мощности  $F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$ .

Сопряженность операторов уравнений для ценности и потока нейтронов. По определению оператор  $L$  является сопряженным оператору  $L^+$ , если

$$\Phi L + \Phi^+ d\theta - \int \Phi^+ L \Phi d\theta = 0, \quad (1.18б)$$

где интегрирование проводится по всей области определения переменных, на которые действует оператор и от которых зависят функции  $\Phi$  и  $\Phi^+$ . При этом предполагается, что условия на функции  $\Phi$  и  $\Phi^+$  на границе области обеспечивают это равенство и тем самым тоже являются сопряженными. Проверим сопряженность последовательно для каждого оператора уравнений для потока (1.5) и ценности (1.16) нейтронов. Для первого оператора — производной по направлению, соотношение имеет вид

$$\int (F \partial F^+ / \partial s + F^+ \partial F / \partial s) dV = \int (\partial / \partial s) (F^+ F) dV.$$

Преобразуя объемный интеграл к поверхностному, имеем

$$\int \frac{\partial}{\partial s} (F^+ F) dV = \oint F^+ F n dS.$$

Последний интеграл по поверхности равен нулю, так как для всех направлений внутрь поверхности поток нейтронов равен нулю, а для всех направлений наружу равна нулю ценность нейтронов.

Второй оператор — это умножение на  $(l_{aifs})^{-1}$ . Здесь сопряженность очевидна.

Интегральные операторы в третьих членах уравнений (1.5) и (1.16) отличаются тем, что интегрирование по энергии в одном из уравнений ведется по первому аргументу в  $\omega(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})$ , а в другом — по второму. Благодаря этому комбинация типа (1.18б) оказывается равной нулю. То же самое можно сказать и по поводу интегральных операторов четвертых членов. Таким образом, весь оператор уравнения (1.5) сопряжен всему оператору уравнения (1.16).

Математическое доказательство существования единственного положительного решения, соответствующего наибольшему собственному числу  $k_{\text{эф}}$ , отделенному от следующих собственных чисел, в общей постановке задачи для уравнения (1.16) с условиями (1.17)—(1.18а) изложено в монографии С. Б. Шихова [64].

Ценность нейтронов относительно вклада в реакторные величины. Числа ядерных процессов, как это пояснялось в § 1.3, выражаются через поток нейтронов и соответствующие длины свободного пробега в виде интеграла по энергиям и направлениям скоростей нейтронов и по некоторому объему

$$a_i = \int \frac{F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{a_i}(\mathbf{r}, E)} dE d\Omega dV. \quad (1.19)$$

Это выражение показывает, что числа ядерных процессов являются линейными функционалами от потока нейтронов. Эти числа пропорциональны мощности реактора. Чтобы исключить тривиальную зависимость от мощности, обычно измеряют отношения чисел различных процессов. В качестве одного из чисел отношения может быть выбрана и мощность реактора.

В дальнейшем под реакторными величинами будем понимать отношения чисел различных процессов:  $a_i/a_k$  или, более общо, отношения линейных функционалов от потока нейтронов. Такими отношениями функционалов, кроме отношения чисел процессов, могут быть реактивности образцов или их отношения, время жизни мгновенных нейтронов и др. Выражения для последних указанных величин выводятся в § 1.5. В них входит и ценность нейтронов относительно асимптотической мощности. Но в данном параграфе для вывода уравнения важна лишь линейность числителя и знаменателя всех указанных реакторных величин по потоку нейтронов.

Уравнение для ценности нейтронов относительно вклада в некоторое отношение линейных функционалов от потока нейтронов выводится так же, как и уравнение для ценности относительно асимптотической мощности. Соображение о сохранении ценности в процессе переноса нейтронов и их взаимодействия с ядрами

остается в силе и теперь. Поэтому соотношение, следующее из баланса ценности, будет совпадать с (1.15) с учетом одного дополнения. Это дополнение связано с тем, что рассматриваемые  $N$  нейтронов пучка  $(E, \mathbf{n})$  около точки  $\mathbf{r}$  на пути  $ds$  могут сделать вклад в интересующее нас отношение функционалов и непосредственно, в отличие от вклада в асимптотическую мощность, определенную в пределе при  $t \rightarrow \infty$ . Этот непосредственный вклад в относительное изменение отношения функционалов можно рассчитать как следующую величину:

$$R = \left[ \frac{a_i(F + \delta F)}{a_k(F + \delta F)} - \frac{a_i(F)}{a_k(F)} \right] : \frac{a_i(F)}{a_k(F)} = \\ = \frac{1}{1 + \frac{a_k(\delta F)}{a_k(F)}} \left[ \frac{a_i(\delta F)}{a_i(F)} - \frac{a_k(\delta F)}{a_k(F)} \right]. \quad (1.20)$$

Поскольку для вывода уравнения мы впустили  $N$  нейтронов пучка  $(E, \mathbf{n})$  в точке  $\mathbf{r}$  и рассматриваем их на пути  $ds$ , следует положить

$$\delta F = Nds\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, E' - E, \mathbf{n}' - \mathbf{n})$$

и выражение (1.19) для  $a_i$  и  $a_k$  проинтегрировать по всем переменным, учитывая свойства  $\delta$ -функции. При этом получаются выражения:

$$a_i(\delta F) = Nds/l_{a_i}; \quad a_k(\delta F) = Nds/l_{a_k}.$$

Теперь относительное изменение отношения линейных функционалов (1.20) записывается в виде

$$R = \frac{Nds}{1 + Nds \frac{1}{l_{a_k} a_k}} \left[ \frac{1}{a_i l_{a_i}} - \frac{1}{a_k l_{a_k}} \right].$$

Если мы имеем дело с линейными функционалами от потока нейтронов более общей природы, содержащими, например, еще и ценность относительно асимптотической мощности, как в случае реактивностей и времени жизни мгновенных нейтронов, то функционалы записываются в виде

$$a_i(F) = \int F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') f_i(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') dE' d\Omega' dV.$$

При этом  $a_i(\delta F) = Nds f_i(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  и дополнительный член в балансе ценности из (1.15) будет равен

$$\frac{Nds}{1 + Nds \frac{f_k(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{a_k}} \left[ \frac{f_i(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{a_i} - \frac{f_k(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{a_k} \right].$$

Добавляя эту величину к (1.15), деля на  $Nds$  все соотношение и устремляя  $ds$  к нулю, получаем искомое уравнение для ценности

нейтронов  $\Psi^+$  относительно вклада в отношении функционалов  $a_i/a_k$

$$0 = \frac{\partial \Psi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{\partial s} - \frac{\Psi^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{aijs}} + \\ + \int \omega(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r}) \Psi^+(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') dE' d\Omega' + \frac{1}{k_{эф}} \frac{1}{l_f(\mathbf{r}, E)} \times \\ \times \int \chi(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r}) \nu(E, \mathbf{r}) \Psi^+(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') dE' d\Omega' + (f_i/a_i - f_k/a_k). \quad (1.21)$$

Отметим, что последний член является функциональной производной по потоку в точке  $(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  от отношения  $a_i/a_k$ , отнесенной к самому отношению. В самом деле,

$$\frac{\delta a_i}{\delta F} = \frac{\delta}{\delta F} \int F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) f_i(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) d\Omega dE dV = f_i(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}); \\ \left[ \frac{\delta}{\delta F} \left( \frac{a_i}{a_k} \right) \right] / \frac{a_i}{a_k} = \left[ \left( \frac{\delta a_i}{\delta F} \right) \frac{1}{a_k} - \left( \frac{\delta a_k}{\delta F} \right) \frac{a_i}{a_k^2} \right] / \frac{a_i}{a_k} = \\ = \frac{1}{a_i} \frac{\delta a_i}{\delta F} - \frac{1}{a_k} \frac{\delta a_k}{\delta F} = \frac{f_i}{a_i} - \frac{f_k}{a_k}.$$

Альтернатива Фредгольма о связи решений однородного уравнения и уравнения с источником первоначально была установлена в теории интегральных уравнений, а затем обобщена на задачи интересующего нас класса. Соответствующие ссылки даны в монографии С. Б. Шихова [64]. Эта альтернатива состоит в следующем: либо однородное уравнение не имеет решения и тогда решение неоднородного уравнения существует для произвольного источника, либо существует решение однородного уравнения и тогда решение неоднородного уравнения существует лишь для источников, ортогональных решению сопряженного однородного уравнения. Общее решение при этом представится в виде суммы частного решения уравнения с источником и решения однородного уравнения, умноженного на произвольную константу.

Так, уравнение для потока нейтронов (1.5) будет иметь решение для критического реактора лишь для источников  $Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  обязательно знакопеременных, суммарная ценность которых равна нулю:

$$\int Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) dE d\Omega dV = 0.$$

Правая часть  $Q^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  сопряженного уравнения для критического реактора должна удовлетворять условию

$$\int Q^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) dE d\Omega dV = 0.$$

Здесь  $F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  — поток в критическом реакторе. Правая часть уравнения (1.21), как нетрудно проверить, удовлетворяет послед-

нему условию. Это проистекает из выбора в качестве величины, ценностью по отношению к вкладу в которую мы интересуемся, отношения чисел процессов. Необходимость рассматривать именно отношения чисел процессов (а не числа процессов) была установлена в первой работе по обобщенной теории возмущений для реакторов [5].

### § 1.5. Реакторные величины в уравнении кинетики \*

Вывод уравнения кинетики реактора. Имея уравнение (1.13) для потока нейтронов в нестационарном реакторе и уравнение для ценности нейтронов в квазикритическом реакторе того же состава и конфигурации, легко вывести уравнение кинетики котла.

В уравнении для потока нейтронов (1.13) величины, характеризующие состав и конфигурацию реактора, вообще говоря, зависят от времени  $t$ . В некоторых случаях от времени могут зависеть и граничные условия. Уравнение для ценности должно быть записано с теми же самыми значениями этих величин для каждого значения  $t$  с соответствующими граничными условиями. При этом  $k_{эф}$ , входящее в последнее уравнение вида (1.16), и функции  $F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  оказываются зависящими от  $t$  как от параметра.

Для вывода уравнения кинетики котла уравнение (1.13) множат на  $F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)$ , уравнение (1.16) — на  $F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)$ , полученные соотношения вычитают одно из другого и интегрируют по всему объему реактора вместе с отражателем по всем энергиям и направлениям скоростей нейтронов. При этом сокращают члены, учитывающие перенос, поглощение и замедление нейтронов вследствие сопряженности этих членов в уравнениях (1.13), (1.16), а также граничных условий (1.7), (1.17). Получается следующее точное соотношение:

$$\begin{aligned} & \int dV \int \frac{F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)}{v} \frac{\partial F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)}{\partial t} d\Omega dE = \\ & = \left(1 - \frac{1}{k_{эф}(t)}\right) \int dV \int \frac{F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}', t)}{l_f(\mathbf{r}, E')} \times \\ & \times \left[ v_p(\mathbf{r}, E') \chi_p(\mathbf{r}, E, E', \mathbf{n}\mathbf{n}') + \sum_i \frac{b_i(\mathbf{r}, E')}{4\pi} \chi_d^i(E) \right] d\Omega dE d\Omega' dE' - \\ & - \sum_i \int dV \int \frac{F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}', t)}{l_f(\mathbf{r}, E') b_i(\mathbf{r}, E')} \frac{\chi_d^i(E) dE' d\Omega' dE d\Omega}{4\pi} + \end{aligned}$$

\* Изложение в основном соответствует работе [8], хотя и несколько усовершенствовано.

$$\begin{aligned}
& + \sum_i \int dV \int F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t) \frac{\chi_d^i(E)}{4\pi} dE d\Omega dE' d\Omega' \int_{-\infty}^t \frac{F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}', t')}{l_f(\mathbf{r}, E')} \times \\
& \quad \times b_i(\mathbf{r}, E') \lambda_i \exp[-\lambda_i(t-t')] dt' + \\
& + \int dV \int Q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t) F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t) dE d\Omega. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Вся зависимость от времени конфигурации и состава реактора переходит в данном соотношении в зависимость  $k_{эф}(t)$ . Независимость от времени в этом соотношении всех величин, характеризующих деление ( $1/l_f$ ,  $\nu_p$ ,  $\chi_p$ ,  $b_i$ ), очевидно, имеет место, когда делящиеся ядра не входят в состав перемещающихся органов регулирования. Но и в случае когда некоторая часть делящихся материалов в реакторе перемещается и зависимость указанных величин от времени в уравнении (1.13) имеет место, все же можно избавиться от этой зависимости в хорошем приближении следующим образом. Вклад в  $1/l_f$  от делящихся нуклидов, расположенных в передвигающихся органах управления, надо отделить в обоих исходных уравнениях (1.13) и (1.16) от независимого от времени вклада неподвижных делящихся нуклидов. Затем следует переопределить  $k_{эф}(t)$ , деля на этот параметр в уравнении для ценности лишь член, описывающий испускание нейтронов деления с величиной  $1/l_f$ , не зависящей от  $t$ . В нестационарном же уравнении для потока нейтронов в выделенных зависимых от времени членах надо объединить запаздывающие нейтроны с мгновенными, пренебрегая их запаздыванием. Тогда при получении обсуждаемого соотношения выделенные зависимые от времени члены, описывающие деление, так же как и члены, описывающие захват и рассеяние, исчезнут вследствие взаимосопряженности, оставляя свой след только в величине  $k_{эф}(t)$ .

Теперь, чтобы получить так называемое «одноточечное» уравнение кинетики реактора, описывающее разгон или затухание реактора как целого, а не перераспределение нейтронной плотности по реактору, проще всего приближенно положить

$$F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t) \approx F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) \varphi(t). \quad (1.23)$$

В том же приближении следует опустить зависимость от  $t$  в  $F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t)$ . Такое приближение полностью соответствует тому, что все локальные возмущения сведены к величине  $[k_{эф}(t) - 1]/k_{эф}(t)$ , распределенной равномерно по всей активной зоне реактора.

Подставляя (1.23) в (1.22) и деля все члены соотношения на интегральную ценность нейтронов деления  $\Pi_{п.д.}$ , рождающихся в реакторе за 1 с, т. е. на величину

$$\int dV \int \frac{F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n})}{l_f(\mathbf{r}, E')} \left[ \nu_p(\mathbf{r}, E') \chi_p(E, E', \mathbf{n}, \mathbf{r}) + \right.$$

$$+ \sum_i \left[ \frac{b_i(\mathbf{r}, E')}{4\pi} \chi_{id}(E) \right] d\Omega dE d\Omega' dE' \equiv \Pi_{н.д}, \quad (1.24)$$

получаем известное уравнение кинетики котла

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} T = \left[ \frac{k_{эф}(t) - 1}{k_{эф}(t)} - \sum_i \beta_i \right] \varphi(t) + \sum_i \beta_i \lambda_i \int_{-\infty}^t \varphi(t') \times \\ \times \exp[-\lambda_i(t-t')] dt' + q(t). \quad (1.25)$$

Выражения для входящих в уравнение кинетики величин.

$$T = \left[ \int dV \int \frac{F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{\nu} d\Omega dE \right] / \Pi_{н.д}, \quad (1.26)$$

где смысл числителя, очевидно, интегральная ценность нейтронов в реакторе. Отношение же к ценности нейтронов деления, испускающихся в реакторе за 1 с, очевидно, является средним временем жизни ценности нейтронов в реакторе или, грубо говоря, средним временем жизни нейтрона без учета запаздывания части нейтронов.

$$\beta_i = \left[ \int dV \int \frac{F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}')}{l_f(\mathbf{r}, E')} \frac{b_i(\mathbf{r}, E')}{4\pi} \times \right. \\ \left. \times \chi_{id}^i(E) d\Omega dE d\Omega' dE' \right] / \Pi_{н.д}. \quad (1.27)$$

Здесь числитель — ценность всех запаздывающих нейтронов  $i$ -й группы, испускаемых за 1 с, а его отношение к  $\Pi_{н.д}$  имеет смысл эффективной доли  $i$ -й группы запаздывающих нейтронов с учетом различия ценностей мгновенных и запаздывающих нейтронов.

$$q(t) = \frac{\int dV \int q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, t) F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) dE d\Omega}{\Pi_{н.д}}. \quad (1.28)$$

Величина  $q(t)$ , определяемая соотношением (1.28), есть эффективная мощность привнесенных источников нейтронов с учетом ценности. Полученные выражения для среднего времени жизни нейтронов, эффективной доли запаздывающих нейтронов и эффективной мощности источников имеют явный физический смысл и пригодны для реакторов любого спектра (теплого, промежуточного, быстрого) и любой сложной конфигурации (в частности, с отражателем). Из формулы (1.26) получаем известные выражения для среднего времени жизни нейтронов в частных случаях тепловых и промежуточных реакторов без отражателя.

Выражение для реактивности по теории возмущений. Величина  $(k_{эф} - 1)/k_{эф}$ , входящая в уравнение (1.25) и называемая реактивностью котла, определяет его временное поведение. Получение реактивности прямым расчетом  $k_{эф}$  при  $k_{эф} \sim 1$  требует очень большой и обычно недостижимой точности

вычислений. Поэтому надо иметь формулу для непосредственного вычисления реактивности относительно некоторого критического состояния реактора. Чтобы получить такую формулу, наряду с интересующим нас некритическим реактором ( $k_{эф} \neq 1$ ), поток и ценность в котором определяются уравнениями (1.10) и (1.16), рассмотрим критический реактор ( $k_{эф} = 1$ ) с параметрами, близкими к параметрам интересующего нас реактора. Уравнение для ценности нейтронов в таком критическом реакторе запишем в виде

$$-\frac{\partial F_{кр}^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{\partial s} + \frac{F_{кр}^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{aifs}^{кр}} - \int \omega_{кр}(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r}) F_{кр}^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) dE' d\Omega' - \frac{\nu_{кр}(E, \mathbf{r})}{l_f^{кр}(E, \mathbf{r})} \int \chi_{кр}(E', E, \mathbf{nn}', \mathbf{r}) F_{кр}^+(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}) dE' d\Omega' = 0. \quad (1.29)$$

Уравнение (1.10) умножим на  $F_{кр}^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$ , а уравнение (1.29) — на функцию  $F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$ , удовлетворяющую уравнению (1.10). Вычтем одно уравнение из другого и проинтегрируем по всему объему реактора по всем энергиям и направлениям скоростей нейтронов, выделив член  $(k_{эф} - 1) \Pi_{н.д}/k_{эф}$ , где

$$\Pi_{н.д} = \int dV \int \frac{F_{кр}^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}')}{l_f(\mathbf{r}, E')} \nu(E', \mathbf{r}) \times \chi(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) dEd\Omega dE' d\Omega'. \quad (1.30)$$

Учтя граничные условия (1.7) и (1.17) и, наконец, разделив на  $\Pi_{н.д}$ , получим

$$\frac{k_{эф} - 1}{k_{эф}} = -\frac{1}{\Pi_{н.д}} \int dV \int \left[ \frac{1}{l_{aifs}(\mathbf{r}, E)} - \frac{1}{l_{aifs}^{кр}(\mathbf{r}, E)} \right] F_{кр}^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) \times F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) dEd\Omega + \frac{1}{\Pi_{н.д}} \int dV \int [\omega(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r}) - \omega_{кр}(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})] F_{кр}^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}) dEd\Omega dE' d\Omega' + \frac{1}{\Pi_{н.д}} \int dV \int \left[ \frac{\nu(E', \mathbf{r}) \chi(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})}{l_f(\mathbf{r}, E')} - \frac{\nu_{кр}(E', \mathbf{r}) \chi_{кр}(E, E', \mathbf{nn}', \mathbf{r})}{l_f^{кр}(\mathbf{r}, E')} \right] F_{кр}^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') dEd\Omega dE' d\Omega'. \quad (1.31)$$

Заметим, что определения (1.30) и (1.24) совпадают с учетом (1.12) с точностью до различий  $F_{кр}^+$  и  $F^+$  и входящих в формулы потоков  $F$ , которыми обычно пренебрегают при использовании теории возмущений. Каждый член выражения для реактивности (1.31) имеет очевидный физический смысл отношения изменений ценности нейтронов во всем реакторе за 1 с в результате изменения вероятностей различных взаимодействий нейтронов

с ядрами к ценности всех нейтронов деления, выпускаемых во всем реакторе за то же время.

Наблюдаемые реакторные величины и полученные выражения. Когда реактор собран и доведен до состояния, близкого к критическому, то цепная реакция деления описывается уравнением кинетики (1.25). Поддерживающаяся на постоянном уровне мощность свидетельствует о равенстве реактивности нулю, или  $k_{эф} = 1$ . Чтобы использовать этот экспериментальный факт для проверки теории, нужно, во-первых, для реализованной конфигурации и состава реактора получить решение уравнений (1.10) и (1.16), определив при этом их общее собственное число  $k_{эф}$ , и сравнить его с единицей. Совпадение собственных чисел  $k_{эф}$  для уравнений, описывающих поток и ценность нейтронов, следует из сопряженности этих уравнений. Доказательство этого совпадения, собственно говоря, уже сделано при выводе соотношения (1.31). Ведь если уравнения для потока и ценности относятся к одному и тому же реактору, то правая часть (1.31) равна нулю и, следовательно, разность собственных чисел в левой части тоже равна нулю. Что же касается анализа возможных расхождений и погрешностей, то его естественно производить, опираясь на соотношение (1.31).

При помещении образца в критический реактор будет происходить разгон или затухание мощности в соответствии с уравнением (1.25). Существуют методы точного измерения этого эффекта. Во всяком случае относительные измерения реактивностей двух разных образцов выполняются весьма точно и измеренный эффект соответствует отношению реактивностей, выражаемых формулой (1.31). Из соотношения выпадет  $\frac{C_{н.д.}}$ . Сравнение с расчетом по формуле (1.31) предполагает предварительное получение функций  $F$  и  $F^+$  для невозмущенного реактора. Однако для анализа возможных расхождений и погрешностей требуется следующий уровень теории возмущений, а именно, надо рассмотреть в качестве реакторной величины указанное отношение реактивностей и относительно этого дробно-билинейного функционала потока и ценности нейтронов развить теорию возмущений.

К тому же классу функционалов относятся такие измеряемые на опыте реакторные величины, как время жизни мгновенных нейтронов, выражаемое формулой (1.26), эффективные доли запаздывающих нейтронов (1.27) и абсолютная реактивность (1.31).

Теория возмущений для этого класса реакторных величин будет развита в следующем параграфе.

### **§ 1.6. Теория возмущений для реакторных величин, представляемых дробно-линейными и дробно-билинейными функционалами от потока и ценности нейтронов**

Дробно-линейные функционалы от потока нейтронов типа отношений чисел процессов. К этому классу реакторных величин принадлежат отношения

чисел любых процессов в произвольных областях реактора. К таким величинам относятся, например, следующие: коэффициент воспроизводства — отношение атомов  $^{239}\text{Pu}$ , образованных в реакторе, к количеству выгоревших атомов горючего; коэффициент неравномерности — отношение максимальной мощности в канале реактора к полной мощности реактора, деленной на число каналов; отношение показаний датчика нейтронного потока к полной мощности реактора, или к мощности соседней группы каналов, или одного наиболее напряженного канала у данной группы; отношения чисел процессов в специальных образцах, помещаемых, например, в центр реактора или в любую другую точку, или даже в разные точки.

К этому же классу величин принадлежит и отношение потока нейтронов в двух энергетических и пространственных областях. Если энергетические области совпадают, а пространственные различны, то указанное отношение характеризует пространственное распределение нейтронов, а при совпадении пространственных областей и различии энергетических указанное соотношение характеризует спектр нейтронов.

Пусть

$$\begin{aligned} a_j &= \int \frac{F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{a_j}(\mathbf{r}, E)} dE d\Omega dV; \\ a_k &= \int \frac{F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{a_k}(\mathbf{r}, E)} dE d\Omega dV. \end{aligned} \quad (*)$$

Заметим, что области интегрирования могут быть любыми и несовпадающими для этих двух величин. В дальнейшем мы будем предполагать, что отличие от нуля или равенство нулю  $[l_{a_j}(\mathbf{r}, E)]^{-1}$  и  $[l_{a_k}(\mathbf{r}, E)]^{-1}$  при различных  $\mathbf{r}$  автоматически выбирает область интегрирования при нормальном интегрировании по всему объему реактора.

Если в реакторе происходят изменения и если измененные величины обозначить теми же буквами, что в выражениях для  $a_j$  и  $a_k$ , но со штрихами, эти изменения проявятся в том, что изменится поток нейтронов

$$F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) \rightarrow F'(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$$

и

$$[l_{a_j}(\mathbf{r}, E)]^{-1} \rightarrow [l'_{a_j}(\mathbf{r}, E)]^{-1}; \quad [l_{a_k}(\mathbf{r}, E)]^{-1} \rightarrow [l'_{a_k}(\mathbf{r}, E)]^{-1}.$$

Обозначим

$$a'_j = \int \frac{F'(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l_{a_j}(\mathbf{r}, E)} dE d\Omega dV; \quad a''_j = \int \frac{F'(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})}{l'_{a_j}(\mathbf{r}, E)} dE d\Omega dV.$$

Тогда интересующая нас величина относительного изменения  $a_j/a_k$

запишется в виде

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{a_i}{a_k} \right) / \frac{a_i}{a_k} &= \left( \frac{a_i''}{a_k''} - \frac{a_i}{a_k} \right) / \frac{a_i}{a_k} = \frac{a_i}{a_k''} \frac{a_k}{a_i} \left( \frac{a_i''}{a_i} - \frac{a_k''}{a_k} \right) = \\ &= \frac{a_k}{a_k''} \left( \frac{a_i'' - a_i'}{a_i} - \frac{a_k'' - a_k'}{a_k} \right) + \frac{a_k}{a_k''} \left( \frac{a_i'}{a_i} - \frac{a_k'}{a_k} \right) = \\ &= \frac{ak}{a_k''} \left\{ \int F' \left[ \frac{1}{a_i} \left( \frac{1}{l_{a_i}'} - \frac{1}{l_{a_i}} \right) - \frac{1}{a_k} \left( \frac{1}{l_{a_k}'} - \frac{1}{l_{a_k}} \right) \right] dE d\Omega dV + \right. \\ &\quad \left. + \int F' \left( \frac{1}{a_i l_{a_i}'} - \frac{1}{a_k l_{a_k}'} \right) dE' d\Omega dV \right\}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже для сокращения записи опускаются аргументы величин  $F$ ,  $l$ ,  $\Psi$ ,  $\omega$  и других, входящих в основные и сопряженные реакторные уравнения.

Первый член в фигурной скобке имеет структуру, обычную для формулы теории возмущений, а именно, функция, описывающая возмущенный поток, входит множителем (см. 1.31), в виде же разности входят лишь возмущенные и первоначальные параметры реактора. Величина же второго члена существенно зависит от разности возмущенного и первоначального потоков нейтронов. Действительно, если мы заменим  $F'$  на  $F$  в этом члене, то, как легко видеть, получим нуль, т. е. весь эффект содержится именно в различии  $F'$  и  $F$ . Однако оказывается возможным и этот член привести к обычному для теории возмущений виду. Этим мы и займемся.

Чтобы получить выражение для  $-\int F' [(a_k l_{a_k})^{-1} - (a_i l_{a_i})^{-1}] dE d\Omega dV$ , перепишем уравнение для ценности нейтронов  $\Psi^+$  относительно вклада в дробно-линейный функционал  $a_i/a_k$  в первоначальном критическом реакторе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi^+}{\partial s} - \frac{\Psi^+}{l_{a_i f s}} + \int \omega \Psi^+ dE' d\Omega' + \\ + \int \frac{\nu \chi}{l_f} \Psi^+ dE' d\Omega' = - \left( \frac{1}{a_i l_{a_i}'} - \frac{1}{a_k l_{a_k}'} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

и уравнение для потока нейтронов в возмущенном, но остановленном критическом реакторе

$$-\frac{\partial F'}{\partial s} - \frac{F'}{l_{a_i f s}'} + \int \omega' F' dE' d\Omega' + \int \frac{\chi' \nu'}{l_f'} F' dE' d\Omega' = 0. \quad (1.33)$$

Умножая уравнение (1.32) на  $F'$ , а уравнение (1.33) на  $\Psi^+$ , вычитая первое соотношение из второго и интегрируя по энергиям, направлениям скоростей и всему объему реактора вплоть до поверхности с нулевыми условиями на поток внутри и на ценность

наружу и пользуясь взаимной сопряженностью соответствующих операторов уравнений, получим нужное соотношение

$$\int F' \left( \frac{1}{a_i l_{a_i}} - \frac{1}{a_k l_{a_k}} \right) dEd\Omega dV = - \int F' \Psi^+ \left( \frac{1}{l'_{aifs}} - \frac{1}{l_{aifs}} \right) dEd\Omega dV + \int F' \Psi^+ (\omega' - \omega) dEd\Omega dE' d\Omega' dV + \int F' \Psi^+ \left( \frac{\nu' \chi'}{l'_f} - \frac{\nu \chi}{l_f} \right) dEd\Omega dE' d\Omega' dV. \quad (**)$$

Таким образом, окончательное выражение для относительного изменения отношений двух линейных функционалов от потока нейтронов записывается в виде

$$\delta \left( \frac{a_i}{a_k} \right) / \frac{a_i}{a_k} = \frac{a_k}{a_k''} \left\{ \int F' \left[ \frac{1}{a_i} \left( \frac{1}{l'_{a_i}} - \frac{1}{l_{a_i}} \right) - \frac{1}{a_k} \left( \frac{1}{l'_{a_k}} - \frac{1}{l_{a_k}} \right) \right] dEd\Omega dV - \int F' \Psi^+ \left( \frac{1}{l'_{aifs}} - \frac{1}{l_{aifs}} \right) dEd\Omega dV + \int F' \Psi^+ (\omega' - \omega) dEd\Omega dE' d\Omega' dV + \int F' \Psi^+ \left( \frac{\nu' \chi'}{l'_f} - \frac{\nu \chi}{l_f} \right) dEd\Omega dE' d\Omega' dV \right\}. \quad (1.34)$$

Соотношение (1.34) является совершенно точным, так как при выводе не сделано никаких предположений. Коэффициент  $a_k/a_k''$  можно объединить с функцией  $F'$ . Он обеспечивает сохранение полного числа процессов типа « $k$ », к которым производится нормировка числа процессов типа « $i$ », несмотря на возмущение реактора и на изменение функции, описывающей поток нейтронов с  $F$  на  $F'$ . Если процесс типа « $k$ » — суммарная мощность реактора, то формула (1.34) требует использования такого потока нейтронов, который сохранил бы начальную мощность.

Надо сделать некоторые замечания относительно общего решения уравнения (1.32). Оно является суперпозицией частного решения уравнения с правой частью ( $\Psi^+$ ) и решения однородного уравнения, которое является ценностью относительно асимптотической мощности ( $F^+$ ). Однако если подставить в соотношение (1.34) общее решение, то его часть — ценность относительно асимптотической мощности — даст нулевой вклад, поскольку по условию проделанного вывода с использованием однородного возмущенного уравнения рассматриваются лишь такие возмущения, которые сохраняют критичность реактора. Из сказанного следует,

что необходимо контролировать критичность с помощью соотношения

$$-\int F' F^+ [(l'_{aifs})^{-1} - (l_{aifs})^{-1}] dEd\Omega dV + \int F' F^+ (w' - w) dEd\Omega dE' d\Omega' dV + \\ + \int F' F^+ (v'\chi'/l'_f - v\chi/l_f) dEd\Omega dE' d\Omega' dV = 0. \quad (1.35)$$

Следует отметить, что приведение к критичности посредством  $k_{эф}$  является частным случаем изменения  $v \rightarrow v'$ . При выполнении этого соотношения нам достаточно использовать частное решение уравнения (1.32) —  $\Psi^+$ .

Существуют случаи, когда использование точного соотношения (1.34), требующего нахождения возмущенного потока  $F'$  для данного возмущения, является полезным, несмотря на то, что когда найден  $F'$ , нетрудно непосредственно рассчитать относительное изменение  $a_i/a_k$ . Это полезно, например, для проверки совокупности программ, реализующих решения всех записанных выше уравнений.

Но наиболее эффективным путем использования этой формулы является пренебрежение различием  $F'$  и  $F$ , т. е. замена  $F'$  на  $F$ . Соотношение переписывается тогда в виде:

$$\delta \left( \frac{a_i}{a_k} \right) / \frac{a_i}{a_k} = \frac{ak}{a'_k} \left\{ \int F \left[ \frac{1}{a_i} \left( \frac{1}{l'_{a_i}} - \frac{1}{l_{a_i}} \right) - \frac{1}{a_k} \left( \frac{1}{l'_{a_k}} - \frac{1}{l_{a_k}} \right) \right] \times \right. \\ \times dEd\Omega dV - \int F \Psi^+ \left( \frac{1}{l'_{aifs}} - \frac{1}{l_{aifs}} \right) dEd\Omega dV + \int F \Psi^+ (w' - w) dE \times \\ \left. \times d\Omega dE' d\Omega' dV + \int F \Psi^+ \left( \frac{v'\chi'}{l'_f} - \frac{v\chi}{l_f} \right) dEd\Omega dE' d\Omega' dV \right\}. \quad (1.36)$$

Соотношение для контроля за сохранением критичности переписывается в виде

$$-\int FF^+ [(l'_{aifs})^{-1} - (l_{aifs})^{-1}] dEd\Omega dV + \int FF^+ (w' - w) dEd\Omega \times \\ \times dE' d\Omega' dV + \int FF^+ (v'\chi'/l'_f - v\chi/l_f) dEd\Omega dE' d\Omega' dV = 0. \quad (1.37)$$

В соответствии с (1.36) можно раз и навсегда для относительной вариации данной величины в данном реакторе рассчитать коэффициенты чувствительности к любому набору изменений макроскопических сечений и других реакторных параметров, сохраняющих критичность реактора соответственно (1.37). При этом уже не надо делать прямых расчетов  $F'$ , решая уравнение (1.10), и для любых изменений умножением двух векторов можно сразу получить результат, однако следует контролировать  $a_k/a_k''$ .

Отношение показаний детекторов вне реактора. Предположим, что эти детекторы не влияют на цепную реакцию. Нас интересуют отношения показаний этих детекторов, и теория возмущений должна дать выражение для относительной

вариации этих отношений в зависимости от изменения макроскопических сечений и других реакторных параметров. Оказывается, что изложение вывода, сделанное в предыдущем пункте, вполне пригодно и в этом случае, хотя требует некоторого переосмысления и модификации.

Показания детекторов определяются теми же соотношениями (\*), только поток нейтронов в месте расположения детекторов «*i*» и «*k*» за пределами поверхности, из-за которой нейтроны не возвращаются, определяется интегрированием по лучам, идущим на детектор из всех точек видимой из детектора излучающей поверхности реактора. При этом все выкладки предыдущего подраздела, вплоть до уравнения (1.32), остаются теми же. В уравнении (1.32) следует опустить правую часть, так как внутри реактора детекторов нет. Однако роль правой части сыграют граничные условия на ценность нейтронов, которые теперь не являются нулевыми, так как вылетающие из реактора нейтроны попадают в детекторы, показаниями которых мы и интересуемся.

Проводя с уравнениями те же манипуляции (умножая уравнение (1.32) на  $F'$ , а уравнение (1.33) на  $\Psi^+$ , вычитая первое соотношение из второго и интегрируя по энергиям, направлениям скоростей и по всему объему реактора вплоть до поверхности с нулевым возвратом нейтронов, но не нулевой ценностью), получаем соотношение, аналогичное соотношению (\*\*), где на месте левой части стоит выражение

$$\int (F' \partial \Psi^+ / \partial s + \Psi^+ \partial F' / \partial s) dE d\Omega dV = \int (\partial / \partial s) (F' \Psi^+) dE d\Omega dV = \\ = \int (\mathbf{n} \nabla) (F' \Psi^+) dE d\Omega dV = \oint F'(\mathbf{r}_s) \Psi^+(\mathbf{r}_s) dE d\Omega (nds).$$

Поскольку ценность нейтронов на поверхности полностью обуславливается числом поглощений в детекторах, то от этого интеграла по поверхности реактора можно перейти к интегралу по объему детектора, где поток в точках  $\mathbf{r}_d$  обусловлен собиранием нейтронов с поверхности реактора по лучам, идущим к детекторам, а ценность этих нейтронов по объему детекторов определится, как обычно в таких случаях,  $[(a_i l_{a_i})^{-1} - (a_k l_{a_k})^{-1}]$ , и поверхностный интеграл можно приравнять выражению  $\int_{V_d} F'(\mathbf{r}_d) [(a_i l_{a_i})^{-1} - (a_k l_{a_k})^{-1}] dE d\Omega dV$ .

Таким образом, соотношение (\*\*) полностью сохранено и, следовательно, сохраняются и формулы (1.34) и (1.36). Особенности задачи с наружными детекторами проявятся в установлении граничных условий на поверхности, если иметь в виду расположение и свойства детекторов при решении уравнения для  $\Psi^+$ , в вычислении показаний детекторов при решении уравнения для потока нейтронов и в сборе нейтронов с поверхности реактора по лучам на детекторы.

Дробно-билинейные функционалы типа отношения реактивностей образцов. В общем виде

дробно-билинейный функционал от потока и ценности нейтронов может быть записан в виде

$$\frac{b_p [F, F+, K_p]}{b_q [F, F+, K_q]} = \frac{b_p}{b_q} = \frac{\int F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F+(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}) K_p(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, E', \mathbf{n}') d\Theta}{\int F(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) F+(\mathbf{r}, E', \mathbf{n}') K_q(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}, E', \mathbf{n}') d\Theta}. \quad (1.38)$$

Здесь  $d\Theta = dEd\Omega dE' d\Omega' dV$ . Сравнивая (1.38) с выражениями для среднего времени жизни нейтронов  $T$  (1.26), для абсолютной реактивности  $(k-1)/k$  (1.31), для эффективной доли запаздывающих нейтронов  $\beta_i$  (1.27), а также для отношения реактивностей двух образцов, получаем выражения для  $K_p$  и  $K_q$ :

<p>для среднего времени жизни мгновенных нейтронов <math>T</math></p> $K_p = \delta(E - E', \mathbf{n} - \mathbf{n}')/v;$ <p>для эффективной доли запаздывающих нейтронов <math>\beta_i</math></p> $K_q = v(\mathbf{r}, E') \chi(\mathbf{r}, E, E', \mathbf{n}\mathbf{n}')/l_f(\mathbf{r}, E);$ <p>для реактивности от помещения образца <math>(k-1)/k</math></p> $K_p = \beta_i(\mathbf{r}, E') \chi_{id}(E)/4\pi l_f; \quad K_q = v\chi/l_f;$	$(1.39)$
<p>для отношения реактивностей первого и второго образца</p> $K_p = -\frac{\delta(E - E', \mathbf{n} - \mathbf{n}')}{l_{aif_s}^{обр}} + \omega_{обр} + \frac{v^{обр} \chi_{обр}}{l_f^{обр}};$ $K_q = -\frac{\delta(E - E', \mathbf{n} - \mathbf{n}')}{l_{aif_s}^{обр.1}} + \omega_{обр.1} + \frac{v^{обр.1} \chi_{обр.1}}{l_f^{обр.1}};$ $K_q = -\frac{\delta(E - E', \mathbf{n} - \mathbf{n}')}{l_{aif_s}^{обр.2}} + \omega_{обр.2} + \frac{v^{обр.2} \chi_{обр.2}}{l_f^{обр.2}}.$	

Допустим, в реакторе произошли изменения:  $l_{aif_s}^{-1} \rightarrow l_{aif_s}'^{-1}$ ;  $\omega \rightarrow \omega'$ ;  $v\chi/l_f \rightarrow v'\chi'/l_f'$ , оставившие его в критическом состоянии. Поток и ценность нейтронов тогда также изменятся:  $F \rightarrow F'$ ,  $F+ \rightarrow F'+$ . Вообще говоря, могут измениться и величины  $K_p \rightarrow K'_p$ ,  $K_q \rightarrow K'_q$ . Интересующее нас отношение функционалов также изменится:

$$b_p [F, F+, K_p]/b_q [F, F+, K_q] \rightarrow b_p [F', F'+, K'_p]/b_q [F', F'+, K'_q].$$

Нас будет интересовать относительная вариация  $b_p/b_q$ , т. е.

$$\delta\left(\frac{b_p}{b_q}\right) / \left(\frac{b_p}{b_q}\right) \equiv \left[ \frac{b_p [F', F'+, K'_p]}{b_q [F', F'+, K'_q]} - \frac{b_p [F, F+, K_p]}{b_q [F, F+, K_q]} \right] / \left(\frac{b_p}{b_q}\right). \quad (1.40)$$

Чтобы сделать выкладки менее громоздкими, будем пользоваться следующими обозначениями:

$$b_j [F', F^{+*}, K'_j] = b_j'''; \quad b_j [F', F^{+*}, K_j] = b_j';$$

$$b_j [F', F^+, K_j] = b_j'; \quad b_j [F, F^+, K_j] = b_j.$$

Прибавляя и вычитая внутри скобок (1.40)  $b'_p/b'_q$  и  $b''_p/b''_q$  и группируя члены, получаем

$$\delta \left( \frac{b_p}{b_q} \right) / \left( \frac{b_p}{b_q} \right) = \left( \frac{b'_p}{b'_q} - \frac{b_p}{b_q} \right) / \left( \frac{b_p}{b_q} \right) + \left( \frac{b''_p}{b''_q} - \frac{b'_p}{b'_q} \right) / \left( \frac{b_p}{b_q} \right) +$$

$$+ \left( \frac{b'''_p}{b'''_q} - \frac{b''_p}{b''_q} \right) / \left( \frac{b_p}{b_q} \right) = \text{I} + \text{II} + \text{III}.$$

Преобразуем теперь каждый из членов I, II, III:

$$\left. \begin{aligned} \text{I} &= \left( \frac{b'_p}{b_p} - \frac{b'_q}{b_q} \right) \frac{b_q}{b'_q} = \frac{b_q}{b'_q} \int F' \left( \frac{\int F + K_p dE' d\Omega'}{b_p} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int F + K_q dE' d\Omega'}{b_q} \right) dE d\Omega dV; \\ \text{II} &= - \left( \frac{b'_p}{b''_p} - \frac{b'_q}{b''_q} \right) \cdot \frac{b''_p}{b'_q} \frac{b_q}{b_p} = - \frac{b_q}{b'_q} \frac{b''_p}{b_p} \int F^+ \left( \frac{\int F' K_p dE' d\Omega'}{b''_p} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int F' K_q dE' d\Omega'}{b''_q} \right) dE d\Omega dV; \\ \text{III} &= \left( \frac{b'''_p}{b''_p} - \frac{b'''_q}{b''_q} \right) \frac{b''_p}{b'''_q} \frac{b_q}{b_p} = \\ &= \frac{b_q b''_p}{b'''_q b_p} \int F' F^{+*} \left( \frac{K'_p}{b''_p} - \frac{K'_q}{b''_q} \right) d\Theta. \end{aligned} \right\} (1.41)$$

Для дальнейшего преобразования выражения I надо воспользоваться двумя уравнениями: уравнением для потока нейтронов в возмущенном, но критическом реакторе

$$\frac{\partial F'}{\partial s} + \frac{F'}{l'_{aifs}} - \int \omega' F' dE' d\Omega' - \int \frac{\nu' \chi'}{l'_f} F' dE' d\Omega' = 0$$

и уравнением для ценности нейтронов относительно вклада в отношение функционалов  $b_p/b_q$  в невозмущенном реакторе, которое было выведено ранее и имеет номер (1.21). Применительно к интересующему нас случаю

$$a_i \rightarrow b_p; \quad a_k \rightarrow b_q;$$

$$f_i \rightarrow \int F^+ K_p dE' d\Omega';$$

$$f_k \rightarrow \int F^+ K_q dF' d\Omega' - \frac{\partial \Psi^+}{\partial s} + \frac{\Psi^+}{l_{aifs}} - \int \omega \Psi^+ dE' d\Omega' - \\ - \int \frac{\nu \chi}{l_f} \Psi^+ dE' d\Omega' = \int \frac{F^+ K_p dE' d\Omega'}{b_p} - \frac{\int F^+ K_q dE' d\Omega'}{b_q}. \quad (1.42)$$

Правая часть этого уравнения ортогональна решению однородного основного уравнения (1.5)  $F$ . Поэтому решение уравнения (1.42) существует.

Умножив уравнение (1.33) на  $\Psi^+$ , а уравнение (1.42) на  $F'$ , вычтя второе из первого, проинтегрировав по области определения всех переменных и воспользовавшись граничными условиями типа (1.7), (1.17), получим

$$I = - (b_q/b'_q) [\int F' \Psi^+ (l'_{aifs}{}^{-1} - l_{aifs}^{-1}) dE d\Omega dV - \int F' \Psi^+ (\omega' - \omega) d\Theta - \\ - \int F' \Psi^+ (\nu' \chi' / l'_f - \nu \chi / l_f) d\Theta].$$

При этом для контроля критичности возмущенного реактора надо использовать соотношение (1.35).

Для дальнейшего преобразования выражения II надо воспользоваться другими уравнениями: уравнением для ценности относительно асимптотической мощности в невозмущенном критическом реакторе

$$- \partial F^+ / \partial s + F^+ / l_{aifs} - \int \omega F^+ dE' d\Omega' - \int (\nu \chi / l_f) F^+ dE' d\Omega' = 0 \quad (1.43)$$

и уравнением для потока нейтронов в критическом реакторе с возмущенными параметрами с такой правой частью, чтобы после умножения на  $F^+$  и интегрирования по всей области переменных этой функции получить интеграл из выражения II. Очевидно, что нужное нам уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial s} + \frac{\Psi'}{l'_{aifs}} - \int \omega' \Psi' dE' d\Omega' - \int \frac{\nu' \chi'}{l'_f} \Psi' dE' d\Omega' = \\ = \frac{\int F' K_p dE' d\Omega'}{b_p''} - \frac{\int F' K_q dE' d\Omega'}{b_q''}. \quad (1.44)$$

Правая часть этого уравнения ортогональна решению однородного сопряженного уравнения  $F'^+$ . Поэтому в соответствии с альтернативой Фредгольма решение уравнения (1.44) существует. Уравнение (1.44) имеет ясный физический смысл: оно описывает часть потока нейтронов  $\Psi'$  в критическом реакторе, выделенную тем, что принадлежащие к ней нейтроны происходят от нейтронов, претерпевших процессы взаимодействия, описываемые правой частью уравнения (1.44). Если, например, мы интересуемся отношением реактивностей двух образцов, то  $\Psi'$  — разность потоков нейтронов, происшедших от нейтронов, взаимодействовавших с первым и вторым образцами.

Умножая уравнение (1.43) на  $\Psi'$ , а уравнение (1.44) на  $F^+$ , вычитая из второго первое и интегрируя по всей области определения переменных, пользуясь граничными условиями (1.7), (1.17), а затем умножая на  $-(b_p''/b_p)/(b_q/b_q')$ , получаем для выражения II:

$$\begin{aligned} \text{II} &= - \left[ \int F^+ \left( \frac{\int F' K_p dE' d\Omega'}{b_p''} - \frac{\int F' K_q dE' d\Omega'}{b_q''} \right) dE d\Omega \right] \frac{b_p''}{b_p} \frac{b_q}{b_q'} = \\ &= - \left[ \int \left( \frac{1}{l'_{aifs}} - \frac{1}{l_{aifs}} \right) \Psi' F^+ dE d\Omega dV - \int (\omega' - \omega) \Psi' F^+ d\Theta - \right. \\ &\quad \left. - \int \left( \frac{v'\chi'}{l'_f} - \frac{v\chi}{l_f} \right) \Psi' F^+ d\Theta \right] \frac{b_p''}{b_p} \frac{b_q}{b_q'}. \end{aligned}$$

Член III можно переписать так, чтобы в него входили разности  $K'_p - K_p$  и  $K'_q - K_q$ :

$$\text{III} = \frac{b_q}{b_q'''} \frac{b_p''}{b_p} \int F' F^+ \left( \frac{K'_p - K_p}{b_p''} - \frac{K'_q - K_q}{b_q''} \right) d\Theta.$$

Тождественность нового выражения старому очевидна, так как новое отличается от старого прибавлением нуля.

Складывая полученные таким образом выражения I, II, III, получаем искомое точное выражение для относительной вариации дробно-билинейного функционала

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{b_p}{b_q} \right) / \frac{b_p}{b_q} &= \frac{b_q}{b_q'''} \frac{b_p''}{b_p} \int F' F^+ \left( \frac{K'_p - K_p}{b_p''} - \frac{K'_q - K_q}{b_q''} \right) d\Theta + \\ &+ (b_q/b_q') \left[ - \int (F'\Psi^+ + \Psi'F^+ b_p''/b_p) (l'_{aifs}{}^{-1} - l_{aifs}{}^{-1}) dE d\Omega dV + \right. \\ &+ \int (F'\Psi^+ + \Psi'F^+ b_p''/b_p) (\omega' - \omega) d\Theta + \int (F'\Psi^+ + \Psi'F^+ b_p''/b_p) \times \\ &\quad \left. \times (v'\chi'/l'_f - v\chi/l_f) d\Theta \right]. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Возможен несколько другой вариант вывода, приводящий к несколько отличному виду последней формулы:

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{b_p}{b_q} \right) / \frac{b_p}{b_q} &\equiv \left( \frac{b_p'''}{b_q'''} - \frac{b_p}{b_q} \right) / \frac{b_p}{b_q} = \frac{b_p}{b_q'''} \frac{b_q}{b_p} \left( \frac{b_p'''}{b_p} - \frac{b_q'''}{b_q} \right) = \\ &= \frac{b_q}{b_q'''} \left( \frac{b_p'''}{b_p} - \frac{b_p''}{b_p} - \frac{b_q'''}{b_q} + \frac{b_q''}{b_q} \right) + \frac{b_q}{b_q'''} \left( \frac{b_p''}{b_p} - \frac{b_q''}{b_q} \right) = \\ &= \frac{b_q}{b_q'''} \left\{ \int F' F^+ \left[ \frac{K'_p - K_p}{b_p} - \frac{K'_q - K_q}{b_q} \right] d\Theta + \frac{b_q''}{b_p} \left( \frac{b_p''}{b_q} - \frac{b_p}{b_q} \right) \right\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \frac{b_q''}{b_p} \left( \frac{b_p''}{b_q''} - \frac{b_p}{b_q} \right) &= \frac{b_p'' b_q''}{b_q' b_p} \left( \frac{b_q'}{b_q''} - \frac{b_p'}{b_p''} \right) + \\ &+ \frac{b_q''}{b_p} \frac{b_p}{b_q'} \left( \frac{b_p'}{b_p} - \frac{b_q'}{b_q} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая последние соотношения с соотношениями (1.41) и (1.45), можно записать альтернативную редакцию формулы (1.45)

$$\begin{aligned} \delta \left( \frac{b_p}{b_q} \right) / \frac{b_p}{b_q} &= \frac{b_q}{b_q'''} \int F' F^{+'} \left[ \frac{K_p' - K_p}{b_p} - \frac{K_q' - K_q}{b_q} \right] d\Theta + \\ &+ (b_q/b_q''') (b_q''/b_q') \left[ - \int (F' \Psi^{+'} + \Psi' F^{+'} b_p''/b_p) (l_{aifs}^{-1} - l_{aifs}^{-1}) \times \right. \\ &\times dEd\Omega dV + \int (F' \Psi^{+'} + \Psi' F^{+'} b_p''/b_p) (\omega' - \omega) d\Theta + (F' \Psi^{+'} + \\ &\left. + \Psi' F^{+'} b_p''/b_p) (v' \chi' / l_f' - v \chi / l_f) d\Theta \right]. \end{aligned} \quad (1.45a)$$

Формула (1.45a) отличается от (1.45) другим видом первого члена и коэффициентом перед вторым членом, если же положить  $K_p = K_p'$ ,  $K_q = K_q'$  и принять во внимание, что при этом  $b_q''' = b_q''$ , то (1.45a) и (1.45) совпадут. Формула (1.45a) представляется нам более предпочтительной.

При использовании этой формулы надо помнить, что вывод ее основывается на предположении о критичности как невозмущенного, так и возмущенного реакторов, и поэтому среди возможных возмущений нужно выбирать только удовлетворяющие соотношению (1.35).

Проделанный вывод соотношений (1.45) и (1.45a) и сами соотношения принадлежат одному из авторов и публикуются здесь впервые.

Соотношение (1.45a) точное, так как не было сделано никаких приближений при выводе. Оно не содержит и разности  $F^{+'} - F^{+}$ , от которой не удалось избавиться в работе [6], посвященной обобщенной теории возмущений для дробно-билинейных функционалов. Точное соотношение (1.45a) или (1.45) может использоваться для проверки всей совокупности программ обобщенной теории возмущений, а также для анализа области применимости формулы малых возмущений.

Наиболее эффективно применение этих формул в приближении малых возмущений, когда можно положить:  $F' = F$ ;  $\Psi' = \Psi$ ;  $F^{+'} = F$ ;  $\Psi^{+'} = \Psi^{+}$ ;  $b_q' = b_q'' = b_q''' = b_q$ ;  $b_p' = b_p'' = b_p''' = b_p$ . В этом приближении (1.45a), а также (1.45) переходят в следующее соотношение:

$$\delta\left(\frac{b_p}{b_q}\right) / \frac{b_p}{b_q} = \int FF^+ \left( \frac{K'_p - K_p}{b_p} - \frac{K'_q - K_q}{b_q} \right) d\Theta - \\ - \int (F\Psi^+ + \Psi F^+) (l'_{aifs}{}^{-1} - l_{aifs}{}^{-1}) dEd\Omega dV + \int (F\Psi^+ + \Psi F^+) (\omega' - \omega) \times \\ \times d\Theta + \int (F\Psi^+ + \Psi F^+) (v'\chi'/l'_f - v\chi/l_f) d\Theta. \quad (1.46)$$

При использовании соотношения (1.46) надо контролировать критичность возмущенных реакторов соотношением (1.37). Эффективность (1.46) определяется тем, что коэффициенты при разностях возмущенных и невозмущенных параметров рассчитываются один раз и используются для всевозможных возмущений. Отметим, что формула (1.46) совпадает с соответствующими формулами работ [6] и [7]. Еще раз отметим, что контроль за соблюдением условий критичности (1.35) или (1.37) делает безразличным присутствие в  $\Psi$  и  $\Psi^+$  аддитивной добавки собственной функции соответствующего однородного уравнения с произвольным коэффициентом. Поэтому для простоты под  $\Psi$  и  $\Psi^+$  мы будем иметь в виду частные решения неоднородного уравнения.

Дробно-линейный функционал от ценности нейтронов. Можно представить себе относительные измерения ценностей нейтронов спектра  $Q_1(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$  и  $Q_2(\mathbf{r}, E, \mathbf{n})$ , которые представляются в невозмущенном реакторе формулой

$$\int F^+(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) Q_j(\mathbf{r}, E, \mathbf{n}) dEd\Omega dV = \Pi Q_j \quad (j = 1, 2). \quad (1.47)$$

Чтобы получить соотношение теории возмущений для относительного изменения этого отношения в зависимости от изменений в реакторе, запишем сначала выражение для интересующей нас величины

$$\delta\left(\frac{\Pi Q_1}{\Pi Q_2}\right) / \frac{\Pi Q_1}{\Pi Q_2} = \frac{\Pi Q_2}{\Pi Q_2'} \left( \frac{\Pi Q_1'}{\Pi Q_1} - \frac{\Pi Q_2'}{\Pi Q_2} \right) = \\ = \frac{\Pi Q_2}{\Pi Q_2'} \int F^{+'} \left( \frac{Q_1}{\Pi Q_1} - \frac{Q_2}{\Pi Q_2} \right) dEd\Omega dV. \quad (1.48)$$

Затем воспользуемся уравнением для разности потоков от этих двух источников, нормированных так, чтобы суммарные ценности нейтронов сравнялись:

$$\partial\Psi/\partial s + \Psi/l_{aifs} - \int \omega\Psi dE' d\Omega' - \int (v\chi/l_f) \Psi dE' d\Omega' = \\ = Q_1/\Pi Q_1 - Q_2/\Pi Q_2, \quad (1.49)$$

и уравнением для ценности в возмущенном критическом реакторе

$$-\partial F^{+'}/\partial s + F^{+'}/l'_{aifs} - \int \omega' F^{+'} dF' d\Omega' - \int (v'\chi'/l'_f) F^{+'} dE' d\Omega' = 0. \quad (1.50)$$

Умножая уравнение (1.49) на  $F^{+'}$ , а уравнение (1.50) на  $\Psi$ , вычитая второе из первого, интегрируя по всей области опреде-

ления переменных, пользуясь сопряженностью операторов и граничными условиями типа (1.7) и (1.17), а также соотношениями (1.48) и (1.47), получаем

$$\delta \left( \frac{\Pi Q_1}{\Pi Q_2} \right) / \left( \frac{\Pi Q_1}{\Pi Q_2} \right) = \frac{\Pi Q_2}{\Pi Q_2'} \left[ - \int \Psi F^{+'} (l_{aifs}^{-1} - l_{aifs}^{-1}) dEd\Omega dV + \right. \\ \left. + \int (\omega' - \omega) \Psi F^{+'} d\Theta + \int \Psi F^{+'} - (v'\chi'/l_f' - v\chi/l_f) d\Theta. \right] \quad (1.51)$$

Одновременно надо контролировать критичность возмущенных реакторов соотношением (1.35), а в приближении малых возмущений, когда  $F^{+'} \rightarrow F^+$ ;  $\Pi Q_2' \rightarrow \Pi Q_2$  и

$$\delta \left( \frac{\Pi Q_1}{\Pi Q_2} \right) / \left( \frac{\Pi Q_1}{\Pi Q_2} \right) = - \int \Psi F^+ (l_{aifs}^{-1} - l_{aifs}^{-1}) dEd\Omega dV + \\ + \int \Psi F^+ (\omega' - \omega) d\Theta + \int \Psi F^+ (v'\chi'/l_f' - v\chi/l_f) d\Theta, \quad (1.52)$$

соотношением (1.37).

Источники нейтронов за пределами реактора. Можно представить себе относительные измерения ценности нейтронов двух пучков, падающих на реактор снаружи. В этом случае уравнение (1.49) окажется однородным, так как внутри реактора нет источников нейтронов. Однако вместо нулевого граничного условия (1.7) на внешней границе для направлений внутрь реактора должна быть задана функция  $\Psi_{SQ}(r_{S, \text{гп.}}, E, \mathbf{n})$ , равная числу нейтронов падающего снаружи пучка. При наличии двух внешних пучков  $Q_1$  и  $Q_2$  будем иметь соответственно граничные условия  $\Psi_{SQ_1}$  и  $\Psi_{SQ_2}$ . При этом суммарная ценность каждого из пучков будет равна в невозмущенном реакторе:

$$\Pi Q_i = \int F^+(r_s, E, \mathbf{n}) \Psi_{SQ_i}(r_s, E, \mathbf{n}) (ndS_{\text{внутр}}) dEd\Omega \quad (i = 1, 2)$$

и в возмущенном реакторе:

$$\Pi Q_i' = \int F^{+'}(r_s, E, \mathbf{n}) \Psi_{SQ_i'}(r_s, E, \mathbf{n}) (ndS_{\text{внутр}}) dEd\Omega \quad (i = 1, 2).$$

Отнормируем внешние пучки к суммарным ценностям и рассмотрим разностный пучок с граничным условием:

$$\Psi = \Psi_{SQ_1}/\Pi Q_1 - \Psi_{SQ_2}/\Pi Q_2. \quad (1.53)$$

Относительная вариация величины  $\Pi Q_1/\Pi Q_2$  при возмущении параметров реактора выражается формулой (1.48), в которой надо переписать лишь последнее равенство в цепочке равенств:

$$\delta \left( \frac{\Pi Q_1}{\Pi Q_2} \right) / \left( \frac{\Pi Q_1}{\Pi Q_2} \right) = \frac{\Pi Q_2}{\Pi Q_2'} \int F^{+'} (\Psi_{SQ_1}/\Pi Q_1 - \\ - \Psi_{SQ_2}/\Pi Q_2) (ndS_{\text{внутр}}) dEd\Omega. \quad (1.54)$$

Чтобы интеграл в (1.54) представить в виде формулы теории возмущений, производится обычная процедура. Уравнение (1.49) с  $Q_1=Q_2=0$  умножается на  $F^{+'}$ , а уравнение (1.50) — на  $\Psi$ , из второго вычитается первое и полученное соотношение интегрируется по всему объему реактора и по всем энергиям и направлениям скоростей нейтронов. Интеграл от  $-(F^{+'} \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \Psi \frac{\partial F^{+'}}{\partial s}) = -\frac{\partial}{\partial s} (F^{+'} \Psi)$  преобразуется к поверхностному. Учитывая граничное условие (1.53), а также противоположные направления нормали к поверхности в преобразованном интеграле и в интеграле (1.54), устанавливаем совпадение этих интегралов. Все другие члены, перенесенные в другую часть соотношения, дают обычные выражения. В результате из (1.54) получаем соотношение (1.51). Тем самым получено соотношение теории возмущений для этого случая.

### § 1.7. О реализации обобщенной теории возмущений в программах для ЭВМ

Первые программы, реализующие обобщенную теорию возмущений, были написаны С. М. Зарицким в сотрудничестве с Л. Н. Усачевым в 1964 г., и результаты расчета коэффициентов чувствительности были опубликованы в докладе на Третьей международной конференции по мирному использованию атомной энергии [19]. Большая работа по дальнейшему развитию этих программ проводилась С. М. Зарицким и результаты этой работы описаны в [65]. В настоящее время этот комплекс программ, носящий название ТВК, реализован на ЭВМ типа М-20 и БЭСМ-4 и имеет следующие параметры: модель реактора — одномерная сферическая; приближение — диффузионное, многогрупповое; число энергетических групп — 18; число зон в реакторе — 6; число узлов конечно-разностной сетки — 65.

Ядерные константы, необходимые для работы ТВК, могут либо вводиться с перфокарт, либо выбираться из какой-либо библиотеки на магнитной ленте. В настоящее время ТВК привязан к библиотеке НИИАР [66]. С помощью комплекса ТВК могут быть рассчитаны коэффициенты чувствительности для  $k_{эф}$ , КВ, КВА, отношения чисел процессов в центре сборок, отношения реактивностей образцов, помещенных в центр сборки.

Следующим важным шагом в реализации обобщенной теории возмущений явилось создание программ ПЕНАП-ДТВ [67]. Основная работа здесь была выполнена П. Н. Алексеевым совместно с С. М. Зарицким и Л. К. Шишковым.

Программа ПЕНАП-ДТВ осуществляет многогрупповой конечно-разностный расчет в диффузионном приближении  $k_{эф}$ , потока и ценности нейтронов в двумерном реакторе или ячейке  $(x, y)$  или  $(R, Z)$ -геометрии. Кроме этого, вычисляются различные ин-

тегралы, фигурирующие в формулах теории возмущений. Одногрупповые конечно-разностные уравнения при заданном источнике решаются методом переменных направлений. Используется сетка с узлами на границах зон. Количество расчетных узлов по обоим направлениям не более 4000.

Программа ПЕНАП-ДТВ написана на языке АЛГОЛ-ГДР и предназначена для ЭВМ БЭСМ-6. Макроконстанты зон вводятся с перфокарт. В настоящее время сделана привязка к программам константного обеспечения НИИАР [66].

Авторами программы ведутся интересные работы по использованию для решения одногрупповых конечно-разностных уравнений методов неполной факторизации. Созданы также программы, реализующие формулы обобщенной теории возмущений и в нульмерной геометрии. Это программы Е. И. Шарова и С. М. Зарицкого [68].

Одними из первых зарубежных программ по обобщенной теории возмущений являются, по-видимому, нульмерная программа PERTVS Барре и Равье [34], программы Даль Боно и др. [69, 70].

В настоящее время имеются нульмерные, одномерные и двумерные программы по обобщенной теории возмущений практически во всех странах, ведущих работы в области физики реакторов: Японии, ФРГ, Великобритании, Франции, Италии, США.

Например, в США создана специальная система FORSS [71] для расчета коэффициентов чувствительности реакторов и защиты в многомерной геометрии в диффузионном приближении. С помощью этой системы проведены значительные исследования по анализу чувствительности критических сборок к ядерным данным [72].

## Глава 2

# ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО ЯДЕРНЫМ ДАННЫМ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

### § 2.1. Проблема ядерных данных как объект применения математической статистики

Единый подход к решению проблемы ядерных данных описан в докладе [54], где кратко изложена принципиальная структура связей различных отраслей деятельности с указанием на роль международного сотрудничества.

В данной книге излагается подход к решению математико-статистической части проблемы ядерных данных как целого.

Оптимизационные задачи в проблеме ядерных данных для реакторов. Как отмечалось во введении, погрешность расчетных значений реакторных параметров состоит из нескольких компонент. Методическая компонента связана с неадекватностью расчетных моделей и реальных реакторов и с приближенностью методов, используемых при решении реакторных уравнений. Случайная компонента состоит из технологической, связанной с допусками на различные конструкционные элементы реакторов, разбросами концентраций нуклидов в твэлах и т. п., и константной, связанной с неточностью ядерно-физических данных, закладываемых в расчет реактора.

Константная компонента погрешности для реакторов на быстрых нейтронах является наиболее значительной из перечисленных, и в то же время уменьшение этой компоненты связано с весьма существенными затратами, так как требует создания ускорителей, прецизионной электронной аппаратуры для измерений, стендов для сборки моделей реакторов и т. д.

Происхождение этой компоненты связано с тем, что основным источником ядерных данных для расчета реактора является эксперимент. Поэтому ядерные данные содержат в себе всевозможные ошибки эксперимента, разные по своему происхождению и по корреляционным свойствам, и представляют собой случайные величины. Аппаратом для работы со случайными величинами является математическая статистика и теория вероятностей, поэтому далее при работе с ядерными данными мы будем пользоваться методами именно этих областей математики.

Необходимость уменьшить константную компоненту погрешности расчетов, с одной стороны, и большие затраты на измерения, с другой стороны, приводят к постановке задачи об оптимальном определении потребностей в ядерных данных. Эта задача заключается в таком планировании измерений и оценок ядерных данных, чтобы полученные в итоге ядерные данные обеспечивали бы константную компоненту погрешности расчетных значений

реакторных параметров, не превышающую допустимых погрешностей, а затраты на получение этих данных были бы минимальны. Допустимая погрешность определяется либо из решения задач оптимизации иерархической структуры ядерной энергетики [73], либо из каких-то физических и экономических соображений при проектировании данного типа реакторов. Наличие обобщенной теории возмущений, развитой в гл. 1 книги и позволяющей получать линейную связь между вариациями микроскопических ядерных данных ( $\delta c/c$ ) и проистекающими от последних вариациями в расчетных значениях реакторных параметров ( $\delta R/R$ ), позволяет сформулировать задачу такого планирования в виде многопараметрической задачи нелинейного программирования, допускающей численное решение на ЭВМ в общем случае и точное решение в ряде частных случаев. Такая задача формулируется и решается в § 2.3.

Наличие обобщенной теории возмущений для различных типов интегральных характеристик, измеряемых на критических сборках (в макроэкспериментах), позволяет использовать результаты таких измерений в рамках методов решения обратных задач с применением методов математической статистики при постановке и решении задачи. В § 2.4 формулируется задача оптимизации системы констант для расчета реакторов в следующей постановке: найти такие поправки к системе констант, полученной из микроскопических экспериментов, чтобы получившаяся в итоге оптимизированная система наилучшим, в смысле метода наименьших квадратов, образом описывала результаты интегральных экспериментов на критических сборках при наименьшем отклонении от значений исходных микроскопических данных. Иными словами, ставится задача нахождения вариаций данных, получаемых из прямых измерений, в пределах ошибок этих измерений таким образом, чтобы получить соответствие с данными, следующими из решения обратной задачи при обработке интегральных (или косвенных) измерений.

При постановке задачи оптимизации системы констант существенным является обусловленность расхождений между экспериментальными и расчетными значениями интегральных характеристик ядерными данными и статистической ошибкой эксперимента, а не какими-либо другими факторами. Необходимость такой обусловленности расхождений понятна — в процессе решения задачи мы находим константы, минимизирующие эти расхождения. Если расхождения вызваны другими факторами, то их минимизация за счет констант приведет к неправильным значениям последних.

В дальнейшем обусловленность расхождений экспериментальных и расчетных значений неточным знанием констант мы будем называть адекватностью расчетных моделей экспериментальным результатам. Достигается адекватность в процессе оценки интегральных экспериментов путем введения различного рода поправок в экспериментальные или расчетные значения функционалов.

В процессе оценки может существенно увеличиться по сравнению с первоначальной дисперсия экспериментального значения за счет неточности введения поправок. Подробно вопросы оценки рассмотрены в работах В. А. Дулина [74, 75], а также в книге [62].

Задача оптимизации констант формулируется в виде экстремальной задачи на безусловный оптимум, допускающей при ряде довольно общих предположений точное решение. В рамках решения этой задачи удастся ввести ряд физически интересных понятий, таких, как информативность различных типов интегральных экспериментов по отношению к предсказанию какого-либо реакторного параметра, получить формулы для информативности в зависимости от коэффициентов чувствительности (т. е. от типа эксперимента и характеристики сборки, на которой проведен эксперимент) и точности эксперимента. Это также сделано в § 2.3. При этом, естественно, возникает задача о планировании максимально информативных интегральных экспериментов, т. е. определение таких составов критической сборки, эксперименты на которой информативны по отношению к какому-либо реакторному параметру. В данной книге такая задача не рассматривается, ей посвящены работы авторов и Н. Л. Сальникова [26, 76].

Использование интегральных экспериментов существенно уточняет предсказание реакторных параметров, что заметно ослабляет требования на измерения микроскопических данных. Постановка задачи расчета оптимальных потребностей в ядерных данных при учете информации по интегральным экспериментам и методы решения этой задачи описаны в § 2.5. Задача формулируется в виде многопараметрической задачи нелинейного программирования со сложным характером ограничений. Эта задача не допускает точных решений при каких бы то ни было разумных упрощениях, и поэтому для ее решения использованы численные методы нелинейного программирования. В частности, используется метод сопряженных градиентов для безусловной минимизации функции, состоящей из суперпозиции целевой функции и некоторых функционалов ограничений, полученной путем применения метода штрафных функций.

Некоторые сведения из теории вероятностей и математической статистики, используемые при последующем изложении.

1. Случайная величина есть любая переменная  $x$ , значения которой образуют множество элементарных событий. Величина  $a$ , представляющая собой результат случайного опыта, является случайной величиной. Ниже нами будут использоваться только непрерывные случайные величины, поэтому все определения будут относиться именно к этому классу.

2. Полный набор значений, который может принимать случайная величина  $x$ , образует генеральную совокупность. Эту генеральную совокупность можно охарактеризовать распределением вероятности  $f(x)$ , так что величина  $f(x)dx$  есть вероятность величине  $x$  оказаться в интервале  $dx$ .

3. Математическим ожиданием (средним значением)  $Mx = \mu$  называется величина  $Mx = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$ .

Дисперсией величины  $x$  называется величина

$$D(x) \equiv \sigma^2 = M(x - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Преобразовав последний интеграл, дисперсию можно записать также следующим образом:  $\sigma^2 = Mx^2 - \mu^2$ .  $Mx$  и  $D(x)$  являются функционалами, описывающими свойства распределений  $f(x)$ :  $Mx$  характеризует положение величины  $x$ , а  $D(x)$  — ее рассеяние.

Средним квадратическим отклонением называется величина  $\sigma = \sqrt{D(x)}$ .

4. Если случайное событие описывается упорядоченным набором действительных чисел  $x_1, \dots, x_n$ , то этот набор представляет значение  $n$ -мерной случайной величины  $\mathbf{x}^t = \{x_1 \dots x_n\}$  или  $n$ -мерного случайного вектора.

В дальнейшем под некоторым вектором  $\mathbf{b}$  будем понимать

вектор-столбец  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ , а под транспонированным вектором  $\mathbf{b}^t$  —

вектор-строку  $\mathbf{b}^t = \{b_1, b_2 \dots b_n\}$ .

Распределение системы  $n$  случайных величин задается функцией совместного распределения.

5.  $n$  Математических ожиданий  $Mx_1 = \mu_1, \dots, Mx_n = \mu_n$  определяют точку  $(\mu_1 \dots \mu_n)$ , называемую центром распределения вероятностей. Центральные моменты второго порядка представляют интерес и определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{ik} &= b_{ki} = M[(x_i - \mu_i)(x_k - \mu_k)] = \\ &= \begin{cases} D(x_i) = \sigma_i^2 & \text{при } i = k \text{ (дисперсия)} \\ \text{cov}\{x_i, x_k\} & \text{при } i \neq k \text{ (ковариация)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Эти моменты определяют матрицу моментов, или ковариационную матрицу  $\mathbf{D}(x)$ , которую можно представить в виде

$$\mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j & \\ & & & \ddots \\ \rho_{ji}\sigma_i\sigma_j & & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Величины  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$  называются коэффициентами корреляции и определяются следующим образом:

$$\rho_{ij} = M \left[ \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k} \right].$$

6. Если два случайных вектора  $\mathbf{x}^t = \{x_1 \dots x_n\}$  и  $\mathbf{y}^t = \{y_1 \dots y_m\}$  связаны между собой линейным соотношением  $\mathbf{y} = \mathbf{A}^t \mathbf{x}$ , где  $\mathbf{A}^t$  — матрица размером  $m \times n$ , то векторы математических ожиданий  $M(\mathbf{y})$  и  $M(\mathbf{x})$  связаны соотношением  $M(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^t M(\mathbf{x})$ , а ковариационные матрицы  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{D}(\mathbf{y})$  связаны соотношением  $\mathbf{D}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^t \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{A}$ .

В частности, если  $m=1$ ,  $y$  представляет собой случайное число,  $\mathbf{D}(\mathbf{y})$  — дисперсию  $\sigma_y^2$ , то матрица  $\mathbf{A}^t$  в этом случае — вектор-строка размером  $n$  и имеет место соотношение  $\sigma_y^2 = \mathbf{A}^t \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{A}$ .

Кроме перечисленных определений и теорем будут использованы метод наименьших квадратов, регрессионный анализ, аппарат нелинейного программирования. Необходимые сведения по этим методам можно получить из цитируемой литературы.

Выражения для средних значений и дисперсий расчетных значений реакторных параметров. Как уже говорилось выше, ядерные данные являются случайными величинами. Поэтому зависящие от ядерных данных расчетные значения реакторных параметров также являются случайными величинами.

Чтобы воспользоваться соотношениями предыдущего подраздела применительно к реакторам, надо линеаризовать зависимость реакторного параметра от ядерных данных. Обобщенная теория возмущений представляет нужные линейные соотношения, правда, не для самих величин, а для их вариаций

$$\frac{\delta R_I}{R_{I0}} = \sum_{i,t} S_{Ii} \left( \frac{\delta c_i}{c_{i0}} \right). \quad (2.1)$$

Но этого достаточно, так как случайную компоненту величин  $c$  и  $R$  можно полностью включить в  $\delta c_i$  и  $\delta R_I$ , имея в виду, что  $R_I = R_{I0} (1 + \delta R_I / R_{I0})$  и  $c_i = c_{i0} (1 + \delta c_i / c_{i0})$ . Здесь  $R_{I0}$  —  $I$ -й реакторный параметр, полученный путем решения уравнений реактора с набором ядерных данных  $c_{i0}$ . Соотношение для математического ожидания реакторного параметра будет иметь вид

$$M R_I = R_{I0} + M \delta R_I = R_{I0} + \sum_i S_{Ii} M (\delta c_i / c_{i0}).$$

Из определения дисперсии легко видеть, что дисперсия полной величины совпадает с дисперсией той части величины, в которую включена случайная компонента

$$D(R) = M(R - MR)^2 = M[\delta R - M\delta R]^2 = D(\delta R).$$

Точно такое же заключение можно сделать и для дисперсионной матрицы случайного вектора

$$b(x_i, x_k) = M[(x_i - M x_i)(x_k - M x_k)] = M[(\delta x_i - M \delta x_i) \times (\delta x_k - M \delta x_k)] = b(\delta x_i, \delta x_k); \quad x_i = x_{i0} + \delta x_i; \quad x_k = x_{k0} + \delta x_k.$$

Таким образом, мы показали правомерность применения соотношений предыдущего пункта с использованием линейного соотношения между вариациями величин, а не самими величинами.

Набор ядерных данных в групповом представлении по энергии мы будем описывать  $N_0$ -мерным случайным вектором с математическим ожиданием  $\{c_i\}$  и дисперсиями  $\{d_i^2\}$ . Полная же информация о погрешности вектора, включающая и корреляции погрешностей его компонент, описывается ковариационной матрицей  $\mathbf{D}(N_0)$ , которая существенно недиагональна и диагональные члены которой составляют вектор дисперсии  $\{d_i^2\}$ .

Пользуясь изложенным выше, получаем выражение для дисперсии отдельного реакторного параметра

$$\delta^2(R_I) = S_I^t \mathbf{D}(N_0) S_I. \quad (2.2)$$

Если  $D(N)$  — диагональна, т. е. корреляции отсутствуют, то

$$\delta^2(R_I) = \sum_{i=1}^{N_0} S_{Ii}^2 d_i^2. \quad (2.2a)$$

Можно получить ковариационную матрицу для нескольких реакторных параметров, если  $I$  пробегает несколько значений и  $S_{Ii}$  представляет собой матрицу (см. с. 50, п. 6).

## § 2.2. Природа корреляций погрешностей и их учет в проблеме ядерных данных

Корреляции погрешностей компонент вектора ядерных данных возникают вследствие определенных особенностей современных экспериментов. Применение одних и тех же стандартов, детекторов, источников и селекторов нейтронов для измерений ядерных характеристик различных нуклидов ведет к тому, что в погрешностях этих характеристик будут общие компоненты, а это и ведет к корреляциям погрешностей отдельных компонент  $N_0$ -мерного вектора ядерных данных, т. е. к существенной недиагональности ковариационной матрицы  $\mathbf{D}(N_0)$ . В процессе так называемой оценки ядерных данных, т. е. в процессе выработки рекомендуемых значений на основе использования имеющихся экспериментальных данных и теоретических моделей, может быть определена погрешность рекомендуемых значений. Это делается, например, в последних работах В. А. Коньшина и Е. Ш. Суховицкого [77]. В США в 1972 г. поставлена задача: к полному набору файлов *ENDF/B*, рекомендуемому в качестве национальной библиотеки ядерных данных, создать файл с полной ковариационной матрицей этой библиотеки. Однако выполнение этой задачи еще не было завершено и в 1977 г. Установление всевозможных корреляций погрешностей при рассмотрении совокупности экспериментов, используемых для получения оцененных данных, и представление этой информации в виде недиагональной ковариационной матрицы, несомненно, весьма полезно. Недиagonalная ковариационная матрица дает возможность рассчитать по формуле (2.2) точность реакторных параметров, соответствующих достигнутой точности ядерных данных. Однако использование такого представления погрешностей

в двух других задачах проблемы ядерных данных, а именно при определении потребностей в точностях ядерных данных и при оптимизации системы констант из условия наилучшего описания совокупности интегральных и микроскопических экспериментов, весьма неудобно. Дело в том, что основной вклад в погрешность реакторных параметров вносят компоненты погрешности, скоррелированные по широким областям энергии и по многим нуклидам (см., например, [25]), а они описываются недиагональными членами обсуждаемой ковариационной матрицы, в то время как диагональные члены описывают нескоррелированные статистические погрешности, обычно несущественные. Работать же при решении двух упомянутых задач с полной недиагональной матрицей и иметь в качестве параметров, которые варьируются,  $N_0^2$  ее элементов, да еще с неудобным физическим смыслом, практически невозможно.

К счастью, оказывается, что можно учесть все существенные корреляции, введя диагональную ковариационную матрицу большей размерности, эквивалентную обсуждаемой недиагональной матрице. Этому и посвящен следующий подраздел изложения.

Компоненты с различными корреляционными свойствами относительной погрешности микроскопической величины и их связь с погрешностью реакторного параметра. Относительную погрешность групповой микроскопической величины, входящую в соотношение (2.1), обозначим  $(\delta c/c)_{\alpha ij}$ . Здесь  $i$  — номер нуклида;  $j$  — номер группы;  $\alpha$  — характеризует величину и может быть средним числом вторичных нейтронов деления  $\nu$ ; сечением деления —  $f$ ; сечением радиационного захвата —  $c$ ; долей спектра деления в группу « $k$ » —  $\chi_k$ ; сечением перехода в группу « $k$ » —  $per_k$ ; транспортным сечением —  $tr$ .

Погрешность, определяемая из микроскопического измерения величины, характеризуется стандартным отклонением  $d_{\alpha ij}$ , вероятностный смысл которого определяется формулой

$$d_{\alpha ij}^2 = \overline{(\delta c/c)_{\alpha ij}^2}, \quad (2.3)$$

где  $(\delta c/c)_{\alpha ij}$  рассматривается как случайная величина, а черта означает усреднение по большому числу измерений. Однако определенное в соответствии с (2.3), т. е. по разбросу экспериментальных значений в конкретном опыте, стандартное отклонение является лишь статистической компонентой погрешности. Дело в том, что в опыте обычно производится привязка к некоторому стандарту. Поэтому действительная погрешность должна включать в себя наряду со статистической систематическую погрешность метода привязки, или, в нашей терминологии, погрешность самого стандарта. Смысл введенного в формулу (2.4) вектора  $f_j$  будет пояснен ниже. Таким образом,

$$(\delta c/c)_{\alpha ij} = (\delta c/c)_{\alpha ij}^{\text{станд}} + (\delta c/c)_{\alpha i}^{\text{норм}} f_j + (\delta c/c)_{\text{станд}}. \quad (2.4)$$

Обычно при вычислении полной погрешности опыта все три указанные компоненты погрешности считаются некоррелированными между собой и складываются квадраты стандартных отклонений, связанные с  $(\delta c/c)_{\alpha ij}$  формулой (2.3):

$$d_{\alpha ij}^2 = (d_{\alpha ij}^{\text{стат}})^2 + (d_{\alpha i}^{\text{норм}})^2 f_j^2 + (d^{\text{станд}})^2. \quad (2.5)$$

При этом статистический смысл  $d_{\alpha ij}^{\text{стат}}$  и  $d^{\text{станд}}$  ясен.  $d_{\alpha ij}^{\text{стат}}$  определяется в самом рассматриваемом опыте, а  $d^{\text{станд}}$  берется из паспортных данных стандарта или стандартной методики. О величине  $d_{\alpha i}^{\text{норм}}$  имеет смысл говорить лишь при рассмотрении некоторой мыслимой совокупности экспериментов, проводимых разными методами, по которым в соответствии с определением (2.3) можно провести усреднение. Отсюда ясно, что оценить погрешности привязки или нормировки кривой можно только на основе анализа нескольких независимых по методам экспериментов, т. е. в процессе оценки ядерных данных.

Рассмотрим каждый из трех членов правой части соотношения (2.4). Первый член имеет чисто статистическую природу и некоррелирован ни с другими энергетическими группами, ни с другими типами процессов, ни с другими нуклидами. Если в пределах одной группы имеется  $n$  экспериментальных точек со статистической ошибкой\* каждой из них  $d$ , то  $d_{\alpha ij}^{\text{стат}} = d/\sqrt{n}$ . Это соотношение надо иметь в виду при рассуждениях о величине допустимой статистической ошибки. Третий член постоянен для всех трех групп, веществ и типов величин, при измерении которых применяется рассматриваемый стандарт. Таким образом, эта компонента погрешности полностью скоррелирована в области применения стандарта. Укажем на два примера. Если при измерениях среднего числа вторичных нейтронов используется калибровка по  $^{252}\text{Cf}$ , то  $(\delta c/c)^{\text{станд}}$  является погрешностью в значении  $\sqrt{^{252}\text{Cf}}$ . Если рассмотреть совокупность измерений различных сечений, в которых поток нейтронов измеряется одним и тем же способом, то под  $(\delta c/c)^{\text{станд}}$  следует понимать систематическую ошибку данного метода измерения потока. При измерении потока по эталонному сечению погрешность последнего войдет в указанную ошибку. Второй член представляет компоненту погрешности, скоррелированную в различных энергетических группах, т. е. погрешность в нормировке кривой. При измерениях сечений эта компонента погрешности может происходить, например, из погрешности определения количества исследуемого вещества в слое, из систематической ошибки при детектировании событий, соответствующих измеряемой величине, из погрешности в измерении абсолютного потока нейтронов, если эта погрешность не учитывается в третьем члене. При измерениях  $\nu$  по стандарту из  $^{252}\text{Cf}$  рассматриваемая компонента погрешности может происходить, в частности, из различия в жесткостях спектров деления  $^{252}\text{Cf}$  и иссле-

\* Понятия «ошибка» и «погрешность» авторы употребляют в одном и том же смысле.

дуемого нуклида, которое может привести к различию в эффективностях регистрации нейтронов.

При наличии нескольких независимых погрешностей с одинаковыми корреляционными свойствами их можно объединить по обычному правилу квадратичного сложения.

Иногда возможно ввести расчетную поправку на систематическую погрешность. Тогда погрешностью в нормировке останется погрешность этой поправки. В подобных случаях мы можем сделать заключение об изменении величины этой погрешности в зависимости от номера группы. Для описания этого хода введем вектор  $f_j$ , равный единице в группе с максимальной ошибкой, нулю или отрицательной величине в тех группах, где рассматриваемая систематическая ошибка из физических соображений должна обратиться в нуль или изменить знак.

Необходимо отметить, что сечения и потоки нейтронов разных энергий измеряются разными методами. Поэтому в качестве одного из вариантов следует выбрать соответственно этим областям и корреляционные интервалы, в каждом из которых справедливо соотношение (2.4), а между собой они не скоррелированы.

Из сказанного выше ясно, что если по формуле (2.5) из компонент погрешностей образовать единые погрешности  $d_{\alpha ij}$ , то они оказались бы частично скоррелированными. Поэтому переход от формулы (2.1) к формуле (2.2а) не является корректным. Предлагается естественный путь преодоления этой трудности. А именно, в соотношении обобщенной теории возмущений (2.1) подставляется покомпонентное представление погрешности (2.4) и группируются члены с одинаковыми  $\delta c/c$ :

$$\begin{aligned} \delta R/R = & \sum_{\alpha ij} S_{\alpha ij} (\delta c/c)_{\alpha ij}^{\text{стат}} + \sum_{\alpha i} \left( \sum_j f_j S_{\alpha ij} \right) (\delta c/c)_{\alpha i}^{\text{норм}} + \left( \sum_{ij} S_{vij} \right) \times \\ & \times (\delta c/c)_{\nu}^{\text{станд}} + \sum_{ij} (S_{fij} + S_{cij}) (\delta c/c)_{\text{пот}}^{\text{станд}}. \end{aligned}$$

Первый и второй члены получены без конкретных предположений, третий — в предположении измерений  $\nu$  всех делящихся нуклидов во всей области энергий по калифорниевому стандарту, четвертый — в предположении единого метода измерений потока при измерениях сечений радиационного захвата и деления всех нуклидов, по которым подразумевается суммирование по индексу  $i$ . В полученном соотношении уже каждая относительная погрешность нескоррелирована с другими. Если предположить существование  $m$  корреляционных интервалов, то второй и четвертый члены правой части должны быть разбиты на соответствующие части с независимыми относительными погрешностями:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha i} \left( \sum_j f_j S_{\alpha ij} \right) (\delta c/c)_{\alpha i}^{\text{норм}} & \rightarrow \sum_{\alpha i} \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=n_k}^{m_k} f_j S_{\alpha ij} \right) (\delta c/c)_{\alpha i}^{\text{норм},k}; \\ \sum_{ij} (S_{fij} + S_{cij}) (\delta c/c)_{\text{пот}}^{\text{станд}} & \rightarrow \sum_{k=1}^m \sum_i \sum_{j=n_k}^{m_k} (S_{fij} + S_{cij}) (\delta c/c)_{\text{пот}}^{\text{станд},k}, \end{aligned}$$

где  $n_k$  и  $m_k$  — номера первой и последней групп  $k$ -го корреляционного интервала. Правую часть полученного соотношения переписем в виде одинарной суммы от единицы до  $N$ , где  $N$  — число независимых погрешностей  $(\delta c/c)^l$ . Очевидно, что  $N > N_0$ . Верхний индекс  $l$  принимает значения от 1 до  $N$ . Коэффициент перед  $(\delta c/c)^l$  обозначим  $Z_l$ . Очевидно, что

$$Z_l \equiv \left\{ \begin{array}{l} S_{\alpha ij}; \\ \sum_{j=n_k}^{m_k} f_j S_{\alpha ij}; \\ \sum_{ij} S_{\nu ij}; \\ \sum_l \sum_{j=n_k}^{m_k} (S_{fij} + S_{cij}) \quad (k = 1, \dots, m) \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

и

$$\delta R/R = \sum_{l=1}^N Z_l (\delta c/c)^l.$$

Поскольку все  $(\delta c/c)^l$  — случайные нескоррелированные величины, получаем выражение для дисперсии реакторного параметра через дисперсии соответствующих величин:

$$D^2 = \sum_{l=1}^N Z_l^2 d_l^2, \quad (2.6a)$$

где  $D^2 \equiv \overline{(\delta R/R)^2}$ ;  $d_l^2 \equiv \overline{[(\delta c/c)^l]^2}$ .

Обсуждение полученной ковариационной матрицы. Соотношение (2.6a) соответствует диагональной ковариационной матрице [см. (2.2) и (2.2a)]. Но корреляции тем не менее в ней учтены, как это следует из всего проделанного вывода. Это удалось сделать ценой расширения первоначального вектора ядерных данных с  $N_0$  компонентами до вектора с  $N$  компонентами, включив в него величины, играющие роль при измерениях ядерных данных, но не входящие явно в расчеты реактора. В качестве дополнительных элементов в нашу диагональную ковариационную матрицу входят погрешности следующих величин. Погрешность калифорниевского стандарта среднего числа нейтронов, погрешности, связанные с различными методами определения потока нейтронов, например, погрешность метода определения абсолютного потока по отношению к сечению водорода и погрешность стандартного сечения деления  $^{235}\text{U}$ , возможные систематические погрешности эксперимента, связанные с его конкретной постановкой и одинаковые в широком интервале энергий и т. д. При этом не представляет труда перейти к эквивалентной недиагональной

ковариационной матрице вектора ядерных данных. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим простой пример.

Пусть у нас имеется  $n$  различных величин, каждая из которых измерена с точностью  $d_i (i=1, \dots, n)$  относительно некоторого стандарта, известного с точностью  $d_0$ . В соответствии с правилами статистики, эта совокупность из  $n$  величин имеет ковариационную матрицу  $\mathbf{D}(n)$ , диагональные элементы которой равны  $\frac{\mathbf{D}_{ii}(n)}{=} = d_i^2 + d_0^2 (i=1, \dots, n)$ , а недиагональные —  $\mathbf{D}_{ij}(n) = \rho_{ij} \sqrt{d_i^2 + d_0^2} \times \times \sqrt{d_j^2 + d_0^2}$ , где  $\rho_{ij} = d_0^2 / \sqrt{(d_i^2 + d_0^2)(d_j^2 + d_0^2)}$ .

Если эти величины участвуют в расчете какого-то параметра  $R$  и известны соответствующие коэффициенты чувствительности  $\mathbf{S}_R^t = \{S_{R1} \dots S_{Rn}\}$ , то дисперсия параметра  $R$ , обусловленная неопределенностью этих величин, равна  $\delta_R^2 = \mathbf{S}_R^t \mathbf{D}(n) \mathbf{S}_R$ . Расписав данное выражение в соответствии с определением элементов матрицы  $\mathbf{D}(n)$  и сгруппировав члены, можно получить выражение

$$\delta_R^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 d_i^2 + \left( \sum_{i=1}^n S_i \right)^2 d_0^2.$$

Таким образом, используя недиагональную ковариационную матрицу, мы получаем более сложным путем результат, определяемый соотношениями (2.6), (2.6а).

### § 2.3. Математическая формулировка задачи определения оптимальных потребностей в ядерных данных

Цель деятельности по получению ядерных данных состоит в том, чтобы обеспечить достаточную точность расчета различных существенных параметров, связанных как с работой самого реактора, так и с вне реакторным топливным циклом. Пусть в рассмотрение включено  $L$  реакторных параметров  $R_I (I=1, 2, \dots, L)$ , зависящих от  $N$  ядерных констант. Требования к точности  $H_I (I=1, 2, \dots, L)$  этих реакторных параметров либо следуют из технико-экономических соображений, либо определяются из решения оптимизационных задач более высоких уровней иерархической структуры энергетики [73].

Перечислим некоторые важные параметры реакторов на быстрых нейтронах, требуемая точность расчета которых должна быть обеспечена достаточной точностью ядерных данных. Это — эффективный коэффициент размножения ( $\pm 1\%$ ), коэффициент воспроизводства ( $\pm 2\%$ ), коэффициент неравномерности тепловыделения ( $\pm 1\%$ ), мощностной и температурный коэффициенты реактивности ( $\pm 20\%$ ,  $\pm 30\%$ ), количество накопившихся нуклидов, определяющих активность топлива, и т. д.

Математическая формулировка задачи. Исходя из сказанного выше, целью деятельности по получению ядерных

данных является достижение в процессе работы таких точностей  $d_{i, \text{тр}} (i=1, \dots, N)$ , которые удовлетворяли бы следующим соотношениям:

$$\sum_{j=1}^N Z_{ij}^2 d_{j, \text{тр}}^2 \leq H_i^2 \quad (I = 1, \dots, L),$$

т. е. дисперсия расчета каждого реакторного параметра должна быть меньше или равна допустимой дисперсии. Кроме того, к любому моменту времени каждая константа уже известна с какой-то точностью  $d_{i0} (i=1, \dots, N)$ . В предельном случае, когда ни об одной величине нет никакой информации,  $d_{i0} \rightarrow \infty$ .

Естественно потребовать в процессе определения требуемых точностей, чтобы  $d_{i, \text{тр}}^2 \leq d_{i0}^2 (i=1, \dots, N)$ , т. е. чтобы требуемая точность не оказалась хуже, чем уже достигнутая. Затраты на получение информации о каждой константе зависят от того, информацию какой точности мы хотим иметь об этой константе.

В математической теории планирования эксперимента часто принято считать затраты  $F_j$  на достижение какой-то точности  $d_j$  в константе  $j$  пропорциональными статистическому весу этой константы [78]:  $\omega_j = 1/d_j^2$ ;  $F_j = \lambda_j \omega_j = \lambda_j/d_j^2$ . В соответствии с этим затраты  $F$  на достижение точностей  $d_{i, \text{тр}} (i=1, \dots, N)$  будут равны

$F = \sum_{i=1}^N \lambda_i/d_{i, \text{тр}}^2$ . Потребуем минимизации затрат  $F$ , и тогда задача

на определение этих точностей запишется в следующем виде:

$$F = \sum_{i=1}^N \lambda_i/d_{i, \text{тр}}^2 \rightarrow \min; \quad (2.7a)$$

$$\sum_{i=1}^N Z_{Ii}^2 d_{i, \text{тр}}^2 \leq H_I^2 \quad (I = 1, \dots, L); \quad (2.7b)$$

$$d_{i, \text{тр}}^2 \leq d_{i0}^2 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.7b)$$

В условии (2.7a) величина  $\lambda_i$  — стоимость получения единицы статистического веса величины  $i$ . Решение задачи (2.7) не изменится, если функция (2.7a) будет определена с точностью до постоянного множителя. Выделим какой-то номер  $1 \leq k \leq N$ , разделим каждый член суммы  $\sum \lambda_i/d_{i, \text{тр}}^2$  на величину  $\lambda_k$  и определим отношение  $\lambda_i/\lambda_k$ . Будем считать мерой трудности измерения каждой величины ту точность  $d_{i,0}$ , которую удалось достичь в константе  $i$ . Сделаем предположение, что на получение статистических весов  $\omega_{i0}$ , соответствующих достигнутым точностям различных ядерных данных, было затрачено одинаковое количество средств и что различие в достигнутых точностях характеризует сравнительные объективные трудности получения этих точностей:  $\lambda_i \omega_{i0} = \lambda_k \omega_{k0}$ . Отсюда  $\lambda_i/\lambda_k = \omega_{k0}/\omega_{i0} = d_{i0}^2/d_{k0}^2$ . Теперь задача (2.7) полностью определена. Конечно, строго говоря, отношение  $\lambda_i/\lambda_k$  следует получать либо методом экспертных оценок, либо из эко-

номического анализа. Например, если известно, что на достижение точности  $d_{i0}$  в константе  $i$  затрачено в  $\sqrt{m_i}$  раз больше средств, чем на получение точности  $d_{k0}$  в константе  $k$ , то можно записать  $\lambda_i \omega_{i0} = m_i \lambda_k \omega_{k0}$ , откуда  $\lambda_i / \lambda_k = m_i d_{i0}^2 / d_{k0}^2$ . Цель экономического анализа состоит в определении величин  $m_i$ .

Чтобы свести задачу (2.7) к стандартному виду задачи нелинейного программирования, примем следующие обозначения:

$$\lambda_i / \lambda_k = K_i; \quad Z_{I,j} = A_{Ij} (A_{Ij} > 0); \quad d_{i, \text{TP}}^2 = t_i (t_i > 0); \quad f(\mathbf{t}) = -F(\mathbf{t}); \\ \mathbf{t}^t = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$$

и перепишем задачу (2.7) в следующем виде:

$$f(\mathbf{t}) = - \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{t_i} \rightarrow \max; \quad (2.8a)$$

$$g'_I(\mathbf{t}) = H_I^2 - \sum_{i=1}^N A_{Ii} t_i \geq 0 \quad (I = 1, \dots, L); \quad (2.8б)$$

$$g''_i(\mathbf{t}) \equiv t_{i0} - t_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, N); \quad (2.8в)$$

$$g'''_{N+i}(\mathbf{t}) \equiv t_i > 0 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.8г)$$

Ограничения всех трех видов можно записать одной строчкой

$$g_i(\mathbf{t}) \geq 0; \quad i = 1, \dots, M; \quad M = L + 2N. \quad (2.8д)$$

Ясно, что задачи (2.7) и (2.8) полностью эквивалентны. Задача же (2.8) сформулирована как задача нелинейного программирования на нахождение максимума целевой функции при наличии ограничения [79]. Если построен алгоритм для решения этой задачи, то доказать оптимальность полученной с его помощью точки  $\mathbf{t}^*$  можно, используя известные условия Куна — Таккера (см., например, [79]).

В нашем случае функции  $f(\mathbf{t})$  и  $g_i(\mathbf{t})$  — дифференцируемые и, кроме того, вогнутые, т. е. лежат под касательной или совпадают с ней. Для этого случая условия Куна — Таккера формулируются для наших функций как необходимые и достаточные условия существования решения. Необходимость условий означает, что если  $\mathbf{t}^*$  — оптимальная точка (решение), тогда должны быть справедливы следующие три утверждения:

1)  $\mathbf{t}^*$  — допустимая точка. Существуют множители  $u_i \geq 0$ ; ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), такие, что

$$2) u_i g_i(\mathbf{t}^*) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M) \text{ и } 3) \nabla f(\mathbf{t}^*) + \sum_{i=1}^M u_i \nabla g_i(\mathbf{t}^*) = 0.$$

Достаточность означает, что при выполнении указанных условий мы действительно имеем дело с оптимальной точкой  $\mathbf{t}^*$ . Поясним смысл условия 2. Оно выбрасывает из рассмотрения все ограниче-

ния, не достигшие в оптимальной точке своих предельных значений, так как для выполнения условия 2 при  $g_i(t^*) > 0$  следует положить  $u_i = 0$ , и оставляет лишь «активные» ограничения, принявшие в оптимальной точке предельные значения  $g_i(t^*) = 0$ . Отметим также, что в основе вывода условий Куна — Таккера лежит предположение регулярности, смысл которого в совпадении множества допустимых направлений перемещений из оптимальной точки и множества направлений  $\mathbf{d}$ , удовлетворяющих условию  $\nabla g_i(t^*) \cdot \mathbf{d} \geq 0$  для всех активных ограничений. Для нашего случая линейных ограничений предположение регулярности справедливо.

Решение задачи по определению требуемых точностей данных. Рассмотрим сначала два частных случая задачи (2.8), для которых удается получить решение в виде определенного алгоритма действия с аналитическими формулами и доказать проверку условий Куна — Таккера, что указанный алгоритм действительно дает решение. Наличие этих решений существенно упростит решение задачи в общем виде.

*Случай 1.* Пусть имеется только одно ограничение типа (2.8б), т. е.  $L=1$ , а также ограничения (2.8в) и (2.8г). При этом алгоритм решения задачи может быть следующим: составляют функцию Лагранжа, не принимая во внимание ограничений (2.8в) и (2.8г),  $\Phi = -\sum_{i=1}^N K_i/t_i + u \left( H^2 - \sum_{i=1}^N A_i t_i \right)$ . Из условия  $\nabla \Phi = 0$  получают набор соотношений

$$K_i/A_i t_i^2 = K_m/A_m t_m^2 = u = \text{const}, \quad (2.9)$$

откуда

$$t_i = t_m \sqrt{A_m K_i / A_i K_m}. \quad (2.10)$$

Умножая (2.10) на  $A_i$  и суммируя по  $i$ , а также используя «активное» ограничение (2.8б) как равенство, имеем

$$\sum_{i=1}^N A_i t_i = t_m \sqrt{A_m / K_m} \sum_{i=1}^N \sqrt{A_i K_i} = H^2.$$

Находя отсюда  $t_m$  и подставляя его в формулу (2.10), получаем

$$t_i = H^2 \sqrt{K_i / A_i} \left/ \sum_{j=1}^N \sqrt{A_j K_j} \right. \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.11)$$

Из условий Куна — Таккера ясно, что (2.11) есть решение задачи (2.8) с одним только ограничением (2.8б). Вспомнив об ограничениях (2.8в), мы можем обнаружить, что для некоторых  $i$   $t_i > t_{i0}$ . Пусть число таких переменных  $p_1$ . Не ограничивая общности, можно изменить порядок переменных таким образом, чтобы эти  $p_1$  переменных стояли вначале. Чтобы удовлетворить ограничению (2.8в), положим  $t_i = t_{i0}$  ( $i = 1, \dots, p_1$ ) и исключим эти переменные

из дальнейшего рассмотрения. При этом ограничение (2.8б) для всех остальных переменных следует переписать в виде

$$\sum_{i=p_1+1}^N A_i t_i = H^2 - \sum_{i=1}^{p_1} A_i t_{i0},$$

который соответствует тому, что на оставшиеся переменные приходится меньший вклад в дисперсию. Прodelывая уже описанные выше операции, но с новым ограничением взамен (2.8б), получим

$$t_i = \frac{H^2 - \sum_{i=1}^{p_1} A_i t_{i0}}{\sum_{i=p_1+1}^N \sqrt{A_i K_i}} \sqrt{\frac{K_i}{A_i}} \quad (i = p_1 + 1, \dots, N). \quad (2.12)$$

Чтобы понять, как влияет учет ограничения (2.8в) на решение, возвратимся к задаче без ограничений (2.8в). Заметим, что из (2.11)  $H^2 / \sum_{j=1}^N \sqrt{A_j K_j} = A_i t_i / \sqrt{A_i K_i} = a$ . Следовательно, это равенство можно продолжить:

$$\begin{aligned} a &= (H^2 - A_i t_i) / \left( \sum_{j=1}^N \sqrt{A_j K_j} - \sqrt{A_i K_i} \right) = \\ &= \left( H^2 - \sum_{j=1}^{p_1} A_j t_j \right) / \left( \sum_{j=1}^N \sqrt{A_j K_j} - \sum_{j=1}^{p_1} \sqrt{A_j K_j} \right). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\frac{H^2}{\sum_{j=1}^N \sqrt{A_j K_j}} = \frac{H^2 - \sum_{j=1}^{p_1} A_j t_j}{\sum_{j=p_1+1}^N \sqrt{A_j K_j}} < \frac{H^2 - \sum_{j=1}^{p_1} A_j t_{j0}}{\sum_{j=p_1+1}^N \sqrt{A_j K_j}}. \quad (2.12a)$$

Отсюда и убеждаемся в том, что для  $i=p_1+1, \dots, N$  значение  $t_i$ , определенное по (2.12), больше  $t_i$  по (2.11).

Может оказаться, что снова некоторые  $t_i > t_{i0}$ . Тогда они фиксируются равными  $t_{i0}$ , и процедура повторяется до тех пор, пока не перестанут появляться новые  $t_i > t_{i0}$ . В результате получится, что некоторые переменные  $t_i = t_{i0}$  лежат на границе, определяемой соотношением (2.8в). Число таких переменных  $p \leq N$ . (Знак равенства может иметь место, если с самого начала  $\sum A_i t_{i0} \leq H^2$ , т. е. если достигнутая точность удовлетворяет требованиям и задачу не надо решать.) Остальные переменные лежат на границе, определяемой соотношениями (2.8б), и вычисляются по формуле

$$t_i = \frac{H^2 - \sum_{i=1}^p A_i t_{i0}}{\sum_{i=p+1}^N \sqrt{A_i K_i}} \sqrt{K_i/A_i} \quad i = (p+1, \dots, N). \quad (2.13)$$

Докажем, что точка  $\mathbf{t}$ , определяемая алгоритмом (2.9)–(2.13), удовлетворяет необходимым и достаточным условиям, определяющим решение задачи (2.8). Допустимость этой точки, т. е. удовлетворение ограничениям, очевидна из самого алгоритма. Остальные условия Куна–Таккера в нашем случае записываются в виде: если  $\mathbf{t}^*$  — решение задачи, то должны существовать такие  $u_i \geq 0$ ,  $u_{N+1} \geq 0$  и  $u \geq 0$ , чтобы

$$u \left( H^2 - \sum_{i=1}^N A_i t_i^* \right) = 0; \quad (2.14a)$$

$$u_{N+i} t_i^* = 0 \quad (i = 1, \dots, N); \quad (2.14б)$$

$$u_i (t_{i0} - t_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, N); \quad (2.14в)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \left[ - \sum_{i=1}^N K_i/t_i + u \left( H^2 - \sum_{i=1}^N A_i t_i \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^N u_i (t_{i0} - t_i) + \sum_{i=1}^N u_{N+i} t_i \right] \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{t}^*} = 0. \end{aligned} \quad (2.14г)$$

Поскольку  $t_i \neq 0$ , все  $u_{N+i}$  следует брать равными нулю. Из того что  $t_i \neq t_{i0}$  ( $i = p+1, \dots, N$ ), для указанных индексов следует  $u_i = 0$ .

Из соотношения (2.14г)  $K_i/t_i^2 - u A_i = 0$  ( $i = p+1, \dots, N$ ). Подставляя сюда  $t_i$  из (2.13), получаем

$$u = \left( \sum_{i=p+1}^N \sqrt{K_i A_i} \right)^2 / \left( H^2 - \sum_{i=1}^p A_i t_{i0} \right)^2 > 0.$$

Отсюда видно, что  $u > 0$  и не зависит от  $i$ . Для  $i = 1, \dots, p$  из (2.14г) имеем  $K_i/t_i^2 - u A_i = u_i$ . Установим знак  $u_i$ . Из предыдущих соотношений (2.11) и (2.12а) следует, что

$$u A_i = \frac{\left( \sum_{i=p+1}^N \sqrt{K_i A_i} \right)^2}{\left( H^2 - \sum_{i=1}^p A_i t_{i0} \right)^2} A_i < \frac{\left( \sum_{i=1}^N \sqrt{K_i A_i} \right)^2}{H^4} A_i = \frac{K_i}{t_i^2} < \frac{K_i}{t_{i0}^2}.$$

Отсюда  $u_i > 0$  для  $i = 1, \dots, p$ .

Таким образом, необходимые и достаточные условия Куна–Таккера проверены и, следовательно, точка, полученная по алгоритму (2.9)–(2.13), является решением задачи (2.8) при  $L=1$ .

*Случай 2.* Рассмотрим некоторое обобщение предыдущего случая. Ограничений типа (2.8б) имеется много, однако решение задачи (2.8), полученное только с одним определенным ограничением типа (2.8б) (см. *случай 1*), удовлетворяет и всем другим ограничениям этого типа. Доказательство того, что указанное решение задачи (2.8) с одним ограничением типа (2.8б) будет в этом случае и решением задачи (2.8) со многими ограничениями

подобного типа в соответствии с условиями Куна — Таккера, сводится к указанию на равенство нулю множителей Лагранжа  $u$ , соответствующих всем неактивным ограничениям.

Рассмотренные два случая, хотя и являются частными, тем не менее часто реализуются в практике планирования работ по ядерным данным. Кроме того, они позволяют найти очень хорошее начальное приближение, если для решения задачи (2.8) приходится применять численные методы поиска экстремума.

Рассмотрим теперь решение задачи в самой общей формулировке. При этом, как показала практика, можно пользоваться методом штрафных функций. Согласно этому методу, максимизация целевой функции (2.8а) при наличии ограничений заменяется последовательностью безусловных максимизаций некоторой новой функции  $\Phi$  при  $m=1, 2, \dots, l$ , содержащей «штрафные» члены:

$$\Phi(t, R_m) = - \sum_{i=1}^N K_i/t_i - (1/R_m) \sum_{i=1}^N \{\min[0, (t_{i0} - t_i)]\}^2 - \\ - (1/R_m) \sum_{i=1}^L \left\{ \min \left[ 0, \left( H_i^2 - \sum_{i=1}^N Z_{li} t_i \right) \right] \right\}^2. \quad (2.15)$$

Здесь  $R_m > 0$ ;  $1 \geq R_1 > R_2 > \dots > R_m > R_{m+1}$ ;  $R_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Для безусловной максимизации функции  $\Phi(t, R_m)$  эффективными оказываются методы сопряженных направлений.

Этот результат довольно естествен, если представить себе суть метода сопряженных направлений. В его основе лежит предположение о том, что в малой области около максимума целевую функцию с хорошей точностью можно представить квадратичной функцией  $F(t) = q^t + t^t Q t$ , где  $q$  и  $t$  —  $n$ -мерные вектора, а  $Q$  — матрица  $n$ -го ранга. Максимум же квадратичной функции можно найти за конечное число шагов, равное размерности пространства переменных, если воспользоваться понятием сопряженных относительно матрицы  $Q$  направлений  $d_i, d_k$ , определяемых соотношением  $d_i^t Q d_k = 0$ , если  $i \neq k$ . Из некоторой первоначальной точки в одном из сопряженных направлений проводят линию, затем находят максимум целевой функции на этой линии. Из этого максимума в следующем сопряженном направлении проводят новую линию, на которой снова находят максимум целевой функции и т. д. Из-за приближенности представления целевой функции квадратичной функцией в конечной области пространства не удастся ограничиться лишь  $n$  шагами, а приходится повторять процедуру еще несколько раз по  $n$  шагов в последовательно сужающихся объемах  $n$ -мерного пространства, в которых квадратичная аппроксимация целевой функции становится все более и более точной.

Различные модификации метода сопряженных направлений определяются различными возможностями в определении сопряженных направлений. Если целевая функция и ограничения легко дифференцируются, как в нашем случае, то лучше всего приме-

нять метод сопряженных градиентов по следующей схеме. Для каждого  $m$  повторяем одну и ту же процедуру: начиная с  $\mathbf{t}=\mathbf{t}_1$  и  $\mathbf{d}_1=\nabla\Phi(\mathbf{t}_1, R_m)$  из условия  $\max\Phi(\mathbf{t}_1+\alpha_1\mathbf{d}_1, R_m)$  определяется скаляр  $\alpha_1$  и новая точка  $\mathbf{t}_2=\mathbf{t}_1+\alpha_1\mathbf{d}_1$ . На  $K$ -м шаге определяем

$$\mathbf{d}_k = \nabla\Phi(\mathbf{t}_k, R_m) - \frac{\|\nabla\Phi(\mathbf{t}_k, R_m)\|}{\|\nabla\Phi(\mathbf{t}_{k-1}, R_m)\|} \mathbf{d}_{k-1},$$

из условия  $\max\Phi(\mathbf{t}_k+\alpha_k\mathbf{d}_k, R_m)$  определяем скаляр  $\alpha_k$  и затем  $\mathbf{t}_{k+1}=\mathbf{t}_k+\alpha_k\mathbf{d}_k$ . Одномерный поиск максимума по направлениям  $\mathbf{d}_k$  производится методом золотого сечения. Если после  $n$ -го шага ( $n$  — размерность пространства)  $\nabla\Phi(\mathbf{t}_n+\alpha_n\mathbf{d}_n, R_m)\neq 0$ , то продлевается еще цикл расчетов, начиная с точки  $\mathbf{t}_n+\alpha_n\mathbf{d}_n$ , которую обозначим в этом цикле  $\mathbf{t}_1$ . Найдя максимум функции  $\Phi(\mathbf{t}, R_m)$ , переходим к поиску максимума функции  $\Phi(\mathbf{t}, R_{m+1})$ . Всю эту процедуру продолжаем, пока полученная точка максимума перестанет смещаться при переходе к новым  $R_m$ .

#### § 2.4. Использование интегральных экспериментов в проблеме ядерных данных для реакторов

Постановка задачи об оптимизации системы констант расчета для реакторов. Задача оптимизации  $N$  ядерных констант, имеющих ковариационную матрицу  $\mathbf{D}(N)$ , по результатам  $L$  интегральных измерений может быть сформулирована следующим образом.

Требуется найти вектор  $\mathbf{f}^t = \{f_1, \dots, f_N\}$  поправок к исходной системе констант, такой, чтобы

$$c_i^{\text{опт}} = c_i^{\text{исх}}(1 + f_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.16)$$

и который минимизировал бы квадратичную форму

$$\Phi = \mathbf{f}^t \mathbf{D}^{-1}(N) \mathbf{f} + \mathbf{Q}' \mathbf{V}^{-1}(L) \mathbf{Q}, \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{V}(L)$  — ковариационная матрица погрешностей набора интегральных экспериментов;  $\mathbf{Q}' = (E_I - C_I')/C_I$  ( $I = 1, 2, \dots, L$ ) — вектор размерности  $L$ . Это — вектор расхождений между интегральными экспериментально измеренными величинами  $E_I$  и рассчитанными по системе констант  $\mathbf{c}^{\text{опт}}$  —  $C_I'$ , отнесенными к величинам, вычисленным по исходной системе констант  $\{\bar{C}_i^{\text{исх}}\}$  —  $C_I$ . Существенно при этом, что разница между экспериментальными величинами  $E_I$  и расчетными  $C_I$  должна быть целиком обусловлена незнанием правильных ядерных констант и статистической погрешностью эксперимента и не содержать в себе других компонент погрешности, т. е. требуется либо полная адекватность используемых моделей расчета и реальной постановки экспери-

мента, либо компонента неадекватности должна быть малой. Для процедуры оптимизации существенна связь

$$C'_I = C_I \left( 1 + \sum_{j=1}^N S_{Ij} f_j \right),$$

где

$$S_{Ij} = \left\| \begin{array}{cccc} S_{I1} & S_{I2} & \dots & S_{IN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{L1} & S_{L2} & \dots & S_{LN} \end{array} \right\| \equiv \mathbf{F}'$$

— матрица коэффициентов чувствительности результата  $I$ -го интегрального эксперимента к  $j$ -й константе.

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} - \mathbf{F}'\mathbf{f},$$

где  $\mathbf{Q}$  — вектор с компонентами  $Q_I = (E_I - C_I)/C_I$  ( $I = 1, \dots, L$ ).

Ковариационная матрица  $\mathbf{V}(L)$  при этом считается известной и имеющей  $V_{ij}(L) = \varepsilon_{ij} \Delta_i \Delta_j$ , где  $\varepsilon_{ij}$  — коэффициент корреляции между погрешностями  $i$  и  $j$  экспериментов;  $\Delta_j$  — экспериментальная точность при определении  $j$  интегральной характеристики. Способ определения величин  $\varepsilon_{ij}$  описан, например, в работах [60, 62].

Фактически нахождение минимума квадратичной формы означает нахождение таких поправок к соответствующей системе констант, которые обеспечили бы наилучшее, в смысле МНК, описание всей имеющейся совокупности микроскопических и интегральных измерений. Такой вид функционала  $\Phi$  следует непосредственно из применения МНК для всей совокупности микроскопических и интегральных экспериментов. Учитывая сказанное в § 2.2 о природе корреляций и способе их учета в наборе ядерных данных, в задаче можно перейти от недиагональной матрицы  $\mathbf{D}(N_0)$  к матрице большей размерности  $\mathbf{D}(N)$ , но диагональной. При этом должны быть проделаны и соответствующие (2.6) преобразования с коэффициентами чувствительности  $\mathbf{S}$ . Это повлечет за собой появление дополнительных величин  $f_i$ , каждая из которых в этом случае имеет смысл поправки ко всем сечениям в данном корреляционном интервале или к сечениям всех элементов в данном корреляционном интервале в зависимости от корреляционных свойств соответствующей компоненты погрешности. В этом случае первый член в квадратичной форме (2.16) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^N f_i^2 / d_{i0}^2.$$

В предположении, что корреляции между ошибками интегральных экспериментов малы или отсутствуют, второй член также упростится, и задача оптимизации констант примет обычный вид МНК

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \hat{f}_i^2 / d_{i0}^2 + \sum_{l=1}^L \left( \left( E_l - C_l \left( 1 + \sum_{i=1}^N S_{li} f_i \right) \right) / C_l \Delta_l \right)^2 \rightarrow \min. \quad (2.18)$$

Под  $S_{li}$  нужно понимать величины, уже преобразованные в соответствии с (2.6). Именно такой вид функционала был использован в работах [32] и [47].

Решение задачи о подгонке и предсказании реакторных параметров. Рассмотрим решение задачи (2.17) в общем случае, не делая предположений о диагональности матриц  $\mathbf{D}(N)$  и  $\mathbf{V}(L)$ . Полученные в результате формулы применимы и в случае диагональных матриц.

Найдем вектор, безусловно, минимизирующий функционал (2.17). Для этого продифференцируем  $\Phi$  по  $f_i$  ( $i=1, \dots, N$ ), приравняем частные производные нулю, и, учитывая, что для любых матриц и векторов  $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$ ,  $(\mathbf{ABC})^t = \mathbf{C}^t \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t$ , а  $(\mathbf{D}^{-1})^t = \mathbf{D}^{-1}$ ,  $(\mathbf{V}^{-1})^t = \mathbf{V}^{-1}$ , получим систему линейных уравнений

$$\mathbf{Mf} = \mathbf{Y}, \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{M}$  — информационная матрица Фишера для совокупности микро- и макроэкспериментов, имеющая вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{FV}^{-1}(L)\mathbf{F}^t + \mathbf{D}^{-1}(N); \quad (2.20)$$

$\mathbf{Y}$  — вектор правых частей системы, имеющий вид

$$\mathbf{Y} = \mathbf{FV}^{-1}(L)\mathbf{Q}. \quad (2.21)$$

Решением системы является вектор  $\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Y}$ .

Матрица  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{D}(N+L)$  называется ковариационной матрицей для совокупности микро- и макроэкспериментов. Структура этой матрицы такова:  $D_{ij}(N+L) = \rho'_{ij} d'_i d'_j$ , где  $d'_i$  — новые точности определения  $i$ -й величины, улучшившиеся вследствие использования косвенной информации по интегральным экспериментам;  $\rho'_{ij}$  — новые коэффициенты корреляции ошибок  $i$ -й и  $j$ -й величин, причем  $\rho'_{ij} = \rho'_{ji}$ . Это следует из вида  $\mathbf{M}$  (2.20).

Допустим, мы теперь хотим на основе всей информации о микро- и макроэкспериментах предсказать какой-либо реакторный параметр с коэффициентами чувствительности  $\mathbf{Z}_R$ . Если  $R_0$  — его рассчитанное значение по системе констант  $\mathbf{c}^{\text{мкx}}$ , то предсказанное на основании всей совокупности микро- и макроэкспериментов значение определяется следующим образом:  $R = R_0 + R_0 \sum_{i=1}^N Z_{Ri} f_i$ , а

дисперсия предсказания  $\delta_R^2 = \mathbf{Z}_R^t \mathbf{D}(N+L) \mathbf{Z}_R$ .

При решении задачи подгонки применительно к ядерным данным для реакторов возникает ряд вычислительных трудностей. Одна из этих трудностей состоит в том, что при решении системы уравнений приходится обращать матрицу, которая имеет порядок  $N \times N$ , где  $N$  очень велико (более 100). Чтобы обойти эту труд-

ность, пришлось воспользоваться методами последовательного планирования экспериментов. Применение этих методов позволило яснее понять возможности использования интегральных экспериментов для уточнения ядерно-физических констант, получить ряд интересных выводов и следствий.

Использование методов последовательного планирования экспериментов для решения задач оптимизации систем констант. Прежде чем приступить к изложению вопроса, сформулируем *лемму*, доказательство которой можно найти, например, в [51]:

$$(\mathbf{I}_p + \mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I}_p - \mathbf{A}(\mathbf{I}_q + \mathbf{B}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (2.22)$$

где  $\mathbf{I}_p$ ,  $\mathbf{I}_q$  — единичные матрицы размером  $p \times p$  и  $q \times q$  соответственно;  $\mathbf{A}$  — матрица размером  $p \times q$ ;  $\mathbf{B}$  — матрица размером  $q \times p$ .

Ковариационная матрица  $\mathbf{D}(N+L)$  выражается через исходную ковариационную матрицу  $\mathbf{D}(N)$ , матрицу коэффициентов чувствительности  $\mathbf{F}$  и ковариационную матрицу  $\mathbf{V}(L)$  экспериментальных ошибок интегральных измерений следующим образом:

$$\mathbf{D}(N+L) = \mathbf{M}^{-1} = [\mathbf{D}^{-1}(N) + \mathbf{F}\mathbf{V}^{-1}(L)\mathbf{F}^t]^{-1}.$$

Эту зависимость, учитывая правила матричной алгебры, можно переписать в виде  $\mathbf{D}(N+L) = [\mathbf{I}_N + \mathbf{D}(N)\mathbf{F}\mathbf{V}^{-1}(L)\mathbf{F}^t]^{-1}\mathbf{D}(N)$  и воспользоваться леммой (2.22), положив  $\mathbf{D}(N)\mathbf{F} = \mathbf{A}$  — матрица размером  $N \times L$  и  $\mathbf{V}^{-1}(L)\mathbf{F}^t = \mathbf{B}$  — матрица размером  $L \times N$ . Тогда, согласно (2.22), получим

$$\mathbf{D}(N+L) = \{\mathbf{I}_N - \mathbf{D}(N)\mathbf{F}[\mathbf{I}_L + \mathbf{V}^{-1}(L)\mathbf{F}^t\mathbf{D}(N)\mathbf{F}]^{-1}\mathbf{V}^{-1}(L)\mathbf{F}^t\}\mathbf{D}(N). \quad (2.23)$$

Формулу (2.23) можно преобразовать также к следующему виду:

$$\mathbf{D}(N+L) = \{\mathbf{I}_N - \mathbf{D}(N)\mathbf{F}[\mathbf{V}(L) + \mathbf{F}^t\mathbf{D}(N)\mathbf{F}]^{-1}\mathbf{F}^t\}\mathbf{D}(N). \quad (2.24)$$

Такая форма записи более наглядна и удобна для программирования. В квадратных скобках формулы (2.24) стоит сумма ковариационных матриц экспериментальных погрешностей интегральных величин и расчетных погрешностей этих же величин.

Использование формулы (2.24) позволяет заменить обращение матрицы порядка  $N \times N$  на обращение матрицы порядка  $L \times L$ . Разумеется, это удобно только, когда  $N > L$ .

На практике осуществляется именно этот случай, так как число параметров подгонки ядерных данных может достигать нескольких сотен, а число интегральных экспериментов, выполненных одними и теми же авторами и характеризующихся скоррелированными погрешностями, обычно достигает нескольких десятков. Группы же интегральных экспериментов, выполненные в разных институтах и странах, по-видимому, скоррелированы между собой в малой степени. Поэтому учет корреляций последовательно в небольших группах интегральных экспериментов является достаточно полным. С точки зрения эффективности

алгоритма рассмотрение интегральных экспериментов группами также весьма удачно. Даже в предположении отсутствия корреляции между интегральными экспериментами, которому мы будем следовать далее, объединение интегральных экспериментов в группы эффективнее их рассмотрения по одному. Однако при диагональной матрице  $\mathbf{V}(L)$  алгоритм рассмотрения интегральных экспериментов по одному обладает большей наглядностью и ясным физическим смыслом.

В этом случае матрица — произведение  $\mathbf{FV}^{-1}(L)\mathbf{F}^t$  — распадается на сумму матриц, каждая из которых имеет отношение к одному интегральному эксперименту и для  $I$ -го интегрального эксперимента представляется прямым произведением векторов  $\mathbf{S}_I =$

$$= \begin{pmatrix} S_{I1} \\ S_{I2} \\ \vdots \\ S_{IN} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{S}_I^t = (S_{I1}, S_{I2}, \dots, S_{IN}):$$

$$\mathbf{FV}^{-1}(L)\mathbf{F}^t = \frac{\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1^t}{\Delta_1^2} + \frac{\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_2^t}{\Delta_2^2} + \dots + \frac{\mathbf{S}_L \mathbf{S}_L^t}{\Delta_L^2}. \quad (2.25)$$

Рассмотрим процедуру добавления в ковариационную матрицу одного эксперимента из суммы (2.25)

$$\mathbf{D}(N+1) = \left[ \mathbf{D}^{-1}(N) + \frac{\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1^t}{\Delta_1^2} \right]^{-1}.$$

Воспользовавшись соотношением (2.24) и видом матрицы  $\mathbf{F}$  в случае  $L=1$ , получим

$$\mathbf{D}(N+1) = \left( \mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{D}(N) \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_1^t}{\Delta_1^2 + \mathbf{S}_1^t \mathbf{D}(N) \mathbf{S}_1} \right) \mathbf{D}(N). \quad (2.26)$$

Аналогично (2.26) можно получить применительно к случаю (2.25) формулу для выражения  $\mathbf{D}(N+K+1)$  через  $\mathbf{D}(N+K)$ :

$$\mathbf{D}(N+K+1) = \left( \mathbf{I}_N - \frac{\mathbf{D}(N+K) \mathbf{S}_{K+1} \mathbf{S}_{K+1}^t}{\Delta_{K+1}^2 + \mathbf{S}_{K+1}^t \mathbf{D}(N+K) \mathbf{S}_{K+1}} \right) \mathbf{D}(N+K). \quad (2.27)$$

Таким образом, мы можем в случае диагональной матрицы  $\mathbf{V}(L)$  построить матрицу  $\mathbf{D}(N+L)$  с помощью рекуррентного соотношения (2.27), не прибегая к операции обращения матрицы.

В случае диагональной матрицы  $\mathbf{V}(L)$  выражение для вектора  $\mathbf{Y}$  (2.21) также распадается на сумму отдельных векторов, каждый из которых относится к отдельному интегральному эксперименту:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\Delta_1^2} \frac{E_1 - C_1}{C_1} \mathbf{S}_1 + \dots + \frac{1}{\Delta_L^2} \frac{E_L - C_L}{C_L} \mathbf{S}_L.$$

Иначе, имеем рекуррентное соотношение для  $Y$  при  $Y(N) = 0$ :

$$Y(N + K + 1) = Y(N + K) + \frac{1}{\Delta_{K+1}^2} \frac{E_{K+1} - C_{K+1}}{C_{K+1}} S_{K+1}. \quad (2.27a)$$

Соотношения (2.27) и (2.27a) дают эффективный точный способ решения задачи (2.17), свободный от обращения матриц.

Точность расчета реакторного параметра  $R$  с коэффициентами чувствительности  $Z_R$  на основе информации по совокупности микроскопических и  $(K+1)$  интегральных экспериментов можно выразить через точность расчета этого параметра на основе информации по совокупности микроскопических и  $K$  интегральных экспериментов, коэффициенты чувствительности  $S_{K+1}$  и точность  $\Delta_{K+1}$   $(K+1)$ -го интегрального эксперимента:

$$\begin{aligned} \delta^2(N + K + 1) &= Z_R^t \mathbf{D}(N + K + 1) Z_R = \\ &= \delta^2(N + K) - \frac{[Z_R^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1}] [S_{K+1}^t \mathbf{D}(N + K) Z_R]}{\Delta_{K+1}^2 + S_{K+1}^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Формулу (2.28) преобразуем к удобному для анализа виду

$$\begin{aligned} \delta^2(N + K + 1) &= \delta^2(N + K) \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{[Z_R^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1}] [S_{K+1}^t \mathbf{D}(N + K) Z_R]}{[Z_R^t \mathbf{D}(N + K) Z_R] [S_{K+1}^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1}]} : [1 + \Delta_{K+1}^2 / S_{K+1}^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1}] \right\}. \end{aligned}$$

В силу симметричности матрицы  $\mathbf{D}(N + K)$   $Z_R^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1} = S_{K+1}^t \times \mathbf{D}(N + K) Z_R$ . Определим

$$r_{N+K, K+1} = \frac{Z_R^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1}}{[Z_R^t \mathbf{D}(N + K) Z_R] [S_{K+1}^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1}]} \quad (2.29)$$

и запишем окончательно

$$\delta^2(N + K + 1) = \delta^2(N + K) \left( 1 - \frac{r_{N+K, K+1}^2}{1 + \Delta_{K+1}^2 / \omega_{K+1}^2} \right). \quad (2.30)$$

Величина  $\omega_{K+1} = \sqrt{S_{K+1}^t \mathbf{D}(N + K) S_{K+1}}$  есть точность расчета  $(K+1)$ -го интегрального эксперимента на основе всей предшествующей информации по совокупности микро- и макроэкспериментов. Отметим попутно, что  $|r_{N+K, K+1}| \leq 1$ . Рассмотрим зависимость  $\delta^2(N + K + 1)$  от величины  $\Delta_{K+1}$  — экспериментальной точности измерения  $(K+1)$ -й интегральной величины. При  $\Delta_{K+1} \rightarrow \infty$   $\delta^2(N + K + 1) \rightarrow \delta^2(N + K)$  этот факт физически нагляден: проведение эксперимента с плохой точностью не дает нам никакой новой информации и не улучшает точности расчета нашего реакторного параметра. При  $\Delta_{K+1} \rightarrow 0$   $\delta^2(N + K + 1) \rightarrow \delta^2(N + K) (1 - r_{N+K, K+1}^2)$ , т. е. будучи проделанным бесконечно точно, интегральный эксперимент не дает в общем случае бесконечно точного предсказания

реакторного параметра, т. е. каждый интегральный эксперимент имеет вполне определенные возможности по отношению к конкретному реакторному параметру. Эти возможности характеризуются величиной  $r_{N+K, K+1}$ , определяемой соотношением (2.29). Эту величину естественно назвать коэффициентом корреляции  $(K+1)$ -го интегрального эксперимента с реакторным параметром  $R$  при наличии информации о наборе из  $N+K$  макро- и микроэкспериментов. Модуль коэффициента корреляции  $|r_{N+K, K+1}|$  равен единице, если  $S_{K+1} = \alpha Z_R$ ;  $\alpha \neq 0$ . Графически зависимость (2.30) представлена на рис. 2. Из этой зависимости видно, что можно ввести точки  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , определяющие интервал точностей, при которых имеет смысл проведение интегрального эксперимента. Проведение эксперимента с точностью хуже, чем  $\Delta_1$ , не имеет смысла, так как никакого улучшения точности предсказания реакторного параметра мы не получим, так же как и с точностью лучше  $\Delta_2$ , поскольку оно приводит к существенным затратам на эксперимент, но не к существенному уточнению реакторного параметра. Практически границы  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  можно определить следующим образом.

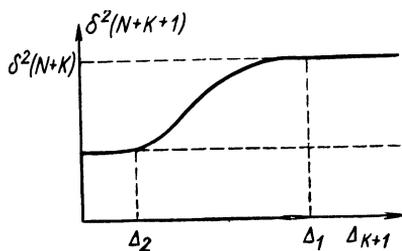


Рис. 2. Зависимость величины  $\delta^2(N+K+1)$  от  $\Delta_{K+1}$

Будем считать проведение  $(K+1)$ -го интегрального эксперимента с точностью  $\Delta_0$  бесполезным, если

$$[\delta^2(N+K) - \delta^2(N+K+1) |_{\Delta=\Delta_0}] / [\delta^2(N+K) - \delta^2(N+K+1) |_{\Delta=0}] < \epsilon. \quad (2.31)$$

Величина  $\epsilon$  выбирается из экономических соображений. Авторы в практических расчетах использовали  $\epsilon = 1/10$ . Для определения величины  $\Delta_1$  из (2.31) можно получить соотношение  $\Delta_0^2 > \omega_{K+1}^2 \times (1/\epsilon - 1)$ . При  $\epsilon = 1/10$  получаем  $\Delta_1 = \inf \Delta_0 = 3\omega_{K+1}$ .

Аналогично можно получить значение верхней границы  $\Delta_2$ . Будем считать проведение эксперимента с точностью  $\Delta_0$  бесполезным, если

$$[\delta^2(N+K) - \delta^2(N+K+1) |_{\Delta=\Delta_0}] / [\delta^2(N+K) - \delta^2(N+K+1) |_{\Delta=0}] > \alpha. \quad (2.32)$$

Величина  $\alpha$  в практических расчетах бралась равной  $25/26$ , это соответствует тому, что эксперимент с точностью  $\Delta_0$  дает более 96% максимально возможной информации. Из (2.32) можно получить соотношение  $\Delta_0 < \omega_{K+1}^2 (1/\alpha - 1)$ . При  $\alpha = 25/26$  получаем  $\Delta_2 = \sup \Delta_0 = \omega_{K+1}/5$ .

Введем в рассмотрение величину  $J_p = \mathbf{Z}_R^t \mathbf{D} (N + K) \mathbf{Z}_R - \mathbf{Z}_R^t \times \times \mathbf{D} (N + K + P) \mathbf{Z}_R$ , которую будем в дальнейшем называть информативностью  $P$  интегральных экспериментов по отношению к реакторному параметру с коэффициентами чувствительности  $\mathbf{Z}_R$ . Очевидно, что эта величина полностью характеризует возможность путем использования набора  $P$  интегральных экспериментов улучшить точность расчета реакторного параметра с коэффициентами чувствительности  $\mathbf{Z}_R$ .

Рассмотрим теперь, как меняется точность отдельных ядерно-физических констант при использовании интегральных экспериментов. Для выяснения этого вопроса необходимо построить зависимость  $d_i'$  от коэффициентов чувствительности и точности  $\Delta_{K+1}$   $(K+1)$ -го интегрального эксперимента. Наиболее простым способом для этого является формальное представление отдельной  $i$ -й константы как реакторного параметра с коэффициентами чувствительности  $\mathbf{Z}_c$ , имеющими вид:

$$\mathbf{Z}_c^t = \begin{Bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & N \end{Bmatrix}.$$

Тогда, подставив  $\mathbf{Z}_c^t$  в формулы (2.29) и (2.30), получим

$$d_i'^2 = d_i^2 \left[ 1 - \frac{\left( \sum_j S_{j\rho_{ij}} d_j \right)^2}{\omega_{K+1}^2 d_i^2 (1 + \Delta^2 / \omega_{K+1}^2)} \right]. \quad (2.33)$$

Зависимость  $d_{N+K+1}^2$  от  $\Delta_{K+1}$  имеет качественно такой же вид, как и для величины  $\delta^2(N+K+1)$ , и все сказанное выше для интегральных параметров справедливо и для отдельных констант. Отметим только, что от интегрального опыта не следует ожидать существенных уменьшений величин  $d_i$ . Для типичного интегрального эксперимента — отношений сечений в центре критической сборки или отношений реактивности центральных образцов — отношение  $\sum_j S_{j\rho_{ij}} d_j / \omega_{K+1}$ , представляющее собой отношение вклада дисперсии  $i$ -й константы в сумму всех дисперсий ко всей сумме, весьма мало. Значение этого отношения для различных констант составляет около 1/40—1/50, что определяет очень малое уточнение отдельной константы интегральным экспериментом. Что же касается интегральных характеристик типа  $k_{эф}$  или КВ, то, как показали расчеты, интегральные эксперименты на критических сборках существенно улучшают точность их предсказаний.

### § 2.5. Планирование оптимальной совокупности микроэкспериментов и оценок, обеспечивающей требуемые точности расчета реакторных параметров с учетом интегральных экспериментов

**Постановка задачи.** В § 2.3 было показано, что задача о планировании оптимальной совокупности микроэкспериментов и оценок, обеспечивающей требуемые точности расчета реакторных

параметров без использования интегральных экспериментов, может быть сведена к многопараметрической задаче нелинейного программирования. Методы решения этой задачи также описаны в § 2.3. Здесь мы рассмотрим вопрос о планировании такой совокупности с учетом информации по интегральным измерениям, т. е. найдем математическую постановку и алгоритм решения следующей задачи: найти такие точности микроэкспериментов и оценок, которые при условии использования информации по набору  $L$  интегральных экспериментов, проведенных с определенными точностями, обеспечивали бы требуемые точности расчета произвольного числа реакторных параметров.

Как показано в § 2.4, ковариационная матрица  $\mathbf{D}(N+L)$  всей совокупности микро- и макроэкспериментов может быть выражена через ковариационную матрицу  $\mathbf{D}(N)$  только микроэкспериментов, матрицу чувствительности  $\mathbf{F}$  интегральных экспериментов и ковариационную матрицу  $\mathbf{V}(L)$  экспериментальных ошибок интегральных экспериментов следующим образом:

$$\mathbf{D}(N+L) = \{\mathbf{I} - \mathbf{D}(N)\mathbf{F}[\mathbf{V} + \mathbf{F}'\mathbf{D}(N)\mathbf{F}]^{-1}\mathbf{F}'\} \mathbf{D}(N). \quad (2.34)$$

Условие обеспечения полной совокупности измерений как дифференциальных, так и интегральных, требуемых точностей расчета реакторных параметров, запишется следующим образом:

$$\mathbf{Z}_j^t \mathbf{D}(N+L) \mathbf{Z}_j \leq H_j^2 \quad (j = 1, \dots, K). \quad (2.35)$$

В процессе измерений и оценок естественно ставить целью достижение таких точностей, которые обеспечивали бы выполнение условий (2.35) и стоимость получения которых была бы минимальной. Все сказанное в § 2.3 о зависимости стоимости системы микроэкспериментов и оценок от точности остается в силе, и поэтому оптимальная совокупность микроэкспериментов и оценок, обеспечивающая требуемые точности расчета реакторных параметров при использовании информации по интегральным экспериментам, может быть определена из решения следующей задачи:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i / d_i^2 \rightarrow \min; \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{Z}_j^t \{\mathbf{I} - \mathbf{D}(N)\mathbf{F}[\mathbf{V} + \mathbf{F}'\mathbf{D}(N)\mathbf{F}]^{-1}\mathbf{F}'\} \mathbf{D}(N) \mathbf{Z}_j \leq H_j^2 \quad (j = 1, \dots, N). \quad (2.36b)$$

$$0 \leq d_i^2 < d_{i0}^2 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.36в)$$

В ограничение (2.36) искомые величины  $\mathbf{d}$  входят через матрицу  $\mathbf{D}(N)$ , которая определяется следующим образом:  $D_{ij}(N) = \delta_{ij} d_i d_j$ ; где  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера. Задача (2.36) является типичной задачей нелинейного программирования, и поэтому для ее решения естественно воспользоваться теми методами, которые используются в § 2.3 при решении аналогичной задачи без учета интегральных экспериментов.

Решение задачи. К сожалению, применительно к задаче (2.36) не удалось найти частных случаев, которые могли бы существенно облегчить нахождение решения задачи, как это удалось сделать применительно к задаче (2.7). Для этой задачи ограничение (2.36б) весьма сложно в отличие от задачи без учета интегральных экспериментов. Поэтому мы допустили возможное существование нескольких локальных минимумов. Чтобы убедиться в том, что найден глобальный минимум, надо повторять процесс нахождения локальных минимумов несколько раз, меняя исходную точку поиска. Алгоритм решения задачи (2.36) очень близок к алгоритму, описанному в § 2.3. Используется метод штрафных функций для перехода от экстремальной задачи с ограничениями (2.36) к последовательности задач для  $R_m \rightarrow 0$  о безусловном экстремуме функции:

$$\Phi(\mathbf{d}, R_m) = \sum_{i=1}^N \lambda_i / d_i^2 + \frac{1}{R_m} \left\{ \sum_{i=1}^N [\min(0, (d_{i0} - d_i))]^2 + \sum_{j=1}^K [\min(0, (H_j^2 - \mathbf{z}_j^T \mathbf{D}(N+L) \mathbf{z}_j))]^2 \right\}. \quad (2.37)$$

Методы безусловной минимизации при решении задачи. В настоящее время появилось большое количество литературы, посвященной численным методам оптимизации [79—82], где подробно описаны и охарактеризованы практически все известные методы нелинейного программирования. Имеется также большое количество пакетов стандартных программ, реализующих эти методы.

Поэтому авторы сочли возможным ограничиться в данной книге кратким описанием самой простой модификации метода сопряженных направлений—градиентов в § 2.3. Укажем здесь, что для решения задачи были испробованы прямые методы поиска, использующие значение только минимизируемой функции, градиентные методы, различные модификации метода сопряженных направлений—градиентов и методы второго порядка, типа методов Ньютона.

Из методов одномерного поиска использовались методы квадратичной аппроксимации, золотого сечения и смешанный метод, когда вначале производился поиск по методу квадратичной аппроксимации, а затем (если поиск оказывался неудачным, т. е. функция в конечной точке оказывалась больше, чем в исходной) включался блок поиска по методу золотого сечения.

Наиболее эффективной оказалась модификация метода сопряженных градиентов—алгоритм Поллака—Рибьера.

Метод сопряженных градиентов оказывается эффективным при решении данной задачи, так как при расчете градиента сразу после вычисления функции можно воспользоваться значениями обратных матриц, которые были получены при расчете функции

и хранятся в памяти ЭВМ и которые без изменения используются при вычислении градиента. В результате на вычисление градиента затрачивается незначительное машинное время по сравнению с временем, затрачиваемым на вычисление функции. Представление об этом дает приводимая ниже формула для градиента от функции  $\delta^2(\mathbf{d})$ , входящей в ограничение (2.36б):

$$\begin{aligned} [\nabla \delta^2(\mathbf{d})]_i &= \mathbf{Z}' [\nabla_i \mathbf{D}(N)] \mathbf{Z} - 2\mathbf{Z}' [\nabla_i \mathbf{D}(N)] \times \\ &+ \mathbf{F}(\mathbf{V} + \mathbf{F}\mathbf{D}(N)\mathbf{F}')^{-1} \mathbf{F}'\mathbf{D}(N)\mathbf{Z} + \mathbf{Z}'\mathbf{D}(N)\mathbf{F}(\mathbf{V} + \mathbf{F}\mathbf{D}(N)\mathbf{F}')^{-1} \times \\ &\times \mathbf{F}[\nabla_i \mathbf{D}(N)]\mathbf{F}'(\mathbf{V} + \mathbf{F}\mathbf{D}(N)\mathbf{F}')^{-1} \mathbf{F}'\mathbf{D}(N)\mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $[\nabla_i \mathbf{D}(N)]$  — матрица, каждый элемент которой есть производная от элемента матрицы  $\mathbf{D}(N)$  по  $d_i$ .

Следует отметить, что при  $\Delta_j \rightarrow \infty$  ( $j=1, \dots, L$ ), т. е. когда экспериментальные погрешности интегральных экспериментов велики, задача (2.36) переходит в задачу (2.7). Физически это означает, что интегральные эксперименты, проведенные с плохой точностью, не дают никакого ослабления на требуемые точности ядерных данных. Поскольку для задачи (2.7) в некоторых случаях имеется точное решение, мы имеем возможность проверить правильность наших алгоритмов и программ.

В заключение следует отметить, что при разных исходных точках поиска процесс минимизации всегда приводил к одному и тому же решению. Это является указанием на единственность минимума задачи (2.36). Однако доказать это авторам не удалось.

Если допустить единственность минимума, то наиболее удобной исходной точкой является решение соответствующей задачи без интегральных экспериментов. Время, необходимое на поиск решения, исходя из этой точки, в среднем в 2—3 раза меньше времени, необходимого на поиск из произвольной точки (при одних и тех же методах безусловной минимизации).

## Глава 3

# НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ПРОБЛЕМЕ ЯДЕРНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РЕАКТОРОВ НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ

### § 3.1. Общие сведения

В данной главе очень коротко рассмотрены практические результаты применения изложенных методов в проблеме ядерных данных для реакторов на быстрых нейтронах. Эти результаты касаются в основном двух важных аспектов этой проблемы — определения потребностей в ядерных данных для расчета реакторов на быстрых нейтронах и выработки оптимизированной системы реакторных констант на основе совокупного рассмотрения микроскопических и интегральных измерений. Приводимые ниже результаты изложены в работах [25, 26, 56, 57].

Определению необходимой точности ядерных данных различных нуклидов уделяется большое внимание как в СССР, так и в различных странах, занимающихся разработкой энергетических реакторов. Международное агентство по атомной энергии (МАГАТЭ) ежегодно выпускает список WRENDA, в котором собраны запросы всех стран на ядерные данные [83]. Большое внимание к этому вопросу естественно, так как любая деятельность должна начинаться с обоснования ее полезности и с постановки цели. Список элементов и нуклидов, для которых нужно знание нейтронных данных, определяется просто по составу реакторов, расчеты которых необходимо обеспечить.

Вопрос о необходимой точности ядерных данных требует количественного рассмотрения. Дело в том, что все нужные величины уже измерены и вопрос о необходимости новых измерений решается, исходя из того, достигнута ли в прежних измерениях требуемая точность или нет. К вопросу же определения требуемой точности количественный подход необходим потому, что, превышая требования к точности в два раза, мы в четыре раза больше израсходуем денег на соответствующие эксперименты.

Методы решения задачи определения требуемых точностей развиты в § 2.3 и 2.5. В § 3.2 приведены результаты расчетов требуемых точностей ядерных данных с учетом и без учета информации по интегральным экспериментам. Рассчитанные потребности составили основу списка потребностей в ядерных данных СССР, вошедших в WRENDA—75 [83], с приоритетами 1 (с учетом интегральных экспериментов) и 2 (без учета интегральных экспериментов).

Практическим результатам по получению оптимизированной системы констант посвящен § 3.3. В нем описана процедура получения оптимизированной системы констант ОСКАР—76. Осно-

вой для этой системы явилась машинная библиотека оцененных интегральных экспериментов, в состав которой вошли измерения на советских сборках БФС и на ряде зарубежных сборок, информация по которым получена в результате международного сотрудничества и обмена в области ядерных данных. В качестве исходной системы констант для последующей оптимизации авторы использовали сечения захвата и деления  $^{235}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$ ,  $^{238}\text{U}$  из английской версии оцененных ядерных данных UKNDL [84], имеющейся в виде файлов данных на магнитных лентах. Эта версия также получена в результате международного обмена. Сечения захвата конструкционных материалов и Na были взяты из системы БНАБ-70.

При решении задачи использовались методы, развитые в § 2.3. Все расчеты выполнялись с помощью комплекса программ по проблеме ядерных данных [53], который состоит из нескольких частей. Реакторная часть включает в себя программы решения уравнений для потока и ценности нейтронов и расчет различных функционалов. Эта часть целиком состоит из созданного С. М. Зарицким комплекса ТВК [65]. Вторую часть составляют программы расчета коэффициентов чувствительности, написанные авторами, которые формируют библиотеку коэффициентов теории возмущений на магнитных лентах. Эта библиотека используется третьей частью комплекса, основу которой составляет несколько модифицированная и расширенная система СОПОТ [85] для решения всех перечисленных в гл. 2 задач.

### § 3.2. Потребности в ядерных данных для реакторов на быстрых нейтронах

Требование к точности расчета реакторных характеристик. Перечислим здесь кратко, предсказания каких параметров реакторов на быстрых нейтронах и с какой точностью должны быть обеспечены нейтронными расчетами и из каких соображений следуют эти точности.

1) Расчет критической массы или эффективного коэффициента размножения. В работе [86] обосновывается требование на точность расчета  $k_{\text{эф}} \pm 1\%$ , исходя из возможности без переделки конструкции реактора скомпенсировать соответствующую ошибку. С этой оценкой согласны авторы работы [24] на основе примерно тех же соображений. Но, кроме того, они отмечают, что дальнейшее уменьшение требуемой погрешности за счет ядерных данных не приведет к заметному уменьшению общей погрешности вследствие погрешностей в составе реакторов из-за допусков в обогащении топлива, размерах труб и т. д.

2) Теплофизические расчеты предельной мощности, снимаемой с реактора, требуют знания коэффициента неравномерности — отношения максимального тепловыделения к среднему. В работе [20] считается, что из экономических соображений следует потребовать знания этой величины с погрешностью  $\pm 1\%$ .

3) Для безопасной эксплуатации реактора нужно обеспечить расчеты мощностного и температурного коэффициентов реактивности с погрешностью 20%.

4) Объемы добычи урана, так же как и объемы переработки топлива, необходимые для обеспечения развивающейся энергетики, основанной на реакторах на быстрых нейтронах, определяются задаваемым темпом развития энергетики и временем удвоения для реакторов с расширенным воспроизводством. Время удвоения  $T_2$  обратно пропорционально коэффициенту воспроизводства без единицы. В ряде работ [23, 24] на погрешность коэффициента воспроизводства налагается требование  $\pm 2\%$ , что, грубо говоря, соответствует (в совокупности с пунктом 1) погрешности  $\pm 10\%$  во времени удвоения.

Требуемые точности ядерных данных без учета интегральных экспериментов. Авторы данной работы в момент проведения практических расчетов имели в своем распоряжении коэффициенты теории возмущений только для  $k_{эф}$  и КВ. Поэтому требования к точности ядерных данных формировались исходя из шести ограничений — обеспечения погрешности 1 и 2% в расчете  $k_{эф}$  и КВ реакторов на окисном плутониевом топливе с натриевым теплоносителем с объемом активной зоны 5 и 15 м<sup>3</sup> и погрешности 1 и 2% в расчете  $k_{эф}$  и КВ реактора с объемом зоны 5 м<sup>3</sup>, имеющего за экраном подпор из стали и Na. Ядерные концентрации этих реакторов приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

**Ядерные концентрации (ядер  $\times 10^{-24}$  см<sup>-3</sup>) используемых моделей реакторов-размножителей на быстрых нейтронах с различным объемом активной зоны**

Компонент состава реактора	$V_{a.z}=5$ м <sup>3</sup>	$V_{a.z}=10$ м <sup>3</sup>	$V_{a.z}=5$ м <sup>3*</sup>
Активная зона			
<sup>239</sup> Pu	0,000823	0,000720	0,000823
<sup>240</sup> Pu	0,000405	0,000350	0,000405
<sup>241</sup> Pu	0,000081	0,000070	0,000081
<sup>242</sup> Pu	0,000041	0,000035	0,000041
<sup>238</sup> U	0,005750	0,005930	0,00575
<sup>16</sup> O	0,014400	0,014400	0,01440
<sup>23</sup> Na	0,008800	0,0088	0,0088
Сталь	0,017000	0,0170	0,0170
Осколки	0,000580	0,00058	0,00058
Экран			
<sup>238</sup> U	0,0122	0,0122	0,0122
<sup>16</sup> O	0,0127	0,0127	0,0127
<sup>23</sup> Na	0,0055	0,0055	0,0055
Сталь	0,0244	0,0244	0,0244

\* В реакторе за экраном находится подпор толщиной 50 см следующего состава: сталь — 0,0420; <sup>23</sup>Na — 0,0130.

Таким образом, решалась задача (2.7), в которой число ограничений типа (2.7б) равнялось шести. Физический смысл ограничений разъяснен выше. Число переменных  $N$  в этой задаче равнялось 96. Смысл этих переменных — точности различных ядерно-физических данных, входящих в расчет ядерного реактора (сечения захвата, деления, неупругого рассеяния, средние числа нейтронов на деление и др.). Список величин, требования к которым формулируются, содержатся в табл. 3.2. В этой же таблице в графе «дост.» приведены значения верхних пределов  $d_{10}$  ограничений типа в задаче (2.7в).

Результатом решения задачи является совокупность точностей ядерных данных, обеспечивающих требуемые точности расчета перечисленных функционалов и стоимость достижения которых минимальна. Оптимальные погрешности этих данных приведены в табл. 3.2 в графе «треб.».

Решение задачи проводилось в рамках модели корреляций ошибок ядерных данных, описанных в § 2.2.

Как можно видеть из табл. 3.2, многие компоненты вектора решения — оптимальной точки для задачи (2.7) в описанном случае — лежат на границе допустимой области, определяемой соотношением типа (2.7в). Из смысла ограничений типа (2.7в) следует, что дальнейшие измерения этих величин больше не требуются и

Таблица 3.2

Достиженные (дост.) и требуемые (треб.) погрешности микроконстант без учета интегральных экспериментов для различных интервалов энергий, МэВ

Тип константы	Дост.	Треб.	Дост.	Треб.	Дост.	Треб.
	0,8 < E < 10,5		0,1 < E < 0,8		E < 0,1	
$^{239}\text{Pu}$ cap	50	50	15	9,5	10	3,7
$^{239}\text{Pu}$ fis	6	2,6	4	1,3	5	1,2
$^{239}\text{Pu}$ v <sub>fis</sub>	3	1,2	1	0,5	2	0,5
$^{238}\text{U}$ cap	20	9,3	10	2,7	15	2,1
$^{238}\text{U}$ fis	5	1,8	—	—	—	—
$^{238}\text{U}$ v <sub>fis</sub>	3	1	—	—	—	—
$^{240}\text{Pu}$ cap	50	46	30	14	20	7
$^{240}\text{Pu}$ fis	7	3,5	7	5,3	—	—
$^{240}\text{Pu}$ v <sub>fis</sub>	3	2	3	3	—	—
$^{241}\text{Pu}$ cap	50	50	30	30	20	18
$^{241}\text{Pu}$ fis	10	9,7	10	5	15	3,7
$^{241}\text{Pu}$ v <sub>fis</sub>	4	4	3	2,3	2	1,2
$^{242}\text{Pu}$ cap	50	50	30	30	20	20
Сталь cap	50	20	30	15	30	11
Осколки cap	50	48	30	14	30	7
$^{23}\text{Na}$ cap	50	50	50	50	50	44
$^{238}\text{U}$ tr	20	10	20	8	20	10,3
$^{16}\text{O}$ tot	10	9	10	6	10	10
Стандарт	6	1,4	3	1,1	4	2

Требуемая погрешность  $v^{252}\text{Cf}$  равна 0,3%

имеющегося уровня точности их определения достаточно для расчета реакторов.

Нужно заметить, что достигнутые точности микроконстант, приведенные в столбце «дост.», обеспечивают погрешность расчета  $k_{эф}$  и КВ, примерно одинаковую для всех реакторов и равную 4 и 7% соответственно.

Приведенные в табл. 3.2 требования к точности составили основу советского списка потребностей в ядерных данных, представленного в международном списке WRENDА—75 с приоритетом 2 (без учета интегральных экспериментов).

Требования к точности ядерных данных с учетом интегральных экспериментов. Требования, представленные в табл. 3.2, могут быть существенно ослаблены, если принять во внимание информацию, содержащуюся в интегральных экспериментах на критических сборках. Такая работа была проделана с набором из 48 интегральных экспериментов, применительно к тем же шести реакторным функционалам, которые были использованы для определения потребностей и в первом подразделе данного параграфа. Была решена задача (2.36) при условии, что имеется информация по 48 оцененным интегральным экспериментам на критических сборках. Все остальные условия и ограничения были сохранены такими же, как и при решении задачи (2.7) в первом подразделе параграфа. Результаты решения этой задачи приведены в табл. 3.3. Обозначение и структура этой

Таблица 3.3

Достигнутые (дост.) и требуемые (треб.) погрешности микроконстант с учетом интегральных экспериментов для различных интервалов энергий, МэВ

Тип константы	Дост.	Треб.	Дост.	Треб.	Дост.	Треб.
	0,8 < E < 10,5		0,1 < E < 0,8		E < 0,1	
$^{239}\text{Pu}$ cap	50	50	15	9,6	10	4,5
$^{239}\text{Pu}$ fis	6	4	4	3	5	2,8
$^{239}\text{Pu}$ $\nu_{fis}$	3	2,1	1	1	2	1,2
$^{238}\text{U}$ cap	20	9,6	10	4	15	4,6
$^{238}\text{U}$ fis	5	2,8	—	—	—	—
$^{238}\text{U}$ $\nu_{fis}$	3	2,1	—	—	—	—
$^{240}\text{Pu}$ cap	50	46	30	14	20	7
$^{240}\text{Pu}$ fis	7	4	7	5,4	—	—
$^{240}\text{Pu}$ $\nu_{fis}$	3	2,3	3	3	—	—
$^{241}\text{Pu}$ cap	50	50	30	30	20	18
$^{241}\text{Pu}$ fis	10	9,8	10	5,3	15	5,0
$^{241}\text{Pu}$ $\nu_{fis}$	4	4	3	2,6	2	1,8
$^{242}\text{Pu}$ cap	50	50	30	30	20	20
Сталь cap	50	20	30	15	30	11
Осколки cap	50	48	30	15	30	8
$^{23}\text{Na}$ cap	50	50	50	50	50	44
$^{238}\text{U}$ tr	20	11	20	10	20	13
$^{18}\text{O}$ tot	10	10	10	7	10	10
Стандарт	6	2,9	3	2,1	4	2,5

Требуемая погрешность  $\nu^{252}\text{Cf}$  равна 0,3%

таблицы сохранены такими же, как и в табл. 3.2. Как можно видеть из сравнения этих двух таблиц, требование к точности измерения целого ряда существенно ослабляется.

Приведенные в табл. 3.3 требуемые погрешности ядерных данных были представлены в WRENDA—75 в качестве запросов СССР с приоритетом 1 (требования с учетом интегральных экспериментов).

Какой выигрыш получается в задачах определения потребностей в точности ядерных данных, если использовать предлагаемые в гл. 2 методы оптимального планирования в совокупности с развитой в гл. 1 теорией возмущений? Его можно оценить, сравнив рассмотренные примеры между собой и с различными интуитивными стратегиями в определении требуемых точностей данных. Таких стратегий авторам известно две. Одна из них, предложенная в работе [22], состоит в том, что требуемые точности определяются из условия равного вклада дисперсии разных констант в дисперсию реакторного параметра. При этом учитывается только один реакторный параметр. Требуемые точности в этой стратегии определяются из условия

$$S_{i_i}^2 d_{i_i, \text{треб}}^2 = S_{i_k}^2 d_{i_k, \text{треб}}^2 = H^2/N.$$

Если целевую функцию задачи (2.7) отнормировать к единице при  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0$ , т. е. потребовать выполнения при достигнутых точностях соотношения  $\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i / d_{i_0}^2 = 1$ , то затраты на получение требуемых точностей данных без учета интегральных экспериментов по оптимальной стратегии, описанной в § 2.3, оказываются равными 4,5, т. е.  $\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i / d_{i, \text{треб, опт}}^2 \simeq 4,5$ .

Действуя же по интуитивной стратегии, описанной выше, имеем  $\alpha \sum_{i=1}^N \lambda_i / d_{i, \text{треб, инт}}^2 \simeq 16$ , т. е. выигрыш примерно в 3,5 раза.

Вторая интуитивная стратегия заключается в том, что дисперсия каждой константы уменьшается в  $H^2_{\text{дост}}/H^2_{\text{треб}}$  раз. При таком изменении величина стоимости увеличивается именно в такое же количество раз. Для рассмотренного примера этот множитель колеблется в пределах  $\sim 10-16$ , т. е.  $H^2_{\text{дост}}/H^2_{\text{треб}} \approx 10-16$  в зависимости от типа реакторного функционала. Таким образом, по сравнению с этой стратегией имеется выигрыш в 2,5—3,5 раза.

При использовании информации по интегральным экспериментам на критических сборках получается набор требуемых оптимальных точностей данных, стоимость получения которых в тех же единицах, что и предыдущие, составляет 2,3, т. е.  $\alpha \sum \lambda_i / d_{i, \text{треб, опт, интегр}}^2 = 2,3$ .

Таким образом, учет 48 интегральных экспериментов позволяет сократить затраты на микроизмерения почти вдвое. В дальнейшем набор оцененных интегральных экспериментов был расширен до

82. При этом использованный алгоритм практически снял требования на микроданные, за исключением таких величин, как сечения осколков деления, информация о которых не содержится в использованных интегральных экспериментах.

Однако сделать вывод на этом основании о ненужности дальнейших микроскопических измерений нельзя. Надо произвести еще проверку на отсутствие систематических погрешностей как в интегральных, так и в микроскопических экспериментах. Выявить систематические погрешности можно, изучая смещения при оптимизации констант. Если, например, учет интегральных экспериментов ведет к существенному уменьшению сечения захвата  $^{238}\text{U}$  и увеличению сечения деления  $^{238}\text{U}$ , то это должно стать причиной для осуществления с помощью новых, более совершенных методик соответствующих микроскопических и интегральных экспериментов.

### § 3.3. Оптимизация системы констант для расчета реакторов

Опишем здесь коротко основные результаты, полученные авторами совместно с Ю. А. Казанским и В. А. Дулиным, по оптимизации системы констант для расчета реакторов на быстрых нейтронах с помощью теории возмущений, развитой в гл. 1, и методов теории планирования, описанных в гл. 2. Эти результаты получены с 1973 по 1977 гг. и описаны в ряде работ авторов, Ю. А. Казанского и В. А. Дулина [27, 56—58], а также в работах [54, 55], выполненных авторами совместно с В. Е. Колесовым, А. С. Кривцовым, В. Н. Манохиным.

Оцененные интегральные эксперименты. Основой для оптимизации системы констант является библиотека оцененных интегральных экспериментов. Эта библиотека включает в себя оцененный результат измерения интегрального функционала, соответствующий какой-либо модели реактора, дисперсию этого результата и коэффициенты теории возмущений (коэффициенты чувствительности). Как правило, авторы в своих работах использовали одномерную сферическую модель реактора и приводили экспериментальные результаты в соответствие с такой моделью. Каждый интегральный эксперимент перед использованием его в задаче оптимизации проходил, таким образом, процедуру оценки—приведение к полной адекватности реального эксперимента и его расчетной модели. Эта процедура состояла из введения всевозможных поправок в экспериментальное значение — поправки, связанные с геометрией, гетерогенностью критической сборки, способа подготовки констант для расчета сборки, конечного размера образца и др. Подробно процедура оценки экспериментов описана в работах В. А. Дулина и др. [62, 74, 75]. В процессе оценки также определяется дисперсия оцененного экспериментального значения, которая может отличаться от первоначальной дисперсии эксперимента в большую сторону за счет различных приближений, использованных при введении поправок.

Коэффициенты чувствительности рассчитывались авторами с помощью разработанного С. М. Зарицким комплекса программ ТВК и созданного на его базе комплекса программ по проблеме ядерных данных [53]. Прямой расчет реакторных функционалов проводился авторами по системе 9M-26 [66] и M-26 [87].

В итоге работы по созданию библиотеки оцененных интегральных экспериментов к 1977 г. в распоряжении авторов имелась информация по 82 таким экспериментам. Часть этих экспериментов (48) выполнена на советских критических сборках БФС, а остальные на зарубежных сборках ZPR, ZEBRA, SNEAK. Информация по зарубежным сборкам получена в основном из работы [88].

Исходная система констант. Важным при решении задачи оптимизации системы констант является выбор исходной системы, так как начальная точка в такой постановке задачи, как (2.17), в силу наличия первого члена в функционале в значительной степени определяет решение задачи. Авторы при создании оптимизированной системы констант в качестве исходной брали «смешанную» систему, в которой часть данных была получена из английской библиотеки UKNDL [84], а часть соответствовала системе БНАБ-70. Как каждая из систем (БНАБ-70 и UKNDL) в отдельности, так и смешанная система, описывая хорошо отдельные интегральные эксперименты, плохо описывала весь набор экспериментов в целом.

Оптимизация системы констант. Решение задачи оптимизации применительно к ядерным данным имеет целый ряд специфических особенностей, связанных с ковариационной матрицей набора интегральных экспериментов, ковариационной матрицей микроданных, анализом различных источников погрешностей, способов компенсации при расчете коэффициентов чувствительности и др. Эти особенности вряд ли имеют ценность в методическом плане и поэтому здесь подробно рассматриваться не будут. Отметим только, что решалась задача в постановке (2.17) с использованием описанного выше набора интегральных экспериментов. Корреляции ошибок интегральных экспериментов при решении не учитывались, поэтому использовался алгоритм (2.27—2.27а). Модель корреляций ошибок микроданных, смысл погрешностей микроданных и смещений величин сечений такие же, как и в примерах по определению потребностей. Смещения исходных микроскопических констант в результате процесса оптимизации с учетом 48 и 82 интегральных экспериментов приведены в работе [58].

О качестве получившейся в результате оптимизированной системы констант (в сравнении с исходной системой констант) можно судить по результатам расчета по этим системам оцененных интегральных экспериментов, приведенных в табл. 3.4. Для каждого из функционалов — отношений сечений деления  $^{239}\text{Pu}$  (F9), деления  $^{238}\text{U}$  (F8), захвата  $^{238}\text{U}$  (C8) к сечению деления  $^{235}\text{U}$  (F5)

Расхождения между рассчитанными (Р) по системе ОСКАР-76 и экспериментальными (Э) значениями различных интегральных характеристик, %  $\left( \frac{\text{Э}-\text{Р}}{\text{Э}} \cdot 100\% \right)$

Критическая сборка	Функционал							
	F9/F5	F8/F5	C8/F9	C8/F5	P9/P5	P10/P5		
БФС-35	-3 (1,5)	3 —	2 (-2,5)	— —	— —	— —		
БФС-30	-3 (1,5)	— —	1 (-2,5)	-2 (-1)	-3,5 (2)	12 (28)		
БФС-28	-0,5 (4)	— —	0 (-3,5)	-0,5 (0,5)	0 —	4 (18)		
БФС-23	0 (4)	1 (10)	— —	— —	-1,5 (4)	— —		
SNEAK-7B	-1 (5)	-5 (6)	-2 (-10)	-3 (-5)	-1 (3,5)	8 (25)		
БФС-33	-1,5 (5)	-13 (-5)	-1 (-9)	-0,5 (-3,5)	-1,5 (5)	12 (27)		
ZPR-6-6A	— —	0,5 (7)	— —	1 (-3,5)	0,5 (3)	3 (22)		
БФС-31	-2,5 (4,5)	-8 (3,5)	0,5 (-12)	-2 (-7,5)	-1,5 (3,5)	5 (22)		
SNEAK-7A	2 (8,5)	1 (11)	1 (-11)	2,5 (-2)	-1 (4,5)	9 (22)		
ZPR-6-7	1,5 (9)	-1 (11)	-1,5 (-15)	0 (-6)	-2 (4,5)	— —		
БФС-27	2 (9)	-9 (-8)	— —	— —	-2 (3,5)	0 (14)		
БФС-28	-1,5 (8)	0 (7)	— —	— —	-2 (1)	0 (13)		

и отношений реактивностей  $^{239}\text{Pu}$  ( $P9$ ) и  $^{10}\text{B}$  ( $P10$ ) к реактивности  $^{235}\text{U}$  ( $P5$ ) — приведены в основных графах относительные отклонения между экспериментом Э и расчетом Р (в %) для оптимизированной системы констант, а в скобках — для исходной системы констант.

Если, кроме того, ввести критерий качества описания системой констант  $l$  набора из  $L$  интегральных экспериментов

$$\mu_l^2 = \frac{1}{L} \sum_{I=1}^L \left[ \frac{\Delta_I - P_I^l}{\Delta_I} \frac{100}{\Delta_I} \right]^2,$$

где  $\Delta_I$  — точность оцененного интегрального значения  $I$ , в %, то окажется, что  $\mu_{\text{исх}}^2 \approx 19$ ;  $\mu_{\text{опт}}^2 \approx 1$ . Смысл величины  $\mu_l$  в том, что это среднее по набору из  $L$  экспериментов число стандартных отклонений между экспериментом и расчетом для системы констант  $l$ .

Смещение и дисперсия некоторых реакторных параметров. Наличие оптимизированной системы констант позволило получить смещение основных реакторных параметров относительно исходных значений и получить дисперсию предсказанных результатов. Оказалось, что для вариантов 1 и 3 реакторов из табл. 3.1 смещение расчетной величины  $k_{\text{эф}}$  по сравнению с величиной, даваемой системой БНАБ-70, равно 1,4%. При этом погрешность предсказанного значения  $k_{\text{эф}}$ , даваемая оптимизированной системой констант,  $\pm 1,3\%$  по сравнению с погрешностью  $\pm 4\%$ , даваемой системой БНАБ-70. Что касается расчетных значений коэффициента воспроизводства КВ этих реакторов, то оно уменьшилось примерно на 7% по сравнению с расчетным значением, даваемым системой БНАБ-70 и стало  $\approx 1.31$ . При этом погрешность расчетного значения оказывается приблизительно равной  $\pm 3\%$ . Такая значительная величина дисперсии связана с тем, что имеется ряд величин, например сечения захвата осколков, информация о которых не содержалась в использованных интегральных экспериментах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Moorhead T.** The effect of cross in cross-sections data on calculation for a large dilute fast reactor.—Proc. IAEA Seminar on Physics of Fast and Intermediate Reactor. Vienna, 1961, p. 111—145.
2. **Analysis of integral data for few group parameter evaluation of fast reactor.**—В кн.: Труды Третьей международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1964. Т. 2. Многоязычное издание ООН, Нью-Йорк, 1965, с. 388—395. Auth.: G. Cecchini, U. Farinelly, A. Gandini, M. Salvatore.
3. **Humi M., Wagschal J., Yeivin Y.** Multigroup constant from integral data. Ibid., p/668, p. 398—402.
4. **Gandini A.** Study of the sensitivity of calculation for fast reactor field with Pu-239, U-238 and 233-U-Th to uncertainties in nuclear data. ANL-6608(62).
5. **Усачев Л. Н.** Теория возмущений для коэффициента воспроизводства и других отношений чисел различных процессов в реакторе.—«Атомная энергия», 1963, т. 15, вып. 6, с. 472—481.
6. **Усачев Л. Н., Зарицкий С. М.** Вычисление вариаций времени жизни нейтронов, реактивности, вносимой образцом, и эффективной доли запаздывающих нейтронов при помощи теории возмущений.—«Бюлл. информ. центра по ядерным данным». 1965, вып. 2. с. 242—246.
7. **Gandini A.** A Generalized Perturbation Method for Bilinear Functional.—«J. Nucl. Energy», 1967, v. 21, p. 755.
8. **Усачев Л. Н.** Уравнение для ценности нейтронов, кинетика реактора и теория возмущений.—В кн.: Материалы Первой международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева, 1955. Т. 5. М.—Л., Госэнергоиздат, 1958, с. 598—606.
9. **Soodak G.** Pile Perturbation Theory.—«Phys. Rev.», v. 70, N 1, p. 115A.
10. **Кадошцев Б. Б.** О функции влияния в теории переноса лучистой энергии.—«Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 3.
11. **Марчук Г. И., Орлов В. В.** К теории сопряженных функций.—В кн.: Нейтронная физика. М., Атомиздат, 1961, с. 83.
- 11а. **Льюинс Д.** Ценность. Сопряженная функция. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1963.
12. **Орлов В. В.** О функциях ценности в теории возмущений для расчетов характеристик реакторов.—В кн.: Вопросы физики ядерных реакторов. Труды ФЭИ. Обнинск, 1968, вып. 1, с. 38.
13. **Greenspan E.** A generalized perturbation theory and variational principle for multiple ratios of linear and bilinear functionals.—«Nucl. Sci. Eng.», 1975, v. 56, p. 107.
14. **Storrer F.** Generalized perturbation theory.—In: Nuclear Data and Reactor Physics. Proc. of International Summer school, 1974, Bucharest; Romania, p. 655—675.
15. **Stacey W. M.** Variational estimates of reactivity worth and reaction rate ratios in critical nuclear reactor.—«Nucl. Sci. Eng.», 1972, v. 48, p. 444—458.
16. **Greenspan E.** Variational versus generalized perturbation theories — are they different? — «Nucl. Sci. Eng.», 1975, v. 57, p. 250.
17. **Gandini A.** Comments on variational theory and generalized perturbation methods.—«Nucl. Sci. Eng.», 1975, v. 57, p. 248.
18. **Stacey W. M.** Response to «comments of variational theory and generalized perturbation methods».—«Nucl. Sci. Eng.», 1975, v. 57, p. 249.
19. **Некоторые новые аспекты применения сопряженных функций в проектировании реакторов и защиты.**—В кн.: Труды Третьей международной конференции по использованию атомной энергии в мирных целях. Женева, 1964, т. 2. Многоязычное издание ООН, Нью-Йорк, 1965, с. 359. Авт.: А. А. Абаган, Г. И. Дружинина, С. М. Зарицкий, В. В. Орлов, В. Я. Пупко, А. П. Суворов, Л. Н. Усачев, Р. П. Федоренко.
- 19а. **Стумбур Э. А.** Применение теории возмущений в физике ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1976.

20. **Greebler P., Hutchins B. A.** User requirements for cross-section in energy range from 100 eV — 100 keV. — In: Neutron Cross-Section and Technology. Washington, 1966. Proc. conf. V. 1, AEC, 1966, p. 357—380.
21. **Greebler P., Hutchins B. A., Cowan C. L.** Implication of nuclear data uncertainties to reactor design.— In: Nuclear Data for Reactors. Helsinki, 1970. Proc. conf. v. 1, Vienna, IAEA, 1970, p. 17—31.
22. **Зарицкий С. М., Троянов М. Ф.** Об оценке необходимой точности констант для расчетов энергетических быстрых реакторов.— В кн.: Труды конференции по физике быстрых реакторов. Лондон, BNES, 1969, с. 261.
23. **Зарицкий С. М., Троянов М. Ф.** Зависимость расчетных значений характеристик энергетических быстрых реакторов от изменений констант.— В кн.: Труды советско-бельгийско-голландского симпозиума по некоторым проблемам быстрых реакторов. Т. 1. М., ЦНИИАтоминформ, 1970, Доклад Д-20.
24. **Зарицкий С. М., Николаев М. Н., Троянов М. Ф.** Потребности в ядерных данных для расчета быстрых реакторов.— В кн.: Нейтронная физика. Т. 1. Киев, «Наукова думка», 1973, с. 53.
25. **Usachev L. N., Bobkov Yu. G.** Planning of an optimum set of microscopic experiment and evaluation. INDC (CCP)-19/U, Vienna, IAEA, 1972.
26. **Бобков Ю. Г.** Совокупное использование результатов микроскопических измерений и интегральных опытов в проблеме ядерных данных для реакторов. Автореф. дис. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук. Димитровград, НИИАР, 1976, с. 22.
27. **Бобков Ю. Г., Пятницкая Л. Т., Усачев Л. Н.** Планирование экспериментов и оценок по нейтронным данным для реакторов. Препринт ФЭИ-527. Обнинск, 1974.
28. **Ballance B. M. O. e. a.** The optimization of neutron cross-section data-adjustment to give agreement with spectrum measurements.— In: The physics of fast reactor operation and design. London, 1968. Proc. Conf. BNES, 1969, p. 149.
29. **Hemmett P. C. E., Pendlbury E. D.** The optimization of neutron cross-section. ANL-7320, 1966, p. 88—106.
30. **Rowlands J. L., MacDaugall J. D.** The use of integral measurements.— In: The physics of fast reactor operation and design. London, 1968, Proc. Conf. BNES, 1969, p. 180—195.
31. **Pendlbury E. D.** Critical experiments and spectrum measurements on the validity of microscopic data.— In: 3-d Conf. on neutron cross-section and technology. Knoxville, 1971. Proc. conf. v. 1. AEC, p. 65—71.
32. **Campbell C. G., Rowlands J. L.** The relationship of microscopic and integral data.— In: Nuclear data for reactor. Proc. Conf. Helsinki, 1970. Vienna, IAEA, 1970, p. 391—426.
33. **The production and performance of the adjusted cross-section set FGL-5.**— In: International symposium on physics of fast reactors. Tokyo, 1973. Proc. Symp. V. 3. Vienna, IAEA, 1973, p. 1133—1152. Auth.: J. L. Rowlands, C. J. Dean, J. D. MacDaugall, R. W. Smith.
34. **Barre J. Y., Ravier J.** Imprecisions des paramètres caractéristiques d'un réacteur rapide.— In: Fast reactor physics. Karlsruhe, 1967. Proc. Conf. V. 1. Vienna, IAEA, 1968, p. 205—228.
35. **Lesson drawn from integral experiments on a set of multigroup cross-sections.**— In: The physics of fast reactor operation and design. London, 1969. Proc. conf. BNES, 1969, p. 165. Auth.: J. Y. Barre, M. Heindler, T. Lacapelle, J. Ravier.
36. **Fast reactor physics and clean core.**— In: International symposium on physics of fast reactor. Tokyo, 1973. Proc. symp. V. 3. Vienna, IAEA, 1973, p. 396—430. Auth.: J. Y. Barre, J. Bouchard, P. Caumette e. a.
37. **Comparison between experimental and theoretical data.** ANL-7320, 1966, p. 107—115. Auth. G. Cecchini, A. Gandini, Dal Bono, B. Faleshini.
38. **Farinelly U.** Correction of fast neutron cross-sections by integral experiments. RT/FI (65) 30, CNEN, Roma, 1965.
39. **Gandini A.** Nuclear data and integral measurement correlations for fast reactors. Part 1: Statistical Formulation. RT/FI (73), CNEN, Roma, 1973.
40. **Gandini A., Petilli M., Salvatore M.** Nuclear data and integral measure-

- ment.— In: International symposium on physics of fast reactors. Tokyo, 1973. Proc. symp. V. 3. Vienna, IAEA, 1973, p. 612—628.
41. **Mitani H., Kuroi H.** On the correlation between group cross-sections to be adjusted by use of integral data.— *J. Nucl. Sci. Technol.*, 1970, 7(1), p. 56.
  42. **Mitani H., Kuroi H.** Adjustment to cross-section data to fit integral experiments by least squares methods.— *J. Nucl. Sci. Technol.*, 1972, 9 (11), p. 642.
  43. **Mitani H., Kuroi H.** Adjustment of group cross-sections by means of integral data.— *J. Nucl. Sci. Technol.*, 1975, 12(11), p. 663.
  44. **Haggbom H.** Adjustment of neutron cross-section data by least square fit of calculated quantities to experimental results. Part 1. Theory. AE-422, AB Atomenergy, 1971.
  45. **Dragt J. B.** Statistical considerations of techniques for adjustment. RCN-122, Reactor Centrum Nederlands, 1970, p. 85.
  46. **Dragt J. B.** Methods for adjustment and errors evaluation of neutron capture cross-sections.— *Nucl. Sci. Eng.*, 1977, v. 62, p. 117—129.
  47. **Усачев Л. Н., Бобков Ю. Г.** Совокупное использование результатов микроскопических измерений и интегральных опытов в проблеме ядерных данных для реакторов.— В кн.: *Нейтронная физика. Ч. I.* Киев, «Наукова думка», 1973, с. 47.
  48. **Усачев Л. Н.** О едином определении погрешности в ядерных данных.— В кн.: *Ядерные константы. Вып. 16.* М., Атомиздат, 1975, с. 3.
  49. **Налимов В. В.** Теория эксперимента. М., «Наука», 1972.
  50. **Новые идеи планирования эксперимента.** Под ред. В. В. Налимова. М., «Наука», 1969.
  51. **Федоров В. В.** Теория оптимального эксперимента. М., «Наука», 1971.
  52. **Усачев Л. Н., Бобков Ю. Г.** Математическая теория планирования эксперимента и обобщенная теория возмущений—эффективный подход к исследованию физики реакторов.— В кн.: *Ядерные константы. Вып. 10.* М., Атомиздат, 1972, с. 5.
  53. **Бобков Ю. Г., Усачев Л. Н.** Комплекс программ по проблеме ядерных данных.— В кн.: *Ядерные константы. Вып. 16.* М., Атомиздат, 1975, с. 5.
  54. **Структура деятельности по выработке ядерных данных для реакторов и других приложений.**— В кн.: *Нейтронная физика. Ч. I.* М., ЦНИИАтоминформ, 1976, с. 64. Авт.: Л. Н. Усачев, В. Е. Колесов, В. Н. Манохин, Ю. Г. Бобков.
  55. **Сравнительный анализ групповых констант, полученных на основе библиотеки UKNDL и системы БНАБ-70.**— Там же, с. 69. Авт.: Ю. Г. Бобков, В. Е. Колесов, А. С. Кривцов, В. Н. Манохин, Н. А. Соловьев, Л. Н. Усачев.
  56. **Подгонка ядерных данных по оцененным интегральным экспериментам.**— Там же, с. 74. Авт.: Ю. Г. Бобков, В. А. Дулин, Ю. А. Казанский, Л. Н. Усачев.
  57. **Усачев Л. Н., Казанский Ю. А., Дулин В. А., Бобков Ю. Г.** Оптимизация систем констант на основе интегральных экспериментов.— В кн.: *Нейтронная физика. Ч. 4.* М., ЦНИИАтоминформ, 1977, с. 94.
  58. **Усачев Л. Н.** Интегральные эксперименты в проблеме ядерных данных для быстрых реакторов и потребности в уточнении ядерных данных.— In: *Proceedings of the VII International Symposium on the Interaction of Fast Neutrons with Nuclei.* Nov. 21—25, 1977 in Gausig (GDR) ZFK—376. Dec., 1978.
  59. **Ваньков А. А.** Некоторые важные вопросы анализа реакторно-физических данных. Препринт ФЭИ-428. Обнинск, 1973.
  60. **Ваньков А. А., Воропаев А. И., Орлов В. В.** О корреляции параметров критичности и воспроизводства.— *«Атомная энергия»*, 1975, т. 39, вып. 2, с. 111.
  61. **Ваньков А. А., Воропаев А. И.** Корректировка групповых констант по результатам экспериментов на критических сборках БФС.— *«Атомная энергия»*, 1975, т. 39, вып. 1, с. 51.
  62. **Ваньков А. А., Воропаев А. И., Юрова Л. Н.** Анализ реакторно-физического эксперимента. М., Атомиздат, 1977.
  63. **Terrell J.**— *Phys. Rev.*, 1957, v. 108, p. 783.

64. **Шихов С. Б.** Математическая теория реакторов (линейный анализ). М., Атомиздат, 1973.
65. **Зарицкий С. М.** Комплекс программ ТВК.— «Бюлл. информ. центра по ядерным данным», 1969, вып. 6, с. 116.
66. **Зизин М. Н., Ярославцева Л. И.** Комплекс программ расчета нейтронно-физических характеристик атомных реакторов.— В кн.: Труды советско-бельгийско-голландского симпозиума по некоторым вопросам физики реакторов. М., ЦНИИАтоминформ, 1970, Доклад Д-17.
67. **Алексеев П. Н., Зарицкий С. М., Шишков Л. К.** Программа многогруппового диффузионного расчета потока и ценности нейтронов и интегралов теории возмущений для двумерных моделей реакторов (Программа ПЕНАП—ДТВ).— В кн.: Ядерно-физические исследования в СССР. Вып. 23. М., ЦНИИАтоминформ, 1977, с. 30.
68. **Шаров Е. И., Зарицкий С. М.** Серия программ «Нумер».— В кн.: Ядерно-физические исследования в СССР. Вып. 23. М., ЦНИИАтоминформ, 1977, с. 32.
69. **Dal Bono.** CIAP-10 code. RT/FI(68)9, CNEN, Roma, 1968.
70. **Dal Bono.** GLOBERT-1D code. RT/FI(68)10, CNEN, Roma, 1968.
71. **Weisbin C. R., Oblow E. M., Mynatt F. R., Flanagan G. F.** The FORSS Sensitivity Analysis Code System.— «Trans. Amer. Nucl. Soc.», 1975, v. 22, p. 792.
72. **Application of FORSS sensitivity and uncertainty methodology to fast reactor benchmark analysis.** ORNL/TM-5563 (ENDF-236), 1976. Auth.: C. R. Weisbin et al.
73. **Мелентьев Л. А., Макаров А. А.** Методы исследования и оптимизации энергетического хозяйства. Новосибирск, «Наука», 1973.
74. **Дулин В. А.** Влияние гетерогенной структуры быстрых критических сборок на величину коэффициентов реактивности.— В кн.: Ядерные константы. Вып. 21. М., Атомиздат, 1976, с. 146.
75. **Дулин В. А.** Влияние группового приближения на величину коэффициентов реактивности.— Там же, с. 134.
76. **Бобков Ю. Г., Сальников Н. Л., Усачев Л. Н.** Определение оптимальных концентраций критических сборок.— В кн.: Нейтронная физика. Ч. 1. М., ЦНИИАтоминформ, 1976, с. 81.
77. **Суховицкий Е. Ш., Коньшин В. А.** Учет корреляций при определении ошибок оцененных данных.— В кн.: Нейтронная физика. Ч. 4. М., ЦНИИАтоминформ, 1977, с. 52.
78. **Худсон Д.** Статистика для физиков. Пер. с англ. М., «Мир», 1970.
79. **Зангвилл Р.** Нелинейное программирование. Пер. с англ. М., «Советское радио», 1973.
80. **Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.** Численные методы в экспериментальных задачах. М., «Наука», 1975.
81. **Полак Э.** Численные методы оптимизации. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.
82. **Химмельблау Э.** Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. М., «Мир», 1975.
83. **WRENDA—75 INDC(SEC),** Vienna, IAEA, 1975.
84. **Sowerby M. G., Patric C., Mather J.** A detail report on simultaneously evaluation of the cross-section of U-235, Pu-239 and U-238 in energy range 100 eV — 20 MeV. AERE-R 7273.
85. **Бобков Ю. Г.** Система СОПОТ.— В кн.: Ядерно-физические исследования в СССР. Вып. 15. М., ЦНИИАтоминформ, 1973, с. 61.
86. **Smith R. D.** Nuclear data requirements for fast reactor operation and design.— In: Nuclear data for reactor. Paris, 1966. Proc. Conf. V. I. Vienna, IAEA, 1967, p. 27—37.
87. **Методы и программы расчета реакторов на быстрых нейтронах.**— В кн.: Труды советско-бельгийско-голландского симпозиума по некоторым проблемам быстрых реакторов. М., ЦНИИАтоминформ, 1970, Докл. Д-3. Авт.: Ш. С. Николайшвили, В. Г. Золотухин, И. П. Маркелов, А. А. Блыскавка.
88. **Benchmark Specification.** ENDF-202, BNL-19302.