

Г. И. МАРЧУК  
В. И. ЛЕБЕДЕВ

---

Численные  
методы  
в теории  
переноса  
нейтронов

Г. И. МАРЧУК  
В. И. ЛЕБЕДЕВ

---

# Численные методы в теории переноса нейтронов

*Издание второе,  
переработанное и дополненное*



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1981

УДК 539.125.523.348 : 621.039.51.12

**Марчук Г. И., Лебедев В. И.** Численные методы в теории переноса нейтронов. — 2-изд., перераб. и доп. — М.: Атомиздат, 1981. — 456 с.

Излагаются физическая и математическая постановки задачи, методы теории групп и сведения к малогрупповым уравнениям, исследуются свойства точных решений уравнения переноса и сопряженных уравнений. Дается обзор общих итерационных методов решения уравнений, изложение и исследование различных итерационных методов, специфических для задач переноса, а также для задач на собственные значения. Значительное внимание уделяется достижениям отечественных ученых.

По сравнению с первым изданием (вышло в 1971 г.) добавлен материал, связанный с изложением многомерных разностных схем и квадратурных формул для уравнения переноса; содержится изложение итерационных методов (чебышевских, вариационных, комбинированных), добавлено приложение с обзором программ решения уравнения переноса, составленных по излагаемым в книге методам.

Для научных работников — математиков, физиков, инженеров. Может быть использована аспирантами и студентами старших курсов вузов.

Табл. 4. Ил. 19. Библиогр. 350.

## Предисловие к первому изданию

Настоящая книга представляет собой монографию по вычислительным методам в теории переноса излучения. Этому вопросу посвящено значительное число журнальных статей советских и зарубежных авторов. В ряде случаев такие исследования обобщены в виде обзорных статей и монографий. Тем не менее алгоритмические аспекты теории переноса излучения рассмотрены в литературе еще недостаточно. Современные высокопроизводительные электронно-вычислительные машины и развитие математики стимулировали разработку и применение таких вычислительных методов теории переноса, практическая реализация которых ранее считалась невозможной. Появились новые оригинальные алгоритмы, сочетающие в себе универсальность в применении к широким классам задач с возможностью оптимизации их на основе априорной и апостериорной информации. Вместе с тем вычислительная математика обогатилась в последние годы большим числом разнообразных вычислительных методов, основанных на итерационных схемах, которые требуют тщательной классификации и систематизации, теоретического анализа, выделения практически целесообразных и эффективных в приложениях алгоритмов. Понимая, что для успешного решения практических задач необходимо достаточно широкое знакомство с идеями различных итерационных методов, авторы посвятили в книге отдельную главу обзору итерационных методов решения операторных уравнений.

Авторы попытались систематизировать накопленную информацию по затронутым вопросам, осмыслить основные, с их точки зрения, аспекты и вытекающие из них тенденции развития. Книга содержит развитые авторами в теории переноса новые методы последовательных приближений, численной аппроксимации уравнений и численной реализации вариационных принципов. Авторы не стремились дать в монографии исчерпывающий обзор результатов, достигнутых в вычислительных методах теории переноса. Они попытались сформулировать свою точку зрения, в значительной мере субъективную, только по тем вопросам, которые находились в сфере их интересов и внимания. И это должно явиться некоторым извинением по отношению к тем исследователям, работы которых не нашли в этой книге должного отражения. Они исходили также из того, что более или менее подробное обсуждение различных аспектов теории переноса уже дано



в монографиях одного из авторов [161, 162] и в сборниках статей [28, 37, 48], отражающих итоги работ советских и зарубежных ученых. Поэтому многие вопросы теории ядерных реакторов в монографии освещены недостаточно полно или вовсе опущены. Это относится, например, к резонансной структуре сечений, методам термализации нейтронов с учетом молекулярных эффектов и кристаллических связей, ядерным реакциям типа  $(n, 2n)$ , поляризации нейтронов, методу Монте-Карло и др. Однако в монографии существенное внимание уделено вопросам преобразования сложного уравнения теории переноса нейтронов в многогрупповую систему взаимосвязанных уравнений, а затем в односкоростное уравнение, где предполагается, что в нем уже учтено многообразие физических эффектов, связанных с особенностями ядерных реакций. Мы считаем, что принятая абстракция не умаляет общности развиваемых в книге подходов к обсуждаемым проблемам.

Книга ставит своей целью обратить внимание математиков-вычислителей на большое разнообразие встречающихся в этой области математических задач, выдвигающих интересные проблемы для численных методов. Для физиков и инженеров-прикладников она может содействовать совершенствованию научных основ проектирования ядерных реакторов. Помня, что каждая новая важная область прикладной физики вызывает к жизни новые концепции в вычислительной математике и многими своими глубокими достижениями обязана строгому математическому исследованию этих концепций, авторы стремились к тому, чтобы книга могла ввести читателя в круг главных идей и результатов современной теории. При этом акцент делается на математическое содержание задач.

Выработке точки зрения авторов на вычислительные методы теории переноса способствовали проведенные в Советском Союзе конференции и симпозиумы, дискуссии на которых стимулировали более четкое и ясное понимание перспектив развития теории переноса и ее приложений.

Содержание монографии явилось результатом деятельности авторов совместно с коллективами математиков Вычислительного центра СО АН СССР и Института атомной энергии им. И. В. Курчатова. Авторы пользуются случаем выразить искреннюю благодарность сотрудникам, которые внесли существенный вклад в предлагаемую монографию. В подготовке книги к печати активную помощь авторам оказали Ю. А. Кузнецов, В. В. Смелов, а также В. И. Агошков, Ю. Е. Бояринцев, Ю. А. Власов, С. И. Коняев, Н. И. Лалетин, В. Ю. Пляшкевич, В. В. Пененко, У. М. Султангазин, О. П. Узнадзе, Е. С. Цапелкин. Всем этим товарищам авторы приносят свою глубокую благодарность.

*Г. МАРЧУК, В. ЛЕБЕДЕВ*

## Предисловие ко второму изданию

Бурное развитие атомной энергетики стимулировало активный поиск эффективных методов решения задач переноса нейтронов — основы физического расчета ядерных реакторов. За годы после выхода первого издания монографии авторов численные методы расчета уравнений переноса и их приближений обогатились рядом новых идей и первоклассных алгоритмов. Особое развитие получили вариационные методы, которые позволили с более или менее единой позиции получать достаточно эффективные численные алгоритмы решения задач переноса и позволяющие с единых позиций обосновать достаточно широкое семейство приближенных методов. Второе крупное направление — алгоритмическое обеспечение вычислительных методов в теории переноса — несомненно связано с теорией итерационных процессов. Существенно продвинуты в этом направлении чебышевские методы, методы сопряженных градиентов, блочно-релаксационные методы, методы в подпространствах и др. Все это привело авторов к мысли о необходимости подготовки второго издания книги.

Во втором издании исправлены замеченные опечатки и неточности, текст подвергся исправлениям и добавлениям. Из крупных исправлений и добавлений отметим следующие. В гл. 1 добавлен параграф с формулировкой задачи по нахождению эффективного коэффициента размножения  $k_{эф}$ , а в гл. 10 изложены итерационные методы решения этой задачи с применением чебышевских итерационных методов. В гл. 5 добавлен параграф с изложением квадратурных формул для сферы повышенной алгебраической точности. Изменению подвергся материал § 6.6—6.9; в этой главе добавлен параграф с изложением метода псевдоисточников. В корне переработана и расширена гл. 8. В ней излагались методы вывода так называемых  $P_{NI}$ -уравнений — уравнений, получаемых на основе вариационных принципов применительно к функционалу В. С. Владимирова. В свое время на этом пути впервые удалось получить определенного типа уравнения метода конечных элементов, решения которых сходились к точному. Теперь эта глава содержит и другие проекционно-сеточные аппроксимации уравнения переноса. В гл. 9 добавлены параграфы с изложением двумерных схем  $S_n$ - и  $DS_n$ -методов, а также ВЕМ-схем. Улучшено изложение § 9.5, а в § 9.9 добавлены новые разностные схемы для плоского слоя. В гл. 10, посвященной итерационным методам, по-новому изложены чебышевские методы и методы

расщепления оператора. Расширены параграфы, посвященные методу сопряженных градиентов. Введены новые параграфы, в которых изложены блочно-чебышевские методы и комбинированные методы, позволяющие учесть информацию о распределении начальной ошибки. Исключены двусторонние итерационные методы и многошаговые итерационные процессы; вместо них добавлено изложение симметризуемых итерационных методов в подпространствах. По-новому изложено содержание § 11.25. Добавлено также Приложение с изложением кратких характеристик программ, составленных на основе излагаемых в книге численных алгоритмов.

Авторы благодарны всем товарищам, указавшим опечатки, допущенные в первом издании. В подготовке книги ко второму изданию основную помощь авторам оказали В. И. Агошков, Ю. А. Власов, С. И. Коняев, Ю. А. Кузнецов, Н. И. Лалетин, В. Ю. Пляшкевич, В. В. Смелов, С. А. Фролова, В. В. Орлова. Всем этим товарищам авторы приносят свою глубокую благодарность.

*Г. МАРЧУК, В. ЛЕБЕДЕВ*

Теория переноса излучения — одна из ведущих проблем современной науки, быстро развивающаяся на основе достижений теоретической физики и глубоко проникающая в самые различные области естествознания и техники. Весьма общая математическая формулировка задач теории переноса дается с помощью линеаризованного кинетического уравнения Больцмана. Кинетические уравнения — это своеобразный класс многомерных интегро-дифференциальных уравнений математической физики, для которого в последние годы стали бурно развиваться численные методы решения. Причиной такого прогресса явились и неуклонно возрастающая роль математических исследований в проектировании ядерных реакторов, и существенное развитие вычислительной математики и вычислительных машин.

В связи с развитием функционального анализа, теории обобщенных функций и теории обобщенных решений краевых задач получили глубокое развитие математические исследования свойств решений задач переноса. Исследования таких вопросов, как существование и единственность решения, его гладкость, непрерывная зависимость от коэффициентов уравнения и правой части, спектральные свойства, вариационные принципы и свойства операторов уравнения переноса, заложили фундамент для применения и оценки эффективности численных методов.

Важное значение в теории переноса имеет теория сопряженных уравнений, которая была разработана как для однородных, так и для неоднородных уравнений. Она оказала существенное влияние на постановку новых задач и на обоснование различных аппроксимаций уравнений переноса, удобных для алгоритмического решения конкретных проблем нейтронной физики.

Прогресс атомной науки и техники стимулировал развитие простых приближенных методов решения кинетических уравнений. В настоящее время наиболее продвинутой в алгоритмическом и теоретическом аспектах является диффузионная теория. Поскольку диффузионное приближение далеко не во всех случаях приводило к удовлетворительному решению задачи, разработка более точных методов решения уравнений переноса уже давно является важной задачей вычислительной математики. Существенное развитие и обоснование получил метод сферических гармоник. Большое влияние на развитие

методов решения уравнений сферических гармоник оказали методы матричной факторизации разностных аналогов уравнений.

За последние годы для решения кинетических уравнений было создано большое число разнообразных и оригинальных разностных аппроксимаций и вычислительных алгоритмов, основанных на итерационных методах и вариационных принципах. Это позволило существенно повысить эффективность реализации алгоритмов на ЭВМ. Актуальными стали исследования связей между объемом вычислительной работы и достижимым качеством приближения. Очевидно, что тип аппроксимации разностными уравнениями, разность между решениями дискретной и непрерывной задач, скорость сходимости итерационного метода решения разностных уравнений (и выбор в нем итерационных операторов), общее число действий, необходимых для решения задачи с заданной точностью, а также выбор пространств, в которых оцениваются погрешность и скорость сходимости итераций, являются взаимосвязанными характеристиками. Современное состояние вычислительной математики уже настоятельно требует исследования и учета при выборе алгоритма решения взаимных зависимостей описанных факторов, ибо только тогда можно говорить о разумном выборе вычислительного алгоритма и его операторов для решения с хорошей точностью непрерывной задачи.

Для большинства непрерывных задач такое комплексное исследование вопроса о разумном выборе алгоритма — чрезвычайно сложная проблема, которая является основной целью вычислительной математики. Чтобы иметь возможность получить ответ о качестве применяемого алгоритма, по крайней мере необходимо:

- 1) построить системы уравнений, аппроксимирующих непрерывную задачу;

- 2) исследовать те свойства решений непрерывных задач, которые потребуются при оценке алгоритма решения;

- 3) исследовать свойства решений систем уравнений, в частности оценить на некотором классе функций погрешность точного решения дискретной задачи по отношению к точному решению непрерывной задачи;

- 4) найти (итерационный) метод решения систем уравнений, удовлетворяющих априори наложенным ограничениям;

- 5) построить и исследовать операторы итерационного метода, исследовать скорость сходимости этого метода и объем запоминаемой информации.

Задачи теории переноса, будучи существенно многомерными, достаточно сложными и актуальными, представляют собой достойный предмет исследования с точки зрения основных проблем вычислительной математики. Свообразие и важность этих задач влияли и будут ощутимо влиять и на развитие основных концепций, подходов и методов вычислительной математики, и на прогресс вычислительной техники.

Советские ученые обогатили теорию переноса рядом новых важных исследований, определяющих направление научного поиска. Основное внимание приобретают многомерные задачи переноса и оп-

тимизация вычислительных алгоритмов их решения. Если говорить о главных тенденциях в развитии вычислительных методов в настоящее время, то можно отметить следующие: построение итерационных алгоритмов и оптимизация их на основе аппроксимации операторов задач переноса более простыми операторами, построение оптимальных алгоритмов на основе вариационных методов, применение метода расщепления для редукции сложных задач к простейшим. На фоне этих ведущих направлений возникают алгоритмы, отличающиеся своеобразием и оригинальностью.

Большое внимание исследователей привлекают экстремальные задачи теории переноса (минимум критических масс при некоторых ограничениях в конструкциях, минимум дозы излучения, выходящего из защиты, оптимальные тепловыделения в реакторе и ячейках и др.), для которых реализуется минимум существенных функционалов задач. Такие проблемы изучены еще слабо, хотя отдельные интересные результаты в этом направлении уже получены.

Достаточно глубокое развитие методов решения линейных уравнений позволяет надеяться, что эти методы могут проникать в более сложные задачи для нелинейных кинетических уравнений, интенсивно изучаемых в теории разреженных газов, в теории плазмы и др. По-видимому, переход к решению нелинейных задач явится естественным этапом в развитии теории переноса.

# ЗАМЕДЛЕНИЕ НЕЙТРОНОВ

## Глава 1

### КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ РЕАКТОРА

#### § 1.1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАМЕДЛЕНИЯ

Упругое рассеяние является важнейшим механизмом замедления нейтронов в реакторах на промежуточных и тепловых нейтронах. Если энергия нейтрона много больше  $kT_0$ , где  $k$  — постоянная Больцмана, а  $T_0$  — температура среды, то процесс рассеяния нейтрона на ядре слабо зависит от скорости движения ядер среды и в этом случае можно считать ядро неподвижным. Если энергия нейтрона сравнима с  $kT_0$  или меньше, то при расчете рассеяния нейтрона на ядре вещества необходимо учитывать тепловое движение ядер среды, молекулярные связи и кристаллические эффекты.

Введем в рассмотрение индикатрису рассеяния нейтрона в результате упругого соударения с ядром, которую будем обозначать  $w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$ . Предполагается, что функция  $w_{es}$  зависит от косинуса угла рассеяния нейтрона при соударении с ядром

$$\mu_0 = \Omega \Omega',$$

где  $\Omega'$  — единичный вектор, характеризующий направление полета нейтрона до соударения, а  $\Omega$  — после соударения с ядром.

Другой аргумент индикатрисы рассеяния, обозначаемый  $v' \rightarrow v$ , характеризует изменение скорости нейтрона при соударении с ядром.

В дальнейшем будем предполагать, что индикатриса рассеяния нейтронов известна и нормирована следующим образом:

$$\int d\Omega \int dv w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \Sigma_{es}(v'),$$

где  $\Sigma_{es}(v')$  — макроскопическое сечение упругого рассеяния нейтрона, имеющего до столкновения скорость  $v'$ , а  $d\Omega$  — элемент поверхности единичной сферы.

Можно ввести в рассмотрение более наглядную с физической точки зрения функцию  $g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$ , связанную с  $w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  соотношением

$$w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_{es}(v') g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v).$$

Тогда соотношение нормировки для функции  $g_{es}$  запишется следующим образом:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = 1.$$

Величину  $(1/4\pi)g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  можно назвать плотностью вероятности упругого рассеяния нейтрона, имевшего скорость  $v'$  и направление полета  $\Omega'$ , а после соударения с ядром изменившего их соответственно на  $v$  и  $\Omega$ .

Наряду с упругим рассеянием нейтронов при столкновении с ядром может осуществиться процесс неупругого рассеяния. Неупругое рассеяние обычно реализуется на тяжелых ядрах. При этом ядро, захватывающее нейтрон, переходит в возбужденное состояние [72]. В дальнейшем ядро, испустив нейтрон, переходит в свое невозмущенное состояние.

Введем в рассмотрение функцию рассеяния нейтрона в результате неупругого соударения с ядром, в процессе которого реализуется только один нейтрон. Эту функцию будем обозначать  $w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v)$ . В силу предположения об изотропности рассеяния нейтронов в лабораторной системе координат можно положить

$$w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = (1/4\pi)w_{is}(v' \rightarrow v).$$

Функция  $w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  нормирована следующим образом:

$$\int d\Omega \int_0^\infty dv w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv w_{is}(v' \rightarrow v) = \Sigma_{is}(v'),$$

где  $\Sigma_{is}(v')$  — макроскопическое сечение неупругого рассеяния для процессов с испусканием одного нейтрона. Функцию  $w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  представим в следующем виде:

$$w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = (1/4\pi)\Sigma_{is}(v')g_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v),$$

где

$$g_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = g_{is}(v' \rightarrow v).$$

В этом случае имеем условие нормировки

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty dv g_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv g_{is}(v' \rightarrow v) = 1.$$

Чтобы учесть в процессе неупругого рассеяния появление двух нейтронов, введем в рассмотрение функцию рассеяния  $w_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v)$ , которая в предположении изотропности рассеяния равна

$$w_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = (1/4\pi)w_{n, 2n}(v' \rightarrow v)$$

и нормирована следующим образом:

$$\int d\Omega \int_0^\infty dv w_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv w_{n, 2n}(v' \rightarrow v) = 2 \Sigma_{n, 2n}(v'),$$

где  $\Sigma_{n, 2n}(v')$  — макроскопическое сечение захвата нейтронов с последующим участием в реакции  $(n, 2n)$ .



Функцию  $w_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  представим в виде

$$w_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = (1/4\pi) v_{n, 2n} \Sigma_{n, 2n}(v') g_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v),$$

где  $g_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = g_{n, 2n}(v' \rightarrow v)$ ,  $v_{n, 2n} = 2$ .

Очевидно, имеет место условие нормировки

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty dv g_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv g_{n, 2n}(v' \rightarrow v) = 1.$$

В процессе взаимодействия нейтрона с ядром делящегося нуклида имеется определенная вероятность того, что нейтрон при захвате ядром вызовет его деление. При этом ядро разделится на два примерно равных осколка с большой кинетической энергией, которые тормозятся в среде и передают свою энергию атомам окружающей среды. В результате кинетическая энергия осколков переходит в тепловое движение атомов среды.

При делении ядра имеется вероятность появления  $\nu_f$  нейтронов. Эта величина является функцией энергии нейтрона, вызывающего деление, т. е.  $\nu_f = \nu_f(v)$ , где  $v$  — скорость нейтрона, налетающего на ядро.

Угловое распределение вторичных нейтронов, образующихся при делении ядра, обычно считается изотропным в лабораторной системе координат.

Введем в рассмотрение функцию распределения вторичных нейтронов по углам и скоростям  $w_f(\mu_0, v' \rightarrow v)$ . В силу предположения об изотропности распределения вторичных нейтронов будем иметь

$$w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = (1/4\pi) w_f(v' \rightarrow v).$$

Величина  $w_f(\mu_0, v' \rightarrow v)$  нормирована следующим образом:

$$\int d\Omega \int_0^\infty dv w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv w_f(v' \rightarrow v) = \nu_f(v') \Sigma_f(v').$$

Функцию  $w_f(\mu_0, v' \rightarrow v)$  представим в виде

$$w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = (1/4\pi) \nu_f(v') \Sigma_f(v') g_f(\mu_0, v' \rightarrow v),$$

где  $g_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = g_f(v' \rightarrow v)$ . Тогда функция  $g_f(\mu_0, v' \rightarrow v)$  будет нормирована на единицу:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^\infty dv g_f(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int_0^\infty dv g_f(v' \rightarrow v) = 1.$$

Существенно отметить то обстоятельство, что функцию  $g_f(v' \rightarrow v)$  можно считать не зависящей от скорости налетающего нейтрона, т. е.  $g_f(v' \rightarrow v) = g_f(v)$ . Функцию  $g_f(v)$  обычно называют спектром деления нейтронов.

Захват нейтронов ядром может происходить в результате различных ядерных процессов. В дальнейшем под захватом нейтронов будем понимать радиационное поглощение, захват нейтронов с последующим делением, поглощение нейтрона в процессе реакции  $(n, 2n)$ . Это значит, что сечение захвата нейтрона ядрами данного сорта составит из суммы  $\sigma_c = \sigma_a + \sigma_f + \sigma_{n, 2n}$ , где  $\sigma_a$ ,  $\sigma_f$  и  $\sigma_{n, 2n}$  — соответственно микроскопические сечения радиационного поглощения, деления и реакции  $(n, 2n)$ .

Сечение радиационного поглощения имеет, вообще говоря, резонансный характер. Если резонансы перекрываются, то имеет смысл говорить об усредненном сечении поглощения. Следовательно, можно положить  $\sigma_a = \bar{\sigma}_a + \sigma_{ar}$ , где  $\bar{\sigma}_a$  — усредненное, медленно изменяющееся с энергией сечение, а  $\sigma_{ar}$  — сечение резонансного поглощения на наиболее ярко выраженных резонансах. В дальнейшем под  $\sigma_a$  будем понимать плавно меняющуюся часть сечения поглощения, а резонансное сечение каждый раз будем рассматривать особо.

Пространственно-энергетическое распределение нейтронов в реакторе описывается кинетическим уравнением Больцмана. В настоящей главе дан краткий вывод кинетического уравнения для потока нейтронов. При изложении ограничимся рассмотрением только стационарной проблемы, имеющей наибольший интерес в вопросах расчета критических масс ядерных реакторов. Кинетическое уравнение запишем для фазового пространства  $(\mathbf{r}, v, \Omega)$ . Переход к другим фазовым пространствам может быть осуществлен с помощью преобразования переменных.

Рассмотрение проведено для общего случая индикатрис рассеяния в предположении, что они абсолютно интегрируемы. В заключение рассматриваются два предельных случая: односкоростное кинетическое уравнение и кинетическое уравнение для бесконечной однородной среды.

Рассмотрим фазовое пространство  $(\mathbf{r}, v, \Omega)$  с элементом  $d\mathbf{r}dv d\Omega$ . Около точки  $P$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  выделим элементарный объем  $d\mathbf{r}$ . Если  $n(\mathbf{r}, v, \Omega)$  — плотность нейтронов в единице фазового пространства  $(\mathbf{r}, v, \Omega)$  в момент времени  $t$ , то число нейтронов в объеме  $d\mathbf{r}$  около точки  $P$ , имеющих разбросы скорости в интервале  $(v, v + dv)$  и направлений  $(\Omega, \Omega + d\Omega)$ , равно  $n(\mathbf{r}, v, \Omega)d\mathbf{r}dv d\Omega$ . В момент времени  $t + dt$  их число будет  $n(\mathbf{r} + v\Omega dt, v, \Omega)d\mathbf{r}dv d\Omega$ . Таким образом, полное изменение числа нейтронов в объеме  $d\mathbf{r}dv d\Omega$  за время  $dt$  равно

$$dN = [n(\mathbf{r} + v\Omega dt, v, \Omega) - n(\mathbf{r}, v, \Omega)] d\mathbf{r}dv d\Omega. \quad (1.1.1)$$

Разложив выражение (1.1.1) в ряд Тейлора и ограничившись членами первого порядка малости, получим

$$dN = v\Omega \nabla n d\mathbf{r}dv d\Omega dt. \quad (1.1.2)$$

Рассмотрим теперь ядерные процессы, в результате которых происходит изменение числа нейтронов в элементе фазового пространства  $d\mathbf{r}dv d\Omega$  за время  $dt$ . Подсчитаем число нейтронов, выбываю-

щих из элемента фазового пространства. Оно составит из нейтронов, поглощенных и рассеянных средой, т. е.

$$dP = (\Sigma_c + \Sigma_s) vn(r, v, \Omega) dr dv d\Omega dt, \quad (1.1.3)$$

где  $\Sigma_c$  — макроскопическое сечение поглощения нейтронов;  $\Sigma_s(v) = \Sigma_{es}(v) + \Sigma_{is}(v) + \Sigma_{n, 2n}(v)$  — полное макроскопическое сечение рассеяния.

Подсчитаем далее число нейтронов, прибывающих в элемент фазового пространства в интервал времени  $dt$ . Очевидно, оно образуется из суммы нейтронов, рассеянных из других элементов фазового пространства и источников деления, т. е.

$$dR = \int d\Omega' \int_0^\infty dv' w_s(\mu_0, v' \rightarrow v) v' n(r, v', \Omega') dr dv d\Omega dt \quad (1.1.4)$$

и

$$dS = \int d\Omega' \int_0^\infty dv' w_f(\mu_0, v' \rightarrow v) v' n(r, v', \Omega') dr dv d\Omega dt, \quad (1.1.5)$$

где

$$w_s(\mu_0, v' \rightarrow v) = w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v).$$

Функции  $w_{es}$ ,  $w_{is}$ ,  $w_{n, 2n}$ ,  $w_f$  определены выше.

Составим уравнение баланса нейтронов

$$dN + dP = dR + dS. \quad (1.1.6)$$

Подставляя в уравнение баланса (1.1.6) соотношения (1.1.2)—(1.1.5) и сокращая на  $dr dv d\Omega dt$ , приходим к кинетическому уравнению замедления нейтронов:

$$\Omega \nabla vn + \Sigma vn = \int d\Omega' \int_0^\infty dv' w(\mu_0, v' \rightarrow v) v' n(r, v', \Omega'), \quad (1.1.7)$$

где

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_s; \quad w = w_s + w_f. \quad (1.1.8)$$

Введем в рассмотрение функцию  $\phi = vn$ . Тогда в окончательном виде кинетическое уравнение замедления нейтронов запишется так:

$$\Omega \nabla \phi + \Sigma \phi = \int d\Omega' \int_0^\infty dv' w(\mu_0, v' \rightarrow v) \phi(r, v', \Omega'). \quad (1.1.9)$$

Здесь интегрирование проводится по всевозможным скоростям из интервала  $(0, \infty)$  и всем направлениям единичной сферы.

В развернутом виде с использованием свойств функций  $w_i(\mu_0, v' \rightarrow v)$  (индексом  $i$  обозначен любой ядерно-физический процесс) уравнение (1.1.9) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \Omega \nabla \varphi + (\Sigma_c + \Sigma_{es} + \Sigma_{is} + \Sigma_{n, 2n}) \varphi = \\ & = \int d\Omega' \int_0^\infty dv' w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) \varphi(r, v', \Omega') + \\ & + \frac{1}{4\pi} \left[ \int d\Omega' \int_0^\infty dv' w_{is}(v' \rightarrow v) \varphi(r, v', \Omega') + \right. \\ & + \int d\Omega' \int_0^\infty dv' w_{n, 2n}(v' \rightarrow v) \varphi(r, v', \Omega') + \\ & \left. + g_f(v) \int d\Omega' \int_0^\infty dv' v_f \Sigma_f(v') \varphi(r, v', \Omega') \right]. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда неупругое рассеяние несущественно, а реакция  $(n, 2n)$  вовсе отсутствует. Тогда кинетическое уравнение (1.1.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \int_0^\infty dv' \Sigma_{es}(v') \varphi(r, v', \Omega') g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \\ + g_f(v) Q(r), \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

где

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_{es}; \quad Q(r) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \int_0^\infty dv' v_f \Sigma_f(v') \varphi(r, v', \Omega');$$

$$\frac{1}{4\pi} \Sigma_{es} g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (1.1.12)$$

Величину  $g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  в простейших случаях найти весьма просто. Одним из таких случаев является рассеяние нейтронов на неподвижных ядрах. Очевидно, предположение о рассеянии нейтронов на неподвижных ядрах является удовлетворительным приближением к случаю, когда скорость нейтронов много больше скорости ядер.

Найдем выражение для функции  $g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  при рассеянии нейтронов на свободных и неподвижных ядрах.

Рассмотрим систему нейтрон — ядро. До соударения с нейтроном ядро предполагается неподвижным. Для удобства будем пользоваться двумя системами координат: неподвижной, связанной с ядром-мишенью (лабораторная система координат), и подвижной, связанной с центром масс системы (рис. 1.1).

Пусть  $v'$  — скорость нейтрона до соударения в неподвижной системе координат. Тогда в этой системе скорость центра масс определится соотношением

$$v'_c = v' / (1 + M), \quad (1.1.13)$$

где  $M$  — масса ядра (массу нейтрона считаем единичной).

Скорость нейтрона в подвижной системе координат, связанной с центром масс, будет равна

$$w' = v' - v'_c = Mv' / (1 + M) \quad (1.1.14)$$

и скорость ядра

$$w'_0 = v'_0 = -v'_c = -v' / (1 + M). \quad (1.1.15)$$

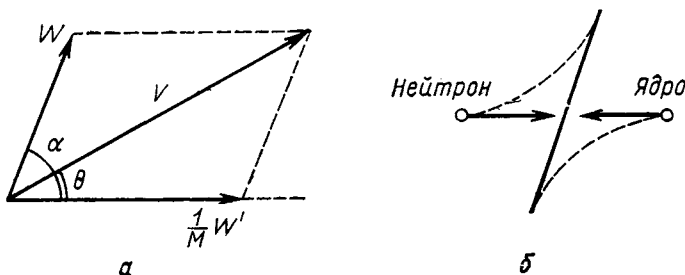


Рис. 1.1. Лабораторная (а) и связанная с центром масс (б) системы

Итак, скорость нейтрона, центра масс и ядра удалось выразить как в неподвижной системе координат, так и в системе центра масс только через скорость нейтрона до соударения его с ядром в неподвижной системе координат.

Остается теперь найти соответствующие скорости после упругого соударения нейтрона с ядром. Для удобства будем обозначать их теми же буквами без штрихов. Для нахождения скорости нейтрона и ядра-мишени в системе центра масс после соударения воспользуемся законами сохранения количества движения и кинетической энергии системы:

$$\left. \begin{aligned} w + Mw_0 &= w' + Mw'_0; \\ w^2/2 + Mw_0^2/2 &= w'^2/2 + Mw_0'^2/2. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.16)$$

Учитывая соотношения (1.1.14) и (1.1.15), приводим уравнения (1.1.16) к следующему виду:

$$w + Mw_0 = 0; \quad w^2 + Mw_0^2 = Mv'^2 / (1 + M). \quad (1.1.17)$$

Из первого равенства имеем

$$w = Mw_0. \quad (1.1.18)$$

Подставим  $w$  из (1.1.18) во второе соотношение (1.1.17). В результате

$$w_0 = v'/(1 + M) = w'_0. \quad (1.1.19)$$

Подставив  $w_0$  из (1.1.19) в равенство (1.1.18), получим

$$w = Mw'/(1 + M) = w'. \quad (1.1.20)$$

Из соотношений (1.1.19) и (1.1.20) следует, что относительные скорости как нейтрона, так и ядра-мишени в системе центра масс до и после столкновения по величине равны.

Остается лишь определить угол, на который вектор скорости нейтрона отклонится в результате столкновения. С этой целью относительную скорость нейтрона после столкновения запишем в следующем виде:  $w = v - v_c = v - v'_c$ , откуда

$$v = w + v'_c = w + v'/(1 + M). \quad (1.1.21)$$

Используя соотношения (1.1.14), приведем равенство (1.1.21) к виду

$$v = w + w'/M. \quad (1.1.22)$$

Из соотношения (1.1.22) следует, что

$$v^2 = w^2 + w'^2/M^2 + (2/M)ww' \cos \alpha, \quad (1.1.23)$$

где  $\cos \alpha = (w, w')/ww'$ . Разрешив уравнение (1.1.23) относительно  $\cos \alpha$  и воспользовавшись соотношением (1.1.20), получим

$$\cos \alpha = 1 - [(M + 1)^2/2M][1 - (v/v')^2]. \quad (1.1.24)$$

С помощью (1.1.24) найдем выражение

$$\cos \Theta = (v, w')/vw'.$$

Для этого спроектируем параллелограмм скоростей на ось  $w'$ . Тогда будем иметь

$$v \cos \Theta = w \cos \alpha + w'/M. \quad (1.1.25)$$

Учитывая соотношения (1.1.20) и (1.1.24), приведем равенство (1.1.25) к виду

$$\cos \Theta = [(M + 1)/2](v/v') - [(M - 1)/2](v'/v). \quad (1.1.26)$$

Из (1.1.24) вытекает следующее неравенство:

$$1 \leq v'/v \leq (M + 1)/(M - 1), \quad (1.1.27)$$

т. е.

$$(M - 1)v'/(M + 1) \leq v \leq v'. \quad (1.1.28)$$

Неравенство (1.1.28) указывает на тот факт, что скорость нейтрона после соударения с ядром находится в строго определенных пределах.

Перейдем теперь к определению функции распределения нейтронов по скоростям и направлениям после столкновения. С этой целью

введем в рассмотрение функцию  $(1/4\pi)g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  — плотность вероятности того, что нейтрон, имевший до столкновения с ядром скорость  $\mathbf{v}'$ , в результате столкновения изменит скорость на  $\mathbf{v}$ . По определению, функция  $(1/4\pi)g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  должна быть нормирована на единицу:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{v} g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = 1; \quad (1.1.29)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\frac{M-1}{M+1}v'}^{v'} v^2 dv \int d\Omega g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = 1.$$

Найдем явное выражение для функции  $g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ . С этой целью рассмотрим сначала закон распределения вероятностей в системе центра масс. Если предположить, что рассеяние нейтронов в системе центра масс изотропно, т. е. вероятность рассеяния нейтронов на ядре зависит лишь от телесного угла, а не от направления, то с учетом нормировки будем иметь

$$d\omega = |\sin \alpha d\alpha d\beta|, \quad (1.1.30)$$

где  $\beta$  — азимут, а  $d\omega$  — элемент телесного угла в системе центра масс.

Имея в виду функциональную связь переменных  $\alpha$  и  $v$  (при фиксированной начальной скорости  $v'$ ), продифференцировав выражение (1.1.24), получим

$$\sin \alpha d\alpha = -\frac{(M+1)^2}{M} \frac{v dv}{v'^2}. \quad (1.1.31)$$

Следовательно, из предположения об изотропности рассеяния в системе центра масс вытекает закон распределения нейтронов по скоростям. Плотность вероятности такого распределения равна

$$\frac{1}{4\pi} \frac{(M+1)^2}{M} \frac{v}{v'^2}. \quad (1.1.32)$$

Найдем теперь закон распределения нейтронов по углам. Очевидно, что в силу существования функциональной связи (1.1.26) угол отклонения  $\Theta$  будет полностью определен, если  $v'$  и  $v$  зафиксированы. Формула (1.1.14), в частности, показывает, что упругое столкновение нейтрона с ядром возможно лишь при условии (1.1.26). Что касается случаев, когда равенство (1.1.26) не выполняется, то для них вероятность распределения оказывается равной нулю. Имея это в виду, можно формально написать трехмерный закон распределения вероятностей с помощью  $\delta$ -функции. С учетом выражения (1.1.32), а также нормировки (1.1.29) функция  $g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  примет вид

$$g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{(M+1)^2}{Mvv'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right]. \quad (1.1.33)$$

В фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Omega)$  функция  $g_{es}(\mathbf{v}'\Omega' \rightarrow \mathbf{v}\Omega)$  будет иметь вид

$$g_{es}(\mathbf{v}'\Omega' \rightarrow \mathbf{v}\Omega) = \frac{(M+1)^2}{M} \frac{v}{v'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right], \quad (1.1.34)$$

где  $\mu_0 = \cos \Theta$ . Заметим, что функция  $g_{es}$  тождественно равна нулю вне интервала (1.1.27).

Если рассеяние нейтронов в системе центра масс неизотропно и анизотропия характеризуется функцией  $\gamma(\alpha, \nu')$ , нормированной на единицу

$$\frac{1}{4\pi} \int d\omega \gamma(\alpha, \nu') = 1, \quad (1.1.35)$$

то вероятность того, что нейтрон после рассеяния будет двигаться около направления  $\omega$  в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ , равна

$$\gamma(\alpha, \nu') d\omega = |\gamma(\alpha, \nu') \sin \alpha d\alpha d\beta|. \quad (1.1.36)$$

Принимая во внимание (1.1.24) и учитывая соотношение (1.1.31), получаем плотность вероятности распределения нейтронов по скоростям:

$$\frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \gamma\left(\frac{v}{v'}, \nu'\right), \quad (1.1.37)$$

где

$$\gamma\left(\frac{v}{v'}, \nu'\right) = \gamma\left(\arccos\left\{1 - \frac{(M+1)^2}{2M} \left[1 - \frac{v^2}{v'^2}\right]\right\}, \nu'\right).$$

В результате для анизотропного рассеяния в системе центра масс получим следующую функцию для плотности вероятности:

$$\begin{aligned} & (1/4\pi) g_{es}(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \\ & = \gamma\left(\frac{v}{v'}, \nu'\right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{1}{vv'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.1.38)$$

В фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Omega)$  будем иметь

$$\begin{aligned} & (1/4\pi) g_{es}(\mathbf{v}'\Omega' \rightarrow \mathbf{v}\Omega) = \\ & = \gamma\left(\frac{v}{v'}, \nu'\right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

Видно, что функция  $g_{es}(\mathbf{v}'\Omega' \rightarrow \mathbf{v}\Omega)$  зависит от углов только через  $\mu_0 = \Omega\Omega'$ . Следовательно, можно ввести обозначение

$$g_{es}(\mathbf{v}'\Omega' \rightarrow \mathbf{v}\Omega) = g_{es}(\mu_0, \nu' \rightarrow \nu). \quad (1.1.40)$$

Итак, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} & (1/4\pi) g_{es}(\mu_0, \nu' \rightarrow \nu) = \\ & = \gamma\left(\frac{v}{v'}, \nu'\right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.1.41)$$



С учетом (1.1.41) кинетическое уравнение замедления примет вид

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \int d\Omega' \int_0^{\frac{M+1}{M-1}v} \frac{v dv'}{v'^2} \Sigma_{es}(v') \varphi(\mathbf{r}, v' \Omega') \times \\ \times \gamma\left(\frac{v}{v'}, v'\right) \delta\left[\mu_0 - \left(\frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}\right)\right] + g_f(v) Q(\mathbf{r}). \quad (1.1.42)$$

## § 1.2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Основное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана (1.1.10) содержит дифференциальный оператор. Это значит, что для полной определенности решения необходимо задать граничное условие на внешней поверхности реактора  $\Gamma$ .

Пусть реактор граничит с вакуумом. Тогда, если поверхность  $\Gamma$  выпуклая (или невогнутая), в качестве граничного условия необходимо взять следующее:

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0, \quad (1.2.1)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $\Gamma$ . Поскольку источники нейтронов находятся только в самом реакторе, условие (1.2.1) отмечает тот факт, что нейтроны, налетающие на поверхность  $\Gamma$  из вакуума, отсутствуют.

Если поверхность  $\Gamma$  вогнута так, что луч, совпадающий с вектором  $\Omega$ , дважды пересекает область, занятую реактором, то в точках  $P$  и  $P'$  следует положить

$$\varphi(\mathbf{r}_P, v \Omega) = \varphi(\mathbf{r}_{P'}, v \Omega). \quad (1.2.2)$$

Предположим теперь, что область реактора состоит из зон с различными физическими свойствами. В этом случае необходимо потребовать непрерывности функции  $\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega)$  при переходе из одной области в другую, т. е.

$$\varphi_+(\mathbf{r}_P, v, \Omega) = \varphi_-(\mathbf{r}_P, v, \Omega), \quad (1.2.3)$$

где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  — соответствующие пределы функции  $\varphi$  при стремлении к точке  $P$  со стороны одной и другой зон.

## § 1.3. УРАВНЕНИЕ КРИТИЧНОСТИ

В ядерной энергетике многие проблемы переноса нейтронов сводятся к задаче расчета критической массы ядерного реактора, т. е. нахождения такого стационарного режима работы, который обеспечивается цепной реакцией деления ядер урана, плутония или других делящихся нуклидов. Однако прежде чем переходить к формулировке этой задачи, исследуем некоторые близкие постановки задач, имеющие важное значение для формирования численных алгоритмов решения задач теории переноса вообще.

С этой целью рассмотрим уравнение (1.1.9) с внешними источниками излучения в форме

$$L\varphi = S\varphi + f, \quad (1.3.1)$$

где  $L$  — дифференциальный оператор, действующий на функцию  $\varphi$ , такой, что

$$L\varphi = \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi, \quad (1.3.2)$$

а  $S$  — интегральный оператор, определенный соотношением

$$S\varphi = \int d\Omega' \int dv' w(\mu_0, v' \rightarrow v) \varphi(r, v', \Omega'). \quad (1.3.3)$$

Что касается функции  $f(r, v, \Omega)$ , то она описывает внешние источники излучения, не связанные с цепной реакцией деления. Функция  $\varphi$  удовлетворяет определенным требованиям гладкости, чтобы соотношения (1.3.2) и (1.3.3) имели смысл, а также граничным условиям (1.2.1) — (1.2.3). Пространство таких функций обозначим  $B$ .

Уравнению (1.3.1) формально поставим в соответствие следующее:

$$L\varphi = \lambda S\varphi + f, \quad \varphi \in B, \quad (1.3.4)$$

где  $\lambda$  — формальный параметр. Как и при исследовании интегральных уравнений, разрешимость задачи (1.3.4) существенно зависит от параметра  $\lambda$ . Именно для этой цели параметр  $\lambda$  введен в уравнение переноса. Естественно, что при  $\lambda = 1$  уравнение (1.3.4) переходит в уравнение (1.3.1). Поэтому особое значение для нас будет иметь исследование разрешимости задачи в окрестности  $\lambda = 1$ .

Если на уравнение (1.3.4) подействовать оператором, обратным по отношению  $L$ , то однозначно приходим к интегральному уравнению

$$\varphi = \lambda L^{-1} S\varphi + L^{-1} f. \quad (1.3.5)$$

Это уравнение обычно используется при статистическом моделировании процесса переноса нейтронов [168].

Заметим, что в отсутствие внешних источников ( $f = 0$ ) при некоторых  $\lambda$  может иметь место нетривиальное решение уравнения (1.3.4).

Однородное уравнение

$$L\varphi = \lambda S\varphi, \quad \varphi \in B \quad (1.3.6)$$

называют уравнением квазикритичности. В этом случае обычно имеем  $\lambda \geq 1$ , а физически реализуемое решение уравнения переноса нейтронов будет соответствовать случаю, когда  $\lambda = 1$ .

Уравнение (1.3.6) при  $\lambda = 1$  запишем в несколько иной форме:

$$L\varphi = \bar{S}\varphi + g_f(v)F\varphi, \quad \varphi \in B, \quad (1.3.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}\varphi &= \int d\Omega' \int dv' w_{ss}(\mu_0, v' \rightarrow v) \varphi(r, v', \Omega') + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \int dv' w_{ts}(\mu_0, v' \rightarrow v) \varphi(r, v', \Omega'); \\ F\varphi &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \int dv' v_s \Sigma_s(v') \varphi(r, v', \Omega'). \end{aligned} \right\} \quad (1.3.8)$$

Известно, что однородное уравнение (1.3.7) не всегда имеет нетривиальное решение, а лишь при некоторых комбинациях входящих в уравнение коэффициентов. В самом деле, если ядерный реактор состоит из активной зоны с заданным распределением ядер делящегося изотопа урана или плутония и отражателей, только рассеивающих и замедляющих нейтроны, то стационарная самоподдерживающаяся реакция деления будет осуществляться при вполне определенной критической массе делящегося вещества, распределенного по активной зоне реактора. Найти это стационарное состояние — значит получить ненулевое решение задачи (1.3.7). Точнее, необходимо найти распределение ядер делящегося вещества в активной зоне реактора при заданных замедлителях нейтронов в активной зоне и отражателе при наличии различных поглощающих веществ так, чтобы осуществить стационарный режим деления в отсутствие внешних источников. В этом случае приходим к одной из возможных постановок задач на критический режим работы реактора. Можно, например, при заданном распределении делящегося вещества варьировать размерами отражателей или изменять замедляющие и рассеивающие свойства активной зоны. В практических расчетах, следовательно, требуется решать обратную задачу по восстановлению плотностей делящегося вещества и замедлителей в реакторе, обеспечивающих критический режим его работы.

Вместо решения таких обратных задач при расчетах ядерных реакторов оказалось более просто и эффективно решать прямые задачи некоторого модифицированного уравнения переноса следующего вида:

$$L\varphi = \bar{S}\varphi + (1/k_{\text{эф}})g_f(v)F\varphi, \quad \varphi \in B. \quad (1.3.9)$$

Уравнение (1.3.9) отличается от (1.3.7) введением постоянного параметра  $1/k_{\text{эф}}$ , где  $k_{\text{эф}}$  — эффективный коэффициент размножения реактора. Смысл этого коэффициента ясен. Он показывает, насколько следовало бы изменить коэффициент размножения делящегося вещества, чтобы осуществить самоподдерживающуюся ядерную реакцию при заданных параметрах реактора или, другими словами, получить нетривиальное решение уравнения (1.3.9). Естественно, что практически невозможно изменить коэффициенты выхода числа нейтронов на одном делении  $\nu_f$ , но мы в состоянии изменить концентрацию урана или замедлителей и методом перебора решить ряд задач типа (1.3.9) и получить кривую зависимости  $k_{\text{эф}}$  от вариации делящегося вещества или замедлителей. Эта кривая обычно дает возможность с помощью интерполяции найти тот вариант, который соответствует  $k_{\text{эф}} = 1$ . Этот случай уравнения (1.3.9) совпадает с (1.3.7) и дает нетривиальное решение задачи переноса нейтронов.

Уравнение (1.3.9) обычно называют уравнением критичности ядерного реактора. Оно играет большую роль при проектировании и расчетах энергетических и ядерно-физических установок.

В заключение обратим внимание еще на один случай стационарных задач теории переноса, который связан с так называемыми подкритическими системами, т. е. с такими ядерными реакторами, для ко-

торых эффективный коэффициент размножения  $k_{эф} < 1$  и нетривиального решения однородной задачи (1.3.7) не существует. Если, однако, в такую подкритическую систему ввести внешний источник излучения нейтронов, то в результате в ядерном реакторе при  $k_{эф} < 1$  устанавливается стационарное распределение нейтронов. Соответствующее уравнение переноса в этом случае принимает вид

$$L\varphi = \bar{S}\varphi + g_f(v)F\varphi + f, \quad \varphi \in B. \quad (1.3.10)$$

Здесь  $f$  — внешний источник нейтронов, стимулирующий развитие цепной реакции деления, причем этот источник тем более эффективен, чем  $k_{эф}$  ближе к единице.

#### § 1.4. ОДНОСКОРОСТНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В том случае, когда рассеяние нейтронов происходит на неподвижных ядрах, а сечения  $\Sigma_{es}$ ,  $\Sigma_{is}$ ,  $\Sigma_c$  и  $\Sigma_f$  не зависят от скорости, можно перейти к односкоростному кинетическому уравнению. Для этого рассмотрим уравнение замедления

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) + f(\mathbf{r}, v, \Omega); \quad (1.4.1)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n < 0,$$

где

$$w(\mu_0, v' \rightarrow v) = w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_{n,2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) + w_f(\mu_0, v' \rightarrow v).$$

Проинтегрируем уравнение (1.4.1) по переменной  $v$ . Тогда

$$\Omega \nabla \Phi + \Sigma \Phi = \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega) \int dv w(\mu_0, v' \rightarrow v) + f(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1.4.2)$$

где

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int dv \varphi(\mathbf{r}, v, \Omega); \quad f(\mathbf{r}, \Omega) = \int dv f(\mathbf{r}, v, \Omega).$$

С учетом нормировки функций  $w_{is}$ ,  $w_{n,2n}$ ,  $w_f$  получим

$$\int dv w(\mu_0, v' \rightarrow v) = \int dv w_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \frac{1}{4\pi} (\Sigma_{is} + \nu_{n,2n} \Sigma_{n,2n} + \nu_f \Sigma_f). \quad (1.4.3)$$

В предположении, что рассеяние происходит на свободных и неподвижных ядрах, имеем

$$\int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{(M+1)^2}{M} \int dv \gamma\left(\frac{v}{v'}\right) \frac{v}{v'^2} \delta\left[\mu_0 - \left(\frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}\right)\right]. \quad (1.4.4)$$

Здесь  $\gamma(v/v', v') = \gamma(v/v')$ . Переходя в интеграле (1.4.4) к новой переменной интегрирования  $\xi$  по формуле

$$\xi = \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v}, \quad (1.4.5)$$

выражение (1.4.4) преобразуем к виду

$$\int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{(M+1)^2}{M} \int \frac{\Psi^2(\xi) \gamma(\Psi)}{(M+1)\Psi(\xi) - \xi} \delta(\Omega\Omega' - \xi) d\xi, \quad (1.4.6)$$

где  $v/v' = \Psi(\xi) = (\xi + \sqrt{\xi^2 + M^2 - 1}) (M+1)^{-1}$  есть корень уравнения (1.4.5).

С учетом свойств  $\delta$ -функции вычислим интеграл в выражении (1.4.6):

$$\int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{M} \gamma \left( \frac{\Omega\Omega' + \sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}}{M+1} \right) \times \\ \times \frac{[\Omega\Omega' + \sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}]^2}{\sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}}. \quad (1.4.7)$$

Если рассеяние изотропно в системе центра масс, то

$$\int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \frac{1}{M} \frac{[\Omega\Omega' + \sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}]^2}{\sqrt{(\Omega\Omega')^2 + M^2 - 1}}. \quad (1.4.8)$$

Анализ формул (1.4.7) и (1.4.8) показывает, что в правой их части стоят выражения, зависящие только от  $\Omega\Omega' = \mu_0 = \cos \Theta$ . Отсюда приходим к выводу, что

$$\int dv g_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = g_{es}(\mu_0). \quad (1.4.9)$$

Следовательно, выражения (1.4.7) и (1.4.8) представлены в виде

$$g_{es}(\mu_0) = \frac{1}{M} \gamma \left( \frac{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}{M+1} \right) \frac{(\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1})^2}{\sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}, \quad (1.4.10)$$

$$g_{es}(\mu_0) = \frac{1}{M} \frac{(\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1})^3}{\sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}. \quad (1.4.11)$$

Рассмотрим предельный переход при  $M \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\gamma \left( \frac{\mu_0 + \sqrt{\mu_0^2 + M^2 - 1}}{M+1} \right) \rightarrow \gamma(1) = 1$$

и, следовательно,  $g_{es}(\mu_0) = 1$ , т. е. приходим к очевидному результату, что рассеяние на бесконечно тяжелых ядрах *изотропно* в лабораторной системе координат. В более общем случае для любых замедлителей выражение (1.4.11) можно представить в виде ряда по членам Лежандра, т. е.

$$g_{es}(\mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n P_n(\mu_0), \quad (1.4.12)$$

где  $g_n$  — коэффициент разложения функции  $g_{es}(\mu_0)$  в ряд Фурье по многочленам Лежандра.

Возвращаясь к уравнению (1.4.2), устанавливаем, что его интегральный член преобразуется к виду

$$(1/4\pi) \int d\Omega' \Phi(r, \Omega') [\Sigma_{es} g_{es}(\mu_0) + \Sigma_{is} + \nu_{n, 2n} \Sigma_{n, 2n} + \nu_f \Sigma_f].$$

В результате уравнение (1.4.2) примет вид

$$\Omega \nabla \Phi + \Sigma \Phi = \int d\Omega' \Phi(r, \Omega') \omega(\mu_0) + f(r, \Omega), \quad (1.4.13)$$

$$\Phi(r, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n < 0,$$

где

$$\omega(\mu_0) = (1/4\pi) [\Sigma_{es} g_{es}(\mu_0) + \Sigma_{is} + \nu_{n, 2n} \Sigma_{n, 2n} + \nu_f \Sigma_f]. \quad (1.4.14)$$

### § 1.5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Другим частным случаем кинетического уравнения, имеющим важное значение, является случай кинетического уравнения для бесконечной среды. Так как в бесконечной однородной среде все направления движения нейтронов оказываются равновероятными, то решение задачи не будет зависеть от  $\Omega$ . Учитывая далее, что вследствие однородности пространства решение также не будет зависеть от  $r$ , кинетическое уравнение (1.1.9) в этом случае можно записать в виде

$$\Sigma(v) \varphi(v) = \int dv' \varphi(v') \omega(v' \rightarrow v) + f(v), \quad (1.5.1)$$

где

$$\omega(v' \rightarrow v) = \int d\Omega' \omega(\mu_0, v' \rightarrow v); \quad \Sigma(v) = \Sigma_c(v) + \Sigma_a(v). \quad (1.5.2)$$

Заметим, что

$$\omega = \omega_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \omega_{is}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \omega_{n, 2n}(\mu_0, v' \rightarrow v) + \omega_f(\mu_0, v' \rightarrow v), \quad (1.5.3)$$

где функции  $\omega_{es}$ ,  $\omega_{is}$ ,  $\omega_{n, 2n}$  и  $\omega_f$  определены в § 1.1.

Рассмотрим случай, когда рассеяние нейтронов происходит на свободных неподвижных ядрах. Тогда функция  $\omega_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v)$  будет определена формулой

$$\begin{aligned} \omega_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) &= \Sigma_{es} \gamma \left( \frac{v}{v'}, v' \right) \frac{(M+1)^2}{4\pi M} \frac{v}{v'^2} \times \\ &\times \delta \left[ \mu_0 - \left( \frac{M+1}{2} \frac{v}{v'} - \frac{M-1}{2} \frac{v'}{v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega_{es}(v' \rightarrow v) &= \int d\Omega' \omega_{es}(\mu_0, v' \rightarrow v) = \\ &= \Sigma_{es} \gamma \left( \frac{v}{v'}, v' \right) \frac{(M+1)^2}{2M} \frac{v}{v'^2}. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

В частности, если рассеяние изотропно в системе центра масс, то

$$w_{es}(v' \rightarrow v) = \Sigma_{es} \frac{(M+1)^2}{2M} \frac{v}{v'^2}. \quad (1.5.6)$$

Если неупругое рассеяние несущественно, а реакции  $(n, 2n)$  и деления ядер отсутствуют, то уравнение (1.5.1) запишется в виде

$$\Sigma \varphi = \frac{(M+1)^2}{2M} \int_0^{M+1} \frac{v dv'}{v'^2} \Sigma_{es}(v') \varphi(v') + f(v). \quad (1.5.7)$$

## Глава 2

### СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

#### § 2.1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РЕАКТОРА

Сопряженные уравнения и функции, являющиеся решениями сопряженных уравнений, играют исключительную роль в теории ядерных реакторов. Теория сопряженных уравнений реактора впервые была разработана Е. Вигнером [36, 37]. В дальнейшем эта теория усовершенствовалась в работах А. С. Романовича и Л. Н. Усачева [230], Р. Эрлиха и Г. Гурвитца [274], С. Глесстона и М. Эдлунда [63] и др. Для односкоростных кинетических уравнений теория сопряженных уравнений разработана К. Фуксом [279]. Общие результаты по теории сопряженных уравнений и сопряженных функций изложены в работах Б. Б. Кадомцева [86], а также Г. И. Марчука и В. В. Орлова [170]. Важнейшей особенностью сопряженных уравнений является то, что они дают возможность построения теории возмущений.

Рассмотрим поток нейтронов  $\varphi(x)$ , удовлетворяющий однородному уравнению

$$L\varphi = 0, \quad (2.1.1)$$

где  $L$  — линейный оператор, заданный на системе функций  $\{\varphi(x)\}$ , удовлетворяющих некоторым требованиям. При этом под  $x$  будем понимать совокупность всех переменных задачи  $(r, v, \Omega)$ . Предположим, что оператор  $L$  и система функций  $\{\varphi\}$  — вещественные. Введем в рассмотрение скалярное произведение функций  $h(x)$  и  $g(x)$ , так что  $g \in \{\varphi\}$ , а  $h \in \{\varphi^*\}$ . Свойства функций множества  $\{\varphi^*\}$  будут обрешены в дальнейшем. Если переменная  $x$  непрерывна, то скалярное произведение может быть определено как интеграл от произведения этих функций:

$$(g, h) = \int g(x) h(x) dx, \quad (2.1.2)$$

где интегрирование ведется по всей области определения функций  $g$  и  $h$ .

Наряду с оператором  $L$  введем в рассмотрение сопряженный в смысле Лагранжа оператор  $L^*$ , определяемый с помощью следующего равенства:

$$(h, Lg) = (g, L^*h). \quad (2.1.3)$$

Если в качестве функции  $g$  выбрать решение уравнения (2.1.1), то из соотношения (2.1.3) следует, что функция  $h$  должна быть решением сопряженного уравнения

$$L^*\varphi^* = 0. \quad (2.1.4)$$

Отсюда, в частности, следует, что множество функций  $\{\psi^*\}$  должно определяться из того условия, чтобы оператор  $L^*$  на этом множестве имел смысл, а также удовлетворялось функциональное соотношение (2.1.3).

Операторы  $L$  и  $L^*$  представим в следующем виде:

$$L = M + \lambda N, \quad L^* = M^* + \lambda N^*, \quad (2.1.5)$$

где операторы  $M$  и  $M^*$ , а также  $N$  и  $N^*$  удовлетворяют условиям

$$(h, M g) = (g, M^* h), \quad (h, N g) = (g, N^* h), \quad (2.1.6)$$

$\lambda$  — обычно вещественное число, смысл которого будет пояснен в дальнейшем. Представление операторов  $L$  и  $L^*$  в виде сумм допускает известный произвол и диктуется математическими или физическими соображениями. Например, для уравнений реактора в качестве оператора  $N$  удобно принять оператор числа вторичных нейтронов деления.

С учетом равенств (2.1.5) основное и сопряженное уравнения запишутся в виде

$$M\varphi = -\lambda N\varphi; \quad M^*\varphi^* = -\lambda N^*\varphi^*. \quad (2.1.7)$$

Уравнения (2.1.7) однородны, поэтому вместе с соответствующими однородными граничными условиями, которым удовлетворяют функции множеств  $\{\psi\}$  и  $\{\psi^*\}$ , они определяют задачу на собственные числа. Пусть  $\{\lambda_i\}$  — спектр собственных чисел, а  $\{\varphi_i\}$  и  $\{\varphi_i^*\}$  — соответствующие собственные функции основного и сопряженного уравнений. Обычно первое собственное число  $\lambda = \lambda_1$  допускает неотрицательные решения уравнений (2.1.7), имеющих физический смысл потока нейтронов и функции, сопряженной с потоком, которую будем в дальнейшем называть *ценностью нейтронов*. Очевидно, реактор будет стационарным и критическим, если удовлетворено условие:  $\lambda = \lambda_1 = 1$ .

Переходим теперь к рассмотрению неоднородных уравнений

$$L\varphi = f(x), \quad (2.1.8)$$

где  $f(x)$  — функция, описывающая внешние источники нейтронов.

При решении тех или иных физических задач, описываемых неоднородными уравнениями, обычно имеют цель получить в результате значения некоторой величины, являющейся функционалом от потока  $\varphi(x)$ . Линейный функционал может быть выражен в виде скалярного произведения. Например, если нас интересует число актов некоторого



ядерного процесса с нейтронами в среде, характеризующейся сечением  $\Sigma(x)$  по отношению к данному процессу, то это число есть

$$I_{\Sigma} = \int \varphi(x) \Sigma(x) dx = (\varphi, \Sigma). \quad (2.1.9)$$

Таким образом, будем рассматривать физические величины, которые могут быть выражены в виде линейного функционала от потока  $\varphi(x)$ :

$$I_p[\varphi] = (\varphi, p), \quad (2.1.10)$$

где величина  $p$  характеризует интересующий нас физический процесс.

Рассмотрим теперь неоднородное сопряженное уравнение

$$L^* \varphi_p^* = p(x), \quad (2.1.11)$$

где  $p(x)$  — пока произвольная функция.

Так как

$$(\varphi_p^*, L\varphi) = (\varphi, L^* \varphi_p^*), \quad (2.1.12)$$

то, воспользовавшись уравнениями (2.1.8) и (2.1.11), получим

$$(\varphi_p^*, f) = (\varphi, p). \quad (2.1.13)$$

Отсюда получим  $I_f[\varphi_p^*] = I_p[\varphi]$ . Поэтому, если нужно найти значение функционала  $I_p[\varphi]$ , можно получить его, либо решив уравнение (2.1.8) и определив эту величину по формуле (2.1.10), либо решив уравнение (2.1.11) и определив ту же самую величину по формуле

$$I_p[\varphi] = (\varphi_p^*, f). \quad (2.1.14)$$

Следовательно, линейному функционалу (2.1.10) может быть поставлена в соответствие функция  $\varphi_p^*(x)$ , удовлетворяющая уравнению (2.1.11), причем в качестве свободного члена этого уравнения следует использовать именно функцию  $p(x)$ , характеризующую интересующий нас ядерный процесс.

Пусть в среде имеется источник нейтронов единичной мощности, помещенный в точку  $x_0$ , т. е.  $f(x) = \delta(x - x_0)$ . Поскольку  $(\varphi(x), \delta(x - x_0)) = \varphi(x_0)$ , то

$$I_p[\varphi] = I_{f=\delta(x-x_0)}[\varphi_p^*] = \varphi_p^*(x_0). ]$$

Следовательно, сопряженная функция  $\varphi_p^*(x_0)$  описывает зависимость функционала  $I_p[\varphi]$  от точки помещения источника нейтронов единичной мощности.

Представим себе физическую систему (или прибор), в которой измеряется некоторая величина, являющаяся линейным функционалом от потока  $I_p[\varphi]$ . Если в некоторую «точку» системы впустить определенное количество частиц (или, наоборот, изъять частицы), то измеряемое значение величины  $I_p[\varphi]$  соответственно увеличится (или уменьшится), причем это увеличение (или уменьшение) будет зависеть от той точки  $x_0$ , в которой изменено число частиц. Как видно из предыдущего рассмотрения, эта зависимость описывается сопряженной функцией  $\varphi_p^*(x)$ , удовлетворяющей уравнению (2.1.11). Следовательно, сопря-

женная функция  $\varphi_p^*(x)$  дает вклад частиц, находящихся в той или иной точке системы, в интересующий нас функционал  $I_p$ . Поэтому функцию  $\varphi_p^*(x)$  можно назвать *ценностью нейтронов в точке  $x$  по отношению к функционалу  $I_p[\varphi]$* .

## § 2.2. СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕАКТОРА

Стационарная самоподдерживающаяся цепная реакция деления в ядерном реакторе описывается однородным уравнением (1.1.9) при граничном условии (1.2.1). В этом случае

$$L\varphi \equiv \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (2.2.1)$$

Требуется также, чтобы операторы в соотношении (2.2.1) имели смысл для функций рассматриваемого множества.

Введем в рассмотрение скалярное произведение функций  $\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega)$  и  $\varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega)$ :

$$(\varphi, \varphi^*) = \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi \varphi^*, \quad (2.2.2)$$

где интегрирование проводится по всей области переменных  $(\mathbf{r}, v, \Omega)$ .

Для определения вида сопряженного оператора  $L^*$  воспользуемся основным функциональным соотношением (2.1.12).

Рассмотрим левую часть этого соотношения

$$\begin{aligned} (\varphi^*, L\varphi) = & \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi^* \left[ \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi - \right. \\ & \left. - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Используя теорему Гаусса—Остроградского

$$\int d\mathbf{r} (\Omega \nabla) \varphi \varphi^* = \int_{\Gamma} d\Gamma |\Omega \mathbf{n}| \varphi \varphi^*,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Gamma$ , приходим к следующему соотношению:

$$\int d\mathbf{r} \varphi^* \Omega \nabla \varphi = - \int d\mathbf{r} \varphi \Omega \nabla \varphi^* + \int_{\Gamma} d\Gamma |\Omega \mathbf{n}| \varphi \varphi^*. \quad (2.2.4)$$

Если теперь потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \mathbf{n} > 0, \quad (2.2.5)$$

и принять во внимание условие (1.2.1), то будем иметь

$$\int_{\Gamma} d\Gamma |\Omega \mathbf{n}| \varphi \varphi^* = 0.$$

Таким образом,

$$\int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi^* \Omega \nabla \varphi = - \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi \Omega \nabla \varphi^*. \quad (2.2.6)$$

Изменив в интегральном члене (2.2.3) порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} & \int dr \int d\Omega \int dv \varphi^*(r, v, \Omega) \int d\Omega' \int dv' \varphi(r, v', \Omega') \omega(\mu_0, v' \rightarrow v) = \\ & = \int dr \int d\Omega \int dv \varphi(r, v, \Omega) \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(r, v', \Omega') \omega(\mu_0, v \rightarrow v'). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Принимая во внимание (2.2.6) и (2.2.7), соотношение (2.2.3) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} (\varphi^*, L\varphi) & \equiv \int dr \int d\Omega \int dv \varphi \left[ -\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \right. \\ & \left. - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(r, v', \Omega') \omega(\mu_0, v \rightarrow v') \right]. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Отсюда следует (2.1.12), где

$$L^* \varphi^* \equiv -\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(r, v', \Omega') \omega(\mu_0, v \rightarrow v'). \quad (2.2.9)$$

Если теперь предположить, что в качестве  $\varphi(r, v, \Omega)$  выбирается решение задачи (1.1.9), (1.2.1), то приходим к сопряженной задаче

$$\begin{aligned} -\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(r, v', \Omega') \omega(\mu_0, v \rightarrow v') & = 0; \quad (2.2.10) \\ \varphi^*(r, v, \Omega) & = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n > 0. \end{aligned}$$

Переходим теперь к рассмотрению неоднородного кинетического уравнения (1.3.1) при условии (1.2.1). Если нас интересует некоторый функционал  $I_p[\varphi]$ , то, согласно общей теории, сопряженное уравнение реактора по отношению к функционалу  $I_p[\varphi]$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} -\Omega \nabla \varphi_p^* + \Sigma \varphi_p^* - \int d\Omega' \int dv' \varphi_p^*(r, v', \Omega') \omega(\mu_0, v \rightarrow v') & = \\ & = p(r, v, \Omega); \quad (2.2.11) \\ \varphi_p^*(r, v, \Omega) & = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n > 0, \end{aligned}$$

где  $p(r, v, \Omega)$  — функция, характеризующая тот или иной ядерный процесс. В таком случае

$$I_p[\varphi] = \int dr \int d\Omega \int_0^\infty dv \varphi p; \quad I_p[\varphi_p^*] = \int dr \int d\Omega \int_0^\infty dv \varphi_p^* f. \quad (2.2.12)$$

Приведем выражения для некоторых основных функционалов, встречающихся в теории переноса нейтронов в веществе.

1. Если интересующей нас величиной является число актов некоторого процесса, имеющего сечение  $\Sigma_\alpha(r, v)$  в объеме  $D_\alpha$  внутри рассматриваемой области  $D$ , то это число может быть представлено в виде функционала

$$I_\alpha[\varphi] = \int_{D_\alpha} dr \int d\Omega \int_0^\infty dv \Sigma_\alpha(r, v) \varphi(r, v, \Omega)$$

или в виде функционала

$$I_f[\varphi_\alpha^*] = \int_{D_\alpha} dr \int d\Omega \int_0^\infty dv f(r, v, \Omega) \varphi_\alpha^*(r, v, \Omega),$$

где  $f(r, v, \Omega)$  — распределение источников нейтронов в среде, а  $\varphi_\alpha(r, v, \Omega)$  — решение сопряженного уравнения (2.2.11) при условии  $p = \Sigma_\alpha(r, v)$ ,  $r \in D_\alpha$ , 0 вне этой области.

2. Измерительный прибор регистрирует излучение, попадающее в его объем через поверхность  $\Gamma_\alpha$  с некоторой эффективностью  $\beta(r_\Gamma, v, \Omega)$ . Показания такого прибора могут быть записаны в виде функционала

$$I_\alpha[\varphi] = \int_{\Gamma_\alpha} dr_\Gamma \int_0^\infty dv \int_{\Omega_n > 0} d\Omega \Omega n \beta(r_\Gamma, v, \Omega) \varphi(r_\Gamma, v, \Omega), \quad (2.2.13)$$

где  $n$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Gamma_\alpha$ , направленной внутрь объема прибора. Если распределение источников в среде есть  $f(r, v, \Omega)$ , то этот функционал может быть также записан в виде

$$I_f[\varphi_\alpha^*] = \int dr \int_0^\infty dv \int d\Omega f(r, v, \Omega) \varphi_\alpha^*(r, v, \Omega), \quad (2.2.14)$$

причем функция  $\varphi_\alpha^*(r, v, \Omega)$  удовлетворяет уравнению (2.2.11) с поверхностным «источником»:

$$p = \beta(r, v, \Omega) \cdot \Omega n \delta(r - r_\Gamma).$$

Если измерительный прибор находится вне объема  $D$ , то также можно пользоваться указанными формулами, в которых  $\beta(r, v, \Omega)$  будут характеризовать вероятность для вылетевшего из среды нейтрона попасть в прибор и быть им зарегистрированным. При  $\beta = 1$  функционалы (2.2.13) и (2.2.14) описывают полный поток нейтронов, вылетающих из среды  $D_\alpha$  через поверхность  $\Gamma_\alpha$ .

3. В качестве функционала можно рассматривать и сам поток излучения в некоторой точке  $(r_0, v_0, \Omega_0)$ . В этом случае

$$p = \delta(r - r_0) \delta(v - v_0) \delta(\Omega - \Omega_0),$$

и сопряженная функция  $\varphi_r^*$  есть не что иное, как функция Грина сопряженного уравнения.

Заметим, что в различных задачах могут встречаться и другие функционалы, не сводящиеся к приведенным выше.

Рассмотрим однородное односкоростное уравнение (1.4.13). С помощью преобразований, аналогичных рассмотренным, нетрудно получить однородное сопряженное уравнение

$$-\Omega \nabla \Phi^* + \Sigma \Phi^* - \int d\Omega' \Phi^*(r, \Omega') \omega(\mu_0) = 0; \quad (2.2.15)$$

$$\Phi^*(r, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n > 0.$$

Если рассматривается неоднородное уравнение (1.4.13), то сопряженное по отношению к функционалу  $I_p[\Phi]$  уравнение имеет вид

$$-\Omega \nabla \Phi_p^* + \Sigma \Phi_p^* = \int d\Omega' \Phi_p^*(\mathbf{r}, \Omega') \omega(\mu_0) + \rho(\mathbf{r}, \Omega); \quad (2.2.16)$$

$$\Phi_p^*(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega_n > 0.$$

В качестве  $I_p[\Phi]$  или  $I_f[\Phi_p^*]$  можно взять функционалы, аналогичные тем, которые были рассмотрены выше, с той только разницей, что интегрирование по переменной  $v$  следует исключить.

Переходим теперь к кинетическому уравнению для бесконечной однородной среды. В этом случае воспользуемся однородным уравнением (1.5.1).

Введя скалярное произведение по формуле  $(\varphi, \varphi^*) = \int dv \varphi \varphi^*$ , нетрудно прийти к сопряженному уравнению

$$\Sigma \varphi^*(v) - \int dv' \varphi^*(v') \omega(v \rightarrow v') = 0. \quad (2.2.17)$$

Если рассматривается неоднородное кинетическое уравнение (1.5.1), то сопряженным уравнением по отношению к функционалу  $I_p[\varphi]$  будет следующее:

$$\Sigma \varphi_p^* - \int dv' \varphi_p^*(v') \omega(v \rightarrow v') = \rho(v). \quad (2.2.18)$$

### § 2.3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Сформулируем результаты теории возмущений для неоднородных уравнений реактора. Рассмотрим уравнение (2.1.8). Если свойства среды, с которой взаимодействуют нейтроны, изменяются, т. е. если оператор уравнения (2.1.8) переходит в  $L' = L + \delta L$ , то изменяются само решение задачи (2.1.8)  $\varphi(x)$  и значение функционала  $I_p[\varphi]$ :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x), \quad I_p[\varphi] \rightarrow I_p' \equiv I_p + \delta I_p.$$

Установим связь между изменением оператора  $\delta L$  и изменением функционала  $\delta I_p$ . Уравнение (2.1.8) будем называть невозмущенным. Для возмущенной системы уравнение запишется в виде

$$L' \varphi' = (L + \delta L) \varphi' = f. \quad (2.3.1)$$

Сопряженная функция невозмущенной системы, соответствующая функционалу  $I_p$ , описывается уравнением (2.1.11). Умножая скалярно обе части уравнения (2.3.1) на  $\varphi_p^*$ , а обе части уравнения (2.1.11) на  $\varphi'$ , вычитая полученные результаты один из другого и используя определение сопряженного оператора  $L^*$ , получаем слева

$$(\varphi_p^*, L' \varphi') - (\varphi', L^* \varphi_p^*) = (\varphi_p^*, \delta L \varphi'), \quad (2.3.2)$$

а справа

$$(\varphi_p^*, f) - (\varphi', \rho) = I_p[\varphi] - I_p[\varphi'] = -\delta I_p. \quad (2.3.3)$$

Приравнявая выражения (2.3.2) и (2.3.3), получаем искомое общее соотношение теории возмущений:

$$\delta I_p = -(\varphi_p^*, \delta L \varphi'), \quad (2.3.4)$$

Если вместо уравнений (2.3.1) и (2.1.11) рассмотреть сопряженное возмущенное уравнение

$$(\mathbf{L}^* + \delta\mathbf{L}^*) \varphi_p^*{}' = p \quad (2.3.5)$$

и невозмущенное основное уравнение (2.1.8), то аналогично можно получить соотношение

$$\delta I_p = -(\varphi, \delta\mathbf{L}^* \varphi^*{}'), \quad (2.3.6)$$

которое, конечно, эквивалентно (2.3.4).

Если возмущение оператора  $\mathbf{L}$  (а следовательно, и  $\mathbf{L}^*$ ) мало, так что оно несильно искажает функции  $\varphi$  и  $\varphi_p^*$ , то в формулах (2.3.4) и (2.3.6) можно приближенно положить  $\varphi' = \varphi$  и  $\varphi^*{}' = \varphi^*$ . При этом получим две эквивалентные формулы теории малых возмущений:

$$\delta I_p = -(\varphi_p^*, \delta\mathbf{L}\varphi); \quad \delta I_p = -(\varphi, \delta\mathbf{L}^* \varphi_p^*). \quad (2.3.7)$$

Полученные формулы теории возмущений кроме их прямого использования для оценки различных эффектов и для анализа измерений могут иметь и еще одно весьма важное применение.

При теоретическом рассмотрении и в практических расчетах часто пользуются методом замены исследуемой сложной системы упрощенной моделью. Необходимым условием такой замены является, очевидно, требование, чтобы она не приводила к изменению некоторых основных для рассматриваемого вопроса характеристик системы. Примерами такого подхода в теории диффузии нейтронов могут служить замена гетерогенной среды гомогенной с соответствующим образом усредненными сечениями или методы усреднения по некоторому энергетическому интервалу изменяющихся с энергией сечений. К таким методам относится и метод эффективных граничных условий, заключающийся в замене истинных условий некоторыми упрощенными, но такими, которые приводят к правильному значению потока нейтронов вдали от границы.

Полученные выше формулы теории возмущений позволяют сформулировать весьма общий подход к такого рода задачам.

Пусть рассматриваемая система характеризуется оператором  $\mathbf{L}$ , причем наиболее существенной величиной в рассматриваемой задаче является функционал  $I_p[\varphi]$ . Если искомая простая модель характеризуется оператором  $\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \delta\mathbf{L}$ , то для того, чтобы величина  $I_p$  не изменялась при переходе от истинной системы к модели, необходимо, чтобы

$$\delta I = -(\varphi_p^*, [\mathbf{L}' - \mathbf{L}] \varphi') = 0, \quad (2.3.8)$$

т. е.

$$(\varphi_p^*, \mathbf{L}' \varphi') = (\varphi_p^*, \mathbf{L} \varphi'). \quad (2.3.9)$$

Если нас интересуют несколько величин  $I_{p_1}$ ,  $I_{p_2}$  и т. д., то соответственно получаем несколько условий типа (2.3.9) с решениями  $\varphi_{p_1}^*$ ,  $\varphi_{p_2}^*$  и т. д. Условие (2.3.9) не определяет однозначно искомой эквивалентной модели, но является необходимым условием и вместе с другими соображениями может помочь ее нахождению.

## § 2.4. ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Выведем формулы теории возмущений для уравнений реактора. Сначала рассмотрим однородное уравнение (1.4.1). Представим его в виде

$$\mathbf{M}\varphi + \lambda\mathbf{N}\varphi = 0, \quad (2.4.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\varphi &= \Omega\nabla\varphi + \Sigma\varphi - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') \omega_s(\mu_0, v' \rightarrow v); \\ \mathbf{N}\varphi &= - \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') \omega_f(\mu_0, v' \rightarrow v). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

Здесь  $\lambda$  — характеристический параметр, связанный с коэффициентом размножения нейтронов в реакторе  $k_{эф}$  формулой  $\lambda = 1/k_{эф}$ . Сопряженное уравнение реактора (2.2.10) также представим в виде

$$\mathbf{M}^*\varphi^* + \lambda\mathbf{N}^*\varphi^* = 0, \quad (2.4.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^*\varphi^* &= -\Omega\nabla\varphi^* + \Sigma\varphi^* - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') \omega_s(\mu_0, v \rightarrow v'); \\ \mathbf{N}^*\varphi^* &= - \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') \omega_f(\mu_0, v \rightarrow v'). \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

Уравнения (2.4.1) и (2.4.3) примем в качестве невозмущенных. Если теперь предположить, что физические параметры реактора возмущены, т. е.

$$\Sigma' = \Sigma + \delta\Sigma, \quad \omega'_s = \omega_s + \delta\omega_s, \quad \omega'_f = \omega_f + \delta\omega_f, \quad (2.4.5)$$

то для обеспечения стационарного режима работы реактора необходимо потребовать изменения величины  $k_{эф}$  или параметра  $\lambda$  согласно формуле (2.3.8):

$$\delta\lambda = - (\varphi^*, \delta\mathbf{L}\varphi') / (\varphi^*, \mathbf{N}\varphi'), \quad (2.4.6)$$

где  $\delta\mathbf{L}\varphi' = \delta\mathbf{M}\varphi' + \lambda\delta\mathbf{N}\varphi'$ . Имея это в виду, получим

$$\begin{aligned} \delta\lambda = & - \frac{1}{\int dr \int d\Omega \int dv \varphi' \varphi^*} \left\{ \int dr \int d\Omega \int dv \varphi^* \left[ \varphi' \delta\Sigma - \right. \right. \\ & - \int d\Omega' \int dv' \varphi' \delta\omega_s(\mu_0, v' \rightarrow v) - \\ & \left. \left. - \lambda \int d\Omega' \int dv' \varphi' \delta\omega_f(\mu_0, v' \rightarrow v) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Аналогично для односкоростной задачи

$$\begin{aligned} \delta\lambda = & - \frac{1}{\int dr \int d\Omega \Phi' \Phi^*} \left\{ \int dr \int d\Omega \left[ \Phi^* \delta\Sigma - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int d\Omega' \Phi' \delta\omega_s(\mu_0) - \lambda \int d\Omega' \Phi' \delta\omega_f(\mu_0) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

а для задачи, учитывающей только энергетическую зависимость,

$$\delta\lambda = -\frac{1}{\int dv\varphi' \varphi^*} \left\{ \int dv\varphi^* [\varphi' \delta\Sigma - \right. \\ \left. - \int dv' \varphi' \delta\omega_s(v' \rightarrow v) - \lambda \int dv' \varphi' \delta\omega_f(v' \rightarrow v)] \right\}. \quad (2.4.9)$$

Если теория возмущений формулируется для неоднородных кинетических уравнений, то, согласно изложенной теории, вариации исследуемых функционалов найдутся в следующем виде:

для общего кинетического уравнения

$$\delta I_p = -\int dr \int d\Omega \int dv\varphi_p^* [\varphi' \delta\Sigma - \int d\Omega' \int dv' \varphi' \delta\omega(\mu_0, v' \rightarrow v)]; \quad (2.4.10)$$

для односкоростного кинетического уравнения

$$\delta I_p = -\int dr \int d\Omega \Phi_p^* [\Phi' \delta\Sigma - \int d\Omega' \Phi' \delta\omega(\mu_0)] \quad (2.4.11)$$

и, наконец, для задачи с энергетической зависимостью

$$\delta I_p = -\int dv\varphi_p^* [\varphi' \delta\Sigma - \int dv' \varphi' \delta\omega(v' \rightarrow v)]. \quad (2.4.12)$$

Здесь в качестве  $I_p[\varphi]$  можно рассматривать любой линейный функционал. Если в формулах (2.4.7)—(2.4.9), (2.4.10)—(2.4.12) возмущение в функции потока  $\varphi$  считать малым, то можно  $\varphi'$  заменить на  $\varphi$  и таким образом прийти к соответствующим формулам малых возмущений.



МНОГОГРУППОВЫЕ  
КИНЕТИЧЕСКИЕ  
УРАВНЕНИЯ

§ 3.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Эффективным методом расчета ядерных реакторов является многогрупповой метод. Сущность его состоит в том, что весь интервал скоростей нейтронов разбивается на ряд частичных интервалов — групп, в пределах которых сечения ядерных процессов предполагаются не зависящими от скоростей нейтронов. В действительности, однако, сечения ядерных процессов существенно зависят от скоростей нейтронов, в силу этого становится очевидной необходимость рационального усреднения физических констант многогруппового расчета. Поскольку любое усреднение всегда связано с дополнительными погрешностями в решении задачи, необходимо пользоваться такими методами усреднения, которые бы давали минимальную погрешность в наиболее важной физической характеристике реактора. Такой характеристикой реактора, например, является его критический размер; если же реактор не критический, то — параметр  $k_{эф}$  или любой из функционалов задачи.

Получим многогрупповые системы основных и сопряженных уравнений и одновременно найдем способ усреднения групповых констант.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение Больцмана

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \int d\Omega' \int dv' \varphi(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (3.1.1)$$

Пусть его решение удовлетворяет граничному условию

$$\varphi(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (3.1.2)$$

Задачу (3.1.1), (3.1.2) будем называть невозмущенной.

Как известно, сопряженной задачей по отношению к данной является следующая:

$$-\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* = \int d\Omega' \int dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') w(\mu_0, v \rightarrow v'), \quad (3.1.3)$$

$$\varphi^*(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \mathbf{n} > 0. \quad (3.1.4)$$

Рассмотрим теперь возмущенную задачу, которая отличается от невозмущенной тем, что в ней величины  $\Sigma$  и  $w$  выбраны кусочно-постоянными функциями своих аргументов с возможными разрывами первого рода на границах групп. Решения возмущенных задач будем отмечать штрихом. Тогда основное уравнение реактора будет иметь вид

$$\Omega \nabla \varphi' + \Sigma' \varphi' = \int d\Omega' \int dv' \varphi'(\mathbf{r}, v', \Omega') w'(\mu_0, v' \rightarrow v) \quad (3.1.5)$$

при условии, что

$$\varphi'(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n < 0, \quad (3.1.6)$$

и сопряженное уравнение запишется как

$$-\Omega \nabla \varphi^{*'} + \Sigma' \varphi^{*'} = \int d\Omega' \int dv' \varphi^{*'}(\mathbf{r}, v', \Omega') w'(\mu_0, v \rightarrow v') \quad (3.1.7)$$

при условии, что

$$\varphi^{*'}(\mathbf{r}, v, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n > 0. \quad (3.1.8)$$

### § 3.2. ФОРМУЛЫ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ГРУППОВЫХ КОНСТАНТ

Если основным результатом наших вычислений является критический размер реактора, то групповые константы  $\Sigma'$  и  $w'$  можно выбрать таким образом, чтобы в невозмущенной и возмущенной задаче значение критического размера осталось неизменным. При выполнении этого условия возмущенную задачу будем называть «эквивалентной» невозмущенной.

Для нахождения групповых констант поступим следующим образом. Умножим уравнение (3.1.1) почленно на  $\varphi^{*'}$  и результаты проинтегрируем по всей области определения решения задачи. Далее умножим (3.1.7) на  $\varphi$  и результат также проинтегрируем по указанной области. Вычитая одно из полученных соотношений из другого, приходим к следующему основному функциональному соотношению:

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv (\Sigma - \Sigma') \varphi \varphi^{*' +} \\ & + \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi \int d\Omega' \int dv' \varphi^{*' w'(\mu_0, v' \rightarrow v) -} \\ & - \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi^{*' \int d\Omega' \int dv' \varphi w(\mu_0, v' \rightarrow v) = 0. \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что при граничных условиях (3.1.2) и (3.1.8) по теореме Гаусса—Остроградского члены с производными сократятся.

Изменив порядок интегрирования в последнем слагаемом формулы (3.2.1), получим

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv (\Sigma - \Sigma') \varphi \varphi^{*' -} \int d\mathbf{r} \int d\Omega \int dv \varphi \int d\Omega' \int dv' \varphi^{*' \times} \\ & \times [w(\mu_0, v \rightarrow v') - w'(\mu_0, v \rightarrow v')] = 0. \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы оба слагаемых в соотношении (3.2.2) порознь обращались в нуль. Тогда

$$\sum_n \sum_l \int_{D_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma^l) \varphi \varphi^{*' = 0; \quad (3.2.3)$$

$$\sum_n \sum_j \sum_l \int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^* \times \\ \times [\omega(\mu_0, v \rightarrow v') - \omega] = 0, \quad (3.2.4)$$

где  $D_n$  — фиксированные зоны реактора. Далее потребуем, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv (\Sigma - \Sigma^j) \varphi \varphi^* = 0; \quad (3.2.5)$$

$$\int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^* [\omega(\mu_0, v \rightarrow v') - \omega] = 0. \quad (3.2.6)$$

Из соотношений (3.2.5), (3.2.6) найдем величины  $\Sigma^j$  и  $\omega$ . Они будут определяться формулами

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^j &= \int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi \varphi^* \Big/ \int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \varphi^*; \\ \omega &= \frac{\int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^* \omega(\mu_0, v \rightarrow v')}{\int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^*}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

Существенной особенностью полученных формул является то, что они приводят к групповым величинам, усредненным как с потоком нейтронов в группе  $\varphi$ , так и с ценностью их в возмущенной задаче  $\varphi^*$ .

Из формул (3.2.7) следует, что для вычисления групповых констант требуется знать решение задачи, которое заранее неизвестно. Тем не менее формулы (3.2.7) можно использовать для получения групповых констант. В самом деле, формулы (3.2.7) представлены в виде дробных функционалов и они слабо чувствительны к погрешностям. Таким образом, если решения задач  $\varphi$  и  $\varphi^*$  известны с некоторой погрешностью, то для вычисления групповых констант можно пользоваться приближенными решениями и формулами (3.2.7).

Приведем некоторые обобщения изложенной теории на случай более детального учета анизотропии рассеяния в многогрупповой системе констант. Формулы (3.2.7) дают возможность получить групповые

величины  $\omega$ , не зависящие от  $\Omega'$  и  $\Omega$ . В ряде случаев, однако, требуется более детальное рассмотрение спектра нейтронов в реакторе, так что использование для расчетов многогрупповой системы с эффективным изотропным законом рассеяния нейтронов оказывается недостаточ-

ным. Для получения многогрупповой системы с учетом анизотропии рассеяния будем поступать следующим образом.

Функцию рассеяния нейтронов представим в виде ряда по многочленам Лежандра:

$$\left. \begin{aligned} \omega(\mu_0, v' \rightarrow v) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \omega_m(v' \rightarrow v) P_m(\mu_0); \\ \omega^{j \rightarrow l}(\mu_0) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \omega_m^{j \rightarrow l} P_m(\mu_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.2.8)$$

Рассмотрим далее соотношение (3.2.6), которое теперь запишется в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv\varphi \int_{v_{l-1}}^{v_l} d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} \times \\ \times [\omega_m(v \rightarrow v') - \omega_m^{j \rightarrow l}] P_m(\mu_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Отсюда следует, что величину  $\omega_m^{j \rightarrow l}$  можно определить так:

$$\omega_m^{j \rightarrow l} = \frac{\int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv\varphi \int_{v_{l-1}}^{v_l} d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} \omega_m(v \rightarrow v') P_m(\mu_0)}{\int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv\varphi \int_{v_{l-1}}^{v_l} d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^{*'} P_m(\mu_0)}. \quad (3.2.10)$$

Метод усреднения физических констант в пределах групп в виде (3.2.7), (3.2.10) будем называть простейшим. Этот метод приводит к многогрупповой системе уравнений, решение которой позволяет найти правильный критический размер реактора.

Чтобы возможно точнее приблизиться к истинным нейтронным потокам, можно вывод групповых констант несколько обобщить. Так, основное уравнение (3.1.1) следует умножить на  $A^*(v) \varphi^{*'}$ , а уравнение (3.1.7) — на  $A^*(v) \varphi$  и далее совершить все преобразования, указанные при получении формулы (3.2.1). В результате этих преобразований приходим к следующим формулам усреднения:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^j &= \int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma A^* \varphi \varphi^{*' } \Bigg/ \int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv A^* \varphi \varphi^{*' }; \\ \omega_m^{j \rightarrow l} &= \frac{\int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv\varphi \int_{v_{l-1}}^{v_l} d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' A^* \varphi^{*' } \omega_m(v' \rightarrow v) P_m(\mu_0)}{\int_{D_n} dr \int d\Omega \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv\varphi \int_{v_{l-1}}^{v_l} d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' A^* \varphi^{*' } P_m(\mu_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.11)$$

До сих пор вид функции  $A^*(v)$  не фиксировался. В различных задачах функцию  $A^*(v)$  можно выбирать по-разному, исходя из физического существа задачи. Если имеем дело с задачей на критический размер, то в качестве величины  $A^*(v)$  можно, например, взять решение сопряженной задачи, проинтегрированное по объему реактора, т. е.

$$A^*(v) = \int_D d\mathbf{r} \varphi_0^*(\mathbf{r}, v), \quad (3.2.12)$$

причем функция  $\varphi_0^*(\mathbf{r}, v)$  находится с помощью решения приближенной задачи, например в  $P_1$ -приближении. Следует отметить, что в большинстве случаев удобнее всего выбрать  $A^*$  равной единице, особенно в тех случаях, когда число групп достаточно велико. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что  $A^*(v) = 1$ .

### § 3.3. МНОГОГРУППОВАЯ СИСТЕМА ОСНОВНЫХ И СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РЕАКТОРА

Рассмотрим эквивалентную задачу для потока нейтронов. Если ради простоты опустить штрихи при  $\varphi$ ,  $\Sigma$  и  $w$  ( $\Omega \rightarrow \Omega'$ ), то задача определения критической массы и потока нейтронов будет сведена к решению кинетического уравнения (3.1.1) с граничным условием (3.1.2).

Умножим его почленно на  $dv$  и проинтегрируем по переменной  $v$  в пределах группы  $v_{j-1} < v < v_j$ :

$$\Omega \nabla \varphi^l + \Sigma^l \varphi^l = \int d\Omega' \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv' \varphi \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv w (\mu_0, v' \rightarrow v). \quad (3.3.1)$$

$$\text{Здесь } \varphi_j = \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi.$$

Рассмотрим интеграл в правой части уравнения (3.3.1), обозначив его  $A\varphi$ . Представив его в виде суммы интегралов по группам  $v_{l-1} < v' < v_l$ , нетрудно прийти к следующей приближенной формуле:

$$A\varphi \approx \sum_l \int d\Omega' \varphi^l(\mathbf{r}, \Omega') \overset{l \rightarrow j}{w}(\mu_0) \Delta v_j, \quad (3.3.2)$$

где

$$\Delta v_j = v_j - v_{j-1};$$

$$\overset{l \rightarrow j}{w}(\mu_0) = \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv w(\mu_0, v_l' \rightarrow v); \quad v_{l-1} \leq v_l' \leq v_l. \quad (3.3.3)$$

Введем обозначение

$$\sum \overset{l \rightarrow j}{w}(\mu_0) = \overset{l \rightarrow j}{w}(\mu_0) \Delta v_j. \quad (3.3.4)$$

Тогда многогрупповая система кинетических уравнений запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi^l + \Sigma^l \varphi^l &= \sum_l \int d\Omega' \varphi^l(\mathbf{r}, \Omega') \sum_{l \rightarrow l} (\mu_0); \\ \varphi^l(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega_n < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.5)$$

Для получения многогрупповой системы сопряженных уравнений будем исходить из эквивалентного сопряженного уравнения (3.1.3) с граничным условием (3.1.4). Для интервала скоростей  $v_{j-1} < v < v_j$  это уравнение можно записать в следующем виде:

$$-\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma^l \varphi^* = \sum_l \int d\Omega' \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \varphi^*(\mathbf{r}, v', \Omega') \omega^{l \rightarrow l}(\mu_0). \quad (3.3.6)$$

Предположим, что решение (3.3.6) на интервале  $v_{j-1} < v < v_j$  есть слабо меняющаяся по  $v$  функция. Соответствующие функции будем обозначать  $\varphi^{*l}(\mathbf{r}, \Omega)$ . Тогда уравнение (3.3.6) переписется так:

$$-\Omega \nabla \varphi^{*l} + \Sigma^l \varphi^{*l} = \sum_l \int d\Omega' \varphi^{*l}(\mathbf{r}, \Omega') \sum_{l \rightarrow l} (\mu_0). \quad (3.3.7)$$

Граничными условиями для уравнений (3.3.7) будут следующие:

$$\varphi^{*l}(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega_n > 0. \quad (3.3.8)$$

Итак, мы пришли к многогрупповой системе сопряженных кинетических уравнений.

В заключение приведем формулы для многогруппового расчета, учитывающие свойства функции  $\varphi^*$ . Поскольку она не зависит от скорости нейтрона в пределах группы, можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^l &= \int_{D_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*l} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \Sigma \varphi / \int_{D_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*l} \varphi^l; \\ \sum_{l \rightarrow l} (\mu_0) &= \frac{\Delta v_j}{4\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \omega_m P_m(\mu_0), \end{aligned} \right\} \quad (3.3.9)$$

где

$$\omega_m^{l \rightarrow l} = \frac{\int_{D_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*l} \int d\Omega' \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi \int_{v_{l-1}}^{v_l} dv' \omega_m(v \rightarrow v') P_m(\mu_0)}{\int_{D_n} d\mathbf{r} \int d\Omega \varphi^{*l} \int d\Omega' \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv \varphi P_m(\mu_0)}. \quad (3.3.10)$$

В формулах (3.3.9) и (3.3.10) величины  $\omega_m(v \rightarrow v')$  являются коэффициентами разложения функции  $\omega_m(\mu_0, v \rightarrow v')$  в ряд (3.2.8) по многочленам Лежандра.

Формулы усреднения групповых констант (3.3.9) содержат как неизвестный поток нейтронов  $\varphi$ , так и ценность  $\varphi^{*'}$ . Практически во многих случаях эти функции можно получить на основе изучения простых модельных задач, например в диффузионном приближении. В последние годы имел место прогресс в области использования метода Монте-Карло именно для получения усреднения групповых констант по формулам (3.3.9). Такое направление является перспективным для теории групповых методов [179].

### § 3.4. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА ГРУПП

До сих пор нас интересовали однородные задачи на критический размер реактора. Однако во многих случаях приходится иметь дело с задачами неоднородными. Для решения таких задач можно воспользоваться многогрупповым методом, сформулированным в предыдущих параграфах главы. Однако соответствующие многогрупповые уравнения не будут в таком случае «наилучшими» с точки зрения существа задачи.

В самом деле, указанные многогрупповые уравнения построены таким образом, чтобы критический размер реактора, рассчитанный с помощью многогрупповой системы, был правильным. Что касается неоднородных задач, то они связаны с отысканием тех или иных линейных функционалов, обсужденных в гл. 2. В этом случае, очевидно, многогрупповые системы уравнений желательнее получить в предположении, что интересующий нас функционал в результате перехода от невозмущенной задачи к многогрупповой не изменится.

Итак, рассмотрим задачу (1.3.1). Пусть линейный функционал дается выражением (2.1.10). Тогда сопряженной задачей по отношению к тому функционалу будет задача (2.2.11). Эти задачи будем называть невозмущенными.

Введем в рассмотрение возмущенные задачи, которые отличаются от невозмущенных тем, что функции  $\Sigma$  и  $\omega(\mu_0, v' \rightarrow v)$ , входящие в соответствующие уравнения, заменяются величинами, не зависящими в пределах групп от скорости нейтрона.

Запишем формулу теории возмущений для функционала  $I_p[\varphi]$ :

$$\delta I_p[\varphi] = - \int dr \int d\Omega \int dv [(\Sigma' - \Sigma) \varphi \varphi^{*'} - \varphi \int d\Omega' \int dv' \varphi^{*'} \times \\ \times [\omega(\mu_0, v \rightarrow v') - \omega'(\mu_0, v \rightarrow v')]], \quad (3.4.1)$$

где штрихом отмечены функции, соответствующие возмущенной задаче. Потребуем теперь, чтобы  $\delta I = 0$ . Рассуждая далее так же, как и в случае задачи на критический размер реактора, приходим к следующим задачам:

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi^j + \Sigma^j \varphi^j - \sum_i \int d\Omega' \varphi^i(\mathbf{r}, \Omega') \sum_{l \rightarrow j} (\mu_0) = f^j, \\ \varphi^j(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.2)$$

где

$$f^j = \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv f(r, v, \Omega) \quad (3.4.3)$$

для основных уравнений, и

$$\left. \begin{aligned} -\Omega \nabla \varphi^{*j} + \Sigma^j \varphi^{*j} - \sum_l \int d\Omega' \varphi^{*l}(r, \Omega') \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0) &= p^j, \\ \varphi^{*j}(r, \Omega) &= 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n > 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.4)$$

где

$$p^j = \frac{1}{\Delta v_j} \int_{v_{j-1}}^{v_j} dv p$$

для сопряженных уравнений. Здесь величины  $\Sigma^j$  и  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0)$  снова определяются формулами (3.3.9), где в качестве функций  $\varphi$  и  $\varphi^{*j}$  необходимо взять решения соответствующих неоднородных задач.

### § 3.5. МНОГОГРУППОВАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

На основе полученных многогрупповых систем основных и сопряженных уравнений реактора можно сформулировать соответствующую теорию возмущений. Рассмотрим многогрупповую систему основных уравнений (3.35). Эту систему будем называть невозмущенной.

Рассмотрим далее возмущенную систему, отличающуюся от (3.3.5) тем, что в ней величины  $\Sigma^j$  и  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}$  заменены  $\Sigma'^j$  и  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}'$ , причем

$$\Sigma'^j = \Sigma^j + \delta \Sigma^j; \quad \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}' = \overset{l \rightarrow j}{\Sigma} + \delta \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}. \quad (3.5.1)$$

Запишем возмущенную систему уравнений реактора:

$$\left. \begin{aligned} -\Omega \nabla \varphi^{*j} + \Sigma'^j \varphi^{*j} - \sum_l \int d\Omega' \varphi^{*l'} \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}'(\mu_0) &= 0; \\ \varphi^{*j}(r, \Omega) &= 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega n > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.2)$$

В качестве характеристического параметра задачи примем  $\lambda = 1/k_{эф}$ .

В этом случае величины  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}$  и  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}'$  необходимо представить в виде

$$\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0) = \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}_s(\mu_0) + \lambda \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}_f; \quad \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}'(\mu_0) = \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}'_s(\mu_0) + \lambda' \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}'_f, \quad (3.5.3)$$

где  $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ , причем  $\delta\lambda$  — искомая величина.

Уравнения (3.3.5) почленно умножим на  $\varphi^{*j}$  и просуммируем по всем  $j$ , а уравнения (3.5.2) умножим на  $\varphi'^j$  и также просуммируем по  $j$ . Полученные соотношения проинтегрируем по всему объему реактора, по всем телесным углам единичной сферы и вычтем полученные результаты один из другого. Тогда, используя свойства сопряжен-



ности, а также граничные условия для функций  $\varphi^j$  и  $\varphi^{*j}$ , нетрудно прийти к равенству

$$\sum_j \int d\tau \int d\Omega \delta \Sigma^j \varphi^j \varphi^{*j} - \sum_j \sum_l \int d\tau \int d\Omega \varphi^{*l} \int d\Omega' \varphi^l \times \\ \times \left[ \delta \Sigma_s^{l \rightarrow j}(\mu_0) + \lambda' \delta \Sigma_f^{l \rightarrow j} + \delta \lambda \Sigma_f^{l \rightarrow j} \right] = 0. \quad (3.5.4)$$

Разрешив соотношение (3.5.4) относительно  $\delta \lambda$ , получим\*

$$\delta \lambda = - \frac{\sum_j \int d\tau \int d\Omega \delta \Sigma^j \varphi^j \varphi^{*j} - \sum_j \sum_l \int d\tau \int d\Omega \varphi^{*l} \int d\Omega' \varphi^l \left[ \delta \Sigma_s^{l \rightarrow j}(\mu_0) + \lambda' \delta \Sigma_f^{l \rightarrow j} \right]}{\sum_j \sum_l \int d\tau \varphi_0^l \varphi_0^{*l} \Sigma_f^{l \rightarrow j}}, \\ \text{где } \varphi_0^j = \int d\Omega \varphi^j(\mathbf{r}, \nu, \Omega). \quad (3.5.5)$$

Если возмущения физических параметров малы, то приходим к формуле малых возмущений

$$\delta \lambda = - \frac{\sum_j \int d\tau \int d\Omega \delta \Sigma^j \varphi^j \varphi^{*j} - \sum_j \sum_l \int d\tau \int d\Omega \varphi^{*l} \int d\Omega' \varphi^l \delta \Sigma^{l \rightarrow j}(\mu_0)}{\sum_j \sum_l \int d\tau \varphi_0^l \varphi_0^{*l} \Sigma_f^{l \rightarrow j}}. \quad (3.5.6)$$

Аналогичным образом могут быть получены формулы теории возмущений для неоднородных уравнений.

---

\* Формулы (3.5.5) и (3.5.6) получены в работе [230].

### ОДНОГРУППОВОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

#### § 4.1. ЭФФЕКТИВНОЕ ОДНОГРУППОВОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

При расчетах критических масс реакторов имеет существенное значение эффективная одногрупповая теория. Сущность ее состоит в том, что многогрупповая система кинетических уравнений реактора решается приближенными методами. Затем с помощью приближенного решения усредняются физические константы. В результате нетрудно прийти к одногрупповой задаче, которая решается с помощью хорошо разработанных методов.

Одногрупповые основные и сопряженные уравнения оказываются весьма полезными во многих случаях. Например если требуется более точный расчет  $k_{эф}$  или критического размера реактора, то имеет смысл сначала выполнить необходимый расчет с помощью простых методов в многогрупповом приближении, усреднить физические константы и прийти к одногрупповой задаче, которую затем решать более точными методами. Одногрупповой метод оказывается весьма полезным также при решении задач в дву- и трехмерной геометриях. Для этого сначала решаются соответствующие задачи в предположении одномерной геометрии, затем получают усредненные константы и окончательный расчет проводится для дву- или трехмерной задачи в рамках одногрупповой методики. При таком подходе имеется возможность получить весьма точное значение  $k_{эф}$  или критического размера реактора. Следует, однако, помнить, что одногрупповая задача приводит только к правильным значениям  $k_{эф}$  или критического размера. Остальные характеристики реактора, такие, как интегральный поток нейтронов по всем группам или число вторичных нейтронов деления, вообще говоря, получаются неточными.

Существенную роль одногрупповая теория играет при решении задач на компенсацию реактивности реактора с помощью системы управления и защиты. Эта задача тесно связана с расчетом компенсации реактора. Она может быть решена указанным методом в рамках одногрупповой теории в различных геометриях.

Рассмотрим многогрупповую систему основных уравнений реактора (3.3.5):

$$\Omega \nabla \varphi^j + \Sigma^j \varphi^j - \sum_i \int d\Omega' \varphi^i(\mathbf{r}, \Omega') \bar{\Sigma}^i(\mu_0) = 0 \quad (4.1.1)$$

при условии

$$\varphi^j(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \quad (4.1.2)$$

Наряду с многогрупповой системой основных уравнений рассмотрим одногрупповое сопряженное уравнение

$$-\Omega \nabla \varphi^* + \Sigma \varphi^* - \int d\Omega' \varphi^*(\mathbf{r}, \Omega') w(\mu_0) = 0 \quad (4.1.3)$$

при условии

$$\varphi^*(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \mathbf{n} > 0, \quad (4.1.4)$$

где  $\Sigma(\mathbf{r})$  и  $w(\mu_0)$  — пока произвольные величины.

Функции  $\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0)$  и  $w(\mu_0)$  представим в виде рядов по многочленам Лежандра:

$$\left. \begin{aligned} \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0) &= \frac{1}{4\pi} \sum_n (2n+1) \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}_n P_n(\mu_0); \\ w(\mu_0) &= \frac{1}{4\pi} \sum_n (2n+1) w_n P_n(\mu_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.5)$$

где

$$\overset{l \rightarrow j}{\Sigma}_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0) P_n(\mu_0) d\mu_0; \quad w_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 w(\mu_0) P_n(\mu_0) d\mu_0.$$

Величины  $\Sigma$  и  $w$  найдем из условия, согласно которому критический размер реактора, определяемый системой основных уравнений (4.1.1) и сопряженным уравнением (4.1.3), должен быть одним и тем же. Поступим следующим образом. Умножим уравнение (4.1.1) почленно на  $\varphi^*$ , а уравнение (4.1.3) — на  $\varphi^j$ . Результаты просуммируем по  $j$ , проинтегрируем по  $\mathbf{r}$  и  $\Omega$  и вычтем один из другого. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_j \int d\Omega \int dr \left\{ (\varphi^* \Omega \nabla \varphi^j + \varphi^j \Omega \nabla \varphi^*) + (\Sigma^j - \Sigma) \varphi^* \varphi^j - \right. \\ & \left. - \left[ \varphi^j \int d\Omega' \varphi^* w(\mu_0) - \varphi^* \sum_j \int d\Omega' \varphi^j \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0) \right] \right\} = 0. \quad (4.1.6) \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (4.1.2) и (4.1.4) по теореме Гаусса—Остроградского члены с производными сократятся, а соотношение (4.1.6) примет вид

$$\begin{aligned} & \int d\Omega \int dr \left\{ (\overline{\Sigma^j \varphi^j} \varphi^* - \Sigma \varphi^* \overline{\varphi^j}) - \left[ \overline{\varphi^j} \int d\Omega' \varphi^* w(\mu_0) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \varphi^* \sum_j \int d\Omega' \varphi^j \overset{l \rightarrow j}{\Sigma}(\mu_0) \right] \right\} = 0, \quad (4.1.7) \end{aligned}$$

где чертой сверху отмечено суммирование соответствующих величин по индексу  $j$ , т. е.  $\overline{A^j} = \sum_j A^j$ .

Принимая во внимание тот факт, что

$$\int d\Omega \int dr \bar{\varphi}^j \int d\Omega' \varphi^* \omega(\mu_0) = \int d\Omega \int dr \varphi^* \int \bar{\varphi}^j \omega(\mu_0) d\Omega',$$

соотношение (4.1.7) окончательно приведем к следующему виду:

$$\int d\Omega \int dr \left\{ \varphi^* (\bar{\Sigma}^j \bar{\varphi}^j - \Sigma \bar{\varphi}^j) - \varphi^* \left[ \int d\Omega' \bar{\varphi}^j \omega(\mu_0) - \int d\Omega' \varphi^j \overline{\sum_l^j \sum_l^l}(\mu_0) \right] \right\} = 0. \quad (4.1.8)$$

Равенство (4.1.8) будет выполнено, если потребовать, чтобы выполнялись соотношения

$$\left. \begin{aligned} \int d\Omega \int dr \varphi^* (\bar{\Sigma}^j \bar{\varphi}^j - \Sigma \bar{\varphi}^j) &= 0; \\ \int d\Omega \int dr \varphi^* \int d\Omega' \left[ \bar{\varphi}^j \omega(\mu_0) - \varphi^j \overline{\sum_l^j \sum_l^l}(\mu_0) \right] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.9)$$

где интегрирование по  $\mathbf{r}$  ведется в пределах данной зоны реактора. Второе соотношение из (4.1.9) преобразуем с учетом (4.1.5):

$$\sum_n (2n+1) \int dr \left[ w_n \int d\Omega \varphi^* \int d\Omega' \bar{\varphi}^j P_n(\mu_0) - \int d\Omega \varphi^* \int d\Omega' \bar{w}_n^j \bar{\varphi}^j P_n(\mu_0) \right] = 0, \quad (4.1.10)$$

где  $w_n^j = \sum_l^{j \rightarrow l} w$ .

Соотношение (4.1.10) выполнится, если положить

$$\int dr \left[ w_n \int d\Omega \varphi^* \int d\Omega' \bar{\varphi}^j P_n(\bar{\mu}_0) - \int d\Omega \varphi^* \int d\Omega' \bar{w}_n^j \bar{\varphi}^j P_n(\mu_0) \right] = 0. \quad (4.1.11)$$

Из первого уравнения (4.1.9) и равенства (4.1.11) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \int d\Omega \int_{D_n} dr \varphi^* \bar{\Sigma}^j \bar{\varphi}^j / \int d\Omega \int_{D_n} dr \varphi^* \bar{\varphi}^j; \\ w_n &= \int d\Omega \int_{D_n} dr \varphi^* \int d\Omega' \bar{w}_n^j \bar{\varphi}^j P_n(\mu_0) / \int d\Omega \int_{D_n} dr \varphi^* \int d\Omega' \bar{\varphi}^j P_n(\mu_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.1.12)$$

Таким образом, эффективные одногрупповые константы найдены и можно сформулировать односкоростную теорию. В самом деле, задача на критический размер реактора теперь нетрудно получить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi &= \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') \omega(\mu_0); \\ \varphi(\mathbf{r}, \Omega) &= 0 \text{ на } \Gamma, \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.13)$$

К основной задаче (4.1.13) присоединим сопряженную (4.1.3), (4.1.4). В том случае, когда рассеяние изотропно,

$$\omega(\mu_0) = (1/4\pi)(\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f), \quad (4.1.14)$$

где величины  $\Sigma_s$  и  $\nu_f \Sigma_f$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \Sigma_s &= \int_{D_n} dr \overline{\Sigma_s^j \varphi_0^j} \varphi_0^* / \int_{D_n} dr \overline{\varphi_0^j} \varphi_0^*; \\ \nu_f \Sigma_f &= \int_{D_n} dr \nu_f \overline{\Sigma_f^j \varphi_0^j} \varphi_0^* / \int_{D_n} dr \overline{\varphi_0^j} \varphi_0^*, \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

причем

$$\varphi_0^j = (1/4\pi) \int d\Omega \varphi^j(\mathbf{r}, \Omega); \quad \varphi_0^* = (1/4\pi) \int d\Omega \varphi^*(\mathbf{r}, \Omega). \quad (4.1.16)$$

## § 4.2. ОБЩИЙ МЕТОД ОДНОГРУППОВОГО УСРЕДНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ КОНСТАНТ

В § 4.1 был рассмотрен простейший метод эффективного одногруппового усреднения физических констант. Изложим более общий метод усреднения, который может быть применен не только к решению задач на критическую массу, но и на прохождение нейтронов через вещество.

Рассмотрим многогрупповую систему основных уравнений (4.1.1) при условии (4.1.2), а также одногрупповое сопряженное уравнение реактора (4.1.3) при условии (4.1.4) и введем некоторые, пока произвольные, величины  $A^{*j}$ .

Умножим (4.1.1) почленно на  $A^{*j} \varphi^*$ , а (4.1.4) — на  $A^{*j} \varphi^j$ . Результаты просуммируем по  $j$ , затем проинтегрируем по  $\mathbf{r}$  и  $\Omega$  и вычтем один из другого. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_j A^{*j} \int d\Omega \int dr \left\{ (\varphi^* \Omega \nabla \varphi^j + \varphi^j \Omega \nabla \varphi^*) + (\Sigma^j - \Sigma) \varphi^* \varphi^j \right\} - \\ - \left[ \varphi^j \int d\Omega' \varphi^* \omega(\mu_0) - \varphi^* \sum_j \int d\Omega' \varphi^j \sum_{l \rightarrow j} (\mu_0) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Так же как и в предыдущем случае, с учетом граничных условий (4.1.2) и (4.1.4) по теореме Гаусса—Остроградского члены с производными сократятся. Тогда соотношение (4.2.1) переходит в следующее:

$$\begin{aligned} \int d\Omega \int dr \left\{ \overline{(\Sigma^j \varphi^j A^{*j} \varphi^* - \Sigma \varphi^* \overline{A^{*j} \varphi^j})} - \left[ \overline{A^{*j} \varphi^j} \int d\Omega' \varphi^* \omega(\mu_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - \overline{\varphi^* A^{*j} \sum_j \int d\Omega' \varphi^j \sum_{l \rightarrow j} (\mu_0)} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования в последнем слагаемом формулы (4.2.2), получим

$$\int d\Omega \int dr \left\{ \varphi^* (\overline{\Sigma^j \varphi^j A^{*j}} - \overline{\Sigma \varphi^j A^{*j}}) - \varphi^* \left[ \int d\Omega' \overline{\varphi^j A^{*j}} \omega(\mu_0) - \int d\Omega' \overline{\varphi^j \Sigma^j A^{*j}} \sum_i^{j \rightarrow i} (\mu_0) \right] \right\} = 0. \quad (4.2.3)$$

Потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\left. \begin{aligned} \int d\Omega \int dr \varphi^* (\overline{\Sigma^j \varphi^j A^{*j}} - \overline{\Sigma \varphi^j A^{*j}}) &= 0; \\ \int d\Omega \int dr \varphi^* \int d\Omega' \left[ \overline{\varphi^j A^{*j}} \omega(\mu_0) - \overline{\varphi^j \Sigma^j A^{*j}} \sum_i^{j \rightarrow i} \right] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

где интегрирование по  $r$  ведется в пределах данной зоны реактора  $D_n$ .

Приняв во внимание второе соотношение из (4.1.5), выполним дальнейшие преобразования, аналогичные приведенным в § 4.1. В результате получим формулы группового усреднения констант:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \frac{\int d\Omega \int_{D_n} dr \overline{\Sigma^j \varphi^j A^{*j}} \varphi^*}{\int d\Omega \int_{D_n} dr \overline{\varphi^j A^{*j}} \varphi^*}; \\ \omega_n &= \frac{\int d\Omega \int_{D_n} dr \varphi^* \int d\Omega' P_n(\mu_0) \overline{\varphi^j \Sigma^j A^{*j}} \sum_i^{j \rightarrow i} \omega_n A^{*i}}{\int d\Omega \int_{D_n} dr \varphi^* \int d\Omega' P_n(\mu_0) \overline{\varphi^j A^{*j}}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

Итак, усредненные физические константы получены. Единственная неопределенная здесь величина  $A^{*j}$ . Она выбирается произвольно. По существу,  $A^{*j}$  выбирается из физических соображений. Для простоты сначала предположим, что решение многогрупповой сопряженной системы уравнений представляется в виде

$$\varphi^{*j}(r, \Omega) = A^{*j} \varphi^*(r, \Omega), \quad (4.2.6)$$

т. е. имеет место разделение переменных. В таком случае формулы усреднения переписутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \frac{\int d\Omega \int_{D_n} dr \overline{\Sigma^j \varphi^j \varphi^{*j}}}{\int d\Omega \int_{D_n} dr \overline{\varphi^j \varphi^{*j}}}; \\ \omega_n &= \frac{\int d\Omega \int_{D_n} dr \int d\Omega' P_n(\mu_0) \overline{\varphi^j \Sigma^j \varphi^{*j}} \sum_i^{j \rightarrow i} \omega_n \varphi^{*i}}{\int d\Omega \int_{D_n} dr \int d\Omega' P_n(\mu_0) \overline{\varphi^j \varphi^{*j}}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

Полагая в формулах (4.2.5)  $A^{*l} = 1$ , приходим к простейшему случаю усреднения, рассмотренному в § 4.1.

Более точным алгоритмом усреднения групповых констант будет следующий. Величины  $A^{*l}$  определим формулой

$$A^{*l} = \int d\Omega \int d\mathbf{r} \varphi^{*l}(\mathbf{r}, \Omega); (v_{j-1} \leq v \leq v_j), \quad (4.2.8)$$

где интегрирование проводится по всему объему реактора. По своей структуре  $A^{*l}$  имеет смысл средней ценности нейтронов данной группы по отношению к  $k_{эф}$ . Это значит, что усреднение групповых констант будет проводиться с учетом как потока нейтронов в группах, так и ценности нейтронов по отношению к  $k_{эф}$ .

Если далее в качестве функции  $\varphi^*(\mathbf{r}, \Omega)$  взять усредненную по всем группам ценность нейтронов

$$\varphi^*(\mathbf{r}, \Omega) = c \sum_l \varphi^{*l}(\mathbf{r}, \Omega),$$

где  $c$  — несущественная нормировочная константа, то с учетом (4.2.8) приходим к групповому усреднению констант по формулам (4.2.5). Таким образом, для использования метода усреднения необходимо знать многогрупповое решение для потока и ценности нейтронов. В качестве  $\varphi^*$  выбрана усредненная по всем группам ценность нейтронов. В подавляющем большинстве случаев это оправдано. Однако для уточнения алгоритма можно воспользоваться методом последовательных приближений. По указанному способу усредним константы и, решив задачу (4.1.3), (4.1.4) найдем  $\varphi^*$ , которое далее снова используем для усреднения констант, и т. д. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока одnogрупповые физические константы не будут получены с требуемой точностью.

В заключение полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. При получении формул (4.1.12) и (4.2.5) было отмечено, что усреднение констант проводится по отдельным зонам реактора  $D_n$ , которые выбираются произвольно. Если объем зоны  $D_n$  устремить к нулю, то в соответствующих формулах интегрирование по  $\mathbf{r}$  исчезнет и ценности нейтронов  $\varphi^*(\mathbf{r})$  сократятся. В результате из (4.2.5) получатся следующие формулы для одnogрупповых констант:

$$\Sigma = \frac{\int d\Omega \overline{\Sigma^l \varphi^l A^{*l}}}{\int d\Omega \overline{\varphi^l A^{*l}}}; \quad \omega_n = \frac{\int d\Omega \int d\Omega' P_n(\mu_0) \overline{\varphi^l \sum_l \omega_n A^{*l}}}{\int d\Omega \int d\Omega' P_n(\mu_0) \overline{\varphi^l A^{*l}}}.$$

Найденные функции  $\Sigma$  и  $\omega_n$  — функции точки, т. е.  $\Sigma = \Sigma(\mathbf{r})$  и  $\omega_n = \omega_n(\mathbf{r})$ . Таким образом, приходим к одnogрупповым уравнениям (4.1.13) и (4.1.3) с переменными коэффициентами.

## РЕШЕНИЕ ОДНОСКОРОСТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

### § 5.1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА И НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Некоторые математические методы решений односкоростных задач переноса будут рассмотрены в последующих главах. Введем новые обозначения; некоторые из них стали привычными в математической литературе, а другие удобны для математических преобразований. Пусть  $R_3(x_1, x_2, x_3)$  — трехмерное евклидово пространство;  $x = (x_1, x_2, x_3)$  — точка этого пространства с координатами  $x_1, x_2, x_3$ ;  $\Gamma$  — вектор, выходящий из начала координат в точку  $x$  [иногда для координат точек пространства  $R_3$  будем пользоваться и другими обозначениями:  $(x, y, z)$ ]. Пусть  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  — единичный вектор ( $\sum_{i=1}^3 \Omega_i^2 = 1$ ), а  $\Omega$  — поверхность единичной сферы в  $R_3$  с центром в начале координат. Тогда  $\Omega$  обозначает переменную точку  $\Omega$  со сферическими координатами  $\vartheta, \psi$  ( $0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi$ ):

$$\Omega_1 = \sin \vartheta \cos \psi; \quad \Omega_2 = \sin \vartheta \sin \psi; \quad \Omega_3 = \cos \vartheta.$$

Элемент поверхности сферы  $\Omega$  выразится формулой:

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi.$$

Пусть  $\omega$  — вектор  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ;  $\omega x = \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i$ , а  $R_3 \times \Omega$  — декартово произведение пространств  $R_3$  и  $\Omega$ , состоящее из пар  $(x, \Omega)$ , где  $\Omega$  пробегает  $\Omega$ , а  $x \in R_3$ . Пусть  $\varphi(x, \Omega)$  — функция, определенная на множестве  $D \times \Omega$ , где  $D$  — область в  $R_3$ , в которой будем рассматривать процесс переноса нейтронов. Предполагаем, что  $D$  — открытое ограниченное выпуклое множество в  $R_3$  и что начало координат  $R_3$  принадлежит  $D$ . Пусть  $\bar{D}$  — замыкание  $D$ ;  $\Gamma = \bar{D} \setminus D$  — граница  $D$ ;  $n$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$ . Пусть в  $D$  и  $\Omega$  введены меры Лебега и соответствующие им процессы интегрирования, в частности,

$$S\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \varphi(x, \Omega') d\Omega', \quad (5.1.1)$$

где

$$\int_{\Omega} \varphi(x, \Omega') d\Omega' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x, \psi', \vartheta') d\Omega'.$$



Под выражением  $\Omega \nabla \varphi$  будем понимать равенство

$$\Omega \nabla \varphi = \sum_1^3 \Omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

и обозначим  $\mu_0 = \Omega \Omega' = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \Omega'_i$ , где  $\Omega, \Omega' \in \Omega$ .

Пусть  $l(x)$  — измеримая, положительная и ограниченная в  $D$  функция, такая, что

$$0 < a_0 < \inf \text{vrai } l(x) \leq l(x) \leq \sup \text{vrai } l(x) < \bar{a} < \infty,$$

а  $g(x, \mu_0)$  — индикатриса рассеяния, для которой  $Sg = 1$ .

Рассмотрим кинетическое уравнение для функции  $\varphi(x, \Omega)$ , определенное в области  $D$ :

$$l(x) \Omega \nabla \varphi + \varphi = c(x) \bar{S} \varphi + f_1(x, \Omega), \quad (5.1.2)$$

где

$$\bar{S} \varphi = S(g\varphi). \quad (5.1.3)$$

Пусть  $\Sigma = l^{-1}$ ;  $\Sigma_s = cl$ ;  $f(x, \Omega) = f_1(x, \Omega)/l$ . Тогда (5.1.2) запишется в виде

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \Sigma_s \bar{S} \varphi + f(x, \Omega). \quad (5.1.4)$$

Будем рассматривать кинетическое уравнение, заданное как формулой (5.1.2), так и формулой (5.1.4). Функцию  $f_1(x, \Omega)$  предполагаем принадлежащей некоторому подпространству функций. Дополнительные требования на  $g$  и  $f_1$  наложим позже.

Краевые задачи для уравнения (5.1.2), соответствующие физическим задачам для реактора и ячеек, можно сформулировать следующим образом. Требуется найти в области  $D$  решение  $\varphi(x, \Omega)$  уравнения (5.1.2), удовлетворяющее на границе  $\Gamma$  условиям

$$\varphi(x, \Omega)|_{\Gamma} = \int_{n\Omega' > 0} R(x, \Omega, \Omega') \varphi(x, \Omega') d\Omega' + V \text{ при } n\Omega < 0, \quad (5.1.5)$$

где  $V$  — положительная функция, определенная на  $\Gamma$ . Функция  $R(x, \Omega, \Omega')$  характеризует возврат в область  $D$  вылетающих из области нейтронов. Пусть однородная задача (5.1.2), (5.1.5) имеет только нулевое решение. Значение  $R \equiv 0$  соответствует случаю, когда извне в область  $D$  действует источник нейтронов  $V$ , а вылетающие из области  $D$  нейтроны не задерживаются границей  $\Gamma$ . Обычно краевое условие (5.1.5) рассматривают в виде

$$\varphi(x, \Omega)|_{\Gamma} = 0 \text{ при } n\Omega < 0. \quad (5.1.6)$$

При условии (5.1.6) в работах В. С. Владимирова [41, 42] решены такие вопросы, как существование, единственность, гладкость и непрерывная зависимость от функций  $l, c, g, f_1$  решений задачи (5.1.2), исследованы свойства собственных значений и функций одноуровневой

задачи. Ниже мы воспроизведем некоторые построения и результаты этих работ.

Зафиксируем некоторое направление  $\Omega \in \Omega$ ; обозначим  $\pi_\Omega$  ортогональную проекцию  $D$  на плоскость, перпендикулярную направлению  $\Omega$  и проходящую через фиксированную точку  $O$ . Пусть  $P$  обозначает переменную точку  $\pi_\Omega$ . Рассмотрим прямую  $P + \xi\Omega$  ( $-\infty < \xi < \infty$ ) и обозначим  $\pi_{\Omega P}$  множество, получающееся от пересечения этой прямой с областью  $D$ ;  $\pi_{\Omega P}$  почти для всех точек  $(P, \Omega)$  из  $\Omega \times \pi_\Omega$  является открытым интервалом:

$$\pi_{\Omega P} = \{P + \xi\Omega : \zeta(\Omega, P) < \xi < \eta(\Omega, P)\}. \quad (5.1.7)$$

Для каждого  $\Omega$  эта формула дает разложение множества  $D$  на декартово произведение двумерного множества  $\pi_\Omega$  и одномерного множества  $\pi_{\Omega P}$ :  $D = \pi_\Omega \times \pi_{\Omega P}$ , выражающее взаимно однозначное преобразование точек  $x \in D$  в точки  $(P, \xi)$  из  $\pi_\Omega \times \pi_{\Omega P}$  по формуле  $x = P + \xi\Omega$ . Дифференциальное выражение левой части (5.1.2) может быть записано в точке  $(x, \Omega) = (P, \Omega, \xi)$  в виде

$$A\varphi = l(x) \Omega \nabla \varphi + \varphi = l(P + \xi\Omega) \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(P + \xi\Omega, \Omega) + \varphi(P + \xi\Omega, \Omega). \quad (5.1.8)$$

Пусть

$$\Gamma_{-\Omega} = \{P + \zeta(P, \Omega) \Omega, P \in \pi_\Omega\}; \quad \Gamma_\Omega = \{P + \eta(P, \Omega) \Omega, P \in \pi_\Omega\}.$$

Рассмотрим краевую задачу (5.1.2), (5.1.6), тогда  $\varphi(x, \Omega) = 0$ , если  $(x, \Omega) \in \Omega \times \Gamma_{-\Omega}$ .

Определим класс функций  $\tilde{D}_0$ , который будет областью задания оператора  $A$ , определенного формулой (5.1.8). К классу  $\tilde{D}_0$  отнесем функции  $\varphi(x, \Omega) = \varphi(P + \xi\Omega, \Omega)$ , которые обладают следующими свойствами.

1. Почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\pi_\Omega \times \Omega$  функция  $\varphi(P + \xi\Omega, \Omega)$  абсолютно непрерывна на замкнутом множестве  $\pi_{\Omega P}$ .

2. Почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\pi_\Omega \times \Omega$  функция  $\varphi(P + \xi\Omega, \Omega)$  удовлетворяет граничным условиям:  $\varphi(P + \zeta\Omega, \Omega) = 0$ .

3.  $A\varphi \in \mathcal{H}$ , где  $\mathcal{H}$  — гильбертово пространство функций  $\varphi(x, \Omega)$  со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_{D \times \Omega} l^{-1}(x) \varphi(x, \Omega') \psi(x, \Omega') d\Omega' dx \quad (5.1.9)$$

и нормой  $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$ .

Из условий 1—3 следует, что почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\pi_\Omega \times \Omega$  существует производная  $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(P + \xi\Omega, \Omega)$  (соответственно  $\Omega \nabla \varphi$ ) почти всюду на  $\pi_{\Omega P}$  (соответственно на  $D \times \Omega$ ), что  $\tilde{D}_0 \subset \mathcal{H}$  и

$$\|\varphi\| \leq [1 - \exp(-a_0^{-1} d)] \|A\varphi\|,$$

где  $d$  — диаметр области  $D$ . Многоскоростные задачи с  $R \neq 0$  исследованы в работе Т. А. Гермогеновой [60].

Пусть операторы задачи (5.1.2), (5.1.5) таковы, что для достаточно гладких функций  $\varphi(x, \Omega)$  справедливы неравенства:

$$\left. \begin{aligned} & \|\varphi\|^2 - (c\bar{S}\varphi, \varphi) \geq C_0 \|\varphi\|^2, \quad C_0 > 0; \\ & \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n \left( \varphi^2 - \left( \int_{\Gamma_\Omega} R\varphi d\Omega' \right)^2 \right) d\Omega d\Gamma \geq 2C_1 \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n \varphi^2 d\Omega d\Gamma; \\ & \|f_1\| < \infty; \quad \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n V^2 d\Omega d\Gamma < \infty; \\ & \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} (\Omega' n)^{-1} \left( \int_{\Gamma_\Omega} (\Omega, n) V R d\Omega \right)^2 d\Omega' d\Gamma < \infty, \end{aligned} \right\} (5.1.10)$$

где  $C_1 > 0$  при  $V \neq 0$  и  $C_1 \geq 0$  при  $V = 0$ , а  $\bar{\Gamma}_\Omega = \Omega \times \Gamma_\Omega$ ,  $R = (x, \Omega, \Omega') = R(x, -\Omega, -\Omega')$ ,  $V(x, \Omega) = V(x, -\Omega)$ .

Пусть  $\varphi(x, \Omega)$  — достаточно гладкое решение (5.1.2), (5.1.5); получим при условиях (5.1.10) априорную оценку для  $\varphi(x, \Omega)$ . Уравнение (5.1.2), умноженное на  $l^{-1}\varphi$ , проинтегрируем по  $D \times \Omega$ . Тогда, учитывая (5.1.5), пользуясь формулой интегрирования по частям и теоремой Фубини, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n \left( \varphi^2 - \left( \int_{\Gamma_\Omega} R\varphi d\Omega' \right)^2 \right) d\Omega d\Gamma + \|\varphi\|^2 - (c\bar{S}\varphi, \varphi) = \\ & = (\varphi, f_1) + \frac{1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n V^2 d\Omega d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \varphi(x, \Omega') \int_{\Gamma_\Omega} \Omega n V R d\Omega d\Omega' d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Левая часть (5.1.11) согласно (5.1.10) больше, чем

$$C_0 \|\varphi\|^2 + C_1 \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n \varphi^2 d\Omega d\Gamma.$$

Слагаемые в правой части (5.1.11) оценим сверху:

$$|(\varphi, f_1)| \leq (C_0/2) \|\varphi\|^2 + (1/2C_0) \|f_1\|^2,$$

а при  $V \neq 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \varphi(x, \Omega') \int_{\Gamma_\Omega} \Omega n V R d\Omega d\Omega' d\Gamma \leq \frac{C_1}{2} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n \varphi^2 d\Omega d\Gamma + \\ & + \frac{1}{2} C_1^{-1} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} (\Omega' n)^{-1} \left( \int_{\Gamma_\Omega} \Omega n V R d\Omega \right)^2 d\Omega' d\Gamma. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C_0 \|\varphi\|^2 + C_1 \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n \varphi^2 d\Omega d\Gamma \leq C_0^{-1} \|f_1\|^2 + \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n V^2 d\Omega d\Gamma + \\ + C_1^{-1} \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} (\Omega' n)^{-1} \left( \int_{\bar{\Gamma}_\Omega} \Omega n V R d\Omega \right)^2 d\Omega' d\Gamma.$$

Это и есть априорная оценка. Из нее следует единственность достаточно гладких решений задачи (5.1.2), (5.1.5). Для одномерных задач, а также для положительных функций  $\varphi$ ,  $V$ ,  $R$  требования (5.1.10) можно ослабить.

Пусть индикатриса рассеяния  $g(\mathbf{x}, \mu_0)$  представима в виде

$$g(\mathbf{x}, \mu_0) = \sum_{j=0}^N b_j(\mathbf{x}) \Theta_j(\mu_0), \quad (5.1.12)$$

где  $N$  — некоторое целое число;  $\Theta_j(\mu_0)$  — четные суммируемые на  $[-1, 1]$  функции, а  $b_j(\mathbf{x})$  — измеримые, ограниченные почти всюду на  $D$  функции. В этих условиях, используя прием В. С. Владимирова [41], можно перейти от уравнения (5.1.2) для функции  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  к другому уравнению для функции

$$u(\mathbf{x}, \Omega) = [\varphi(\mathbf{x}, \Omega) + \varphi(\mathbf{x}, -\Omega)]/2. \quad (5.1.13)$$

Для этого, записывая (5.1.2) для функции  $\varphi(\mathbf{x}, -\Omega)$ , получаем уравнение

$$-l\Omega\nabla\varphi(\mathbf{x}, -\Omega) + \varphi(\mathbf{x}, -\Omega) = c\bar{S}\varphi + f_1(\mathbf{x}, -\Omega).$$

Складывая с (5.1.2) и вычитая его из (5.1.2), получаем два уравнения для функций  $u$  и  $v$

$$v = [\varphi(\mathbf{x}, \Omega) - \varphi(\mathbf{x}, -\Omega)]/2: \quad (5.1.14)$$

$$l\Omega\nabla v + u = c\bar{S}u + [f_1(\mathbf{x}, \Omega) + f_1(\mathbf{x}, -\Omega)]/2;$$

$$l\Omega\nabla u + v = [f_1(\mathbf{x}, \Omega) - f_1(\mathbf{x}, -\Omega)]/2.$$

Исключая из этих уравнений  $v$ , приходим к уравнению

$$- [l\Omega\nabla]^2 u + u = c\bar{S}u + F(\mathbf{x}, \Omega), \quad (5.1.15)$$

где

$$F(\mathbf{x}, \Omega) = (f_1(\mathbf{x}, \Omega) + f_1(\mathbf{x}, -\Omega))/2 - l\Omega\nabla(f_1(\mathbf{x}, \Omega) - f_1(\mathbf{x}, -\Omega))/2$$

— четная относительно  $\Omega$  функция. По функции  $u$  — решению (5.1.15) — функция  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  — решение (5.1.2) — определяется формулой

$$\varphi = u - l\Omega\nabla u + (f_1(\mathbf{x}, \Omega) - f_1(\mathbf{x}, -\Omega))/2. \quad (5.1.16)$$

Уравнение (5.1.15) будем изучать в фазовой области  $D \times \Omega$  фазового пространства  $R_3 \times \Omega$ , предполагая, что  $u$  принадлежит неко-

тому классу  $C$ , каждая функция которого удовлетворяет почти всюду на границе  $\Gamma \times \Omega$  краевому условию

$$Bu = \psi_1. \quad (5.1.17)$$

В частности, краевое условие (5.1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} u - l\Omega \nabla u = & \int_{n\Omega' > 0} R(x, \Omega, \Omega') (u - l\Omega' \nabla u) d\Omega' + \\ & + V - \frac{1}{2} (f_1(x, \Omega) - f_1(x, -\Omega)) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{n\Omega' > 0} R(x, \Omega, \Omega') (f_1(x, \Omega') - f_1(x, -\Omega')) d\Omega'. \end{aligned}$$

Краевую задачу (5.1.15), (5.1.17) по нахождению функции  $u(x, \Omega)$  запишем в операторной форме

$$L_0 u = \bar{S}_0 u + F, \quad (5.1.18)$$

где операторы  $L_0 = -[l\Omega \nabla]^2 + I$ ,  $L = -[l\Omega \nabla]^2$ ,  $\bar{S}_0 = c\bar{S}$  считаем заданными на функции класса  $C$ . Предполагается, что решение задачи (5.1.18) единственно и существует при любой функции  $F$  из некоторого заданного класса.

Так, если  $R = V = 0$ ,  $f_1(x, \Omega) = f_1(x, -\Omega)$ , то область задания операторов задачи (5.1.18) при  $\|f_1\| < \infty$  определяется следующими условиями.

1. Почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\Omega \times \pi_\Omega$  функции

$$u(P + \xi\Omega, \Omega), l(P + \xi\Omega) \frac{\partial}{\partial \xi} u(P + \xi\Omega, \Omega)$$

абсолютно непрерывны на замкнутом множестве  $\bar{\pi}_{\Omega P}$ .

2. Почти при всех  $(P, \Omega)$  из  $\Omega \times \pi_\Omega$  функция  $u(P + \xi\Omega, \Omega)$  удовлетворяет граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(P + \zeta\Omega, \Omega) = l(P + \zeta\Omega) \frac{\partial}{\partial \xi} u(P + \zeta\Omega, \Omega); \\ u(P + \eta\Omega, \Omega) = -l(P + \eta\Omega) \frac{\partial}{\partial \xi} u(P + \eta\Omega, \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (5.1.19)$$

3.  $A_0 u \in \mathcal{H}$ , где  $A_0$  — дифференциальное выражение

$$A_0 u = -[l\Omega \nabla]^2 u + u.$$

Линейное множество функций, удовлетворяющее условиям 1—3, обозначим  $D_0$ . Краевые условия (5.1.19) для гладких границ запишем в виде

$$\text{sign}(nt) l \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t)|_{\Gamma \times \Omega} = 0, \quad (5.1.20)$$

где  $\partial/\partial t$  — дифференцирование  $u$  как функции  $x$  по направлению единичного вектора  $t$ .

Множество функций  $D_0$  содержится в  $\mathcal{H}$ . Линейное дифференциальное выражение  $A_0$  вместе с областью задания  $D_0$  определяет в (5.1.18) линейный оператор  $L_0$ . Введем в  $D_0$  метрику

$$[u, v] = (L_0 u, v) = \int_{\Gamma \times \Omega} |(\Omega, n)| u v d\Omega d\Gamma + (l\Omega \nabla u, l\Omega \nabla v) + (u, v); \quad (5.1.21)$$

$$[u]^2 = [u, u]. \quad (5.1.22)$$

Это пространство функций обозначим  $H_0$ . Очевидно, что  $\|u\| \leq [u]$ .

Краевую задачу (5.1.15), (5.1.20) можно записать в операторной форме

$$L_0 u = \bar{S}_0 u + F, \quad u \in D_0. \quad (5.1.23)$$

Пусть

$$\|F\| < \infty, (\bar{S}_0 \varphi, \varphi) \geq 0, |c| < 1. \quad (5.1.24)$$

Тогда функция  $u \in H_0$ , реализующая минимум функционала

$$G(v) = [v^2] - (S_0, v, v) - 2(v, F), \quad (5.1.25)$$

будет решением краевой задачи (5.1.23). При  $|c| < c_0 < 1$  найдутся две такие постоянные  $d_1, d_2 > 0$ , зависящие от  $c_0$ , что для любой функции  $v \in H_0$  будут выполнены неравенства

$$d_1 [v]^2 \leq [v]^2 - (\bar{S}_0 v, v) \leq d_2 [v]^2. \quad (5.1.26)$$

А. Дэвисом, С. Капланом [269, 293], Т. А. Гермогеновой [60], А. Басликом [256] были получены функции типа (5.1.25) и для общей индикатрисы рассеяния.

Если функция  $cg \neq 0$  и удовлетворяет условиям (5.1.12), (5.1.24), то оператор  $L_0^{-1} \bar{S}_0$  задачи (5.1.23) будет вполне непрерывным, положительным и самосопряженным в  $H_0$  и  $\|L_0^{-1} \bar{S}_0\| \leq \bar{\Theta}$ , где

$$\bar{\Theta} = \bar{g} (1 - \exp(-da\bar{d}^{-1})); \|\bar{S}_0\| \leq \bar{g} = \sup_{x \in D} \text{vrai } |cS|g|.$$

Множество характеристических чисел  $\lambda_k$  задачи

$$L_0 u = \lambda \bar{S}_0 u \quad (5.1.27)$$

бесконечно,  $\lambda_k > 0$ , и если  $u_k$  является собственной функцией, соответствующей значению  $\lambda_k$ , то  $(\bar{S}_0 u_k, u_j) = \delta_{kj}$  и система  $\bar{S}_0 u_k$  полна в области значений оператора  $\bar{S}_0$ .

Пусть  $u_0 = \bar{S}_0 u$ . Тогда уравнение (5.1.23) примет вид

$$u_0 = \bar{S}_0 L_0^{-1} (u_0 + F); \quad (5.1.28)$$

(это интегральное уравнение Пайерлса [321]), в котором оператор  $\bar{S}_0 L_0^{-1}$  является положительным вполне непрерывным оператором, симметризуемым слева оператором  $\bar{S}_0$ .

В работах В. С. Владимирова изложенные результаты распространены на более общие пространства функций. Аналогичным исследо-

ваниям для многоскоростных уравнений переноса посвящены работы С. Б. Шихова [242—244] и Т. А. Гермогеновой [60, 61].

В наших исследованиях будем использовать уравнения переноса, записанные во всех формах (5.1.2), (5.1.4), (5.1.15), правые части этих уравнений будем обозначать  $Q$ . Нам будут нужны формулы, связанные с использованием сферических функций. Пусть  $Y_n(\Omega)$  означает любую сферическую функцию порядка  $n$ . Известно, что существует  $2n + 1$  независимых сферических функций порядка  $n$  ( $Y_{ni}(\Omega)$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots, \dots, \pm n$ ), которые можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} Y_{ni}(\Omega) &= P_n^{(|i|)}(\cos \vartheta) \sin |i| \psi, \quad i = -n, \dots, -1; \\ Y_{ni}(\Omega) &= P_n^{(i)}(\cos \vartheta) \cos i \psi, \quad i = 0, 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.29)$$

где  $P_n^{(i)}(\mu)$  ( $i \geq 1$ ) — присоединенные функции Лежандра первого рода, а  $P_n(\mu) = P_n^{(0)}(\mu)$  — многочлены Лежандра.

Справедливы равенства:

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}; \quad (5.1.30)$$

$$\left. \begin{aligned} (2n+1)\mu P_n(\mu) &= (n+1)P_{n+1}(\mu) + nP_{n-1}(\mu); \\ (1-\mu^2)P_n'(\mu) &= (n+1)(\mu P_n(\mu) - P_{n+1}(\mu)); \end{aligned} \right\} \quad (5.1.31)$$

$$\left. \begin{aligned} S(Y_{ni}Y_{kj}) &= 0 \text{ при } n \neq k \text{ или } i \neq j; \\ S(Y_{ni}^2) &= \frac{1}{(2n+1)a_{ni}}; \quad a_{ni} = \frac{(n-|i|)! 2}{(n+|i|)!(1+\delta_{0i})}; \end{aligned} \right\} \quad (5.1.32)$$

$$S(P_k(\Omega\Omega')Y_n(\Omega')) = \frac{\delta_{kn}}{2n+1}Y_n(\Omega), \quad (5.1.33)$$

в которых  $\delta_{kn}$  — символ Кронекера.

Система  $\{Y_{ni}\}$  полна в  $L_2(\Omega)$ , и всякая функция  $\varphi(\Omega) \in L_2(\Omega_r)$  разлагается в ряд по сферическим функциям  $Y_{ni}(\Omega)$ , сходящийся к ней в  $L_2(\Omega)$ :

$$\varphi(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{i=-n}^{i=n} a_{ni} b_{ni} Y_{ni}(\Omega), \quad (5.1.34)$$

где

$$b_{ni} = S(\varphi(\Omega')Y_{ni}(\Omega')). \quad (5.1.35)$$

Пусть  $K(\mu)$  — суммируемая на  $[-1, 1]$  функция. Тогда справедлива формула интегрирования на сфере  $\Omega$  [275]:

$$S(K(\Omega\Omega')Y_n(\Omega')) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K(\mu) P_n(\mu) d\mu Y_n(\Omega). \quad (5.1.36)$$

Этой формулой мы будем пользоваться часто. В частности, при  $n=0$  получаем

$$S(K(\Omega\Omega')) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 K(\mu) d\mu. \quad (5.1.37)$$

## § 5.2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим кинетическое уравнение

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = [\Sigma_s / (4\pi)] \int d\Omega' \varphi(\mathbf{r}, \Omega') g(\mu_0) + f(\mathbf{r}, \Omega). \quad (5.2.1)$$

Вдоль луча  $\xi$ , совпадающего с вектором  $\Omega$ , имеет место соотношение [см. (5.1.8)]

$$\Omega \nabla \varphi = \frac{d\varphi}{d\xi}, \quad (5.2.2)$$

где  $\xi$  — координата точки вдоль луча.

В декартовой системе координат

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\xi}, \quad (5.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\xi} &= \Omega_1 = \sin \vartheta \cos \psi; \\ \frac{dx_2}{d\xi} &= \Omega_2 = \sin \vartheta \sin \psi; \quad \frac{dx_3}{d\xi} = \Omega_3 = \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

С учетом равенств (5.2.3) и (5.2.4) кинетическое уравнение (5.2.1) можно записать

$$\begin{aligned} & \sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \sin \vartheta \sin \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cos \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \Sigma \varphi = \\ &= \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' \varphi(x, \psi', \vartheta') g(\mu_0) d\vartheta' + f(x, \psi, \vartheta), \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

где  $\mu_0 = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi')$ . Далее удобно переменную  $x_3$  обозначить  $z$ .

Плоскопараллельная геометрия. Предположим, что функции  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$ ,  $g(\mu_0)$  и  $f$  не зависят от координат  $x_1, x_2$  и являются функциями только  $z$ ,  $\vartheta$  и  $\psi$ . Кроме того, предположим, что область трехмерного пространства, в которой ищется решение, — плоскопараллельный слой  $0 \leq z \leq H$ . Тогда, очевидно, решение кинетиче-



ского уравнения (5.2.5) будет функцией только  $z$ ,  $\vartheta$  и  $\psi$ . В результате уравнение (5.2.5) примет вид

$$\cos \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \varphi(z, \psi', \vartheta') g(\mu_0) + f(z, \psi, \vartheta). \quad (5.2.6)$$

Если решение  $\varphi$  и источники  $f$  не зависят от азимута  $\psi$ , то уравнение (5.2.6) несколько упростится:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \\ = \frac{\Sigma_s}{2} \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \varphi(z, \vartheta') - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' g(\mu_0) + f(z, \vartheta). \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Введем новую независимую переменную  $\mu$  по формуле  $\mu = \cos \vartheta$ . Тогда уравнение (5.2.7) переписется в виде

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(z, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu) + f(z, \mu), \quad (5.2.8)$$

$$\text{где } g(\mu' \rightarrow \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\mu_0) d\psi'.$$

Функция  $g(\mu' \rightarrow \mu)$  обладает свойством симметрии:  $g(\mu' \rightarrow \mu) = g(\mu \rightarrow \mu')$ . Если рассеяние изотропно, то  $g(\mu_0) = 1$ ,  $g(\mu' \rightarrow \mu) = 1$  и уравнение (5.2.8) имеет вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(z, \mu') + f(z, \mu). \quad (5.2.9)$$

На границе при  $z = 0$ ,  $H$  дополнительно необходимо поставить условие

$$\varphi(H, \mu) = V_1(\mu) \text{ при } \mu < 0; \quad \varphi(0, \mu) = V_2(\mu) \text{ при } \mu > 0, \quad (5.2.10)$$

если на слой извне падают потоки  $V_1$ ,  $V_2$ , и

$$\varphi(H, \mu) = \varphi(0, \mu) \text{ при } \mu < 0, \quad \varphi(0, \mu) = \varphi(H, \mu) \text{ при } \mu > 0,$$

если рассчитывается периодическая задача для ячеек. Эти условия объединим одной формулой, позволяющей рассмотреть более общие краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(H, \mu) &= \kappa_1 \varphi(0, \mu) + V_1(\mu) \text{ при } \mu < 0; \\ \varphi(0, \mu) &= \kappa_2 \varphi(H, \mu) + V_2(\mu) \text{ при } \mu > 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.2.11)$$

где  $0 \leq \kappa_1, \kappa_2 \leq 1$ .

Нулевой момент выразится формулой

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) d\mu.$$

Если источники нейтронов изотропны, то следует положить  $f(z, \mu) = f_0(z)$ .

Уравнение (5.1.15) для функции  $u(z, \mu)$  при четной по  $\mu_0$  функции  $g(\mu_0)$  принимает вид

$$-\left[\mu l(z) \frac{\partial}{\partial z}\right]^2 u + u = c(z) \int_0^1 g(\mu' \rightarrow \mu) u(z, \mu') d\mu' + F(z, \mu), \quad (5.2.12)$$

где  $0 \leq \mu \leq 1$ ,  $c = \Sigma_s/\Sigma$ ,  $l = \Sigma^{-1}$ ,  $f_1(z, \mu) = f(z, \mu)/\Sigma$ ,

$$F(z, \mu) = \frac{1}{2} (f_1(z, \mu) + f_1(z, -\mu)) - \frac{\mu l(z)}{2} \frac{\partial}{\partial z} (f_1(z, \mu) - f_1(z, -\mu)).$$

Уравнение такого типа впервые было получено Е. С. Кузнецовым [103].

Связь функций  $u$  и  $\varphi$  осуществляется с помощью равенств

$$u(z, \mu) = (\varphi(z, \mu) + \varphi(z, -\mu))/2;$$

$$\varphi(z, \mu) = u(z, \mu) - \mu l(z) \frac{\partial u}{\partial z} + (f_1(z, \mu) - f_1(z, -\mu))/2;$$

$$\varphi(z, -\mu) = u(z, \mu) + \mu l(z) \frac{\partial u}{\partial z} - (f_1(z, \mu) - f_1(z, -\mu))/2$$

(где  $\mu \geq 0$ ), пользуясь которыми, получаем краевые условия

$$\begin{aligned} & [(1 + \kappa_1 \kappa_2) u - (1 - \kappa_1 \kappa_2) \mu l \frac{\partial u}{\partial z}]|_{z=0} = 2\kappa_2 u|_{z=H} - \\ & - (1 - \kappa_1 \kappa_2) (f_1(0, \mu) - f_1(0, -\mu))/2 + V_2 - \kappa_2 V_1; \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

$$\begin{aligned} & [(1 + \kappa_1 \kappa_2) u + (1 - \kappa_1 \kappa_2) \mu l \frac{\partial u}{\partial z}]|_{z=H} = 2\kappa_1 u|_{z=0} + \\ & + (1 - \kappa_1 \kappa_2) (f_1(H, \mu) - f_1(H, -\mu))/2 + V_1 - \kappa_2 V_2, \end{aligned}$$

при  $\mu > 0$  соответствующие условиям (5.2.11).

Найдем скалярные произведения, входящие в функционал  $G(u)$  (5.1.25), при  $f(z, \mu) = f(z, -\mu)$ ,  $V_i = \kappa_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ); они с точностью до общего постоянного множителя равны:

$$\left. \begin{aligned} (L_0 u, u) &= \int_0^H dz \int_0^1 d\mu \left[ l^{-1}(z) u^2(z, \mu) + \mu^2 l(z) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &+ \int_0^1 d\mu \mu [u^2(H, \mu) + u^2(0, \mu)]; \\ (c\bar{S}u, u) &= \int_0^H dz \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \Sigma_s(z) u(z, \mu) u(z, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu); \\ (u, F) &= \int_0^H dz \int_0^1 d\mu u(z, \mu) f(z, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.14)$$

Задачи со сферической симметрией. В качестве координат примем расстояние  $r$  от центра сферически-симметричной системы до рассматриваемой точки  $P$  и угол  $\vartheta$  между радиус-вектором точки  $P$  и осью  $z$ . В данном случае будем иметь

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\xi}.$$

Из геометрического рассмотрения нетрудно получить

$$\frac{dr}{d\xi} = \Omega_r = \cos \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{d\xi} = \Omega_{\vartheta} = -\frac{\sin \vartheta}{r}.$$

Если в качестве переменной принять  $\mu = \cos \vartheta$ , то

$$\frac{\partial\varphi}{d\xi} = \mu \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \mu}. \quad (5.2.15)$$

В результате кинетическое уравнение для задач со сферической симметрией будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \mu} + \Sigma\varphi = \\ & = \frac{\Sigma_s}{2} \int d\mu' \varphi(r, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu) + f(r, \mu). \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

В частности, при изотропном рассеянии

$$\mu \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \mu} + \Sigma\varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi d\mu + f(r, \mu). \quad (5.2.17)$$

Здесь, так же как и выше, переход к глобальным характеристикам  $\varphi_0(r)$  и  $f_0(r)$  осуществляется с помощью равенств

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(r, \mu) d\mu; \quad f_0(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(r, \mu) d\mu.$$

Если источник нейтронов изотропен, то  $f(r, \mu) = f_0(r)$ . Уравнение (5.2.16) можно записать в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^2 \mu \varphi) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1-\mu^2}{r} \varphi \right) + \Sigma\varphi = \\ & = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi(r, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu) + f(r, \mu). \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

На границе с вакуумом при  $r = R$  следует поставить условие

$$\varphi(R, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0.$$

Уравнение (5.1.15) для функции  $u(r, \mu)$  при четной по  $\mu_0$  функции  $g(\mu_0)$  и четной по  $\mu$  функции  $f(r, \mu)$  принимает вид

$$- [l(r) \Omega \nabla]^2 u + u = c(r) \int_0^1 d\mu' u(r, \mu) g(\mu' \rightarrow \mu) + f_1(r, \mu) \quad (5.2.19)$$

$$(0 \leq r \leq R, 0 \leq \mu \leq 1);$$

$$u + l(r) \Omega \nabla u = 0 \text{ при } r = R, 0 < \mu \leq 1,$$

$$\text{где } \Omega \nabla u = \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial u}{\partial \mu}.$$

Функции  $u$  и  $\varphi$  связаны соотношениями

$$u(r, \mu) = [\varphi(r, \mu) + \varphi(r, -\mu)]/2;$$

$$l(r) \Omega \nabla u = [\varphi(r, -\mu) - \varphi(r, \mu)]/2,$$

и с точностью до общего постоянного множителя соответствующие функционалы равны

$$\left. \begin{aligned} (L_0 u, u) &= \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu \left[ l^{-1}(r) u^2(r, \mu) + \right. \\ &+ l(r) \left( \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial u}{\partial \mu} \right)^2 \left. \right] + R^2 \int_0^1 \mu d\mu u^2(R, \mu); \\ (c \bar{S} u, u) &= \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \Sigma_s(r) u(r, \mu) u(r, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu); \\ (u, F) &= \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu u(r, \mu) f(r, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.20)$$

**Задачи с цилиндрической симметрией.** Рассмотрим бесконечный цилиндр радиусом  $R$ . Пусть  $z$  — ось цилиндрической симметрии. Если нейтрон находится в точке  $P$ , то  $\theta$  — угол между направлением полета нейтрона и вертикалью в точке  $P$ ;  $\psi$  — угол между проекцией направления полета нейтрона на плоскость  $(x_1, x_2)$  и осью  $x_1$ ;  $r$  — расстояние от оси симметрии до проекции точки  $P$  на плоскость  $(x_1, x_2)$ . В этом случае

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\xi}.$$

Из геометрических рассуждений следует, что  $\frac{dr}{d\xi} = \sin \theta \cos \psi$ ;  $\frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{\sin \theta \sin \psi}{r}$ ;  $\frac{d\theta}{d\xi} = 0$ . В результате кинетическое уравнение примет

$$\begin{aligned} & \sin \vartheta \left( \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \Sigma \varphi = \\ & = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \varphi(r, \psi', \vartheta') g(\mu_0) + f(r, \psi, \vartheta). \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Уравнение (5.2.21) можно записать в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} & \sin \vartheta \left( \frac{\partial}{r \partial r} (r \cos \psi \varphi) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\sin \psi}{r} \varphi \right) \right) + \Sigma \varphi = \\ & = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \varphi(r, \psi', \vartheta') g(\mu_0) = f(r, \psi, \vartheta). \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Пусть в качестве переменных взяты  $\mu = \cos \psi$  и  $\gamma = \cos \vartheta$ . Если известно, что источник  $f(r, \psi, \vartheta)$  — четная относительно  $\psi = 0$ ,  $\vartheta = \pi/2$  функция, то уравнение (5.2.21) для задач с цилиндрической симметрией примет вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\gamma^2} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \Sigma \varphi = \\ & = \frac{\Sigma_s}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^1 d\gamma \varphi(r, \mu, \gamma) g(\mu_0) + f(r, \mu, \gamma). \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

При изотропном рассеянии  $g(\mu_0) = 1$ . Переход к глобальным характеристикам  $\varphi_0(r)$ ,  $f_0(r)$  осуществляется с помощью равенств

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\gamma \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \varphi(r, \mu, \gamma); \\ f_0(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\gamma \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} f(r, \mu, \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.24)$$

Если источник изотропен, то  $f(r, \mu, \gamma) = f_0(r)$ . Уравнение (5.1.15) для функции  $u(r, \mu, \gamma)$  принимает вид

$$\begin{aligned} & (\gamma^2 - 1) \left[ l \left( \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right]^2 u + u = \\ & = \frac{2c}{\pi} \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^1 d\gamma u(r, \mu, \gamma) g(\mu_0) + F(r, \mu, \gamma). \end{aligned}$$

С точностью до общего постоянного множителя соответствующие функционалы равны

$$\begin{aligned}
 (L_0 u, u) &= \int_0^R r dr \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^1 d\gamma \left\{ l^{-1}(r) u^2(r, \mu, \gamma) + \right. \\
 &\quad \left. + l(r) \sqrt{1-\gamma^2} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial u}{\partial \mu} \right]^2 \right\} + \\
 &\quad + R \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^1 d\gamma \mu \sqrt{1-\gamma^2} u^2(R, \mu, \gamma); \\
 (c\bar{S}u, u) &= \int_0^R r dr \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1-\mu'^2}} \int_0^1 d\gamma \int_0^1 d\gamma' \Sigma_s(r) \times \\
 &\quad \times u(r, \mu, \gamma) u(r, \mu', \gamma') g(\mu_0); \\
 (u, F) &= \int_0^R r dr \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^1 d\gamma \mu(r, \mu, \gamma) f(r, \mu, \gamma).
 \end{aligned}$$

### § 5.3. О КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ НА ГРАНИЦЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

В этом параграфе мы обсудим постановку некоторых эффективных краевых условий при  $r = R$  для решений уравнения (5.2.21). Цилиндр может облучаться извне некоторым потоком нейтронов. Это означает, что при  $r = R$  задано условие

$$\varphi(R, \psi, \vartheta) = V(\psi, \vartheta) \text{ при } \pi/2 < \psi < 3\pi/2, \quad (5.3.1)$$

где  $V(\psi, \vartheta)$  — заданная функция.

Существуют и так называемые эффективные краевые условия для ячейки реактора, возникающие при упрощении решения следующей задачи. Пусть реактор состоит из ячеек, имеющих форму призм с образующими, параллельными оси  $z$  (например, правильных шести- или четырехгранных призм). Необходимо вычислить поток нейтронов внутри каждой призмы. Эта задача упрощается путем последовательного введения следующих двух допущений.

1. Предполагается, что высота призм бесконечна, свойства среды внутри призм не зависят от  $z$ . Призмы одинаковы по свойствам и форме, они заполняют все пространство  $R_3$ . Таким образом, приходим к периодической задаче во всем пространстве; некоторые решения такого рода задач найдем в § 5.8.

2. Каждая из призм заменяется некоторым эффективным круговым цилиндром радиусом  $R$ , внутри которого свойства сред и источники считаются зависящими только от  $r, \psi, \vartheta$ .

Следовательно, при втором допущении приходим уже к одномерной пространственной задаче. В рамках его требуется на границе ячей-

ки при  $r = R$  поставить такие граничные условия, которые бы достаточно удовлетворительно описывали процессы переноса нейтронов в условиях допущения 1. Одним из подобных условий является условие зеркального отражения для ячейки Вигнера—Зейтца [63]:

$$\varphi(R, \psi, \vartheta) = \varphi(R, \pi - \psi, \vartheta) \text{ при } \pi/2 < \psi < 3\pi/2, \quad (5.3.2)$$

при котором нейтроны зеркально отражаются от стенки цилиндра относительно обоих углов  $\psi$  и  $\vartheta$ . Если принцип зеркального отражения по углу  $\vartheta$  является справедливым и для симметричных решений в некруговых ячейках, ибо нейтроны, вылетающие под углом  $\vartheta$  из одной ячейки, являются влетающими под тем же углом  $\vartheta$  в соседнюю ячейку, то требование зеркального отражения по углу  $\psi$  плохо согласуется в области эффективной границы круговой ячейки с истинной картиной распределения нейтронов в этой области для периодических задач. Нетрудно заметить, что при замене многоугольника окружностью наибольшее различие в поведении потоков нейтронов наблюдается в окрестности  $r = R$ ,  $\psi = \pi/2$ ,  $3\pi/2$ . Поэтому было бы желательно, чтобы нейтроны, попавшие в эту окрестность, учитывались в эффективном краевом условии с меньшим весом. Значит, краевое условие целесообразно искать в виде (5.1.5). Конечно, в выборе такого типа краевых условий имеется определенный произвол.

Напишем краевые условия для круговой ячейки, в основе получения которых взят закон сохранения для каждого  $\vartheta$  общего баланса нейтронов на внешней границе ячейки любой формы. Эти условия будут сохранять интегральные по  $\psi$  свойства распределения нейтронов при  $r = R$ .

Пусть  $\Gamma$  — периметр некруговой ячейки;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$ , а

$$T_{\pm} \varphi = \frac{1}{2} \int_{\pm} \varphi(\mathbf{x}, \psi, \vartheta) |\cos \psi| d\psi,$$

где  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , а интегрирование ведется по  $\psi$ , для которых векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  образуют соответственно острый или тупой угол. Для кусочно-гладких границ почти всюду имеем

$$T_{+1} = T_{-1} = 1. \quad (5.3.3)$$

Тогда при отсутствии на  $\Gamma$  источников для каждого  $\vartheta$  справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} T_{+} \varphi d\Gamma = \int_{\Gamma} T_{-} \varphi d\Gamma. \quad (5.3.4)$$

Естественно потребовать, чтобы равенство (5.3.4) было справедливо и для круговой ячейки. Поскольку в этом случае функции  $T_{\pm} \varphi$  сохраняют постоянные значения на  $\Gamma_0$ , где  $\Gamma_0$  — периметр круговой ячейки, (5.3.4) превращается в равенство  $T_{+} \varphi = T_{-} \varphi$  при  $r = R$ ,  $0 < \vartheta < \pi$ .

Для круговой ячейки  $T_{+\varphi} = T\varphi$ , где

$$T\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(R, \psi, \vartheta) \cos \psi d\psi. \quad (5.3.5)$$

Краевое условие на границе цилиндра при  $r = R$  поставим в следующем виде. Пусть влетающие в ячейку нейтроны распределены согласно закону

$$\varphi(R, \psi, \vartheta) = \kappa (a - b \cos \psi) T\varphi + V(\psi, \vartheta) \\ \text{при } \pi/2 < \psi < 3\pi/2, \quad 0 < \vartheta < \pi,$$

где  $V(\psi, \vartheta)$  — известная функция, характеризующая падающий на цилиндр поток нейтронов, оператор  $T\varphi \cos \vartheta$  — среднее число нейтронов, вылетающих из цилиндра и пересекающих единичную площадку под углом  $\vartheta$ , нормаль которой есть вектор  $(1, 0, 0)$ . Скаляры  $a$  и  $b$  выберем такими, чтобы при  $\kappa = 1$ ,  $V = 0$  и любом  $0 < \vartheta < \pi$  был выполнен баланс нейтронов. Это значит, что  $T(a + b \cos \psi) = 1$ , т. е.  $b = 4(1 - a)/\pi$ . Окончательно краевое условие запишем в виде

$$\varphi(R, \psi, \vartheta) = \kappa (a - 4(1 - a)/\pi \cos \psi) T\varphi + V(\psi, \vartheta) \\ \text{при } \pi/2 < \psi < 3\pi/2, \quad 0 < \vartheta < \pi. \quad (5.3.6)$$

Теперь величина  $\kappa$  играет роль альбедо; она означает, что  $\kappa$ -я часть вылетевших из цилиндра нейтронов возвращается обратно по закону (5.3.6); при  $\kappa = 0$  получаем условие (5.3.1). В формуле (5.3.6) величину  $a$  можно взять, если нет на то особых соображений, равной, например, единице или нулю, получая при этом стандартные распределения. При расчетах ячеек ( $\kappa = 1$ ,  $V = 0$ ) выбор  $a$  существенно влияет на поведение  $d\varphi_0/dr$  в окрестности  $r = R$ . Для достаточно широкого класса задач  $a$  можно выбрать так, чтобы  $d\varphi_0/dr_{r=R} = 0$ , при  $\kappa = 1$ , что в наибольшей степени соответствует характеру наших допущений. Расчеты различных типов ячеек с применением формулы (5.3.6) показали достаточно хорошее согласие с аналогичными результатами вычисления коэффициента теплового использования по методу Монте-Карло.

#### § 5.4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПАЙЕРЛСА

В некоторых случаях удобно иметь дело не с интегро-дифференциальным уравнением Больцмана, а с интегральным уравнением. Получим интегральное уравнение в предположении, что рассеяние нейтронов изотропно. Ради простоты источники нейтронов будем считать изотропными.

Рассмотрим невогнутую область  $D$ , заполненную веществом, ограниченную поверхностью  $\Gamma$ . Тогда в указанных выше предположениях кинетическое уравнение будет иметь вид

$$\Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = Q(\mathbf{r}), \quad (5.4.1)$$



где

$$Q(\mathbf{r}) = \Sigma_s \varphi_0(\mathbf{r}) + f_0(\mathbf{r}); \quad \varphi_0(\mathbf{r}) = (1/4\pi) \int d\Omega \varphi(\mathbf{r}, \Omega). \quad (5.4.2)$$

Если на внешнюю границу  $\Gamma$  из вакуума падает изотропный поток нейтронов, то

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = V(\mathbf{r}) \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \cdot \mathbf{n} < 0, \quad (5.4.3)$$

где  $V(\mathbf{r})$  — заданная функция точек поверхности  $\Gamma$ .

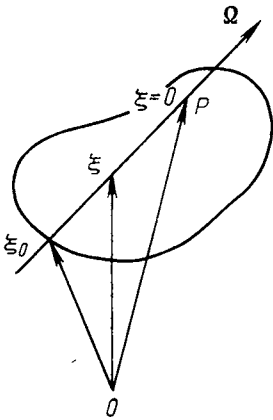


Рис. 5.1. Схема движения нейтрона в среде вдоль луча  $\Omega$ :

$P$  — точка наблюдения;  $\xi$  — координата по лучу  $\Omega$ , отсчитываемая от точки  $P$ ;  $\xi_0$  — расстояние по лучу от точки до поверхности  $\Gamma$

Рассмотрим сначала случай, когда свойства среды остаются неизменными для всех точек области  $D$ . Это значит, что  $\Sigma_s = \text{const}$ ,  $\Sigma = \text{const}$ . Функцию  $Q(\mathbf{r})$  временно будем считать известной. Тогда решение уравнения (5.4.1) при условии (5.4.3) нетрудно найти следующим образом. В кинетическом уравнении (5.4.1) скалярное произведение  $\Omega \nabla \varphi$  запишем в виде производной по направлению  $\Omega$ , т. е.

$$\Omega \nabla \varphi = - \frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) |_{\xi=0},$$

где  $\xi$  отсчитывается от точки  $P$  в направлении, противоположном вектору  $\Omega$  (рис. 5.1).

Таким образом, вдоль луча  $\Omega$  кинетическое уравнение (5.4.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) + \Sigma \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) = \\ = Q(\mathbf{r} - \xi \Omega) \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

при условии, что

$$\varphi(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega, \Omega) = V(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega). \quad (5.4.5)$$

Заметим, что в уравнении (5.4.4) и граничном условии (5.4.5)  $\mathbf{r}$  является радиус-вектором точки  $P$ .

Решение задачи (5.4.4), (5.4.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r} - \xi \Omega, \Omega) = V(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega) \exp(-\Sigma(\xi_0 - \xi)) + \\ + \int_{\xi}^{\xi_0} Q(\mathbf{r} - \xi' \Omega) \exp(-\Sigma(\xi' - \xi)) d\xi'. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Следовательно, положив  $\xi = 0$ , получим

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega) = V(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega) \exp(-\Sigma \xi_0) + \int_0^{\xi_0} Q(\mathbf{r} - \xi \Omega) \exp(-\Sigma \xi) d\xi. \quad (5.4.7)$$

Равенство (5.4.7) проинтегрируем по  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\xi_0} d\Omega V(\mathbf{r} - \xi_0 \Omega) \exp(-\Sigma \xi_0) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int_0^{\xi_0} Q(\mathbf{r} - \xi \Omega) \exp(-\Sigma \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

В соотношении (5.4.8) положим  $\mathbf{r} - \xi \Omega = \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r} - \xi_0 \Omega = \mathbf{r}_\Gamma$  и заметим, что  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ , а элементы объема  $d\mathbf{r}'$  и площади  $d\mathbf{r}_\Gamma$  равны  $d\mathbf{r}' = \xi^2 d\xi d\Omega$ ;  $d\mathbf{r}_\Gamma = \xi_0^2 d\Omega / |\Omega \mathbf{n}|$ , где  $\xi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ;  $\xi_0 = |\mathbf{r}_\Gamma - \mathbf{r}'|$ . Тогда выражение (5.4.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' Q(\mathbf{r}') \frac{\exp(-\Sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} d\mathbf{r}_\Gamma V(\mathbf{r}_\Gamma) \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Gamma|} \mathbf{n} \right| \frac{\exp(-\Sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Gamma|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Gamma|^2}. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Если теперь принять во внимание соотношение (5.4.2), то выражение (5.4.9) запишется в виде интегрального уравнения

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \int_D d\mathbf{r}' \Sigma_s \varphi_0(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + F(\mathbf{r}), \quad (5.4.10)$$

где

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \int_D d\mathbf{r}' f_0(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + \\ &+ \int_{\Gamma} d\mathbf{r}_\Gamma V(\mathbf{r}_\Gamma) \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\Gamma|} \mathbf{n} \right| K(\mathbf{r}_\Gamma \rightarrow \mathbf{r}); \\ K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\Sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Интегральное уравнение (5.4.10) называют уравнением Пайерлса.

В том случае, когда  $\Sigma = \Sigma(\mathbf{r})$  и  $\Sigma_s = \Sigma_s(\mathbf{r})$ , т. е. когда среда в области  $D$  неоднородна, интегральное уравнение Пайерлса имеет вид

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \int_D d\mathbf{r}' \Sigma_s(\mathbf{r}') \varphi_0(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + F(\mathbf{r}), \quad (5.4.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 F(\mathbf{r}) &= \int_D d\mathbf{r}' f_0(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + \\
 &+ \int_{\Gamma} d\mathbf{r}_{\Gamma} V(\mathbf{r}_{\Gamma}) \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma}|} \mathbf{n} \right| K(\mathbf{r}_{\Gamma} \rightarrow \mathbf{r}); \\
 K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-\tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}; \\
 \tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) &= \int_0^{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \Sigma(\mathbf{r} - \xi \mathbf{\Omega}) d\xi.
 \end{aligned} \right\} (5.4.13)$$

Величина  $\tau(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$  называется оптическим расстоянием от точки  $P'(\mathbf{r}')$  до точки  $P(\mathbf{r})$ .

До сих пор предполагалось, что внешние источники нейтронов изотропны. Если предположить, что  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  и  $V = V(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ , то снова придем к интегральному уравнению (5.4.12), где функцию  $F(\mathbf{r})$  необходимо заменить следующей:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{r}) &= \int_D d\mathbf{r}' f\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) K(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) + \\
 &+ \int_{\Gamma} d\mathbf{r}_{\Gamma} V\left(\mathbf{r}_{\Gamma}, \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma}|}\right) \left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma}|} \mathbf{n} \right| K(\mathbf{r}_{\Gamma} \rightarrow \mathbf{r}). \quad (5.4.14)
 \end{aligned}$$

Более подробные сведения о постановке задачи о диффузии нейтронов в случае неизотропной индикатрисы рассеяния можно найти в книге Б. Дэвисона [81].

Интегральное уравнение (5.4.12) запишем для простейших геометрий. Предположим, что среда, заполняющая область  $D$ , однородна.

Рассмотрим сначала случай плоскопараллельной геометрии. Будем считать, что на слой толщиной  $H$  падает изотропный поток нейтронов интенсивностью  $V^+$  при  $z = 0$  и  $V^-$  при  $z = H$ . Внутри слоя источники распределены по закону  $f_0(z)$ . В таких предположениях, очевидно, решение задачи  $\varphi_0$  будет только функцией  $z$ .

Полагая  $x = x_1$ ;  $y = x_2$ ;  $z = x_3$ ;  $d\mathbf{r}' = dx'dy'dz'$ ;  $d\mathbf{r}_{\Gamma} = dx dy$ ;  
 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ ;  $\left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma}|} \mathbf{n} \right| = \cos \theta = \frac{|z-z'|}{r}$ ,  
 интегральное уравнение Пайерлса запишем в следующем виде:

$$\varphi_0(z) = \Sigma_s \int_0^H \varphi_0(z') K(\Sigma |z - z'|) dz' + F(z), \quad (5.4.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 F(z) &= \int_0^H dz' f_0(z') K(\Sigma | z - z' |) + \\
 &+ V^+ P(\Sigma_s) + V^- P(\Sigma(H-z)); \\
 K(\Sigma | z - z' |) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\exp(-\Sigma r)}{r^2}; \\
 P(\Sigma z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{z \exp(-\Sigma r)}{r^3}.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4.16)$$

Вычислим интегралы в правой части последних равенств в (5.4.16). С этой целью положим  $x - x' = \rho \cos \alpha$ ,  $y - y' = \rho \sin \alpha$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned}
 K(\Sigma | z - z' |) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\Sigma \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}) \rho d\rho}{\rho^2 + (z - z')^2}; \\
 P(\Sigma z) &= \frac{z}{2} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\Sigma \sqrt{\rho^2 + z^2}) \rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4.17)$$

Перейдем к новой переменной интегрирования  $t$  по формуле  $t = \Sigma \times \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ . В результате получим

$$K(\Sigma | z - z' |) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma | z - z' |}^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt; \quad P(\Sigma z) = \frac{\Sigma z}{2} \int_{\Sigma z}^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t^2} dt. \quad (5.4.18)$$

Учитывая, что  $\int_x^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t^n} dt = E_n(x)$ , имеем

$$K(\Sigma | z - z' |) = E_1(\Sigma | z - z' |)/2; \quad P(\Sigma z) = \Sigma z E_2(\Sigma z)/2. \quad (5.4.19)$$

В заключение вычислим функцию  $F(z)$  в том предположении, что источник единичной интенсивности сосредоточен в плоскости  $z = 0$ , а потоки нейтронов из вакуума отсутствуют, т. е.  $V^{\pm} = 0$ . Тогда  $F(z) = (1/2) E_1(\Sigma z)$ . В этом случае интегральное уравнение Пайерлса (5.4.15) примет вид

$$\Phi_0(z) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_0^H dz' \Phi_0(z') E_1(\Sigma | z - z' |) + \frac{1}{2} E_1(\Sigma z). \quad (5.4.20)$$

Если среда бесконечна, то (5.4.20) переходит в следующее:

$$\varphi_0(z) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \varphi_0(z') E_1(\Sigma |z - z'|) + \frac{1}{2} E_1(\Sigma z). \quad (5.4.21)$$

Следует отметить, что та часть решения, которая представлена функцией  $B_0(z) = (1/2) E_1(\Sigma z)$ , описывает полное число нейтронов, которые не испытали ни одного соударения при движении от источника до плоскости  $z = \text{const}$ . Эти нейтроны называют нерассеянными.

Рассмотрим далее случай сферической геометрии. Будем считать, что область  $D$  представляет собой шар радиусом  $R$ . На внешнюю границу шара со стороны вакуума падает изотропный поток нейтронов плотностью  $V_0$ . Внутри шара заданы источники нейтронов  $f_0(r)$ .

В указанных предположениях решение задачи  $\varphi_0$  будет функцией только  $r$ .

Учитывая соотношения (рис. 5.2)

$$dr' = r'^2 dr' d\mu' d\psi'; \quad dr'_\Gamma = R^2 d\mu d\psi;$$

$$\left| \frac{r - r'_\Gamma}{|r - r'_\Gamma|} \mathbf{n} \right| = \cos \theta = \frac{R - r \cos \psi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi}},$$

имеем

$$\varphi_0(r) = \Sigma_s \int_0^R \varphi_0(r') K(r' \rightarrow r) dr' + F(r), \quad (5.4.22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F(r) &= \int_0^R f_0(r') K(r' \rightarrow r) dr' + V_0 P(r); \\ K(r' \rightarrow r) &= \frac{r'^2}{2} \int_{-1}^1 d\mu \frac{\exp(-\Sigma \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\mu})}{r'^2 + r^2 - 2rr'\mu}; \\ P(r) &= \frac{R^2}{2} \int_{-1}^1 d\mu (R - r\mu) \frac{\exp(-\Sigma \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\mu})}{(R^2 + r^2 - 2Rr\mu)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.23)$$

Здесь мы перешли к новой переменной интегрирования  $\mu = \cos \theta$  и произвели интегрирование по азимуту  $\psi$ . С помощью замены пере-

менной интегрирования  $\mu$  на  $t = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\mu}$  второе и третье соотношения системы (5.4.23) приведем к виду

$$\left. \begin{aligned} K(r' \rightarrow r) &= \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \int_{\Sigma |r-r'|}^{\Sigma |r+r'|} \frac{\exp(-t)}{t} dt; \\ P(r) &= \frac{R^2 - r^2}{4r} \Sigma \int_{\Sigma (R-r)}^{\Sigma (R+r)} \frac{\exp(-t)}{t^2} dt + \frac{1}{4r\Sigma} \int_{\Sigma (R-r)}^{\Sigma (R+r)} \exp(-t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.24)$$

С учетом соотношения (5.4.19) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} K(r' \rightarrow r) &= (r'/r) [E_1(\Sigma |r-r'|) - E_1(\Sigma |r+r')]/2; \\ P(r) &= \Sigma (R^2 - r^2) [E_2(\Sigma (R-r)) - E_2(\Sigma (R+r))]/4r + \\ &+ [\exp(-\Sigma (R-r)) - \exp(-\Sigma (R+r))]/4r\Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.25)$$

Полезно обратить внимание на следующий факт. Если предположить, что поток нейтронов, падающих на шар со стороны вакуума, отсутствует, т. е.  $V_0 = 0$ , то с помощью соотношений  $r\varphi_0(r) = \varphi(r)$  и  $rf_0(r) = f(r)$  уравнение (5.4.22) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{\Sigma_3}{2} \int_{-R}^R \varphi(r') E_1(\Sigma |r-r'|) dr' + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-R}^R f(r') E_1(\Sigma |r-r'|) dr'. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае интегральное уравнение для шара формально совпадает с интегральным уравнением для слоя.

Переходим теперь к рассмотрению цилиндрических областей. Для простоты ограничимся случаем однородного бесконечного цилиндра радиусом  $R$  (рис. 5.3). В качестве координат примем  $r, z, \psi$ . Очевидно, что в данном случае

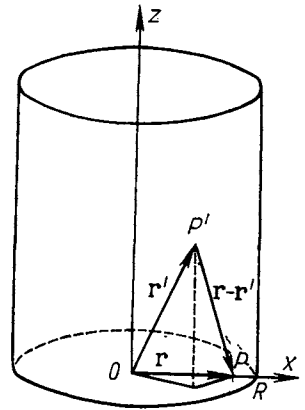


Рис. 5.3. Система координат для цилиндрической области

$$\xi = |r - r'| = \sqrt{r^2 + r'^2 + z'^2 - 2rr' \cos \psi}; \quad (5.4.26)$$

$$\left| \frac{r - r_{\Gamma}}{|r - r_{\Gamma}|} \mathbf{n} \right| = \cos \psi = \frac{R - r \cos \psi}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \psi}}. \quad (5.4.27)$$

Поскольку решение интегрального уравнения есть функция только  $r$ , перейдем к интегральному уравнению (5.4.22), где

$$F(r) = \int_0^R f(r') K(r' \rightarrow r) dr + VP(r); \quad (5.4.28)$$

$$\left. \begin{aligned} K(r' \rightarrow r) &= \frac{r'}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\exp(-\Sigma \sqrt{r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos \psi})}{r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos \psi}; \\ P(r) &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} dz (R - r \cos \psi) \times \\ &\times \frac{\exp(-\Sigma \sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \psi})}{(R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.29)$$

Преобразуем ядро интегрального уравнения. Для этого представим выражение для  $K(r' \rightarrow r)$  в виде суммы двух членов:

$$\begin{aligned} K(r' \rightarrow r) &= \frac{r'}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\infty} dz \frac{\exp(-\Sigma \sqrt{r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos \psi})}{r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos \psi} + \right. \\ &\left. + \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\infty} dz \frac{\exp(-\Sigma \sqrt{r^2 + r'^2 + z^2 + 2rr' \cos \psi})}{r^2 + r'^2 + z^2 + 2rr' \cos \psi} \right). \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

Примем далее во внимание следующие соотношения:

$$\begin{aligned} K_0(xz) &= \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x \sqrt{t^2 + z^2})}{\sqrt{t^2 + z^2}} dt; \\ \int_x^{\infty} K_0(xz) dx &= \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x \sqrt{t^2 + z^2})}{t^2 + z^2} dt. \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

С учетом выражений (5.4.31) получим

$$K(r' \rightarrow r) = \frac{r'}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} d\psi \int_{\Sigma}^{\infty} K_0(ax) dx + \int_0^{\pi} d\psi \int_{\Sigma}^{\infty} K_0(bx) dx \right], \quad (5.4.32)$$

где  $a = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}$ ;  $b = \sqrt{r^2 + r'^2 + 2rr' \cos \psi}$ .

Выражение (5.4.32) преобразуем к виду

$$K(r' \rightarrow r) = \frac{r'}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{a} \int_{a\Sigma}^{\infty} K_0(\rho) d\rho + \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{b} \int_{b\Sigma}^{\infty} K_0(\rho) d\rho \right). \quad (5.4.33)$$

В первом слагаемом перейдем от переменной  $\psi$  к  $a$  по формуле  $\cos \psi = (r^2 + r'^2 - a^2)/2rr'$ , а во втором слагаемом осуществим замену  $\cos \psi = (b^2 - r^2 - r'^2)/2rr'$ . Тогда окончательно приходим к выражению

$$K(r' \rightarrow r) = \frac{2r'}{\pi} \int_{|r-r'|}^{r+r'} \frac{dx}{\sqrt{(x-r+r')(x+r-r')(r+r'-x)(r+r'+x)}} \times \\ \times \int_{\Sigma x}^{\infty} K_0(t) dt.$$

## § 5.5. НАХОЖДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим сначала однородное кинетическое уравнение в плоской геометрии

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu') d\mu'.$$

Пусть  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$  постоянны. Перейдя к безразмерной переменной  $x = \Sigma z$ , запишем:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu') d\mu', \quad (5.5.1)$$

где  $c = \Sigma_s \Sigma^{-1}$ . Ниже получим семейство решений уравнения (5.5.1) методом Фурье: решение ищем в виде

$$\varphi = \exp(-x/\nu) \Phi_\nu(\mu), \quad (5.5.2)$$

где  $\nu$  — некоторый числовой параметр.

Решения такого вида назовем элементарными. Описанный способ получения решений (5.5.2), которые можно интерпретировать как собственные функции уравнения (5.5.1), давно известен (см. по этому поводу библиографические ссылки в монографии Б. Девисона [81]). Ван Кампен [340] заметил, что сингулярные собственные функции, которые возникают в рассматриваемой задаче, могут быть интерпретированы как обобщенные функции в смысле Соболева—Шварца [218, 57]. Эта концепция была перенесена К. Кейсом [266] на односкоростную изотропную задачу. Он доказал полноту и ортогональность системы найденных собственных функций, нашел представления решений некоторых краевых задач через найденную систему функций. Работа [266] явилась основополагающей для большого числа работ, обобщающих результаты Кейса на плоскую геометрию с неизотропным рассеянием и зависимостью от скорости (см., например, работы Дж. Митсиса [315], Р. Желязны [83], Р. Беднажа и Я. Мика [257] и др.).



Подставляя (5.5.2) в (5.5.1), получаем уравнение для  $\Phi_\nu(\mu)$

$$(1 - \mu/\nu) \Phi_\nu(\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi_\nu(\mu') d\mu'. \quad (5.5.3)$$

Не уменьшая общности, можно потребовать, чтобы

$$\int_{-1}^1 \Phi_\nu(\mu') d\mu' = 1. \quad (5.5.4)$$

Учитывая это, из (5.5.3) получаем

$$\Phi_\nu(\mu) = c\nu/(2(\nu - \mu)), \quad (5.5.5)$$

или, интегрируя (5.5.5) по отрезку  $-1 \leq \mu \leq 1$ , имеем

$$\int_{-1}^1 \Phi_\nu(\mu) d\mu = 1 = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \frac{\nu d\mu}{\nu - \mu}. \quad (5.5.6)$$

Таким образом, получили уравнение для  $\nu$ :

$$1 = \frac{c\nu}{2} \ln \frac{\nu+1}{\nu-1}. \quad (5.5.7)$$

Известно [266], что существуют два корня уравнения (5.5.7):  $\pm \nu_0$  для всех  $c > 0$ . Известно также, что  $\text{Im } \nu_0 = 0$ ,  $|\text{Re } \nu_0^{-1}| < 1$  при  $0 < c < 1$  и  $\text{Re } \nu_0 = 0$  при  $c > 1$ . Итак, мы нашли два решения уравнения (5.5.1) вида (5.5.2) с  $\nu = \pm \nu_0$ . Но этими решениями не исчерпывается все многообразие решений типа (5.5.2), ибо функция  $\Phi_\nu(\mu)$  может быть и обобщенной функцией. Уравнение (5.5.3) будет удовлетворено, если решение  $\Phi_\nu(\mu)$  запишем в более общем виде:

$$\Phi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} P \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\mu - \nu), \quad (5.5.8)$$

где под  $Pf$  понимается регуляризованное значение функции  $f$ , а  $\delta(x)$  — одномерная  $\delta$ -функция [57].

Число  $\lambda(\nu)$  в формуле (5.5.8) определяется из равенства (5.5.4):

$$1 = \frac{c\nu}{2} P \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \int_{-1}^1 \delta(\mu - \nu) d\mu. \quad (5.5.9)$$

Имеются две возможности нахождения элементарных решений уравнения (5.5.1).

1. Пусть  $\nu \notin [-1, 1]$ ; тогда второе слагаемое в (5.5.9) равно нулю и имеются лишь два решения уравнения (5.5.1) с  $\nu = \pm \nu_0$ , которые согласно (5.5.2) запишутся в виде

$$\varphi_{0\pm}(x, \mu) = \Phi_{0\pm}(\mu) \exp(\mp x/\nu_0), \quad (5.5.10)$$

где

$$\Phi_{0\pm}(\mu) = c\nu_0/(2(\nu_0 \mp \mu)). \quad (5.5.11)$$

2. Пусть  $v \in [-1, 1]$ ; тогда из (5.5.9) следует, что

$$1 = \frac{cv}{2} P \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v-\mu} + \lambda(v). \quad (5.5.12)$$

Уравнение (5.5.12) послужит нам уравнением для выбора функции  $\lambda(v)$ . В этом случае элементарные обобщенные решения существуют для всех  $v \in [-1, 1]$  и выражаются формулой

$$\varphi_v(x, \mu) = \Phi_v(\mu) \exp(-x/v), \quad (5.5.13)$$

где обобщенная функция  $\Phi_v(\mu)$  задается формулой (5.5.8), в которой

$$\lambda(v) = 1 - \frac{cv}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}. \quad (5.5.14)$$

Таким образом, существуют два дискретных решения (5.5.10) и континуум обобщенных решений (5.5.13). Справедлива

**Теорема 5.5.1.**

$$\int_{-1}^1 \mu \Phi_{v'}(\mu) \Phi_v(\mu) d\mu = 0 \text{ при } v \neq v'. \quad (5.5.15)$$

Для доказательства теоремы 5.5.1 будем рассуждать следующим образом. Согласно равенству (5.5.3) для функций  $\Phi_v(\mu)$ ,  $\Phi_{v'}(\mu)$  должны быть выполнены уравнения:

$$(1 - \mu/v) \Phi_v(\mu) = c/2; \quad (1 - \mu/v') \Phi_{v'}(\mu) = c/2.$$

Умножая первое из них на  $\Phi_{v'}(\mu)$ , а второе — на  $\Phi_v(\mu)$ , вычитая полученные уравнения друг из друга и интегрируя результат по  $-1 \leq \mu \leq 1$ , находим

$$[(v')^{-1} - v^{-1}] \int_{-1}^1 \Phi_{v'}(\mu) \Phi_v(\mu) \mu d\mu = 0.$$

Поскольку  $v' \neq v$ , из последнего равенства убеждаемся в справедливости теоремы 5.5.1.

Используя формулы для  $\Phi_v$ , получаем следующие значения интегралов:

$$\int_{-1}^1 \mu \Phi_{\delta_{\pm}}^2(\mu) d\mu = N_{0\pm} = \pm \frac{cv_0^2}{2} \left( \frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^{(2)}} \right); \quad (5.5.16)$$

$$\int_{-1}^1 \mu \Phi_{v'}(\mu) \Phi_v(\mu) d\mu = N_v \delta(v - v'), \quad (5.5.17)$$

где

$$N_v = v [\lambda^2(v) + \pi^2 c^2 v^2 / 4].$$

**Теорема 5.5.2.** *Функции  $\Phi_{0\pm}(\mu)$  и  $\Phi_v(\mu)$ ,  $v \in [-1, 1]$  — полная в  $L_1[-1, 1]$  система функций.*

Для доказательства теоремы требуется показать, что любую суммируемую на  $[-1, 1]$  функцию  $\psi(\mu)$  можно записать в форме

$$\psi(\mu) = a_{0+} \Phi_{0+}(\mu) + a_{0-} \Phi_{0-}(\mu) + \int_{-1}^1 A(\nu) \Phi_{\nu}(\mu) d\nu. \quad (5.5.18)$$

Для этого конструктивно построим представление (5.5.18). Сначала допустим, что представление (5.5.18) возможно. Из этого допущения определим, чему должны быть равны коэффициенты  $a_{0\pm}$ ,  $A(\nu)$ . Из теоремы 5.5.1 и равенства (5.5.16) следует, что

$$a_{0\pm} = N_{0\pm}^{-1} \int_{-1}^1 \mu \Phi_{0\pm}(\mu) \psi(\mu) d\mu. \quad (5.5.19)$$

Значит, достаточно рассмотреть функции  $\psi'(\mu)$  вида

$$\psi'(\mu) = \psi(\mu) - a_{0+} \Phi_{0+}(\mu) - a_{0-} \Phi_{0-}(\mu),$$

где  $a_{0\pm}$  определены формулой (5.5.19), и показать, что  $\psi'(\mu)$  может быть представлена в виде

$$\psi'(\mu) = \int_{-1}^1 A(\nu) \Phi_{\nu}(\mu) d\nu, \quad (5.5.20)$$

где  $A(\nu)$  — некоторая функция. Подставляя в (5.5.20) выражение для  $\Phi_{\nu}(\mu)$  по формуле (5.5.8), получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\psi'(\mu) = \lambda(\mu) A(\mu) + \frac{c}{2} P \int_{-1}^1 \frac{\mu' A(\mu') d\mu'}{\mu' - \mu}. \quad (5.5.21)$$

Существование решения этого уравнения докажем, используя методы решения сингулярных уравнений, развитые Н. И. Мусхелишвили [187]. Для этого рассмотрим функцию  $N(z)$  комплексного переменного  $z$ :

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \frac{\nu A(\nu) d\nu}{\nu - z}. \quad (5.5.22)$$

Она стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$  и аналитична в комплексной плоскости с разрезом вдоль действительной оси от  $-1$  до  $1$ .

Пусть  $N^{\pm}(\mu) = N(\mu \pm i0)$  при  $\mu \in [-1, 1]$ . Тогда из формул Сохоцкого—Племеля [112] следует, что

$$N^{\pm}(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \frac{c}{2} P \int_{-1}^1 \frac{\nu A(\nu) d\nu}{\nu - \mu} \pm \frac{1}{2} \frac{c}{2} \mu A(\mu).$$

Следовательно,

$$N^+ + N^- = \frac{1}{\pi i} P \int_{-1}^1 \frac{c}{2} \frac{v A(v) d v}{v - \mu}; \quad N^+ - N^- = \frac{c}{2} \mu A(\mu), \quad (5.5.23)$$

и уравнение (5.5.21) приводится к виду

$$(c/2) \mu \psi'(\mu) = [\lambda(\mu) + \pi c \mu / 2] N^+(\mu) - [\lambda(\mu) - i \pi c \mu / 2] N^-(\mu). \quad (5.5.24)$$

Введем в рассмотрение функцию  $Q(z)$ :

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{cz}{2} \int_{1-}^1 \frac{d\mu'}{\mu' - z}.$$

Она имеет те же свойства, что и функция  $N(z)$ , но стремится к  $-c/(2\pi i)$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , а при  $\mu \in [-1, 1]$

$$Q^\pm(\mu) = Q(\mu \pm i0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{c}{2} \mu P \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\mu' - \mu} \pm \frac{1}{2} \frac{c}{2} \mu$$

$$\text{и} \quad Q^+ - Q^- = \frac{c}{2} \mu; \quad Q^+ + Q^- = \frac{1}{\pi i} \frac{c}{2} \mu P \frac{d\mu'}{\mu' - \mu}.$$

Из (5.5.14) следует, что

$$\lambda(\mu) = 1 + \pi i (Q^+ + Q^-); \quad \pi i c \mu / 2 = \pi i (Q^+ - Q^-).$$

Поэтому интегральное уравнение (5.5.24) превращается в уравнение

$$\frac{c}{2} \mu \psi'(\mu) = [1 + 2\pi i Q^+(\mu)] N^+(\mu) - [1 + 2\pi i Q^-(\mu)] N^-(\mu). \quad (5.5.25)$$

Наконец, рассмотрим функцию

$$F(z) = [1 + 2\pi i Q(z)] N(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c}{2} \frac{\psi'(\mu') \mu' d\mu'}{\mu' - z}.$$

Она стремится к нулю, при  $|z| \rightarrow \infty$  и является аналитической во всей плоскости комплексного переменного, исключая, может быть, отрезок действительной оси  $-1 \leq z \leq 1$ . Но согласно (5.5.25) при  $\mu \in [-1, 1]$

$$F^+(\mu) = F^-(\mu) = [1 + 2\pi i Q^+] N^+ - [1 + 2\pi i Q^-] N^- - (c/2) \times \\ \times \mu \psi'(\mu) = 0,$$

поэтому функция  $F(z)$  аналитична всюду. А поскольку на бесконечности она равна нулю,  $F(z) \equiv 0$ . Следовательно,

$$N(z) = (1 + 2\pi i Q(z))^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c}{2} \frac{\mu' \psi'(\mu') d\mu'}{\mu' - z}. \quad (5.5.26)$$

Формула (5.5.26) для  $N(z)$  получена в предположении, что функция  $A(v)$  существует. Пусть теперь  $N(z)$  задана формулой (5.5.26), а  $A(v)$  определяется из равенства (5.5.23). Тогда если  $N(z)$ , заданная формулой (5.5.26), удовлетворяет требуемым свойствам аналитичности, то функция  $A(v)$ , заданная формулой (5.5.23), существует и удовлетворяет интегральному уравнению (5.5.21). Выясним вопрос о том, является ли функция  $N(z)$  аналитичной в плоскости с разрезом и стремится ли она к нулю на бесконечности. Числитель (5.5.26) удовлетворяет этим свойствам, знаменатель тоже является аналитической функцией в плоскости с разрезом и стремится к константе при  $|z| \rightarrow \infty$  ( $c < 1$ ). Осталось выяснить вопрос о том, обращается ли в нуль числитель, когда равен нулю знаменатель. Из определения функции  $Q(z)$  следует, что  $1 + 2\pi i Q(z) = 0$  при  $z = \pm v_0$ . Учитывая (5.5.11), видим, что

$$-\frac{c v_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{\psi'(\mu') \mu' d\mu'}{\mu' \pm v_0} = \int_{-1}^1 \mu' \Phi_{0\pm}(\mu') \psi'(\mu') d\mu' = 0.$$

Последнее равенство следует из ортогональности с весом  $\mu$  функций  $\Phi_{0\pm}(\mu)$  и  $\psi'(\mu)$ . Значит, числитель (5.5.26) обращается в нуль при  $z = \pm v_0$ , т. е. функция  $N(z)$  имеет требуемые свойства, функция  $A(v)$  существует и представление (5.5.20) возможно. Теорема 5.5.2 доказана.

Таким образом, представив функцию  $\psi(\mu)$  в виде (5.5.18), находим, что функция

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu) = & a_{0+} \Phi_{0+}(\mu) \exp[-(x-x_0)/v_0] + a_{0-} \Phi_{0-}(\mu) \exp[(x-x_0)/v_0] + \\ & + \int_{-1}^1 A(v) \Phi_v(\mu) \exp[-(x-x_0)/v] dv \end{aligned} \quad (5.5.27)$$

является решением однородного уравнения (5.5.1) и  $\varphi(x_0, \mu) = \psi(\mu)$ .

Теперь найдем элементарные решения однородного одномерного самосопряженного уравнения

$$-\mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = c \int_0^1 u(x, \mu') d\mu'. \quad (5.5.28)$$

Учитывая, что функция  $u(x, \mu)$  — решение уравнения (5.5.28) — связана с функцией  $\varphi(x, \mu)$  — решением уравнения (5.5.1) — соотношением

$$u(x, \mu) = [\varphi(x, \mu) + \varphi(x, -\mu)]/2,$$

где  $0 \leq \mu \leq 1$ , сконструируем элементарные решения (5.5.28), нормированные условием  $\int_0^1 u d\mu = 1$ . Для этого используем найденные ре-

шения  $\varphi_{0\pm}(x, \mu)$ ,  $\varphi_{\nu}(x, \mu)$ , которые определены формулами (5.5.10), (5.5.13):

$$u_{0\pm}(x, \mu) = V_0(\mu) \exp(\mp x/\nu_0); u_{\nu\pm}(x, \mu) = V_{\nu}(\mu) \times \times \exp(\mp x/\nu), \quad (5.5.29)$$

где

$$V_0 = c\nu_0^2/(\nu_0^2 - \mu^2); V_{\nu}(\mu) = P [c\nu^2/(\nu^2 - \mu^2)] + \lambda(\nu) \delta(\mu - \nu), \quad (5.5.30)$$

а  $\nu \in [0, 1]$ . Справедлива

**Теорема 5.5.3.**

$$\int_0^1 \mu^2 V_{\nu}(\mu) V_{\nu'}(\mu) d\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \nu'. \quad (5.5.31)$$

В самом деле, подставив  $u_{\nu'}$ ,  $u_{\nu}$ , выраженные формулами (5.5.29), в уравнение (5.5.28), получим

$$(1 - \mu^2/\nu^2) V_{\nu} = c; (1 - \mu^2/(\nu')^2) V_{\nu'} = c. \quad (5.5.32)$$

Умножая первое уравнение на  $V_{\nu'}$ , второе на  $V_{\nu}$ , вычитая полученные уравнения одно из другого и применяя к результату оператор  $\int_0^1 \dots d\mu$ , приходим к соотношению

$$\left[ \frac{1}{(\nu')^2} - \frac{1}{\nu^2} \right] \int_0^1 \mu^2 V_{\nu} V_{\nu'} d\mu = 0. \quad (5.5.33)$$

Следовательно, при  $\nu' \neq \nu$  справедливо равенство (5.5.31). Из теоремы 5.5.3 вытекает

**Следствие 5.5.1.** *Функции  $V_0, V_{\nu}, \nu \in [0, 1]$  — полная в  $L_1(0, 1]$  система функций.*

Учитывая представления (5.5.18), (5.5.27), видим, что в этом случае любая функция  $V(\mu) \in L_1[0, 1]$  может быть записана в виде

$$V(\mu) = aV_0(\mu) + \int_0^1 A(\nu) V_{\nu}(\mu) d\nu,$$

а следовательно, функции

$$u_{\pm}(x, \mu) = aV_0(\mu) \exp(\pm(x-x_0)/\nu_0) + + \int_0^1 A(\nu) V_{\nu}(\mu) \exp(\mp(x-x_0)/\nu_0) d\nu \quad (5.5.34)$$

являются двумя решениями уравнения (5.5.28), такими, что  $u_{\pm}(x_0, u) = V(\mu)$ .

Обсудим теперь вопрос об элементарных решениях многомерных задач

$$i\Omega \nabla \varphi + \varphi = cS\varphi \quad (5.5.35)$$

с постоянными  $l, c$ . Положим  $l = 1$ . В работах [121, 130] найдена полная в  $L_2(\Omega)$  система решений уравнения (5.5.35). Е. Берайс [258] также исследовал вопросы нахождения решений задачи (5.5.35). Полученные решения будут, вообще говоря, обобщенными функциями, зависящими от параметра  $\nu$  и вектора  $\omega \in \Omega$ , и лишь для значений  $\nu = \pm \nu_0$  эти функции являются обычными функциями. Некоторые из полученных элементарных решений были известны и ранее (см., например, монографию Дэвисона [81], в которой они были названы «странными» решениями).

Будем искать решение (5.5.35) в виде плоских волн

$$\varphi(\mathbf{x}, \Omega) = \Phi_\nu(\omega\Omega) \exp(-\omega\mathbf{x}/\nu), \quad (5.5.36)$$

где  $\omega$  — единичный вектор;  $\nu$  — числовой параметр, а  $\Phi_{\nu\omega} = \Phi_\nu(\omega\Omega)$  — функция, определенная на  $\Omega$  и зависящая от пока не определенных параметров  $\nu, \omega$ .

Подставляя (5.5.36) в (5.5.35), получаем для  $\Phi_{\nu\omega}$  следующее уравнение:

$$[1 - \omega\Omega\nu^{-1}] \Phi_{\nu\omega} = cS\Phi_{\nu\omega}. \quad (5.5.37)$$

Обозначив  $\mu = \omega\Omega$  и воспользовавшись формулами суммирования на сфере (5.1.36), (5.1.37), видим, что уравнение (5.5.37) переходит в уравнение (5.5.3) для функции  $\Phi_\nu(\mu)$ , которое определяет набор функций  $\Phi_{0\pm}(\mu), \Phi_\nu(\mu)$ . Повторяя рассуждения, приведенные в начале этого параграфа, получаем следующие элементарные решения:

$$\varphi_{0\pm}(\mathbf{x}, \Omega\omega) = \Phi_{0\pm}(\Omega\omega) \exp(\mp \mathbf{x}\omega/\nu_0); \quad (5.5.38)$$

$$\varphi_\nu(\mathbf{x}, \Omega\omega) = \Phi_\nu(\Omega\omega) \exp(-\mathbf{x}\omega/\nu) \quad (5.5.39)$$

при  $\nu \in [-1, 1]$ , где  $\Phi_{0\pm}(\mu), \Phi_\nu(\mu)$  определяются формулами (5.5.11), (5.5.8), а  $\omega$  — произвольный единичный вектор.

**Теорема 5.5.4.** Для любого фиксированного  $\omega$

$$S(\Omega' \omega \Phi_\nu(\Omega' \omega) \Phi_{\nu'}(\Omega' \omega)) = 0 \text{ при } \nu \neq \nu'.$$

**Доказательство.** В силу формул суммирования на сфере и на основании теоремы 5.5.1 имеем

$$S(\Omega' \omega \Phi_\nu(\Omega' \omega) \Phi_{\nu'}(\Omega' \omega)) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu \Phi_\nu(\mu) \Phi_{\nu'}(\mu) d\mu = 0,$$

что и доказывает теорему 5.5.4.

Теперь обсудим вопрос о полноте полученной системы функций. Пусть функция  $\psi(\Omega)$  представима рядом Фурье по сферическим функциям

$$\psi(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_l a_{ni} Y_{ni}(\Omega). \quad (5.5.40)$$

Тогда справедлива

**Теорема 5.5.5.** Система функций  $\Phi_{0\pm}(\Omega\omega), \Phi_\nu(\Omega\omega)$ , где  $\nu \in [-1, 1], \omega \in \Omega$ , образует полную систему функций в пространст-

ве функций  $\psi(\Omega)$ , представимых рядом Фурье (5.5.40) по сферическим функциям.

Доказательство. Преобразуем ряд (5.5.40), пользуясь формулами (5.1.30)—(5.1.36):

$$\begin{aligned}\psi(\Omega) &= S \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i c_{ni} Y_{ni}(\Omega') P_n(\Omega' \Omega) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i c_{ni} S[Y_{ni}(\Omega') P_n(\Omega \Omega')],\end{aligned}\quad (5.5.41)$$

где  $P_n(\mu)$  — многочлены Лежандра, а  $c_{ni}$  выражаются в виде произведения коэффициентов Фурье функции  $\psi(\Omega)$  на некоторые определяемые формулой (5.1.36) постоянные. Из разложения функции  $\psi(\Omega)$  в ряд (5.5.41) следует, что мы докажем теорему 5.5.5, если покажем возможность представления многочленов  $P_n(\mu)$  через функции  $\Phi_{0\pm}(\mu)$ ,  $\Phi_\nu(\mu)$ , где  $\mu = \Omega \Omega'$ . По теореме 5.5.1 это можно сделать; теорема 5.5.5 доказана.

Учитывая разложения (5.5.18), (5.5.27), (5.5.41), заключаем, что если функция  $\psi(\Omega)$  представима рядом (5.5.40), то найдутся такие функции  $f_1(\Omega)$ ,  $f_2(\Omega)$ ,  $A(\Omega, \nu)$ , что  $\psi(\Omega)$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\psi(\Omega) &= S \left[ f_1(\Omega') \Phi_{0+}(\Omega \Omega') + f_2(\Omega') \Phi_{0-}(\Omega \Omega') + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 A(\Omega', \nu) \Phi_\nu(\Omega \Omega') d\nu \right],\end{aligned}$$

а функция

$$\begin{aligned}\varphi(x, \Omega) &= S \left[ f_1(\Omega') \Phi_{0+}(\Omega \Omega') \exp(-\Omega'(x-x_0)/\nu_0) + \right. \\ &\quad \left. + f_2(\Omega') \Phi_{0-}(\Omega \Omega') \exp(\Omega'(x-x_0)/\nu_0) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 A(\Omega', \nu) \Phi_\nu(\Omega \Omega') \exp(-\Omega'(x-x_0)/\nu) d\nu \right]\end{aligned}$$

является решением однородного уравнения, таким, что  $\varphi(x_0, \Omega) = \psi(\Omega)$ . Функции  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $A(\Omega, \nu)$  определяются однозначно при соблюдении следующего порядка вычислений: сначала функцию  $\psi(\Omega)$  представляют рядом (5.5.40), а затем, используя разложения многочленов Лежандра по функциям  $\Phi_{0\pm}$ ,  $\Phi_\nu$  и формулы суммирования по сфере, определяют функции  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $A(\Omega, \nu)$ .

Аналогично строится система функций, являющихся решениями многомерного самосопряженного уравнения, полная в пространстве функций  $\psi(\Omega)$ , представимых в виде

$$\psi(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_i a_{ni} Y_{2ni}(\Omega).$$



Эти решения имеют вид

$$u_{0\pm}(x, \Omega\omega) = V_0(\Omega\omega) \exp(\pm x\omega/v_0);$$

$$u_\nu(x, \Omega\omega) = V_\nu(\Omega\omega) \exp(-x\omega/\nu),$$

где  $\nu \in [0, 1]$ , а  $V_0(\mu)$ ,  $\nu_\nu(\mu)$  определяются формулами (5.5.30) при  $\mu = \Omega\Omega'$ . Справедливо

**Следствие 5.5.2.** Для любого фиксированного  $\omega$

$$S((\Omega'\omega)^2 V_\nu(\Omega'\omega) V_{\nu'}(\Omega'\omega)) = 0 \text{ при } \nu \neq \nu'.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 5.5.4.

Н. И. Лалетиним [114] найдены элементарные решения для неплоских одномерных геометрий. Опишем способ получения этих решений. В систему плоских элементарных решений кроме решений, о которых шла речь выше, включим решения вида

$$\varphi_\nu^m(x, \psi, \mu) = \delta(\nu - \mu) \exp(im\psi - x/\nu), \quad m \neq 0, \quad (5.5.42)$$

где  $\psi$  — азимутальный угол, а  $\mu = \cos \theta$ . Подстановкой в уравнение (5.5.35) легко убедиться, что функции (5.5.42) удовлетворяют ему. Такие решения становятся необходимыми, когда в задаче с плоской геометрией граничные условия зависят не только от угла  $\theta = \arccos \mu$ , но и от угла  $\psi$ , например в задаче о распространении в полупространстве наклонно падающего на него бесконечно широкого пучка нейтронов. Обобщенные функции (5.5.13) и (5.5.42) удобно переписать в виде

$$\varphi_\nu^0(x, \psi, \mu) = \varphi_\nu(x, \mu);$$

$$\varphi_\nu^m(x, \psi, \mu) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_{n,0}^n(\mu) \exp(im\psi - x/\nu) A_n^m(\nu). \quad (5.5.43)$$

Здесь  $P_{n,0}^n(\mu) = P_n^{(m)}(\mu) \sqrt{(n-m)!/(n+m)!}$ ,

$$A_n^m(\nu) = \begin{cases} P_n(\nu) [1 - c\nu Q_0(\nu)] + c\nu Q_n(\nu) & \text{при } m=0; \\ P_{n,0}^n(\nu) & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad (5.5.44)$$

где  $P_n(\nu)$  и  $Q_n(\nu)$  — многочлены Лежандра и функция Лежандра второго рода соответственно.

Часть неплоских элементарных решений получим, взяв линейную комбинацию плоских элементарных решений, определенных в различном образом ориентированных системах координат. Эти решения имеют вид

$$\int A(\omega) \varphi_\nu^m(\mathbf{r}\omega, \alpha, \Omega\omega) d\omega, \quad (5.5.45)$$

где  $\alpha$  — угол между плоскостями, образующими которых являются пары векторов  $(\mathbf{r}, \omega)$  и  $(\omega, \Omega)$ . Здесь  $\omega$  — вектор единичной длины. Удобно в качестве базисной системы для решения трехмерных (по пространственным координатам) задач брать такие, которые получают-

ся при подстановке в (5.5.45) в качестве  $A(\omega)$  сферических функций

$$Y_{n, k}(\omega) = P_n^{(k)}(\omega_3) \exp(ik\xi) (\cos \xi = \omega_1 / \sqrt{1 - \omega_3^2});$$

$$\varphi_{\nu n k}^m(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{\Omega} Y_{n, k}(\omega) \varphi_{\nu}^m(\mathbf{r}\omega, \alpha, \Omega\omega) d\omega. \quad (5.5.46)$$

Если геометрия задачи имеет сферическую симметрию, то потребуется только  $\varphi_{\nu 0 0}^0(r, \mu)$  ( $\mu = \Omega r/r$ ). Подставив (5.5.43) в (5.5.45) и выполнив интегрирование, получим

$$\varphi_{\nu 0 0}^0(r, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2} A_n^0(\nu) \frac{I_{n+1/2}(r/\nu) V^{\sqrt{\nu}}}{V^{\sqrt{r}}} P_n(\mu). \quad (5.5.47)$$

Здесь  $I_{n+1/2}(x)$  — модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента полуцелого порядка. Для двумерных задач удобно взять

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \delta(\omega_3) \exp(ip\xi); \\ \varphi_{\nu p}^m(\rho, \Omega) &= \int_0^{2\pi} \exp(ip\xi) \varphi_0^m(\rho\omega, \alpha, \Omega\omega) d\xi |_{\omega_3=1}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5.48)$$

где  $p$  — целое число, а  $\rho$  — проекция  $\mathbf{r}$  на плоскость  $(x, y)$ .

Решениям, обладающим цилиндрической симметрией, будет соответствовать  $p = 0$ . Их явный вид

$$\varphi_{\nu 0}^m(\rho, \psi, \mu) = \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=0}^{2[n/2]} \frac{2n+1}{2} A_n^m(\nu) \Phi_{m, l}^n(\rho/\nu) P_{l, 0}^n(\mu) \cos l\psi. \quad (5.5.49)$$

Здесь  $m$  и  $l$  пробегает четные значения\*:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{lm}^n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \exp(-x \cos t) [P_{lm}^n(\cos t) + \\ &+ (-1)^l P_{m, -l}^n(\cos t)] dt = (-1)^n \sum_{i=0}^n a_{ni}^{ml} I_i(x); \\ a_{ni}^{ml} &= \frac{m+l}{1 + \delta_{i0}} P_{mi}^{(n)}(0) [P_{li}^{(n)}(0) + P_{l, -i}^{(n)}(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.50)$$

Выбранные элементарные решения ортогональны соответствующим решениям сопряженного уравнения  $[\varphi_{\nu p k}^m]^* = \varphi_{\nu p k}^m(\mathbf{r}, -\Omega)$ :

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_{\nu 0 0}^0(r, \mu) \varphi_{\nu 0 0}^{0*}(r, \mu) d\mu = 0 \text{ для всех } \nu, \nu'^{**}. \quad (5.5.51)$$

\* Функции  $P_{ml}^n(\cos t)$  изучены в работе [210].

\*\* Нетрудно убедиться, что  $\varphi_{\nu 0 0}^0(\mathbf{r}, \mu) = \varphi_{-\nu 0 0}^0(\mathbf{r}, \mu)$ , поэтому можно считать, что  $\nu \in \{[0, 1], \nu_0\}$  (аналогично обстоит дело для  $\varphi_{\nu_0}^m(\rho, \psi, \mu)$ ).

Функций (5.5.46), однако, недостаточно для решения задач в неплоских геометриях. Недостающие решения будут удовлетворять кинетическому уравнению всюду, кроме начала координат ( $r=0$  и  $\rho=0$  соответственно); они выражаются интегралами

$$\left. \begin{aligned} \psi_{vnh}^m(r, \Omega) &= \int_0^{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} Y_{nh}(\omega) \varphi_v^m(r\omega, \alpha, \Omega\omega) d\omega; \\ \psi_{vp}^m(\rho, \Omega) &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp(ip(\xi - \xi_0)) \varphi_v^m(\rho\omega, \alpha, \Omega\omega) d\xi \Big|_{\omega_3=1}. \end{aligned} \right\} (5.5.52)$$

Сферически- и цилиндрически-симметричные сингулярные элементарные решения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_{v00}^0(r, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} A_n^0(v) \frac{K_{n+1/2}(r/v) V\sqrt{v}}{\sqrt{r}} P_n(\mu); \\ \psi_{v0}^m(\rho, \vartheta, \psi) &= \sum_{n+m}^{\infty} \sum_{l=0, 2}^{2[n/2]} \frac{2n+1}{2} A_n^m(v) F_{m, l}^n(\rho/v) \times \\ &\times P_{l, 0}^n(\cos \vartheta) \cos l\psi. \end{aligned} \right\} (5.5.53)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{m, l}^n(x) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp(-x \operatorname{ch} t) [P_{l, m}^n(\operatorname{ch} t) + (-1)^l P_{-l, m}^n(\operatorname{ch} t)] dt = \\ &= \sum_{i=0}^n a_{ni}^{ml} K_i(x), \end{aligned}$$

$K_i(x)$  — функции Макдональда.

Ряды, написанные в формулах (5.5.53), не определены в обычном смысле. Однако их можно рассматривать как обобщенные функции переменных  $v, \vartheta, \psi$ .

Пользуясь формулой (5.5.51) и асимптотическими выражениями для элементарных решений при  $r \rightarrow \infty$ , получаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \mu \psi_{v00}^0(r, \mu) [\psi_{v'00}^0(r, \mu)]^* d\mu &= 0 \text{ для всех } v, v'; \\ \int_{-1}^{+1} \mu \psi_{v00}^0(r, \mu) [\varphi_{v'00}^0(r, \mu)]^* d\mu &= [N(v, 0)/4\pi r^2] \delta(v, v'); \\ \int_{-1}^{+1} \mu \varphi_{v00}^0(r, \mu) [\psi_{v'00}^0(r, \mu)]^* d\mu &= [N(v, 0)/4\pi r^2] \delta(v, v'), \end{aligned} \right\} (5.5.54)$$

где  $N(v, 0) = vN_v$ ,  $\delta(v, v')$  —  $\delta$ -функция при  $v \in [-1, 1]$  и символ Кронекера при  $v \notin [-1, 1]$ . Аналогичные выражения существуют и для цилиндрически-симметричных решений.

Заметим, что при переходе от плоской геометрии к другим все преобразования касались лишь выражений  $\exp(-x/v) Y_{ni}(\Omega)$ . Поэтому запись элементарных решений в виде рядов по сферическим гармоникам позволяет без особого рассмотрения использовать результаты, полученные для плоских геометрий, при учете анизотропии рассеяния и энергетической зависимости в неплоских геометриях.

### § 5.6. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЫ

Пусть в кинетическом уравнении  $0 \leq c < 1$ . Определим, следуя работе [266], фундаментальное решение  $\psi_g$  как решение уравнения

$$\mu \frac{\partial \psi_g}{\partial x} + \psi_g = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi_g(x, \mu') d\mu' + \frac{\delta(x)}{4\pi} \delta(\mu - \mu_0). \quad (5.6.1)$$

Функция  $\psi_g$  удовлетворяет однородному уравнению для  $x \neq 0$  и испытывает скачок при  $x = 0$ :

$$\mu [\psi_g(0^+, \mu) - \psi_g(0^-, \mu)] = \delta(\mu - \mu_0)/4\pi. \quad (5.6.2)$$

Функцию  $\psi_g$  ищем в виде (5.5.27) при  $x_0 = 0$  как решение однородного уравнения при  $x > 0$  и при  $x < 0$ , убывающее при  $|x| \rightarrow \infty$ :

$$\left. \begin{aligned} \psi_g &= a_{0+} \psi_{0+}(x, \mu) + \int_0^1 A(v) \psi_v(x, \mu) dv \quad \text{при } x > 0; \\ \psi_g &= -a_{0-} \psi_{0-}(x, \mu) - \int_{-1}^0 A(v) \psi_v(x, \mu) dv \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.3)$$

Равенство (5.6.2) дает уравнение для определения коэффициентов

$$\frac{\delta(\mu - \mu_0)}{4\pi\mu} = a_{0+} \varphi_{0+}(\mu) + a_{0-} \varphi_{0-}(\mu) + \int_{-1}^1 A(v) \varphi_v(\mu) dv. \quad (5.6.4)$$

Сравнивая (5.6.4) с (5.5.18) и учитывая (5.5.19), (5.5.23), (5.5.26), видим, что

$$a_{0\pm} = N_{0\pm}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{\mu \Phi_{0\pm}(\mu) \delta(\mu - \mu_0) d\mu}{4\pi\mu} = \frac{1}{4\pi N_{0\pm}} \Phi_{0\pm}(\mu_0);$$

$$A(v) = \Phi_v(\mu_0)/(4\pi N_v).$$

Итак,

$$\psi_g(x, \mu, \mu_0) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\Phi_{0+}(\mu_0) \Phi_{0+}(\mu)}{N_{0+}} \exp(-x/v_0) + \int_0^1 \frac{\Phi_v(\mu_0) \Phi_v(\mu)}{N_v} \exp(-x/v) dv \right] & \text{при } x > 0; \\ -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\Phi_{0-}(\mu_0) \Phi_{0-}(\mu)}{N_{0-}} \exp(x/v_0) + \int_1^0 \frac{\Phi_v(\mu_0) \Phi_v(\mu)}{N_v} \exp(x/v) dv \right] & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.6.5)$$

Таким образом, функция Грина  $G(x, x_0, \mu, \mu_0)$  задается формулой (5.6.5), если в ней  $x$  заменить  $x - x_0$ . В частности, если источник изотропный, то функция Грина  $\psi_0(x - x_0, \mu)$  для этой задачи выразится формулой

$$\psi_0(x, \mu) = \int_{-1}^1 \psi_g(x, \mu, \mu_0) d\mu_0 = \frac{1}{4\pi} \left[ N_{0\pm}^{-1} \Phi_{0+}(\mu) \exp(-|x|/v_0) + \int_0^1 N_v^{-1} \Phi(\mu) \exp(-|x|/v) dv \right]. \quad (5.6.6)$$

Вычисляя нулевой момент от  $\psi_0$ , находим плотность нейтронов изотропного источника, сосредоточенного в одной точке:

$$\rho_0(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi_0(x, \mu) d\mu = \frac{1}{8\pi} \left[ N_{0\pm}^{-1} \exp(-|x|/v_0) + \int_0^1 N_v^{-1} \exp(-|x|/v) dv \right]. \quad (5.6.7)$$

Н. И. Лалетинным [114] найдены моменты функции Грина:

$$G_{nn'}^{mm'} = \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Omega'} d\Omega' G Y_{nm}(\Omega) Y_{n'm'}(\Omega'). \quad (5.6.8)$$

Пусть  $G(x, x', \Omega, \Omega')$  — функция Грина в  $R_3$ , определенная во всем пространстве:

$$\Omega \nabla G + \Sigma G = \Sigma_s \bar{S} G + \delta(x - x') \delta(\Omega - \Omega'). \quad (5.6.9)$$

Представим ее в виде ряда

$$G(x, x', \Omega, \Omega') = \sum_n \sum_{n'} \sum_m \sum_{m'} G_{nn'}^{mm'} Y_{nm}(\Omega) Y_{n'm'}(\Omega'). \quad (5.6.10)$$

Для задач с плоской, сферической и цилиндрической симметриями

$$G_{nn'}^{mm'}(x, x') = \begin{cases} \sum_{l=0}^L S \frac{A_n^l(v) A_{n'}^l(v) X_{nm}^l(xn/v) Z_{n'm'}^l(x'n'/v)}{N(v, l)} & \text{при } xn > x'n'; \\ \sum_{l=0}^L S \frac{A_n^l(v) A_{n'}^l(v) X_{nm}^l(x'n'/v) Z_{n'm'}^l(xn/v)}{n(v, l)} & \text{при } xn < x'n'. \end{cases} \quad (5.6.11)$$

Поясним обозначения в формуле (5.6.11). Здесь  $L = \min(n', n)$ ,  $A_n^l(v)$  — коэффициенты разложения плоских элементарных решений по многочленам Лежандра;  $N(v, l)$  — нормировочные интегралы для плоских элементарных решений. Операция  $S$  означает интегрирование по положительной части непрерывного спектра индексов плоских элементарных решений и суммирование по положительной части дискретного спектра. Функции  $X_{nm}^l$  и  $Z_{nm}^l$  описывают координатную зависимость и имеют вид:

для плоской геометрии

$$X_{nm}^l = \delta_{m0} \delta_{l0} \exp(-x/v); \quad Z_{nm}^l = \delta_{m0} \delta_{l0} \exp(x/v)$$

( $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  — единичные векторы нормали к поверхностям  $x = \text{const}$ ,  $x' = \text{const}$ );

для сферической геометрии

$$X_{nm}^l = \delta_{m0} \delta_{l0} \frac{K_{n+1/2}(r/v)}{\sqrt{rv}}; \quad Z_{nm}^l = \delta_{m0} \delta_{l0} \frac{I_{n+1/2}(r/v)}{\sqrt{rv}}$$

( $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  — единичные векторы нормали к поверхностям  $r = \text{const}$ ,  $r' = \text{const}$  в точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ );

для цилиндрической геометрии

$$X_{nm}^l = \delta_{m, 2p} \delta_{l, 2p} F_{ml}^n(\rho/v) v^{-1/2}; \quad Z_{nm}^l = \delta_{m, 2p} \delta_{l, 2p} \Phi_{ml}^n(\rho/v) v^{-1/2}$$

( $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$  — единичные векторы нормали к поверхностям  $\rho = \text{const}$ ,  $\rho' = \text{const}$  в точках  $\rho$  и  $\rho'$ ). В последней формуле  $p = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m \leq n$ ,  $l \leq n$ . Функции  $A_n^l(v)$  для односкоростной задачи со сферически-симметричным рассеянием имеют вид

$$A_n^l(v) = \begin{cases} P_n^{(l)}(v) & \text{при } l \neq 0; \\ P_n^{(l)}(v) - cv [Q_0(v) P_n(v) - Q_n(v)] & \text{при } l = 0. \end{cases}$$

В этом случае

$$N(v, l) = \begin{cases} v & \text{при } l \neq 0; \\ \left[ \lambda^2(v) + \frac{\pi^2 c^2}{4} v^2 \right] v & \text{при } v \in [-1, 1]; l = 0; \\ \frac{cv_0^3}{2} \left( \frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right) & \text{при } v = v_0, l = 0. \end{cases}$$

### § 5.7. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ САМОСПРЯЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Найдем [121] решение  $u(x, \Omega, \Omega_0)$  типа функционала, удовлетворяющее уравнению

$$-[\Delta \Omega \nabla]^2 u + u = \bar{S}u + \delta(\Omega, \Omega_0) \delta(x). \quad (5.7.1)$$

Здесь  $\Omega_0 \in \Omega$ ,  $\delta(\Omega, \Omega_0)$  —  $\delta$ -функция на  $\Omega$ , нормированная условием

$$S[f(\Omega') \delta(\Omega', \Omega_0)] = f(\Omega_0),$$

$\delta(x) = \prod_{i=1}^3 \delta(x_i)$ , где  $\delta(x_i)$  — одномерные  $\delta$ -функции.

Пусть  $\bar{S}u = S[g(\Omega, \Omega') u(x, \Omega')]$  и  $0 \leq g(\Omega, \Omega') < 1$ . Удобно находить не само фундаментальное решение (5.7.1), а его преобразование Фурье.

Пусть функция

$$w(v, \Omega) = \Phi u = \int_{R_3} u \exp(-ivx) dx$$

является преобразованием Фурье для  $u$ . Тогда, умножая (5.7.1) на  $\exp(-ivx)$  и интегрируя по  $R_3$ , убеждаемся, что  $w$  удовлетворяет уравнению

$$[1 + (\Omega v)^2 l^2] w = \bar{S}w + \delta(\Omega, \Omega_0). \quad (5.7.2)$$

Решение (5.7.2) ищем в виде

$$w(v, \Omega, \Omega_0) = (1 + (\Omega v)^2 l^2)^{-1} (B(v, \Omega, \Omega_0) + \delta(\Omega, \Omega_0)), \quad (5.7.3)$$

где  $B = B(v, \Omega, \Omega_0)$  — неизвестная функция. Подставляя (5.7.3) в (5.7.2), находим, что  $B$  должна удовлетворять интегральному уравнению

$$B(v, \Omega, \Omega_0) = S[g(\Omega, \Omega') (1 + (v\Omega')^2 l^2)^{-1} B(v, \Omega', \Omega_0)] + g(\Omega, \Omega_0) [1 + (v\Omega_0)^2 l^2]^{-1}, \quad (5.7.4)$$

в которое величины  $v, \Omega_0$  входят в качестве параметров. Вследствие наложенных ограничений на  $g(\Omega, \Omega_0)$  уравнение (5.7.4) для всех  $v \in R_3, \Omega_0 \in \Omega$  имеет, и притом единственное, решение. В случае, когда функция  $g(\Omega, \Omega')$  имеет вид

$$g(\Omega, \Omega') = \sum_{i=1}^N a_i(\Omega) b_i(\Omega'),$$

где  $N$  — некоторое целое число, интегральное уравнение (5.7.4) становится вырожденным и его решение находится стандартным способом путем решения системы линейных алгебраических уравнений  $N$ -го порядка. Найдя функцию  $B(\mathbf{v}, \Omega, \Omega_0)$ , представим  $\omega$  в виде

$$\omega = \omega_1 + \delta(\Omega, \Omega_0) \omega_2,$$

$$\text{где } \omega_1 = (1 + (\Omega \mathbf{v})^2 l^2)^{-1} B(\mathbf{v}, \Omega, \Omega_0); \quad \omega_2 = (1 + (\Omega \mathbf{v})^2 l^2)^{-1}.$$

Следовательно,

$$u(\mathbf{x}, \Omega, \Omega_0) = u_1(\mathbf{x}, \Omega, \Omega_0) + \delta(\Omega, \Omega_0) u_2(\mathbf{x}, \Omega), \quad (5.7.5)$$

$$\text{где } u_1(\mathbf{x}, \Omega, \Omega_0) = (2\pi)^{-3} \int_{R_3} \omega_1 \exp(i\mathbf{v}\mathbf{x}) d\mathbf{v};$$

$$u_2(\mathbf{x}, \Omega) = (2\pi)^{-3} \int_{R_3} (1 + (\Omega \mathbf{v})^2 l^2)^{-1} \exp(i\mathbf{v}\mathbf{x}) d\mathbf{v}.$$

Зная фундаментальное решение  $u(\mathbf{x}, \Omega, \Omega_0)$ , можно написать решение уравнения (5.7.1), в правой части которого вместо  $\delta(\mathbf{x})$   $\delta(\Omega, \Omega_0)$  стоит функция  $F(\mathbf{x}, \Omega)$ :

$$u(\mathbf{x}, \Omega) = S \left[ \int_{R_3} u(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Omega, \Omega') F(\mathbf{x}', \Omega') d\mathbf{x}' \right], \quad (5.7.6)$$

или, учитывая представление (5.7.5),

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, \Omega) = S \left[ \int_{R_3} u_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Omega, \Omega') F(\mathbf{x}', \Omega') d\mathbf{x}' \right] + \\ + \int_{R_3} u_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Omega) F(\mathbf{x}', \Omega) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

Формулы упрощаются, если  $g$  не зависит от  $\Omega, \Omega'$  и равно  $c$ . Тогда

$$B(\mathbf{v}, \Omega, \Omega_0) = (1 - cr(|\mathbf{v}|l))^{-1} c (1 + (\Omega_0 \mathbf{v})^2 l^2)^{-1}, \quad (5.7.8)$$

$$\text{где } r(\lambda) = \lambda^{-1} \operatorname{arctg} \lambda; \quad |\mathbf{v}| = \left( \sum_{i=1}^3 v_i^2 \right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\omega_1(\mathbf{v}, \Omega, \Omega_0) = (1 + (\Omega \mathbf{v})^2 l^2)^{-1} (1 - cr(|\mathbf{v}|l))^{-1} c (1 + (\Omega_0 \mathbf{v})^2 l^2)^{-1}. \quad (5.7.9)$$

В частности, если

$$F(\mathbf{x}, \Omega) = \sum_{\beta} F_{\beta}(\Omega) \exp(i\beta \mathbf{x}),$$



где  $\beta$  — некоторая последовательность трехмерных векторов, то

$$u(x, \Omega) = \sum_{\beta} (1 + l^2 (\Omega \beta)^2)^{-1} [cF_{\beta}^1 (1 - cr(l|\beta|))^{-1} + F_{\beta}(\Omega)] \exp(i\beta x), \quad (5.7.10)$$

$$\text{где } F_{\beta}^1 = S[F_{\beta}(\Omega') (1 + l^2 (\beta \Omega')^2)^{-1}].$$

В работах [121, 130] аналогичные формулы получены для многогрупповых задач в  $q$ -мерных пространствах.

### § 5.8. $2\pi T$ -ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Получим формулы для решения в ячейках различной формы [121]. Такие решения формально можно описать следующим образом. Пусть  $T$  — трехмерная матрица и  $\det T \neq 0$ . Обозначим  $n = (n_1, n_2, n_3)$  — вектор с целочисленными компонентами; пусть  $x = 2\pi T u$ , где  $x, u \in R_3$ . В  $R_3$  отождествим все точки, отличающиеся друг от друга на векторы вида  $2\pi T n$ . Полученное многообразие всех эквивалентных точек представляет собой трехмерный тор  $T_3$ , который называется фундаментальной областью для  $2\pi T$ -периодических функций. Так называются функции  $\varphi(x)$ , для которых при любом  $x$  и любом целочисленном  $n$  справедливо равенство  $\varphi(x) = \varphi(x + 2\pi T n)$ . При помощи разрезов тор  $T_3$  может быть превращен в односвязную область, и притом разными способами, например, в куб  $-1/2 \leq y_i \leq 1/2, i = 1, 2, 3$ . Нахождению  $2\pi T$ -периодических решений для полигармонических уравнений посвящены исследования С. Л. Соболева [220].

Найдем на  $T_3$  решение уравнения

$$- [l\Omega \nabla]^2 u + u = cSu + F(x, \Omega), \quad (5.8.1)$$

в котором для простоты считаем  $l$  и  $c < 1$  постоянными. Эта задача является идеализированной для ячеек реактора, форма которых определяется матрицей  $T$  (например, плоских, кубических, шестигранных). Для нахождения решения  $2\pi T$ -периодической задачи используем метод, изложенный в работе [121]. Условимся в формулах суммирования по  $n$  не ставить индекс суммирования. Пусть  $T^*$  обозначает сопряженную к  $T$  матрицу. Предположим, что функция  $F(x, \Omega)$  разлагается в ряд Фурье:

$$F(x, \Omega) = \sum F_n(\Omega) \exp(i\beta_n x), \quad (5.8.2)$$

где  $\beta_n = (T^{-1})^* n$ ; пусть

$$\lambda_n = |\beta_n| l, r_n = r(\lambda_n) = \lambda_n^{-1} \arctg \lambda_n; G_n(\Omega) = (1 + (\beta_n \Omega)^2 l^2)^{-1}. \quad (5.8.3)$$

Решение задачи (5.8.1) имеет вид

$$u = \sum g_n(\Omega) \exp(i\beta_n x). \quad (5.8.4)$$

Подставляя (5.8.4), (5.8.2) в (5.8.1) и приравнявая коэффициенты при функциях  $\exp(i\beta_n x)$ , получаем для определения  $g_n(\Omega)$  уравнения

$$(1 + (\beta_n \Omega)^2 l^2) g_n(\Omega) = cSg_n + F_n(\Omega). \quad (5.8.5)$$

Решение (5.8.5) ищем в виде

$$g_n(\Omega) = (1 + (\beta_n \Omega)^2 l^2)^{-1} (B_n + F_n(\Omega)). \quad (5.8.6)$$

Обозначая

$$F_n^1 = S[(1 + (\beta_n \Omega')^2 l^2)^{-1} F_n(\Omega')]$$

и учитывая, что

$$S[(1 + (\beta_n \Omega')^2 l^2)^{-1}] = r(|\beta_n| l),$$

из (5.8.6) получаем

$$Sg_n = r_n B_n + F_n^1, \quad (5.8.7)$$

или, подставляя (5.8.7) и (5.8.6) в (5.8.5),  $B_n = c(r_n B_n + F_n^1)$ , т. е.

$$B_n = (1 - cr_n)^{-1} cF_n^1.$$

Далее, поскольку в обозначениях (5.8.3)  $u$  записывается в виде

$$u = \Sigma G_n(\Omega) (B_n + F_n) \exp(i\beta_n \mathbf{x}),$$

имеем

$$u = \Sigma G_n(\Omega) (1 - cr_n)^{-1} cF_n^1 + F_n) \exp(i\beta_n \mathbf{x}). \quad (5.8.8)$$

Применяя к  $u$  операцию  $S$ , нетрудно убедиться, что

$$Su = \Sigma ((1 - cr_n)^{-1} F_n^1 \exp(i\beta_n \mathbf{x}), \quad (5.8.9)$$

где для изотропного источника

$$F_n^1 = r_n F_n. \quad (5.8.10)$$

Полученная формула (5.8.8) при  $\beta = \{\beta_n\}$  совпадает с формулой (5.7.10). Заметим, что в (5.8.8) отсутствуют члены, являющиеся решениями однородной задачи (5.8.1). В работе [121] получены решения периодических многогрупповых задач в случае, когда элементы матрицы  $c$  зависят от  $\mathbf{x}$ .

Приведем примеры матриц  $T$ : единичная матрица определяет квадратную ячейку, а матрица

$$T = a \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— шестигранную (рис. 5.4).

На рис. 5.5 приведены качественные результаты расчета В.И. Агошковым шестигранной ячейки при  $l = 0,92$ ,  $c = 0,7$  и единичном источнике в центре. Другие способы расчета четырех- и шестигранных ячеек описаны в § 6.6, 6.7, 6.9.

Мы получили в явном виде решения ряда задач. На некоторых из этих задач будем проверять эффективность аппроксимации разностных методов и эффективность итерационных методов решения задач

переноса. В этом отношении особенно удобна  $2\pi$ -периодическая задача с постоянными  $l, c$ , ибо для разностных методов в таком случае удастся получить неухудшаемые по порядку малости оценки погрешности решений разностных уравнений. А для итерационных методов эта краевая задача удобна тем, что для нее простые итерации сходятся

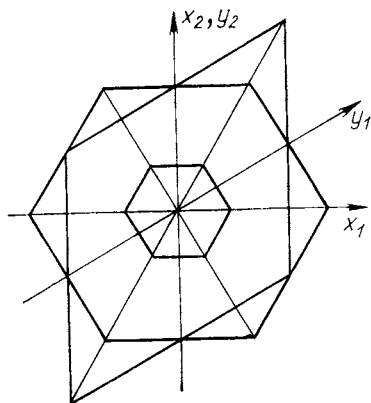


Рис. 5.4. Шестигранная ячейка

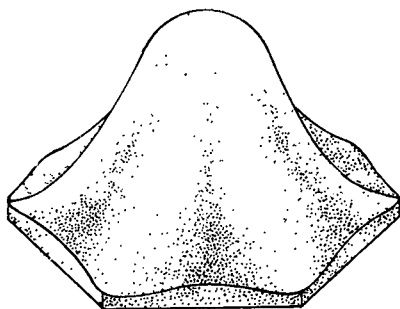


Рис. 5.5. Общий вид нейтронного поля  $u_0(x)$

наиболее медленно и, следовательно, эффективность многих методов, ускоряющих процесс простой итерации, наиболее четко определяется именно на периодических задачах.

Решения, полученные в данной главе, целесообразно использовать в различных приближенных методах (типа Галеркина и др.) по решению задач с переменными коэффициентами (см. § 6.9).

### § 5.9. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СФЕРЫ

При решении задач переноса в общей геометрии необходимо иметь достаточно точные квадратурные формулы для сферы с положительными весами для аппроксимации интегральных операторов уравнения переноса. Изложим кратко описание метода получения квадратурных формул типа Гаусса для единичной сферы, инвариантных относительно группы вращения октаэдра с инверсией  $G_8^*$  и точных для всех многочленов степени  $n$  включительно [138]. Максимальная алгебраическая точность  $n$  таких квадратур достигается путем специального выбора узлов и весов. Очевидно, что такие квадратуры будут обладать меньшим по сравнению с обычным числом узлов  $N$ .

Пусть в  $R_3(x, y, z)$  задана единичная сфера  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , а  $V$  — вписанный в нее октаэдр, вершины которого лежат на осях координат. Пусть

$$J(f) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} f(\Omega) d\Omega. \quad (5.9.1)$$

Квадратуру для интеграла (5.9.1) будем искать в инвариантном относительно группы  $G_8^*$  виде:

$$S(f) = A_1 \sum_{i=1}^6 f(a_i^1) + A_2 \sum_{i=1}^{12} f(a_i^2) + A_3 \sum_{i=1}^8 f(a_i^3) + \sum_{k=1}^{N_1} B_k \sum_{i=1}^{24} f(b_i^k) + \\ + \sum_{k=1}^{N_2} C_k \sum_{i=1}^{24} f(c_i^k) + \sum_{k=1}^{N_3} D_k \sum_{i=1}^{48} f(d_i^k), \quad (5.9.2)$$

где  $A_k, B_k, C_k, D_k$  — веса квадратурной формулы, а координаты на  $\Omega$  характерных узлов квадратуры каждого типа имеют вид

$$a_1^1 = (1, 0, 0); \quad a_1^2 = (2^{-1/2}, 2^{-1/2}, 0); \quad a_1^3 = (3^{-1/2}, 3^{-1/2}, 3^{-1/2}); \\ b_1^k = (l_k, l_k, m_k); \quad c_1^k = (p_k, q_k, 0); \quad d_1^k = (r_k, s_k, \omega_k) \\ (2l_k^2 + m_k^2 = 1; \quad p_k^2 + q_k^2 = 1; \quad r_k^2 + s_k^2 + \omega_k^2 = 1).$$

Остальные узлы каждого типа получаются из приведенных перестановкой координат или изменением у них знака.

Веса и узлы в формуле (5.9.2) подберем такими, чтобы равенство

$$J(f) = S(f) \quad (5.9.3)$$

выполнялось для всех многочленов  $f$  до возможно наибольшей степени  $n$ . Согласно теореме С. Л. Соболева [221], для этого достаточно требования, чтобы равенство (5.9.3) было выполнено лишь для всех инвариантных относительно группы  $G_8^*$  многочленов. А так как любой инвариантный относительно  $G_8^*$  многочлен представим на  $\Omega$  в виде многочлена от  $\sigma_2 = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$  и  $\sigma_3 = x^2y^2z^2$ , то достаточно потребовать, чтобы равенство (5.9.3) было выполнено для всех многочленов  $Q(\sigma_2, \sigma_3)$  из множества  $T_n$ , которое определено требованием, чтобы степень  $Q$  в переменных  $x, y, z$  не превышала  $n$ . Подставляя в (5.9.3) все линейно-независимые многочлены  $Q \in T_n$ , получаем систему нелинейных алгебраических уравнений для определения весов и значений  $\sigma_{2k}, \sigma_{3k}$ , соответствующих узлам квадратуры. Методы решения таких систем описаны в работах [138, 139].

Приведем таблицы нескольких квадратур типа (5.9.2); в них  $N$  — общее число узлов, а  $n$  — алгебраическая точность.

$$n = 11$$

$N = 50, N_1 = 1, N_2 = N_3 = 0$  (слагаемые с  $C_k$  и  $D_k$  отсутствуют),

$$A_1 = 4/315, A_2 = 64/2835, A_3 = 27/1280,$$

$$B_1 = 11^4/725760, m_1 = 3/\sqrt{11}, l_1 = 1/\sqrt{11}.$$

$$n = 15$$

$$N = 86, N_1 = 2, N_2 = 1, N_3 = 0, A_2 = 0,$$

$$A_1 = 1,15440115441 \cdot 10^{-2}, A_3 = 1,19439090859 \cdot 10^{-2},$$

$$B_1 = 1,11105557106 \cdot 10^{-2}, B_2 = 1,18765012945 \cdot 10^{-2},$$

$$C_1 = 1,18123037469 \cdot 10^{-2},$$

$$l_1 = 0,369602846454,$$

$$m_1 = 0,852518311701,$$

$$l_2 = 0,694354006603,$$

$$m_2 = 0,189063552885,$$

$$p_1 = 0,927330657151,$$

$$q_1 = 0,374243039090.$$

Веса этой квадратуры хорошо выравнены.

$$n = 17$$

$$\begin{aligned} N &= 110, \quad N_1 = 3, \quad N_2 = 1, \quad N_3 = 0, \quad A_2 = 0, \\ A_1 &= 3,82827049494 \cdot 10^{-3}, \quad A_3 = 9,79373751249 \cdot 10^{-3}, \\ B_1 &= 8,21173728319 \cdot 10^{-3}, \quad B_2 = 9,59547133607 \cdot 10^{-3}, \\ B_3 &= 9,94281489118 \cdot 10^{-3}, \quad C_1 = 9,69499636166 \cdot 10^{-3}, \\ l_1 &= 0,185115635345, \quad m_1 = 0,965124035087, \\ l_2 &= 0,395689473056, \quad m_2 = 0,828769981253, \\ l_3 &= 0,690421048382, \quad m_3 = 0,215957291846, \\ p_1 &= 0,878158910604, \quad q_1 = 0,478369028812. \end{aligned}$$

$$n = 23$$

$$\begin{aligned} N &= 194, \quad N_1 = 4, \quad N_2 = 1, \quad N_3 = 1, \\ A_1 &= 1,78234044724 \cdot 10^{-3}, \quad A_2 = 5,71690594998 \cdot 10^{-3}, \\ A_3 &= 5,57338317884 \cdot 10^{-3}, \quad C_1 = 5,05184606462 \cdot 10^{-3}, \\ B_1 &= 5,51877146727 \cdot 10^{-3}, \quad B_2 = 5,15823771181 \cdot 10^{-3}, \\ B_3 &= 5,60870408259 \cdot 10^{-3}, \quad B_4 = 4,10677702817 \cdot 10^{-3}, \\ D_1 &= 5,53024891623 \cdot 10^{-3}, \quad r_1 = 0,836036015482, \\ u_1 &= 0,159041710538, \quad w_1 = 0,525118572443, \\ p_1 &= 0,938319218138, \quad q_1 = 0,345770219761, \\ l_1 &= 0,444693317871, \quad m_1 = 0,777493219315, \\ l_2 &= 0,289246562758, \quad m_2 = 0,912509096867, \\ l_3 &= 0,671297344270, \quad m_3 = 0,314196994183, \\ l_4 &= 0,129933544765, \quad m_4 = 0,982972302707. \end{aligned}$$

В работах [139] опубликованы квадратура 29-го порядка, для нее  $N = 302$ , и 35-го порядка, для нее  $N = 434$ . Узлы квадратур для  $n = 11, 17, 23, 29, 35$  правильно триангулируют поверхность сферы.

Для некоторых задач теории переноса при решении могут нарушаться условия гладкости вдоль некоторых поверхностей, например, в задачах, в которых коэффициенты и источник терпят разрывы на поверхностях, параллельных координатным плоскостям. В этом случае в разностной схеме желательно не употреблять угловые направления, вдоль которых распространяются разрывы в решении. В работах Карлсона [94] был предложен способ построения квадратур этого типа для  $S_m$ -метода, однако алгебраическая степень точности  $n$  таких квадратур сравнительно невелика. Ее можно существенно улучшить, не меняя общего числа узлов квадратуры, если искать квадратуры типа Маркова—Гаусса вида (5.9.2), считая в ней  $A_1 = A_2 = C_k = 0$ , а другие параметры — подлежащими определению.

Приведем таблицы узлов и весов квадратур такого типа.

$$n = 9$$

$$\begin{aligned} N &= 48, \quad N_1 = 2, \quad N_2 = N_3 = 0, \quad A_3 = 0, \\ B_1 &= 2,22694087831 \cdot 10^{-2}, \quad B_2 = 1,93972578836 \cdot 10^{-2}, \\ l_1 &= 0,68177989763, \quad m_1 = 0,265240161182, \\ l_2 &= 0,241542018852, \quad m_2 = 0,939848342159. \end{aligned}$$

$$n = 11$$

$$N = 56, N_1 = 2, N_2 = N_3 = 0, A_3 = 9/560,$$

$$B_1 = (122 - 9\sqrt{3})/(2^6 \cdot 105), B_2 = (122 + 9\sqrt{3})/(2^6 \cdot 105),$$

$$l_1 = (3 + 4\sqrt{3})^{1/2}/\sqrt{11}, l_2 = (3 - 4\sqrt{3})^{1/2}/11.$$

$$n = 19$$

$$N = 152, N_1 = 4, N_2 = 0, N_3 = 1,$$

$$A_3 = 6,15916486467 \cdot 10^{-3}, B_1 = 7,66142612552 \cdot 10^{-3},$$

$$B_2 = 6,63204497655 \cdot 10^{-3}, B_3 = 6,07598203150 \times 10^{-3},$$

$$B_4 = 5,26198387161 \cdot 10^{-3}, D_1 = 6,99108735330 \cdot 10^{-3},$$

$$l_1 = 0,154480689145, m_1 = 0,975843959536,$$

$$l_2 = 0,414167295917, m_2 = 0,810512740174,$$

$$l_3 = 0,667293171280, m_3 = 0,330816636714,$$

$$l_4 = 0,703446477338, m_4 = 0,101617454410,$$

$$r_1 = 0,449332832327, s_1 = 0,882270011260,$$

$$\omega_1 = 0,140355381171.$$

Для сравнения укажем соотношения между  $n$  и  $N$  для квадратур  $S_m$ -метода: если

$$m = 8, \text{ то } n = 9, N = 80;$$

$$m = 10 \text{ — } n = 11, N = 120;$$

$$m = 12 \text{ — } n = 11, N = 168;$$

$$m = 24 \text{ — } n = 19, N = 624;$$

$$m = 26 \text{ — } n = 19, N = 729.$$

Для  $m \geq 24$  у этих квадратур появляются отрицательные веса. Как видно из приведенных данных квадратуры типа Маркова—Гаусса, при заданной алгебраической степени точности  $n$  имеют существенно меньшее число узлов.

В дальнейшем изложении удобнее будет не дифференцировать веса и узлы квадратуры по типам, как это сделано в формуле (5.9.2), а ввести единые для них обозначения  $\omega_m$  и  $\Omega^m$  соответственно. Тогда квадратурная формула (5.9.2) запишется в виде

$$S(f) = \sum_{m=1}^N \omega_m f(\Omega^m). \quad (5.9.4)$$

### МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК, МЕТОД ГАЛЕРКИНА

#### § 6.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

В настоящей главе изложен один из эффективных методов решения кинетических уравнений — метод сферических гармоник. В разработке метода сферических гармоник принимали участие С. Чандрасекар [238], Вик [344, 345], Р. Маршак [310, 311], Г. Бете, Л. Тонкс, Г. Гурвитц [259], Б. Дэвисон [81], Дж. Марк [308], В. С. Владимиров [41] и другие [162, 169]. Метод сферических гармоник является по существу методом Галеркина при специальном выборе базисных функций и состоит в том, что приближенное решение ( $P_n$ -приближение) ищется в виде

$$\varphi^{(n)}(\mathbf{x}, \Omega) = \sum_{k=0}^n (2k+1) \sum_{l=-k}^k \varphi_{ki}(\mathbf{x}) Y_{ki}(\Omega), \quad (6.1.1)$$

где  $\varphi_{ki}(\mathbf{x})$  — неизвестные функции. Выражения для  $\varphi^{(n)}$  подставляем в кинетическое уравнение (5.1.4), затем полученное выражение последовательно умножаем на  $Y_{lm}$ ,  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ ;  $l = 0, 1, \dots, n$ , и к результату применяем оператор  $S$ . В итоге получаем, вообще говоря,  $(n+1)^2$  уравнений в частных производных относительно функций  $\varphi_{ki}(\mathbf{x})$ . Система уравнений дополняется граничными условиями, которые приближенно учитывают граничные условия исходной задачи.

Выясним структуру получающейся при этом системы дифференциальных уравнений. Оператор  $\bar{S}\varphi^{(n)}$  можно вычислить непосредственно, пользуясь формулой (5.1.36):

$$\bar{S}\varphi^{(n)} = Sg\varphi^{(n)} = \sum_{k=0}^n (2k+1) g_k(\mathbf{x}) \sum_{i=-k}^k \varphi_{ki}(\mathbf{x}) Y_{ki}(\Omega), \quad (6.1.2)$$

где

$$g_k = g_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(\mathbf{x}, \mu) P_k(\mu) d\mu. \quad (6.1.3)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & S[(\Sigma\varphi^{(n)} - \Sigma_s \bar{S}\varphi^{(n)} - f) Y_{lm}] = \\ & = (2l+1) \Sigma_l \frac{(l-|m|)! 2}{(l+|m|)! (1+\delta_{0m})} \varphi_{lm}(\mathbf{x}) - \dot{f}_{lm}, \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

где  $\dot{f}_{lm} = S(f Y_{lm})$ ;  $\Sigma_l = \Sigma - g_l \Sigma_s$ .

Обозначая  $\varphi, f$  совокупность функций  $\{\varphi_{lm}\}, \{f_{lm}\}, l = 0, 1, \dots, n, m = -l, \dots, 0, \dots, l$ , систему дифференциальных уравнений можно записать в матричном виде

$$\sum_{i=1}^3 L_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + D(\mathbf{x}) \varphi = f. \quad (6.1.5)$$

Здесь матрицы  $L_i, i = 1, 2, 3$ , не зависят от координат  $\mathbf{x}$ , а  $D$  — диагональная матрица с элементами, определяемыми формулой (6.1.4). Выясним структуру матриц  $L_i$ , которые получены в результате вычисления следующей величины:

$$K = S(Y_{lm} \Omega \nabla \varphi^{(n)}) = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^n (2k+1) \sum_{j=-k}^k S(Y_{lm} Y_{kj} \Omega_i) \frac{\partial \varphi_{kj}(\mathbf{x})}{\partial x_i}.$$

Пользуясь ортогональностью сферических функций, получаем

$$K = \sum_{i=1}^3 \left\{ (2l-1) \sum_{j=1-l}^{l-1} S(Y_{lm} Y_{l-1,j} \Omega_i) \frac{\partial \varphi_{l-1,j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + (2l+1) \sum_{j=-l}^l S(Y_{lm} Y_{lj} \Omega_i) \frac{\partial \varphi_{lj}(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + (2l+3) \sum_{j=-l-1}^{l+1} S(Y_{lm} Y_{l+1,j} \Omega_i) \frac{\partial \varphi_{l+1,j}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right\}. \quad (6.1.6)$$

Поскольку  $S(Y_{lm} Y_{lj} \Omega_i) = 0$ , второй суммы в (6.1.6) не будет. Следовательно, матрицы  $L_i$  являются блочно-двухдиагональными матрицами с нулевой диагональю. В работе И. А. Адамской [11] подробно исследована структура блоков матрицы  $L_i$  и получен вид (6.1.6) для ортогональных криволинейных координат.

В. С. Владимиров показал для нечетных  $n$ , что при выполнении (5.1.6) для произвольной невогнутой области  $D$  в качестве граничных можно принять следующие условия:

$$\int_{\Omega_n < 0} d\Omega \Omega \mathbf{n} \varphi^{(n)}(\mathbf{r}, \Omega) Y_{2k, m}(\Omega) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (6.1.7)$$

$$= 0, 1, 2, \dots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2k.$$

Граничное условие (6.1.7) получено из вариационного принципа для случая четной индикатрисы рассеяния [41, 42]. В дальнейшем будем пользоваться аналогичным принципом для произвольной индикатрисы рассеяния и условий (5.3.6). Математическое обоснование метода сферических гармоник, вопросы сходимости его рассмотрены в работах В. С. Владимирова [41].



## § 6.2. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ И СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим кинетическое уравнение переноса нейтронов (5.2.8) в плоскопараллельной геометрии; предполагается, что в нем функции  $f(z, \mu)$  и  $\varphi(z, \mu)$  не зависят от азимута  $\psi$ . Решение будем искать в виде ряда

$$\varphi(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \varphi_k(z) P_k(\mu). \quad (6.2.1)$$

Подставим (6.2.1) в уравнение (5.2.8) и воспользуемся первыми рекуррентными соотношениями (5.1.31) и формулами (6.1.2), (6.1.3), умножая затем полученное выражение на  $P_m(\mu)$  и интегрируя результат по  $[-1 \leq \mu \leq 1]$ , получаем для функций  $\varphi_m(z)$  систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m \frac{d\varphi_{m-1}}{dz} + (m+1) \frac{d\varphi_{m+1}}{dz} + (2m+1) \Sigma_m \varphi_m &= \\ &= (2m+1) f_m(z) \quad (m=0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

где

$$f_m(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(z, \mu) P_m(\mu) d\mu. \quad (6.2.3)$$

Введем в рассмотрение вектор-столбцы

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= [\varphi_{2m}], & J &= [\varphi_{2m+1}], \\ f &= [(4m+1) f_{2m}], & F &= [(4m+3) f_{2m+1}] \\ (m &= 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4)$$

матрицы

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 1+2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 \cdot 2 & 1+2 \cdot 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 \cdot 3 & 1+2 \cdot 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \\ \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1+2 & 2 \cdot 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1+2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1+2 \cdot 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

и диагональные матрицы

$$a = \text{diag} [(1+4m) \Sigma_{2m}]; \quad b = \text{diag} [(3+4m) \Sigma_{2m+1}]. \quad (6.2.6)$$

Тогда система уравнений (6.2.2) в матричной форме примет вид

$$\alpha dJ/dz + a\varphi = f; \quad \beta d\varphi/dz + bJ = F. \quad (6.2.7)$$

Рассмотрим вопрос о граничных условиях в приближении метода сферических гармоник. Пусть точное граничное условие имеет вид

$$\varphi(0, \mu) = 0 \text{ при } \mu > 0; \quad (6.2.8)$$

$$\varphi(H, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0. \quad (6.2.9)$$

Р. Маршак [310, 311] предложил для получения требуемых граничных условий заменить, например, (6.2.9) системой интегральных соотношений [см. также (6.1.7)]:

$$\int_{-1}^0 P_{2i+1}(\mu) \varphi d\mu = 0 \text{ при } z = H \ (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.2.10)$$

Подставляя решение в виде ряда (6.2.1) в соотношения (6.2.10), приходим к бесконечной системе алгебраических выражений

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{im} \varphi_m = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.2.11)$$

где

$$a_{im} = (2m + 1) \int_{-1}^0 P_{2i+1}(\mu) P_m(\mu) d\mu \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.2.12)$$

В. С. Владимиров показал, что этот способ аппроксимации граничного условия (6.2.9) в известном смысле является наилучшим [41].

Однородную систему уравнений (6.2.11) запишем в векторно-матричной форме

$$d\varphi + cJ = 0 \text{ при } z = H, \quad (6.2.13)$$

где

$$d = \left[ a_{im} \right]_{\substack{i=0, 1, 2, \dots \\ m=0, 2, 4, \dots}}; \quad c = \left[ a_{im} \right]_{\substack{i=0, 1, 2, \dots \\ m=1, 3, 5, \dots}}.$$

Точно так же граничное условие (6.2.8) заменяется равенствами

$$\int_0^1 P_{2i+1}(\mu) \varphi d\mu = 0 \text{ при } z = 0 \ (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Если область  $D$  и источники симметричны относительно плоскости  $z = 0$ , то на этой плоскости необходимо поставить условие

$$d\varphi/dz = 0 \text{ при } z = 0. \quad (6.2.14)$$

Аналогично изложенному аппроксимируются краевые условия (5.2.11).

Отметим, что нас интересует только непрерывное во всем объеме  $D$  решение задачи. Это значит, что при переходе из одной зоны в другую с разрывом физических констант на границе раздела имеет место непрерывность всех компонент решения  $\varphi_m(z)$ .

Переходим к рассмотрению сферически-симметричных задач. Соответствующее кинетическое уравнение в этом случае имеет вид (5.2.16). Пусть

$$\varphi(R, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0. \quad (6.2.15)$$

Решение уравнения (5.2.16) будем искать в виде

$$\varphi(r, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \varphi_k(r) P_k(\mu). \quad (6.2.16)$$

Подставим (6.2.16) в уравнение (5.2.16), воспользуемся вторым рекуррентным соотношением (5.1.31) и равенствами (6.1.2), (6.1.3). После этого, умножая полученное выражение на  $P_m(\mu)$  и интегрируя результат по  $[-1 \leq \mu \leq 1]$ , получаем для функций  $\varphi_m(r)$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m \left( \frac{d\varphi_{m-1}}{dr} - \frac{m-1}{r} \varphi_{m-1} \right) + (m+1) \left( \frac{d\varphi_{m+1}}{dr} + \frac{m+2}{r} \varphi_{m+1} \right) + (2m+1) \Sigma_m \varphi_m = (2m+1) f_m(r), \quad (6.2.17)$$

где  $f_m(r)$  — коэффициенты Фурье функции  $f(r, \mu)$ , определяемые равенством (6.2.3).

Систему уравнений (6.2.17) преобразуем к виду

$$mr^{m-1} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{m-1}}{r^{m-1}} + (m+1) \frac{1}{r^{m+2}} \frac{d}{dr} r^{m+2} \varphi_{m+1} + (2m+1) \Sigma_m \varphi_m = (2m+1) f_m. \quad (6.2.18)$$

С помощью векторов  $\varphi$ ,  $J$ ,  $f$ ,  $F$  и матриц  $a$  и  $b$ , определенных выше, систему уравнений (6.2.18), запишем в векторно-матричной форме:

$$KJ + a\varphi = f; \quad L\varphi + bJ = F, \quad (6.2.19)$$

где  $K$  и  $L$  — операторы, определенные следующим образом:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} & \frac{3}{r^4} \frac{d}{dr} r^4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 4r^3 \frac{d}{dr} \frac{1}{r^3} & \frac{5}{r^6} \frac{d}{dr} r^6 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} & \frac{2}{r^3} \frac{d}{dr} r^3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3r^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} & \frac{4}{r^5} \frac{d}{dr} r^5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5r^4 \frac{d}{dr} \frac{1}{r^4} & \frac{6}{r^7} \frac{d}{dr} r^7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

К системе уравнений (6.2.19) необходимо присоединить граничные условия. Именно, в центре сферически-симметричной области  $J = 0$  при  $r = 0$ , на внешней границе области из условия (6.2.10) получаем  $d\varphi + cJ = 0$  при  $r = R$ .

### § 6.3. БЕСКОНЕЧНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим бесконечные осесимметричные цилиндрические системы. Пусть ось  $z$  совпадает с осью симметрии цилиндра. Тогда основное кинетическое уравнение переноса нейтронов запишется в виде (5.2.21), а граничное условие — в виде (5.3.6).

Решение этой задачи представим в виде ряда по сферическим функциям

$$\begin{aligned} \varphi(r, \psi, \vartheta) = & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi_{n0}(r) P_n(\gamma) + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{nm}(r) \cos m\psi P_n^m(\gamma), \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

где  $P_n^m(\gamma)$  — присоединенные функции Лежандра,  $\gamma = \cos \vartheta$ .

В разложении (6.3.1) учтено, что функция  $\varphi(r, \psi, \vartheta)$  четная относительно угла  $\psi$ . Подставим ряд (6.3.1) в уравнение (5.2.21) и преобразуем слагаемые полученного выражения. Так, сначала преобразуем первое слагаемое

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} = & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \varphi'_{n0}(r) \cos \psi \sin \vartheta P_n(\cos \vartheta) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi'_{nm}(r) [\cos(m-1)\psi + \cos(m+1)\psi] \times \\ & \times \sin \vartheta P_n^m(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\begin{aligned} \sin \vartheta P_n^m(\cos \vartheta) = & \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}^{m+1}(\cos \vartheta) - P_{n-1}^{m+1}(\cos \vartheta)] = \\ = & \frac{1}{2n+1} [(n+m)(n+m-1) P_{n+1}^{m-1}(\cos \vartheta) - \\ & - (n-m+1)(n-m+2) P_{n+1}^{m-1}(\cos \vartheta)], \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

выражение (6.3.2) приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \varphi'_{n-1, m-1}(r) \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \times \\ & \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi - \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n+2} \varphi'_{n+1, m-1}(r) \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \varphi'_{n+1, m+1}(r) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} \varphi'_{n-1, m+1}(r) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \\
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi. \tag{6.3.4}
\end{aligned}$$

Если теперь положим  $\varphi_{nm} = 0$  при  $m > n$  или в том случае, когда по крайней мере один из индексов  $n$  или  $m$  отрицателен, а также учтем, что  $P_n^m(\cos \vartheta) \equiv 0$  при  $n = -1$  и  $n = 0$  ( $m > 0$ ), то предыдущее соотношение можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sin \vartheta \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \varphi'_{n-1, m-1}(r) - \right. \\
& \left. - \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \varphi'_{n+1, m-1}(r) + \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [\varphi'_{n+1, m+1}(r) - \varphi'_{n-1, m+1}(r)] \right\} \times \\
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos \psi. \tag{6.3.5}
\end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуем второй член к виду

$$\begin{aligned}
-\frac{\sin \vartheta \cos \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = & \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left\{ (m+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \right. \\
& \times [\varphi_{n+1, m+1}(r) - \varphi_{n-1, m+1}(r)] + \\
& \left. + (m-1) \left[ \frac{(n-m+2)!}{(n+m)!} \varphi_{n+1, m-1}(r) - \frac{(n-m)!}{(n+m-2)!} \varphi_{n-1, m-1}(r) \right] \right\} \times \\
& \times P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi. \tag{6.3.6}
\end{aligned}$$

С учетом равенств (6.1.2), (6.1.3) интегральный член можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega' g(\mu_0) \varphi(r, \psi', \vartheta') = & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Sigma_s g_n \times \\
& \times \left[ \varphi_{n0}(r) P_n(\cos \vartheta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varphi_{nm}(r) P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi \right]. \tag{6.3.7}
\end{aligned}$$

Наконец, член, учитывающий источники нейтронов, представим в виде

$$\begin{aligned}
f(r, \psi, \vartheta) = & \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \times \\
& \times \left[ f_{n0} P_n(\cos \vartheta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} f_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\psi \right], \tag{6.3.8}
\end{aligned}$$

где

$$f_{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi \int_0^\pi f(r, \psi, \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (6.3.9)$$

Собрав все члены, объединив их под знаком сумм и приравняв нулю, получим бесконечную систему уравнений:

при  $m = 0$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r (\varphi_{n+1, 1} - \varphi_{n-1, 1}) + (2n+1) \Sigma_n \varphi_{n0} = (2n+1) f_{n0}; \quad (6.3.10)$$

при  $m \geq 1$

$$\begin{aligned} r^{m-1} \frac{d}{dr} r^{1-m} [(n+m+1)(n+m+2) \varphi_{n-1, m-1} - \\ - (n-m+1)(n-m+2) \varphi_{n+1, m-1}] + \\ + r^{-m-1} \frac{d}{dr} r^{1+m} (\varphi_{n+1, m+1} - \varphi_{n-1, m+1}) + \\ + 2(2n+1) \Sigma_n \varphi_{nm} = 2(2n+1) f_{nm}. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Учтем тот факт, что при нашем выборе системы координат функция  $\varphi(r, \psi, \vartheta)$  симметрична по переменной  $\gamma = \cos \vartheta$ . Это значит, что присоединенные функции Лежандра должны быть четными и, следовательно, сумма индексов  $n + m$  всегда должна быть четной.

Для одномерной цилиндрической геометрии, положив

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi; \quad \Omega n = \sin \vartheta \cos \psi; \quad (6.3.12)$$

$$Y_{2k, m}(\Omega) = P_{2k}^m(\cos \vartheta) \cos m\psi; \quad (6.3.13)$$

$$\Phi(\psi, \vartheta) = \varphi(R, \psi, \vartheta) - \kappa [a - (4(1-a)/\pi) \cos \psi] T\varphi - \\ - V(\psi, \vartheta), \quad (6.3.14)$$

по аналогии с (6.1.7) приходим к граничным условиям

$$\int_{\pi/2}^\pi d\psi \int_{\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\psi, \vartheta) P_{2k}^l(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \cos l\psi \cos \psi d\vartheta = 0, \quad (6.3.15)$$

$k = 0, 1, 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots, 2k$ .

Подставляя (6.3.1) в граничное условие (6.3.15) и выполняя вычисления, приходим к соотношениям

$$\sum_{n, m} a_{nm}^{kl} \varphi_{nm} = V^{kl} \text{ при } r = R, \quad (6.3.16)$$

где  $a_{nm}^{kl}, V^{kl}$  — некоторые числа.

Система уравнений (6.3.10), (6.3.11) позволяет сформулировать любое приближение метода сферических гармоник. Для практических целей достаточно ограничиться  $P_3$ -приближением, полагая  $\varphi_{nm} = 0$

при  $n \geq 4$ . В этом случае будем иметь взаимосвязанную систему для четных моментов

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{11} + \Sigma_0 \varphi_{00} &= f_{00}; \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{31} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \varphi_{11} + 5 \Sigma_2 \varphi_{20} &= 5f_{20}; \\ \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{11}}{r} - \frac{r}{12} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{31}}{r} + \frac{1}{24r^3} \frac{d}{dr} r^3 \varphi_{33} + \\ + \frac{5}{12} \Sigma_2 \varphi_{22} &= \frac{5}{12} f_{22} \end{aligned} \right\} (6.3.17)$$

и для нечетных

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_{00}}{dr} - \frac{d\varphi_{20}}{dr} + \frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} r^2 \varphi_{22} + 3 \Sigma_1 \varphi_{11} &= 3f_{11}; \\ \frac{d\varphi_{20}}{dr} - \frac{1}{12r^2} \frac{d}{dr} r^2 \varphi_{22} + \frac{7}{6} \Sigma_3 \varphi_{31} &= \frac{7}{6} f_{31}; \\ \frac{r^2}{24} \frac{d}{dr} \frac{\varphi_{22}}{r^2} + \frac{7}{360} \Sigma_3 \varphi_{33} &= \frac{7}{360} f_{33}. \end{aligned} \right\} (6.3.18)$$

Введем в рассмотрение вектор-столбцы

$$\varphi = (\varphi_{00}, \varphi_{20}, \varphi_{22}); J = (\varphi_{11}, \varphi_{31}, \varphi_{33}) \quad (6.3.19)$$

и операторы

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r & 0 \\ \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} & -\frac{r}{12} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} & \frac{1}{24r^3} \frac{d}{dr} r^3 \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr} & -\frac{d}{dr} & \frac{1}{2r^2} \frac{d}{dr} r^2 \\ 0 & \frac{d}{dr} & -\frac{1}{12r^2} \frac{d}{dr} r^2 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{24} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (6.3.17), (6.3.18) в векторно-матричной форме принимает вид (6.2.19), где

$$\left. \begin{aligned} a &= \text{diag} \left[ \Sigma_0, 5 \Sigma_2, \frac{5}{12} \Sigma_2 \right]; b = \text{diag} \left[ 3 \Sigma_1, \frac{7}{6} \Sigma_3, \frac{7}{360} \Sigma_3 \right]; \\ f &= \left( f_{00}, 5f_{20}, \frac{5}{12} f_{22} \right); F = \left( 3f_{11}, \frac{7}{6} f_{31}, \frac{7}{360} f_{33} \right). \end{aligned} \right\} (6.3.20)$$

Переходим теперь к обсуждению вопроса о граничных условиях. Полагая в (6.3.15)  $k = 0$ ,  $l = 0$ , а затем  $k = 1$ ,  $l = 0, 2$ , получаем, что при  $r = R$

$$\left. \begin{aligned} &-(1-\kappa)(16\varphi_{00}-10\varphi_{20}+5\varphi_{22})+32(1+\kappa)\varphi_{11}=8V^{00}; \\ &5(1-\kappa)(8\varphi_{00}-5\varphi_{20}+5\varphi_{22})-128(1+\kappa)(\varphi_{11}-\varphi_{31})=320V^{10}; \\ &-30(1-\nu)(4\varphi_{00}-5\varphi_{20})-175(1-5\nu/21)\varphi_{22}+ \\ &+64(1+2\nu/3)(6\varphi_{11}-\varphi_{31})+31\varphi_{33}=160V^{12}, \end{aligned} \right\} (6.3.21)$$

где

$$\nu = \frac{\kappa}{2}(3-\tilde{a}), \quad V^{kl} = \frac{4}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos l\psi \cos \psi d\psi \int_0^{\pi/2} V P_{2k}^l(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta d\vartheta;$$

$a$  — скаляр, входящий в краевое условие (5.3.6), — переобозначен  $\tilde{a}$ . При  $\kappa = 0$ ,  $V = 0$  уравнения (6.3.21) превращаются в уравнения, полученные В. С. Владимировым [41]. Вместо третьего уравнения в (6.3.21) можно взять уравнение (6.3.15) при  $k = 1$ ,  $l = 1$ :

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4}(1-\kappa\tilde{a})\varphi_{00} + \frac{5}{24}\left(\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{3}\tilde{a}\right)\varphi_{22} - \\ &- \frac{3}{5}\left(\frac{8}{3\pi}-\frac{\pi\kappa}{4}\tilde{a}\right)\left(\varphi_{11}-\frac{1}{4}\varphi_{31}\right) - \frac{1}{45\pi}\varphi_{33} = V^{11}, \end{aligned}$$

которое лучше выражает характер зависимости по  $\vartheta$  и хуже — по  $\psi$ . Остальные три граничных условия определим при  $r = 0$  следующим образом:

$$\varphi_{11} = \varphi_{31} = \varphi_{33} = 0. \quad (6.3.22)$$

Условия (6.3.22) являются следствием требования ограниченности решения при  $r = 0$ . Получим соответствующие (5.3.6) граничные условия на внешней границе круговой цилиндрической ячейки гетерогенного реактора при  $r = R$ .

Полагая в (6.3.21)  $\kappa = 1$ ,  $V = 0$ , получаем при  $r = R$ :

$$\varphi_{11} = \varphi_{31} = 0; \quad \varphi_{33} = -\frac{15}{32}(1-\tilde{a})(4\varphi_{00} - 5\varphi_{20}) + \frac{25(27+5\tilde{a})}{192}\varphi_{22}. \quad (6.3.23)$$

Если решение  $P_3$ -уравнений является самостоятельной задачей, то можно находить  $\tilde{a}$  как результат минимизации  $\left|\frac{d\varphi_{00}}{dr}\right|_{r=R}$ .

## § 6.4. $P_1$ -ПРИБЛИЖЕНИЕ. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

При решении многих задач, связанных с прохождением излучения через вещество, зачастую бывает достаточно ограничиться  $P_1$ -приближением. В этом случае вектор-функции и матрицы, введенные в рассмотрение в предыдущих параграфах, будут иметь только по одной компоненте.



Ввиду того что нам потребуются уравнения (6.1.5) в  $P_1$ -приближении для любой геометрии, приведем отдельный вывод соответствующей системы уравнений.

Рассмотрим кинетическое уравнение (5.1.4); решение его будем искать в виде разложения (6.1.1) по сферическим функциям, ограничиваясь лишь двумя членами разложения (при  $k = 0, 1$ ):

$$\varphi(\mathbf{x}, \Omega) = \varphi_0(\mathbf{x}) + 3\Omega\varphi_1(\mathbf{x}), \quad (6.4.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1^{(1)} \mathbf{i} + \varphi_1^{(-1)} \mathbf{j} + \varphi_1 \mathbf{k}; \\ \Omega &= \sin \theta \cos \psi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2)$$

Очевидно, имеют место соотношения

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = (1/4\pi) \int d\Omega \varphi(\mathbf{x}, \Omega); \quad \varphi_1(\mathbf{x}) = (1/4\pi) \int d\Omega \Omega \varphi(\mathbf{x}, \Omega). \quad (6.4.3)$$

Уравнение (5.1.4) проинтегрируем по  $\Omega$ . Тогда получим

$$\nabla \varphi_1 + \Sigma_0 \varphi_0 = f_0, \quad (6.4.4)$$

где

$$f_0(\mathbf{x}) = (1/4\pi) \int d\Omega f(\mathbf{x}, \Omega); \quad \Sigma_0 = \Sigma - \Sigma_s. \quad (6.4.5)$$

Для получения второго уравнения подставим соотношения (6.4.1) и (6.4.2) в уравнение (5.1.4), результат умножим на  $\Omega$  и проинтегрируем по всем телесным углам единичной сферы. Тогда будем иметь

$$(1/3) \nabla \varphi_0 + \Sigma_1 \varphi_1 = \mathbf{f}_1, \quad (6.4.6)$$

где

$$\mathbf{f}_1 = (1/4\pi) \int d\Omega \Omega f(\mathbf{x}, \Omega); \quad \Sigma_1 = \Sigma - \Sigma_s \bar{\mu}_0; \quad \bar{\mu}_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(\mathbf{x}, \mu_0) d\mu_0.$$

Итак, получена система уравнений переноса излучения в  $P_1$ -приближении для областей произвольной геометрии

$$\nabla \varphi_1 + \Sigma_0 \varphi_0 = f_0; \quad (1/3) \nabla \varphi_0 + \Sigma_1 \varphi_1 = \mathbf{f}_1. \quad (6.4.7)$$

Для одномерных плоской, сферической и цилиндрической геометрий систему уравнений (6.4.7) можно упростить, если учесть симметрию. Так, поместив начало системы координат в центр симметрии, от векторной функции  $\varphi_1$  можно перейти к скалярной  $\varphi_1$  на основе равенства  $\varphi_1 = \varphi_1 \cdot \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $\Gamma$ . В этом случае система уравнений (6.4.7) приобретает вид

$$\text{div}(\varphi_1 \mathbf{n}) + \Sigma_0 \varphi_0 = f_0; \quad (1/3) \text{grad}_n \varphi_0 + \Sigma_1 \varphi_1 = f_1. \quad (6.4.8)$$

Очевидно, что система уравнений (6.4.8) для плоскопараллельной, сферической и одномерной цилиндрической геометрий совпадает с соответствующими уравнениями, полученными из общих систем уравнений сферических гармоник (6.2.2), (6.2.18) и (6.3.10), (6.3.11) в  $P_1$ -приближении.

Для полной определенности системы уравнений (6.4.7) к ней необходимо присоединить граничные условия на поверхности  $\Gamma$ . При этом для простоты будем исходить из граничного условия (5.1.6). Для получения приближенных граничных условий в соответствии с (6.1.7) заменим (5.1.6) следующим:

$$\int d\Omega |\Omega \mathbf{n}| \varphi(\mathbf{x}, \Omega) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (6.4.9)$$

где интегрирование ведется по единичной полусфере, образованной концами вектора  $\Omega$ , направленными внутрь области  $D$ , и ограниченной касательной плоскостью к выпуклой поверхности  $\Gamma$ . Соотношение (6.4.9) указывает на тот факт, что односторонний интегральный поток нейтронов через поверхность  $\Gamma$  со стороны вакуума в область  $D$  равен нулю.

Если предположить, что ось  $z$  совмещена с направлением внешней нормали к поверхности  $\Gamma$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{x}$ , то условие (6.4.9) запишется следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{\pi/2}^{\pi} \varphi(\mathbf{x}, \Omega) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (6.4.10)$$

В соотношение (6.4.10) подставим функцию  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$ , определенную формулой (6.4.1), и проинтегрируем. В результате получим

$$2(\varphi_1)_n - \varphi_0 = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (6.4.11)$$

где  $(\varphi_1)_n$  — проекция вектора  $\varphi_1$  на внешнюю нормаль  $\mathbf{n}$  к  $\Gamma$ .

Для одномерных геометрий соотношение (6.4.11) приобретает простой вид

$$2\varphi_1 - \varphi_0 = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (6.4.12)$$

Соотношения (6.4.11) и (6.4.12) будут требуемыми граничными условиями для системы уравнений (6.4.7) на внешней границе.

Когда источники нейтронов изотропны, т. е.  $f(\mathbf{x}, \Omega) = f_0(\mathbf{x})$ , тогда в  $P_1$ -приближении приходим к следующей системе уравнений:

$$\nabla \varphi_1 + \Sigma_0 \varphi_0 = f_0; \quad (1/3) \nabla \varphi_0 + \Sigma_1 \varphi_1 = 0. \quad (6.4.13)$$

Разрешив второе уравнение системы (6.4.13) относительно функции  $\varphi_1$ , получим

$$\varphi_1 = -D \nabla \varphi_0, \quad (6.4.14)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии, равный  $D = 1/(3\Sigma_1)$ . Подставляя выражение (6.4.14) в первое из уравнений (6.4.13), приходим к уравнению диффузии

$$\nabla D \nabla \varphi_0 - \Sigma_0 \varphi_0 = -f_0. \quad (6.4.15)$$

Граничные условия для функции  $\varphi_0$  найдем с помощью соотношения (6.4.11). Подставив в него  $\varphi_1$  в виде (6.4.14), получим

$$2D (\nabla \varphi_0)_n + \varphi_0 = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (6.4.16)$$

Классическое решение задачи (6.4.15), (6.4.16) ищется в классе функций  $\{\varphi_0\}$ , непрерывных вместе с потоком  $\varphi_1 = -D\nabla\varphi_0$  и имеющих кусочно-гладкие производные от потока. Задачу (6.4.15), (6.4.16) будем называть диффузионным приближением. Диффузионное приближение совпадает с  $P_1$ -приближением при  $\mathbf{f}_1 = 0$ . Если  $\mathbf{f}_1 \neq 0$ , то диффузионное приближение будет более грубым, чем  $P_1$ .

### § 6.5. МЕТОД ПОВЕРХНОСТНЫХ ПСЕВДОИСТОЧНИКОВ

В основе предложенного Н. И. Лалетиным [115] метода поверхностных псевдоисточников лежит использование функции Грина для получения решения в подобластях, из которых составлена вся область  $D$ . Пусть область  $D$  составлена из подобластей  $D_i$  (зон), внутри которых коэффициенты уравнения (5.1.4) и индикатриса не зависят от  $\mathbf{x}$ ; значения этих величин как постоянных, а также источник продолжим на все пространство и снабдим индексом  $i$ . Границу области  $D_i$  обозначим  $S_i$ . Решение в области  $D_i$  будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi^i(\mathbf{x}, \Omega) = & \int_{\Omega} \int G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \Omega, \Omega') f_i(\mathbf{x}', \Omega') d\Omega' d\mathbf{x}' + \\ & + \int_{\Omega} \int_{S_i} q^i(\mathbf{x}_s, \Omega') G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \Omega, \Omega') d\Omega dS_i. \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Здесь  $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \Omega, \Omega')$  — функция Грина для однородной бесконечной среды, сконструированная по параметрам  $i$ -й зоны;  $\mathbf{x}_s \in S_i$ ;  $q^i(\mathbf{x}_s, \Omega')$  — подлежащая определению функция, описывающая интенсивность поверхностных источников. Представление (6.5.1) удобно для ряда задач ввиду существования достаточно простых аналитических выражений для угловых моментов функций  $G_i$ . Для решения неплоских задач функцию  $q^i(\mathbf{x}_s, \Omega)$  удобно задавать в виде

$$q^i(\mathbf{r}_s, \Omega) = -q^i(\mathbf{r}_s, -\Omega).$$

Поскольку решение исходной задачи  $\varphi(\mathbf{x}, \Omega)$  — непрерывная функция вдоль каждой характеристики, то, приравнявая представление (6.5.1) на границах смежных зон и подставляя в граничные условия представление (6.5.1), получаем систему интегральных уравнений для определения функций  $q^i(\mathbf{x}_s, \Omega)$ . Приближенный метод решения этой системы, названный  $G_N$ -приближением, был предложен Н.И. Лалетиным [115]. В нем функция Грина  $G_i$  представляется в виде (5.6.9):

$$G_i = \sum_n \sum_{n'} Y_n(\Omega) Y_{n'}(\Omega') G_{nn'}^i(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (6.5.2)$$

где  $Y_n$  — сферические функции. Выражения для функций Грина для одномерных геометрий приведены в гл. 5.

Использование выражения (6.5.2) после интегрирования уравнений для  $q^i(\mathbf{x}_s, \Omega)$  по направлениям приводит задачу к следующим

уравнениям (запишем их для частного случая двухзонной задачи):

$$\sum_n Y_n(\Omega) \sum_{n'} \left[ \int_S q_n^1(x_s) G_{nn'}^1(x_s, x'_s) dS_1 + Q_n^1 \right] = \sum_n Y_n(\Omega) \times \\ \times \sum_{n'} \left[ \int_S q_n^2(x_s) G_{nn'}^2(x_s, x'_s) dS_2 + Q_n^2 \right], \quad (6.5.3)$$

где  $q_n^i(x_s) = \int q^i(x_s, \Omega') Y_n(\Omega') d\Omega'$ ;  $Q_n^i$  — угловые моменты распределений нейтронов, создаваемых на границе зон объемными источниками  $f_i(x, \Omega)$ , а индекс суммирования  $n'$  пробегает лишь нечетные значения в силу нечетности функций  $q^i(x_s, \Omega)$ . Из (6.5.3), приравнивая величины при  $Y_n(\Omega)$ , получаем бесконечную систему интегральных уравнений для определения  $q_n^i(x_s)$ .

Для пространственно-одномерных задач (задачи с плоской, сферической или цилиндрической симметрией) система (6.5.3) превращается в бесконечную систему алгебраических уравнений. Полагая, что в разложении функции  $q^i(\Omega)$  по сферическим гармоникам можно сохранить лишь моменты с номерами  $n' \leq N$  ( $G_N$ -приближение), оставляем из этой системы лишь необходимое количество уравнений с малыми  $n$ . В простейшем случае достаточно взять уравнения с  $n \leq N$ . Отметим, что в любом  $G_N$ -приближении получается решение, точно удовлетворяющее кинетическому уравнению внутри зон. Ошибки метода возникают от приближенного выполнения условий сшивки решения на границах зон. В такой трактовке этот метод родственен методу Треффца [25]. В работе Н. И. Лалетина и И. В. Султанова (см. в [116]) показано, что предпочтительнее получить уравнения типа (6.5.3) из требования непрерывности моментов функции  $(\Omega, n) \varphi(x, \Omega)$ . Этот метод можно трактовать и как вариационный, если уравнения для определения моментов  $q_n^i$  получать как уравнения Эйлера в задаче минимизации квадратичного с весом функционала, определенного на границе зоны:

$$J(\varphi_1, \varphi_2, p(x_s, \Omega)) = \int_{S_i} \int_{\Omega} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 p(x_s, \Omega) dS_i d\Omega.$$

В частности, за вес  $p$  целесообразно взять функцию  $|(\Omega, n)|$ .

## § 6.6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ПРИМЕНИТЕЛЬНО К КВАДРАТНОЙ И ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ЯЧЕЙКАМ ГЕТЕРОГЕННОГО РЕАКТОРА

Излагаемый ниже прием расчета ячеек квадратной и шестиугольной формы в рамках метода сферических гармоник был в диффузионном приближении впервые опубликован В. П. Кочергиным и Г. И. Марчуком [166] и распространен позднее В. В. Смеловым и Г. А. Илясовой на случай  $P_3$ -приближения [214]. В окончательном виде метод излагается в формулировке В. В. Смелова.

# 1. Постановка задачи

В односкоростном приближении поток нейтронов в бесконечной по высоте цилиндрической ячейке описывается уравнением:

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left[ \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\sin \psi}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) \right] + \Sigma \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) - \int \Sigma_s g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') d\Omega' = f(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (6.6.1)$$

где  $\mathbf{r} = (r, \omega)$ ;  $\mathbf{\Omega} = (\psi, \theta)$ ;  $\gamma = \cos \theta$ .

Ввиду симметрии ячеек относительно линий  $OM$  и  $ON$  (рис. 6.1) достаточно найти решение уравнения (6.6.1) в области  $OMN$ ; при этом угол  $\omega$  меняется в пределах  $0 \leq \omega \leq l$ , где  $l = \pi/4$  для квадратной ячейки и  $l = \pi/6$  для шестиугольной.

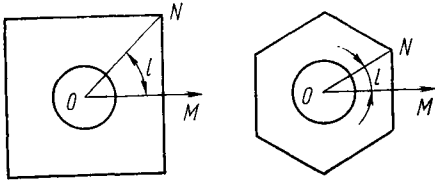


Рис. 6.1. Модели двумерных ячеек

Из симметрии ячейки, а также из бесконечной протяженности ее вдоль оси  $z$  следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(r, \omega, \psi, \gamma) &= \varphi(r, \omega + 2l, \psi, \gamma) \\ &= \varphi(r, -\omega, -\psi, \gamma) = \\ &= \varphi(r, \omega, \psi, -\gamma). \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

Для решения задачи методом сферических гармоник базисную систему сферических функций можно сформировать с использованием присоединенных функций Лежандра  $P_n^{(m)}(\gamma)$ . Пусть

$$\mathcal{P}_n^{(m)}(\gamma) = i^m P_n^{(m)}(\gamma)/(n+m)!,$$

$$\mathcal{P}_n^{(m)}(\gamma) \equiv \mathcal{P}_n^{(-m)}(\gamma); \mathcal{P}_n^{(m)}(\gamma) \equiv 0 \text{ при } n < 0; \mathcal{P}_n^{(m)}(\gamma) \equiv 0 \text{ при } |m| > n.$$

Рассмотрим теперь следующие функции:

$$S_{nm}^{(\nu)}(\omega, \psi, \gamma) = i^m \mathcal{P}_n^{(m)}(\gamma) \exp[i(m\psi + \lambda_\nu \omega)], \lambda_\nu = \pi\nu/l,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ;  $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Нетрудно убедиться, что  $S_{nm}^{(\nu)}(\omega, \psi, \gamma)$  — собственные функции уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (1-\gamma^2) \frac{\partial S}{\partial \gamma} + \frac{1}{1-\gamma^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \omega^2} + \kappa S = 0,$$

отвечающие собственным значениям  $\kappa = n(n+1) + \lambda_\nu^2$ . Эти функции ортогональны в области  $-l \leq \omega \leq l$ ;  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ;  $-1 \leq \gamma \leq 1$ ;

$$\begin{aligned} & \int_{-l}^l d\omega \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\gamma S_{n_1 m_1}^{(\nu_1)}(\omega, \psi, \gamma) \overline{S_{n_2 m_2}^{(\nu_2)}(\omega, \psi, \gamma)} = \\ & = \begin{cases} \frac{8\pi l}{(2n+1)(n+m)!(n-m)!} & \text{при } n_1 = n_2 = n; m_1 = m_2 = m; \nu_1 = \nu_2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Приближенное решение  $\tilde{\varphi}(r, \omega, \psi, \gamma)$  уравнения (6.6.1) будем искать в виде

$$\tilde{\varphi}(r, \omega, \psi, \gamma) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{2N+1} \sum_{m=-n}^n \sum_{\nu=-s}^s (2n+1)(n+m)!(n-m)! \times \\ \times C_{nm}^{(\nu)}(r) S_{nm}^{(\nu)}(\omega, \psi, \gamma), \quad (6.6.3)$$

где

$$C_{nm}^{(\nu)}(r) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l d\omega \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 d\gamma \tilde{\varphi}(r, \omega, \psi, \gamma) \overline{S_{nm}^{(\nu)}(\omega, \psi, \gamma)}.$$

Представление (6.6.3) обеспечивает выполнение первого из условий (6.6.2), а остальные из этих условий (с учетом вещественности искомой функции  $\tilde{\varphi}$ ) приводят к тождествам:

$$C_{nm}^{(\nu)}(r) \equiv \overline{C_{nm}^{(\nu)}(r)} \equiv (-1)^m C_{n,-m}^{(-\nu)}(r); C_{nm}^{(\nu)}(r) \equiv 0 \text{ при } n+m \text{ нечетном.} \quad (6.6.4)$$

Тождества (6.6.4) позволяют сократить число дифференциальных уравнений, связывающих функции  $C_{nm}^{(\nu)}(r)$ . Отметим, что функции  $C_{nm}^{(\nu)}$  вещественны.

Подставив разложение (6.6.3) в уравнение (6.6.1), проинтегрируем его по всем переменным  $\gamma, \psi, \omega$  с весом  $S_{nm}^{(\nu)}(\omega, \psi, \gamma)$ . В итоге несложных преобразований [213] для каждого из значений  $\nu = 0, 1, 2, \dots, s$  получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $C_{nm}^{(\nu)}(r)$ :

$$(n+m+1)(n+m+2) \left[ \frac{dC_{n+1, m+1}^{(\nu)}}{dr} + \frac{(m+1) - \lambda_\nu}{r} C_{n+1, m+1}^{(\nu)} \right] - \\ - \left[ \frac{dC_{n-1, m+1}^{(\nu)}}{dr} + \frac{(m+1) - \lambda_\nu}{r} C_{n-1, m+1}^{(\nu)} \right] - \\ - (n-m+1)(n-m+2) \left[ \frac{dC_{n+2, m-1}^{(\nu)}}{dr} - \frac{(m-1) - \lambda_\nu}{r} C_{n+2, m-1}^{(\nu)} \right] + \\ + \left[ \frac{dC_{n-2, m-1}^{(\nu)}}{dr} - \frac{(m-1) - \lambda_\nu}{r} C_{n-2, m-1}^{(\nu)} \right] - \\ - 2(2n+1) (\sum_n C_{nm}^{(\nu)} - Q_{nm}^{(\nu)}) = 0, \quad (6.6.5)$$

где  $Q_{nm}^{(\nu)}$  — коэффициенты Фурье функции источников;

$\Sigma_n = \Sigma - 2\pi(n!) \Sigma_s \int_{-1}^1 g(r, \Omega' \rightarrow \Omega) \mathcal{P}_n(\mu_0) d\mu_0$ ;  $\mu_0 = \Omega\Omega$ ;  $n = 0, 1, \dots, 2N+1$ ;  $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$ . В силу (6.6.4) достаточно считать, что  $\nu = 0, 1, \dots, s$ , а параметр  $m$  при заданном значении  $n$  пробегает тот набор из чисел  $0, \pm 1, \dots, \pm n$ , когда  $n+m$  — четное число.

Систему (6.6.5) дополним граничными условиями.

**Центр ячейки.** При  $r = 0$  функции  $C_{nm}^{(\nu)}$  подчиним следующим требованиям:

$$C_{nm}^{(\nu)}(0) = 0 \text{ при } \lambda_\nu \neq m; \left. \frac{dC_{nm}^{(\nu)}}{dr} \right|_{r=0} = 0 \text{ при } |\lambda_\nu - m| \neq 1, \quad (6.6.6)$$

$\lambda_\nu = \pi\nu/l$  — целочисленный параметр.

**Граница зон ячейки.** Потребуем непрерывности потока нейтронов  $\Omega\mathbf{n}$  ( $R, \omega; \psi, \gamma$ ) через границу раздела двух сред  $r = R$ . Из непрерывности его и на основе разложения (6.6.3) устанавливаем непрерывность следующих комбинаций:

$$(n+m+1)(n+m+2)C_{n+1, m+1}^{(\nu)} - (n-m+1)(n-m+2) \times \\ \times C_{n+1, m-1}^{(\nu)} + C_{n-1, m-1}^{(\nu)} - C_{n-1, m+1}^{(\nu)}. \quad (6.6.7)$$

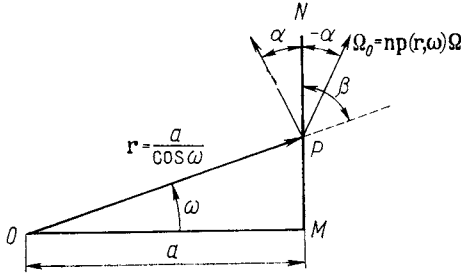


Рис. 6.2. Иллюстрация условия «зеркального отражения» на границе ячейки

**Граница ячейки** является плоскостью симметрии бесконечной решетки, а потому в любой ее точке выполняется условие «отражения»:

$$\tilde{\varphi}(a/\cos\omega, \omega, \beta + \alpha, \gamma) = \tilde{\varphi}(a/\cos\omega, \omega, \beta - \alpha, \gamma), \quad (6.6.8)$$

где  $2a$  — шаг решетки;  $\alpha$  и  $\beta = \pi/2 - \omega$  — углы, связанные с направлением движения нейтрона и его координатами на границе (рис. 6.2). Согласно работе Г. Я. Румянцева [199], выписанное равенство следует заменить требованием:

$$np_Y [\tilde{\varphi}(a/\cos\omega, \omega, \beta + \alpha, \gamma) - \tilde{\varphi}(a/\cos\omega, \omega, \beta - \alpha, \gamma)] \Omega\mathbf{n} = 0, \quad (6.6.9)$$

где  $np_Y$  — проекция на подпространство сферических функций  $Y$ , натянутое на базис  $\{\mathcal{P}_n^{(m)}(\gamma) \exp(im\psi)\}_{m=-n, \dots, n}^{n=0, \dots, 2N+1}$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к границе ячейки;  $\Omega\mathbf{n} = \sqrt{1 - \gamma^2} \sin \alpha$ .

Займемся дальнейшим преобразованием условия (6.6.9). С использованием (6.6.3), (6.6.4) и тождества [212]

$$\sqrt{1 - \gamma^2} \mathcal{P}_n^{(m)}(\gamma) \equiv \frac{i}{2n+1} [\mathcal{P}_{n-1}^{(m\pm 1)}(\gamma) - (n \pm m + 1)(n \pm m + 2) \mathcal{P}_{n+1}^{(m\pm 1)}(\gamma)]$$

несложно получить

$$np_Y [\tilde{\varphi}(a/\cos\omega, \omega, \beta + \alpha, \gamma) - \tilde{\varphi}(a/\cos\omega, \omega, \beta - \alpha, \gamma)] \Omega\mathbf{n} = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{2n+1} \sum_{m=-n}^n (n+m)!(n-m)! i^m \mathcal{P}_n^{(m)}(\gamma) \exp(im\alpha) \times$$

$$\times \sum_{v=-s}^s \left\{ \xi_{nm}^{(v)} \left( \frac{a}{\cos \omega} \right) \cos \left[ \frac{m\pi}{2} + (\lambda_v - (m+1)) \omega \right] - \right. \\ \left. - \eta_{nm}^{(v)} \left( \frac{a}{\cos \omega} \right) \cos \left[ \frac{m\pi}{2} + (\lambda_v - (m-1)) \omega \right] \right\}, \quad (6.6.10)$$

где

$$\xi_{nm}^{(v)}(r) = (n+m+1)(n+m+2) C_{n+1, m+2}^{(v)}(r) - C_{n-1, m+1}^{(v)}(r); \\ \eta_{nm}^{(v)}(r) = (n-m+1)(n-m+2) C_{n+1, m-1}^{(v)}(r) - C_{n-1, m-1}^{(v)}(r).$$

Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.6.5) содержит конечное число свободных параметров, ни одной из комбинаций которых невозможно удовлетворить требованию (6.6.9) тождественно во всех точках  $MN$  границы ячейки (см. рис. 6.2).

Таким образом, условию (6.6.9) можно удовлетворить лишь приближенно. В предлагаемом алгоритме выбор свободных параметров будет основан на минимизации нормы невязки граничного условия в метрике  $L_2$ :

$$\int_{MN} dL \int d\Omega \{ [\varphi(P, \beta + \alpha, \gamma) - \varphi(P, \beta - \alpha, \gamma)] \Omega_n \}^2 = \min \quad (6.6.11)$$

(где  $dL$  — элемент длины вдоль границы  $MN$ ,  $d\Omega = d\gamma d\alpha$ ) при условии выполнения баланса по всей длине  $MN$ :

$$\int_{MN} dL \sum_{v=-s}^s C_{11}^{(v)} \left( \frac{a}{\cos \omega} \right) \cos(\lambda_v - 1) \omega = 0. \quad (6.6.12)$$

## 2. $P_1$ -приближение

Полагая в разложении (6.6.3)  $N=0$ , приходим к  $P_1$ -приближению Система уравнений (6.6.5) примет вид\*

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC_{11}^{(v)}}{dr} + \frac{1-\lambda_v}{r} C_{11}^{(v)} - \frac{dC_{1,-1}^{(v)}}{dr} - \frac{1+\lambda_v}{r} C_{1,-1}^{(v)} - \Sigma_0 C_{00}^{(v)} &= f \delta_{v0}; \\ \frac{dC_{00}^{(v)}}{dr} + \frac{\lambda_v}{r} C_{00}^{(v)} - 6\Sigma_1 C_{11}^{(v)} &= 0; \quad -\frac{dC_{00}^{(v)}}{dr} + \frac{\lambda_v}{r} C_{00}^{(v)} - 6\Sigma_1 C_{1,-1}^{(v)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6.13)$$

Исключая в полученной системе  $C_{11}^{(v)}$  и  $C_{1,-1}^{(v)}$ , получаем уравнение диффузионного типа относительно функции  $C_{00}^{(v)}$ :

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{r}{3\Sigma_1} \frac{dC_{00}^{(v)}}{dr} + \left( \frac{1}{3\Sigma_1} \frac{\lambda_v^2}{r^2} + \Sigma_0 \right) C_{00}^{(v)} = f \delta_{v0}. \quad (6.6.14)$$

\* Система (6.6.13) записана в предположении, что функция источников  $f$  изотропна и не зависит от пространственных координат в каждой из зон ячейки. Это предположение будет использовано и ниже в  $P_2$ -приближении.



В  $P_1$ -приближении запишем теперь краевые условия и условия сшивки.

В центре ячейки из (6.6.6) находим

$$\left. \frac{dC_{00}^{(\nu)}}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (6.6.15)$$

На границах зон из (6.6.7) устанавливаем непрерывность величин

$$C_{00}^{(\nu)} \text{ и } \frac{1}{3\Sigma} \frac{dC_{00}^{(\nu)}}{dr}. \quad (6.6.16)$$

На границе ячейки соотношения (6.6.11) и (6.6.12) с использованием формулы (6.6.10), а также с учетом связи элемента длины с элементом угла ( $dL = a d\omega / \cos^2 \omega$ ) превращаются в следующее требование:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^l \left[ \sum_{\nu=-s}^s \left( \frac{dC_{00}^{(\nu)}}{dr} + \frac{\lambda_\nu}{r} C_{00}^{(\nu)}(r) \right) \cos(\lambda_\nu - 1) \omega \right]_{r = \frac{a}{\cos \omega}}^2 \times \\ & \times \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = \min \\ & \text{при условии} \\ & \sum_{\nu=-s}^s \int_0^l \left( \frac{dC_{00}^{(\nu)}}{dr} + \frac{\lambda_\nu}{r} C_{00}^{(\nu)}(r) \right) \cos(\lambda_\nu - 1) \omega \times \\ & \times \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = 0. \end{aligned} \right\} (6.6.17)$$

Для решения задачи (6.6.14)—(6.6.17) ячейку удобно дополнить до круговой, внешняя граница которой представляет собой описанную около реальной ячейки окружность. Обозначим  $R_{\text{эф}} = a / \cos l$  радиус этой окружности. Метод решения состоит из следующих двух этапов.

1. Получение «общего» решения\* (6.6.14) при каждом значении  $\nu = 0, 1, 2, \dots, s$ ; оно может быть записано в виде

$$C_{00}^{(\nu)}(r) = \kappa^{(\nu)} \varphi^{(\nu)}(r) + \delta_{\nu 0} \Phi_0(r), \quad \nu = 0, 1, \dots, s. \quad (6.6.18)$$

Здесь  $\Phi_0(r)$  — частное решение неоднородного уравнения (6.6.14) при  $\nu = 0$ , удовлетворяющее в центре ячейки и на границах зон условиям (6.6.15) и (6.6.16);  $\varphi^{(\nu)}(r)$  — решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (6.6.14), которое удовлетворяет условиям (6.6.15) и (6.6.16), а при  $r = R_{\text{эф}}$  — условию  $\varphi^{(\nu)}(R_{\text{эф}}) = 1$ .

\* Здесь под общим решением понимается то многообразие решений, зависящее от одного произвольного параметра, из которого может быть получено любое частное решение, удовлетворяющее условиям (6.6.15), (6.6.16).

Численные методы расчета функций  $\varphi_0(r)$ ,  $\varphi^{(v)}(r)$  хорошо известны [162].

2. Определение констант  $\kappa^{(v)}$  в общих решениях (6.6.18) на основе требований (6.6.17). Подставляя (6.6.18) в (6.6.17), приходим к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\kappa^{(v)}$ .

### 3. $P_3$ -приближение

Рассмотрим более высокое  $P_3$ -приближение, когда в (6.6.3)  $N = 1$ . Поскольку вся идейная сторона метода изложена в п. 2, здесь приведены только основные результаты без дополнительных разъяснений. В  $P_3$ -приближении система (6.6.5) состоит из десяти уравнений для каждого  $v$ . Если ввести векторные функции

$$\begin{aligned}\Phi^{(v)} &= [(1/2)C_{00}^{(v)}, 6C_{2,-2}^{(v)}, C_{20}^{(v)}, 6C_{22}^{(v)}]; \\ \mathbf{I}^{(v)} &= [C_{1,-1}^{(v)}, C_{11}^{(v)}, C_{3,-3}^{(v)}, C_{3,-1}^{(v)}, C_{31}^{(v)}, C_{33}^{(v)}],\end{aligned}$$

то упомянутая система может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}P_1 \frac{dI^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} P_2^{(v)} \mathbf{I}^{(v)} + P_3 \Phi^{(v)} &= \mathbf{S} \delta_{0v}; \\ T_1 \frac{d\Phi^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} T_2^{(v)} \Phi^{(v)} + T_3 \mathbf{I}^{(v)} &= 0;\end{aligned}$$

где  $P$  и  $T$  — матрицы;  $\mathbf{S}$  — вектор источников.

В выписанной системе  $T_3$  — диагональная невырожденная матрица, что позволяет легко исключить из этой системы вектор  $\mathbf{I}^{(v)}$ . В итоге в каждой из зон ячейки, где физические параметры считаются постоянными, получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}D \frac{d^2 \Phi^{(v)}}{dr^2} + \frac{1}{r} K^{(v)} \frac{d\Phi^{(v)}}{dr} - \left( \Sigma + \frac{1}{r^2} \Lambda^{(v)} \Phi^{(v)} \right) &= \\ = -3 \Sigma_1 \mathbf{S} \delta_{v0}, \quad v = 0, 1, \dots, s,\end{aligned} \quad (6.6.19)$$

где  $\Sigma = \text{diag} [6 \Sigma_1 \Sigma_0, 5 \Sigma_1 \Sigma_2, 5 \Sigma_1 \Sigma_2, 5 \Sigma_1 \Sigma_2]$ ;

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & h & -g & 0 \\ -2 & -g & 2d & -g \\ 1 & 0 & -g & h \end{pmatrix};$$

$$K^{(v)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 + 2\lambda_v & -2 & 3 - 2\lambda_v \\ -(1 + 2\lambda_v) & h & (1 + 2\lambda_v)g & 0 \\ -2 & -(3 + 2\lambda_v)g & 2d & -(3 - 2\lambda_v)g \\ -(1 - 2\lambda_v) & 0 & (1 - 2\lambda_v)g & h \end{pmatrix};$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2\lambda_v^2 & -\lambda(2+\lambda_v) & -2\lambda_v^2 & \lambda_v(2-\lambda_v) \\ -\lambda_v(2+\lambda_v) & (2+\lambda_v)^2 h & \lambda_v(2+\lambda_v) g & 0 \\ -2\lambda_v^2 & \lambda_v(2+\lambda_v) g & 2\lambda_v^2 d & -\lambda_v(2-\lambda_v) g \\ \lambda_v(2-\lambda_v) & 0 & -\lambda_v(2-\lambda_v) g & (2-\lambda_v)^2 h \end{pmatrix},$$

$$\text{причем } d = 1 + \frac{18}{17} \frac{\Sigma_1}{\Sigma_3}; \quad g = 1 + \frac{3}{7} \frac{\Sigma_1}{\Sigma_3}; \quad h = 1 + \frac{8}{7} \frac{\Sigma_1}{\Sigma_3}.$$

В работе [213] показано, что при  $r = 0$  условия (6.6.6) эквивалентны таким:

$$d \Phi^{(v)} / dr|_{r=0} = 0, \quad v = 0, 1, \dots, s. \quad (6.6.20)$$

На концентрических границах  $R$  раздела зон из (6.6.8) вытекают условия

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(v)}(R-0) &= \Phi^{(v)}(R+0); \\ \left( M \frac{d \Phi^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} N^{(v)} \Phi^{(v)} \right)_{r=R-0} &= \left( M \frac{d \Phi^{(v)}}{dr} + \frac{1}{r} N^{(v)} \Phi^{(v)} \right)_{r=R+0}, \end{aligned} \right\} \quad (6.6.21)$$

где  $N^{(v)}$  и  $M$  — матрицы четвертого порядка, получение которых не представляет трудностей.

На границе ячейки условие (6.6.11) принимает вид

$$\int_0^l \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} \sum_{n=0}^3 \sum_{m=-n}^n \frac{(n+m)! (n-m)!}{2n+1} \left\{ \sum_{v=-s}^s \xi_{nm}^{(v)}(r) \cos \left[ \frac{m\pi}{2} + (\lambda_v - (m+1)) \omega \right] - \eta_{nm}^{(v)}(r) \cos \left[ \frac{m\pi}{2} + (\lambda_v - (m-1)) \omega \right] \right\}^2 = \min \quad (6.6.22)$$

при условии (6.6.12).

Дополняя теперь реальную ячейку до круговой, решим задачу в два этапа: найдем все линейно-независимые решения задачи (6.6.19) — (6.6.21), а постоянные определим из (6.6.22) и (6.6.12).

## § 6.7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЯЧЕЙКАМ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Ячейки гетерогенных реакторов имеют часто более сложную структуру, чем это описано в § 6.6. Так, минимальный элемент сечения ячейки, несущий всю информацию о ней, может иметь, например, вид, изображенный на рис. 6.3 (в дальнейшем элементы ячеек, представленные на рис. 6.3, будем называть просто ячейкой).

Излагаемый метод, разработанный В. В. Смеловым, является продолжением материала § 6.6, а потому в нем будут использованы полученные выше результаты. Основную идею метода разберем на примере  $P_1$ -приближения.

Пусть бесконечная и однородная по высоте ячейка имеет, например, два центра  $O$  и  $O'$  (см. рис. 6.3), с которыми удобно связать полярные системы координат. Выберем произвольную линию  $QQ'$ , отделяющую область с точкой  $O$  от области с точкой  $O'$ . В каждой из областей введем свою систему координат  $(r, \omega, \psi, \theta)$  и  $(r', \omega', \psi', \theta)$ . Рассмотрим, например, область  $OQQ'$ . Ее можно вписать в круговой сектор и в последнем осуществить разложение (6.6.3) с полюсом в точке  $O$ . Далее в рамках  $P_1$ -приближения можно найти общее решение вида (6.6.18), удовлетворяющее уравнению (6.6.14), условию (6.6.15) в точке  $r = 0$  и условию (6.6.16) — на концентрических границах раздела сред. Точно такая же процедура выполняется по отношению к области  $O'Q'Q$ . Два набора произвольных констант  $\kappa^{(v)}$  и  $\kappa'^{(v)}$

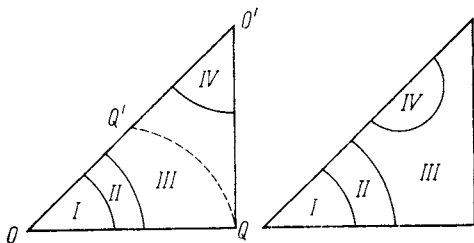


Рис. 6.3. Образцы двумерных ячеек (I, II, III, IV — области с разными физическими свойствами)

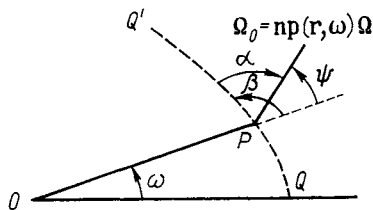


Рис. 6.4. Иллюстрация геометрической схемы при решении уравнения переноса для сложных ячеек

( $v = 0, 1, 2, \dots, s$ ) теперь надлежит выбрать так, чтобы по возможности лучше «стыковать» решение задачи на линии  $QQ'$ . Итак, для завершения задачи необходимо иметь условия на линии  $QQ'$ .

Если принять одно из направлений  $QQ'$  за положительное и ввести углы, как это показано на рис. 6.4, применительно к полюсу  $O$ , то можно получить следующее условие:

$$\int_{QQ'} dL f d\Omega \{[\varphi(P, \beta + \alpha, \theta) - \varphi(P, \beta' + \alpha, \theta)] \sin \theta \sin \alpha\}^2 = \min. \quad (6.7.1)$$

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующую символическую форму записи:  $\langle f \rangle_L \equiv f - f'$ , где  $f$  — произвольное выражение, записанное в координатах левосторонней области относительно ориентированной кривой  $L = QQ'$ ;  $f'$  — выражение, тождественное с  $f$  по форме, но записанное в координатах правосторонней области. Добавляя к условию (6.7.1) требование сохранения баланса нейтронов и используя (6.6.13), приходим к следующим выражениям на линии  $QQ' = L$ :

$$\int_{QQ'} \left\{ \frac{1}{3} \left\langle \sum_{v=0}^s \frac{1}{1 + \delta_{v0}} C_{00}^{(v)} \cos \lambda_v \omega \right\rangle_L^2 + \left\langle \frac{1}{3 \Sigma_1} \sum_{v=0}^s \frac{1}{1 + \delta_{v0}} \left( a^{(v)} \frac{dC_{00}^{(v)}}{dr} + b^{(v)} \frac{\lambda_v}{r} C_{00}^{(v)} \right) \right\rangle_L^2 \right\} dL = \min \quad (6.7.2)$$

при условии

$$\sum_{\nu=0}^s \frac{1}{1+\delta_{\nu 0}} \int_{Q Q'} \langle a^{(\nu)} \frac{dC_{00}^{(\nu)}}{dr} + b^{(\nu)} \frac{\lambda_{\nu}}{r} C_{00}^{(\nu)} \rangle_L dL = 0,$$

где  $a^{(\nu)} = \sin \beta \cos \lambda_{\nu} \omega$ ;  $b^{(\nu)} = \cos \beta \sin \lambda_{\nu} \omega$ .

Подставляя в (6.7.2) решения (6.6.18), приходим к задаче на условный минимум относительно двух наборов констант:  $\kappa^{(\nu)}$  и  $\kappa'^{(\nu)}$ . Необходимое условие этого минимума по методу Лагранжа представляется в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно упомянутых констант. Заметим, что порядок системы будет в два раза выше, нежели в случае  $P_1$ -приближения § 6.6.

## § 6.8. МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Привлекательность прямых методов состоит в том, что, приближенно представляя решение исходной задачи в виде линейной комбинации элементов  $\varphi_n$  (назовем их координатными), являющихся решением упрощенной (модельной) задачи, можно надеяться получить даже при небольшом числе выбранных функций весьма точное решение. Следует заметить, что при использовании прямых методов весьма важным является вопрос об их сходимости. Для нахождения приближенного решения в методах такого типа требуется составить и решить (прямым или итерационным способом) систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов решения. Устойчивость алгоритмов по решению этих систем уравнений относительно малых возмущений элементов матрицы и правых частей всецело зависит от свойств системы координатных функций  $\varphi_n$ , через которые представляется решение.

Потеря устойчивости происходит, как правило, вследствие отсутствия у матрицы системы диагонального преобладания элементов. В работе С. Г. Михлина [181] решен вопрос об устойчивости вариационных методов, в частности важнейшего из них — метода Галеркина. Для случая самосопряженного положительно определенного оператора  $A$  задачи  $Au = f$  приближенное решение по методу Галеркина устойчиво тогда и только тогда, когда координатная система  $\{\varphi_n\}$  в соответствующем энергетическом пространстве  $H_A$ , порожденном метрикой  $(Au, u)$ , сильно минимальна. Такой является почти ортонормированная в  $H_A$  координатная система. [Почти минимальной (соответственно почти ортонормированной) системой называется система минимальная (соответственно ортонормированная) в некоторой эквивалентной метрике.] Так, если  $B$  — полусходный с  $A$  оператор (т. е. энергетические пространства  $H_A$  и  $H_B$  состоят из одних и тех же элементов), то любая полная ортонормированная в  $H_B$  система будет сильно минимальной в  $H_A$ . Например, если  $B$  имеет точечный спектр, то в качестве  $\varphi_n$  можно взять систему собственных элементов операторов  $B$ , нормированных в метрике  $H_B$ . Качество приближения метода Галеркина зависит от степени близости операторов  $A$  и  $B$ . При нали-

ции сходимости и устойчивости метода Галеркина приобретает важное значение вопрос о рациональной упорядоченности элементов выбранной системы  $\varphi_n$  внутри себя по номерам  $n$ , ибо от этого зависит поведение двух взаимосвязанных характеристик метода Галеркина: скорость сходимости и порядок решаемой системы алгебраических уравнений. Если  $\varphi_n$  являются собственными элементами оператора  $B$ , то (как показано ниже) не всегда целесообразно проводить такое упорядочение  $\varphi_n$  в соответствии с собственными значениями. Особо актуальным становится этот вопрос, когда  $\varphi_n$  есть тензорное произведение легко вычисляемых одномерных собственных функций, возникающих при разделении переменных. Итак, эффективность (цена алгоритма) метода Галеркина существенно зависит от системы элементов  $\varphi_n$ , рациональный выбор которой может обеспечить хорошую сходимость и устойчивость метода в сочетании с простотой вычисления элементов системы уравнений метода Галеркина. Помимо своего прямого назначения метод Галеркина может быть использован как операция  $P$ , ускоряющая сходимость итераций (см. гл. 10, 11).

На основе результатов работы В. И. Лебедева совместно с Е. С. Цапелкиным и Г. И. Курченковой [145] покажем специфику методов решения затронутых выше вопросов на примере уравнения

$$-A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + Cu = f, \quad (6.8.1)$$

заданном в параллелепипеде  $D$  ( $0 \leq x_i \leq R_i, i = 1, 2, 3$ ) с границей  $\Gamma$ . Пусть  $A > 0$  и  $C \geq 0$  в  $D$ . Предположим, что область  $D$  разбита плоскостями  $T$ , параллельными координатным плоскостям, на параллелепипеды, внутри которых функции  $A, C$  и  $f$  постоянны. Пусть решение задачи (6.8.1) удовлетворяет на гранях параллелепипеда одному из краевых условий:

$$A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\mathbf{n}, x_i) + bu|_{\Gamma} = 0, \quad b \geq 0 \quad (6.8.2)$$

или

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (6.8.3)$$

[ $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$ ;  $(\mathbf{n}, x_i)$  — угол между  $\mathbf{n}$  и осью  $x_i$ ]. На плоскостях  $T$  предполагается непрерывность решения  $u$  и его нормальной производной, умноженной на  $A$ . Пусть  $H_A$  — гильбертово пространство функций, определенных в  $D$ , со скалярным произведением

$$[u, v]_A = \int_D \left( \sum_{i=1}^3 A \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{C}{A} uv \right) dx + \int_{\Gamma} K(u, v) d\Gamma \quad (6.8.4)$$

[где  $K(u, v) = \sum_{i=1}^3 buv \cos(\mathbf{n}, x_i)$  для условий (6.8.2) и  $K(u, v) = 0$  для условий (6.8.3)], являющееся замыканием в норме  $[u]_A = [u, u]_A^{1/2}$

гладких функций из  $W_2^{s,1}(D)$  [218] для условия (6.8.2), и гладких функций из  $W^{(1/2)}(D)$ , обращающихся в нуль на  $\Gamma$ , для условия (6.8.3).

Под обобщенным решением задач (6.8.1), (6.8.2) или (6.8.1), (6.8.3) будем понимать такую функцию  $u$  из  $H_A$ , для которой при любой  $\Phi$  из  $H_A$  выполнено интегральное тождество

$$[u, \Phi]_A = (f, \Phi), \quad (6.8.5)$$

где  $(f, \Phi) = \int_D A^{-1} f \Phi dx$ .

Заметим, что в (6.8.5) не вошло явно условие сшивки на границах  $T$  и что область определения обобщенной задачи (6.8.5) есть  $H_A$ . Это является значительным ослаблением требований, накладываемых на координатные функции классическим методом Галеркина.

Метод Галеркина применительно к задаче (6.8.5) можно определить следующим образом. Пусть каждая из систем функций  $\{\varphi_n\}$  и  $\{\Phi_n\}$  является полной в  $H_A$  и линейно-независимой последовательностью элементов, а  $h_n$  и  $H_n$  — последовательности подпространств из  $H_A$ , натянутых на первые  $n$  элементов соответственно из  $\{\varphi_n\}$  и  $\{\Phi_n\}$ . Метод Галеркина для решения задач (6.8.1), (6.8.2) или (6.8.1), (6.8.3) состоит в замене ее следующей задачей: для заданного  $n$  найти в  $h_n$  такой элемент  $u$ , для которого при любом  $\Phi_n$  из  $H_n$  выполнялось бы интегральное тождество (6.8.5). Из приведенной формулировки метода Галеркина видно, что он хорошо приспособлен к решению обобщенных задач. Если  $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$ , то уравнения метода запишутся в виде

$$\sum_{k=1}^n a_k [\varphi_k, \Phi_i]_A = (f, \Phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.8.6)$$

Пусть для простоты  $\varphi_n = \Phi_n$ . Оценим норму приближенного решения  $u_n$ . Для этого умножим  $i$ -е уравнение (6.8.6) на  $a_i$  и результаты сложим. Тогда  $[u_n]_A^2 = (f, u_n)$ , т. е.  $[u_n]_A^2 = (A^{-1/2} f, A^{1/2} u_n) \leq \leq 1/2 [f]_{A^{-1}}^2 + 1/2 [u_n]_A^2$  или  $[u_n]_A^2 \leq [f]_{A^{-1}}^2$ .

Докажем сильную сходимость этого метода в норме  $[\ ]_A$ . Для этого заметим, что уравнения (6.8.6) являются уравнениями метода Рунца, решения которых минимизируют функционалы

$$\Omega_A(u_n) = [u - u_n, u - u_n]_A; \quad G_A(u_n) = [u_n, u_n]_A - 2(f, u_n), \quad u_n \in h_n,$$

где  $u$  — решение задачи (6.8.5). В силу полноты системы  $\varphi_n$   $\Omega_A(u_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а это значит, что последовательность  $u_n$  сильно сходится в норме  $[\ ]_A$  к точному решению  $u$ . Аналогичный факт сильной сходимости в энергетической норме решений сеточных уравнений, построенных на основе одной из интерпретаций вариационного принципа (метода ортогональных проекций) для аппроксимации сильно эллиптических задач типа (6.8.1), был доказан в работах [118].

В качестве системы координатных функций возьмем собственные функции полусходного с  $A$  оператора  $B$ :

$$B\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad (6.8.7)$$

$$\sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \cos(\mathbf{n}, x_i) + b \varphi_n |_{\Gamma} = 0 \quad (6.8.8)$$

или

$$\varphi_n |_{\Gamma} = 0, \quad (6.8.9)$$

где

$$B\varphi = - \sum_{i=1}^3 \left( A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + C_i \varphi \right),$$

функции  $A_i(x_i)$  и  $C_i(x_i)$  получены усреднением по дополнительным переменным коэффициентов  $A$  и  $C/3$  с некоторыми весами.

Далее для простоты рассмотрим краевую задачу (6.8.7), (6.8.9) и найдем собственные значения и функции этой задачи. Они будут иметь вид

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^3 \lambda_{n_i}^i; \quad \varphi_n(x) = \prod_{i=1}^3 \varphi_{n_i}^i(x_i), \quad (6.8.10)$$

где  $n = (n_1, n_2, n_3)$ ;  $\lambda_{n_i}^i, \varphi_{n_i}^i$  — собственные значения и функции одномерных краевых задач

$$-A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_i \frac{\partial \varphi_{n_i}^i}{\partial x_i} \right) + C_i \varphi_{n_i}^i = \lambda_{n_i} \varphi_{n_i}^i; \quad \varphi_{n_i}^i(0) = \varphi_{n_i}^i(R_i) = 0. \quad (6.8.11)$$

Для  $\lambda_{n_i}, \varphi_{n_i}$  известны асимптотические формулы (см. Э. Камке [93]).

Можно показать, что система (6.8.10) полна и почти ортогональна в  $H_A$ . Ее мы и возьмем для метода Галеркина. Каждая функция этой системы учитывает в среднем и изменение функций  $A, C$ , и условия сшивки для решения уравнения (6.8.1). Для такой системы нетрудно вычислить функционалы  $[\varphi_i, \varphi_k]_A$  и  $(f, \varphi_k)$  в явном виде.

Вопрос об упорядоченности полученной системы (6.8.10) можно рассмотреть в следующей постановке. Пусть решено взять  $m_l$  функций (6.8.11) по каждой переменной ( $l = 1, 2, 3$ ) и пусть для определенности  $m_1 = \max_l m_l = N$ , причем известно, что функция  $\varphi_{m_{11}}(x)$

использована в методе Галеркина. Тогда возникает вопрос, как рационально отобрать из всего множества функций  $\varphi_{ij_k}$  ( $1 \leq i \leq m_1$ ;  $1 \leq j \leq m_2$ ;  $1 \leq k \leq m_3$ ) в количестве  $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$  штук те функции, которые участвовали бы в методе Галеркина. Для решения этого вопроса поступим следующим образом. В уравнении

$$Bu = f \quad (6.8.12)$$



осуществим замену переменных  $x'_l = \int_0^{x_l} \frac{dt}{A_l(t)}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , а  $\sum_{i=1}^3 C_i(x_i)$  заменим средним значением  $C_0$ , после чего уравнение (6.8.12) перейдет в следующее:

$$-\Delta \bar{u} + C_0 \bar{u} = \bar{f}, \quad (6.8.13)$$

определенное в кубе  $D$  ( $0 \leq x'_l \leq R_l$ ,  $l = 1, 2, 3$ ) с кусочно-постоянной функцией  $\bar{f}$ .

Собственные значения и функции этого уравнения и решение, обращающееся в нуль на  $\Gamma$ , находятся в явном виде и выражаются формулами

$$\lambda_n = \pi^2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{n_i}{R_i} \right)^2 + C_0; \quad \varphi_{n_i}(x) = \sin \frac{\pi n_i}{R_i} x_i, \quad (6.8.14)$$

а

$$u(x) = \sum_{n \in T} a_n \varphi_n, \quad (6.8.15)$$

где  $T$  — множество всех индексов  $n = (n_1, n_2, n_3)$  с  $1 \leq n_i < \infty$ ;  $a_n = f_n / \lambda_n$ ,  $f_n$  — коэффициенты Фурье  $f$  по функциям (6.8.14). При  $f \in E^\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$  имеем по определению, что  $|f_n| \leq K_0 n_1^{-\alpha} n_2^{-\alpha} n_3^{-\alpha}$ , а  $K_i$  — здесь и далее не зависящие от  $n$  константы. Следовательно,

$$|a_n| \leq K_1 \prod_{i=1}^3 \left( \frac{\pi n_i}{R_i} \right)^{-\alpha} \left[ \pi^2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{n_i}{R_i} \right)^2 + C_0 \right]^{-1}.$$

Для уравнения (6.8.12) энергетическая норма имеет вид

$$[u]^2 = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x'_i} \right)^2 + C_0 u^2 dx'. \quad (6.8.16)$$

Будем решать уравнение (6.8.12) методом Галеркина, употребляя в нем  $M$  функций (6.8.13) с индексами  $n$  из некоторого множества  $Q \subset T$ . Поскольку метод Галеркина дает наилучшее приближение  $u_Q$  к решению в норме  $[\ ]$ , то естественно оценивать погрешность  $\eta_Q = u - u_Q$  именно в норме  $[\ ]$ . Имеем

$$u_Q = \sum_{n \in Q} a_n \varphi_n; \quad \eta_Q = \sum_{n \notin Q} a_n \varphi_n.$$

Если  $P(n) = P(n_1, n_2, n_3) = \prod_{i=1}^3 \left( \frac{\pi n_i}{R_i} \right)^{2\alpha} \left( \pi^2 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{n_i}{R_i} \right)^2 + C_0 \right)$ , то из (6.8.16) следует, что

$$[\eta_Q]^2 \leq J = K_3 \sum_{n \notin Q} \frac{1}{P(n)}. \quad (6.8.17)$$

Пусть мы решили взять  $N$  функций по переменной  $x_1$  и все функции  $\varphi(i, 1, 1)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , употребить в методе. Необходимо знать,

как рационально построить множество  $Q$ . Формула (6.8.17) показывает, что оптимальное на классе  $E^\alpha$  уменьшение ошибки будет тогда, когда функции  $\varphi_n$  упорядочены в соответствии с линиями уровня функции  $P(z)$ , а это значит, что в качестве  $Q$  следует взять множество

$$Q = \{(n_1, n_2, n_3) : P(n_1, n_2, n_3) \leq P(N, 1, 1)\}.$$

Тогда порядок системы Галеркина  $M$  равен числу точек множества  $Q$ . Найдем асимптотические выражения  $M$ ,  $[\eta_Q]$  через  $N$ . Обозначим  $c_i > 0$  не зависящие от  $N$  постоянные. Очевидно, что  $M \sim S(N)$  и  $[\eta_Q]^2 \sim J(N)$ , где

$$S(N) = \int_{P(z) \leq P(N, 1, 1)} \frac{dz}{P(z)}; \quad J(N) = \int_{P(z) \geq P(N, 1, 1)} \frac{dz}{P(z)}.$$

Оценивая  $S(N)$ ,  $J(N)$  при  $N \rightarrow \infty$ , получаем, что

$$S(N) \sim c_1 P(N, 1, 1)^{1/\theta} \sim c_2 N^{2(1+\alpha)/\theta}; \\ J(N) \sim c_3 P(N, 1, 1)^{(1-\theta)/\theta} \sim c_3 N^{2(1+\alpha)(1-\theta)/\theta},$$

где  $\theta = 2(\alpha + 1/3)$

Таким образом, из асимптотического равенства  $J(N) \sim c_3 S(N)^{1-\theta}$  следует, что

$$[\eta_Q] = O(M^{(1-\theta)/2}). \quad (6.8.18)$$

Изложим способ построения одномерных собственных функций. Пусть в уравнении

$$(p(t) u')' + q(t, \lambda) u = 0 \quad (6.8.19)$$

функции  $p(t) > 0$ ;  $q(t, \lambda) = F(\lambda) - c$ ,  $c \geq 0$ ,  $F \geq 0$  — кусочно-постоянные при  $a \leq t \leq b$ . Рассмотрим один из методов нахождения собственных функций уравнения (6.8.19), например при условиях  $u(a) = u(b) = 0$ . Предварительно заметим, что на каждом отрезке постоянства (зоне) функций  $p$ ,  $q$  общее решение уравнения (6.8.19) легко находится. Это позволяет конструктивно получить решение в новых переменных. Применим известное преобразование с помощью полярных координат [93]. Пусть

$$\rho^2 = u^2 + (pu')^2; \quad \varphi = \text{Arctg}(u/pu').$$

Тогда вместо (6.8.19) будем иметь систему

$$\varphi' = (1/p) \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi; \quad \rho' = (1/p - q) \rho \sin \varphi \cos \varphi \quad (6.8.20)$$

с условием  $\varphi(a) = 0$ ,  $\varphi(b) = 0 \pmod{\pi}$ , где  $\varphi(t, \lambda)$  и  $\rho(t, \lambda)$  — непрерывные на  $[a, b]$  функции.

Первое уравнение (6.8.20) интегрируется в элементарных функциях, а это значит, что из значения  $\varphi(a)$  можно последовательно выразить решения  $\varphi(t, \lambda)$  на границах зон  $[t_i, t_{i+1}]$  друг через друга двучленными соотношениями вида  $\varphi(t_{i+1}, \lambda) = F(\varphi(t_i, \lambda), t_i)$ . Из вида уравнения (6.8.20) следует, что расчет значений  $\varphi(t_i, \lambda)$  устойчив по отношению к ошибкам округления. Вычисляя для различных  $\lambda$  функцию  $\varphi(b, \lambda)$  и замечая, что  $\varphi(b, \lambda)$  — монотонно возрастающая

функция от  $\lambda$ , находим такие  $\lambda_n$ , для которых  $\varphi(b, \lambda_n) = \pi n$ . Поскольку цена вычисления  $\varphi(b, \lambda)$  зависит только от числа (а не длины) зон и бывают известны асимптотика и границы спектра, определение  $\lambda_n$  не является, вообще говоря, трудоемкой операцией. Найденные  $\lambda_n$  будут собственными значениями. После этого, последовательно решая второе уравнение (6.8.20) (а общее решение его в каждой зоне выражается через элементарные функции), находим  $\rho(t, \lambda_n)$ , удовлетворяющее условиям  $\rho(a, \lambda_n) = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} u(t, \lambda_n) &= \rho(t, \lambda_n) \sin \varphi(t, \lambda_n); \\ \rho u'(t, \lambda_n) &= \rho(t, \lambda_n) \cos \varphi(t, \lambda_n). \end{aligned} \quad (6.8.21)$$

Этот метод хорош тем, что возможная неустойчивость в определении  $\rho(t, \lambda_n)$  влияет только на амплитуду функции  $u(t, \lambda_n)$  и не портит ее корни.

Анализ получаемых одномерных функций вида (6.8.21) показывает, что первые из них могут быть далеки от асимптотического

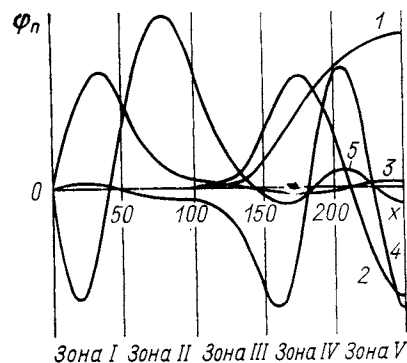


Рис. 6.5. Вид собственных функций

представления. На рис. 6.5 приведены первые пять функций (кривые 1—5) одномерной пятизонной задачи (6.8.11):

$$A_i = 1; F_i = 1; C_i = 0,01; i = 1, 4, 5;$$

$$C_2 = 0,03; C_3 = 0,04; \varphi|_{x=0} = \varphi_x|_{x=250} = 0 \quad (\text{здесь } i \text{ — номер } i\text{-й зоны длиной } 50).$$

Иногда необходимо более точно учесть поведение решения в некоторых зонах, например резкие локальные всплески в решении. Пусть  $\{\Phi_n\}$  — ортонормированная в норме  $[\ ]$  система функций, каждая функция которой линейно-независима с функциями  $\{\varphi_n\}$ , причем система  $\{\Phi_n\}$  может быть неполной (например, набор финитных функций, носители которых не пересекаются и расположены в областях, где желательно учесть резкие изменения в решении). Тогда положим

$$u = \sum_{k=1}^M a_k \varphi_k + \sum_{k=1}^N b_k \Phi_k, \quad (6.8.22)$$

а уравнения метода Галеркина будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^M a_n [\varphi_n, \varphi_i] + \sum_{k=1}^N b_k [\Phi_k, \varphi_i] &= (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, M; \\ \sum_{n=1}^M a_n [\varphi_n, \Phi_i] + b_i &= (f, \Phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (6.8.23)$$

Выражая  $b_i$  из вторых уравнений и подставляя их в первые, получаем систему из  $M$  линейных уравнений только с неизвестными  $a_n$ .

Изложенные соображения были использованы при составлении программ для решения двугрупповой диффузионной многозонной задачи в декартовой (трехмерной) и в цилиндрической  $(r, z)$  геометриях.

## § 6.9. МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Метод Галеркина в теории переноса применен и обоснован В. С. Владимировым в работе [41]. Однако для получения хорошего приближения при решении многомерных задач необходимо брать довольно много координатных функций. В этом отношении предпочтительнее метод сферических гармоник, который можно рассматривать как обобщение метода Галеркина. Но уже решение кинетического уравнения в  $P_3$ -приближении — достаточно трудоемкая задача. Поэтому представляют интерес такие варианты метода Галеркина, которые совмещают простоту решения уравнений с гибкостью получаемых приближений. Мы приводим результаты для  $2\pi T$ -периодических задач, следуя работам В. И. Лебедева и В. Ю. Пляшкевича [148, 195, 196]. Далее все функции будут предполагаться  $2\pi T$ -периодическими по пространственным переменным.

При четности по угловым переменным источника и индикатрисы рассеяния задача сводится к решению кинетического уравнения в самосопряженной форме (5.1.18):

$$-[\Omega\Delta]^2 u + u = \bar{S}_0 u + F. \quad (6.9.1)$$

Предположим, что  $0 \leq c(x) \leq 1$  и  $c(x) \neq 1$ . Тогда решение уравнения (6.9.1) эквивалентно задаче минимизации квадратичного функционала (5.1.25):

$$G(u) = [u]^2 - (\bar{S}_0 u, u) - 2(u, F), \quad (6.9.2)$$

где

$$[u]^2 = \int_D \int_{\Omega} [(l\Omega\nabla u)^2 + u^2] l^{-1} dx d\Omega. \quad (6.9.3)$$

Вследствие  $2\pi T$ -периодичности в (6.9.3) отсутствуют граничные члены. Можно показать справедливость оценки (5.1.26):

$$d_1 [u]^2 \leq [u]^2 - (\bar{S}_0 u, u) \leq d_2 [u]^2 \quad (6.9.4)$$

с константами  $d_1, d_2 > 0$ . Отсюда получаем, что энергетическое пространство задачи совпадает с пространством измеримых функций, имеющих конечную норму [1].

Пусть координатные функции из  $W_{\frac{1}{2}}^1(D)$  образуют сильно минимальную систему  $\{\varphi_k(x)\}$  в  $L_2(D)$ . Будем искать приближенное решение вариационной задачи в виде

$$\tilde{u}^n(x, \Omega) = \sum_{k=1}^n u_k^n(\Omega) \varphi_k(x). \quad (6.9.5)$$

И пусть функции вида (6.9.5) плотны в энергетическом пространстве. Тогда уравнения метода Галеркина для неизвестной вектор-функции  $u^n$  будут иметь вид

$$A_n u^n = B_n u^n + F^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.9.6)$$

где  $F^n$  — вектор-функция с компонентами

$$F_k^n(\Omega) = \int_D \varphi_k(x) F(x, \Omega) l^{-1}(x) dx, \quad (6.9.7)$$

$A_n$  — матричная функция с элементами

$$a_{ij}^n(\Omega) = \int_D [l(x) \Omega \nabla \varphi_i(x) l(x) \Omega \nabla \varphi_j(x) + \varphi_i(x) \varphi_j(x)] l^{-1}(x) dx, \quad (6.9.8)$$

$B_n$  — матричный интегральный оператор с ядром из элементов

$$b_{ij}^n(\Omega \Omega') = \frac{1}{4\pi} \int_D c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) g(x, \Omega \Omega') l^{-1}(x) dx. \quad (6.9.9)$$

Обозначим  $L_2^n(\Omega)$  гильбертово пространство вектор-функций  $u^n$  с нормой

$$\|u^n\|_{L_2^n(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k^n\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Пусть  $P_n u^n = \sum_{k=1}^n u_k^n \varphi_k$  — оператор из  $L_2^n(\Omega)$  в энергетическое пространство. Нетрудно видеть, что

$$[P_n u^n]^2 = (A_n u^n, u^n)_{L_2^n(\Omega)}.$$

Из оценки

$$c_1 \|P_n u^n\|_{L_2(D \times \Omega)} \leq [P_n u^n]$$

с константой  $c_1 > 0$ , не зависящей от  $n$ , и сильной минимальности системы  $\{\varphi_k\}$  в  $L_2(D)$  следует равномерная по  $n$  положительная определенность операторов  $A_n$ . Тогда из оценки (6.9.4) и сказанного выше вытекает, что (6.9.6) являются системами интегральных уравнений с равномерно по  $n$  положительно определенным оператором в  $L_2^n(\Omega)$ . Значит, системы (6.9.6) разрешимы и

$$u^n = (A_n - B_n)^{-1} F^n.$$

При этом нормы операторов  $(A_n - B_n)^{-1}$  ограничены сверху равномерно по  $n$ .

Легко видеть, что приближенные решения  $\tilde{u}^n$  удовлетворяют уравнениям

$$(A_n - B_n) P_n^{-1} \tilde{u}^n = F^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.9.10)$$

Из определения операторов  $P_n$  следует, что

$$\|(A_n - B_n) P_n^{-1} \tilde{u}^n\|_{L_2^n(\Omega)} = \|(A_n - B_n) u^n\|_{L_2^n(\Omega)}.$$

Тогда из (6.9.4) и сильной минимальности координатной системы вытекает оценка

$$c_2 [\tilde{u}^n] \leq \| (A_n - B_n) P_n^{-1} \tilde{u}^n \|_{L_2^n(\Omega)}$$

с  $c_2 > 0$ , не зависящей от  $n$ , которая показывает равномерную по  $n$  ограниченность сверху норм операторов, обратных к операторам в (6.9.10).

Докажем сходимость метода в норме [ ]. Для этого достаточно заметить, что  $\tilde{u}^n = P_n u^n$  минимизирует функционал  $G(\tilde{u}^n)$  на функциях вида (6.9.5) тогда и только тогда, когда вектор-функция  $u^n$  удовлетворяет уравнениям (6.9.6). Следовательно, (6.9.6) являются уравнениями Эйлера вариационной задачи. Так как в энергетическом пространстве  $\{u^n\}$  образуют минимизирующую последовательность для функционала  $G(u)$ , то, как известно из вариационной теории, в этом случае она будет сходиться к решению вариационной задачи в энергетическом пространстве, а следовательно, и в норме [ ].

Из сходимости приближенных решений  $\tilde{u}^n$  в норме [ ] и равномерной по  $n$  ограниченности сверху норм операторов, обратных к операторам в (6.9.6) и (6.9.10), следует устойчивость процессов решения этих систем. Это обстоятельство имеет большое практическое значение, так как малые возмущения в операторах и правых частях решаемых систем, неизбежные при их численном решении, не приводят к значительной погрешности в приближенных решениях.

Отметим, что для справедливости приведенных выше результатов от координатной системы достаточно потребовать более слабого условия сильной минимальности в энергетическом пространстве, т. е. оценки

$$c_3 \| u^n \|_{L_2^n(\Omega)} \leq [P_n u^n],$$

где  $c_3 > 0$  и не зависит от  $n$ .

Нетрудно заметить, что с увеличением  $n$  нормы операторов в (6.9.6) и (6.9.10) возрастают. Поэтому при достаточно больших порядках систем ошибки округления могут привести к значительным возмущениям операторов, а следовательно, и к большим погрешностям в приближенных решениях этих систем. Приведем ограничения на координатные функции, которые устраняют этот недостаток.

Пусть координатные функции удовлетворяют условию ортогональности

$$[\varphi_i \Phi, \varphi_j \Psi] = 0 \quad (6.9.11)$$

при  $i \neq j$  и любых  $\Phi, \Psi \in L_2(\Omega)$ . И пусть  $\varphi'_i(x, \Omega) = \varphi_i(x) / \sqrt{a_{ii}(\Omega)}$ , где  $a_{ii}(\Omega)$  определены формулой (6.9.8).

В качестве системы координатных функций возьмем систему  $\{\varphi'_i\}$ . Тогда (6.9.6) и (6.9.10) преобразуются к виду

$$V_n (A_n - B_n) V_n u^n = V_n F^n; \quad V_n (A_n - B_n) V_n P_n^{-1} \tilde{u}^n = V_n F^n, \quad (6.9.12)$$

где  $V_n$  — диагональная матричная функция с диагональными элементами  $1/\sqrt{a_{ii}(\Omega)}$ . Можно показать, что нормы операторов в (6.9.12)

ограничены сверху и снизу равномерно по  $n$ . На самом деле для справедливости указанных результатов достаточно, чтобы условие ортогональности выполнялось при каком-либо скалярном произведении, задающем норму, эквивалентную норме [ ]. При решении систем (6.9.6) и (6.9.10) необходимо уметь хорошо обращаться матричную функцию  $A_n$ . Из сказанного выше следует, что для этого можно воспользоваться формулой  $A_n^{-1} = V_n (V_n A_n V_n)^{-1} V_n$ .

На практике ячейки часто обладают симметрией, что позволяет облегчить решение задачи. Пусть ячейка инвариантна относительно конечной группы ортогональных преобразований  $H$ . И пусть группа действует на функции по формуле  $hf(x, \Omega) = f(hx, h\Omega)$ . Предположим, что функции в уравнении (6.9.1) инвариантны относительно действия группы на их аргументы. Но тогда и решение будет также инвариантно относительно группы. Поэтому при решении вариационной задачи достаточно ограничиться системой координатных функций, инвариантной относительно действия группы. Это значит, что для  $h$  и любого  $n$  найдется такой индекс  $m = h(n)$ , что  $\varphi_n(hx) = \varphi_m(x)$ . Здесь  $h$  задает взаимно однозначное отображение множества индексов на себя. Чтобы приближенное решение было тоже инвариантным, в разложении (6.9.5) должны участвовать все координатные функции, которые переходят друг в друга под действием группы.

Заметим, что  $\nabla_x f(hx) = h^* \nabla_y f(y)$ , где  $y = hx$ , а  $h^*$  — сопряженная к  $h$  матрица. Нетрудно установить справедливость соотношений

$$\left. \begin{aligned} u_{h^*(k)}^n(h\Omega) &= u_k^n(\Omega); F_{h^*(k)}^n(h\Omega) = F_k^n(\Omega); \\ A_{h^*(l) h^*(j)}^n(h\Omega) &= A_{lj}^n(\Omega); b_{h^*(l) h^*(j)}^n(\Omega\Omega') = b_{lj}^n(\Omega\Omega'), \end{aligned} \right\} (6.9.13)$$

которые можно использовать, чтобы уменьшить объем вычислений при решении системы (6.9.6). В случае вырожденной индикатрисы рассеяния решение этой системы сводится к решению системы алгебраических линейных уравнений для моментов вектор-функции  $\bar{S}_0 u^n = (\bar{S}_0 u_k^n)$ , порядок которой можно значительно уменьшить, если воспользоваться соотношениями (6.9.13). Коэффициенты и правые части ее нетрудно вычислить с помощью квадратурных формул на сфере повышенного порядка точности (см. § 5.10).

Перейдем к задаче выбора системы координатных функций. Естественно в качестве координатных функций брать близкие к собственным функциям оператора, полусходного с оператором задачи [180]. Обозначим  $2\pi T$  матрицу линейного преобразования, переводящего единичный куб в область  $D$ , и положим  $\beta_n = (T^*)^{-1} n$ , где  $n = (n_1, n_2, n_3)$ .

Тогда

$$\varphi_n(x) = \{\sin(\beta_n x); \cos(\beta_n x)\} \quad (6.9.14)$$

будут пространственными составляющими собственных функций оператора задачи (6.9.1) с постоянными по  $x$  коэффициентами. Нетрудно проверить, что эта система полна и почти ортогональна в энергетическом пространстве вариационной задачи.

Можно ожидать лучшую сходимость, если  $\varphi_n(x)$  будут пространственными составляющими более близкого оператора. При построении такого оператора ограничимся случаем, когда  $D$  — куб со стороной  $2\pi$ . Общий случай сводится к рассматриваемому соответствующей заменой переменных. В качестве полусходного оператора возьмем оператор

$$B u \equiv - \sum_{ij} l_i(x_i) \Omega_i \Omega_j \frac{\partial}{\partial x_i} l_j(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} u + u - S u \quad (6.9.15)$$

с индикатрисой, не зависящей от пространственных переменных. Здесь

$$l_i(x_i) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l(x_i, x') dx', \quad i = 1, 2, 3,$$

а интегрирование проводится по дополнительным к  $x_i$  переменным. Пусть

$$L_i(x_i) = 2\pi \int_{-\pi}^{x_i} \frac{dt}{l_i(t)} \left/ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{l_i(t)} \right., \quad i = 1, 2, 3.$$

Можно убедиться в том, что пространственными составляющими собственных функций оператора  $B$  будут

$$\varphi_n(x) = \{ \sin(n_1 L_1(x_1) + n_2 L_2(x_2) + n_3 L_3(x_3)); \cos(n_1 L_1(x_1) + n_2 L_2(x_2) + n_3 L_3(x_3)) \}$$

и что эта система координатных функций полна и почти ортогональна в энергетическом пространстве задачи. Тогда для нее справедливы приведенные выше результаты.

Отметим, что описанные построения координатных функций в случае инвариантности ячейки и функций в уравнении (6.9.1) приводят к системам координатных функций, инвариантным относительно группы симметрии. Рассмотрим некоторые важные примеры двумерных инвариантных ячеек. Пусть  $D$  — квадрат со стороной  $2\pi a$ , а  $H$  — группа симметрий квадрата с элементами

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad h_5 = -h_1; \quad h_6 = -h_2; \quad h_7 = -h_3; \quad h_8 = -h_4.$$

Тогда  $T = a \operatorname{diag} \{1, 1\}$ , а введенное выше отображение  $m = h(n)$  является линейным преобразованием и имеет вид  $\hat{A}_h = T^* h^* (T^*)^{-1}$ .

В другом случае, когда ячейка — шестиугольник со стороной  $2\pi a/\sqrt{3}$ , а группа симметрий порождается вращениями на угол  $\pi/3$  и отражениями относительно диагоналей шестиугольника,

$$T = a \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \psi_k = k\pi/3, \quad k = 0, 1, \dots, 5;$$



$$h_k^\pm = \begin{pmatrix} \pm \cos \psi_k & -\sin \psi_k \\ \pm \sin \psi_k & \cos \psi_k \end{pmatrix};$$

$$\hat{A}_{h_k^\pm} = \begin{pmatrix} \pm \left( \cos \psi_k - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \psi_k \right) & \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \psi_k \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \psi_k & \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \psi_k + \cos \psi_k \end{pmatrix}.$$

Перейдем к задаче отбора функций из построенной выше координатной системы (6.9.14) в разложение (6.9.5). Пусть ячейка разбивается на конечное число областей. Рассматриваются ячейки трех типов с границами областей:

- 1) плоскими и параллельными граням ячейки;
- 2) непересекающимися цилиндрическими поверхностями с образующими, перпендикулярными основаниям ячейки;
- 3) непересекающимися сферическими поверхностями.

Ограничимся модельной задачей, в которой рассеяние и источник предполагаются изотропными. Все коэффициенты в уравнении (6.9.1) предполагаются постоянными, а правая часть — кусочно-постоянной.

Будем отбирать в (6.9.5) функции  $\varphi_n(x)$  из условия минимизации энергетической нормы невязки приближенного решения. Обозначим  $Z_\infty$  множество векторов с целочисленными компонентами. И пусть  $Q_N \subset Z_\infty$ . Возьмем в (6.9.5) координатные функции с  $k \in Q_N$ . Можно показать, что для невязки приближенного решения имеет место оценка

$$b_1 \sum_{k \in Q_N} c_k \leq [\varepsilon_N]^2 \leq b_2 \sum_{k \in Q_N} c_k \text{ с } b_1, b_2 > 0.$$

Здесь для ячеек первого типа

$$c_k = 1/(\max(1, n_1^2) \max(1, n_2^2) \max(1, n_3^2) \max(1, \sqrt{n_1^2(n_2^2 + n_3^2)})),$$

для ячеек второго типа

$$c_k = 1/(\max(1, n_3^2) \max(1, (n_1^2 + n_2^2)^{3/2}) \max(1, (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}))$$

и для ячеек третьего типа

$$c_k = 1/\max(1, (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{5/2}).$$

Отберем в  $Q_N$   $k$ , для которых

$$c_k \geq 1/N. \quad (6.9.16)$$

При обычном методе отбора функций в (6.9.5) фиксируются максимальные порядки  $N_1, N_2, N_3$  одномерных гармоник. Далее, в  $Q_N$  отбираются векторы с компонентами

$$|n_i| \leq N_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.9.17)$$

Для сравнения двух методов отбора координатных функций в качестве чисел  $N_1, N_2$  и  $N_3$  в (6.9.17) возьмем наибольшие целые решения неравенства (6.9.16) соответственно на векторах вида  $(k_1, 0, 0)$ ,  $(0, k_2, 0)$  и  $(0, 0, k_3)$ . Зависимость порядка решаемой системы  $P$  от  $N$

Тип ячейки	$P_N$	$[\epsilon_N]$	$P_N$	$[\epsilon_N]$
1	$\sim N^{3/7}$	$\sim P_N^{-2/3}$	$\sim N$	$\sim P_N^{-1/3}$
2	$\sim N^{1/2} \ln N$	$\sim P_N^{-1/2} \ln P_N$	$\sim N^{5/6}$	$\sim P_N^{-3/10}$
3	$\sim N^{3/5}$	$\sim P_N^{-1/3}$	$\sim N^{3/5}$	$\sim P_N^{-1/3}$

и нормы невязки приближенного решения  $[\epsilon_N]$  от  $P_N$  приведена в табл. 6.1. В левых столбцах таблицы приведены результаты для отбора по правилу (6.9.16), а справа — по правилу (6.9.17).

Из сравнения соответствующих величин, приведенных в табл. 6.1, видно, что метод отбора координатных функций по правилу (6.9.16) предпочтительнее. Порядок роста решаемых систем меньше, а скорость сходимости приближенных решений выше. Для ячеек третьего типа методы отбора оказываются эквивалентными, что объясняется сферической симметрией решения в зонах.

В двумерном случае имеют место аналогичные результаты. При этом в ячейках первого типа

$$c_k = 1/(\max(1, n_1^2) \max(1, n_2^2) \max(1, (n_1^2 + n_2^2)^{1/2})),$$

и тогда  $P_N \sim N^{2/5}$ ,  $[\epsilon_N] \sim P_N^{-3/4}$ , а в ячейках второго типа

$$c_k = 1/\max(1, (n_1^2 + n_2^2)^2),$$

и тогда  $P_N \sim N^{1/2}$  и  $[\epsilon_N] \sim P_N^{-1/2}$ .

## Глава 7

### КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

#### § 7.1. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ $P_n$ -ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим односкоростное кинетическое уравнение в плоской геометрии (5.2.8), в котором  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$  — кусочно-постоянные функции, и граничные условия (5.2.10). Как показано в § 6.2, метод сферических гармоник приводит к системе дифференциальных уравнений (6.2.7), подлежащей решению при условиях

$$d' \varphi + c' J + \psi' |_{z=0}; \quad d'' \varphi + c'' J = \psi'' |_{z=H}. \quad (7.1.1)$$

Здесь  $J, \varphi, f, F, \psi', \psi''$  — вектор-функции;  $\alpha, \beta, a, b, c', c'', d', d''$  — матрицы.

Для этой задачи напишем разностные уравнения. Поскольку при применении метода сеток к задачам подобного типа возникает большое количество неизвестных, получим наряду с обычными разностные уравнения повышенной точности, позволяющие укрупнить шаг сетки.

Весь интервал изменения переменной  $z$  разобьем узловыми точками  $z_k$  на частичные интервалы. В число узлов включим все точки, в которых элементы матриц  $\alpha, \beta, a, b$  и вектор-функции  $F, f$  терпят разрыв. Элементы матриц считаем постоянными внутри интервалов сетки. Пусть  $z_k, z_{k+1}$  — две соседние точки сетки.  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $z_0 = 0$ ;  $z_N = H$ . Обозначим  $\Delta f_k$  разность  $f_k - f_{k-1}$ , где  $f_k$  — левосторонний предел функции  $f$  в точке  $z_k$ , а  $f_{k-1}$  — правосторонний предел функции  $f$  в точке  $z_{k-1}$ . Значения кусочно-постоянных функций на интервале  $[z_{k-1}, z_k]$  снабдим индексом  $k - 1/2$ , а если из самого изложения очевидно, где берутся значения функций, то индексы ставить не будем.

Проинтегрируем уравнения (6.2.7) по  $[z_{k-1}, z_k]$ :

$$\alpha [J_k - J_{k-1}] + a \int_{z_{k-1}}^{z_k} \varphi dz = \bar{f}; \quad \beta (\varphi_k - \varphi_{k-1}) + b \int_{z_{k-1}}^{z_k} J dz = \bar{F}, \quad (7.1.2)$$

где

$$\bar{f} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} f dz; \quad \bar{F} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} F dz. \quad (7.1.3)$$

Применим к интегральным членам квадратурную формулу Эйлера. Если  $u \in C_5 [z_{k-1}, z_k]$ , то

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} u dz = \frac{u_{k-1} + u_k}{2} \Delta z_k + \frac{(\Delta z_k)^2}{12} \left( \left( \frac{du}{dz} \right)_{k-1} - \left( \frac{du}{dz} \right)_k \right) + O((\Delta z)^5). \quad (7.1.4)$$

Сначала пренебрежем в квадратурной формуле членами порядка  $O((\Delta z_k)^3)$ . Тогда получим разностные уравнения, локально аппроксимирующие дифференциальные уравнения (6.2.7) с точностью  $O((\Delta z_k)^2)$  при  $\varphi, J \in C_3 [z_{k-1}, z_k]$ :

$$\alpha \Delta J_k + a \Delta z_k (\varphi_k + \varphi_{k-1})/2 = \bar{f}; \quad \beta \Delta \varphi_k + b \Delta z_k (J_k + J_{k-1})/2 = \bar{F}. \quad (7.1.5)$$

К уравнению (7.1.5) добавим два краевых условия при  $z = z_0, z = z_N$ :

$$d' \varphi_0 + c' J_0 = \psi'; \quad d'' \varphi_N + c'' J_N = \psi''. \quad (7.1.6)$$

Систему уравнений (7.1.5), (7.1.6) можно или непосредственно решать методом матричной прогонки (см. § 7.6), или, предварительно преобразовав ее к «трехточечному» виду путем исключения неизвест-

ных  $J_k$ , решать методом матричной прогонки уравнения для  $\Phi$  [162, 198].

Покажем способ исключения  $J_k$  из системы (7.1.5), (7.1.6); для этого из пары уравнений (7.1.5) выразим  $J_k$  и  $J_{k-1}$  через  $\bar{f}_{k-1/2}$ ,  $\bar{F}_{k-1/2}$ ,  $\Phi_k$ ,  $\Phi_{k-1}$ :

$$J_k = \alpha_{k-1/2}^{-1} \left( \bar{f}_{k-1/2} - \frac{\Delta z_k a_{k-1/2}}{2} (\Phi_k + \Phi_{k-1}) \right) / 2 + b_{k-1/2}^{-1} (\bar{F}_{k-1/2} - \beta_{k-1/2} \Delta \Phi_k) / \Delta z_k; \quad (7.1.7)$$

$$J_{k-1} = -\alpha_{k-1/2}^{-1} \left( \bar{f}_{k-1/2} - \frac{\Delta z_k a_{k-1/2}}{2} (\Phi_k + \Phi_{k-1}) \right) / 2 + b_{k-1/2}^{-1} (\bar{F}_{k-1/2} - \beta_{k-1/2} \Delta \Phi_k) / \Delta z_k. \quad (7.1.8)$$

Пусть  $0 < k < N$ . Заменяя в (7.1.8)  $k$  на  $k+1$ , получаем выражение для  $J_k$ , приравнивая которое (7.1.7) для  $J_k$ , находим «трехточечное» уравнение, связывающее  $\Phi_{k-1}$ ,  $\Phi_k$ ,  $\Phi_{k+1}$ :

$$-b_{k+1/2}^{-1} \beta_{k+1/2} \Delta \Phi_{k+1} / \Delta z_{k+1} + b_{k-1/2}^{-1} \beta_{k-1/2} \Delta \Phi_k / \Delta z_k + \Delta z_{k+1} \alpha_{k+1/2}^{-1} a_{k+1/2} (\Phi_k + \Phi_{k+1}) / 4 + \Delta z_k \alpha_{k-1/2}^{-1} a_{k-1/2} (\Phi_k + \Phi_{k-1}) / 4 = ((\alpha^{-1} \bar{f})_{k+1/2} + (\alpha^{-1} \bar{f})_{k-1/2}) / 2 + (b^{-1} \bar{F})_{k-1/2} / \Delta z_k - (b^{-1} \bar{F})_{k+1/2} / \Delta z_{k+1}. \quad (7.1.9)$$

Полагая в (7.1.7)  $k = N$  и в (7.1.8)  $k = 1$  и подставляя  $J_0$ ,  $J_N$  в (7.1.6), получаем

$$d' \varphi_0 + c' \left( (\alpha^{-1} a)_{1/2} \Delta z_1 (\varphi_1 + \varphi_0) / 4 - (b^{-1} \beta)_{1/2} (\varphi_1 - \varphi_0) / \Delta z_1 \right) = \psi' + c' \left( (\alpha^{-1} \bar{f})_{1/2} / 2 - (b^{-1} \bar{F})_{1/2} / \Delta z_1 \right); \quad (7.1.10)$$

$$d'' \varphi_N - c'' \left( (\alpha^{-1} a)_{N-1/2} \Delta z_N (\varphi_{N-1} + \varphi_N) / 4 + (b^{-1} \beta)_{N-1/2} (\varphi_N - \varphi_{N-1}) / \Delta z_N \right) = \psi'' - c'' \left( (\alpha^{-1} \bar{f})_{N-1/2} / 2 + (b^{-1} \bar{F})_{N-1/2} / \Delta z_N \right). \quad (7.1.11)$$

Если известно, что решение (6.2.7) четно относительно  $z = 0$ , то  $\frac{d\Phi}{dz} \Big|_{z=0} = 0$ . Следовательно,  $J_0 = b_0^{-1} F_0$ . Учитывая это, в уравнении (7.1.8), записанном при  $k = 1$ , получаем

$$-(\alpha^{-1} a)_{1/2} \Delta z_1 (\varphi_0 + \varphi_1) / 4 + (b^{-1} \beta)_{1/2} (\varphi_1 - \varphi_0) / \Delta z_1 = (b^{-1} \bar{F})_{1/2} / \Delta z_1 - (\alpha^{-1} \bar{f})_{1/2} / 2 - b_0^{-1} F_0. \quad (7.1.12)$$

Таким образом, в уравнениях (7.1.9)—(7.1.11) точно учтены граничные условия.

В полученных системах уравнений двухдиагональные матрицы  $\alpha$ ,  $\beta$  не зависят от  $z$ , а матрицы  $a$ ,  $b$  — диагональные. Это обстоятельство облегчает проведение матричной прогонки. Системы уравнений (7.1.9)—(7.1.12) имеют вид

$$-A_k \varphi_{k+1} + B_k \varphi_k - C_k \varphi_{k-1} = D_k, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (7.1.13)$$

где  $A_N = C_0 = 0$ .

Теперь воспользуемся формулой Эйлера, пренебрегая в ней членом  $O((\Delta z_k)^5)$ . Тогда из (7.1.2) получим

$$\left. \begin{aligned} \alpha \Delta J_k + a \Delta z_k (\varphi_k + \varphi_{k-1})/2 - (\Delta z_k)^2 a \Delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_k / 12 &= \bar{f}; \\ \beta \Delta \varphi_k + b \Delta z_k (J_k + J_{k-1})/2 - (\Delta z_k)^2 b \Delta \left( \frac{dJ}{dz} \right)_k / 12 &= \bar{F}. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.14)$$

Исключая из этих уравнений производные с помощью системы (6.2.7), получаем

$$\left. \begin{aligned} (\alpha + (\Delta z_k)^2 a \beta^{-1} b/12) \Delta J_k + \Delta z_k a (\varphi_k + \varphi_{k-1})/2 &= \\ = \bar{f} + (\Delta z_k)^2 a \beta^{-1} \Delta F_k/12; \\ (\beta + (\Delta z_k)^2 b \alpha^{-1} a/12) \Delta \varphi_k + \Delta z_k b (J_k + J_{k-1})/2 &= \\ = \bar{F} + (\Delta z_k)^2 b \alpha^{-1} \Delta f_k/12. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.15)$$

К системе (7.1.15) добавим два уравнения (7.1.6). Система (7.1.15) аппроксимирует дифференциальные уравнения (6.2.7) уже с точностью  $O((\Delta z_k)^4)$  при  $\varphi, J \in C_b[z_{k-1}, z_k]$ .

Повторяя изложенный ранее способ, исключим из системы (7.1.15)  $J_k$  и получим трехточечное матричное уравнение и граничные условия только для  $\varphi_k$ .

Для этого обозначим

$$N = \alpha + (\Delta z_k)^2 (a \beta^{-1} b)/12; \quad M = \Delta z_k a/2; \quad P = \beta + (\Delta z_k)^2 (b \alpha^{-1} a)/12; \\ Q = \Delta z_k b/2; \quad v = \bar{f} + (\Delta z_k)^2 (a \beta^{-1}) \Delta F_k/12; \quad w = \bar{F} + (\Delta z_k)^2 (b \alpha^{-1}) \Delta f_k/12.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_k &= (N_k^{-1})_{1/2} (v_{k-1/2} - M_{k-1/2} (\varphi_k + \varphi_{k-1}))/2 + \\ &\quad + Q_k^{-1})_{1/2} (w_{k-1/2} - P_{k-1/2} \Delta \varphi_k); \\ J_{k-1} &= (Q_k^{-1})_{1/2} (w_{k-1/2} - P_{k-1/2} \Delta \varphi_k)/2 - \\ &\quad - N_k^{-1})_{1/2} (v_{k-1/2} - M_{k-1/2} (\varphi_k + \varphi_{k-1})). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} - (Q^{-1} P)_{k+1/2} \Delta \varphi_{k+1} + (Q^{-1} P)_{k-1/2} \Delta \varphi_k + (N^{-1} M)_{k+1/2} (\varphi_{k+1} + \varphi_k) + \\ + (N^{-1} M)_{k-1/2} (\varphi_k + \varphi_{k-1}) = (N^{-1} v)_{k+1/2} + (N^{-1} v)_{k-1/2} - \\ - \Delta (Q^{-1} w)_{k+1/2}, \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

а при  $z = 0$  и  $z = H$

$$\left. \begin{aligned} d' \varphi_0 - c' ((Q^{-1} P)_{1/2} \Delta \varphi_1 - (N^{-1} M)_{1/2} (\varphi_1 + \varphi_0))/2 &= \\ = \psi' - c' (Q^{-1} w - N^{-1} v)_{1/2}/2; \\ d'' \varphi_N - c'' ((N^{-1} M)_{N-1/2} (\varphi_N + \varphi_{N-1})/2 + \\ + (Q^{-1} P)_{N-1/2} \Delta \varphi_N) = \psi'' - c'' (N^{-1} v + Q^{-1} w)_{N-1/2}/2. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.17)$$

Система уравнений (7.1.16), (7.1.17) является системой типа (7.1.13).

## § 7.2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ $P_n$ -ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотрим  $P_n$ -уравнения для сферической геометрии (6.2.18), где  $m = 0, 1, \dots, n$ , а  $\varphi_{n+1} \equiv 0$ . Для этих уравнений требуется решить на отрезке  $[0, R]$  краевую задачу с некоторыми краевыми условиями при  $r = 0, r = R$ . Запишем их в матричном виде

$$\alpha \frac{dJ}{dr} + \frac{1}{r} AJ + a\varphi = f; \quad \beta \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r} B\varphi + bJ = F, \quad (7.2.1)$$

где кусочно-постоянные матрицы  $\alpha, a, \beta, b, A, B$  и вектор-функции  $f, F$  определяются формулами § 6.2 [см. (6.2.18), (6.2.19)].

Получим систему разностных уравнений. Для этого разобьем  $[0, R]$  на отрезки  $[r_{k-1}, r_k], k=1, 2, \dots, N, r_0 = 0, r_k > r_{k-1}, r_N = R$ , включив в число точек  $r_k$  все точки разрывов элементов матриц и векторов  $f, F$ . Из системы (7.2.1) целесообразно выделить уравнение при  $m = 0$ , так как оно является точным уравнением баланса нейтронов для кинетического уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \varphi_1 + \Sigma_0 \varphi_0 = f_0. \quad (7.2.2)$$

Для него составим разностное уравнение особо и так, чтобы оно являлось разностным аналогом интегрального уравнения баланса. Для этого проинтегрируем умноженное на  $r^2$  уравнение (7.2.2) по отрезку  $[r_{k-1}, r_k]$ :

$$r_k^2 \varphi_{1, k} - r_{k-1}^2 \varphi_{1, k-1} + \Sigma_0 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi_0 r^2 dr = \bar{f}_0, \quad (7.2.3)$$

где

$$\bar{f}_0 = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_0 r^2 dr. \quad (7.2.4)$$

Для  $m > 0$  умножим  $m$ -е уравнение (6.2.18) на  $r$  и проинтегрируем по  $[r_{k-1}, r_k]$ . Затем воспользуемся формулой интегрирования по частям. В результате получим

$$\Delta(r(m\varphi_{m-1} + (m+1)\varphi_{m+1}))_k - \int_{r_{k-1}}^{r_k} (m^2 \varphi_{m-1} - (m+1)^2 \varphi_{m+1}) dr + \\ + \Sigma_m (2m+1) \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi_m r dr = (2m+1) \bar{f}_m, \quad (7.2.5)$$

где  $\bar{f}_m = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_m r dr$  при  $m > 0$ .

Применяя к интегралам в (7.2.3), (7.2.5) формулу трапеций, получаем разностные уравнения:

$$\Delta(r^2 \varphi_1)_k + \sum_0 \Delta r_k (r_k^2 \varphi_{0k} + r_{k-1}^2 \varphi_{0, k-1})/2 = \bar{f}_0; \quad (7.2.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta(r(m\varphi_{m-1} + (m+1)\varphi_{m+1}))_k - \Delta r_k (m^2(\varphi_{m-1, k} + \varphi_{m-1, k-1}) - \\ - (m+1)^2(\varphi_{m+1, k} + \varphi_{m+1, k-1}))/2 + \sum_m (2m+1) \Delta r_k (r_k \varphi_{mk} + \\ + r_{k-1} \varphi_{m, k-1})/2 = (2m+1)\bar{f}_m, \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

которые аппроксимируют задачу с точностью  $O((\Delta r_k)^2)$ , если  $r^2 \varphi_0, \varphi_m \in C_3[r_{k-1}, r_k]$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ .

Применяя к интегральным членам уравнений (7.2.3), (7.2.5) формулу Эйлера, получаем разностные уравнения, левые части которых представляют собой сумму левых частей уравнений (7.2.6) или (7.2.7) и следующих добавок:

для уравнения (7.2.6)

$$-\sum_0 (\Delta r_k)^2 \Delta(2r\varphi_0 + r^2 d\varphi_0/dr)_k/12, \quad (7.2.8)$$

для уравнения (7.2.7)

$$\begin{aligned} -(\Delta r_k)^2 \Delta(-m^2 d\varphi_{m-1}/dr + (m+1)^2 d\varphi_{m+1}/dr + \\ + (2m+1) \sum_m (rd\varphi_m/dr + \varphi_m))_k/12. \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

В добавки (7.2.8), (7.2.9) входят производные; выразим их через функции  $\varphi, J$ , используя уравнения (7.2.1):

$$\frac{dJ}{dr} = \alpha^{-1} \left( f - a\varphi - \frac{1}{r} AJ \right); \quad \frac{d\varphi}{dr} = \beta^{-1} \left( F - bJ - \frac{1}{r} B\varphi \right). \quad (7.2.10)$$

В результате получим двухточечную систему разностных уравнений, аппроксимирующую с точностью  $O((\Delta r_k)^4)$  систему дифференциальных уравнений (6.2.18), если  $r^2 \varphi_0, \varphi_m \in C_5[r_{k-1}, r_k]$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ . Эти системы разностных уравнений дополним уравнениями краевых условий.

### § 7.3. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В одномерной цилиндрической геометрии система уравнений метода сферических гармоник имеет вид (6.3.10) при  $m = 0$  и (6.3.11) при  $m \geq 1$  (где  $n + m$  — четное число,  $m \leq n$ ).

Обозначим вектор-столбцы

$$\begin{aligned} \Phi = (\varphi_{00}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2k}, 2j); \quad J = (\varphi_{11}, \varphi_{31}, \varphi_{33}, \dots, \varphi_{2k+1}, 2j+1); \\ f = (f_{00}, \dots, f_{2k}, 2j); \quad F = (f_{11}, \dots, f_{2k+1}, 2j+1). \end{aligned}$$

Систему (6.3.10), (6.3.11) запишем в матричном виде (7.2.1), где двухдиагональные матрицы  $\alpha, A, \beta, B$  не зависят от  $r$ , а матрицы  $a, b$  — диагональные с кусочно-постоянными коэффициентами. Пусть  $\{r_k\}$ ,  $k = 0, \dots, N$  — разбиение отрезка, в которое входят все разрывы элементов матриц  $a, b$  и функций  $f, F$ ;  $r_0 = 0, r_k > r_{k-1}, r_N = R$ .

Для получения разностных уравнений умножим уравнения (7.2.1) на  $r$  и проинтегрируем по отрезку  $[r_{k-1}, r_k]$ . Тогда, если воспользоваться формулой интегрирования по частям, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \alpha (\Delta (rJ)_k) + (A - \alpha) \int_{r_{k-1}}^{r_k} J dr + a \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi r dr = \bar{f}; \\ \beta (\Delta (r\varphi)_k) + (B - \beta) \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi dr + b \int_{r_{k-1}}^{r_k} J r dr = \bar{F}; \end{aligned} \right\} \quad (7.3.1)$$

$$\text{где } \bar{f} = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f r dr; \quad \bar{F} = \int_{r_{k-1}}^{r_k} F r dr.$$

Заменяя в (7.3.1) интегралы по формуле трапеций, получаем разностные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \Delta (rJ)_k + (A - \alpha) \Delta r_k (J_k + J_{k-1})/2 + \\ + a \Delta r_k (r_k \varphi_k + r_{k-1} \varphi_{k-1})/2 = \bar{f}; \\ \beta \Delta (r\varphi)_k + (B - \beta) \Delta r_k (\varphi_k + \varphi_{k-1})/2 + \\ + b \Delta r_k (r_k J_k + r_{k-1} J_{k-1})/2 = \bar{F}, \end{aligned} \right\} \quad (7.3.2)$$

аппроксимирующие при  $\varphi, J \in C_3[r_{k-1}, r_k]$  с точностью  $O((\Delta r_k)^2)$  дифференциальные уравнения (6.3.10), (6.3.11).

Заменяем теперь интегралы в (7.3.1) квадратурами Эйлера (7.1.4), в которых производные с помощью уравнения (7.2.10) выражены через значения функций. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi dr = \Delta r_k (\varphi_k + \varphi_{k-1})/2 + \\ + (\Delta r_k)^2 \beta^{-1} \left( b \Delta J_k + B \Delta \left( \frac{1}{r} \varphi \right)_k - \Delta F_k \right) / 2; \\ \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi r dr = \Delta r_k (r_k \varphi_k + r_{k-1} \varphi_{k-1})/2 + \\ + (\Delta r_k)^2 (\beta^{-1} (B \Delta \varphi_k + b \Delta (rJ)_k - \\ - \Delta (rF)_k) - \Delta \varphi_k) / 12. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.3)$$

Аналогичны формулы для  $\int_{r_{k-1}}^{r_k} J dr, \int_{r_{k-1}}^{r_k} J r dr$ . Подставляя их в (7.3.1),

получаем



$$\left. \begin{aligned}
& \alpha \Delta (rJ)_k + (A - \alpha) \Delta r_k (J_k + J_{k-1})/2 + \\
& + a \Delta r_k (r_k \varphi_k + r_{k-1} \varphi_{k-1})/2 + \\
& + (\Delta r_k)^2 [(A\alpha^{-1}a - a + a\beta^{-1}B) \Delta \varphi_k + \\
& + (A\alpha^{-1} - \Gamma) A \Delta (J/r)_k + a\beta^{-1} b \Delta (rJ)_k]/12 = \\
& = \bar{f} + (\Delta r_k)^2 [a\beta^{-1} \Delta (rF)_k + (A\alpha^{-1} - \Gamma) \Delta f_k]/12; \\
& \beta \Delta (r\varphi)_k + (B - \beta) \Delta r_k (\varphi_k + \varphi_{k-1})/2 + \\
& + b \Delta r_k (r_k J_k + r_{k-1} J_{k-1})/2 + \\
& + (\Delta r_k)^2 [(B\beta^{-1}b - b + b\alpha^{-1}A) \Delta J_k + \\
& + (B\beta^{-1} - \Gamma) B \Delta (\varphi/r)_k + b\alpha^{-1} a \Delta (r\varphi)_k]/12 = \\
& = \bar{F} + (\Delta r_k)^2 [b\alpha^{-1} \Delta (rf)_k + (B\beta^{-1} - \Gamma) \Delta F_k]/12.
\end{aligned} \right\} (7.3.4)$$

Система (7.3.4) аппроксимирует дифференциальные уравнения (6.3.10), (6.3.11) с точностью  $O((\Delta r_k)^4)$ , если  $\varphi, J \in C_5[r_{k-1}, r_k]$ .

Систему (7.3.2) или (7.3.4) необходимо дополнить уравнениями краевых условий (7.1.6). Из систем (7.3.2), (7.3.4) можно так же, как это делалось для плоской геометрии, исключить неизвестные  $J_k$  и получить системы уравнений типа (7.1.13) только для вектор-функции  $\varphi_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ .

#### § 7.4. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА $P_1$ -ПРИБЛИЖЕНИЯ И ДИФФУЗИИ ДЛЯ ПЛОСКОЙ, СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этом параграфе мы получим разностные уравнения повышенной точности, аппроксимирующие дифференциальные уравнения типа  $P_1$ -приближения метода сферических гармоник. Дифференциальные уравнения, подлежащие аппроксимации, совпадают с  $P_1$ -уравнениями, если положить входящий в них параметр  $g$  равным 1. Параметром  $g$  мы будем впоследствии распорядиться в операции  $P$   $KP$ -метода. Коэффициенты уравнений считаем кусочно-постоянными, а сетку строим так, чтобы она включала все точки разрыва коэффициентов. Разностные уравнения, в которых функции  $w, v$  аппроксимируют соответственно нулевой и первый моменты от решения кинетического уравнения, получим лишь для двух соседних сеточных точек, не оговаривая это каждый раз особо. В них  $f_0, f_1$  — нулевой и первый моменты от источника, а  $\Delta x_k$  или  $\Delta r_k$  — шаг сетки.

##### 1. Плоская геометрия

Уравнения

$$\frac{dw}{dx} + \Sigma_0 w = f_0; \quad \frac{g}{3} \frac{dw}{dx} + \Sigma_1 v = f_1 \quad (7.4.1)$$

проинтегрируем по отрезку  $[x_{k-1}, x_k]$ , а затем интегралы заменим квадратурой (7.1.4). Тогда с точностью  $O((\Delta x_k)^5)$  для достаточно гладких функций  $w, v$  [см. (7.1.4)] получим

$$\left. \begin{aligned} v_k - v_{k-1} + \Sigma_0 \left[ \Delta x_k (\omega_k + \omega_{k-1})/2 + \right. \\ \left. + (\Delta x_k)^2 \left( \left( \frac{dw}{dx} \right)_{k-1} - \left( \frac{dw}{dx} \right)_k \right) / 12 \right] = \bar{f}_0; \\ g(\omega_k - \omega_{k-1})/3 + \Sigma_1 \left[ \Delta x_k (v_k + v_{k-1})/2 + \right. \\ \left. + (\Delta x_k)^2 \left( \left( \frac{dv}{dx} \right)_{k-1} - \left( \frac{dv}{dx} \right)_k \right) / 12 \right] = \bar{f}_1, \end{aligned} \right\} \quad (7.4.2)$$

где  $\bar{f}_i = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_i dx$ ,  $i = 0, 1$ .

Если значения производных в (7.4.2) выразить из уравнений (7.4.1), получим следующую систему двухточечных уравнений повышенной точности:

$$\left. \begin{aligned} P\Delta v_k + \Sigma_0 \Delta x_k (\omega_k + \omega_{k-1})/2 = F_0; \\ gP\Delta \omega_k/3 + \Sigma_1 \Delta x_k (v_k + v_{k-1})/2 = F_1, \end{aligned} \right\} \quad (7.4.3)$$

где

$$\begin{aligned} F_0 &= \bar{f}_0 + \Sigma_0 (\Delta x_k)^2 \Delta f_{1k}/4g; \\ F_1 &= \bar{f}_1 + \Sigma_1 (\Delta x_k)^2 \Delta f_{0k}/12; \quad P = 1 + \Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta x_k)^2/4g. \end{aligned}$$

К системе уравнений (7.4.3) добавим два уравнения краевых условий

$$c' v_0 + d' \omega_0 = \psi'; \quad c'' v_N + d'' \omega_N = \psi''. \quad (7.4.4)$$

Иногда бывает полезно исключить из системы уравнений (7.4.3), (7.4.4) функцию  $v$  и получить трехточечное разностное уравнение диффузионного типа только для функции  $\omega$ . Найдем вид этого уравнения. Выразим  $v_k$ ,  $v_{k-1}$  через  $\omega_k$ ,  $\omega_{k-1}$ :

$$\begin{aligned} v_k &= P_k^{-1/2} (F_{0, k-1/2} - \Sigma_{0, k-1/2} \Delta x_k (\omega_k + \omega_{k-1})/2)/2 + \\ &+ (1/\Sigma_{1, k-1/2} \Delta x_k) (F_{1, k-1/2} - gP_{k-1/2} \Delta \omega_k/3); \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

$$\begin{aligned} v_{k-1} &= -P_k^{-1/2} (F_{0, k-1/2} - \Sigma_{0, k-1/2} \Delta x_k (\omega_k + \omega_{k-1})/2)/2 + \\ &+ (1/\Sigma_{1, k-1/2} \Delta x_k) (F_{1, k-1/2} - gP_{k-1/2} \Delta \omega_k/3). \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Пусть  $0 < k < N$ . Тогда, заменяя в (7.4.6)  $k - 1$  на  $k$ , получаем выражение для  $v_k$  через величины, определенные на отрезке  $[x_k, x_{k+1}]$ ; приравняв его правой части равенства (7.4.5), получаем уравнение для  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{-gP_{k+1/2} \Delta \omega_{k+1}}{3\Sigma_{1, k+1/2} \Delta x_{k+1}} + \frac{gP_{k-1/2} \Delta \omega_k}{3\Sigma_{1, k-1/2} \Delta x_k} + \frac{\Sigma_{0, k+1/2} \Delta x_{k+1}}{2P_{k+1/2}} (\omega_{k+1} + \omega_k) + \\ + \frac{\Sigma_{0, k-1/2} \Delta x_k}{2P_{k-1/2}} (\omega_k + \omega_{k-1}) = \frac{F_{1, k-1/2}}{\Sigma_{1, k-1/2} \Delta x_k} - \frac{F_{1, k+1/2}}{\Sigma_{1, k+1/2} \Delta x_{k+1}} + \\ + (P_{k-1/2}^{-1} F_{0, k-1/2} + P_{k+1/2}^{-1} F_{0, k+1/2})/2. \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

Учитывая второе уравнение (7.4.4) и уравнение (7.4.5), при  $k = N$  имеем

$$d'' \omega_N - c'' \left( \frac{\Sigma_{0, N-1/2} \Delta x_N}{4P_{N-1/2}} (\omega_N + \omega_{N-1}) + \frac{gP_{N-1/2}}{3\Sigma_{1, N-1/2} \Delta x_N} \Delta \omega_N \right) = \\ = \psi'' - c'' \left( \frac{F_{0, N-1/2}}{2P_{N-1/2}} + \frac{F_{1, N-1/2}}{\Sigma_{1, N-1/2} \Delta x_N} \right), \quad (7.4.8)$$

а учитывая первое уравнение (7.4.4) и уравнение (7.4.6), при  $k = 1$  получаем

$$d' \omega_0 + c' \left( \frac{\Sigma_{0, 1/2} \Delta x_1}{4P_{1/2}} (\omega_0 + \omega_1) - \frac{gP_{1/2}}{3\Sigma_{1, 1/2} \Delta x_1} \Delta \omega_1 \right) = \\ = \psi' + c' \left( \frac{F_{0, 1/2}}{2P_{1/2}} - \frac{F_{1, 1/2}}{\Sigma_{1, 1/2} \Delta x_1} \right). \quad (7.4.9)$$

Таким образом, получили трехточечную систему уравнений (7.4.7)—(7.4.9), в которой краевые условия (7.4.4) учтены точно; ее можно решать методом факторизации.

Система (7.4.7)—(7.4.9) обладает одним неприятным свойством: ее нельзя непосредственно использовать, когда  $\Sigma_j$  равняется нулю на некоторых отрезках. Чтобы избежать этого неудобства, следует каждое уравнение (7.4.7) умножить на  $\Sigma_{1, k-1/2} \Sigma_{1, k+1/2}$ , уравнение (7.4.8) — на  $\Sigma_{1, N-1/2}$ , а (7.4.9)—на  $\Sigma_{1, 1/2}$ . Исходная система уравнений (7.4.3), (7.4.4) избавлена от этого недостатка.

Систему дифференциальных уравнений (7.4.1) можно использовать для решения уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами, имеющих вид

$$-\frac{g}{3} \frac{d}{dx} D \frac{d\varphi}{dx} + \Sigma_0 \varphi = f_0 - \frac{d}{dx} \psi, \quad (7.4.10)$$

если в уравнениях (7.4.1) положить  $\Sigma_1 = D^{-1}$ , а  $f_1 = \Sigma_1 \psi$ . Тогда системы (7.4.3), (7.4.7) будут системами разностных уравнений повышенного порядка точности для решения (7.4.10).

## 2. Сферическая геометрия

Получим разностные уравнения, аппроксимирующие на отрезке  $[0, R]$  систему дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 v + \Sigma_0 \omega = f_0; \quad \frac{g}{3} \frac{d}{dr} \omega + \Sigma_1 v = f_1, \quad (7.4.11)$$

в которой  $v(0) = 0$  и  $cv(R) + dw(R) = \psi$ . Умножим первое уравнение (7.4.11) на  $r^2$ , второе на 1 и проинтегрируем по отрезку  $[r_{k-1}, r_k]$ . Пользуясь формулой интегрирования по частям, получим

$$\Delta(r^2 v)_k + \Sigma_0 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \omega r^2 dr = \bar{f}_0; \quad \frac{g}{3} \Delta \omega_k + \Sigma_1 \int_{r_{k-1}}^{r_k} v dr = \bar{f}_1, \quad (7.4.12)$$

$$\text{где } \bar{f}_0 = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_0 r^2 dr; \bar{f}_1 = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_1 dr.$$

Применяя квадратуру Эйлера (7.1.4), находим

$$\Delta(r^2 v)_k + \Sigma_0 [\Delta r_k (r_k^2 \omega_k + r_{k-1}^2 \omega_{k-1})/2 - (\Delta r_k)^2 (2\Delta(r\omega)_k + \Delta(r^2 d\omega/dr)_k)/12] = \bar{f}_0;$$

$$g\Delta\omega_k/3 + \Sigma_1 [\Delta r_k (v_k + v_{k-1})/2 - (\Delta r_k)^2 \Delta(dv/dr)_k/12] = \bar{f}_1.$$

В этих уравнениях выразим  $d\omega/dr$ ,  $dv/dr$  через  $\omega$ ,  $v$  из уравнений (7.4.11):

$$d\omega/dr = 3(f_1 - \Sigma_1 v)/g; \quad dv/dr = f_0 - \Sigma_0 \omega - 2v/r.$$

В результате получим

$$\left. \begin{aligned} P\Delta(r^2 v)_k + \Sigma_0 \Delta r_k (r_k^2 \omega_k + r_{k-1}^2 \omega_{k-1} - \Delta r_k \Delta(r\omega)_k/3)/2 = \\ = \bar{f}_0 + \Sigma_0 (\Delta r_k)^3 \Delta(r^2 f_1)_k/4g; \\ gP\Delta\omega_k/3 + \Sigma_1 \Delta r_k (v_k + v_{k-1} + (\Delta r_k/3) \Delta(v/r)_k)/2 = \\ = \bar{f}_1 + (\Delta r_k)^2 (\Sigma_1 \Delta(f_0)_k)/12, \end{aligned} \right\} (7.4.13)$$

где  $P = 1 + \Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta r_k)^2 / (4g)$ ;  $(v/r)_0 = (f_0 - \Sigma_0 \omega)_0/3$ .

К системе уравнений (7.4.13) добавим второе уравнение (7.4.4) краевых условий и потребуем, чтобы  $v_0 = v(0) = 0$ . Уравнения (7.4.13) аппроксимируют с точностью  $O((\Delta r_k)^4)$  дифференциальные уравнения, если  $\omega, v \in C_5[r_{k-1}, r_k]$ . Так же, как и для плоской геометрии, из уравнений (7.4.13) можно исключить функции  $v$  и получить трехточечное разностное уравнение диффузионного типа для функции  $\omega$ , аппроксимирующее диффузионное уравнение второго порядка

$$-\frac{g}{3r^2} \frac{d}{dr} r^2 D \frac{d}{dr} \omega + \Sigma_0 \omega = f_0 - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \psi \quad (7.4.14)$$

при  $\Sigma_1 = D^{-1}$ ,  $f_1 = \Sigma_1 \psi$ . Не будем повторять выкладки, они очевидны.

### 3. Цилиндрическая геометрия

Получим разностные уравнения, аппроксимирующие на отрезке  $[0, R]$  систему дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r v + \Sigma_0 \omega = f_0; \quad \frac{g}{3} \frac{d\omega}{dr} + \Sigma_1 v = f_1. \quad (7.4.15)$$

Для системы (7.4.15) ставится на отрезке  $[0, R]$  краевая задача, в которой краевое условие при  $r = 0$  имеет вид

$$v(0) = 0, \quad (7.4.16)$$

или

$$\left. \frac{d\omega}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (7.4.17)$$

При естественном для физических задач предположении

$$\dot{f}_1(0) = 0 \quad (7.4.18)$$

для решений (7.4.15) из условий (7.4.16), (7.4.18) следует (7.4.17), а из (7.4.17), (7.4.18) следует (7.4.16), если  $\Sigma_1(0) \neq 0$ . Предположим, что краевое условие при  $r = 0$  задано в виде (7.4.16) и выполнено условие (7.4.18).

Тогда, поскольку будет выполнено и условие (7.4.17), предположим, что  $\omega(r)$  является четной функцией по  $r$ , и поэтому на каждом отрезке  $[r_{k-1}, r_k]$  будем приближать  $\omega(r)$  линейной комбинацией лишь четных степеней  $r$ . Заметим, что в силу теоремы Мюнтца [25] система  $\{r^{2i}\}$  является полной в пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке  $[r_{k-1}, r_k]$ . Использование ее для построения разностных уравнений для системы (7.4.15) позволит получить новые по сравнению с построенными в § 7.3 разностные уравнения повышенной точности, имеющие более простой для разбираемого случая вид, решения которых более точно отражают свойства решений (7.4.15) в окрестности точки  $r = 0$ .

Для отрезка  $[r_{k-1}, r_k]$  построим четный интерполяционный многочлен шестой степени для функции  $\omega$ , для которого значения его и производных по  $r$  от него на концах отрезка совпадают со значениями  $\omega(r)$  и  $\frac{d\omega}{dr}$  при  $r = r_{k-1}, r_k$ . Этот многочлен имеет вид

$$\begin{aligned} P_6(\omega, r) = & \omega_{k-1} + \frac{1}{2r_{k-1}} \omega'_{k-1} (r^2 - r_{k-1}^2) + \\ & + \left[ \frac{3}{\Delta r_k^2} (\omega_k - \omega_{k-1}) - \frac{\omega'_k}{2r_k} - \frac{\omega'_{k-1}}{r_{k-1}} \right] \frac{(r^2 - r_{k-1}^2)^2}{\Delta r_k^2} + \\ & + \left[ \frac{\omega'_k}{r_k} + \frac{\omega'_{k-1}}{r_{k-1}} - \frac{4}{\Delta r_k^2} (\omega_k - \omega_{k-1}) \right] \frac{(r^2 - r_{k-1}^2)^3}{2(\Delta r_k^2)^2}. \end{aligned}$$

Тогда можно проверить, что

$$\int_{r_{k-1}}^{r_k} P_6(\omega, r) r dr = \frac{\Delta r_k^2}{4} \left( \omega_k + \omega_{k-1} + \frac{\Delta r_k^2}{12} \left( \frac{1}{r_{k-1}} \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_{k-1} - \frac{1}{r_k} \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_k \right) \right), \quad (7.4.19)$$

где  $\Delta r_k^2 = r_k^2 - r_{k-1}^2$ . Формула (7.4.19) при  $\omega(\sqrt[5]{\xi}) \in C_5[r_{k-1}^2, r_k^2]$

дает с точностью  $O((\Delta r_k^2)^5)$  значение интеграла  $\int_{r_{k-1}}^{r_k} \omega r dr$ . Формулой

(7.4.19) воспользуемся при выводе разностных уравнений. С этой целью умножим первое уравнение (7.4.15) на  $r$ , второе на 1 и проинтегрируем полученные уравнения по отрезку  $[r_{k-1}, r_k]$ . Тогда

$$\Delta(\dot{r}\omega)_k + \Sigma_0 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \omega r dr = \bar{f}_0; \quad \frac{g}{3} \Delta\omega_k + \Sigma_1 \int_{r_{k-1}}^{r_k} v dr = \bar{f}_1, \quad (7.4.20)$$

где  $\bar{f}_0 = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_0 r dr$ ;  $\bar{f}_1 = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f_1 dr$ . Пусть  $r_{k-1} > 0$ . Заменим  $\int_{r_{k-1}}^{r_k} \omega r dr$  на  $\int_{r_{k-1}}^{r_k} P_6(\omega, r) r dr$ , а  $\int_{r_{k-1}}^{r_k} v dr$  — квадратурой Эйлера (7.1.4). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta(rv)_k + \frac{\Sigma_0 \Delta r_k^2}{4} \left( \omega_k + \omega_{k-1} - \frac{\Delta r_k^2}{12} \Delta \left( \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right)_k \right) &= \bar{f}_0; \\ \frac{g}{3} \Delta \omega_k + \frac{\Sigma_1 \Delta r_k}{2} \left( v_k + v_{k-1} - \frac{\Delta r_k}{6} \Delta \left( \frac{dv}{dr} \right)_k \right) &= \bar{f}_1. \end{aligned} \right\} (7.4.21)$$

Производные в уравнениях (7.4.21) выразим через  $\omega, v$  из уравнений (7.4.15):

$$\left. \begin{aligned} \left( r_k + \frac{\Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta r_k^2)^2}{16gr_k} \right) v_k - \left( r_{k-1} + \frac{\Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta r_k^2)^2}{16gr_{k-1}} \right) v_{k-1} + \\ + \frac{\Sigma_0 \Delta r_k^2}{4} (\omega_k + \omega_{k-1}) &= F_0; \\ \frac{\Sigma_1 \Delta r_k}{2} \left( 1 + \frac{\Delta r_k}{6r_k} \right) v_k + \frac{\Sigma_1 \Delta r_k}{2} \left( 1 - \frac{\Delta r_k}{6r_{k-1}} \right) v_{k-1} + \\ + \left( \frac{g}{3} + \frac{\Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta r_k)^2}{12} \right) \Delta \omega_k &= F_1, \end{aligned} \right\} (7.4.22)$$

где

$$F_0 = \bar{f}_0 + \frac{\Sigma_0 (\Delta r_k^2)^2}{16g} \Delta \left( \frac{f_1}{r} \right)_k; \quad F_1 = \bar{f}_1 + \frac{\Sigma_1 (\Delta r_k)^2}{12} \Delta (f_0)_k.$$

Отдельно разберем случай  $k = 1$ ; функцию  $\omega(r)$  приблизим четным интерполяционным многочленом четвертой степени  $P_4(\omega, r)$ , значения которого при  $r = 0, r = r_1$  совпадают со значениями  $\omega$  и  $\frac{d\omega}{dr}$  в этих точках. Многочлен  $P_4(\omega, r)$  имеет вид

$$P_4(\omega, r) = \omega(0) + br^2 + cr^4,$$

где

$$\begin{aligned} b &= (\Delta r_1)^{-1} \left( \frac{2}{\Delta r_1} (\omega_1 - \omega_0) - \frac{1}{2} \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_1 \right); \\ c &= (\Delta r_1)^{-3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_1 - (\omega_1 - \omega_0) (\Delta r_1)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\int_0^{r_1} P_4(\omega, r) r dr = \frac{(\Delta r_1)^2}{6} \left( 2\omega_1 + \omega_0 - \frac{\Delta r_1}{4} \left( \frac{d\omega}{dr} \right)_1 \right). \quad (7.4.23)$$

Еще нам потребуется формула для  $\frac{dv}{dr}$  при  $r = 0$ . Из первого уравнения (7.4.15) получаем

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = f_0(0) - \Sigma_0 \omega(0),$$

$$\text{но } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 2 \frac{dv}{dr} \Big|_{r=0}, \text{ следовательно,}$$

$$\left( \frac{dv}{dr} \right)_0 = \frac{1}{2} (f_{00} - \Sigma_0 \omega_0), \quad (7.4.24)$$

где  $f_{00} = f_0(0)$ .

Итак, в формулах (7.4.20) интеграл  $\int_{r_{k-1}}^{r_k} wrdr$  заменяем формулой (7.4.23), интеграл  $\int_{r_{k-1}}^{r_k} vdr$  — формулой Эйлера (7.1.4), считая  $v_0 = 0$ . Производные, входящие в квадратуры, выражаем в точке  $r = r_1$  через функции  $\omega_1, v_1$ , пользуясь уравнениями (7.4.15), а в точке  $r = r_0$  выражаем их по формулам (7.4.17), (7.4.24). В результате получаем разностные уравнения для  $[0, r_1]$ :

$$\left. \begin{aligned} (r_1 + \Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta r_1)^3 / (8g)) v_1 + \Sigma_0 (\Delta r_1)^2 (2\omega_1 + \omega_0) / 6 = \\ = \bar{f}_0 + \Sigma_0 (\Delta r_1)^3 f_{11} / (8g); \\ (g/3 + \Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta r_1)^2 / 12) \omega_1 - (g/3 + \Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta r_1)^2 / 24) \omega_0 + \\ + 7 \Sigma_1 \Delta r_1 v_1 / 12 = \bar{f}_1 + \Sigma_1 (\Delta r_1)^2 (f_{01} - f_{00} / 2) / 12, \end{aligned} \right\} (7.4.25)$$

где  $f_{11} = f_1(r_1)$ ;  $f_{01} = f_0(r_1)$ .

К системе уравнений (7.4.16), (7.4.22), (7.4.25) добавим второе уравнение (7.4.4) краевых условий.

Из уравнений (7.4.22), (7.4.25) можно исключить функции  $v_k$  и получить трехточечное разностное уравнение диффузионного типа для уравнения второго порядка:

$$-\frac{g}{3r} \frac{d}{dr} rD \frac{d\omega}{dr} + \Sigma_0 \omega = f_0 - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r\psi \quad (7.4.26)$$

при  $\Sigma_1 = D^{-1}$ ;  $f_1 = \Sigma_1 \psi$ .

Заметим, что первые уравнения систем разностных уравнений для всех геометрий являются разностными аналогами уравнения баланса. Следовательно, для уравнений диффузионного типа (7.4.10), (7.4.14), (7.4.26) при выбранной для них разностной аппроксимации абсолютно точно выполняется на решениях этих уравнений разностный аналог баланса нейтронов. Это обстоятельство часто бывает важным при проведении практических расчетов. Указанные схемы имеют один и тот же вид для непрерывных и разрывных кусочно-постоянных коэффициентов; в них граничные условия первого, второго и третьего рода учитываются точно.

## § 7.5. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ

Для решения одномерных уравнений эффективным оказался метод факторизации. Достаточно полно этот метод изложен в работах В. С. Владимирова [39], И. М. Гельфанда, О. В. Локуциевского [56], С. К. Годунова [64], В. К. Саульева [209], Э. Айнса [14], Р. Д. Рихтмайера [198] (а также [161, 162]) и многих других.

В сущности, метод факторизации или прогонки, применяемый для решения сеточных уравнений, например вида

$$-A_k \varphi_{k+1} + B_k \varphi_k - C_k \varphi_{k-1} = D_k, \quad A_N = C_0 = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (7.5.1)$$

является методом исключения неизвестных Гаусса [233] для решения систем линейных алгебраических уравнений специального вида, характерного для сеточных задач математической физики: в каждой строке матрицы системы имеется лишь определенное, не зависящее от шага сетки количество отличных от нуля элементов.

Решают такую систему методом Гаусса, который делится на два этапа:

1) представление матрицы системы типа (7.5.1) в виде произведения двух треугольных матриц (что соответствует первому шагу факторизации, в котором ввиду малого по сравнению с порядком системы числа отличных от нуля элементов в каждой строке матрицы формулы для элементов треугольных матриц и преобразованных правых частей системы имеют простой рекуррентный вид);

2) нахождение решения системы с треугольной матрицей, в которой лишь малое по сравнению с порядком системы число элементов отлично от нуля (это соответствует второму шагу факторизации).

Число затрачиваемых арифметических действий по порядку равно числу неизвестных в системе типа (7.5.1). В этом и состоит достоинство метода. Различные модификации его вызваны или существованием известных различных вариантов самого метода Гаусса, или различными способами упорядочения неизвестных системы уравнений и строк сеточной матрицы для того, чтобы счет по формулам был устойчив.

Рассмотрим один из вариантов метода факторизации для решения системы (7.5.1) с трехдиагональной матрицей. Системы разностных уравнений вида (7.5.1) возникают при применении метода сеток для решения 1, 2 и 3-й краевых задач для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Интерпретация метода факторизации как реализации метода Гаусса позволит получить единые формулы для всех трех краевых задач. Для этого систему уравнений (7.5.1) запишем в матричном виде

$$K\varphi = D \quad (7.5.2)$$

и представим матрицу  $K$  в виде произведения двух треугольных матриц:  $K = L_1 L_2$ , где потребуем, чтобы верхняя треугольная матрица  $L_2$  имела вид



$$L_2 = \left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & -E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -E_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -E_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Тогда систему (7.5.2) перепишем в виде  $L_2 \varphi = L_1^{-1} D$ .

Первый шаг заключается в вычислении элементов матрицы  $L_2$  и компонент вектора  $F = L_1^{-1} D$ . Нетрудно видеть, что у матрицы  $L_1^{-1}$  ненулевые элементы находятся лишь на главной диагонали и диагонали ниже ее [т. е. на пересечении  $(i-1)$ -го столбца и  $i$ -й строки]. В этом легче всего убедиться, применяя следующий прием [161, 198]. Решение системы (7.5.1) будем искать в виде

$$\varphi_k = E_k \varphi_{k+1} + F_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.5.3)$$

Подставляя формулы (7.5.3) в систему (7.5.1), получаем рекуррентные соотношения для  $E_k$  и  $F_k$ , однозначно их определяющие. Первое уравнение системы (7.5.1), при  $k=0$  учитывающее граничное условие, показывает, что

$$E_0 = B_0^{-1} A_0; \quad F_0 = B_0^{-1} D_0. \quad (7.5.4)$$

Подставляя  $E_{k-1} \varphi_k + F_{k-1}$  в  $k$ -е уравнение вместо  $\varphi_{k-1}$ , получаем соотношение между  $\varphi_k$  и  $\varphi_{k+1}$ :

$$\varphi_k = (B_k - C_k E_{k-1})^{-1} A_k \varphi_{k+1} + (B_k - C_k E_{k-1})^{-1} (D_k + C_k F_{k-1}). \quad (7.5.5)$$

Из формулы (7.5.5) имеем

$$\left. \begin{aligned} E_k &= (B_k - C_k E_{k-1})^{-1} A_k; \quad F_k = (B_k - C_k E_{k-1})^{-1} (D_k + C_k F_{k-1}); \\ 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.6)$$

Равенства (7.5.4), (7.5.6) дают возможность вычислить все значения  $E_k, F_k$  при  $1 \leq k \leq N$ . Вычислив  $E_N, F_N$ , видим (вспомним вид матрицы  $L_2$ ), что

$$\varphi_N = F_N, \quad (7.5.7)$$

а все  $\varphi_k, k = 0, 1, \dots, N-1$ , находятся по формуле (7.5.3).

Пусть

$$A_k \geq 0; \quad C_k \geq 0; \quad B_k > A_k + C_k \quad (k = 0, 1, \dots, N). \quad (7.5.8)$$

Тогда из (7.5.6) в силу неравенства (7.5.8) получаем, что если  $0 \leq E_{k-1} \leq 1$ , то  $0 \leq E_k \leq A_k / (B_k - C_k) < 1$ , а так как из (7.5.4) следует, что  $0 \leq E_0 < 1$ , то  $0 \leq E_k < 1$  для всех  $0 \leq k \leq N$ . Заметим теперь, что если для значений  $\varphi_k$  можно дать какую-нибудь априорную оценку в некоторой норме, то из (7.5.3) следует, что и  $F_k$  будут ограничены в этой норме. Следовательно,  $E_k, F_k$  будут достаточно хорошо расположены на шкале чисел, для того чтобы вести устойчивый счет.

В системе (7.5.1) можно понимать под  $A_k, B_k, C_k$  матрицы некоторого порядка  $n$ , а под  $\varphi_k, D_k$  —  $n$ -мерные векторы; тогда это будут системы уравнений с блочно-трехдиагональной матрицей. Форму-

лы (7.5.3), (7.5.4), (7.5.6), (7.5.7) дают один из методов решения ее, называемый матричной факторизацией [161].

Другой идеей (см. [14, 56, 161]), побудившей сделать выбор формул и специальных методов исследования свойств метода прогонки, является идея факторизации дифференциальных уравнений (см. Кели [263], Айнс [14], Сансоне [208]). Проиллюстрируем ее на примере дифференциального уравнения второго порядка. На отрезке  $[a, b]$  найдем решение уравнения

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + p(x) \frac{d\varphi}{dx} + q(x) \varphi = f(x) \quad (7.5.9)$$

при условиях

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \text{ при } x = a; \varphi = 0 \text{ при } x = b. \quad (7.5.10)$$

Для решения этой задачи представим оператор  $\frac{d^2}{dx^2} + p \frac{d}{dx} + q$  в виде произведения  $L_1 L_2$  двух операторов первого порядка:  $L_1 = \frac{d}{dx} + \alpha$  и  $L_2 = \frac{d}{dx} + \beta$ . Поскольку  $L_1 L_2 = \frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + \beta) \frac{d}{dx} + (\frac{d\beta}{dx} + \alpha\beta)$ , задача факторизации сводится к отысканию таких функций  $\alpha$  и  $\beta$ , что

$$\frac{d\beta}{dx} = \beta^2 - p\beta + q, \quad \alpha = p - \beta. \quad (7.5.11)$$

Можно показать [208], что для существования искомого разложения с действительными символическими множителями необходимо и достаточно, чтобы существовало решение однородного уравнения (7.5.9), не обращающееся в нуль ни в одной точке отрезка  $[a, b]$ . Пусть требуемое разложение возможно (оно не единственно) и пусть  $z = L_2 \varphi$ . Тогда уравнение (7.5.9) сведется к эквивалентной системе уравнений первого порядка:

$$\frac{d\beta}{dx} = \beta^2 - p\beta + q; \quad \frac{dz}{dx} + (p - \beta)z = f; \quad \frac{d\varphi}{dx} + \beta\varphi = z. \quad (7.5.12)$$

Эту систему назовем факторизованной. Условия (7.5.10) будут удовлетворены, если положить

$$\beta(a) = 0; \quad z(a) = 0; \quad \varphi(b) = 0. \quad (7.5.13)$$

Таким образом, мы пришли к эквивалентной задаче (7.5.12), (7.5.13), которая может быть решена последовательно: сначала находят функцию  $\beta(x)$ , затем  $z(x)$  и, наконец, функцию  $\varphi(x)$ .

Системы (7.5.12), (7.5.13) могут быть решены с помощью известных конечно-разностных методов. При этом расчет функций  $\beta$  и  $z$  следует вести от узла к узлу в сторону возрастающих значений  $x$  (прямой ход), а расчет функции  $\varphi$  — в сторону убывающих значений  $x$  (обратный ход).

Достоинством изложенного взгляда на прогонку является то, что мы имеем некоторый непрерывный аналог (замыкание вычислительно-

го алгоритма по С. Л. Соболеву [219]) тех операций, которые производим в дискретном случае. Поэтому многие вопросы корректности счета можно исследовать, руководствуясь непрерывной моделью.

### § 7.6. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ $P_n$ -УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Для одномерных задач были получены системы дифференциальных уравнений метода сферических гармоник (см. § 6.2, 6.3); для этих уравнений в § 7.1—7.3 были построены конечно-разностные уравнения, которые требуется решить одним из методов линейной алгебры. Запишем эти системы уравнений в матричном виде. Введем следующие обозначения. На отрезке интегрирования (пусть это будет, например, отрезок  $[0, R]$ ) точки  $r_k$ ,  $0 \leq r_k \leq R$ , обозначают точки сетки,  $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $0 = r_0 \leq r_{k-1} < r_k \leq r_n = R$ . Пусть значениям вектор-функций  $J, \varphi$  в точке  $r_k$  отвечает индекс  $k$ . Тогда системы уравнений, аппроксимирующие  $P_n$ -уравнения на отрезке  $[r_{k-1}, r_k]$ , запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} a_k J_{k-1} + \alpha_k J_k - b_k \varphi_{k-1} + \beta_k \varphi_k &= \psi_k; \\ -\gamma_k J_{k-1} + c_k J_k + \delta_k \varphi_{k-1} + d_k \varphi_k &= F_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.1)$$

Краевое условие при  $r = 0$  имеет вид

$$J_0 + d_0 \varphi_0 = F_0, \quad (7.6.2)$$

а краевое условие при  $r = R$

$$a_{n+1} J_n - b_{n+1} \varphi_n = \psi_{n+1}. \quad (7.6.3)$$

Здесь  $J_k, \varphi_k, \psi_k, F_k$  — векторы, а  $a_k, \alpha_k, b_k, \beta_k, c_k, \gamma_k, \delta_k, d_k$  — матрицы; их порядки определяются  $P_n$ -приближением. Условимся, что первые уравнения (7.6.1) аппроксимируют уравнения для нечетных моментов, а вторые — для четных.

Решение системы уравнений (7.6.1)—(7.6.3) можно получить, используя предварительное преобразование этой системы, состоящее в исключении из нее неизвестных  $J_k$  (см., например, § 7.1). После исключения получим систему матричных трехточечных уравнений для вектор-функций  $\varphi_k$  типа (7.1.14), которые можно решить методом, описанным в § 7.5. Кроме того, можно получить формулы прогонки непосредственно для системы (7.6.1)—(7.6.3), не производя исключения  $J_k$ . В работе Т. А. Гермогеновой [58] содержится вывод формул прогонки такого типа, основанный на принципе инвариантности. Мы получим формулы прогонки, основанные на приведении системы к треугольной блочно-двухдиагональной матрице и позволяющие в тех случаях, когда необходимо вычислять лишь вектор  $\varphi$ , экономить память ЭВМ. Полученные формулы дают возможность исследовать устойчивость.

Решение задачи (7.6.1)—(7.6.3) будем искать в виде

$$\varphi_k = E_{k+1} \varphi_{k+1} + g_{k+1}; \quad J_k = M_k \varphi_k - N_k, \quad (7.6.4)$$

где  $E_{k+1}$ ,  $M_k$  ( $k = 0, \dots, n$ ) — матрицы, а  $g_{k+1}$ ,  $N_k$  — векторы, которые следует определить через  $E_k$ ,  $g_k$ ,  $M_{k-1}$ ,  $N_{k-1}$ . Учитывая уравнение (7.6.2), видим, что

$$M_0 = -d_0; N_0 = F_0. \quad (7.6.5)$$

Подставляя значения  $J_{k-1}$ ,  $J_k$ , выраженные по формуле (7.6.4), в уравнение (7.6.1), получаем

$$\begin{aligned} (a_k M_{k-1} - b_k) \varphi_{k-1} + (\alpha_k M_k + \beta_k) \varphi_k &= \psi_k - a_k N_{k-1} - \alpha_k N_k; \\ (-\gamma_k M_{k-1} + \delta_k) \varphi_{k-1} + (c_k M_k + d_k) \varphi_k &= F_k + \gamma_k N_{k-1} - c_k N_k. \end{aligned}$$

А учитывая, что  $\varphi_{k-1} = E_k \varphi_k + g_k$ , приходим к двум системам уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a_k M_{k-1} - b_k) E_k + \alpha_k M_k &= -\beta_k; \\ (-\gamma_k M_{k-1} + \delta_k) E_k + c_k M_k &= -d_k; \end{aligned} \right\} \quad (7.6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} (a_k M_{k-1} - b_k) g_k + \alpha_k N_k &= \psi_k - a_k N_{k-1}; \\ (-\gamma_k M_{k-1} + \delta_k) g_k + c_k N_k &= F_k + \gamma_k N_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.6.7)$$

Умножая слева второе уравнение (7.6.6) на  $\alpha_k c_k^{-1}$  и вычитая его из первого, получаем  $E_k$ :

$$\left. \begin{aligned} E_k &= U_k [\beta_k - \alpha_k c_k^{-1} d_k]; \\ U_k &= [b_k - a_k M_{k-1} + \alpha_k c_k^{-1} (\delta_k - \gamma_k M_{k-1})]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.8)$$

Аналогично, умножая слева первое уравнение (7.6.6) на  $(-\gamma_k M_k + \delta_k) (a_k M_k - b_k)^{-1}$  и вычитая результат из другого, получаем

$$\left. \begin{aligned} M_k &= -T_k [(\delta_k - \gamma_k M_{k-1}) (b_k - a_k M_{k-1})^{-1} \beta_k + d_k]; \\ T_k &= [(\delta_k - \gamma_k M_{k-1}) (b_k - a_k M_{k-1})^{-1} \alpha_k + c_k]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.9)$$

Решая таким же способом систему (7.6.7), находим

$$g_k = U_k [\alpha_k c_k^{-1} (F_k + \gamma_k N_{k-1}) - (\psi_k - a_k N_{k-1})]; \quad (7.6.10)$$

$$\begin{aligned} N_k &= T_k [(\delta_k - \gamma_k M_{k-1}) (b_k - a_k M_{k-1})^{-1} (\psi_k - a_k N_{k-1}) + \\ &+ (F_k + \gamma_k N_{k-1})]. \end{aligned} \quad (7.6.11)$$

Формулы (7.6.8)—(7.6.11) позволяют последовательно найти все  $E_k$ ,  $M_k$ ,  $g_k$ ,  $N_k$  при  $k = 1, \dots, n$ . В частности, при  $k = n$  имеем

$$J_n = M_n \varphi_n + N_n. \quad (7.6.12)$$

Подставляя это равенство в (7.6.3), получаем уравнение для определения  $\varphi_n$ :

$$\varphi_n = (a_{n+1} M_n - b_{n+1})^{-1} (\psi_{n+1} - a_{n+1} N_n). \quad (7.6.13)$$

Вычислив  $\varphi_n$ , по формуле (7.6.4) определяем  $\varphi_k$ ,  $J_k$  при  $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ . Задача решена.

Удобством формул (7.6.5), (7.6.8)—(7.6.13) является то, что если требуется вычислить только функцию  $\varphi$ , то нет необходимости в этом случае хранить в памяти ЭВМ все пары  $(M_k, N_k)$  при  $k = 0, \dots, n$ ; достаточно хранить одновременно лишь одну пару  $(M_k, N_k)$ , а новую

пару  $(M_{h+1}, N_{h+1})$  засылать на место старой после вычисления  $E_{k+1}, M_{k+1}$ . Для этого следует установить следующий порядок вычисления величин:  $E_k, g_k, N_k, M_k$ .

### § 7.7. УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ $P_1$ -ПРИБЛИЖЕНИЯ

Исследуем устойчивость счета по полученным в § 7.6 формулам  $P_1$ -приближения. В этом случае вместо матриц и векторов имеем дело в формулах (7.6.5), (7.6.8)—(7.6.12) со скалярными величинами. Формулы перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_k &= S_k (\beta_k c_k - \alpha_k d_k); \\ g_k &= S_k (\alpha_k (F_k + \gamma_k N_{k-1}) - c_k (\psi_k - a_k N_{k-1})); \\ N_k &= S_k ((b_k - a_k M_{k-1})(F_k + \gamma_k N_{k-1}) + \\ &+ (\delta_k - \gamma_k M_{k-1})(\psi_k - a_k N_{k-1})); \\ M_k &= -S_k (d_k (b_k - a_k M_{k-1}) + \beta_k (\delta_k - \gamma_k M_{k-1})), \end{aligned} \right\} \quad (7.7.1)$$

где

$$S_k = (c_k (b_k - a_k M_{k-1}) + \alpha_k (\delta_k - \gamma_k M_{k-1}))^{-1}.$$

Начнем с установления границ изменения величин  $E_k, M_k$ . Для этого наложим разумные ограничения на коэффициенты  $a_k, \alpha_k, b_k, \beta_k, c_k, \gamma_k, d_k, \delta_k$ . Предположим, что  $b_k, \beta_k, c_k, \gamma_k > 0$ , а  $a_k, \alpha_k, d_k, \delta_k \geq 0$ . Далее, пусть  $h = 0$  ( $n^{-1}$ ) — средний шаг сетки, а

$$\left. \begin{aligned} \tau_k &= 1 - (c_k (b_k - \beta_k) + \alpha_k (d_k + \delta_k)) \omega_k; \\ \omega_k &= (b_k c_k + \alpha_k \delta_k)^{-1}; \\ A_k &= (\beta_k \delta_k + b_k d_k) / (\beta_k \gamma_k + a_k d_k); \\ B_k &= (\alpha_k \gamma_k + a_k c_k) \omega_k; \\ Q_k &= (\beta_k \gamma_k + a_k d_k) \omega_k. \end{aligned} \right\} \quad (7.7.2)$$

Коэффициенты системы (7.6.1)—(7.6.3) для  $P_1$ -приближения таковы, что величины  $a_k, \alpha_k, \delta_k, d_k$  малы по сравнению с  $b_k, \beta_k, \gamma_k, c_k$  в среднем в  $O(h^{-1})$  раз и что, за исключением конечного, не зависящего от  $h$  числа значений индекса  $k$ , величины  $b_k - \beta_k, \gamma_k - c_k$  имеют порядок  $O(h)$ , а  $a_k - \alpha_k, \delta_k - d_k$  — порядок  $O(h^2)$ . Мы явно не используем последние замечания о коэффициентах, но они будут полезны для дальнейших уточнений некоторых оценок. Будем обозначать  $C_i$  не зависящие от  $N$  положительные постоянные. Перепишем в новых переменных формулы для  $E_k, M_k$ :

$$E_k = \tau_k / (1 - B_k M_{k-1}); \quad M_k = f_k(M_{k-1}), \quad (7.7.3)$$

где

$$f_k(M) = Q_k (M - A_k) / (1 - B_k M). \quad (7.7.4)$$

Наложим теперь еще одно ограничение на коэффициенты. Потребуем, чтобы выполнялись неравенства

$$|\tau_k| < C_1, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (7.7.5)$$

и чтобы

$$|\tau_k| < 1 + C_2 n^{-1} \quad (7.7.6)$$

для всех  $0 \leq k \leq n$ , за исключением конечного, не зависящего от  $n$ , числа значений индекса  $k$ . Нетрудно убедиться в том, что при ограничениях (7.7.5), (7.7.6) имеет место неравенство

$$\max_i \left| \prod_{k=i}^N \tau_k \right| < C_3. \quad (7.7.7)$$

Исследования устойчивости факторизации начнем с анализа устойчивости обратного хода. Итак, пусть  $E_k, M_k, g_k, N_k$  заданы точно, а при счете по формулам (7.6.4) допущена в  $\varphi_i$  ошибка  $\varepsilon_i$  при  $0 < i \leq n$ . Тогда при  $k < i$  получим вместо  $\varphi_k, J_k$  величины  $\tilde{\varphi}_{ki}, \tilde{J}_{ki}$ . Пусть  $\varepsilon_{ki} = \varphi_k - \tilde{\varphi}_{ki}, \eta_{ki} = J_k - \tilde{J}_{ki}$ . Легко видеть, что  $\varepsilon_{ki} = E_{k+1} \dots E_{i+1} \varepsilon_i, \eta_{ki} = M_k \varepsilon_{ki}$ . Следовательно, чтобы порядок ошибок  $\varepsilon_{ki}, \eta_{ki}$  был равномерно по  $n$  равен порядку ошибки  $\varepsilon_i$ , достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\max_{i, k} \left| \prod_{j=k+1}^{i+1} E_j \right| < C_4 \quad (7.7.8)$$

и равномерной ограниченности по  $n \max_k |M_k|$ .

Рассмотрим поведение  $M_k$ . Легко видеть, что  $M_k \leq 0$  при  $d_0 \geq 0$ , ибо  $M_0 = -d_0 \leq 0$ , и если  $M_{k-1} \leq 0$ , то из (7.7.4) следует, что  $M_k < 0$ . Следовательно,  $|E_k| \leq |\tau_k|$ , т. е. при выполнении условий (7.7.5), (7.7.6) неравенство (7.7.8) будет справедливо, а значит,

$$|\varepsilon_{ki}| = O(|\varepsilon_i|), \quad 0 \leq k < i. \quad (7.7.9)$$

Другими словами, обратный ход для вычисления  $\varphi_k$  устойчив.

Если требуется вычислить и  $J_k$  по формулам (7.6.4), то следует оценить  $\max_k |M_k|$ . Чтобы показать, что эта величина ограничена, на-

ложим следующие дополнительные ограничения на коэффициенты  $Q_k, A_k$ . Потребуем, чтобы

$$Q_k \leq C_5; \quad Q_k A_k \leq C_6, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (7.7.10)$$

и для почти всех  $0 \leq k \leq n$ , за исключением конечного числа значений  $k$ , не зависящего от  $n$ ,

$$Q_k \leq 1 + C_7 n^{-1}; \quad Q_k A_k \leq C_8 n^{-1}. \quad (7.7.11)$$

Рассмотрим величины  $y_k$ , определенные следующими рекуррентными соотношениями:

$$y_k = Q_k (A_k + y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad y_0 = d_0. \quad (7.7.12)$$

Учитывая, что, согласно прежним предположениям, величины  $Q_k, A_k, B_k, d_0$  таковы, что  $Q_k \geq 0, A_k \geq 0, B_k \geq 0, d_0 \geq 0$ , а  $M_0 = y_0$  и  $M_k \leq 0$ , сравнивая затем формулы (7.7.3), (7.7.4) для определения  $M_k$  с соотношениями (7.7.12), определяющими  $y_k$ , видим, что величи-

ны  $y_k$  для всех значений  $k$  мажорируют величины —  $M_k$ , т. е.

$$0 \leq -M_k \leq y_k,$$

Значения  $y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , можно вычислить в явном виде:

$$\begin{aligned} y_k &= Q_k (A_k + y_k) = Q_k A_k + Q_k Q_{k-1} (A_{k-1} + y_{k-2}) = \\ &= Q_k A_k + Q_k Q_{k-1} A_{k-1} + Q_k Q_{k-1} Q_{k-2} A_{k-2} + \dots + \\ &\quad + Q_k Q_{k-1} \dots Q_1 A_1 + Q_k Q_{k-1} \dots Q_1 d_0. \end{aligned} \quad (7.7.13)$$

Формула (7.7.13) показывает, что при ограничениях (7.7.10), (7.7.11) на коэффициенты системы (7.6.1) имеем

$$0 \leq y_k \leq C_9, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.7.14)$$

т. е.  $|M_k| < C_{10}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Величины  $g_k$ ,  $N_k$  оценим в предположении, что для значений  $\varphi_k$ ,  $J_k$  можно дать априорную оценку в некоторой норме  $\|\cdot\|$ . Тогда, пользуясь равенствами (7.6.4) и учитывая ограниченность  $|E_k|$ ,  $|M_k|$ , видим, что  $N_k$  и  $g_k$  будут тоже ограничены в норме  $\|\cdot\|$ . Следовательно, величины  $N_k$ ,  $g_k$  достаточно хорошо расположены для того, чтобы вести устойчивый в норме  $\|\cdot\|$  счет.

Легко проверить устойчивость решения методом факторизации разностных уравнений повышенной точности, полученных в § 7.4. Разберем для примера плоскую задачу [см. уравнения (7.4.3), (7.4.4) с краевым условием  $v_0 = 0$ ]. Для нее коэффициенты уравнений (7.6.1) имеют вид:

$$a_k = \alpha_k = \Sigma_1 \Delta x_k / 2; \quad b_k = \beta_k = gp_k / 3; \quad c_k = \gamma_k = p_k; \quad d_k = \delta_k = \Sigma_0 \Delta x_k / 2,$$

где  $p_k = 1 + \Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta x_k)^2 / (4g)$ ,  $g > 0$ . Нетрудно проверить, что

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= 1; \quad A_k = \frac{4gp_k \Sigma_0 \Delta x_k}{4gp_k^2 + 3\Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta x_k)^2}; \quad B_k = \frac{12p_k \Sigma_1 \Delta x_k}{4gp_k^2 + 3\Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta x_k)^2}; \\ -1 \leq \tau_k &= 1 - \frac{6\Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta x_k)^2}{4gp_k^2 + 3\Sigma_0 \Sigma_1 (\Delta x_k)^2} \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.7.15)$$

Таким образом, ввиду выполнения условий (7.7.6) счет по нахождению  $\varphi_k$  устойчив, а вследствие выполнения условий (7.7.10) значения  $|M_k|$  ограничены.

При вычислении интегралов и разностей в правых частях разностных уравнений следует учитывать, что в многогрупповых задачах функции в правой части  $P_n$ -уравнений являются уже кусочно-непрерывными с различными пределами справа и слева на границах зон. Эти функции линейно зависят от непрерывного решения задачи, вычисляемого для всех групп на единой сетке.

На этом мы закончим рассмотрение одномерных  $P_n$ -уравнений. Вне нашего рассмотрения остались исследования по оценкам погрешности метода сеток. Как было показано в § 7.4, нулевой момент для  $P_1$ -приближения удовлетворяет уравнению диффузионного типа. На основе некоторого интегрального тождества в работе [161] для диффузионных уравнений был предложен метод получения разностных

Уравнений, отличный от рассмотренного в этой главе. Разностные схемы, названные схемами сквозного счета, детально исследованы для уравнений с разрывными коэффициентами в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [226, 227]; в этих работах развиты вопросы конструктивного построения схем, обладающих определенным порядком точности.

Особое значение в теории переноса нейтронов отводится методам построения разностных уравнений для многомерных диффузионных уравнений с разрывными коэффициентами и итерационным методам решения их. Поскольку итерационным методам решения операторных уравнений (в том числе и диффузионных уравнений) посвящена гл. 10, а методы построения разностных уравнений освещены в литературе с достаточной полнотой (см. например, монографии Г. И. Марчука [161], Е. Вакспреса [342], В. Вазова и Дж. Форсайта [33], А. А. Самарского [206], Л. К. Шишкова [246, 153] и др.), то авторы сочли возможным опустить изложение этого материала, требующего для полного представления о нем отдельной монографии, и ограничились обзором лишь тех вопросов, которые были предметом исследования самих авторов.

## Глава 8

---

### ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫЙ МЕТОД И $P_{NI}$ -УРАВНЕНИЯ

#### § 8.1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА

В последние два десятилетия проекционные методы получили качественно новое развитие, что обусловлено и успехами в теории аппроксимации, и имевшейся глубокой теоретической базой данных методов. Это привело к развитию теории и широкому практическому использованию новой формы проекционных методов — проекционно-сеточных (метод конечных элементов), которые можно рассмотреть как классические проекционные методы, но использующие базисные функции с финитными носителями. Проекционно-сеточные методы вобрала в себя лучшие черты проекционных (слабые требования на гладкость решения и исходных данных, необходимых для обоснования и исследования алгоритма, сохранение в приближенной задаче «хороших» свойств точной задачи — симметричности, положительной определенности аппроксимируемых операторов и т. п., более точное описание интегральных характеристик решения и др.) и разностных методов (разреженность матриц, сравнительная простота решения систем алгебраических уравнений). Кроме того, использование локальных базисных функций позволило в большинстве случаев автоматизировать



процесс приближенного решения задачи с помощью современных ЭВМ.

К настоящему времени имеется весьма обширная научная литература, посвященная различным вопросам теории и практики проекционно-сеточных методов. Библиографию можно найти в работах О. Зенкевича [350], Г. Стренга, Дж. Фикса [223], Л. А. Оганесяна, В. Я. Ривкинда, Л. А. Руховца [192]. Ряд работ по проекционно-сеточным методам посвящен использованию их для решения задач теории переноса (С. Юкаи [339], В. И. Лебедева [121], П. Лесэна, П. Равьяра [300], М. Борисевича, Р. Станкевича [261], Г. И. Марчука, В. И. Агошкова [165, 3]), в которых отмечены многие трудности, специфические для задач теории переноса, обладающих рядом «неприятных» особенностей. Это прежде всего существенная многомерность таких задач.

Имеются значительные трудности, связанные с вопросами обоснования применения проекционно-сеточных методов к решению задач теории переноса и получения количественных оценок скоростей сходимости. Одной из трудностей следует признать и проблему аппроксимации границ и граничных условий. К известной проблеме аппроксимации геометрической границы области здесь добавляется задача отыскания и приближения «освещенных» и «теневого» частей границы, что вызвано зависимостью граничных условий от угловых переменных.

Отметим, наконец, что многие задачи теории переноса обладают несамосопряженными операторами, при этом часто в них возникает необходимость одновременного решения как прямой, так и сопряженной задач. Перечисленные (далеко не все) обстоятельства делают теорию и практическое использование проекционно-сеточных методов в задаче переноса нейтронов значительно более трудными, с одной стороны, но и привлекательными — с другой.

Рассмотрим гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  со скалярным произведением (5.1.9) и задачу (5.1.23), где  $\bar{S}_0 = c(x)\bar{S}$ ,  $\bar{S}\varphi = \int_{\Omega} g(\mu_0) \times \varphi(x, \Omega') d\Omega'$ . Предполагается, что выполнены ограничения (5.1.24), в силу чего оператор задачи (5.1.23) будет симметричным и положительно определенным. Пусть  $H_0$  — энергетическое пространство, соответствующее оператору  $L_0$ . Скалярное произведение  $[u, v]$  и норма  $[u] = [u, u]^{1/2}$  определяются согласно (5.1.21), (5.1.22). При введенных ограничениях для любых  $u, v \in H_0$  выполнены соотношения (5.1.26) и

$$|[u, v] - (\bar{S}_0 u, v)| \leq d_2 [u] [v]. \quad (8.1.1)$$

Тогда, согласно теоремам функционального анализа, можно гарантировать, что задача о минимизации функционала  $G(v)$  (5.1.25) однозначно разрешима в  $H_0$ . Функция  $u \in H_0$ , реализующая минимум (5.1.25), является решением (вообще говоря, обобщенным) задачи (5.1.23).

Рассмотрим общую схему проекционно-сеточного алгоритма, основанного на отыскании приближенного минимума функционала (5.1.25).

Пусть для каждого значения параметра  $h$  (далее  $h$  обозначен параметр некоторой сетки, введенной в области определения рассматриваемых функций и состоящей из  $N$  узлов) в  $H_0$  задана последовательность элементов  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$ ,  $N = N(h)$ , линейно-независимых при каждом фиксированном  $h$ . Обозначим  $H_0^h$  линейную оболочку функций  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$  и предположим, что последовательность подпространств  $\{H_0^h\}$ ,  $h_1 > h_2 > h > \dots > h_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  предельно плотна в  $H_0$ .

Поставим теперь задачу об отыскании минимального значения  $G(v)$  на подпространстве  $H_0^h$ . Функция  $u^h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i^h$ , реализующая этот минимум  $G(v)$  на  $H_0^h$ ,

$$G(u^h) = \inf G(v^h) = \inf G(b_1, \dots, b_N), \quad v^h = \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i^h \in H_0^h, \quad v^h \in H_0^h \quad (8.1.2)$$

принимается за приближенное решение исходной задачи (5.1.23). Как известно, задача (8.1.2) приводит к системе линейных уравнений вида

$$[u^h, \varphi_i^h] - (\bar{S}_0 u^h, \varphi_i^h) = (F, \varphi_i^h), \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.1.3)$$

которая в силу (5.1.26) имеет единственное решение. С помощью простых вычислений и с учетом плотности  $\{H_0^h\}$  в  $H_0$  можно показать, что приближенные решения  $u^h$ , определяемые из (8.1.3), сходятся к точному решению в пространстве  $H_0$ . При этом справедлива оценка погрешности

$$[u - u^h] \leq C \varepsilon(u, h) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad (8.1.4)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $h$  и  $u$ , а ошибка аппроксимации  $\varepsilon(u, h)$  определяется как  $\varepsilon(u, h) = \inf_{v^h \in H_0^h} [u - v^h]$ . Если конкретизировать

свойства гладкости, выбор базисных функций  $\{\varphi_i^h\}$ , значение параметра  $h$ , то можно дать оценку для  $\varepsilon$  вида  $O(h^\gamma)$ , где  $\gamma$  — некоторая положительная постоянная.

Поскольку условия (5.1.20) являются естественными, то функции  $\varphi_i^h$  можно выбирать не удовлетворяющими им. Это обстоятельство значительно облегчает выбор и построение базисных функций.

Рассмотрим теперь некоторые способы построения  $\{\varphi_i^h\}$ . Прежде всего выделим четыре общих направления, которые в настоящее время часто используются на практике. Эти направления определяются выбором зависимости  $\varphi_i^h$  от переменных  $(x, \Omega)$ . К первому из них отнесем случаи, когда все  $\varphi_i^h$  зависят от  $x$  и  $\Omega$ . Система уравнений (8.1.3) будет тогда линейной алгебраической системой для отыскания неизвестных постоянных  $\{a_i\}_{i=1}^N$ .

Ко второму направлению относятся алгоритмы, в которых базисные функции  $\{\varphi_i^h\}$  зависят лишь от пространственных переменных  $\varphi_i^h = \varphi_i^h(x)$ . В этом случае метод приближенного решения, рассмотренный выше, будет фактически методом Л. В. Канторовича [87], и неизвестные  $a_i$  будут уже неизвестными функциями от  $\Omega$ . Задача о минимизации (5.1.25) приводит к решению системы интегральных уравнений типа (8.1.3), которую запишем в виде

$$\langle u^h, \varphi_i^h \rangle_1 - \langle \bar{S}_0 u^h, \varphi_i^h \rangle_0 = \langle F, \varphi_i^h \rangle_0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.1.5)$$

где

$$u^h(x, \Omega) = \sum_{i=1}^N a_i(\Omega) \varphi_i^h(x); \quad \langle u, v \rangle_0 = \int_D dx l^{-1}(x) u(x, \Omega) v(x, \Omega); \quad (8.1.6)$$

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{\Gamma} d\Gamma |(\Omega n)| u(x, \Omega) v(x, \Omega) + \langle l \Omega \nabla u, l \Omega \nabla v \rangle_0 + \langle u, v \rangle_0. \quad (8.1.7)$$

Систему (8.1.5) достаточно просто решить, например, методом квадратур, который изложен во многих монографиях (Л. В. Канторовича, В. И. Крылова [89], М. К. Гавурина [52]). При вырожденной индикатрисе рассеяния (8.1.5) сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений (см. § 6.9) [отметим, что для  $u^h$  из (8.1.5) остается справедливой оценка (8.1.4)].

В третьем направлении базисные функции зависят только от угловых переменных. В этом случае задача минимизации сводится к некоторой краевой задаче в  $D$  для системы (эллиптических) дифференциальных уравнений в частных производных ( $P_{NI}$ -уравнений).

В четвертом направлении на основе финитных функций строятся истокообразные функции, которые затем используются в качестве базисных (см. § 8.7).

Приведем теперь некоторые способы задания функций  $\varphi_i^h$ , которые выбираются так, чтобы их носитель был финитным и в значительной степени меньшим по сравнению с размерами области (это является одной из особенностей проекционно-сеточных методов). Остановимся на наиболее популярных случаях задания  $\varphi_i^h$ , когда  $\varphi_i^h$  является кусочно-линейными или кусочно-полилинейными функциями своих аргументов.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть  $\Pi = [a, b]$  — замкнутый интервал по некоторой переменной  $r$ . Введем на  $\Pi$  сетку  $a = r_0 < r_1 < \dots < r_N = b$ ;  $r_{-1} \equiv a - h$ ,  $r_{N+1} = b + h$ ;  $h_i = r_i - r_{i-1}$ ;  $h = [b - a]/N$ ;  $c_0 h \leq h_i \leq c_1 h$ ;  $c_0, c_1 = \text{const}$  и следующие «функции—домики»:

$$\varphi_i^h(r) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \frac{r - r_{i-1}}{h_i}, & r \in (r_{i-1}, r_i); \\ \frac{r_{i+1} - r}{h_{i+1}}, & r \in (r_i, r_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N; \\ 0, & r \notin (r_{i-1}, r_{i+1}). \end{cases} \quad (8.1.8)$$

Функции  $\varphi_i^h(r)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , являются линейно-независимыми, и линейная их оболочка представляет собой подпространство  $W_2^{1,h}(\Pi) \subset W_2^1(\Pi)$ .

Пусть теперь  $\Pi$  есть параллелепипед в  $m$ -мерном евклидовом пространстве:  $\Pi = \{a_j \leq r_j \leq b_j\}$ ,  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ . Определим кусочно-полиномиальные базисные функции  $\varphi_i^h(\bar{r})$ . Для этого разобьем  $\Pi$  на подобласти сеткой:

$$a_k = r_{k,1} < r_{k,2} < \dots < r_{k,N_k} = b_k; \quad h_{k,i} = r_{k,i} - r_{k,i-1};$$

$$k = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, N_k, \quad h = \max_{k,i} h_{k,i},$$

$$c_0 h \leq h_{k,i} \leq c_1 h \quad \forall k, i, \quad c_0, c_1 = \text{const}.$$

Каждому узлу сетки  $\bar{r}_i = (r_{1,i_1}, \dots, r_{m,i_m})$ ,  $i = (i_1, \dots, i_m)$ ,  $0 \leq i_k \leq N_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , поставим в соответствие функцию

$$\varphi_i^h(\bar{r}) = \prod_{k=1}^m \varphi_{i_k}^h(r_k) \equiv \varphi_{i_1}^h(r_1) \times \dots \times \varphi_{i_m}^h(r_m), \quad (8.1.9)$$

где  $\varphi_{i_k}^h(r_k)$  определяется по формуле (8.1.8) при замене  $r$  на  $r_k$ ,  $i$  на  $i_k$ . Очевидно, что функции (8.1.9) для каждой фиксированной сетки линейно-независимы и их линейные комбинации образуют подпространство  $W_2^{1,h}(\Pi) \subset W_2^1(\Pi)$ .

Рассмотрим кусочно-линейные базисные функции. Ради определенности и упрощения изложения остановимся на двумерном случае, когда  $\bar{r} = (x, y)$ ,  $m = 2$ . Пусть  $\Pi$  многоугольная область (рис. 8.1). Разобьем ее на треугольники  $\{\Pi_i\}$  таким образом, чтобы: 1) каждая пара треугольников из разбиения пересекалась лишь в одной общей вершине или по общей стороне, или вообще не пересекалась; 2) объединение их давало бы  $\Pi$ . Множество вершин (точек разбиения) обозначим  $(\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N)$ , где  $\bar{r}_i = (x_i, y_i)$ . Обозначим  $h$  наибольшую из сторон треугольников и предположим, что  $h \leq Ch_{\text{мин}}$ , где  $h_{\text{мин}}$  — наименьшая из сторон треугольников;  $C$  — некоторая постоянная, общая для всех  $\Pi_i$ , а углы всех треугольников ограничены снизу равномерно по  $N$ .

Введем базис  $\varphi_0^h, \dots, \varphi_N^h$ , представляющий собой набор линейно-независимых кусочно-линейных функций, которые можно найти из условий  $\varphi_i^h(\bar{r}_j) = \delta_{ij}$ ,  $0 \leq i, j \leq N$ . Чтобы определить вид  $\varphi_i^h(\bar{r})$  достаточно найти его на одном треугольнике  $\Pi_i$  с вершинами  $r_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Для определения  $\varphi_i^h(\bar{r})$  нужно провести плоскость через  $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \bar{r}_2$  так, чтобы она проходила в  $\bar{r}_0$  через 1, а в  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  через 0. Это уравнение плоскости имеет вид

$$f(\bar{r}) = [1 - (y_0 - y_2)/(y_1 - y_2) - (x_0 - x_1)/(x_2 - x_1)]^{-1} \times \\ \times [1 - (y - y_2)/(y_1 - y_2) - (x - x_1)/(x_2 - x_1)].$$

Следовательно, можно принять

$$\begin{aligned} \varphi_i^h(\bar{r}) = & (1/h) [1 - (y_{0,i} - y_{2,i}) / (y_{1,i} - y_{2,i}) - \\ & - (x_{0,i} - x_{1,i}) / (x_{2,i} - x_{1,i})]^{-1} [1 - (y - y_{2,i}) / (y_{1,i} - y_{2,i}) - \\ & - (x - x_{1,i}) / (x_{2,i} - x_{1,i})] \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

на  $\Pi_i$ , где  $\bar{r}_i = (x_{0,i}, y_{0,i})$ . Вид функции  $\varphi_i^h(\bar{r})$  показан на рис. 8.2. Множество функций вида  $v^h(\bar{r}) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i^h(\bar{r})$  образует подпространство  $W_2^{1,h}(\Pi) \subset (C(\Pi) \cap W_2^1(\Pi))$ .

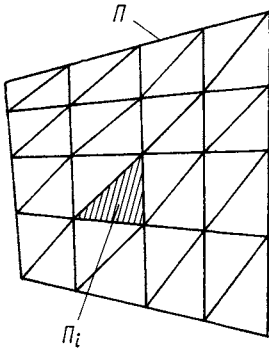
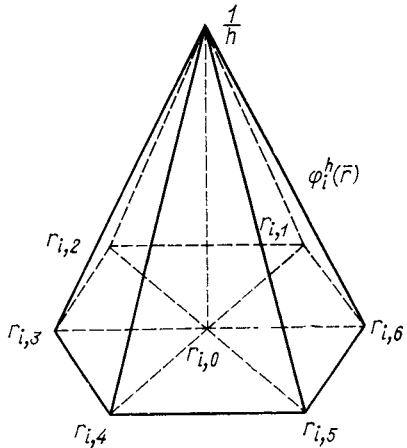


Рис. 8.1. Пример триангуляции области

Рис. 8.2. Кусочно-линейная базисная функция



Для всех рассмотренных здесь подпространств  $W_2^{1,h}$  справедливо следующее свойство аппроксимации (Г. Стренг, Дж. Фикс [223], Л. А. Оганесян, В. Я. Ривкинд, Л. А. Руховец [192], Р. Варга [35]): если  $v(\bar{r}) \in W_2^p(\Pi)$ ,  $p = 1, 2$ , то существует такая функция  $v^h(\bar{r}) \in W_2^{1,h}(\Pi)$ , что

$$\|v - v^h\|_{W_2^k(\Pi)} \leq O(h^{p-k}) \|v\|_{W_2^p(\Pi)}, \quad p = 1, 2; \quad k = 0, 1. \quad (8.1.11)$$

Пусть теперь область задания функций  $v(\bar{r})$  является  $m$ -мерной областью  $\Pi_0$  с криволинейной границей. Построение пространств аппроксимирующих функций можно провести следующим образом. Заклучим  $\Pi_0$  в прямоугольную или многоугольную область  $\Pi$ :  $\Pi_0 \subset \Pi$  и уже известным образом построим пространство  $W_2^{1,h}(\Pi)$  с базисом  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$ . Обозначим  $e_i$  пересечение области  $\Pi_0$  с  $i$ -м элементарным треугольником (квадратом и т. д.) и потребуем помимо введенных ранее ограничений на шаги сетки выполнения также предположения, что  $\max_i \text{mes}(e_i) / \min_i \text{mes}(e_i) \leq \text{const}$ . Определим теперь подпространство  $W_2^{1,h}(\Pi_0)$  как множество функций, каждая из которых является сужением некоторой функции из  $W_2^{1,h}(\Pi)$ . Базисом в  $W_2^{1,h}(\Pi_0)$

будет последовательность  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_0}$ , в которую включены все функции из  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^N$ , носители которых имеют ненулевое пересечение с  $\Pi_0$ . Каждую функцию из  $W_2^{1,h}(\Pi_0)$  можно представить в виде

$$v^h(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N_0} a_i \varphi_i^h(\bar{r});$$

при этом справедлив следующий результат аппроксимации [35, 192, 223]: если граница  $\Pi_0$  удовлетворяет условию продолжения  $v(\bar{r}) \in \in W_2^p(\Pi_0)$  на  $\Pi$  с сохранением класса гладкости, то в  $W_2^{1,h}(\Pi_0)$  существует функция  $v^h(\bar{r})$ , такая, что

$$\|v - v^h\|_{W_2^k(\Pi_0)} \leq O(h^{p-k}) \|v\|_{W_2^p(\Pi_0)}, \quad p = 1, 2; \quad k = 0, 1. \quad (8.1.12)$$

Обратимся к нашей задаче (5.1.23). Чтобы определить пространства пробных функций  $H_0^h$  для приближенного решения вариационной задачи, достаточно в рассмотренных выше примерах построения  $\varphi_i^h$  принять: либо  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ , и в этом случае проекционно-сеточный метод приводит к системе интегральных уравнений (8.1.5), либо  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, \varphi, \vartheta)$ , здесь приходим к системе алгебраических уравнений (8.1.3). В качестве  $\Pi_0$  берутся соответственно либо область  $D$ , либо  $\Pi_0 = D \times \Omega$ . Получаемые при этом пространства  $W_2^{1,h}(D \times \Omega) \equiv \equiv H_0^h$  являются подпространствами из  $W_2^1(\Pi_0)$ , в силу чего и с учетом аппроксимирующих свойств (8.1.12) можно гарантировать, что последовательность  $\{H_0^h\}$  будет предельно плотной в  $H_0$ . Следовательно, проекционно-сеточный алгоритм позволяет строить для нашей задачи последовательность приближенных решений  $u^h$ , заведомо сходящихся к точному в метрике пространства  $H_0$ .

Отметим, что в ряде случаев по угловым переменным вводятся и разрывные базисные функции (например, кусочно-постоянные), комбинируя которые с рассмотренными выше для пространственных переменных, можно получить новую модификацию базисных функций.

## § 8.2. ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

### 1. Плоская геометрия

Пусть задача рассматривается в плоскопараллельном слое  $0 \leq z \leq H$ . Тогда, как известно из § 5.2, решение  $u$  уравнения (5.2.12) будет зависеть от пространственной переменной  $z$  и угловой  $\mu \in [0, 1]$ . Функционал (5.1.25) соответственно принимает вид при  $F(z, \mu) = = F(z, -\mu) \equiv f(z, \mu)/\Sigma(z)$  [см. (5.2.14)]:

$$G(v) = \int_0^H dz \int_0^1 d\mu \left[ l^{-1}(z) v^2(z, \mu) + \mu^2 l(z) \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ + \int_0^1 d\mu \mu [v^2(H, \mu) + v^2(0, \mu)] -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^H dz \int_0^1 d\mu \int_0^1 d\mu' \Sigma_s(z) v(z, \mu) v(z, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu) - \\
& - 2 \int_0^H dz \int_0^1 d\mu v(z, \mu) f(z, \mu).
\end{aligned} \tag{8.2.1}$$

Построим приближенное решение задачи, используя кусочно-линейные базисные функции по переменной  $z$ . Для этого введем по переменной  $z$  сетку  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = H$ ,  $h_i = z_i - z_{i-1}$  и поставим в соответствие каждому узлу  $z_i$  базисную функцию  $\varphi_i^h(z)$ , определенную согласно (8.1.8). Приближенное решение ищется в виде

$$u^h(z, \mu) = \sum_{i=0}^N a_i(\mu) \varphi_i^h(z), \tag{8.2.2}$$

где неизвестные функции  $a_i(\mu)$  найдем, минимизируя функционал (8.2.1). В результате приходим к системе (8.1.5), которая в данном случае имеет вид

$$\hat{A}a = \int_0^1 d\mu' g(\mu' \rightarrow \mu) \hat{B}a + F, \tag{8.2.3}$$

где

$$a = (a_0(\mu), \dots, a_N(\mu)); \quad F = (F_0(\mu), \dots, F_N(\mu)); \quad \hat{A} = \{A_{ij}(\mu)\}_{i,j=0}^N;$$

$$\hat{B} = \{B_{ij}(\mu)\}_{i,j=0}^N; \quad F_i(\mu) = \int_0^H dz \varphi_i^h(z) f(z, \mu); \quad A_{ij}(\mu) = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_1;$$

$$B_{ij} = \int_0^H dz \Sigma_s(z) \varphi_i^h(z) \varphi_j^h(z).$$

В § 6.9 фактически проведено исследование некоторых свойств системы (8.2.3): однозначной разрешимости, устойчивости алгоритма и т. п. Отметим, что в силу финитности  $\varphi_i^h(z)$  матрицы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  будут трехдиагональными.

Рассмотрим вопрос сходимости  $u^h(z, \mu)$  к  $u(z, \mu)$ . Сам факт сходимости  $u^h \rightarrow u$  доказан в § 8.1. Однако получение оценок скоростей сходимости вызывает затруднения. Если бы точное решение рассматриваемой задачи обладало вторыми производными по  $z$ , суммируемыми с квадратом, то из (8.1.4) и (8.1.11) немедленно следовало бы, что  $[u - u^h] \leq 0(h)$ . Однако предположение о такой гладкости  $u(z, \mu)$  не выполняется даже в случае постоянных коэффициентов. Поэтому оценка скорости сходимости вариационно-сеточных алгоритмов в задачах теории переноса требует, как правило, дополнительных исследований.

Поставленная здесь задача достаточно просто решается, если базисные функции несколько модифицировать и рассмотреть использованный алгоритм как метод интегральных тождеств, широко приме-

няемый для диффузионных уравнений [160] и записанный для исследуемой задачи в его вариационной формулировке [5, 6]. Пусть функции  $\{\varphi_i^h(z)\}$  заданы в виде

$$\varphi_k^h(z) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} 1 - \int_z^{z_k} \Sigma(\xi) d\xi \Big/ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \Sigma(\xi) d\xi, & z \in (z_{k-1}, z_k); \\ 1 - \int_{z_k}^z \Sigma(\xi) d\xi \Big/ \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Sigma(\xi) d\xi, & z \in (z_k, z_{k+1}); \\ 0 & z \notin (z_{k-1}, z_{k+1}). \end{cases} \quad (8.2.4)$$

Очевидно, что «искривленные домики» (8.2.4) тождественно совпадают с введенными выше при предположении, что  $\Sigma(z)$  кусочно-постоянна с возможными разрывами первого рода в некоторых узлах сетки. В этом случае умножим (5.2.12) на  $\Sigma(z)\varphi_i^h(z)$ , проинтегрируем по  $z \in [0, H]$  с учетом граничных условий. В результате получим систему интегральных тождеств:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\mu u(z_0, \mu)}{\sqrt{h}} + \mu^2 \left[ \frac{u(z_0, \mu) - u(z, \mu)}{\sqrt{h} \int_{z_0}^{z_1} \Sigma(z) dz} \right] + \\ & + \langle u, \varphi_0^h \rangle_0 = \langle \bar{S}_0 u, \varphi_0^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_0^h \rangle_0; \\ & \mu^2 \left[ \frac{u(z_i, \mu) - u(z_{i+1}, \mu)}{\sqrt{h} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \Sigma(z) dz} + \frac{u(z_i, \mu) - u(z_{i-1}, \mu)}{\sqrt{h} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \Sigma(z) dz} \right] + \\ & + \langle u, \varphi_i^h \rangle_0 = \langle \bar{S}_0 u, \varphi_i^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_i^h \rangle_0, \quad i = 1, \dots, N-1; \\ & \frac{\mu u(z_N, \mu)}{\sqrt{h}} + \mu^2 \left[ \frac{u(z_N, \mu) - u(z_{N-1}, \mu)}{\sqrt{h} \int_{z_{N-1}}^{z_N} \Sigma(z) dz} \right] + \\ & + \langle u, \varphi_N^h \rangle_0 = \langle \bar{S}_0 u, \varphi_N^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_N^h \rangle_0. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.5)$$

Если ввести интерполянт точного решения  $u_I(z, \mu)$ , для которого  $u_I(z_i, \mu) = u(z_i, \mu)$  и имеет смысл выражение  $\frac{\mu}{\Sigma(z)} \frac{\partial u_I}{\partial z}$ , то систему (8.2.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left\langle \mu l \frac{\partial u_I}{\partial z}, \mu l \frac{\partial \varphi_i^h}{\partial z} \right\rangle_0 + \mu (u_I \varphi_i^h|_{z=0} + u_I \varphi_i^h|_{z=H}) + \langle u, \varphi_i^h \rangle_0 = \\ & = \langle \bar{S}_0 u, \varphi_i^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_i^h \rangle_0 \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Ради определенности далее в качестве  $u_I(z, \mu)$  выберем функцию вида  $u_I(z, \mu) = \sum_{i=0}^N u(z_i, \mu) \sqrt{h} \varphi_i^h(z)$ .



Приближенное решение будем искать в виде  $u^h(z, \mu) = \sum_{i=0}^N a_i(\mu) \varphi_i^h(z)$ , где неизвестные функции  $a_i(\mu)$  определим из системы интегральных уравнений

$$\left\langle \mu l \frac{\partial u^h}{\partial z}, \mu l \frac{\partial \varphi_i^h}{\partial z} \right\rangle_0 + \mu (u^h \varphi_i^h|_{z=0} + u^h \varphi_i^h|_{z=H}) + \langle u^h, \varphi_i^h \rangle_0 = \\ = \langle \bar{S}_0 u^h, \varphi_i^h \rangle_0 + \langle F, \varphi_i^h \rangle_0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (8.2.7)$$

совпадающей с системой (8.2.3). Таким образом, методы Рунца, Галеркина и интегральных тождеств в данной задаче совпадают, в силу чего они дают одно и то же приближенное решение.

Для оценки погрешности рассмотрим тождество

$$\left\| \mu l \frac{\partial}{\partial z} (u_I - u^h) \right\|^2 + \int_0^1 d\mu \mu \left[ (u_I - u^h)^2|_{z=0} + (u_I - u^h)^2|_{z=H} \right] + \\ + \|u - u^h\|^2 - (\bar{S}_0 (u - u^h), u - u^h) = (u - u^h, u - u_I) - \\ - (\bar{S}_0 (u - u^h), u - u_I). \quad (8.2.8)$$

Откуда с учетом (8.1.1), (5.1.26) получаем

$$\left\| \mu l \frac{\partial}{\partial z} (u_I - u^h) \right\|^2 + \|u - u^h\|^2 + \int_0^1 d\mu \mu \left[ (u_I - u^h)^2|_{z=0} + \right. \\ \left. + (u_I - u^h)^2|_{z=H} \right] \leq C \|u - u_I\|^2, \quad (8.2.9)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $u$ ,  $u_I$  и  $h_i$ .

В работе В. И. Агошкова [6] доказано, что если  $f(z, \mu)$  — ограниченная функция, то  $\|u - u_I\|^2 \leq O(h) \|f\|_{L_\infty}^2$ . Следовательно, получаем оценку вида

$$\left[ \left\| \mu l \frac{\partial}{\partial z} (u_I - u^h) \right\|^2 + \int_0^1 d\mu \mu \left[ (u_I - u^h)^2|_{z=0} + \right. \right. \\ \left. \left. + (u_I - u^h)^2|_{z=H} + \|u - u^h\|^2 \right]^{1/2} \leq Ch^{1/2} \|f\|_{L_\infty}, \quad (8.2.10)$$

которая является оценкой погрешности приближенного решения, полученного с помощью проекционно-сеточного метода.

Отметим, что в силу сделанных предположений о коэффициентах задачи и введенной сетки матрица  $\hat{A}(\mu)$  будет диагонально преобладающей при любом  $\mu \in [0, 1]$ . Отсюда и из предположения  $C(z) < 1$  следует, что собственные числа матрицы  $\hat{A}(\mu)$  при произвольном фиксированном значении  $\mu \in [0, 1]$  и собственные числа системы (8.2.3) будут отделены от нуля положительной постоянной, не зависящей от  $h_k$ . Эти обстоятельства гарантируют нам устойчивость рассмотренных алгоритмов, а также метода прогонки, если его применить для обращения матрицы  $\hat{A}$  при фиксированном значении  $\mu$  при решении (8.2.3) каким-либо итерационным методом и методом квадратур.

## 2. Сферически-симметричная геометрия

Пусть теперь  $D$  есть шар радиусом  $R$ . Минимизируемый функционал  $G(v)$  имеет вид [см. (5.2.20)]

$$\begin{aligned}
 G(v) = & \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu \left[ l^{-1}(r) v^2(r, \mu) + l(r) \left( \mu \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial v}{\partial \mu} \right)^2 \right] + R^2 \int_0^1 \mu d\mu v^2(R, \mu) - \\
 & - \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu' \int_0^1 d\mu \Sigma_s(r) v(r, \mu) v(r, \mu') g(\mu' \rightarrow \mu) - \\
 & - 2 \int_0^R r^2 dr \int_0^1 d\mu v(r, \mu) f(r, \mu). \quad (8.2.11)
 \end{aligned}$$

При решении данной задачи можно воспользоваться кусочно-линейными функциями (8.1.10) при  $\bar{r} \equiv (r, \mu)$ . Введем на области  $[0, R] \times [0, 1]$  сетку (рис. 8.3):  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{N_R} = R$ ;  $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_N = 1$  и выполним ее триангуляцию. Каждому узлу  $(r_i, \mu_j)$  поставим в соответствие финитную функцию  $\varphi_{ij}^h(r, \mu)$  с носителем  $\Pi_{ij} = \bigcup_{k=1}^6 \Pi_{ij}^{(k)}$ , определяемую в каждом треугольнике по формуле

(8.1.10). Приближенное решение ищется в виде  $u^h(r, \mu) = \sum_{i=0}^{N_R} \sum_{j=0}^N a_{ij} \times \times \varphi_{ij}^h(r, \mu)$ , где неизвестные постоянные  $a_{ij}$  находятся из системы  $\frac{\partial G(u^h)}{\partial a_{ij}} = 0$ ,  $i = 0, \dots, N_R$ ,  $j = 0, \dots, N$ , которую можно записать в матричной форме:

$$(\hat{A} - \hat{B})\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (8.2.12)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= (a_{00}, \dots, a_{N_R 0}, a_{01}, \dots, a_{N_R 1}, \dots, a_{0N}, \dots, a_{N_R N}); \\
 \mathbf{F} &= [F_{00}, \dots, F_{N_R 0}, F_{01}, \dots, F_{N_R 1}, F_{02}, \dots, F_{0N}, \dots, F_{N_R N}); \\
 \hat{A} &= \{A_{(ij)}^{(kl)}\}_{i, k=0, \dots, N_R; j, l=0, \dots, N}; \quad \hat{B} = \{B_{(ij)}^{(kl)}\}_{i, k=0, \dots, N_R; j, l=0, \dots, N}; \\
 A_{(ij)}^{(kl)} &= [\varphi_{ij}^h, \varphi_{kl}^h]; \quad B_{(ij)}^{(kl)} = (\bar{S}_0 \varphi_{ij}^h, \varphi_{kl}^h).
 \end{aligned}$$

Система (8.2.12) обладает симметричной положительно определенной матрицей, собственные числа которой отделены от нуля положительной постоянной, не зависящей от шагов сетки. Матрица  $\hat{A}$  семи-диагональна, симметрична и положительно определена.

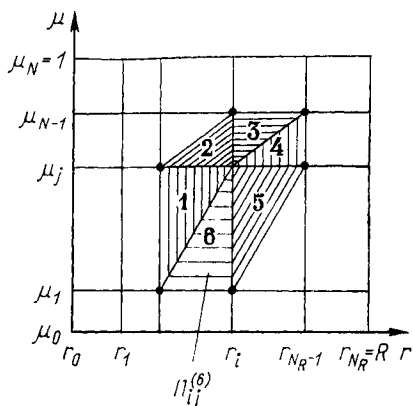


Рис. 8.3. Сетка в геометрии  $(r, \mu)$

разрывов  $\Sigma(r)$  [43]. Поэтому в целях уменьшения ошибки аппроксимации можно ввести криволинейные треугольники, одна из сторон которых может совпадать с частью характеристики, и определить на них некоторые базисные функции. Естественно, скорость сходимости в данном случае увеличивается.

### 3. Многомерный случай

Пусть  $D$  — параллелепипед:  $D = \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, 3\}$ . Построим проекционно-сеточную схему для задачи (5.1.23), используя кусочно-полилинейные базисные функции по пространственным переменным  $(x_1, x_2, x_3)$ , а по угловым  $\psi, \theta$  — кусочно-постоянные.

Введем в области  $D$  следующие сетки:

$$a_k = x_{k,1} < \dots < x_{k,N_k} = b_k; \quad h_{k,i} = x_{k,i} - x_{k,i-1}, \\ k = 1, 2, 3, \quad i = 1, \dots, N_k;$$

$$h = \max_{k,i} h_{k,i}; \quad c_0 h \leq h_{k,i} < c_1 h; \quad c_0, c_1 = \text{const.}$$

Предположим, что по пространственным переменным введены функции  $\phi_i^h(x)$  по формуле (8.1.9) при  $\bar{r} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ .

Пусть  $B_I = (\omega_1, \dots, \omega_I)$  — некоторое разбиение поверхности  $\Omega$  единичной сферы на открытые области  $\omega_i, i = 1, 2, \dots, I$ . Пусть разбиение  $B_I$  удовлетворяет следующим требованиям:  $m_i = \text{mes } \omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, I; \sum_i m_i = 4\pi$  и  $\omega_k \cap \omega_i = \emptyset$  при  $i \neq k$ ; каждая область

$\omega_i$  является центральной симметричной областью относительно центра сферы  $\Omega$ , т. е.  $\omega_i = \omega_i' \cup \omega_i''$ , где  $\omega_i'' = \{\Omega : \Omega \in \omega_i'\}$ ; области  $\omega_i', \omega_i''$  предположим односвязными. Пусть

$$\chi_m(\Omega) = \{1, \Omega \in \omega_m; 0, \Omega \notin \omega_m\}. \quad (8.2.13)$$

В силу плотности последовательности линейных оболочек  $\{\phi_{ij}^h(r, \mu)\}$  в энергетическом пространстве здесь гарантирована сходимость  $u^h \rightarrow u$  при  $h \rightarrow 0$  в метрике  $H_0$ . В целях ускорения данной сходимости можно провести триангуляцию области  $[0, R] \times [0, 1]$  специальным образом. В данной задаче решение, будучи непрерывной функцией, обладает частными производными по своим переменным, которые могут терпеть разрыв по характеристикам, уравнения которых в переменных  $(r, \mu)$  имеют вид:

$$r\sqrt{1 - \mu^2} = \tilde{r}_k, \quad \text{где } \tilde{r}_k \text{ — точки}$$

Обозначим  $H_0^h$  подпространство из  $H_0$ , состоящее из функций вида

$$v^h(x, \bar{\Omega}) = \sum_{(i)} \sum_{(m)} a_{im} \chi_m(\Omega) \varphi_i^h(x). \quad (8.2.14)$$

Последовательность  $\{H_0^h\}$  предельно плотна в  $H_0$ . Поэтому если искать приближенное решение задачи в виде (8.2.14), а неизвестные  $a_{im}$  — из условия минимума  $G(v)$ , то получим приближенные решения, сходящиеся к точному в энергетической метрике. Система уравнений  $\delta G(v^h)/\delta a_{im} = 0$  в данной задаче имеет вид

$$\sum_{(i')} \sum_{(m')} a_{i'm'} [\varphi_{i'} \chi_m, \varphi_{i'} \chi_{m'}] = \sum_{(i')} \sum_{(m')} a_{i'm'} (\bar{S}_0 \varphi_{i'} \chi_{m'}, \varphi_{i'} \chi_m) + (F, \varphi_{i'} \chi_m), \quad (8.2.15)$$

где

$$\begin{aligned} & [\varphi_{i'} \chi_m, \varphi_{i'} \chi_{m'}] = \\ & = \delta_{mm'} \left\{ \sum_{p, p'=1}^3 \left( \int_{\Omega} d\Omega' \chi_m^2 \Omega_p \Omega_{p'} \right) \left( \int_D dx l(x) \frac{\partial \varphi_{i'}}{\partial x_{p'}} \frac{\partial \varphi_{i'}}{\partial x_p} \right) + \right. \\ & \quad + \left( \int_{\Omega} d\Omega' \chi_m^2 \right) \left( \int_{\Omega} dx l^{-1}(x) \varphi_{i'}(x) \varphi_{i'}(x) \right) + \\ & \quad \left. + \int_{\Omega} d\Omega \chi_m^2(\Omega) \left| \sum_{p=1}^3 \Omega_p n_p \right| \int_{\Gamma} d\Gamma \varphi_{i'}(x) \varphi_{i'}(x) \right\}; \\ & (\bar{S}_0 \varphi_{i'} \chi_{m'}, \varphi_{i'} \chi_m) = \left( \int_{\Omega} d\Omega \chi_m(\Omega) \int_{\Omega} d\Omega' \chi_m(\Omega') g(\mu_0) \right) \times \\ & \quad \times \left( \int_D dx \Sigma_s(x) \varphi_{i'}(x) \varphi_{i'}(x') \right); \\ & (F, \varphi_{i'} \chi_m) = \int_{\Omega} d\Omega' \chi_m(\Omega) \int_D dx f(x, \Omega) \varphi_{i'}(x). \end{aligned}$$

Каждое разбиение сферы  $B_I$  порождает некоторую квадратурную формулу для сферы. Поэтому фактически для реализации алгоритма достаточно знать не конфигурации областей  $\omega_i$ , а лишь узлы и веса этой квадратурной формулы (см. подробнее об этом в § 8.4, 8.5).

Система (8.2.15) обладает симметричной положительно определенной матрицей, что дает гарантию сходимости ряда итерационных процессов, применяемых для решения (8.2.15).

### § 8.3. $P_{NI}$ -УРАВНЕНИЯ, ВЫВОД

Здесь мы построим на основании некоторых интегральных тождеств для решений кинетических уравнений алгоритм вывода систем уравнений в частных производных в пространстве координат для приближенного нахождения решения кинетических задач. Полученные уравнения были названы  $P_{NI}$ -уравнениями [122]. При выводе  $P_{NI}$ -уравнений ограничимся рассмотрением случая с изотропной ин-

дикатрисой рассеяния. На основе  $P_{NI}$ -уравнений получим различные конечно-разностные аналоги для кинетических уравнений.

Рассмотрим в выпуклой области  $D \subset R_3$  кинетическое уравнение

$$-[l\Omega\nabla]^2 u + u = c(x) Su + F(x, \Omega). \quad (8.3.1)$$

Положим  $Bu = cSu + F$ ,  $Lu = -[l\Omega\nabla]^2 u$ ,  $T_j = l \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3\}$ . Сначала получим некоторые интегральные тождества, связывающие значения функций  $u$  и  $Su$ . Предполагая достаточную для дальнейших выкладок гладкость у коэффициентов уравнения (8.3.1), функции  $F$  и решения  $u$ , применяя к равенству (8.3.1) оператор  $L^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , где  $N > 0$  — некоторое целое число, получаем систему равенств

$$L^k u = - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} L^j Bu + (-1)^k u, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (8.3.2)$$

при  $k = 0$  считаем, что  $L^0 = I$ . Пусть  $l_{Nk}$  является однородным относительно  $\mathbf{T}$  многочленом порядка  $2k$  и коэффициенты его зависят только от  $x$ . Тогда, умножая (8.3.2) на  $l_{N, N-k}$ ,  $k = 0, \dots, N$ , и суммируя результат по  $k$ , получаем

$$\begin{aligned} \Phi_N(u) &= \sum_{k=0}^N l_{N, N-k} L^k u = - \sum_{k=1}^N l_{N, N-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} L^j cSu - \\ &- \sum_{k=1}^N l_{N, N-k} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} L^j F + \sum_{k=0}^N (-1)^k l_{N, N-k} u. \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Равенство (8.3.3) послужит основой для получения  $P_{NI}$ -уравнений.

Пусть  $B_I = (\omega_1, \dots, \omega_I)$  — разбиение поверхности  $\Omega$  единичной сферы на открытые области  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , рассмотренное в § 8.2. Пусть  $d_0$  обозначает максимальный диаметр областей  $\omega_i$ , а  $S_i = m_i^{-1} S'_i$ , где  $S'_i$  — оператор интегрирования по множеству  $\omega_i$ . Обозначим  $u_i = (v_1, \dots, v_I)$  кусочно-постоянную по  $\Omega$  функцию, определенную в  $\Omega \times D$ , которая по функции  $u$  определяется равенством  $v_i = S_i u$  при  $\Omega \in \omega_i$ . Очевидно, что  $Su = \sum_{i=1}^I \alpha_i v_i$ , где  $\alpha_i = m_i/4\pi$ .

Для заданной функции  $F$  будут известными и функции  $\psi_{ij} = S_i L^j F$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ . Легко видеть, что для функций  $w = w(x)$  операторы  $L_{ij} w = S_i L^j w$  будут известными однородными по  $\mathbf{T}$  дифференциальными операторами порядка  $2j$ , коэффициенты которых не зависят от  $\Omega$  и  $w$ , а вычисляются интегрированием.

Поддействовав на обе части равенства (8.3.3) последовательно операторами  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , получим систему равенств

$$\begin{aligned} S_i \Phi_N(u) &= - \sum_{j=1}^N l_{N, N-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} L_{ij} c \sum_{n=1}^I \alpha_n v_n + \\ &+ \sum_{k=0}^N (-1)^k l_{N, N-k} v_i - \psi_{ij}, \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

где

$$\psi_i = \sum_{k=1}^N l_{N, N-k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \psi_{ij}.$$

Пусть  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_I)$ ; обозначим  $\bar{S}$ ,  $Q_{NI}$ ,  $P_{NI}$  матричные операторы, действующие в (8.3.4) соответственно на вектор-функции  $\Phi_N(u)$ ,  $u_I$ ,  $cu_I$ . В новых обозначениях система равенств (8.3.4) запишется в виде

$$\bar{S}\Phi_N(u) = Q_{NI}u_I - P_{NI}cu_I - \psi. \quad (8.3.5)$$

Легко убедиться, что главной частью дифференциального оператора  $Q_{NI} - P_{NI}c$  является оператор  $l_{N, N}$  порядка  $2N$ , что  $\Phi_N(u)$  — линейный однородный по  $T$  дифференциальный оператор порядка  $2N$ . Коэффициенты при производных оператора  $\Phi_N(u)$  являются многочленами по  $\Omega$  степени  $\leq 2N$ ; они зависят также от  $x$ .

Пусть  $N$ ,  $I$ , разбиение  $B_I$  и операторы  $l_{N, N-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , выбраны так, что левую часть (8.3.5) на некотором классе функций  $u$  можно считать достаточно малой величиной относительно некоторой метрики. Пренебрегая ею, получаем для функции  $w = (w_1, \dots, w_I)$  — приближенного значения функции  $u$  — систему уравнений

$$Q_{NI}w - P_{NI}cw = \psi, \quad (8.3.6)$$

определенную в области  $D$ . Эту систему уравнений назовем  $P_{NI}$ -уравнениями. К системе (8.3.6) добавим уравнения, определяющие краевые условия на границе  $\Gamma$  области  $D$ :

$$\tilde{B}w|_{\Gamma} = \tilde{\psi}, \quad (8.3.7)$$

которые в некотором смысле аппроксимировали бы краевые условия исходной задачи и гарантировали бы однозначную разрешимость задачи (8.3.6), (8.3.7).

#### § 8.4. $P_{NI}$ -УРАВНЕНИЯ

Исследование свойств решений  $P_{NI}$ -уравнений начнем со случая  $N = 1$ . Для каждой области  $\omega_i$  операторы  $l_{11} = l_{11}^i$ ,  $l_{10} = l_{10}^i$  считаем заданными в виде

$$l_{11}^i = \sum_{k, j} a_{kj}^i T_k T_j, \quad l_{10}^i \equiv 1, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (8.4.1)$$

где величины  $a_{kj}^i$  предстоит выбрать.

Сначала определим  $a_{kj}^i$ , входящие в выражение для операторов  $l_{11}^i$ , по формуле

$$a_{kj}^i = S_i(\Omega_k \Omega_j), \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (8.4.2)$$

Поскольку в этом случае  $S_i\Phi_1(u) = m_i^{-1} \int_{\omega_i} \sum_{k, j} (\Omega_k \Omega_j - a_{kj}^i) T_k T_j u d\Omega$  и  $S_i\Phi_1(u) \equiv 0$ , если функции  $T_k T_j u$  постоянны по  $\Omega$  внутри каждой области  $\omega_i$ , будем считать, что величиной  $\Phi_1(u)$  можно пренебречь.

Тогда (8.3.6) запишется в виде

$$-\sum_{k,j} a_{kj}^i T_k T_j \omega_i + \omega_i = c \sum_{j=1}^I \alpha_j \omega_j + \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (8.4.3)$$

где  $\psi_i = S_i F$ , а коэффициенты  $a_{kj}^i$ , как нетрудно убедиться, воспользовавшись формулами (5.1.36), удовлетворяют равенствам  $\sum_{i=1}^I m_i a_{ij}^i = 4\pi/3$ ,  $a_{kj}^j = a_{jk}^j$ ,  $\sum_{i=1}^I m_i a_{jk}^i = 0$  при  $k \neq j$ .

Ввиду того что существует такая постоянная  $C > 0$ , зависящая от  $B_I$ , что при любом единичном векторе  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$   $S_i ((\Omega\beta)^2) > C$ , система (8.4.3) является эллиптической системой дифференциальных уравнений, ибо

$$\sum_{k,j} a_{kj}^i \beta_k \beta_j = S_i ((\Omega\beta)^2) > C. \quad (8.4.4)$$

Для уравнения (8.3.1) в области  $D$  рассмотрим основную краевую задачу — задачу (5.1.15), (5.1.20) [или (5.1.23)]. Пусть  $x \in \Gamma$ , рассмотрим функции  $c_i = c_i(x)$ , определенные равенством  $c_i = S_i(|n\Omega|)$ .

Систему (8.4.3) дополним краевыми условиями для функций  $\omega_i$ . Потребуем, чтобы функции  $\omega_i$  — решения (8.4.3) — удовлетворяли краевым условиям

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \nu_i} + c_i \omega_i |_{\Gamma} = 0, \quad (8.4.5)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu_i}$  — кономальная производная на границе  $\Gamma$ , определяемая оператором  $l^{-1} \sum_{k,j} a_{kj}^i T_j \omega_i \cos(n, x_k)$ .

Остановимся на простейших случаях. Пусть  $\Omega_1 = \sin \nu \cos \psi$ ;  $\Omega_2 = \sin \vartheta \sin \psi$ ;  $\Omega_3 = \cos \vartheta$ , где  $\vartheta$  — угол между вектором  $\Omega$  и осью  $x_3$ , а  $\psi$  — угол между проекцией вектора  $\Omega$  на плоскость  $(x_1, x_2)$  и осью  $x_1$ .

1.  $I = 1$ . Используя формулу (5.1.37), получаем, что  $c_1 = 1/2$ , а задача (8.4.3), (8.4.5) имеет вид

$$-\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T_i^2 \omega_1 + (1-c) \omega_1 = \psi_1, \quad \omega_1 + \frac{2}{3} l \frac{\partial \omega_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Итак, видим, что в этом случае уравнение совпадает с  $P_1$ -уравнением метода сферических гармоник, а краевое условие является граничным условием Маршака — Владимирова [41, 311].

2.  $I = 2$ . В разбиении  $B_2(\omega_1, \omega_2)$  положим:

$$\omega_1 = \{\Omega : \pi/3 < \vartheta < 2\pi/3\}; \quad \omega_2 = \{\Omega : 0 \leq \vartheta < \pi/3, 2\pi/3 < \vartheta \leq \pi\}.$$

Вычисляя  $a_{kj}^i$ ,  $i = 1, 2$ , по формуле (8.4.2), получаем для выбранного разбиения систему

$$-\frac{1}{24} (11T_1^2 + 11T_2^2 + 2T_3^2) \omega_1 + \omega_1 = \frac{c}{2} (\omega_1 + \omega_2) + \psi_1;$$

$$-\frac{1}{24} (5T_1^2 + 5T_2^2 + 14T_3^2) \omega_2 + \omega_2 = \frac{c}{2} (\omega_1 + \omega_2) + \psi_2.$$

3.  $I = 3$ . Разбиение  $B_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  построим следующим образом. За область  $\omega_i, i = 1, 2, 3$ , примем центральную проекцию пары противоположных граней единичного куба, лежащих в плоскостях  $x_i = \pm 1$ . Тогда все необходимые величины нетрудно вычислить:

$$m_i = 4\pi/3; \quad a_{kj}^i = 0 \text{ при } k \neq j; \quad a_{ii}^i = 1 - 2b, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$a_{jj}^i = b \text{ при } i \neq j; \quad b = (\sqrt{2}/\pi) [E(\pi/4, 2^{-1/2}) - \sqrt{3}/2],$$

где  $E(\varphi, k)$  — эллиптический интеграл второго рода. Система уравнений (8.4.3) принимает вид

$$-[(1-2b)T_1^2 + bT_2^2 + bT_3^2] \omega_1 + \omega_1 = c(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)/3 + \psi_1;$$

$$-[bT_1^2 + (1-2b)T_2^2 + bT_3^2] \omega_2 + \omega_2 = c(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)/3 + \psi_2;$$

$$-[bT_1^2 + bT_2^2 + (1-2b)T_3^2] \omega_3 + \omega_3 = c(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)/3 + \psi_3.$$

4.  $I = 4$ . Разбиение  $B_4$  выберем следующим образом. Поверхность  $\Omega$  разобьем плоскостями  $x_k = 0, k = 1, 2, 3$ , на восемь частей, из которых область  $\omega_i, i = 1, 2, 3, 4$ , образуется теми двумя частями, которые пересекаются с векторами

$$\pm \mathbf{t}_i = \pm (t_i', t_i'', 1), \text{ где } t_1' = t_4' = t_1'' = t_2'' = -t_2' =$$

$$= -t_3' = -t_3'' = -t_4'' = 1. \text{ Тогда } m_i = \pi, \quad a_{jj}^i = 1/3, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \text{ а при } k \neq j \quad a_{kj}^i = -a_{i2}^1 = -a_{i3}^1 = a_{23}^2 = a_{i2}^3 = -a_{i3}^3 =$$

$$= -a_{24}^3 = -a_{i2}^4 = a_{i3}^4 = -a_{23}^4 = 2\pi/3.$$

Выписывать соответствующую систему уравнений (8.4.3) не будем.

Вообще говоря, для  $I > 1$  величины  $c_i$  зависят от формы границы  $\Gamma$ ; они легко вычисляются, когда граница  $\Gamma$  составлена из конечного числа кусков плоскостей, ибо в этом случае они являются постоянными на каждом таком куске.

Рассмотрим теперь сходимость решений задачи (8.4.3), (8.4.5) к точному решению задачи (5.1.23), когда  $N = 1, I \rightarrow \infty, d_0 \rightarrow 0$ . Для этой цели обозначим  $H_0^I$  гильбертово пространство функций  $v = (v_1, \dots, v_I)$ , определенных на множестве  $D \times \Omega$  равенством  $v_{x \in D \times \omega_i} = v_i$  и постоянных по переменным  $\Omega$  на каждом множестве  $D \times \omega_i, i = 1, 2, \dots, I$ . Скалярное произведение для двух функций  $w, v \in H_0^I$  зададим по формуле

$$[w, v]_I = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^I m_i c_i \omega_i v_i d\Gamma + (w, v)_I +$$

$$+ \int_D \sum_{i=1}^I \sum_{k,j} a_{kj}^i \frac{\partial w_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad (8.4.6)$$

где скалярное произведение  $(w, v)_I$  определяется формулой

$$(w, v)_I = \int_D l^{-1} \sum_{i=1}^I m_i \omega_i v_i dx.$$



Введем две нормы для элемента  $w \in H_0^I$ :

$$[w]_I^2 = [w, w]_I, \quad \|w\|_I^2 = (w, w)_I. \quad (8.4.7)$$

Легко убедиться в том, что задача (8.4.3), (8.4.5) является самосопряженной положительно определенной задачей в пространстве  $H_0^I$ .

Пусть пространство  $\bar{H} = \bigcup_I H_0^I$  — объединение всевозможных вложенных друг в друга пространств  $H_0^I$ . Это значит, что для рассматриваемой последовательности  $I_n$  и соответствующих разбиений  $B_{I_n}$ , где  $I_n \rightarrow \infty$ ,  $d_{0n} \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$  всегда выполняется включение:  $H_0^{I_{n_1}} \subset H_0^{I_{n_2}}$  при  $I_{n_1} < I_{n_2}$ , т. е. разбиение  $B_{I_1}$  получено путем дальнейшего дробления разбиения  $B_{I_2}$ . Для функций  $F$ ,  $c$  предположим выполнение неравенств (5.1.24), (5.1.26). Тогда можно показать, что для любого  $I$  краевая задача (8.4.3), (8.4.5) всегда имеет единственное решение  $w_I \in H_0^I$ , и оно для любой функции  $v \in H_0^I$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$[w, v]_I - \int_D l^{-1} c \sum_{i=1}^I \alpha_i w_i \sum_{i=1}^I \alpha_i v_i dx = (\psi, v)_I. \quad (8.4.8)$$

Исследуем сходимость последовательности функций  $w_I$  к функции  $u$  при  $N = 1$ ,  $I \rightarrow \infty$ ,  $d_0 \rightarrow 0$ . Справедлива

**Теорема 8.4.1.** При выполнении условий (5.1.24), (5.1.26) функция  $w_I$  — решение задачи (8.4.3), (8.4.5) — реализует в пространстве  $H_0^I$  минимум функционала  $G(v)$  (5.1.25) и  $[u - w_I] \rightarrow 0$ , при  $I \rightarrow \infty$ ,  $d_0 \rightarrow 0$ , где функция  $u$  есть решение задачи (5.1.23).

**Доказательство.** В самом деле, из вида интегрального тождества (8.4.8) следует, что решение  $w_I$  является функцией, реализующей в пространстве  $H_0^I$  минимум функционала

$$G_I(v) = [v]_I^2 - \int_D l^{-1} c \left( \sum_{i=1}^I \alpha_i v_i \right)^2 dx - 2(v, F)_I. \quad (8.4.9)$$

Но при  $v \in H_0^I$  значения функционалов  $G_I(v)$  и  $G(v)$  совпадают, и, следовательно, минимизация функционалов  $G(v)$  и  $\Omega(v) = [u - v]^2 - (S_0(u - v), (u - v))$  при  $v \in H_0^I$  достигается на решении задачи (8.4.3), (8.4.5). А так как элементы  $\bar{H}$  образуют всюду плотное множество в пространстве  $H_0$  (см. § 5.1), то  $\Omega(w_I) \rightarrow 0$ , а в силу (5.1.26) и  $[u - w_I] \rightarrow 0$  при  $I \rightarrow \infty$ ,  $d_0 \rightarrow 0$ . Теорема доказана.

Предположим, что функция  $u$  обладает по переменным  $\Omega$  такими свойствами, что  $[u - u_I] = O(f(d_0))$ , где  $f(d_0)$  — некоторая функция, такая, что  $f(d_0) \rightarrow 0$  при  $d_0 \rightarrow 0$ , а  $u_I = S_I u$  при  $\Omega \in \omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ . Тогда из доказательства теоремы 8.4.1 следует, что  $[u - w_I] = O(f(d_0))$ .

Перейдем к построению конечно-разностных аналогов. Построим в области  $D$  общую для всех уравнений (8.4.3) кубическую сетку  $D_h$  с шагом  $h$ , образованную плоскостями  $x_k = jh$ ;  $k = 1, 2, 3$ ;  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Задачу (8.4.3), (8.4.5) заменим разностной задачей, аппроксимировав во внутренних по отношению к области  $D$  узлах сетки  $D_h$  уравнения (8.4.3) системой разностных уравнений

$$L_{hi} u_{hi} + u_{hi} = c \sum_{j=1}^I \alpha_j u_{hj} + \psi_{hi}, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (8.4.10)$$

а в приграничных узлах  $\Gamma_h$  сетки  $D_h$  условия (8.4.5) заменим уравнениями

$$\Delta u_{hi} / \Delta v_i + c_i u_{hi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (8.4.11)$$

Способ построения системы уравнений (8.4.10), (8.4.11), сохраняющих интегральные свойства аппроксимируемой задачи, указан в [118].

Для решений систем (8.4.10), (8.4.11) существуют разностные аналоги пространств  $H'_0$ , скалярного произведения (8.4.6), квадратичного положительно определенного функционала (8.4.9) и интегрального тождества (8.4.8). Не будем их выписывать отдельно, так как они отличаются от упомянутых выражений лишь заменой операции интегрирования по области  $D$  и границе  $\Gamma$  операции суммирования на сетке  $D_h$  и по множеству граничных точек сетки  $\Gamma_h$ . На основании результатов работ О. А. Ладыженской [113], а также [118] и теоремы 8.4.1, предполагая при этом положительность и кусочную непрерывность функции  $l$  и считая кусочно-гладкими поверхности разрывов функции  $l$ , можно доказать следующую теорему.

**Теорема 8.4.2.** *Последовательность функций  $u_h$  — решений уравнений (8.4.10), (8.4.11) — при  $h \rightarrow 0$ ,  $I \rightarrow \infty$ ,  $d_0 \rightarrow 0$  и выполнении условий теоремы 8.4.1 сходится в пространстве  $H_0$  к решению задачи (5.1.23).*

Определим величины  $a_{ij}^k$  в формуле (8.4.1) равенством

$$a_{kj}^i = b_k^i b_j^i, \quad (8.4.12)$$

где единичный вектор  $\mathbf{b}^i = (b_1^i, b_2^i, b_3^i)$  реализует минимум величины

$$J_i = \int_{\omega_i'} (\Omega - \mathbf{b}^i, \Omega - \mathbf{b}^i) d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (8.4.13)$$

Таким образом,  $\mathbf{b}^i$  будет вектором, в среднем наименее отклоняющимся от векторов  $\Omega \in \omega_i'$ . Легко проверить, что минимум функционала  $J_i$  достигается при  $b_k^i = \bar{\Omega}_k^i / |\bar{\Omega}^i|$ , где

$$\bar{\Omega}_k^i = \frac{2}{m_i} \int_{\omega_i'} \Omega_k d\Omega; \quad |\bar{\Omega}^i|^2 = \sum_{j=1}^3 (\bar{\Omega}_j^i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для выбранных таким образом векторов  $\mathbf{b}^i$  уравнения (8.4.3), (8.4.5) примут вид

$$-(\mathbf{b}^i \mathbf{T})^2 w_i + w_i = c \sum_{j=1}^I \alpha_j w_j + \psi_i; \quad (8.4.14)$$

$$\text{sign}(\mathbf{nb}^i) l \frac{\partial w_i}{\partial b^i} + c_i w_i |_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (8.4.15)$$

Выражение (8.4.14) — вырожденная система эллиптических уравнений, левые части ее являются одномерными дифференциальными операторами второго порядка по направлениям  $\mathbf{b}^i$ . Задача (8.4.14), (8.4.15) остается самосопряженной в  $H_0^1$ , в котором скалярное произведение определяется формулой (8.4.6) при  $a_{kj}^i = b_{kj}^i$ . Если учесть, что

$$2m_i^{-1} \int_{\omega_i'} \Omega_k \Omega_j d\Omega = 4m_i^{-2} \int_{\omega_i'} \Omega_k d\Omega \int_{\omega_i'} \Omega_j d\Omega + O(d_0)$$

при  $d_0 \rightarrow 0$ , то аналогично предыдущему доказывается сходимость функций  $w_I$  — решений краевой задачи (8.4.14), (8.4.15) — к функции  $u$  при  $I \rightarrow \infty$ ,  $d_0 \rightarrow 0$ .

Множество сеточных узлов для задачи (8.4.14), (8.4.15) построим следующим образом. Для  $i$ -го уравнения и краевого условия в области  $D$  строим семейство одномерных сеток  $D_{ih}$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , с направлением  $\mathbf{b}^i$ . На этом семействе сеток заменим уравнения (8.4.14), (8.4.15) разностными уравнениями, а оператор  $(\mathbf{b}^i \mathbf{T})\omega$  — второй разностью  $(l(l\omega_{\bar{b}}))_{\bar{b}}$ . Будем считать, что на множестве  $D_{ih}$  функции  $w_k = \bar{w}_k$  при  $i \neq k$ , где  $\bar{w}_k$  определяется, например, линейной интерполяцией значений  $w_k$  с сетки  $D_{kh}$  на сетку  $D_{ih}$ . Тогда получим систему разностных уравнений

$$\bar{L}_{hi} u_{hi} + u_{hi} = c \sum_{j=1}^I \alpha_j u_{hj} + \psi_{hi}, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (8.4.16)$$

Краевые условия для  $u_h$  запишем в прежнем виде (8.4.11). Для решений задачи (8.4.16), (8.4.11) также существуют разностные аналоги пространства  $H_0$ , а для выражений (8.4.6), (8.4.8), (8.4.9), справедливы теорема 8.4.2 о сходимости и оценки решений в соответствующих нормах.

Итак, получили две различные системы разностных уравнений, аппроксимирующих многомерную кинетическую задачу. Систему разностных уравнений (8.4.10), (8.4.11) можно назвать системой уравнений со сглаживанием, так как решение ее сглаживает возможные разрывы у точного решения; численно решать ее труднее, чем вторую систему уравнений. Система разностных уравнений (8.4.16), (8.4.11) имеет очевидное родство с системами разностных уравнений метода характеристик, в ней прямо указывается вид аппроксимации интегрального члена кинетического уравнения. Решение второй системы сохраняет некоторые разрывы точного решения; решать ее легче, но при численном решении и программировании возникают определенные трудности с построением  $I$  различных сеток  $D_{ih}$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , а также с определением при линейной интерполяции соотношений между узлами различных сеток  $D_{kh}$  и  $D_{ih}$  при  $i \neq k$ .

## § 8.5. О ВЫБОРЕ УГЛОВЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Исследуем задачу о выборе угловых направлений  $\mathbf{b}^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , для  $P_{1I}$ -уравнений (8.4.14). Поскольку в выборе разбиения  $V_I(\omega_1, \dots, \omega_I)$  сферы  $\Omega$  до сих пор содержался довольно широкий

произвол, то имеет смысл изучить задачу о таком выборе  $V_I$ , для которого  $P_{11}$ -уравнения в некотором смысле наилучшим образом аппроксимируют уравнение (8.3.1). В общем случае это сложная задача, требующая для своего решения достаточно подробных сведений о свойствах того класса решений уравнений (8.3.1), для которого поставлена задача. Разберем  $2\pi T$ -периодическую задачу при условии, что  $l = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$  и что функция  $F$  является функцией только от  $x$ . Тогда  $Su$  запишется в виде (5.8.9).

Найдем  $2\pi T$ -периодическое решение системы (8.4.14), которое представим в виде ряда

$$\omega_i = \sum_n v_n^i \exp(i\beta_n x), \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (8.5.1)$$

Подставляя выражение (8.5.1) в систему уравнений (8.4.14), получаем для определения неизвестных коэффициентов  $v_n^i$  систему

$$v_n^i = (1 + l^2 (\mathbf{b}^t \beta_n)^2)^{-1} \left( c \sum_{j=1}^I \alpha_j v_n^j + F_n \right). \quad (8.5.2)$$

Пусть

$$\omega_n = \beta_n / |\beta_n|; \quad \mathbf{b} = \{\mathbf{b}^t\}; \quad \bar{r}(t, \mathbf{b}, \omega) = \sum_{j=1}^I \alpha_j (1 + l^2 (\mathbf{b}^t \omega)^2)^{-1}. \quad (8.5.3)$$

Для каждого фиксированного  $\mathbf{n}$ , умножая  $i$ -е уравнение системы (8.5.2) на  $\alpha_i$  и складывая полученные равенства, имеем после несложных преобразований

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i v_n^i = \bar{r}(\lambda_n, \mathbf{b}, \omega_n) F_n (1 - c\bar{r}(\lambda_n, \mathbf{b}, \omega_n))^{-1}. \quad (8.5.4)$$

Подставляя выражение для  $\sum_{i=1}^I \alpha_i v_n^i$  из (8.5.4) в (8.5.2), получаем

$$v_n^i = (1 + \lambda_n^2 (\mathbf{b}^t \omega_n)^2)^{-1} (1 - c\bar{r}(\lambda_n, \mathbf{b}^k, \omega_n))^{-1} F_n. \quad (8.5.5)$$

Из (8.5.5) находим

$$\begin{aligned} \bar{S}\omega = \sum_{i=1}^I \alpha_i \omega_i &= \sum_n \bar{r}(\lambda_n, \mathbf{b}, \omega_n) (1 - c\bar{r}(\lambda_n, \mathbf{b}, \omega_n))^{-1} \times \\ &\times F_n \exp(i\beta_n x). \end{aligned} \quad (8.5.6)$$

Пусть величина  $I$  задана; естественно выбрать  $\alpha_i$  такими, что  $\sum_{i=1}^I \alpha_i = 1$ . Поскольку функции  $r(t)$ ,  $\bar{r}(t, \mathbf{b}, \omega)$  входят в формулы (5.8.9), (8.5.6) одинаковым образом, то поставим задачу о таком выборе  $\mathbf{b}^t$ ,  $i = 1, \dots, I$ , при котором у величины  $z(t, \mathbf{b}, \omega) = r(t, \mathbf{b}, \omega) - r(t)$  в разложении ее в ряд Фурье по сферическим функциям  $Y_{2k, l}(\omega)$

$$z(t, \mathbf{b}, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j z_{kj}(t, \mathbf{b}) Y_{2k, j}(\omega)$$

обращалось бы в нуль возможно большее число первых коэффициентов  $z_{kj}$ . Пользуясь формулами интегрирования по сфере, легко убедиться в том, что всегда  $z_{00} = 0$ , а при  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} z_{kj} &= \int_{\Omega} (\bar{r}(t, \mathbf{b}, \omega) - r(t)) Y_{2k, j}(\omega) d\omega = \\ &= \sum_{i=1}^I \alpha_i \int_{\Omega} (1 + t^2 (\mathbf{b}' \omega)^2)^{-1} Y_{2k, j}(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2I} \int_{-1}^1 \frac{P_n(z) dz}{1 + t^2 z^2} \sum_{i=1}^I \alpha_i Y_{2k, j}(\mathbf{b}^i). \end{aligned}$$

Следовательно, для того чтобы возможно большее число коэффициентов  $z_{kj}$  обращалось в нуль при заданном  $I$ , следует за векторы  $\mathbf{b}^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , взять узлы квадратурной формулы на сфере  $\Omega$  наивысшей алгебраической степени точности для четных по  $\Omega$  функций. Пусть эта наивысшая алгебраическая точность равна  $2n(I) + 1$ . Тогда в силу ортогональности на  $\Omega$  многочленов  $Y_{2k, j}(\omega)$  все  $z_{kj} = 0$  при  $k = 1, 2, \dots, n(I)$ . Взяв в системе (8.4.14) за  $\mathbf{b}^i$  узлы и веса этой квадратурной формулы, можем уже не решать задачу о выборе областей  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , и разбиения  $B_I$ , а рассматривать функции  $w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , решения системы (8.4.14) как некоторое приближение к среднему значению потока нейтронов  $u(x, \Omega)$ , летящих по направлениям  $\pm \mathbf{b}^i$ .

### § 8.6. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫХ СХЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

Рассмотрим теперь в  $\mathcal{H}$  уравнение переноса в несамосопряженной форме

$$l(x)\Omega \nabla \varphi + \varphi = c(x)Sg\varphi + F(x, \Omega), \quad F \in \mathcal{H}, \quad (8.6.1)$$

с краевым условием

$$\varphi|_{\Gamma} = 0 \quad \text{при } (n, \Omega) < 0, \quad (8.6.2)$$

где  $|c| \leq c_0 < 1$ , но  $g(\mu_0)$  и  $F(x, \Omega)$ , вообще говоря, не предполагаются четными относительно угловых переменных. Используя обозначения введенных в § 5.1 оператора  $A$  с областью определения  $\bar{D}_0$  и  $\bar{S}_0 = cSg$ , задачу (8.6.1), (8.6.2) можно записать в форме

$$A\varphi = \bar{S}_0\varphi + F. \quad (8.6.3)$$

Для уравнения (8.6.3) вариационный принцип, рассмотренный выше, уже несправедлив. Поэтому для построения проекционно-сеточных схем в данном случае используем другой проекционный метод. Остановимся на методе Галеркина и прежде всего сформулируем обобщенную постановку задачи (8.6.3), к которой будет применяться указанный метод. При рассмотрении данного вопроса будем следовать работе [339]:

Введем следующие гильбертовы пространства:

$$H_A = \{u : \|u\|_A^2 = (l\Omega\nabla u, \Omega\nabla u) + (u, u) < \infty;$$

$$(u, v)_A = (l\Omega\nabla u, \Omega\nabla v) + (u, v)\};$$

$$L_2(\gamma) = \{u : \|u\|_{L_2(\gamma)}^2 = \int_{\gamma} d\Gamma d\Omega |(\Omega\mathbf{n})| u^2 < \infty; \gamma = \{\Gamma \times \Omega, (\mathbf{n} \cdot \Omega) > 0\}$$

$$(u, v)_{L_2(\gamma)} = \int_{\gamma} d\Gamma d\Omega |(\Omega\mathbf{n})| uv\}.$$

Отметим, что  $H_A$  вложено в  $\mathcal{H}$  и плотно в нем.

Умножая (8.6.3) на произвольную функцию  $\psi \in H_A$  и выполняя интегрирование по частям с учетом граничных условий, получаем тождество

$$A(\varphi, \psi) \equiv -(\varphi, l\Omega\nabla\psi) + (\varphi, \psi) + (\varphi, \psi)_{L_2(\gamma)} - (\bar{S}_0 \varphi, \psi) = (F, \psi). \quad (8.6.4)$$

Назовем обобщенным решением задачи (8.6.1), (8.6.2) функцию  $\varphi \in H_A$ , удовлетворяющую (8.6.4) при любых  $\psi \in H_A$ . Очевидно, что если  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (8.6.3), то она является обобщенным решением. Если же существует обобщенное решение  $\varphi \in H_A$ , то оно почти всюду удовлетворяет уравнениям (8.6.1), (8.6.2). Действительно, выполняя в (8.6.4) интегрирование по частям и учитывая произвольность выбора  $\psi$ , получаем, что  $\varphi$  почти всюду удовлетворяет как уравнению (8.6.1), так и краевому условию (8.6.2). Из сказанного вытекает эквивалентность задач (8.6.3) и (8.6.4). Однако существенным отличием постановки (8.6.4) от (8.6.3) является то, что здесь не накладывается никаких граничных условий на обобщенное решение. А это обстоятельство, как известно, весьма важно для построения базисных функций в проекционных методах. Отметим, что сам факт существования и единственности обобщенного решения вытекает из однозначной разрешимости уравнения (8.6.3) при любом  $F \in \mathcal{H}$ .

Сформулируем теперь алгоритм приближенного решения задачи. Пусть для определенности по первому из способов, рассмотренному ранее, построены базисные функции  $\{\varphi_i^h(x, \Omega)\}_{i=1}^{N_1}$ . Введем подпространство  $H_A^h \subset H_A$ , состоящее из линейных комбинаций функций  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_1}$ . Приближенное решение ищем в виде

$$\varphi^h(x, \Omega) = \sum_{(i)} a_i \varphi_i^h(x, \Omega), \quad (8.6.5)$$

где неизвестные постоянные  $a_i$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений вида

$$-(\varphi^h, l\Omega\nabla\varphi_j^h) + (\varphi^h, \varphi_j^h) + (\varphi^h, \varphi_j^h)_{L_2(\gamma)} = (\bar{S}_0 \varphi^h, \varphi_j^h) + (F, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, N_1, \quad (8.6.6)$$

или в матричной форме

$$\hat{A}\mathbf{a} = \mathbf{F}, \quad (8.6.7)$$

где

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_1}); \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_{N_1}); \hat{A} = \{A_{ij}\}_{i,j=1}^{N_1};$$

$$A_{ij} = -(\varphi_i^h, l\Omega\nabla\varphi_j^h) + (\varphi_i, \varphi_j) + (\varphi_i^h, \varphi_j^h)_{L_2(\gamma)} - (\bar{S}_0\varphi_i^h, \varphi_j^h).$$

Матрица  $\hat{A}$  положительно определена. Действительно, при ненулевом векторе  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_1})$  и  $\varphi^h = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i^h$  имеем

$$\begin{aligned} (\hat{A}\mathbf{a}, \mathbf{a}) &= -(\varphi^h, l\Omega\nabla\varphi^h) + (\varphi^h, \varphi^h) + (\varphi^h, \varphi^h)_{L_2(\gamma)} - \\ &\quad - (\bar{S}_0\varphi^h, \varphi^h) \geq (\varphi^h, \varphi^h) - (\bar{S}_0\varphi^h, \varphi^h) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |\Omega\mathbf{n}| (\varphi^h)^2 \geq (1 - c_0) \|\varphi^h\|^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |\Omega\mathbf{n}| (\varphi^h)^2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, система Галеркина (8.6.7) однозначно разрешима и при этом справедлива априорная оценка

$$\|\varphi^h\|^2 + \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |\Omega\mathbf{n}| (\varphi^h)^2 \leq \frac{\|F\|^2}{\min(1/2, 1 - c_0)^2} \equiv C \|F\|^2. \quad (8.6.8)$$

Сходимость приближенных решений доказать в данном алгоритме достаточно просто. Действительно, при произвольных постоянных  $\{c_i\}$  из уравнений (8.6.4) и (8.6.6) получаем тождество

$$\hat{A}(\varphi - \varphi^h, \varphi - \varphi^h) = \hat{A}\left(\varphi - \varphi^h, \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h\right).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \hat{A}(\varphi - \varphi^h, \varphi - \varphi^h) &\geq \min\left(\frac{1}{2}, 1 - c_0\right) \left[ \|\varphi - \varphi^h\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |\varphi - \varphi^h|^2 |\Omega\mathbf{n}| \right]; \\ \left| \hat{A}\left(\varphi - \varphi^h, \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h\right) \right| &\leq C \left[ \|\varphi - \varphi^h\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi - \varphi^h\|_{L_2(\gamma)}^{1/2} \left[ \left\| \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h \right\|_A^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\| \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h \right\|_{L_2(\gamma)}^2 \right]^{1/2} \right] \leq C \left[ \|\varphi - \varphi^h\|^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma \times \Omega} |\varphi - \varphi^h|^2 \cdot |\Omega \mathbf{n}| d\Gamma d\Omega \Big]^{1/2} \left[ \left\| \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h \right\|_A + \left\| \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h \right\|_{L_2(\gamma)}^2 \right]^{1/2},$$

то

$$\|\varphi - \varphi^h\|^2 + \int_{\Gamma \times \Omega} d\Gamma d\Omega |\Omega \mathbf{n}| |\varphi - \varphi^h|^2 \leq C \inf_{\{c_i\}} \left[ \left\| \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h \right\|_A^2 + \left\| \varphi - \sum_{i=1}^{N_1} c_i \varphi_i^h \right\|_{L_2(\gamma)}^2 \right]. \quad (8.6.9)$$

Отсюда в силу плотности последовательности  $H_A^h$  в  $H_A$  следует сходимость приближенных решений к точному.

Сделаем следующее замечание, касающееся численной реализации алгоритма. Схема реализации была бы проще и экономичнее, если бы интеграл по границе в (8.6.4) и (8.6.6) был опущен. Это можно сделать, требуя, чтобы  $v^h = 0$  на  $\gamma$ . Однако построение пространств таких пробных функций  $v^h$  было бы затруднительным для криволинейных областей и к тому же усложняется доказательство сходимости. Поэтому использование пробных функций, не удовлетворяющих граничным условиям, представляется более целесообразным как с вычислительной, так и с теоретической точек зрения в случае достаточно сложных областей. Однако, если область, в которой решается задача, имеет сравнительно простую геометрию (например, плоский слой, симметричная сфера и т. п.), можно легко построить базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям (8.6.2). В этом случае для построения приближенного решения вместо (8.6.4) следует использовать соотношение вида

$$(l\Omega \nabla \varphi, \psi) + (\varphi, \psi) = (\bar{S}_0 \varphi, \psi) + (F, \psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \quad (8.6.10)$$

которому удовлетворяет решение задачи. Система уравнений Галеркина тогда имеет вид

$$(l\Omega \nabla \varphi^h, \varphi_i^h) + (\varphi^h, \varphi_i^h) = (\bar{S}_0 \varphi^h, \varphi_i^h) + (F, \varphi_i^h), \quad i = 1, \dots, N, \quad \varphi^h = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i^h. \quad (8.6.11)$$

Разрешимость (8.6.11) и вопросы сходимости исследуются как и ранее.

## § 8.7. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ВЫБОРОМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

### 1. Общая схема алгоритма

Рассмотрим в пространстве  $\mathcal{H}$  уравнение переноса в несамосопряженной форме (8.6.3). Применим для решения его одну из модификаций обобщенного метода Бубнова—Галеркина. Для этого выберем



последовательность  $H_h$ ,  $h = h_1, h_2, \dots$ , конечномерных подпространств с координатными функциями  $\{\Phi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ , причем  $H_h \subset D(A)$  и последовательность  $\{AH_h\}$  полна в  $H$ . Строим приближенное решение в виде  $u^h = \sum_{i=1}^{N_h} a_i \Phi_i^h$ , где неизвестные  $\{a_i\}_{i=1}^{N_h}$  определяются из системы линейных уравнений

$$(Au^h, A\Phi_i^h) = (\bar{S}_0 u^h, A\Phi_i^h) + (F, A\Phi_i^h), \quad i = 1, \dots, N_h. \quad (8.7.1)$$

Одним из основных вопросов в рассматриваемом методе является выбор координатных функций. Если априори задаются функции  $\{\Phi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$  с известными аппроксимирующими свойствами (ортонормированные полиномы, сплайновые базисы и т. п.), то в этом случае часто трудно исследовать свойства системы  $\{A\Phi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ , что усложняет изучение таких вопросов, как получение оценок скорости сходимости, учет особенностей решения, специфики задачи и др.

Пусть область значений оператора  $\bar{S}_0$  и функций  $F$  принадлежит некоторому подпространству  $H_{S,f} \subset H$ . Зададим в  $H_{S,f}$  исходную систему базисных функций  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$  с финитными носителями порядка  $h$ , относительно которой предполагается выполнение двух свойств: для любого  $N_h$ -мерного вектора  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{N_h})$  справедливо соотношение

$$c_1 \|\mathbf{b}\|_2 \leq \sum_{i=1}^{N_h} b_i \varphi_i^h \leq c_2 \|\mathbf{b}\|_2, \quad \text{где постоянные } c_1, c_2 > 0$$

не зависят от  $\mathbf{b}$  и  $h$ , а  $\|\mathbf{b}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{N_h} b_i^2 \right)^{1/2}$ ; для любой  $v \in H_{S,f}$  суще-

ствует такая линейная комбинация  $\psi^h = \sum_{i=1}^{N_h} b_i \varphi_i^h$ , что  $\|\bar{S}_0 A^{-1} v - \psi^h\| \leq \varepsilon(h) \|v\|$ , где  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Построим функции  $\{\Phi_i^h = A^{-1} \varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$ , которые линейно-независимы при каждом  $h$  и принимаются в качестве координатных при решении (8.6.3) с помощью указанного метода. Отметим некоторые характерные черты рассмотренного выше алгоритма построения координатных функций.

По построению  $\{\Phi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$  обладают особенностями решения  $u$ , обусловленными их зависимостью от оператора  $A$ , а за счет специального выбора системы  $\{\varphi_i^h\}_{i=1}^{N_h}$  можно учитывать те или иные особенности правой части уравнения (8.6.3), которые часто априори известны.

В некоторых случаях может оказаться так, что  $B(u, F) \equiv \bar{S}_0 u + F$  обладает лучшими дифференциальными свойствами по сравнению с самим решением уравнения. Тогда можно с помощью малого числа исходных координатных функций добиться эффективной аппроксимации  $B(u, F)$  и надеяться на достаточно быструю сходимость  $u^h$  к  $u$ .

Если решение уравнения (8.6.3) зависит от переменных  $x_i, i = 1, \dots, n$ , а  $H_{S,f}$  состоит из функций, зависящих лишь от  $x_i, i = 1, \dots, m < n$ , то очевидно, что в данном случае достаточно ввести координатные функции  $\{\phi_i^h\}$ , зависящие лишь от  $x_1, \dots, x_m$ , и с их помощью аппроксимировать  $B(u, F) \in H_{S,f}$ . Решение же  $u$  будет приближаться через  $u^h$  по всем переменным. Это обстоятельство на практике приводит к значительному уменьшению количества координатных функций и, следовательно, порядка решаемой системы (8.7.1). В силу finитности  $\phi_i^h, i = 1, \dots, N_h$ , в левой части (8.7.1) возникает разреженная матрица, что облегчает решение системы с помощью итерационных методов; упрощается также вычисление  $\{\Phi_i^h\}$ , элементов матриц и значений  $(F, \phi_i^h)$ .

В силу сказанного выше можно предположить, что обобщенный метод Бубнова—Галеркина при использовании специальных координатных функций  $\{\Phi_j^h\}$  может оказаться достаточно эффективным при решении краевых задач, в которых можно достаточно просто строить  $A^{-1}$  (например, в сферически-симметричной области, в плоскопараллельной геометрии и т. п.). В работе [41] доказано, что при сделанных выше ограничениях система (8.7.1) имеет единственное решение при достаточно малых  $h$  и  $u^h \rightarrow u, Au^h \rightarrow Au$  при  $h \rightarrow 0$ .

## 2. Решение уравнения переноса в плоско-параллельной геометрии

Проиллюстрируем применение изложенного выше обобщенного метода Бубнова—Галеркина к решению некоторых частных задач для уравнения переноса. Сначала рассмотрим уравнение переноса в плоскопараллельной геометрии

$$\frac{\mu}{\Sigma(z)} \frac{\partial u}{\partial z} + u = \frac{c(z)}{2} \int_{-1}^1 g_0(\mu, \mu') u(z, \mu') d\mu' + F(z, \mu) \quad (8.7.2)$$

с граничным условием

$$u(H, \mu) = 0 \text{ при } -1 \leq \mu < 0; u(0, \mu) = 0 \text{ при } 0 < \mu \leq 1. \quad (8.7.3)$$

Предполагается, что  $F(z, \mu) \in L^\infty([0, H] \times (-1, 1))$ , а коэффициенты  $\Sigma(z), \Sigma_s(z) = c(z)\Sigma(z)$  — кусочно-непрерывны с возможными разрывами первого рода в точках  $\tilde{z}_i, i = 1, \dots, I < \infty$ . В операторной форме задачу (8.7.2), (8.7.3) будем записывать в виде уравнения (8.6.3).

Введем на  $[0, H]$  сетку с узлами  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = H$  таким образом, чтобы для  $h_j = z_j - z_{j-1}$  и  $h = H/N$  имело место соотношение  $0 < c_0 h \leq h_j \leq c_1 h, j = 1, \dots, N$ , где  $c_0, c_1 = \text{const}$ . Предполагаем, что часть узлов совпадает с точками  $z_i, i = 1, \dots, I, (I < N)$ .

Пусть

$$\phi_i^h(z) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} 1 & \text{при } z_{j-1} \leq z \leq z_j, j = 1, \dots, N; \\ 0 & z \notin [z_{j-1}, z_j]. \end{cases} \quad (8.7.4)$$

Построим функции  $\{\Phi_j(z, \mu)\}_{j=1}^N$ , где  $\Phi_j(z, \mu)$  суть решения задачи  $A\Phi_j = \varphi_j^h(z)$ , которые определяются формулой

$$\Phi_j(z, \mu) = \begin{cases} \int_x^z \Sigma(x) \varphi_j(x) \exp\left(-\int_x^z \frac{\Sigma(x')}{\mu} dx'\right) \frac{dx}{\mu} & \text{при } \mu > 0; \\ 0 & \\ \int_0^1 \Sigma(x) \varphi_j(x) \exp\left(+\int_z^x \frac{\Sigma(x')}{\mu} dx'\right) \frac{dx}{-\mu} & \text{при } \mu < 0. \end{cases} \quad (8.7.5)$$

Очевидно, что  $\Phi_j$  — линейно-независимы.

**З а м е ч а н и е.** Для практически важного случая кусочно-постоянных коэффициентов  $\Phi_j$  могут быть выписаны в явном виде (см. ниже), если же  $\Sigma(z)$  — кусочно-гладкая функция, то  $\Phi_j$  могут быть вычислены с помощью простейших квадратурных формул.

Функции  $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$  удовлетворяют граничным условиям (8.7.3) и обладают особенностями решения задачи (8.6.3), обусловленными «присутствием» оператора  $A$ . В силу этого использование их в качестве базисных функций устранил ряд трудностей при решении задачи. Однако  $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$  полностью не описывают поведение решения в зависимости от  $\mu$ . Поэтому при решении анизотропных задач необходимо вводить дополнительные базисные функции, зависящие от угловой переменной  $\mu$ .

Пусть на  $[-1, 1]$  определена система линейно-независимых финитных функций  $\psi_j(\mu)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , с носителем порядка  $\sim \Delta\mu = 2/M$ , обладающих следующим свойством аппроксимации: для любой  $\varphi(\mu) \in C^{(l)}[-1, 1]$  можно построить функцию вида  $\varphi_{\Delta\mu}(\mu) = \sum_{j=1}^M a_j \psi_j(\mu)$ ,  $a_j = \text{const}$ , такую, что

$$\|\varphi - \varphi_{\Delta\mu}\|_{C[-1, 1]} \leq 0 [(\Delta\mu)^l] \|\varphi\|_{C^{(l)}[-1, 1]}. \quad (8.7.6)$$

Будем искать приближенное решение (8.6.3) в виде

$$u^h = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_{ij} \Phi_i(z, \mu) \psi_j(\mu), \quad (8.7.7)$$

где неизвестные постоянные  $a_{ij}$  определим из системы линейных алгебраических уравнений

$$(A u^h, A \Phi_i \psi_j) = (\bar{S}_0 u^h, A \Phi_i \psi_j) + (F, A \Phi_i \psi_j), \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, \quad (8.7.8)$$

которая однозначно разрешима. Так как  $A \Phi_i \psi_j = \varphi_i(z) \psi_j(\mu)$ , то (8.7.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k, l} a_{k, l} (\varphi_k \psi_l, \varphi_i \psi_j) &= \sum_{k, l} a_{k, l} (\bar{S}_0 A^{-1} \varphi_k \psi_l, \varphi_i \psi_j) + \\ &+ (F, \varphi_i \psi_j), \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (8.7.9)$$

Из (8.7.9) видно, что в силу финитности  $\{\varphi_i\}$ ,  $\{\psi_j\}$  в левой части (8.7.8) возникает ленточная матрица. Отметим также, что матрица системы (8.7.8) положительно определена. Справедлива

**Теорема 8.7.1** [8]. Пусть: 1)  $\Sigma(z)$ ,  $\Sigma_s(z)$  — кусочно-гладкие класса  $C^{(1)}$ ; 2)  $g_0(\mu, \mu') \in C^{(l)}([-1, 1] \times [-1, 1])$ ,  $l \geq 0$ ; 3)  $F(z, \mu) \in C^{(1)}([-1, 1])$  при каждом фиксированном  $z \in (\tilde{z}_{i-1}, \tilde{z}_i)$  и при каждом  $\mu \in [-1, 1]$   $F(z, \mu) \in C^{(1)}([\tilde{z}_{i-1}, \tilde{z}_i])$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Тогда приближенные решения  $u^h$  сходятся при  $h, \Delta\mu \rightarrow 0$  к  $u(z, \mu)$  и имеет место оценка

$$\|A(u - u^h)\| \leq O\{h + (\Delta\mu)^l\}. \quad (8.7.10)$$

Рассмотрим случай, когда  $g_0(\mu, \mu')$  и  $F(z, \mu)$  имеют вид

$$g_0(\mu, \mu') = \sum_{j=0}^J g_{0,j} P_j(\mu) P_j(\mu'); \quad F(z, \mu) = \sum_{j=1}^J F_j(z) P_j(\mu), \quad (8.7.11)$$

где  $P_j(\mu)$  — ортонормированные полиномы Лежандра;  $g_{0,j}$  — постоянные;  $J$  — конечно, а относительно функций  $F_j(z)$  предполагаем, что они кусочно-гладкие класса  $C^{(1)}$  с возможными разрывами первого рода в точках  $\tilde{z}_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ .

В случае когда  $J$  невелико, приближенное решение  $u^h(z, \mu)$  удобно искать в виде

$$u^h(z, \mu) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J a_{ij} \Phi_i(z, \mu) P_j(\mu), \quad (8.7.12)$$

где  $a_{ij}$  определяются из системы уравнений

$$(Au^h, A\Phi_i P_j) = (S_0 u^h, A\Phi_i P_j) + (F, A\Phi_i P_j), \quad (8.7.13)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, J.$$

Отметим, что при таком выборе базисных функций в левой части (8.7.13) имеем диагональную матрицу. Приближенные решения здесь сходятся к точному при  $h \rightarrow 0$ , причем

$$\|A(u - u^h)\| \leq O(h). \quad (8.7.14)$$

Пусть теперь в (8.7.2), (8.7.3) индикатриса и источник изотропны, т. е.  $g_0 = 1$  и  $F = F(z)$ . При рассмотрении данной задачи функции  $\Phi_j(z, \mu)$  уже описывают зависимость решения от  $\mu$ . Поэтому нет необходимости вводить дополнительные базисные функции  $\psi_j(\mu)$ , что приводит к значительному сокращению числа базисных функций, а следовательно, и порядка решаемой системы линейных алгебраических уравнений. Ищем приближенное решение в виде

$$u^h(z, \mu) = \sum_{j=1}^N a_j \Phi_j(z, \mu), \quad (8.7.15)$$

где постоянные  $a_j$  определим из системы уравнений

$$(Au^h, A\Phi_j) = (\bar{S}_0 u^h, A\Phi_j) + (F, A\Phi_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (8.7.16)$$

которая однозначно разрешима [в левой части (8.7.16) возникает диагональная матрица].

**Теорема 8.7.2** [8]. Если  $\Sigma(z)$ ,  $\Sigma_s(z)$ ,  $F(z) \in C^{(1)}(\tilde{z}_{i-1}, \tilde{z}_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$  и  $g_0 = 1$ , то приближенное решение  $u^h$  сходится при  $h \rightarrow 0$  к точному решению задачи и имеют место оценки

$$\|A(u - u^h)\| \leq O(h); \|u_0 - u_0^h\|_{L_1(0, H)} \leq O(h^2 |\ln h|), \quad (8.7.17)$$

где

$$u_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(z, \mu') d\mu'; \quad u_0^h = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^h(z, \mu') d\mu'.$$

Отметим, что в работе [165] приведены более точные оценки по сравнению с (8.7.17), которые были получены на основе более детального анализа дифференциальных свойств решения рассматриваемой задачи.

**З а м е ч а н и е.** Можно показать [8], что в данном методе даже при предположении  $\Sigma(z)$ ,  $\Sigma_s(z) \in L_\infty(0, H)$ ,  $F(z) \in L_p(0, H)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , имеет место сходимость  $u_0^h$  при  $h \rightarrow 0$  к  $u_0$ , при этом  $\|u_0 - u_0^h\|_{L_1(0, H)} \leq O(h |\ln h|)$ .

Приведем теперь вид базисных функций  $\Phi_j(z, \mu)$  для случая кусочно-постоянных коэффициентов  $\Sigma(z)$ ,  $\Sigma_s(z)$ . Пусть  $\Sigma(z) = \{\Sigma_i = \text{const при } z \in (z_{i-1}, z_i), i = 1, \dots, N\}$ . Тогда  $\Phi_i(z, \mu)$  имеет вид

$$\mu > 0:$$

$$\Phi_i(z, \mu) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} 0, & \text{если } z \leq z_{i-1}; \\ [1 - \exp(-\Sigma_i(z - z_{i-1})/\mu)], & \text{если } z_{i-1} < z \leq z_i; \\ \exp(-\Sigma_{i+1}(z - z_i)/\mu) \times \\ \times [1 - \exp(-\Sigma_i h_i/\mu)], & \text{если } z_i < z \leq z_{i+1}; \\ I_i(z, \mu) \times [1 - \exp(-\Sigma_i h_i/\mu)], & \text{если } z > z_{i+1}, \end{cases}$$

$$\text{где } I_i(z, \mu) = \exp\left(-\Sigma_j(z - z_{j-1})/\mu - \sum_{l=i+1}^{j-1} \Sigma_l h_l/\mu\right), \text{ если } z_{j-1} \leq z \leq z_j, j = i+2, \dots, N.$$

$$\mu < 0:$$

$$\Phi_i(z, \mu) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} 0, & \text{если } z \geq z_i; \\ [1 - \exp(\Sigma_i(z_i - z)/\mu)], & \text{если } z_{i-1} \leq z < z_i; \\ \exp(\Sigma_{i-1}(z_{i-1} - z)/\mu) \times \\ \times [1 - \exp(\Sigma_i h_i/\mu)], & \text{если } z_{i-2} \leq z < z_{i-1}; \\ I_i(z, \mu) \times [1 - \exp(\Sigma_i h_i/\mu)], & \text{если } z < z_{i-2}, \end{cases}$$

$$\text{где } I_i(z, \mu) = \exp\left(\Sigma_j(z_j - z)/\mu\right) +$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{i-1} \Sigma_i h_i / \mu), \text{ если } z_{j-1} \leq z < z_j, j = i-2, \dots, 1.$$

В работах Г. И. Марчука и В. И. Агошкова [3, 165] обосновано применение обобщенного метода Бубнова—Галеркина со специальными базисными функциями к решению уравнения переноса в сферически-симметричной и трехмерной геометриях. Там же изучена устойчивость алгоритма, а также рассмотрены некоторые задачи с дельта-источниками.

## Глава 9

### РАЗНОСТНЫЕ АНАЛОГИ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ \*

#### § 9.1. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

Изложим метод дискретных ординат, разработанный Г. Виком [344] и С. Чандрасекаром [238]. Это один из первых методов приближенного решения кинетического уравнения; он был развит для плоской геометрии. В методе ординат в уравнении

$$l\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu') d\mu' + f(x, \mu) \quad (9.1.1)$$

интеграл по  $\mu'$  заменяется по квадратурной формуле

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu') d\mu' = \sum_{j=1}^N A_j f(\mu_j), \quad (9.1.2)$$

где  $N$  — некоторое целое число;  $A_j, \mu_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) — соответственно веса и узлы квадратурной формулы (9.1.2). Предположим, что

$$\sum_{j=1}^N A_j = 1, \quad -1 \leq \mu_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (9.1.3)$$

Тогда уравнение (9.1.1) заменится системой линейных дифференциальных уравнений

$$l\mu_i \frac{d\varphi_i}{dx} + \varphi_i = c \sum_{j=1}^N A_j \varphi_j + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (9.1.4)$$

где  $f_i = f(x, \mu_i)$ ;  $\varphi_i$  — приближенные значения  $\varphi(x, \mu_i)$ .

\* Для нахождения приближенных решений кинетических уравнений получил широкое распространение метод конечно-разностной аппроксимации задач теории переноса системами сеточных уравнений. Одними из первых в этом направлении являются работы Г. Вика [344] и С. Чандрасекара [238], предложивших метод дискретных ординат, Б. Карлсона [94, 95], предложившего  $S_N$ -метод, В. С. Владимирова [40] и С. Неймана [198], предложивших метод характеристик.

Исследуем некоторые свойства решений системы (9.1.4). Для этого найдем общее решение однородной системы; будем его искать в виде

$$\varphi_i(x) = \sum_{s=1}^N B_{si} \exp\left(\frac{\gamma_s x}{l}\right). \quad (9.1.5)$$

Подставив  $s$ -й член суммы (9.1.5) в однородное уравнение, соответствующее (9.1.4), получим

$$B_{si} = \frac{c}{(1 + \mu_i \gamma_s)} \sum_{j=1}^N A_j B_{sj}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.1.6)$$

Умножая (9.1.6) на  $A_i$  и суммируя затем результат по всем  $i$ , находим

$$1 = c \sum_{j=1}^N A_j (1 + \mu_j \gamma_s)^{-1}, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (9.1.7)$$

Это уравнение определяет допустимые значения  $\gamma_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ . Решение однородной системы (9.1.4) можно теперь записать в виде

$$\varphi_i(x) = c \sum_{s=1}^N B_s (1 + \mu_i \gamma_s)^{-1} \exp\left(\frac{\gamma_s x}{l}\right), \quad (9.1.8)$$

где  $B_s = \sum_{j=1}^N A_j B_{sj}$ .

Исследуем корни характеристического уравнения (9.1.7). При  $N \rightarrow \infty$  (9.1.7) переходит в уравнение

$$1 = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 + \mu\gamma_s} = \frac{c}{2\gamma_s} \ln \frac{1 + \gamma_s}{1 - \gamma_s},$$

исследованное в гл. 5 [см. (5.5.7)]. Следовательно, можно надеяться, что при удачном выборе квадратуры (9.1.2) имеются два решения (9.1.7) (обозначим их  $\gamma_1, \gamma_{-1}$ ), которые стремятся к  $\pm v_0^{-1}$  при  $N \rightarrow \infty$ . Сделаем дополнительные предположения относительно квадратуры (9.1.2). Пусть она:

- 1) симметрична относительно  $\mu = 0$ , т. е.  $\mu_j = -\mu_{N+1-j}$ ,  $A_j = A_{N+1-j}$ ;
- 2) точна для многочленов степени  $z(N)$  [например,  $z(N) = 2N - 1$ ];
- 3)  $A_j > 0$ ,  $\mu_j \neq \mu_i$  при  $i \neq j$  и  $\mu_j \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Тогда легко видеть, что  $N$  четно, а корни (9.1.7) расположены парами  $\pm \gamma_s$ . Полагая  $\gamma_{-s} = -\gamma_s$  и объединяя члены при  $j$  и  $N + 1 - j$  в уравнении (9.1.7), получаем

$$1 = c \sum_{j=1}^{N/2} A_j (1 - \mu_j^2 \gamma_s^2)^{-1}, \quad s = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (9.1.9)$$

Поскольку  $A_j > 0$ , между двумя любыми последовательными значениями  $\mu_j^{-2}$  лежит один корень уравнения

$$1 = c \sum_{j=1}^{N/2} A_j (1 - \mu_j^2 t)^{-1}. \quad (9.1.10)$$

Это значит, что существует  $N/2$  корня уравнения (9.1.10) с модулем, большим единицы:  $\gamma_{\pm s}$ ,  $s = 2, 3, \dots, N/2$ . При  $0 < c < 1$  правая часть (9.1.10) меньше единицы при  $t = 0$  и стремится к  $+\infty$  при  $t \rightarrow \bar{\mu}^{-2} - 0$ , где  $\bar{\mu}^2 = \max_i \mu_i^2$ . Следовательно, между 0 и  $\bar{\mu}^{-2}$  существует корень  $t_1$  уравнения (9.1.10) и ему соответствуют два значения  $\gamma_{\pm 1} = \pm \sqrt{t_1}$ . При  $c = 1$   $t_1 = 0$ , а при  $c > 1$  корни  $\gamma_1, \gamma_{-1}$  становятся чисто мнимыми. Общее решение неоднородной системы (9.1.4) находится известными приемами. Постоянные  $B_s$  определяются из краевых условий.

Рассмотрим теперь квадратуру (9.1.2), в которой  $\mu_i \in (\tilde{\mu}_{i-1}, \tilde{\mu}_i)$ , где  $-1 = \tilde{\mu}_0 < \tilde{\mu}_1 < \dots < \tilde{\mu}_{N-1} < \tilde{\mu}_N = 1$  — некоторое разбиение отрезка  $[-1, 1]$ . Пусть  $\Delta\mu_i = \tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_{i-1}$ ;  $A_i = \Delta\mu_i/2$ ;  $\Delta\mu = \max_i \Delta\mu_i$  и одна из точек  $\mu_i$  совпадает со значением  $\mu = 0$ . Предположим также, что  $f(x, \mu)$  является кусочно-гладкой по  $\mu$  с возможными разрывами первого рода в некоторых из точек сетки, причем при  $\mu, \mu' \in (\tilde{\mu}_{k-1}, \tilde{\mu}_k)$

$$\sup_{x \in I} |f(x, \mu) - f(x, \mu')| \leq O(|\mu - \mu'|^\beta), \quad 0 < \beta \leq 1.$$

Для этого случая В. И. Агошковым [6] доказано, что система дифференциальных уравнений (9.1.4) однозначно разрешима, приближенные решения задачи  $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$  сходятся к значениям  $\{\varphi(x, \mu_i)\}_{i=1}^N$  и справедливы оценки погрешности при  $\Delta\mu \rightarrow 0$ :

$$\left[ \sum_{i=1}^N A_i \left\{ |\mu_i| |\varphi_i(H) - \varphi(H, \mu_i)|^2 + |\varphi_i(0) - \varphi(0, \mu_i)|^2 + \int_0^H dx l(x) |\varphi_i(x) - \varphi(x, \mu_i)|^2 \right\} \right]^{1/2} \leq O[\Delta\mu^{1/2} + \Delta\mu^\beta];$$

$$\sum_{i=1}^N A_i \|\varphi_i(x) - \varphi(x, \mu_i)\|_{L_1(0, H)} \leq O[\Delta\mu(1 + |\ln \Delta\mu|) + \Delta\mu^\beta].$$

## § 9.2. $S_n$ -МЕТОД

Б. Карлсоном [94, 95] был предложен численный метод решения задач со сферической и цилиндрической симметрией, основанный на замене производных разностными отношениями в кинетическом уравнении, записанном в сферической или цилиндрической системе координат. Разностные схемы  $S_n$  - метода содержатся также в работах [162, 186]; в работе [229] уравнения  $S_n$ -метода получены для кинетических уравнений в дивергентной форме для сферически-симметричных задач.



# 1. Сферически-симметричный случай

Рассмотрим область  $0 \leq r \leq R$ , в которой задан изотропный источник нейтронов  $f(r)$ . Тогда функция  $\varphi(r, \mu)$  определяется уравнением

$$\frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^2 \mu \varphi) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1-\mu^2}{r} \varphi \right) + \Sigma \varphi = \Sigma_s \varphi_0 + f(r), \quad (9.2.1)$$

где

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(r, \mu') d\mu'. \quad (9.2.2)$$

Для изучения метода важно знать уравнение для тока нейтронов:

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu \varphi(r, \mu) d\mu. \quad (9.2.3)$$

Оно получается интегрированием по  $\mu$  от  $\mu = -1$  до  $\mu = 1$  обеих частей уравнения (9.2.1) и имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \varphi_1 + \Sigma_0 \varphi_0 = f(r), \quad (9.2.4)$$

где  $\Sigma_0 = \Sigma - \Sigma_s$ . Уравнение (9.2.4) выражает баланс нейтронов. В самом деле, умножая (9.2.4) на  $r^2$  и интегрируя по  $r$  от  $a$  до  $b$ ,  $0 \leq a \leq b \leq R$ , имеем

$$b^2 \varphi_1(b) - a^2 \varphi_1(a) = \int_a^b (f(r) - \Sigma_0 \varphi_0) r^2 dr, \quad (9.2.5)$$

т. е. результирующие токи нейтронов через поверхности  $r = b$ ,  $r = a$  отличаются общим числом нейтронов, родившихся в сферическом слое  $a \leq r \leq b$ .

Разобьем область изменения переменных  $r$  и  $\mu$   $\{(r, \mu) : 0 \leq r \leq R, -1 \leq \mu \leq 1\}$  на ряд ячеек, ограниченных координатными линиями  $r = r_k$ ,  $\mu = \mu_i$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Предположим, что  $r_0 = 0$ ,  $r_N = R$ ,  $r_{k-1} < r_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\mu_n = 1$ ,  $\mu_0 = -1$ ,  $\mu_{i-1} < \mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим  $D_{ki}$  ячейку, ограниченную линиями  $r = r_{k-1}$ ,  $r = r_k$ ,  $\mu = \mu_{i-1}$ ,  $\mu = \mu_i$ . Умножим уравнение (9.2.1) на  $r^2 dr d\mu$  и проинтегрируем результат по ячейке  $D_{ki}$ . Считая коэффициенты  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$  постоянными в  $D_{ki}$ , получаем

$$\begin{aligned} & r_k^2 \int_{\mu_{i-1}}^{\mu_i} \mu \varphi(r_k, \mu) d\mu - r_{k-1}^2 \int_{\mu_{i-1}}^{\mu_i} \mu \varphi(r_{k-1}, \mu) d\mu + \\ & + (1-\mu_i^2) \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi(r, \mu_i) r dr - (1-\mu_{i-1}^2) \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi(r, \mu_{i-1}) r dr + \end{aligned}$$

$$+\sum_{D_{ki}} \int \varphi r^2 dr d\mu = \sum_s \Delta\mu_i \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi_0 r^2 dr + \Delta\mu_i \int_{r_{k-1}}^{r_k} f(r) r^2 dr, \quad (9.2.6)$$

где  $\Delta\mu_i = \mu_i - \mu_{i-1}$ .

Интегральное равенство (9.2.6) послужит нам основой для получения уравнений  $S_n$ -метода; оно выражает баланс нейтронов в ячейке  $D_{ki}$ . В работах, посвященных  $S_n$ -методу, предполагается, что функция  $\varphi(r, \mu)$  полилинейна в  $D_{ki}$  по переменным  $r, \mu$  и принимает значения  $\varphi_{ki} = \varphi(r_k, \mu_i)$  в точках  $(r_k, \mu_i)$ . Тогда в  $D_{ki}$

$$\varphi(r, \mu) = [(\mu_i - \mu)F_{i-1}(r) + (\mu - \mu_{i-1})F_i(r)](\Delta\mu_i)^{-1}, \quad (9.2.7)$$

где

$$F_j = [(r - r_{k-1})\varphi(r_k, \mu_j) + (r_k - r)\varphi(r_{k-1}, \mu_j)](\Delta r_k)^{-1}, \\ j = i, i-1; \Delta r_k = r_k - r_{k-1}.$$

Подставив выражение (9.2.7) в уравнение (9.2.6), получим четырехточечное разностное уравнение  $S_n$ -метода. После вычисления интегралов в (9.2.6) при предположении (9.2.7) будем иметь

$$a_{ki}\varphi_{ki} + b_{ki}\varphi_{k-1i} + c_{ki}\varphi_{ki-1} + d_{ki}\varphi_{k-1i-1} = \Delta\mu_i Q_{k-1/2}, \quad (9.2.8)$$

где [186]

$$Q_{k-1/2} = \sum_s \Delta r_k [(2r_k^2 + (r_k + r_{k-1})^2)\varphi_0(r_k) + (2r_{k-1}^2 + (r_k + r_{k-1})^2) \times \\ \times \varphi_0(r_{k-1})]/12 + \bar{f}_{k-1/2}; \quad (9.2.9)$$

$$\bar{f}_{k-1/2} = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f r^2 dr; \quad (9.2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{ki} &= r_k^2 \Delta\mu_i (2\mu_i + \mu_{i-1})/6 + (1 - \mu_i^2) \Delta r_k (2r_k + r_{k-1})/6 + \\ &+ \Sigma \Delta\mu_i \Delta r_k (2r_k^2 + (r_k + r_{k-1})^2)/24; \\ b_{ki} &= -r_{k-1}^2 \Delta\mu_i (2\mu_i + \mu_{i-1})/6 + (1 - \mu_i^2) \Delta r_k (2r_{k-1} + \\ &+ r_k)/6 + \Sigma \Delta\mu_i \Delta r_k (2r_{k-1}^2 + (r_k + r_{k-1})^2)/24; \\ c_{ki} &= r_k^2 \Delta\mu_i (2\mu_{i-1} + \mu_i)/6 - (1 - \mu_{i-1}^2) \Delta r_k (2r_k + r_{k-1})/6 + \\ &+ \Sigma \Delta\mu_i \Delta r_k (2r_k^2 + (r_k + r_{k-1})^2)/24; \\ d_{ki} &= -r_{k-1}^2 \Delta\mu_i (2\mu_{i-1} + \mu_i)/6 - (1 - \mu_{i-1}^2) \Delta r_k (2r_{k-1} + \\ &+ r_k)/6 + \Sigma \Delta\mu_i \Delta r_k (2r_{k-1}^2 + (r_k + r_{k-1})^2)/24. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.11)$$

Поскольку коэффициенты уравнения (9.2.1) зависят только от  $r$ , целесообразно разбиение по  $\mu$  выбрать наиболее простым способом, гарантирующим достаточно хорошую аппроксимацию по угловой переменной. Исходя из этого, разобьем интервал изменения  $\mu$   $[-1, 1]$  на  $n$  равных частей ( $n$  — четное число) длиной  $2/n$ .

Тогда  $\mu_0 = -1$ ,  $\mu_i = -1 + 2i/n$ ,  $\mu_n = 1$ ,  $\Delta\mu_i = 2/n$ ,  $\mu_{n/2} = 0$ . С учетом предположений (9.2.7) о функции  $\varphi(r, \mu)$  имеем

$$\varphi_0(r_k) = \sum_{i=1}^n \delta_i \varphi(r_k, \mu_i), \quad (9.2.12)$$

где

$$\delta_0 = \delta_n = 1/2n; \delta_i = 1/n \text{ при } 0 < i < n.$$

Пусть в уравнении (9.2.1)  $\mu = -1$ . Тогда

$$\left(-\frac{d}{dr} + \Sigma\right) \varphi(r, -1) = \Sigma_s \varphi_0 + f(r). \quad (9.2.13)$$

Умножим (9.2.13) на  $r^2$  и проинтегрируем результат  $[r_{k-1}, r_k]$ :

$$\begin{aligned} -r_k^2 \varphi(r_k, -1) + r_{k-1}^2 \varphi(r_{k-1}, -1) + 2 \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi(r, -1) r dr + \\ + \Sigma \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi(r, -1) r^2 dr = \Sigma_s \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi_0 r^2 dr + \bar{f}_{k-1/2}. \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

В предположении (9.2.7) имеем

$$\begin{aligned} -r_k^2 \varphi_{k0} + r_{k-1}^2 \varphi_{k-10} + \Delta r_k ((2r_k + r_{k-1}) \varphi_{k0} + \\ + (2r_{k-1} + r_k) \varphi_{k-10})/3 + \Sigma \Delta r_k ((2r_k^2 + (r_k + r_{k-1})^2) \varphi_{k0} + \\ + (2r_{k-1}^2 + (r_k + r_{k-1})^2) \varphi_{k-10})/12 = Q_{k-1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi_{k-10} = \alpha_k \varphi_{k0} + \beta_k Q_{k-1/2}, \quad (9.2.15)$$

где

$$\alpha_k = \frac{r_k^2 - \Delta r_k (2r_k + r_{k-1})/3 - \Sigma \Delta r_k [2r_k^2 + (r_k + r_{k-1})^2]/12}{r_{k-1}^2 + \Delta r_k (2r_{k-1} + r_k)/3 + \Sigma \Delta r_k [2r_{k-1}^2 + (r_k + r_{k-1})^2]/12}.$$

Естественно потребовать, чтобы

$$0 \leq \alpha_k \leq 1. \quad (9.2.16)$$

Правая часть неравенства (9.2.16) всегда будет выполнена при  $\Sigma \geq 0$ , а левая — если числитель в формуле для  $\alpha_k$  неотрицателен, а это реализуется при условии

$$0 \leq \Delta r_k \leq 3 [\Sigma (2 + (1 + r_{k-1} r_k^{-1})^2)/4 + 2r_k^{-1} + r_{k-1} r_k^{-2}]^{-1}.$$

При  $\mu = 1$  уравнение (9.2.1) имеет вид

$$\left(\frac{d}{dr} + \Sigma\right) \varphi(r, 1) = \Sigma_s \varphi_0 + f(r). \quad (9.2.17)$$

Умножая (9.2.17) на  $r^2$  и интегрируя результат по  $[r_{k-1}, r_k]$ , получаем

$$\begin{aligned} r_k^2 \varphi_{kn} - r_{k-1}^2 \varphi_{k-1n} + \Delta r_k [(2r_k + r_{k-1}) \varphi_{kn} + (2r_{k-1} + r_k) \varphi_{k-1n}]/3 + \\ + \Sigma \Delta r_k [(2r_k^2 + (r_k + r_{k-1})^2) \varphi_{kn} + (2r_{k-1}^2 + (r_k + r_{k-1})^2) \varphi_{k-1n}]/12 = \\ = Q_{k-1/2}. \end{aligned} \quad (9.2.18)$$

Теперь опишем порядок счета в одной простой итерации с использованием полученных разностных уравнений при решении задачи, в которой при  $r = R$  задано краевое условие

$$\varphi(R, \mu) = 0 \text{ при } \mu < 0. \quad (9.2.19)$$

Пусть задано  $Q_{k-1/2}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Согласно условию (9.2.19) положим  $\varphi_{Ni} = 0$  при  $i = 0, 1, \dots, n/2$ . Пользуясь уравнением (9.2.15), определим  $\varphi_{N-1,0}$ , а используя уравнения (9.2.8), найдем  $\varphi_{N-1i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n/2$ . Затем в таком же порядке вычислим  $\varphi_{N-2i}$ , ...,  $\varphi_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, n/2$ . Значение  $\varphi$  при  $r = 0$  получим из уравнения (9.2.15). При переходе от  $r_k$  к  $r_{k-1}$  при  $\mu_i \leq 0$  запоминаются значения  $\varphi_{k-1i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n/2$ . Одновременно по этим значениям вычисляются суммы, входящие в  $\varphi_0(r)$  для следующего итерационного приближения. Таким образом, расчет  $\varphi_{ki}$  и слагаемых в  $\varphi_0$  ведется при  $-1 \leq \mu_i < 0$  циклами по убывающим значениям  $r_k$ ,  $k = N - 1, N - 2, \dots, 0$ , а внутри каждого цикла — по последовательности точек  $(r_k, \mu_i)$ , находящихся на одном радиусе при  $i = 0, 1, \dots, n/2$ . Такой порядок расчета позволяет в случае многозонных задач не производить при каждом вычислении нового значения  $\varphi_{ki}$  выборку из памяти ЭВМ значений  $\Sigma_s, \Sigma, Q$ , зависящих только от  $r$ , а сделать такую выборку один раз при расчете  $\varphi_{ki}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n/2$ . Расчет  $\varphi_{ki}$  при  $i = n/2 + 1, \dots, n$  и слагаемых в  $\varphi_0$  начинается с  $k = 1$  по формуле (9.2.8), затем расчеты повторяются для  $k = 2, \dots, N$ . Для контроля устойчивости описанной процедуры расчета следует дополнительно просчитать  $\varphi_{kn}$  по формуле (9.2.18) и сравнить на точность эти значения с ранее полученными. Функция  $\varphi_1(r)$  рассчитывается после того, как найдена функция  $\varphi_0(r)$ ; для этого используют разностный аналог уравнения баланса (9.2.5) и условие  $\varphi_1(0) = 0$ .

Легко убедиться в том, что уравнения (9.2.8), (9.2.15), (9.2.18) локально аппроксимируют левую часть уравнения (9.2.1) с точностью  $O((\Delta r_k)^2 + (\Delta \mu_i)^2)$  на гладких решениях его, но на всем классе решений этого уравнения локальная аппроксимация может отсутствовать. Расчеты с использованием уравнений (9.2.8) иногда показывают неустойчивость счета, при которой наблюдается сильная осцилляция решений, сопровождаемая даже переменной знака. К сожалению, критерии устойчивости в  $S_n$ -методе до сих пор не выяснены.

## 2. Цилиндрически-симметричная геометрия

Теперь получим расчетные формулы  $S_n$ -метода в случае одномерной цилиндрической геометрии. Для этого кинетическое уравнение запишем в дивергентной форме:

$$\sqrt{1-\gamma^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \psi \varphi) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\sin \psi}{r} \varphi \right) \right] + \Sigma \varphi = \Sigma_s \varphi_0 + f(r), \quad (9.2.20)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\gamma \int_0^\pi \varphi(r, \psi, \gamma) d\psi. \quad (9.2.21)$$

В этом случае уравнение для тока нейтронов

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\gamma \int_0^\pi \sqrt{1-\gamma^2} \cos \psi \varphi(r, \psi, \gamma) d\psi \quad (9.2.22)$$

имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi_1) + \Sigma_0 \varphi_0 = f(r).$$

Оно выражает баланс нейтронов: умножая его на  $r$  и интегрируя от  $a$  до  $b$ , получаем

$$b\varphi_1(b) - a\varphi_1(a) = \int_a^b (f(r) - \Sigma_0 \varphi_0) r dr. \quad (9.2.23)$$

Область изменения переменных  $r, \psi$  разобьем на ячейки, ограниченные координатными линиями  $r = r_k, \psi = \psi_i, k = 0, \dots, N, i = 0, 1, \dots, n$ , где  $r_0 = 0; r_N = R; r_{k-1} < r_k, k = 1, \dots, N; \psi_0 = \pi; \psi_n = 0; \psi_i < \psi_{i-1}, i = 1, \dots, n$ . Обозначим  $D_{ki}$  ячейку, ограниченную линиями  $r = r_{k-1}, r = r_k, \psi = \psi_{i-1}, \psi = \psi_i$ . Умножим уравнение (9.2.20) на  $rdrd\psi$  и проинтегрируем результат по объему ячейки  $D_{ki}$ . Тогда, считая коэффициенты  $\Sigma, \Sigma_0$  постоянными в  $D_{ki}$ , получаем

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\gamma^2} \left[ r_k \int_{\psi_i}^{\psi_{i-1}} \varphi(r_k, \psi, \gamma) \cos \psi d\psi - r_{k-1} \int_{\psi_i}^{\psi_{i-1}} \varphi(r_{k-1}, \psi, \gamma) \times \right. \\ & \times \cos \psi d\psi - \sin \psi_{i-1} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi(r, \psi_{i-1}, \gamma) dr + \sin \psi_i \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi(r, \psi_i, \gamma) dr \left. \right] + \\ & + \Sigma \int_{D_{ki}} \varphi r dr d\psi = \Sigma_s \bar{\Delta} \psi_i \int_{r_{k-1}}^{r_k} \varphi_0 r dr + \bar{\Delta} \psi_i \int_{r_{k-1}}^{r_k} f r dr, \quad (9.2.24) \end{aligned}$$

где  $\bar{\Delta} b_i = b_{i-1} - b_i, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N$ . Равенство (9.2.24) выражает для каждого  $\gamma$  баланс нейтронов в ячейке  $D_{ki}$ . Чтобы использовать (9.2.24) для получения разностных уравнений, необходимо выбрать достаточно хороший и простой набор функций, которыми хотя бы приблизить функцию  $\varphi(r, \psi, \gamma)$  как функцию переменных  $r, \psi$ . При таком выборе следует учесть, что  $\varphi(r, \psi, \gamma)$  как функция от  $\psi$  является четной периодической функцией с периодом  $2\pi$ , а для всех гладких решений  $d\varphi_0/dr = 0$  при  $r = 0$ .<sup>1</sup> Исходя из этого, функцию  $\varphi(r, \psi, \gamma)$  представим в  $D_{ki}$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, \psi, \gamma) = & (\cos \psi_i - \cos \psi_{i-1})^{-1} ((\cos \psi_i - \cos \psi) F_{i-1}(r, \gamma) + \\ & + (\cos \psi - \cos \psi_{i-1}) F_i(r, \gamma)), \quad (9.2.25) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_j(r, \gamma) = & (r_k^2 - r_{k-1}^2)^{-1} ((r^2 - r_{k-1}^2) \varphi(r_k, \psi_j, \gamma) + (r_k^2 - r^2) \times \\ & \times \varphi(r_{k-1}, \psi_j, \gamma)), \quad j = i, i-1, \end{aligned}$$

Таким образом, мы приблизим  $\varphi(r, \psi, \gamma)$ , используя функции  $I, r^2$  по  $r$  и  $1, \cos \psi$  по  $\psi$ . Вычисляя интегралы в (9.2.24) от функции  $\varphi$  вида (9.2.25), получаем

$$a_{ki} \varphi_{ki} + b_{ki} \varphi_{k-1, i} + c_{ki} \varphi_{k, i-1} + d_{ki} \varphi_{k-1, i-1} = Q_{k-1/2} \bar{\Delta} \psi_k, \quad (9.2.26)$$

где

$$Q_{k-1/2} = \Sigma_s (r_k^2 - r_{k-1}^2) (\varphi_0(r_k) + \varphi_0(r_{k-1})) / 4 + \bar{f}_{k-1/2};$$

$$\bar{f}_{k-1/2} = \int_{r_{k-1}}^{r_k} f r dr;$$

$$a_{ki} = \sqrt{1-\gamma^2} \left[ \frac{-r_k}{\bar{\Delta} \cos \psi_i} \left( \frac{1}{2} (\bar{\Delta} \psi_i + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \sin 2\psi_i) - \cos \psi_{i-1} \bar{\Delta} \sin \psi_i \right) + \frac{\sin \psi_i \Delta r_k (2r_{k-1} + r_k)}{3(r_k + r_{k-1})} \right] - \frac{\Sigma \Delta r_k^2}{4\bar{\Delta} \cos \psi_i} (\bar{\Delta} \sin \psi_i - \bar{\Delta} \psi_i \cos \psi_{i-1});$$

$$b_{ki} = \sqrt{1-\gamma^2} \left[ \frac{r_{k-1}}{\bar{\Delta} \cos \psi_i} \left( \frac{1}{2} (\bar{\Delta} \psi_i + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \sin 2\psi_i) - \cos \psi_{i-1} \bar{\Delta} \sin \psi_i \right) + \frac{\sin \psi_i \Delta r_k (2r_k + r_{k-1})}{3(r_k + r_{k-1})} \right] - \frac{\Sigma \Delta r_k^2}{4\bar{\Delta} \cos \psi_i} (\bar{\Delta} \sin \psi_i - \bar{\Delta} \psi_i \cos \psi_{i-1});$$

$$c_{ki} = \sqrt{1-\gamma^2} \left[ \frac{-r_k}{\bar{\Delta} \cos \psi_i} \left( \cos \psi_i \bar{\Delta} \sin \psi_i - \frac{1}{2} (\bar{\Delta} \psi_i + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \sin 2\psi_i) \right) - \frac{\sin \psi_{i-1} \Delta r_k (2r_{k-1} + r_k)}{3(r_k + r_{k-1})} \right] - \frac{\Sigma \Delta r_k^2}{4\bar{\Delta} \cos \psi_i} (\bar{\Delta} \psi_i \cos \psi_i - \bar{\Delta} \sin \psi_i);$$

$$d_{ki} = \sqrt{1-\gamma^2} \left[ \frac{r_{k-1}}{\bar{\Delta} \cos \psi_i} \left( \cos \psi_i \bar{\Delta} \sin \psi_i - \frac{1}{2} (\bar{\Delta} \psi_i + \frac{1}{2} \bar{\Delta} \sin 2\psi_i) \right) - \frac{\sin \psi_{i-1} \Delta r_k (2r_k + r_{k-1})}{3(r_k + r_{k-1})} \right] - \frac{\Sigma \Delta r_k^2}{4\bar{\Delta} \cos \psi_i} (\bar{\Delta} \psi_i \cos \psi_i - \bar{\Delta} \sin \psi_i);$$

$$\Delta r_k = r_k - r_{k-1}, \quad \Delta r_k^2 = r_k^2 - r_{k-1}^2.$$

Положив в уравнении (9.2.20)  $\psi = \pi$ , получим

$$\left( -\sqrt{1-\gamma^2} \frac{d}{dr} + \Sigma \right) \varphi(r, \pi, \gamma) = \Sigma_s \varphi_0 + f. \quad (9.2.27)$$

Умножим (9.2.27) на  $r$  и проинтегрируем по  $[r_{k-1}, r_k]$ . Предполагая выполненным разложение (9.2.25), получаем

$$-2\sqrt{1-\gamma^2} \Delta r_k^2 (\varphi(r_k, \pi, \gamma) - \varphi(r_{k-1}, \pi, \gamma)) / 3\Delta r_k^2 + \Sigma \Delta r_k^2 (\varphi(r_k, \pi, \gamma) + \varphi(r_{k-1}, \pi, \gamma)) / 4 = \Sigma_s \Delta r_k^2 (\varphi_0(r_k) + \varphi_0(r_{k-1})) / 4 + \bar{f}_{k-1/2}. \quad (9.2.28)$$

Таким образом,

$$\varphi_{k-10} = \alpha_k \varphi_{k0} + \beta_k Q_{k-1/2},$$

где

$$\alpha_k = \left( \frac{2\sqrt{1-\gamma^2} \Delta r_k^3}{3\Delta r_k^2} + \frac{\Sigma}{4} \Delta r_k^2 \right)^{-1} \left( \frac{2\sqrt{1-\gamma^2} \Delta r_k^3}{3\Delta r_k^2} - \frac{\Sigma}{4} \Delta r_k^2 \right).$$

Если  $\gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  — некоторая сетка по переменной  $\gamma$ , то требование, чтобы  $0 \leq \alpha_k$  было выполнено, приводит к неравенству

$$\Delta r_k < 8 \min \sqrt{1-\gamma_j^2} (1-r_k r_{k-1} (r_k+r_{k-1})^{-2}) / (3\Sigma). \quad (9.2.29)$$

Мы аппроксимировали (9.2.20) при  $\Phi = \pi$  и  $\Phi \neq \pi$  одинаково, чтобы показать, что при  $\Phi$ , близких к  $\pi$ , и для (9.2.26)  $\alpha_k$  может менять знак.

Пусть  $M$  — целое число. Уравнения (9.2.26), (9.2.28) будем решать при  $\gamma = \gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , где  $\gamma_j$  — положительные корни многочлена Лежандра  $P_{2M}(x)$  степени  $2M$ . За  $\psi_i$  целесообразно взять величины  $\psi_i = \pi(1-i/n)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  — четно. Положим

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^M A_j \left[ \frac{1}{2} (\varphi(r, 0, \gamma_j) + \varphi(r, \pi, \gamma_j)) + \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(r, \psi_i, \gamma_j) \right], \quad (9.2.30)$$

где  $A_j$  — веса квадратурной формулы Гаусса для отрезка  $[-1, 1]$ , соответствующие положительным корням многочлена  $P_{2M}(x)$ . Можно убедиться в том [101], что значения  $\varphi_0(r)$ , вычисленные по формулам (9.2.21), (9.2.30), совпадут, если  $\varphi(r, \psi, \gamma)$  для каждого  $r$  является четным тригонометрическим многочленом по  $\psi$  степени  $2n-1$  и многочленом по  $\gamma$  степени  $4M-1$ . Таким образом, нулевой момент  $\varphi_0(r)$  при гладких решениях довольно точно вычисляется по формуле (9.2.30).

Функцию  $\varphi_1(r_k)$  определяем из решения разностного уравнения

$$\Delta(r\varphi_1(r))_k + \Sigma_0 \Delta r_k^2 (\varphi_0(r_k) + \varphi_0(r_{k-1})) / 4 = \bar{f}_{k-1/2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \varphi_1(0) = 0, \quad (9.2.31)$$

которое является разностным аналогом уравнения баланса (9.2.23).

При  $\Phi = 0$  уравнение (9.2.20) имеет вид

$$\left( \sqrt{1-\gamma^2} \frac{d}{dr} + \Sigma \right) \varphi(r, 0, \gamma) = \Sigma_s \varphi_0 + f.$$

Умножая его на  $r$  и интегрируя результат по  $[r_{k-1}, r_k]$ , с учетом (9.2.25) получаем

$$2\sqrt{1-\gamma^2} \Delta r_k^2 (\varphi(r_k, 0, \gamma) - \varphi(r_{k-1}, 0, \gamma)) / (3\Delta r_k^2) + \Sigma \Delta r_k^2 (\varphi(r_k, 0, \gamma) + \varphi(r_{k-1}, 0, \gamma)) / 4 = \Sigma_s \Delta r_k^2 (\varphi_0(r_k) + \varphi_0(r_{k-1})) / 4 + \bar{f}_{k-1/2}. \quad (9.2.32)$$

Опишем порядок счета в одной простой итерации при решении задачи, в которой при  $r = R$  задано краевое условие

$$\varphi(R, \Phi, \gamma) = 0 \text{ при } \pi/2 \leq \Phi \leq \pi, \quad (9.2.33)$$

Пусть задано,  $Q_{k-1/2}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Согласно (9.2.33) положим  $\varphi_{Ni} = 0$  при  $i = 0, 1, \dots, n/2$  и  $\gamma = \gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Пользуясь урав-

нением (9.2.28), определяем  $\varphi_{N-1,0}$  при  $\gamma = \gamma_i$ . Затем находим  $\varphi_{N-1,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n/2$ , при  $\gamma = \gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , используя уравнения (9.2.26). Потом в таком же порядке вычисляем  $\varphi_{N-2,i}, \dots, \varphi_{1i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n/2$ ,  $\gamma = \gamma_j$ . Значения  $\varphi$  при  $r = 0$ ,  $\gamma = \gamma_j$  определяем из уравнений (9.2.28). При переходе от  $r_k$  к  $r_{k-1}$  при  $\pi/2 \leq \psi \leq \pi$  запомним значения  $\varphi_{k-1,i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n/2$ , при  $\gamma = \gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Одновременно по этим значениям определяем суммы, входящие в  $\varphi_0(r)$ , для следующего итерационного приближения.

Таким образом, расчет  $\varphi_{ki}(\gamma_j)$  и слагаемых в  $\varphi_0$  ведется при  $\pi/2 \leq \psi_i \leq \pi$  циклами по убывающим значениям  $r_k$ ,  $k = N, \dots, 0$ , внутри каждого цикла — по последовательности точек  $(r_k, \psi_i)$ , находящихся на одном радиусе, при  $i = 0, 1, \dots, n/2$ , а в каждой точке  $(r_k, \psi_i)$  расчет ведется для всех  $\gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Расчет  $\varphi_{ki}(\gamma_j)$  при  $i = n/2 + 1, \dots, n$  и слагаемых в  $\varphi_0$  начинается с  $k = 1$  по формуле (9.2.26), затем расчеты повторяются для  $k = 2, 3, \dots, N$ . Для контроля устойчивости следует дополнительно просчитать  $\varphi_{kn}(\gamma_j)$  по формуле (9.2.32). Значения  $\varphi_1(r)$  находят с помощью (9.2.31). Уравнения (9.2.26) (9.2.28), (9.2.32) локально аппроксимируют левую часть уравнения (9.2.20) с точностью  $O((\Delta r_k)^2 + (\Delta \psi_i)^3)$  на гладких решениях его, но на всем классе решений этого уравнения локальная аппроксимация может отсутствовать. Критерии устойчивости счета не выяснены.

### § 9.3. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ( $S_n$ - И $DS_n$ -МЕТОДЫ)

Разностные уравнения этого метода возникли при усовершенствовании  $S_n$ -метода, чтобы сделать его балансным [49]. При этом метод получения уравнений оказался фактически независимым от  $n$ —числа, характеризующего специальную квадратурную формулу для сферы в  $S_n$ -методе. Для простоты получим разностные уравнения этого метода для плоской  $x, y$ -геометрии.

В этом случае двумерное уравнение переноса имеет вид

$$\left( \Omega_1 \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial}{\partial y} + \Sigma \right) \varphi = Q, \quad (9.3.1)$$

где

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \leq 1.$$

На плоскости  $(x, y)$  построим прямоугольную сетку, образованную линиями  $x = x_i$ ,  $y = y_i$  ( $x_i < x_{i+1}$ ,  $y_i < y_{i+1}$ ). Рассмотрим (рис. 9.1) прямоугольник  $\pi_{ij}$ , вершины которого есть  $A(x_i, y_j)$ ,  $B(x_i, y_{j+1})$ ,  $C(x_{i+1}, y_{j+1})$ ,  $D(x_{i+1}, y_j)$ , его площадь обозначим  $V$ .

Пусть  $\Sigma = \text{const}$  в  $\pi_{ij}$  и для интегрирования по сфере  $\Omega$  мы выбрали некоторую квадратурную формулу с направлением  $\Omega^m = (\Omega_1^m, \Omega_2^m, \Omega_3^m)$  и весами  $w_m$  [см. § 5.9, формулу (5.9.4)], а  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ,  $\Delta y = y_{j+1} - y_j$ .

Пусть



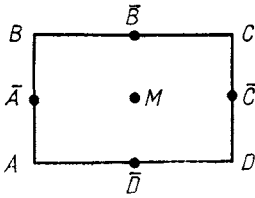


Рис. 9.1. Элементарная ячейка

$$\left. \begin{aligned}
 H_{ij}^m &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x, y_j, \Omega^m) dx; \\
 V_{ij}^m &= \frac{1}{\Delta y} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi(x_i, y, \Omega^m) dy \\
 N_{ij}^m &= \frac{1}{V} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi(x, y, \Omega^m) dx dy.
 \end{aligned} \right\} (9.3.2)$$

Аналогично определяется средняя по  $\pi_{ij}$  величина  $Q_{ij}^m$ .

Интегрируя (9.3.1) при  $\Omega = \Omega^m$  по  $\pi_{ij}$ , получаем уравнение баланса

$$\Omega_1^m (V_{i,j+1}^m - V_{ij}^m) \Delta y + \Omega_2^m (H_{i+1,j}^m - H_{ij}^m) \Delta x + \Sigma N_{ij}^m V = Q_{ij}^m V. \quad (9.3.3)$$

Дополнительно постулируем, что

$$p H_{i+1,j}^m + (1-p) H_{ij}^m = q V_{i,j+1}^m + (1-q) V_{ij}^m = N_{ij}^m, \quad (9.3.4)$$

где  $0 < p, q < 1$  — некоторые числовые параметры.

Пусть  $\Omega_1^m, \Omega_2^m > 0$  и  $V_{ij}^m; H_{ij}^m; Q_{ij}^m$  известны. Тогда из (9.3.3), (9.3.4) получим формулы для определения  $H_{i+1,j}^m, V_{i,j+1}^m, N_{ij}^m$ :

$$\left. \begin{aligned}
 N_{ij}^m &= (Q_{ij}^m V + \alpha_1^m V_{ij}^m + \alpha_2^m H_{ij}^m) (\Sigma V + \alpha_1 + \alpha_2)^{-1}; \\
 H_{i+1,j}^m &= (N_{ij}^m - (1-p) H_{ij}^m) / p; \\
 V_{i,j+1}^m &= (N_{ij}^m - (1-q) V_{ij}^m) / q,
 \end{aligned} \right\} (9.3.5)$$

где  $\alpha_1^m = \Omega_1^m \Delta y / q; \alpha_2^m = \Omega_2^m \Delta x / p$ .

Итак, если область  $D$ , где задано уравнение (9.3.1), является прямоугольником  $D = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ , составленным из ячеек  $\pi_{ij}$  указанного типа, на границе которого задано условие

$$\varphi = \Phi \text{ при } (\Omega, n) < 0, \quad (9.3.6)$$

если величины  $Q_{ij}^m$  известны, то, начиная при  $\Omega_1^m, \Omega_2^m > 0$  с левого нижнего угла  $D$ , определим последовательно по формулам (9.3.5) все величины  $H_{ij}^m, V_{ij}^m, N_{ij}^m$  и закончим расчет в правом верхнем углу  $D$ . Меняя  $m$  и, возможно, порядок расчета по индексам  $ij$ , получаем величины  $H_{ij}^m, V_{ij}^m, N_{ij}^m$  для всех  $i, j, m$ .

Теперь задача заключается в замене посредством квадратурных формул средних значений значениями решения  $\varphi$  в некоторых точках. Сначала заметим, что уже сами величины  $H_{ij}^m, V_{ij}^m, N_{ij}^m$  можно интерпретировать как решение  $\varphi(x, y, \Omega^m)$  в точках  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, M$ .

В  $S_n$ -методе полагают

$$\left. \begin{aligned} H_{ij}^m &= (\varphi_A^m + \varphi_D^m)/2; & H_{i, j+1}^m &= (\varphi_B^m + \varphi_C^m)/2; \\ V_{ij}^m &= (\varphi_A^m + \varphi_B^m)/2; & V_{i+1, j}^m &= (\varphi_D^m + \varphi_C^m)/2; \\ N_{ij}^m &= (\varphi_A^m + \varphi_B^m + \varphi_C^m + \varphi_D^m)/4. \end{aligned} \right\} \quad (9.3.7)$$

В нем решение определяется в вершинах прямоугольников  $\pi_{ij}$ .

Подставляя эти соотношения в уравнения (9.3.3), (9.3.4), получаем разностное уравнение, в котором используются значения  $\varphi^m$  в точках  $A, B, C, D$ . При  $\Omega_1, \Omega_2 > 0$  из этого уравнения по известным значениям  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_D$  находим  $\varphi_C$ .

Далее расчет продолжается для всех ячеек нижнего ряда слева направо, затем так же для ячеек второго ряда и т. д. по рядам снизу вверх. При  $p = q = 1/2$  эта схема будет иметь второй порядок точности на гладких решениях. В  $DS_n$ -методе полагают

$$H_{ij}^m = \varphi_D^m; \quad H_{i, j+1}^m = \varphi_B^m; \quad V_{ij}^m = \varphi_A^m; \quad V_{i+1, j}^m = \varphi_C^m; \quad N_{ij}^m = \varphi_M^m. \quad (9.3.8)$$

В нем решение определяется в центрах и серединах сторон  $\pi_{ij}$ . При помощи уравнения (9.3.4) исключаем из уравнения (9.3.3)  $\varphi_B^m$  и  $\varphi_C^m$ , находим из него  $\varphi_M^m$ , а затем по (9.3.4) определяем  $\varphi_B^m, \varphi_C^m$ . Далее переходим к следующей ячейке в таком порядке, как и в  $S_n$ -методе. При  $p = q = 1/2$  в (9.3.4) схема  $DS_n$ -метода называется схемой «алмаза», или «ромбической» схемой, при  $p = q = 1$  — «шаговой» схемой. В работах Я. Аркушевского, Т. Куликовской, Я. Мики [253] и Я. Аркушевского [254] исследована точность локальной аппроксимации на гладких решениях полученных разностных схем.

Аналогично выводятся и разностные схемы для других геометрий, а также для трехмерных задач [48].

Для расчета нулевого и первых моментов от решения, входящих в правую часть уравнения (9.3.1), используем квадратурные формулы для сферы наивысшей алгебраической степени точности (см. § 5.9):

$$\varphi_0(x) = \Sigma \omega_m \varphi(x, \Omega^m); \quad \varphi_{1i}(x) = \Sigma \omega_m \Omega_{i,m} \varphi(x, \Omega^m), \quad (9.3.9)$$

которые предпочтительнее из-за большей алгебраической точности аналогичных формул в  $S_n$ -методе.

Изложенный метод страдает следующими недостатками: так называемый лучевой эффект [24, 48]; возможная осциляция и отрицательность решения; на негладких решениях разностные уравнения не аппроксимируют дифференциальную задачу.

#### § 9.4. ВЕМ-СХЕМЫ

Я. Аркушевским, Т. Куликовской, Я. Мика [253] предложены разностные схемы, названные ВЕМ-схемами (Box Explicit Method — явный метод ячеек), учитывающие распространение разрывов в производных от решения вдоль характеристик. Рассмотрим теоретические предпосылки, обуславливающие выбор аппроксимации в ВЕМ-схемах. Пусть в области  $D = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$  задано урав-

нение (9.3.1), для которого при  $\Omega_1 > 0$ ,  $\Omega_2 > 0$  задано краевое условие на двух сторонах  $D$ :

$$\varphi(0, y, \Omega) = \alpha(y, \Omega), \quad \varphi(x, 0, \Omega) = \beta(x, \Omega). \quad (9.4.1)$$

Решение задачи (9.3.1), (9.4.1) в  $D$  находится в явной форме; оно состоит из суммы двух решений  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , где  $\varphi_1$  — решение уравнения (9.3.1) с нулевыми условиями (9.4.1):

$$\varphi_1(x, y, \Omega) = \int_0^{\min(x/\Omega_1, y/\Omega_2)} Q(x - \Omega_1 s', y - \Omega_2 s', \Omega) \exp\left(-\int_0^{s'} \Sigma(x - \Omega_1 s'', y - \Omega_2 s'') ds''\right) ds', \quad (9.4.2)$$

а  $\varphi_2$  — решение задачи (9.3.1), (9.4.1) при  $Q \equiv 0$ :

$$\varphi_2(x, y, \Omega) = \begin{cases} \alpha\left(y - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} x, \Omega\right) \exp\left(-\int_0^{x/\Omega_1} \Sigma(y - \Omega_1 s', y - \Omega_2 s')\right) ds', & \frac{x}{\Omega_1} \leq \frac{y}{\Omega_2}; \\ \beta\left(x - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} y, \Omega\right) \exp\left(-\int_0^{y/\Omega_2} \Sigma(x - \Omega_1 s', y - \Omega_2 s')\right) ds', & \frac{y}{\Omega_2} \leq \frac{x}{\Omega_1}. \end{cases} \quad (9.4.3)$$

Непрерывность решений (9.4.2), (9.4.3) и производных от этих решений зависит от гладкости функций  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Sigma$ ,  $Q$ . Возможные разрывы в решениях и производных от решений (9.4.2), (9.4.3) распространяются вдоль характеристик

$$\Omega_2 x - \Omega_1 y = \text{const}. \quad (9.4.4)$$

Существование этих разрывов зависит не только от свойств функций  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Sigma$ ,  $Q$ , но и от формы области  $D$ . Те характеристики (9.4.4), вдоль которых решения (9.4.2), (9.4.3) или первые производные от решений разрывны, назовем сингулярными. Предположим, что мы можем определить все сингулярные характеристики. Далее будем считать, что функции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Sigma$ ,  $Q$  таковы, что решения (9.4.2), (9.4.3) непрерывны, а разрывы могут быть в первых производных от этих решений. Представляет интерес рассмотреть случай, когда характеристика  $y = (\Omega_2/\Omega_1)x$ , выходящая из угла области  $D$ , не является сингулярной. Нетрудно показать, что первые производные от решения (9.4.3) будут непрерывными в окрестности этой характеристики лишь тогда, когда

$$\alpha(0, \Omega) = \beta(0, \Omega) = \frac{\partial}{\partial y} \alpha(y, \Omega) \Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, \Omega) \Big|_{x=0} = 0. \quad (9.4.5)$$

Построим четырехточечные разностные уравнения, аппроксимирующие в каждой четырехугольной ячейке  $\pi_{ij}$  (см. § 9.3) дифференциальное уравнение (9.3.1). Предположим, что разрывы в кусочно-гладких функциях  $\Sigma$  совпадают с прямыми, образующими сетку. Отдельно рассмотрим регулярные ячейки — ячейки, которые не пересекаются сингулярными характеристиками, и сингулярные ячейки — ячейки, которые пересекаются сингулярными характеристиками.

Для регулярных ячеек  $\pi_{ij}$  разностное уравнение ищем в виде

$$L_{ij}\varphi = Q_{ij}, \quad (9.4.6)$$

где

$$L_{ij}\varphi = G_A(i, j)\varphi_A + G_B(i, j)\varphi_B + G_C(i, j)\varphi_C + G_D(i, j)\varphi_D. \quad (9.4.7)$$

Разлагая функции  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$  в ряд Тейлора относительно некоторой внутренней по отношению к  $\pi_{ij}$  точки, находим, что оператор  $L_{ij}$  будет локально в  $\pi_{ij}$  аппроксимировать дифференциальный оператор (9.3.1) с точностью  $O(h)$ , где  $\Delta x = qh, \Delta y = rh$ , если

$$\left. \begin{aligned} G_A(i, j) &= (-\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_2 + m)h^{-1} + m_1 + O(h); \\ G_B(i, j) &= (\tilde{\Omega}_2 - m)h^{-1} + m_2 + O(h); \\ G_D(i, j) &= (\tilde{\Omega}_1 - m)h^{-1} + m_3 + O(h); \\ G_C(i, j) &= mh^{-1} + \Sigma - (m_1 + m_2 + m_3) + O(h), \end{aligned} \right\} \quad (9.4.8)$$

где  $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1/q, \tilde{\Omega}_2 = \Omega_2/r$ , а  $m, m_1, m_2, m_3$  — произвольные ограниченные постоянные.

Из вида коэффициентов (9.4.8) следует, что можно так распорядиться выбором произвольных постоянных, чтобы один из коэффициентов  $G_A, G_B, G_D$  обратился в нуль, а  $G_C \neq 0$ . Тогда получим трехточечную разностную схему.

Для аппроксимации с точностью  $O(h^2)$  разлагаем функции  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \varphi_D$  в ряд Тейлора относительно центра ячейки  $\pi_{ij}$ . В результате находим, что точность локальной аппроксимации будет  $O(h^2)$ , если

$$\left. \begin{aligned} G_A(i, j) &= (-\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_2)(2h)^{-1} + m_1 + ha + O(h^2); \\ G_B(i, j) &= (\tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_1)(2h)^{-1} + \Sigma/2 - m_1 + hb + O(h^2); \\ G_D(i, j) &= (\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_2)(2h)^{-1} + \Sigma/2 - m_1 + hc + O(h^2); \\ G_C(i, j) &= (\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2)(2h)^{-1} + m_1 - h(a + b + c) + O(h^2), \end{aligned} \right\} \quad (9.4.9)$$

где  $m_1, a, b, c$  — произвольные ограниченные постоянные. Пусть эти постоянные выбраны так, чтобы  $G_C(i, j) \neq 0$ . Тогда получим следующее уравнение для определения  $\varphi_C$ :

$$\varphi_C = R_{ij}\varphi_B + T_{ij}\varphi_D + D_{ij}\varphi_A + I_{ij}Q_{ij}, \quad (9.4.10)$$

где  $R_{ij} = -G_B(i, j)/G_C(i, j)$ ;  $T_{ij} = -G_D(i, j)/G_C(i, j)$ ;  $D_{ij} = -G_A(i, j)/G_C(i, j)$ ;  $I_{ij} = 1/G_C(i, j)$ ;  $Q_{ij}$  — значение в  $\pi_{ij}$  источника  $Q$ . Поскольку источник зависит от  $\varphi$ , то в качестве  $Q_{ij}$  удобно взять среднее значение

$$Q_{ij} = c_1 Q_A + c_2 Q_B + c_3 Q_C + c_4 Q_D, \quad (9.4.11)$$

где  $\sum c_i = 1$ ; для схемы (9.4.9) считаем, что  $c_i = 1/4$ .

При аппроксимации (9.4.8) возможны три трехточечные разностные схемы:

а)  $RT: m = \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2, m_1 = 0$ ; тогда  $D_{ij} = 0$  и

$$R_{ij} = \frac{\tilde{\Omega}_1 - m_2 h}{\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 + (\Sigma - m_2 - m_3) h}; \quad T_{ij} = \frac{\tilde{\Omega}_2 - m_3 h}{\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 + (\Sigma - m_2 - m_3) h}; \quad (9.4.12)$$

б)  $TD: m = \tilde{\Omega}_2, m_2 = 0$ ; тогда  $R_{ij} = 0$  и

$$T_{ij} = \frac{\tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_1 - m_3 h}{\tilde{\Omega}_2 + (\Sigma - m_1 - m_3) h}; \quad D_{ij} = \frac{\tilde{\Omega}_1 - m_1 h}{\tilde{\Omega}_2 + (\Sigma - m_1 - m_3) h}; \quad (9.4.13)$$

в)  $RD: m = \tilde{\Omega}_1, m_3 = 0$ ; тогда  $T_{ij} = 0$  и

$$R_{ij} = \frac{\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_2 - m_2 h}{\tilde{\Omega}_1 + (\Sigma - m_1 - m_2) h}; \quad D_{ij} = \frac{\tilde{\Omega}_2 - m_1 h}{\tilde{\Omega}_1 + (\Sigma - m_1 - m_2) h}. \quad (9.4.14)$$

Каждая из схем включает в себя две произвольные постоянные. Их можно выбирать, руководствуясь дополнительными соображениями. Например, если в  $RT$ -схеме взять  $m_2 = m_3 = 0$ , то она будет с положительными коэффициентами, а если в  $RT$ -схеме взять  $m_1 = m_3 = \Sigma/2$ , в  $TD$ -схеме —  $m_1 = m_3 = \Sigma/2$ , в  $RD$ -схеме —  $m_1 = m_2 = \Sigma/2$ , то в формуле для ошибки локальной аппроксимации исчезнут члены вида  $h \frac{\partial \varphi}{\partial x}, h \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ .

Аналогично коэффициенты в схеме  $RTD$  второго порядка аппроксимации будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} R_{ij} &= (\tilde{\Omega}_1 - \tilde{\Omega}_2 - (\Sigma - 2m_1) h) (\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 + 2m_1 h)^{-1}; \\ T_{ij} &= (\tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_1 - (\Sigma - 2m_1) h) (\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 + 2m_1 h)^{-1}; \\ D_{ij} &= (\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 - 2m_1 h) (\tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 + 2m_1 h)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.15)$$

Постоянная  $m_1$  в (9.4.15) может быть выбрана из дополнительных соображений. Например, можно считать, что  $m_1 = \Sigma/2$ , тогда  $R_{ij} = -T_{ij}$  и при  $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_2$  имеем  $R_{ij} = T_{ij} = 0$ , т. е. схема превращается в  $RD$ -схему.

Теперь получим  $ВЕМ$ -схему для сингулярных ячеек. Для простоты предположим, что шаги  $\Delta x, \Delta y$  столь малы, что каждую ячейку пере-

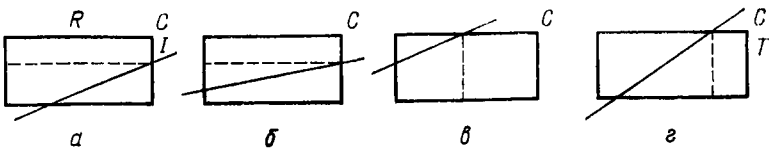


Рис. 9.2. Элементарная ячейка с сингулярной характеристикой

секает лишь одна сингулярная характеристика. Обозначим  $(x_i^{(p)}, y_i^{(p)})$  и  $(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$  координаты точек пересечения сингулярной характеристики с границей ячейки  $\pi_{ij}$ , тогда  $x_i^{(p)} < x_i^{(n)}, y_j^{(p)} < y_j^{(n)}$  (рис. 9.2).

Для нахождения решения в точке  $C$  разделим ячейку  $\pi_{ij}$  на подячейки, зависящие от конкретной конфигурации (см. пунктирную линию на рис. 9.2), и применим следующую двухшаговую процедуру.

Сначала, интегрируя уравнение (9.3.1) вдоль сингулярной характеристики, получаем разностную схему порядка  $O(h^2)$  (см. § 9.6), используя которую, находим  $\varphi$  в точке  $C$  через значение  $\varphi$  в точке  $(x_i^{(p)}, y_j^{(p)})$ . Затем находим решение в точке  $C$  по  $RT$ -схеме, включая точки  $(x_i^{(p)}, y_j^{(n)})$  и  $(i, j + 1)$  в случае конфигураций  $a$  и  $b$  или точки  $(x_i^{(n)}, y_j^{(n)})$  и  $(i + 1, j)$  для конфигураций  $v$  и  $z$ . Для этого случая  $RT$ -схемы более удобны по сравнению с другими схемами. Порядок аппроксимации будет при этом  $O(h)$ .

## § 9.5. УСТОЙЧИВЫЕ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ИХ СВОЙСТВА

В § 9.2 были получены системы разностных уравнений для геометрий  $(r, \mu)$ , и  $(r, \psi, \gamma)$ . Эти системы хотя и обладают достаточной степенью локальной аппроксимации [порядка  $O(\Delta r^2 + \Delta \mu^2)$ ] на гладких решениях, но при их численном решении часто возникает неустойчивость счета. Ю. А. Кузнецовым и А. В. Протасовым [109] построены системы разностных уравнений для сферической и цилиндрической геометрий (для плоской геометрии такие системы были известны и раньше), свободные от упомянутого недостатка. Их локальная аппроксимация на гладких решениях является величиной порядка  $O(\Delta r + \Delta \mu)$ . Рассмотрим эти системы, предполагая, что функции  $\Sigma, \Sigma_s, g$  и  $f$  непрерывны во всей области.

### 1. Плоская $(x, \mu)$ -геометрия

В этом случае кинетическое уравнение и граничные условия имеют вид

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 g(\mu_0) \varphi d\mu' + f, \quad (9.5.1)$$

$$\mu_0 = \mu \mu'; \quad -1 \leq \mu \leq 1; \quad 0 < x < H;$$

$$\varphi|_{x=0, \mu > 0} = \varphi|_{x=H, \mu < 0} = 0.$$

Введем сеточную область

$$D_h = \{(x_i, \mu_j) : x_i = ih, i = 0, \overline{N+1}, \mu_j = -1 + (j - 1/2) \Delta \mu, j = 1, 2m\},$$

где  $N, m$  — целые числа;  $h = H/(N + 1)$  и  $\Delta \mu = 1/m$ , и выпишем систему уравнений, аппроксимирующую в узлах сетки задачу (9.5.1):

$$\left. \begin{aligned} |\mu_j| \frac{u_{ij} - u_{i+1j}}{h} - \Sigma_i u_{ij} &= \frac{\Delta\mu \Sigma_{si}}{2} \sum_{l=1}^{2m} g_{ijl} u_{il} + f_{ij}; \\ u_{N+1j} &= 0; \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, m}; \\ \mu_i \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h} + \Sigma_i u_{ij} &= \frac{\Delta\mu \Sigma_{si}}{2} \sum_{l=1}^{2m} g_{ijl} u_{il} + f_{ij}; \\ \varphi_{0j} &= 0; \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{m+1, 2m}. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.2)$$

Здесь и далее для любой непрерывной функции  $\psi$ , зависящей, например, от переменных  $\xi, \eta, \dots, \gamma$ , запись  $\psi_{ij \dots t}$  есть значение функции  $\psi$  в точке  $(\xi_i, \eta_j, \dots, \nu_t)$ .

Если из уравнений (9.5.2) исключить значения  $u_{ij}$  в граничных узлах, специальным образом пронумеровать неизвестные, то приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$Au = f \quad (9.5.3)$$

с матрицей

$$A = L_1 - S_1 \quad (9.5.4)$$

порядка  $n_1 = 2mN$ , где

$$L = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^T \end{bmatrix} + \Sigma \quad \text{и} \quad S = \Sigma_s \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}. \quad (9.5.5)$$

Весьма удобным средством записи в явном виде матриц, которые в дальнейшем будем рассматривать, являются тензорные произведения и суммы. Тензорным произведением двух матриц  $B = (b_{ij})$  и  $C = (c_{ij})$  порядка  $k$  и  $l$  соответственно называется матрица

$$A = B \otimes C = \begin{bmatrix} c_{11} B & \dots & c_{1l} B \\ \vdots & & \vdots \\ c_{l1} B & \dots & c_{ll} B \end{bmatrix}$$

порядка  $m = kl$ , а их тензорной суммой — матрица

$$A = B \oplus C = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

порядка  $n = k + l$ .

Теперь матрицы  $\Lambda, \Sigma, \Sigma_s, C_1$  и  $C_2$  могут быть записаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= (1/h) \hat{\mu} \otimes k; \quad \Sigma = (I_m \otimes \hat{\Sigma}) \otimes I_2; \quad \Sigma_s = (I_m \otimes \hat{\Sigma}_s) \otimes I_2; \\ C_1 &= \Delta\mu [g\hat{n} \oplus \dots \oplus g\hat{t}]/2; \quad C_2 = \Delta\mu [g\bar{n} \oplus \dots \oplus g\bar{t}]/2, \end{aligned} \right\} \quad (9.5.6)$$

где  $\hat{\mu} = \text{diag} \{ |\mu_1|, \dots, |\mu_m| \}$ ;

$\hat{\Sigma} = \text{diag} \{ \Sigma_N, \dots, \Sigma_1 \}$ ;

$\hat{\Sigma}_s = \text{diag} \{ \Sigma_{SN}, \dots, \Sigma_{s1} \}$ .

$$K = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ -1 & & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (9.5.7)$$

$$g^+ = \begin{bmatrix} g_{i11} & \dots & g_{i1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{im1} & \dots & g_{imm} \end{bmatrix}; \quad g^- = \begin{bmatrix} g_{i12m} & \dots & g_{i1m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{im2m} & \dots & g_{imm+1} \end{bmatrix},$$

$i = \overline{1, N}$  и  $I_k$  обозначается единичная матрица порядка  $k \geq 1$ .

## 2. Сферическая $(r, \mu)$ -геометрия

Рассмотрим уравнение

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \Sigma \varphi = \int_{-1}^1 g(\mu_0) \varphi d\mu' + f, \quad (9.5.8)$$

$$\mu_0 = \mu\mu'; \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad 0 < r < R$$

с граничными условиями (9.2.19). Если это уравнение умножить на  $r^2$ , то после несложных преобразований придем к двум эквивалентным формам его записи:

$$\mu r \frac{\partial}{\partial r} r\varphi + \frac{\partial}{\partial \mu} (1-\mu^2) r\varphi + \mu r\varphi + \Sigma r^2 \varphi = \frac{\Sigma_s r^2}{2} \int_{-1}^1 g(\mu_0) \varphi d\mu' + r^2 f; \quad (9.5.9)$$

$$\mu r \frac{\partial}{\partial r} r\varphi + r(1-\mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \mu r\varphi + \Sigma r^2 \varphi = \frac{\Sigma_s r^2}{2} \int_{-1}^1 g(\mu_0) \varphi d\mu' + r^2 f. \quad (9.5.10)$$

Введем сеточную область  $D_h = \{(r_i, \mu_j) : r_i = ih, i = \overline{0, N+1}, \mu_j = -1 + j\Delta\mu, j = \overline{1, 2m}\}$ , где  $N, m$  — целые положительные числа,  $h = R/(N+1)$  и  $\Delta\mu = 2/(2m+1)$ . Аппроксимируя в узлах области  $D_h$  при  $\mu < 0$  уравнение (9.5.9), а при  $\mu > 0$  — уравнение (9.5.10), приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} & |\mu_j| r_j \frac{r_i u_{ij} - r_{i+1} u_{i+1j}}{h} + r_i \frac{(1-\mu_j^2) u_{ij} - (1-\mu_{j-1}^2) u_{ij-1}}{\Delta\mu} + \\ & + \mu_j r_i u_{ij} + \Sigma_i r_i^2 u_{ij} = \frac{\Sigma_{st} r_i^2 \Delta_1 \mu}{2} \sum_{l=1}^{2m} g_{ijl} u_{il} + r_i^2 f_{ij}, \\ & u_{N+1i} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, m}; \\ & \mu_j r_i \frac{r_i u_{ij} - r_{i-1} u_{i-1j}}{h} + r_i (1-\mu_j^2) \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{\Delta\mu} - \end{aligned} \right\} \quad (9.5.11)$$



$$-\mu_j r_i^2 u_{ij} + \Sigma_i r_i^2 u_{ij} = \frac{\Sigma_{si} r_i^2 \Delta_1 \mu}{2} \sum_{l=1}^{2m} g_{ijl} u_{il} +$$

$$+ r_i^2 f_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{m+1, 2m},$$

где  $\Delta_1 \mu = 1/m$ .

Так как  $1 - \mu_0^2 = r_0 = 0$ , то в уравнении (9.5.11) величины  $\{u_{i0}\}_{i=1}^N$  и  $\{u_{0j}\}_{j=m+1}^{2m}$  входят с нулевыми коэффициентами. Поэтому, нумеруя неизвестные и располагая уравнения точно так же, как это было сделано в п. 1, приходим к системе (9.5.3) с матрицей

$$A = L_2 - S_2 \quad (9.5.12)$$

порядка  $n_2 = 2mN$ , где

$$L_2 = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ -\tilde{\Lambda} & \Lambda^T \end{bmatrix} + \Sigma \quad \text{и} \quad S_2 = \Sigma_s \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix}. \quad (9.5.13)$$

Матрицы  $C_1$  и  $C_2$  здесь полностью совпадают с аналогичными матрицами п. 1 (с точностью до замены переменной  $x$  на  $r$  и  $\Delta\mu$  на  $\Delta_1\mu$ ), а элементы матрицы  $\Sigma$  и  $\Sigma_s$  отличаются от элементов аналогичных матриц п.1 только соответствующими множителями  $r_i^2$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Выпишем матрицы  $\Lambda$  и  $\tilde{\Lambda}$ :

$$\Lambda = (1/h) \hat{\mu} \otimes (\hat{r} K \hat{r}) + K \hat{\alpha} \otimes \hat{r} - \hat{\mu} \otimes \hat{r};$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} 00 & \dots & 0 \\ 00 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & \alpha_m \end{bmatrix} \otimes \hat{r}. \quad (9.5.14)$$

Здесь  $\hat{\mu}$  и  $K$  — матрицы, введенные в предыдущем разделе,

$$\hat{r} = \text{diag} \{r_N, \dots, r_1\}; \quad \hat{\alpha} = \text{diag} \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \quad (9.5.15)$$

и

$$\alpha_j = (1 - \mu_j^2) / \Delta_1 \mu, \quad j = \overline{1, m}.$$

### 3. Цилиндрическая $(r, \psi, \gamma)$ -геометрия

Рассмотрим кинетическое уравнение для бесконечного цилиндра в переменных  $(r, \psi, \gamma)$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \gamma^2} \left( \cos \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) + \Sigma \varphi = \\ = \frac{\Sigma_s}{\pi} \int_0^\pi d\psi' \int_0^1 d\gamma' g(\mu_0) \varphi + f, \end{aligned} \quad (9.5.16)$$

$$0 < r < R, \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

с граничным условием

$$\varphi(R, \Phi, \gamma) = 0; \pi/2 < \psi \leq \pi; 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (9.5.17)$$

где

$$\mu_0 = \gamma\gamma' + \sqrt{[1-\gamma^2][1-(\gamma')^2] \cos(\psi-\psi')}. \quad (9.5.18)$$

Умножая (9.5.16) на  $r$  и проводя некоторые несложные преобразования, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\gamma^2} \left( r^{1/2} \cos \psi \frac{\partial}{\partial r} r^{1/2} \varphi - \sin \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} - \frac{\cos \psi}{2} \varphi \right) + \\ & + \Sigma r \varphi = \frac{\Sigma_s r}{\pi} \int_0^\pi d\psi' \int_0^1 d\gamma' g(\mu_0) \varphi + r f; \end{aligned} \quad (9.5.19)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-\gamma^2} \left( r^{1/2} \cos \psi \frac{\partial}{\partial r} r^{1/2} \varphi - \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi \sin \psi + \frac{\cos \psi}{2} \varphi \right) + \\ & + \Sigma r \varphi = \frac{\Sigma_s r}{\pi} \int_0^\pi d\psi' \int_0^1 d\gamma' g(\mu_0) \varphi + r f. \end{aligned} \quad (9.5.20)$$

Построим сеточную область  $D_h = \{(r_i, \psi_j, \gamma_k): r_i = ih, i = \overline{0, N+1}, \psi_j = \pi - j\Delta\psi, j = \overline{0, 2m+1}, \gamma_k = (k-1/2)\Delta\gamma, k = \overline{1, t}\}$ . Здесь  $N, m, t$  — некоторые положительные целые числа:  $h = R/(N+1)$ ,  $\Delta\psi = \pi/(2m+1)$  и  $\Delta\gamma = 1/t$ . Тогда если для значений  $\pi/2 < \psi < \pi$  рассматривать уравнение (9.5.20), а для  $0 < \psi < \pi/2$  — (9.5.19), то соответствующие разностные уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} & \omega_k \left[ r_i^{1/2} |\cos \psi_j| \frac{r_i^{1/2} u_{ijk} - r_{i+1}^{1/2} u_{i+1jk}}{h} + \frac{\sin \psi_j u_{ijk} - \sin \psi_{j-1} u_{ij-1k}}{\Delta\psi} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos \psi_j}{2} u_{ijk} \right] + \Sigma_i r_i u_{ijk} = \frac{\Sigma_{si} r_i \Delta_1 \psi \Delta\gamma}{\pi} \sum_{i=1}^{2m} \sum_{s=1}^t g_{ijkl} u_{ils} + \\ & + r_i f_{ijk}, u_{N+1jk} = 0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, t}; \\ & \omega_k \left[ r_i^{1/2} \cos \psi_j \frac{r_i^{1/2} u_{ijk} - r_{i-1}^{1/2} u_{i-1jk}}{h} + \sin \psi_j \frac{u_{ijk} - u_{ij-1k}}{\Delta\psi} - \right. \\ & \left. - \frac{\cos \psi_j}{2} u_{ijk} \right] + \Sigma_i r_i u_{ijk} = \frac{\Sigma_{si} r_i \Delta_1 \psi \Delta\gamma}{\pi} \sum_{i=1}^{2m} \sum_{s=1}^t g_{ijkl} u_{ils} + \\ & + r_i f_{ijk}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, t}, \end{aligned} \right\} \quad (9.5.21)$$

где  $\omega_k = \sqrt{1-\gamma_k^2}$ ,  $k = \overline{1, t}$  и  $\Delta_1 \psi = \pi/2m$ . Как и в предыдущем разделе, величины  $u_{i0k}$  и  $u_{0jk}$  ( $i = \overline{1, N}; j = \overline{m+1, 2m}; k = \overline{1, t}$ ) в уравнениях (9.5.21) не участвуют, поскольку они входят с нулевыми коэффициентами.

Располагая теперь уравнения и нумеруя неизвестные в порядке нумерации узлов сетки, опять приходим к системе (9.5.3) с матрицей вида

$$A = L_3 - S_3 \quad (9.5.22)$$

порядка  $n = 2mtN$ .

#### 4. Основные свойства матриц построенных систем уравнений

Из пп.1—3 настоящего параграфа следует, что во всех рассмотренных случаях мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений (9.5.3) с матрицей

$$A = L - S \quad (9.5.23)$$

порядка  $n$ , где

$$L = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ \bar{\Lambda} & \Lambda^T \end{bmatrix} + \Sigma \text{ и } S = \Sigma_s \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix}. \quad (9.5.24)$$

Изучим основные свойства указанных выше матриц и некоторых их комбинаций. Для этого наложим естественные дополнительные ограничения на функции  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$  и  $g(\mu_0)$ , а также введем необходимые для дальнейшего понятия.

Предположим, что функция  $g(\mu_0)$  положительна и удовлетворяет условию нормировки:  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(\mu_0) d\mu' = 1$  в плоскопараллельной и сферической геометриях и  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi' \int_0^1 d\gamma' g(\mu_0) = 1$  в цилиндрической геометрии, а функции  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$  неотрицательны и  $\Sigma - \Sigma_s \geq 0$  во всей области. Кроме того, предположим, что  $(\Sigma - S)e$  — вектор с неотрицательными компонентами и  $Se$  — ненулевой вектор, где  $e$  — вектор, все компоненты которого равны единице. Удовлетворения последнего требования всегда можно добиться путем соответствующей аппроксимации интегрального оператора.

Обозначим  $E_n$  пространство вещественных векторов с обычным скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ . Тогда вещественную матрицу  $B$  порядка  $n$  будем называть положительно определенной (полуопределенной) в  $E_n$ , если  $(Bv, v) > 0$  ( $\geq 0$ ) для любого ненулевого вектора  $v \in E_n$ . Очевидно, что матрица  $B$  положительно определена (полуопределена) в  $E_n$  тогда и только тогда, когда все собственные значения симметричной матрицы  $B + B^T$  положительны (неотрицательны).

Матрица  $B = (b_{ij})$  порядка  $n$  называется неразложимо диагонально преобладающей, если она неразложима [341] с диагональным преобладанием, т. е.  $b_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}|$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и существует такое  $i_0$  ( $1 \leq$

$\leq i_0 \leq n$ ), что  $b_{i_0 j_0} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |b_{i_0 j}|$ . Далее, матрица  $B$  называется

$M$ -матрицей, если она неособенна и все элементы матрицы  $B^{-1}$  неотрицательны. Известно (см., например, [341]), что неразложимо диагонально преобладающая матрица  $B$ , все внедиагональные элементы которой неположительны, является  $M$ -матрицей. Симметричная матрица  $B$  с диагональным преобладанием ( $b_{ii} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ) и

неположительными внедиагональными элементами является  $M$ -матрицей (симметричные  $M$ -матрицы называются также матрицами Стильтеса) в том и только том случае, когда она положительно определена.

Перечислим сначала свойства, которые вытекают непосредственно из вида выписанных в предыдущих пунктах матриц, сделанных выше предположений и приведенных выше фактов из теории матриц.

1.  $\Lambda$  — нижняя треугольная матрица с положительными диагональными и неположительными внедиагональными элементами.

2.  $\tilde{\Lambda}$ ,  $\Sigma$  и  $\Sigma_s$  — диагональные матрицы с неотрицательными диагональными элементами.

3.  $C_1$  и  $C_2$  — симметричные матрицы с неотрицательными элементами.

4. Матрицы  $L$  и  $(L + L^T)$  одновременно являются положительно определенными  $M$ -матрицами.

5.  $(\Sigma - S)$  — симметричная положительно полуопределенная матрица.

6.  $A$  и  $(A + A')$  — неразложимо диагонально преобладающие матрицы с неположительными внедиагональными элементами, следовательно, они одновременно являются положительно определенными  $M$ -матрицами [более того, все элементы матриц  $A^{-1}$  и  $(A + A^T)^{-1}$  положительны].

7. Матрица  $L^{-1}S$  является неотрицательной неразложимой примитивной матрицей. Поэтому, согласно теории Перрона — Фробениуса (см., например, [33, 341]), спектральная задача

$$\lambda u = L^{-1}Su \quad (9.5.25)$$

имеет простое положительное собственное число  $\lambda_1$ , которое больше по модулю всех остальных собственных чисел (отсюда, в частности, следует, что  $\lambda_1$  равно спектральному радиусу матрицы  $L^{-1}S$ ) и ему соответствует собственный вектор с положительными компонентами. Более того, так как разложение (9.5.23) матрицы  $A$  является регулярным, то  $\lambda_1 < 1$ .

Введем в рассмотрение матрицу (в рассматриваемых нами случаях  $n$  всегда четно)

$$G = \begin{bmatrix} 0 & I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.5.26)$$

Тогда так как

$$\begin{aligned}
 & GSL^{-1}S = \\
 & = \begin{bmatrix} S_1 R^T \tilde{\Lambda} R S_1 + S_2 R S_1 + S_1 R^T S_2 & S_1 R^T \tilde{\Lambda} R S_2 + S_1 R^T S_1 + S_2 R S_2 \\ S_2 R^T \tilde{\Lambda} R S_1 + S_1 R S_1 + S_2 R^T S_2 & S_2 R^T \tilde{\Lambda} R S_2 + S_1 R S_2 + S_2 R^T S_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{9.5.27}$$

— симметричная матрица, где

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ R^T \tilde{\Lambda} R & R^T \end{bmatrix}, \tag{9.5.28}$$

то выполняется следующее свойство:

8. Если матрица  $GS$  положительно полуопределена, то для задачи (9.5.25) справедлива теория Гильберта — Шмидта (в частности, все собственные числа матрицы  $L^{-1}S$  вещественны, и она обладает полной системой собственных векторов), поскольку она сводится к спектральной задаче

$$\lambda GSu = GSL^{-1}Su \tag{9.5.29}$$

с симметричной и положительно полуопределенной матрицей  $GS$  и симметричной матрицей  $GSL^{-1}S$ , которые имеют общее ядро.

Сделаем дополнительное предположение, что матрица  $C_1 - C_2$  неотрицательна. Для исходной задачи это соответствует требованию  $g(|\mu_0|) \geq g(\mu_0)$  (преобладающее рассеяние вперед), что почти всегда выполняется на практике.

Теперь представим матрицу  $A$  в виде

$$A = \tilde{L} - \tilde{S}, \tag{9.5.30}$$

где

$$\tilde{L} = L - \Sigma_s \begin{bmatrix} C_1 - C_2 & 0 \\ 0 & C_1 - C_2 \end{bmatrix} \text{ и } \tilde{S} = \Sigma_s \begin{bmatrix} C_2 & C_2 \\ C_2 & C_2 \end{bmatrix}. \tag{9.5.31}$$

Для спектральной задачи

$$\mu u = \tilde{L}^{-1} \tilde{S} u \tag{9.5.32}$$

справедливы следующие свойства:

9. Матрицы  $\tilde{L}$  и  $(\tilde{L} + \tilde{L}^T)$  одновременно являются положительно определенными  $M$ -матрицами.

10. Матрица  $\tilde{L}^{-1} \tilde{S}$  является неотрицательной неразложимой примитивной матрицей. Поэтому аналогично задаче (9.5.25) спектральная задача (9.5.32) имеет простое положительное собственное число  $\mu_1$ , равное спектральному радиусу матрицы  $\tilde{L}^{-1} \tilde{S}$ , которое больше по модулю всех остальных собственных чисел, и ему соответствует собственный вектор с положительными матрицами. Кроме того, так как разложение (9.5.30) матрицы  $A$ , аналогичное разложению (9.5.3),

является регулярным, то [341]  $\mu_1 \leq \lambda_1 < 1$ . В заключение заметим, что задача (9.5.32) сводится также к спектральной задаче

$$\mu \tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S} u = \tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S} u \quad (9.5.33)$$

с симметричной положительно полуопределенной матрицей  $\tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S}$  и симметричной матрицей

$$\tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S} = [S_2 (\tilde{R}^T \tilde{\Lambda} \tilde{R} + R + \tilde{R}) S_2 (\tilde{R}^T \tilde{\Lambda} \tilde{R} + R + \tilde{R}) S_2] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.5.34)$$

## § 9.6. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ

В методе характеристик численное интегрирование проводится вдоль траекторий нейтронов (характеристик) в пространстве координат  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , а принцип построения разностных уравнений одинаков для всех геометрий. Для определенности будем проводить дальнейшие рассуждения для уравнения, записанного в форме (5.1.2), переобозначив  $f_1$  на  $f$ . Специфика рассматриваемых задач заключается в том, что если функции  $l, c, f$ , входящие в уравнение, кусочно-постоянные (или кусочно-непрерывные) в области  $D$  (что соответствует многозонности реактора), то решение  $\varphi$  имеет особенность в первых производных на некоторых поверхностях в  $\Omega \times D$ ; более того, если граница  $\Gamma$  или поверхности разрывов функций  $l, c, f$  содержат отрезки прямых линий, то и само решение  $\varphi(x, \Omega)$  не будет, вообще говоря, непрерывным по  $\Omega$ . В работах В. С. Владимирова [41, 43] исследованы вопросы гладкости решений и показано, что даже при сколь угодно гладких  $l, c, f$  и  $\Gamma$  может случиться, что решение  $\varphi$  не будет непрерывным в замкнутой области  $\Omega \times \bar{D}$ . Поскольку разрывы в решениях распространяются вдоль характеристик, а локальная аппроксимация конечно-разностных уравнений должна рассматриваться на классе решений кинетических задач [таким классом является, например, класс  $\tilde{D}_0$ , построенный В.С. Владимировым [41] (см. § 5.1)], конечно-разностные методы, неэквивалентные методу характеристик, вообще говоря, не аппроксимируют локально на классе  $\tilde{D}_0$  кинетические задачи. Для простоты выкладок предположим, что коэффициенты уравнения и источник  $f(x, \Omega)$  являются кусочно-постоянными функциями от  $x$ . Это предположение упростит вывод разностных схем, а распространение метода вывода их на общий случай очевидно. Чтобы не затруднять дальнейшее изложение громоздкими выкладками, последовательно введем еще ряд упрощений. При наших предположениях область  $D$  разобьется на подобласти  $D_j, j = 1, 2, \dots, \bar{n}$ , в каждой из которых все коэффициенты уравнения (5.1.2) и источник  $f(x, \Omega)$  постоянны по  $x$ . Характеристиками для дифференциального оператора этого уравнения будут все прямые линии в  $R_3$ . Возьмем любую из них, совпадающую по направлению с вектором  $\Omega$ , обозначим ее  $L$ . На прямой  $L$  определим числовой параметр  $\xi$ , характеризующий

длину на  $L$  в соответствии с направлением вектора  $\Omega$ . Тогда уравнение (5.1.2) вдоль  $L$  запишется так:

$$l \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \varphi = Q, \quad (9.6.1)$$

где

$$Q = Q(\varphi, f, x, \Omega) = c\bar{S}\varphi + f.$$

Уравнение (9.6.1) — обыкновенное дифференциальное уравнение, заданное вдоль  $L$ . Пусть две точки  $P_0(\xi_0), P_1(\xi_1) \in L$ , причем отрезок  $[P_0, P_1]$  целиком принадлежит одной из замкнутых областей  $\bar{D}_j$ , и пусть  $h = \xi_1 - \xi_0 > 0$ . Введем обозначения:

$$f_0 = f(P_0) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0 + 0} f(\xi); \quad f_1 = f(P_1) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_1 - 0} f(\xi); \quad \tau = h/(2l).$$

Класс функций  $\varphi(x, \Omega)$ , являющихся ограниченными в  $\bar{D}_j$  решениями уравнения (5.1.2), обозначим  $K^1(D_j)$ . Пусть класс функций  $K^1 C_{n, \alpha}(\bar{D}_j)$  определен условием  $K^1 C_{n, \alpha}(\bar{D}_j) = \{\varphi : \varphi \in K^1(D_j), Q(\varphi, f, x, \Omega) \in C_{n, \alpha}(\bar{D}_j) \text{ для всех } \Omega\}$ , где  $n \geq 0$  — целое число;  $\alpha \in [0, 1]$ . Класс  $C_{n, \alpha}(\bar{D}_j)$  определяется как класс функций, непрерывных в  $D_j$ , вместе с частными производными до  $n$ -го порядка включительно, причем последние удовлетворяют условию Липшица с показателем  $\alpha$ .

Если считать  $Q$  известной функцией, то решение (9.6.1) на  $L$  при  $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_1$  выражается формулой

$$\varphi(\xi) = \varphi(x, \Omega) = \exp(-(\xi - \xi_0) l^{-1}) \varphi_0 + l^{-1} \int_{\xi_0}^{\xi} Q \exp((t - \xi) l^{-1}) dt. \quad (9.6.2)$$

Из формулы (9.6.2) следует, что если  $\varphi \in K^1 C_{n, \alpha}(\bar{D}_j)$ , то  $\varphi \in C_{n+1, \alpha}([P_0, P_1])$ . Формула (9.6.2) обладает одним свойством, которое назовем монотонностью; оно заключается в том, что  $\varphi(x, \Omega)$  является монотонно возрастающей функцией от  $\varphi_0$ .

Предположим теперь, что функцию  $Q(\xi)$  можно хорошо аппроксимировать линейной функцией на отрезке  $[\xi_0, \xi_1]$ :

$$Q(\xi) = h^{-1} ((\xi - \xi_0) Q_1 + (\xi_1 - \xi) Q_0) + O(h^\beta), \quad (9.6.3)$$

где  $\beta = 2$  при  $n + \alpha \geq 2$ ;  $\beta = n + \alpha$  при  $n + \alpha < 2$ .

Предполагая выполненным равенство (9.6.3) и вычисляя значение интеграла в формуле (9.6.2) при  $\xi = \xi_1$ , получаем [пренебрегая членом  $O(h^{\beta+1})$ ]

$$\varphi_1 = p\varphi_0 + qQ_0 + (1 - p - q) Q_1, \quad (9.6.4)$$

где

$$p = \exp(-h/l); \quad q = B(h/l); \quad B(u) = (1 - \exp(-u))/u - \exp(-u). \quad (9.6.5)$$

Построим разностную схему, позволяющую по  $\varphi_0$  найти  $\varphi_1$ . На классе  $C_{n, \alpha}([\xi_0, \xi_1])$  разностное уравнение (9.6.4) аппроксимирует (9.6.1) с точностью  $O(h^\beta)$ . Разностная схема (9.6.5) монотонна, так

как  $0 < p \leq 1$ ; легко также убедиться, что  $q \geq 0$ ,  $1 - p - q \geq 0$ . Уравнение (9.6.5) было предложено В. С. Владимировым в работе [40]; в ней исследованы вопросы сходимости и точности решений полученных разностных уравнений при  $h \rightarrow 0$ . В формулах (9.6.5) значения  $p, q$  можно приближенно вычислять, пользуясь дробно-рациональными приближениями для  $\operatorname{erf}(-u)$  [см. формулы (9.6.14), (9.6.17)].

В ряде задач, например в задачах со сферической и цилиндрической симметриями, целесообразно учесть дополнительные сведения о решении, например симметричность или поведение искомых функций в окрестности  $r = 0$ . Учет этих сведений приводит к представлению функции  $Q$  на  $[\xi_0, \xi_1]$  в виде

$$Q = (\xi_1^2 - \xi_0^2)^{-1} [Q_1(\xi^2 - \xi_0^2) + Q_0(\xi_1^2 - \xi^2)]. \quad (9.6.6)$$

Подставив (9.6.6) в (9.6.2), получим опять формулу типа (9.6.4).

Применим теперь метод конечных разностей непосредственно к уравнению (9.6.1), что позволит получить некоторые дробно-линейные приближения для коэффициентов формулы (9.6.4). Проинтегрируем уравнение (9.6.1) вдоль  $L$  по отрезку  $[P_0, P_1]$ . Тогда

$$I(\varphi_1 - \varphi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi d\xi = hQ_{1/2}, \quad (9.6.7)$$

где

$$Q_{1/2} = h^{-1} \int_{\xi_0}^{\xi_1} Q d\xi. \quad (9.6.8)$$

Рассмотрим один из способов аппроксимации интеграла

$$I = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi d\xi$$

квадратурными формулами при условии, что  $\varphi \in K^1 C_{n, \alpha}(\bar{D}_j)$  [119, 129].

Применим к  $I$  квадратуру Эйлера наивысшей алгебраической степени точности [101]:

$$I = (\varphi_0 + \varphi_1) \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_0 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_1 \right) + O(h^{2+\beta}), \quad (9.6.9)$$

где

$$\beta = \begin{cases} 3 & \text{при } n + \alpha \geq 3: \\ n + \alpha & \text{при } 0 < n + \alpha < 3. \end{cases} \quad (9.6.10)$$

Значения производных в (9.6.9) выразим, пользуясь уравнением (9.6.1), через значения  $\varphi_i, Q_i$ . В результате с точностью  $O(h^{2+\beta})$  получим

$$I = (\varphi_1 + \varphi_0) h/2 + h^2 (Q_0 - Q_1 + \varphi_1 - \varphi_0) / (12 h). \quad (9.6.11)$$



Теперь равенство (9.6.7) заменим с точностью  $O(h^{2+\beta})$  другим, проделывая следующие операции: разделим его на  $l$ , затем прибавим к левой части член  $\sigma_0 \tau^6 \varphi_1$ , а к правой — член  $\sigma_1 \tau^6 Q_{1/2}$ , где положительные числа  $\sigma_0, \sigma_1$  выберем позднее; наконец, вместо  $l$  подставим выражение (9.6.11). В результате получим

$$(1 + \sigma_0 \tau^6) \varphi_1 - \varphi_0 + \tau (\varphi_0 + \varphi_1) + \tau^2 (Q_0 - Q_1 + \varphi_1 - \varphi_0)/3 = \\ = (2\tau + \sigma_1 \tau^6) Q_{1/2} \quad (9.6.12)$$

или

$$\varphi_1 = \alpha_0 \varphi_0 + \beta_0 \bar{Q}_{1/2}, \quad (9.6.13)$$

где

$$\alpha_0 = \alpha(\sigma_0, \tau) = (1 - \tau + \tau^2/3) (1 + \tau + \tau^2/3 + \sigma_0 \tau^6)^{-1}; \quad (9.6.14)$$

$$\beta_0 = \tau (1 + \tau + \tau^2/3 + \sigma_0 \tau^6)^{-1}; \quad (9.6.15)$$

$$\bar{Q}_{1/2} = (2 + \sigma_1 \tau^6) Q_{1/2} + \tau (Q_1 - Q_0)/3. \quad (9.6.16)$$

Схема (9.6.13) имеет точность локальной аппроксимации  $O(h^{1+\beta})$ , где  $\beta$  задано формулой (9.6.10). Величины  $\sigma_0, \sigma_1$  выберем так, чтобы схема (9.6.13) давала точное решение в случае, когда решением уравнения (9.6.1) является постоянная [т. е. когда  $Q = \text{const}$  на  $(\xi_0, \xi_1)$  и  $\varphi = Q$ ]. Подставляя в (9.6.12) значения  $\varphi_1 = \varphi_0 = Q_1 = Q_0 = Q$ , получаем, что  $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$ , где  $\sigma$  — любое положительное число.

Осталось рассмотреть схему (9.6.13) на устойчивость и монотонность. С этой целью исследуем поведение функции  $\alpha(\sigma, \tau)$ .

Известно [117], что при  $\sigma = 0$  функция

$$\alpha(0, \tau) = (1 - \tau + \tau^2/3) (1 + \tau + \tau^2/3)^{-1} \quad (9.6.17)$$

является подходящей дробью в разложении функции  $\exp(-2\tau)$  в цепную дробь; при этом  $\exp(-2\tau) \leq \alpha(0, \tau) \leq \alpha(0, 0) = 1$  и  $0 \leq \ln(\exp(2\tau)\alpha(0, \tau)) = O(\tau^6)$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Таким образом, наиболее простая при  $\sigma = 0$  схема (9.6.13) является устойчивой и монотонной при любых  $\tau > 0$ , а  $\alpha(0, \tau)$  достаточно точно аппроксимирует  $\exp(-2\tau)$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Однако поведение функций  $\exp(-2\tau)$  и  $\alpha(0, \tau)$  различно при  $\tau \rightarrow \infty$ : если  $\exp(-2\tau) \rightarrow 0$ , то  $\alpha(0, \tau) \rightarrow 1$ . Функция  $\alpha(0, \tau)$  при  $\tau = \sqrt{3}$  имеет положительный минимум, равный  $(7+4\sqrt{3})^{-1}$ ,  $\partial\alpha/\partial\tau \leq 0$  при  $0 \leq \tau \leq \sqrt{3}$  и  $\partial\alpha/\partial\tau > 0$  при  $\tau > \sqrt{3}$ . Следовательно, для того чтобы решения разностных уравнений (9.6.13) при  $\sigma = 0$  правильно сохраняли свойства решений уравнения (9.6.1), необходимо, чтобы  $0 \leq \tau \leq \sqrt{3}$  или

$$h \leq 2\sqrt{3}l. \quad (9.6.18)$$

Чтобы избавиться от ограничения (9.6.18), распорядимся теперь величиной  $\sigma > 0$ ; выберем ее так, чтобы  $\alpha(\sigma, \tau)$  наилучшим образом приближала функцию  $\exp(-2\tau)$  при  $\tau > 0$ . Можно убедиться, что при  $\sigma > 0$  будем иметь  $\ln(\exp(2\tau)\alpha(\sigma, \tau)) = O(\tau^6)$ . Это соотношение получается разложением  $\alpha(\sigma, \tau)$  в ряд по степени  $\tau$ . Функция  $\alpha(\sigma, \tau)$

является при  $\tau \rightarrow \infty$  убывающей к нулю функцией, как  $\tau^{-4}/\sigma$ . Расчеты, проведенные с участием С. А. Фроловой, показали, что оптимальным значением является  $\sigma = \sigma_0 = 0,1304$ . При этом величина  $\eta = |\exp(-2\tau) - \alpha(\sigma_0, \tau)|$  не превышает  $7,5 \cdot 10^{-5}$  при  $0 \leq \tau \leq 1,08$  и  $\max_{\tau} \eta(\tau) \leq 9,8 \cdot 10^{-3}$  для остальных значений  $\tau$ . Таким образом, при аппроксимации экспоненты в схемах (9.6.4), (9.6.13) функцией  $\alpha(\sigma_0, \tau)$  достигается достаточная для многих задач точность и ограничений на шаг  $h$ , связанных с аппроксимацией экспоненты, не требуется.

Заметим, что если точки пересечения характеристики  $L$  с границами областей  $D_j$  включить в число рассматриваемых пар точек  $(P_1, P_0)$ , то разностное уравнение (9.6.13) будет оставаться годным и для задач с разрывными коэффициентами.

Получим теперь разностное уравнение для решения кинетического уравнения, записанного в самосопряженной форме:

$$-\left[l \frac{\partial}{\partial \xi}\right]^2 u + u = Q(u, F, x, \Omega), \quad (9.6.19)$$

где  $Q$  — четная по  $\Omega$  функция.

Рассмотрим на характеристике  $L$  три точки  $P_i(\xi_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , такие, что  $\xi_1 - \xi_0 = \xi_2 - \xi_1 = h > 0$ , а  $[P_2, P_0] \in D_j$ . Обозначим

$$\delta^2 u_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}; \quad \omega u_i = \frac{5}{6} u_i + \frac{1}{12} (u_{i+1} + u_{i-1}). \quad (9.6.20)$$

Класс функций  $u(x, \Omega)$ , являющихся ограниченными в  $\bar{D}_j$  решениями уравнения (9.6.19), обозначим  $K^2(D_j)$ . Пусть  $K^2 C_{n, \alpha}(\bar{D}_j) = \{u : u \in K^2(D_j), Q(u, F, x, \Omega) \in C_{n, \alpha}(\bar{D}_j) \text{ для всех } \Omega\}$ . Из (9.6.19) следует, что если  $u \in K^2 C_{n, \alpha}(\bar{D}_j)$ , то  $u \in C_{n+2, \alpha}(P_2, P_0)$ .

Применяя способ построения разностных формул повышенной точности [119], получаем, что для  $u \in K^2 C_{n, \alpha}(\bar{D}_j)$  в точке  $P_1$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_1 = h^{-2} \delta^2 u_1 - \frac{1}{12} \delta^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)_1 + O(h^\beta), \quad (9.6.21)$$

где  $\beta = 4$  при  $n + \alpha \geq 4$  и  $\beta = n + \alpha$  при  $0 < n + \alpha < 4$ . Подставляя в (9.6.21) значения  $\partial^2 u / \partial \xi^2$  при  $i = 0, 1, 2$ , из уравнения (9.6.19) и пренебрегая членом  $O(h^\beta)$ , приходим к уравнению

$$-\tau^2 \delta^2 u_1 / 4 + \omega u_1 = \omega Q_1. \quad (9.6.22)$$

Перепишем его следующим образом:

$$-(3 - \tau^2) \delta^2 u_1 / (12 \tau^2) + u_1 = \omega Q_1.$$

Из этой записи видим, что для того чтобы уравнение (9.6.22) правильно отражало тип уравнения (9.6.19) (эллиптичность вдоль характеристики  $L$ ), необходимо выполнение неравенства (9.6.18). Очевидно,

что уравнением, аппроксимирующим (9.6.19) с меньшей точностью и не требующим ограничений на шаг, является простое уравнение

$$-(l/h)^2 \delta^2 u_1 + u_1 = Q_1. \quad (9.6.23)$$

Опишем один из способов получения уравнения для  $u$  на границе двух сред. Пусть три точки  $P_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), лежащие на  $L$ , расположены следующим образом: точка  $P_1$  лежит на границе областей  $D_{j1}, D_{j2}$ ,  $[P_1, P_0] \in \bar{D}_{j1}$ ,  $\xi_1 - \xi_0 = h_1 > 0$ ,  $[P_2, P_1] \in \bar{D}_{j2}$ ,  $\xi_2 - \xi_1 = h_2 > 0$ . Запишем для отрезков  $[P_2, P_1]$  и  $[P_1, P_0]$  при  $\pm \Omega$  уравнение (9.6.13). В полученной таким образом системе четырех уравнений перейдем по формулам (5.1.13), (5.1.14) к функциям  $u_i, v_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , а затем исключим из преобразованных уравнений функции  $v_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ ; в результате этой операции получим одно уравнение, связывающее  $u_0, u_1, u_2$ .

Уравнения (9.6.4), (9.6.13), (9.6.22), (9.6.23) послужат нам основой для построения систем разностных уравнений, аппроксимирующих краевые задачи переноса. Они достаточно точны, что является немаловажным обстоятельством при решении многомерных задач, в которых всегда желательно снизить общее число расчетных узлов сетки. Сходимость при измельчении сетки решений разностных уравнений метода характеристик к точному решению доказывается путем использования свойств монотонности разностных схем и энергетических неравенств, полученных из разностного аналога интегрального соотношения (5.1.11).

При решении методом характеристик многомерных задач при достаточно густой пространственно-угловой сетке требуется проводить два типа продолжения функций: интерполяцию в расчетные точки характеристик значений функции  $Q$ , заданной на некоторой сетке  $D_h$ , и разнос значений  $\varphi(x, \Omega)$ , рассчитываемых на характеристиках, в точки  $D_h$  для образования значений функции  $Q$ . Для одномерных задач эти трудности не возникают.

### § 9.7. ПОСТРОЕНИЕ СЕТКИ И РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ (БЕСКОНЕЧНЫЙ ЦИЛИНДР)

Пусть  $R_3(x, y, z)$  — трехмерное пространство. Получим системы разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение

$$l\Omega \nabla \varphi + \varphi = Q \quad (9.7.1)$$

в области  $D$ , являющейся бесконечным цилиндром:

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Пусть

$$Q = \frac{c}{4\pi} \int_{\Omega} (1 + 3\bar{\mu}\Omega\Omega') \varphi(x, \Omega') d\Omega' + f_0 + 3 \cos \psi \sin \psi f_1, \quad (9.7.2)$$

а коэффициенты уравнения (9.7.1)  $l$ ,  $c$ ,  $\bar{\mu}$  и  $f_0$ ,  $f_1$  являются функциями только от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Обозначим  $\nu = \cos \vartheta$ ;  $\mu = \cos \psi$ , где  $\vartheta$  — угол между вектором  $\Omega$  и осью  $z$ , а  $\psi$  — угол между осью  $x$  и проекцией вектора  $\Omega$  на плоскость  $(x, y)$ . Для уравнения (9.7.1) ставится крайняя задача с условием (5.3.6), где  $V$  не зависит от  $(x, y, z)$ .

Разностные уравнения метода характеристик будут получены без перехода к полярным координатам [119]. Воспользуемся тем, что решение  $\varphi(x, \Omega)$  в силу симметрии можно представить функцией только от  $r$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  (или, что то же, от  $x$ ,  $y$ ,  $\gamma$ ). Поэтому, чтобы найти решение задачи (5.5.1), (5.3.6), достаточно в силу симметрии знать функцию  $\varphi(x, y, \gamma)$ , определенную в области  $D' = \{(x, y, \gamma): 0 \leq \gamma \leq 1, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R\}$ , а уравнение (9.7.1) достаточно рассмотреть на семействах характеристик  $L$ , лежащих в плоскостях  $y = \text{const}$ . Тогда если характеристика  $L$  лежит в плоскости  $y = \text{const}$  и образует угол  $\nu$  с осью  $z$ , то  $d\xi = (1 - \nu^2)^{-1/2} dx$ , где  $\xi$  — длина вдоль характеристики, а уравнение (9.7.1) имеет вид

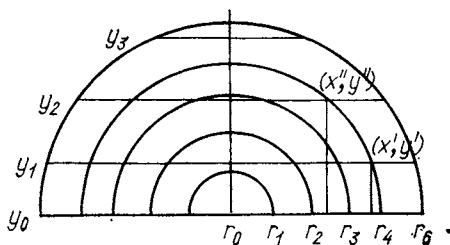


Рис. 9.3. Схема построения сетки для разностной аппроксимации кинетического уравнения

$$l(1 - \nu^2)^{1/2} \frac{\partial \varphi(x, y, \gamma)}{\partial x} + \varphi(x, y, \gamma) = Q, \quad (9.7.3)$$

где функция  $Q = Q(\varphi, f, x, y, \mu, \gamma)$  представляется в виде

$$Q = c(r) (\varphi_0(r) + 3\bar{\mu}(1 - \nu^2)^{1/2} \varphi_1(r) + f_0(r) + 3f_1(r)\mu(1 - \nu^2)^{1/2}), \quad (9.7.4)$$

а  $\varphi_0(r)$ ,  $\varphi_1(r)$  обозначают нулевой и первый моменты функции  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(r) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^1 \varphi d\gamma; \\ \varphi_1(r) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int_0^1 \varphi (1 - \nu^2)^{1/2} d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (9.7.5)$$

Если в уравнении (9.7.3) величину  $\gamma$  рассматривать как параметр ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ), то решение поставленной задачи сведется к интегрированию соответствующей краевой задачи уже в двумерной области  $D'' = \{(x, y, 0) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

Сетку построим, следуя работе [119]. В плоскости  $(x, y)$  для области  $D''$  построим сетку  $D_h$ , образованную пересечениями линий  $r = r_i$ ,  $y = y_j$ ,  $x = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_1$ ,  $j = 0, 1, \dots, N_2$ , где  $r_0 = 0 \leq$

$\leq r_{i-1} < r_i \leq r_{N_1} = R, i = 1, 2, \dots, N_1; y_0 = 0 \leq y_{j-1} < y_j \leq y_{N_2} < R, j = 1, 2, \dots, N_2$  (рис. 9.3).

В разбиение  $\{r_i\}$  включим все границы областей  $D_j$ , являющихся концентрическими кольцами, внутри которых предполагаем постоянными функции  $l(r), c(r), \bar{\mu}(r), f_0(r), f_1(r)$ . Разбиения  $\{r_i\}, \{y_j\}$  выбраны независимыми друг от друга. Пусть  $\bar{r}_{0j}, \bar{r}_{1j}$  ( $\bar{r}_{0j} < \bar{r}_{1j}$ ) — границы  $D_j$ , тогда сетку по  $r$  для  $\bar{D}_j$ , состоящую из  $n_j + 1$  точки, целесообразно выбрать в виде  $r_{kj}^0 = \bar{r}_{0j} + (\bar{r}_{1j} - \bar{r}_{0j}) \left(\sin \frac{k\pi}{2n_j}\right)^m$  ( $k = 0, 1, \dots, n_j$ ), где  $m = 1$  при  $\bar{r}_{1j} = R, \kappa = 1, V = 0$  и  $m = 2$  в остальных случаях.

Для заданного целого  $N_3 > 0$  из всех значений  $\gamma$  рассмотрим такие  $\gamma = \gamma_k, k = 1, 2, \dots, N_3$ , которые являются положительными корнями многочлена Лежандра степени  $2N_3$ ; тогда  $0 < \gamma_k < 1$ . Целесообразность такого выбора разбиения  $\{\gamma_k\}$  будет показана при оценке ошибки квадратуры по  $\gamma$  для вычисления функции  $\varphi_0(r)$ .

Пусть  $P_0(x_0, y_j), P_1(x_1, y_j)$  — две соседние точки сетки  $D_h$ , лежащие на прямой  $y = y_j$ , а  $h = x_1 - x_0 > 0$ . Тогда в уравнении (9.6.13) для этих точек и в величинах  $\alpha_0, \beta, \bar{Q}_{1/2}$  [см. (9.6.14) — (9.6.16)] следует считать

$$\tau = \frac{h}{2l(1-\gamma^2)^{1/2}}; \sigma_0 = 0,1304; Q_{1/2} = h^{-1} \int_{x_0}^{x_1} Q dx.$$

Теперь осталось получить удобную квадратуру для  $Q_{1/2}$ . В нашем случае

$$\int_{x_0}^{x_1} Q dx = c \left( \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0 dx + 3\bar{\mu}(1-\gamma^2)^{1/2} \int_{x_0}^{x_1} \mu \varphi_1 dx \right) + f_0 h + 3f_1(1-\gamma^2)^{1/2} \Delta r,$$

где  $\Delta r = r_1 - r_0; r_i = \sqrt{x_i^2 + y_j^2}, i = 0, 1$ .

Пусть  $\varphi_1(r) \in C_{n,\alpha}([r_0, r_1])$ , где  $1 \leq n \leq 3$ .

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_1} \mu \varphi_1 dx = \int_{r_0}^{r_1} \varphi_1 dr = \frac{\Delta r}{2} (\varphi_{11} + \varphi_{10}) + \frac{(\Delta r)^2}{12} \left[ \left( \frac{d\varphi_1}{dr} \right)_0 - \left( \frac{d\varphi_1}{dr} \right)_1 \right] + O(|\Delta r|^{\beta+1}), \quad (9.7.6)$$

где  $\varphi_{1i} = \varphi_1(r_i), i = 0, 1, \beta = n + \alpha$ . Заметим, что функции  $\varphi_0, \varphi_1$  связаны между собой дифференциальным уравнением баланса

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi_1) + (1-c)\varphi_0 = f_0. \quad (9.7.7)$$

Находя  $d\varphi_1/dr$  из (9.7.7) и подставляя это соотношение в (9.7.6), получаем на классе  $C_{n,\alpha}([r_0, r_1])$  с точностью  $O(|\Delta r|^{\beta+1})$  квадратур-

ную формулу

$$\int_{x_0}^{x_1} \mu \varphi_1 dx = \frac{\Delta r}{2} (\varphi_{11} + \varphi_{10}) + (\Delta r)^2 [\varphi_{11} r_1^{-1} - \varphi_{10} r_0^{-1} + (1-c) l^{-1} (\varphi_{01} - \varphi_{00})] / 12. \quad (9.7.8)$$

Из набора квадратур для  $\int_{x_0}^{x_1} \varphi_0 dx$  выберем такие, коэффициенты которых есть дробно-рациональные функции от координат точек  $P_0, P_1$  невысокой степени. Тогда мы будем избавлены от необходимости табулирования некоторых трансцендентных функций. Очевидно, что вид квадратурных формул зависит от характера продолжения функции  $\varphi(x, y, \gamma)$ , заданной на  $D_h$ , на всю область  $D'$ . Предположим, что по  $\gamma$  функция  $\varphi(x, y, \gamma)$  продолжается четным многочленом Лагранжа степени  $2N_3$ , построенным по точкам  $\gamma_k, k = 1, \dots, N_3$ , и что значения функции  $\varphi(0, y_j, \gamma)$  продолжаютя на точки  $(0, r_i, \gamma)$  квадратичной интерполяцией.

Остановимся на двух типах продолжения для функции  $\varphi_0(r)$ . Сначала предположим, что функция  $\varphi_0(r)$  может быть хорошо приближена между двумя соседними точками  $r_0, r_1$  ( $r_0, r_1 \in \{r_i\}$ ) формулой вида  $c_1 + c_2 r^2$ . Такой вид продолжения согласуется с поведением гладких функций  $\varphi_0(r)$  при  $r = 0$ . Тогда при  $r_0 \leq r \leq r_1$

$$\varphi_0(r) = (\Delta r^2)^{-1} (\varphi_{00} (r_1^2 - r^2) + \varphi_{01} (r^2 - r_0^2)), \quad (9.7.9)$$

где  $\varphi_{0i} = \varphi_0(r_i), i = 0, 1, \Delta r^2 = r_1^2 - r_0^2$ .

Прежде чем перейти к выводу квадратуры для  $\varphi_0$ , следует заметить, что в разбираемой задаче шаг по характеристике  $\Delta x = x_1 - x_0$  может быть величиной  $O(|\Delta r|^{1/2})$ . Поэтому если ошибка локальной аппроксимации в формуле (9.6.9) есть  $O(h^\alpha)$ , то интеграл  $\int_{x_0}^{x_1} \varphi_0 dx$  достаточно аппроксимировать с точностью  $O[(\Delta r)^{\alpha/2}]$ . Считая, что функция  $\varphi_0(\sqrt{t}) \in C_{n, \alpha}([r_0^2, r_1^2])$  и что она может быть приближена по формуле (9.7.9), получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_0 dx = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\varphi_0(r) r dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} = J(\varphi_0) + O(|\Delta x| |\Delta r (r_0 + r_1)|^{\beta_1}), \quad (9.7.10)$$

где  $\beta_1 = \min(2, n + \alpha)$ ;

$$J(\varphi_0) = \frac{\Delta x}{3(x_1 + x_0)} ((2x_1 + x_0) \varphi_{00} + (2x_0 + x_1) \varphi_{01}). \quad (9.7.11)$$

Можно предположить другое продолжение, отражающее специфику решений кинетического уравнения. Предположим, что  $\varphi_0(r)$  между точками  $r_0, r_1$  является решением  $P_{2n-1}$ -уравнений сферических гармоник или  $P_{Nl}$ -уравнений (см. гл. 8), принимающим заданные значения на концах отрезка  $[r_0, r_1]$ . Идя по такому пути, можно получить продолжения, мало отличающиеся от истинных значений функции  $\varphi_0(r)$ . Проиллюстрируем этот прием на простейшем примере продол-

жения с использованием  $P_1$ -уравнений метода сферических гармоник. Пусть функция  $\varphi_0(r)$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{l}{3r} \frac{d}{dr} \left( \frac{lr}{(1-\bar{\mu}c)} \frac{d\varphi_0}{dr} \right) + (1-c)\varphi_0 = f_0 - \frac{l}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{rf_1}{1-\bar{\mu}c} \right) \quad (9.7.12)$$

при  $r_0 \leq r \leq r_1$  и  $\varphi_0(r_0) = \varphi_{00}$ ,  $\varphi_0(r_1) = \varphi_{01}$ .

Считая в (9.7.12) величины  $l$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $c$ ,  $f_0$ ,  $f_1$  постоянными, можно было бы точно найти решение этой задачи, но оно, однако, оказалось бы неудобным для квадратурных формул, так как содержит функции Бесселя. Поэтому будем искать приближенное решение (9.7.12) в виде

$$\varphi_0(r) = (\Delta r^2)^{-1} [(r_1^2 - r^2)\varphi_{00} + (r^2 - r_0^2)\varphi_{01} + p(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)], \quad (9.7.13)$$

где постоянную  $b$  определим из требования, чтобы для функции  $\varphi_0$ , заданной формулой (9.7.13), было выполнено уравнение баланса

$$\begin{aligned} & -\frac{l^2 \bar{\mu}^2}{3(1-\bar{\mu}c)} \left[ r_1 \left( \frac{d\varphi_0}{dr} \right)_1 - r_0 \left( \frac{d\varphi_0}{dr} \right)_0 \right] + \\ & + (1-c) \int_{r_0}^{r_1} \varphi_0 r dr = f_0 \frac{\Delta r^2}{2} - \frac{f_1 l \Delta r}{1-\bar{\mu}c}. \end{aligned} \quad (9.7.14)$$

Подставляя (9.7.13) в (9.7.14), получаем

$$b = \frac{\Delta r^2 [f_0 - (1-c)(\varphi_{00} + \varphi_{01})/2] + p [\varphi_{01} - \varphi_{00} - 3f_1 \Delta r / (2l)]}{(1-c)(\Delta r^2)^2 / 6 + p(r_1^2 + r_0^2)}, \quad (9.7.15)$$

где  $p = 4l^2 / (3(1-\bar{\mu}c))$ . В этом случае квадратурная формула имеет вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_0 dx = J(\varphi_0) + \frac{2(\Delta x)^2 (x_1^2 + x_0^2 + 3x_1 x_0) b}{15(x_1 + x_0)}. \quad (9.7.16)$$

Применение последней квадратурной формулы должно улучшать некоторые разностные соотношения, соответствующие точному уравнению баланса нейтронов, а также ускорять сходимость итерационных методов, так как формула (9.7.16) предполагает, что для заданных значений  $f_0$ ,  $f_1$  и для любых начальных приближений для значений  $\varphi_0(r_1)$  всегда выполнен баланс нейтронов на отрезке  $[r_0, r_1]$ .

Объединяя формулы (9.7.8), (9.7.10) или (9.7.16), получаем квадратуру для  $Q_{1/2}$ .

Функцию  $\varphi_1(r)$  определяем на множествах  $\{r_i\}$ ,  $\{y_j\}$  через продолжение  $\varphi_0(r)$ , пользуясь уравнением баланса (9.7.7):

$$l(\bar{r}_1 \varphi_1(\bar{r}_1) - \bar{r}_0 \varphi_1(\bar{r}_0)) + (1-c) \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_1} \varphi_0 r dr = f_0 \frac{\bar{r}_1^2 - \bar{r}_0^2}{2}, \quad (9.7.17)$$

где  $\varphi_1(0) = 0$ , а  $\bar{r}_1$ ,  $\bar{r}_0$  — две соседние точки из упорядоченного набора  $D_h^k$  точек  $\{r_i\}$  ( $\bar{r}_{i+1} \geq \bar{r}_i$ ), составленного из всех точек  $\{r_i\}$ ,  $\{y_j\}$ .

При  $\sigma = 0$  на величину шага  $h$  следует наложить ограничение (9.6.18), которое будет иметь вид

$$h \leq 2\sqrt{3} l \min_k (1 - \gamma_k^2)^{1/2}, \quad (9.7.18)$$

а поскольку  $h^2 \leq |\Delta r| (r_0 + r_1)$  и  $\min_k \sqrt{1 - \gamma_k^2} > 3/(2(2N_3 + 1))$  (см. [210]), (9.7.18) будет выполнено при условии

$$|\Delta r| \leq 27l^2 (2N_3 + 1)^{-2} (r_1 + r_0)^{-1}.$$

### § 9.8. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В МЕТОДЕ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

В обозначениях § 9.7 нулевой и первый моменты от решения, подлежащие замене квадратурными формулами, выразятся для цилиндрически-симметричных задач формулами (9.7.5). Пусть  $D_h$  — сетка,  $\varphi(x, y, \gamma)$  — решение (9.7.1), а

$$J(x, y) = \int_0^1 \varphi(x, y, \gamma) d\gamma.$$

Легко убедиться в том, что нулевой момент  $\varphi_0(r)$  при  $0 \leq r \leq R$  можно, используя симметрию решения задачи, выразить формулой

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J(r \cos \psi, r \sin \psi) d\psi. \quad (9.8.1)$$

Получим квадратуру для  $\varphi_0(r)$ , используя лишь узлы сетки  $D_h$  [129]. Для этого положим  $\bar{J}(x, y) = J(x, y) + J(-x, y)$ .

При  $r = r_0 = 0$  на основании (9.8.1) имеем точную формулу

$$\varphi_0(0) = J(0, 0). \quad (9.8.2)$$

Теперь получим квадратурные формулы при  $r \leq y_2$  (для радиусов  $r_1, r_2$  на рис. 9.3). Воспользуемся тем, что функция  $J(r \cos \psi, r \sin \psi)$  вследствие осевой симметрии, если она гладкая, слабо зависит от  $\psi$  при малых  $r$ . Представим функцию  $J$  в виде суммы четной и нечетной функций по  $\psi$  относительно  $\pi/2$ :

$$J(r \cos \psi, r \sin \psi) = J_1(r, \psi) + J_2(r, \psi), \quad (9.8.3)$$

где

$$J_1(r, \psi) = J_1(r, \pi - \psi); \quad J_2(r, \psi) = -J_2(r, \pi - \psi). \quad (9.8.4)$$

Тогда согласно (9.8.1)

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_1(r, \psi) d\psi. \quad (9.8.5)$$



Учитывая (9.8.5) и то, что  $J_1$  является одновременно четной функцией относительно  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi/2$ , приблизим  $J_1$  формулой

$$J_1(r, \psi) \approx a_0(r) + a_1(r) \cos 2\psi, \quad (9.8.6)$$

где коэффициенты  $a_0, a_1$  выберем так, чтобы (9.8.6) превращалось в тождество при  $\psi = 0, \pi/2$ . После такого выбора, подставляя (9.8.6) в (9.8.5), получаем квадратуру

$$\Phi_0(r_i) = \bar{J}(r_i, 0)/4 + J(0, r_i)/2 \quad (9.8.7)$$

при  $r_i \leq y_1$ . Для  $y_1 < r \leq y_2$  выведем более точную квадратуру. Для этого функцию  $J_1$  представим в виде

$$J_1(r, \psi) \approx a_0(r) + a_1(r) \cos 2\psi + a_2(r) \cos 4\psi. \quad (9.8.8)$$

В формуле (9.8.8) коэффициенты  $a_i, i = 0, 1, 2$ , выберем так, чтобы (9.8.8) превращалось в тождество в узлах построенной сетки, т. е. при  $\psi = 0, \psi = \pi/2, \psi = \arctg(y_1/x_1)$ , где  $x_1 = \sqrt{r^2 - y_1^2}$ . Тогда, подставив (9.8.8) в (9.8.5), получим квадратуру

$$\Phi_0(r) = \frac{1}{8} \left[ \frac{r^4}{2x_1^2 y_1^2} \bar{J}(x_1, y_1) + \frac{1}{2} (3 - x_1^2/y_1^2) \bar{J}(r, 0) + (3 - y_1^2/x_1^2) J(0, r) \right]. \quad (9.8.9)$$

Недостатком квадратуры (9.8.9) является то, что ее веса могут менять знак. Ниже приведем формулу с положительными весами.

Теперь получим квадратуру для  $y_2 < r \leq R$ . Для этого обозначим  $x' = x_1 = \sqrt{r^2 - y_1^2}$ ;  $y' = y_1$ ;  $x'' = \sqrt{r^2 - y_k^2}$ ;  $y'' = y_k$ , где  $k = \{ \max j : y_j < r \}$ . Сначала преобразуем функцию  $\Phi_0(r)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) J d\psi = \frac{1}{\pi r^2} \left[ \int_0^r \bar{J}(\sqrt{r^2 - y^2}, y) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{r^2 - y^2} dy + \int_0^r \bar{J}(x, \sqrt{r^2 - x^2}) \sqrt{r^2 - x^2} dx \right] \end{aligned}$$

или

$$\Phi_0(r) = (I_1 + I_2 + I_3)/(2\pi r^2),$$

где

$$I_1 = 2 \int_{y'}^{y''} \bar{J}(\sqrt{r^2 - y^2}, y) \sqrt{r^2 - y^2} dy + 2 \int_{x''}^{x'} \bar{J}(x, \sqrt{r^2 - x^2}) \sqrt{r^2 - x^2} dx;$$

$$I_2 = r^2 \int_{-y'}^{y'} \bar{J}(\sqrt{r^2 - y^2}, y) \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}};$$

$$I_3 = 2r^2 \int_{-x''}^{x''} J(x, \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Пусть полуокружность  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $y \geq 0$  пересекает характеристики  $y = y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , в точках  $P_j(x_j, y_j)$ ,  $\bar{P}(-x_j, y_j)$ , где  $x_j \geq 0$ . Эти точки возьмем за узлы квадратур для  $I_1, I_2, I_3$ . Оба интеграла в  $I_1$  заменим формулой трапеций по точкам  $P_j$ . Интегралы  $I_2, I_3$  заменим формулой Симпсона, используя при этом четность по  $y$  функции  $\bar{J}$  и значения  $\bar{J}, J$  соответственно в точках  $(r, 0)$ ,  $(x_1, y_1)$  и  $(0, r)$ ,  $(\pm x_k, y_k)$ . В результате получим

$$\varphi_0(r) = \bar{S}(J)/(2\pi r^2); \quad (9.8.10)$$

$$\bar{S}(J) = \frac{4}{3} r y_1 \bar{J}(r, 0) + \sum_{j=1}^k B_j \bar{J}(x_j, y_j) + \frac{8}{3} r x_k J(0, r), \quad (9.8.11)$$

где

$$B_1 = x_1 y_2 + y_1 ((2/3) r^2 x_1^{-1} - x_2); \quad B_k = x_{k-1} y_k + x_k ((2/3) r^2 y_k^{-1} - y_{k-1});$$

$$B_j = x_j (y_{j+1} - y_{j-1}) + y_j (x_{j-1} - x_{j+1}), \quad j = 2, 3, \dots, k-1.$$

Недостаток квадратуры (9.8.10) в том, что она не является точной при  $J = \text{const}$  и не учитывает того, что функция  $J(x, y)$  слабо меняется по  $\psi$  в окрестности  $r = 0$ . Для повышения точности введем при  $y_2 < r \leq R$  новые квадратуры вида

$$\varphi_0(r) = \bar{S}(J)/\bar{S}(1), \quad (9.8.12)$$

избавленные от упомянутых недостатков; они являются вполне удовлетворительными по порядку точности на классе уравнений с разрывными коэффициентами.

С этой же целью можно модифицировать и квадратуру (9.8.9): если функция  $J(x, y)$  гладкая, она мало меняется в окрестности  $r = 0$ ; поэтому можно для  $y_1 < r \leq y_2$  взять квадратуру (9.8.10), (9.8.11), положив в ней  $k = 1$  и

$$B_1 = 2 r [\pi r/2 - (2/3) (x_1 + y_1)]. \quad (9.8.13)$$

Тогда она будет точной при  $J = \text{const}$  и будет содержать только положительные веса.

Точность квадратур (9.8.10)–(9.8.12) повышается для гладких функций, если точки  $P_j, \bar{P}_j$  расположены равномерно на полуокружности  $x^2 + y^2 = r^2$ . Поэтому если характеристики  $y = y_j$  в сетке  $D_h$  провести по закону

$$y_j = R \sin [j\pi / (2N_2 + 1)], \quad j = 0, 1, \dots, N_2,$$

то они разделят полуокружность  $x^2 + y^2 = R^2$ ;  $y \geq 0$  на равные дуги. Тогда для  $r_i$ , близких к  $r = R$ , будет получена хорошая точность квадратур (9.8.12). Для  $r = R$  можно воспользоваться квадратурой Чебышева повышенной точности

$$\varphi_0(R) = \frac{1}{2N_2 + 1} \left[ \sum_{j=1}^{N_2} \bar{J}(x_j, y_j) + \frac{1}{2} \bar{J}(R, 0) \right] \quad (9.8.14)$$

( $x_j^2 + y_j^2 = R$ ;  $(x_j, y_j) \in D_h$ ), являющейся точной, если функция  $J(R \cos \psi, R \sin \psi)$  представима в виде тригонометрического по  $\psi$  мно-

гочлена степени  $4N_3 + 1$  [101]. В формуле (9.8.14) исключена из узлов квадратуры точка  $(0, R)$ . Это выгодно сделать ввиду упрощения расчетных формул для интегралов, взятых при  $r = R$  по отрезкам  $[0 \leq \psi \leq \pi/2]$ ,  $[\pi/2 \leq \psi \leq \pi]$  [см. (9.8.21), (9.8.24)].

Здесь следует заметить, что если коэффициенты уравнения и источник терпят разрыв в некоторой точке  $r = \rho$ , то функция  $J(x, y)$  от решения  $\varphi(x, y, \gamma)$  имеет, как правило, разрыв в производной по  $y$  при  $y = \rho$ , распространяющийся слева направо вдоль характеристики  $y = \rho$  при  $x \geq 0$ . Поэтому в ряде многозонных задач целесообразно для повышения точности квадратур выбирать такое разбиение  $\{y_j\}$ , которое включало бы все точки разрывов коэффициентов уравнения и источника.

Учитывая, что решение  $\varphi(x, y, \gamma)$  является четной по  $\gamma$  функцией, интегралы по  $\gamma$ , входящие в интегральные члены, аппроксимируем квадратурной формулой наивысшей алгебраической степени точности для четных функций [90]:

$$J(x, y) = \int_0^1 \varphi d\gamma = \sum_{k=1}^{N_3} A_k \varphi(x, y, \gamma_k) + R_{N_3}. \quad (9.8.15)$$

Узлы и веса формулы (9.8.15) совпадают с положительными узлами и весами квадратурной формулы Гаусса [101] для отрезка  $[-1, 1]$  порядка  $2N_3$ . Оценка погрешности формулы (9.8.15) содержится в работе [90]: если  $\varphi$  как функция  $\gamma$  принадлежит классу  $C_{4N_3, 0}([0, 1])$ , то

$$|R_{N_3}| \leq \frac{M_{4N_3} 2^{4N_3+1}}{(4N_3+1)!} \left[ \frac{(2N_3)!}{(2N_3+1) \dots (4N_3)} \right]^2 \approx \frac{\pi}{2} \frac{M_{4N_3}}{(4N_3)!} 2^{-4N_3}, \quad (9.8.16)$$

где  $M_k = \max_{\gamma} \left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial \gamma^k} \right|$ , или  $|R_{N_3}| \leq E_{4N_3-1}(\varphi, -1, 1)$ . Здесь  $E_k(\varphi, -1, 1)$  — наилучшее приближение на отрезке  $[-1, 1]$  функции  $\varphi$  многочленом  $k$ -й степени по  $\gamma$ .

Пусть для функции  $\varphi(x, y, \gamma)$  определены интегралы

$$S_{\pm} \varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^1 \varphi(\pm R \cos \psi, R \sin \psi, \gamma) d\gamma; \quad (9.8.17)$$

$$J_{\pm} \varphi = \frac{\pm 1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^1 \varphi(\pm R \cos \psi, R \sin \psi, \gamma) (1 - \gamma^2)^{1/2} d\gamma; \quad (9.8.18)$$

$$T\varphi = \int_0^{\pi/2} \varphi(R \cos \psi, R \sin \psi, \gamma) \cos \psi d\psi. \quad (9.8.19)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(R) &= S_+ \varphi + S_- \varphi; \quad \varphi_1(R) = J_+ \varphi + J_- \varphi; \\ S_{\pm 1} &= 1/2; \quad J_{+1} = -J_{-1} = 1/4; \quad T1 = 1. \end{aligned} \quad (9.8.20)$$

Значения этих интегралов нам потребуются в итерационном методе. Получим квадратурные формулы для интегралов (9.8.17)—(9.8.19), узлами которых являлись бы точки  $\gamma = \gamma_k$ ;  $\psi_j = j\pi/(2N_2 + 1)$ ;  $k = 1, 2, \dots, N_3$ ;  $j = 0, 1, \dots, N_2$ . От квадратурных формул потребуем, чтобы они имели достаточно высокую степень точности в случае, когда функция  $\varphi(R \cos \psi, R \sin \psi, \gamma)$  является алгебраическим многочленом по  $\gamma$  и тригонометрическим многочленом по  $\psi$ . Кроме того, потребуем, чтобы точно выполнялись соотношения (9.8.20).

Учитывая квадратурную формулу (9.8.15), получаем

$$S_{\pm} \varphi = \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_j J(\pm R \mu_j, y_j), \quad (9.8.21)$$

где

$$\alpha_j = (2N_2 + 1)^{-1} \text{ при } j \neq 0; \quad 2^{-1} (2N_2 + 1)^{-1} \text{ при } j = 0; \quad (9.8.22)$$

$$\mu_j = x_j R^{-1} = \cos \psi_j; \quad x_j = (R^2 - y_j^2)^{1/2}. \quad (9.8.23)$$

Формула (9.8.21) становится точной [101], если функции  $J(\pm R \cos \psi, R \sin \psi)$  представимы при  $0 \leq \psi \leq \pi/2$  четными тригонометрическими многочленами степени  $2N_2 + 1$ ; соотношение (9.8.20) для  $S_+ \varphi, S_- \varphi$  выполнено.

Интеграл  $T_\varphi$  заменим формулой

$$T_\varphi = T_\gamma(\varphi) = \beta_1 \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_j \mu_j \varphi(R \cos \psi_j, R \sin \psi_j, \gamma), \quad (9.8.24)$$

$$\text{где } \beta_1 = \left( \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_j \mu_j \right)^{-1}.$$

Формула (9.8.24) без множителя  $\beta_1$  дает хорошую точность для интегрирования функций вида  $\mu\varphi$ , ибо в ней взяты чебышевские узлы и веса. Множитель же  $\beta_1$ , который не изменяет общего порядка точности формулы (9.8.24) на классе достаточно гладких функций, нужен для выполнения соотношения (9.8.20) для  $T_\varphi$ .

Аналогично, требуя для  $J_+$  выполнения (9.8.20), полагаем

$$J_+ \varphi = \beta_2 \sum_{k=1}^{N_3} A_k T(\varphi(\gamma_k)) (1 - \gamma_k^2)^{1/2}, \quad (9.8.25)$$

$$\text{где } \beta_2 = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^{N_3} A_k (1 - \gamma_k^2)^{1/2} \right)^{-1}.$$

Изложим еще один способ получения квадратур для  $\varphi_0$  [162], для этого преобразуем интеграл для  $\varphi_0$ , сделав в нем замену  $\psi = \arccos \mu$ :

$$\varphi_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \bar{J}(r\mu, r(1 - \mu^2)^{1/2}) (1 - \mu^2)^{-1/2} d\mu. \quad (9.8.26)$$

Пронумеруем все узлы сетки  $D_h$ , лежащие на радиусе  $r$  при  $x \geq 0$ , в порядке возрастания координаты  $x$ . Пусть этим узлам соответствуют значения  $\mu_0 = 0 < \mu_1 < \dots < \mu_{n_r-1} < \mu_{n_r} = 1$ , а значению  $\mu_j$  соответствует точка  $(x_j, y_j)$ . Интеграл (9.8.26) заменим суммой интегралов, взятых по отрезкам  $[\mu_{j-1}, \mu_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_r$ .

Предполагая, что  $\bar{J}(r\mu, r\sqrt{1-\mu^2})$  линейно зависит от  $\mu$  на  $[\mu_{j-1}, \mu_j]$ , и интегрируя по отрезку  $[\mu_{j-1}, \mu_j]$ , получаем

$$\int_{\mu_{j-1}}^{\mu_j} \bar{J}(r\mu, r(1-\mu^2)^{1/2})(1-\mu^2)^{-1/2} d\mu = \\ = C_j \bar{J}(x_j, y_j) + B_j \bar{J}(x_{j-1}, y_{j-1}),$$

где

$$C_j = (\mu_j - \mu_{j-1})^{-1} [(1 - \mu_{j-1}^2)^{1/2} - (1 - \mu_j^2)^{1/2} - \\ - \mu_{j-1} (\arcsin \mu_j - \arcsin \mu_{j-1})]; \\ B_j = -(\mu_j - \mu_{j-1})^{-1} [(1 - \mu_{j-1}^2)^{1/2} - (1 - \mu_j^2)^{1/2} - \\ - \mu_j (\arcsin \mu_j - \arcsin \mu_{j-1})].$$

Объединяя эти квадратурные формулы в одну, получаем квадратуру для  $\varphi_0(r)$ .

### § 9.9. ПОСТРОЕНИЕ СЕТКИ И РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ

Пусть в слое  $0 \leq x \leq H$  задано кинетическое уравнение

$$\mu \frac{d\varphi}{dx} + \Sigma \varphi = Q, \quad (9.9.1)$$

в котором  $Q = \Sigma_s (\varphi_0 + 3\bar{\mu}\varphi_1) + f(x, \mu)$ ;

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu') d\mu'; \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu' \varphi(x, \mu') d\mu', \quad (9.9.2)$$

а коэффициенты  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$ ,  $\bar{\mu}$  и источник  $f(x, \mu)$  — кусочно-постоянные функции от  $x$ . Для уравнения (9.9.1) поставим краевую задачу (5.2.11).

На  $[0, H]$  построим сетку  $D_1 \{x_i\}$ :  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k \dots < x_N = H$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , в узлы которой включим все точки разрыва функций  $\Sigma$ ,  $\Sigma_s$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $f$ .

Пусть в зоне  $[\bar{x}_{m-1}, \bar{x}_m]$  коэффициенты и источник уравнения постоянны, тогда внутри этой зоны целесообразно сетку из  $n_m$  точек взять сгущающуюся к краям по закону

$$x_{k_m} = \bar{x}_{m-1} + (\bar{x}_m - \bar{x}_{m-1}) \sin^2 \frac{k\pi}{2(n_m + 1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n_m,$$

чтобы учесть возможные быстрые изменения решения в окрестности границ зон.

На отрезке  $[-1 \leq \mu \leq 1]$  построим сетку  $D_2$ , образованную точками  $\pm \mu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , в которой  $0 < \mu_k \leq 1$  и  $\mu_k < \mu_{k+1}$ . Пусть  $D_h = D_1 \times D_2$  означает декартово произведение сеток  $D_1$  и  $D_2$ .

Рассмотрим любую из характеристик кинетического уравнения, косинус угла которой с осью  $x$  равен  $\mu_k$ . Вдоль этой характеристики уравнение (9.9.1) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\xi} + \Sigma\varphi = Q, \quad (9.9.3)$$

где  $d\varphi/d\xi = \mu_k d\varphi(x, \mu_k)/dx$ ;  $dx = \mu_k d\xi$ .

Рассмотрим тот отрезок характеристики, который заключен между плоскостями  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  Тогда согласно (9.6.13)

$$\varphi(x_i, \mu_k) = \alpha_0 \varphi(x_{i-1}, \mu_k) + \beta_0 \bar{Q}_{i-1/2}, \quad (9.9.4)$$

где  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\bar{Q}_{i-1/2}$  выражаются формулами (9.6.14)—(9.6.16), в которых

$$Q_{i-1/2} = h^{-1} \Sigma_s \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_0 dx + 3\bar{\mu}\mu_k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_1 dx \right) + f(x_{i-1/2}, \mu_k);$$

$$h = x_i - x_{i-1}; \quad \tau = \Sigma h / (2\mu_k); \quad x_{i+1/2} = (x_i + x_{i-1})/2.$$

Аналогичные формулы получаются для характеристик с косинусом угла наклона к оси  $x$ , равным  $-\mu_k$ ; в них  $\varphi(x_{i-1}, -\mu_k)$  выражается через  $\varphi(x_i, -\mu_k)$ .

Перед выводом квадратурных формул для  $Q$  заметим, что функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  связаны между собой уравнением баланса

$$\frac{d\varphi_1}{dx} + \Sigma_0 \varphi_0 = f_0(x). \quad (9.9.5)$$

Поэтому если мы применим квадратуру Эйлера к интегралу от  $\varphi_1$  и учтем (9.9.5), то получим, что при  $\varphi_1 \in C_{n, \alpha}([x_{i-1}, x_i])$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_1 dx = \frac{h}{2} (\varphi_{1i} + \varphi_{1i-1}) + \frac{h^2}{12} \Sigma_0 (\varphi_{0i} - \varphi_{0i-1}) + O(h^{1+\beta}), \quad (9.9.6)$$

где  $\beta = \min(4, n + \alpha)$ . В (9.9.6) мы учли, что функция  $f(x, \mu_k)$  постоянна внутри  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Для получения квадратур от  $\varphi_0$  предположим, что функция  $\varphi_0(x)$  между точками  $x_i$ ,  $x_{i-1}$  продолжена так, что она является решением  $P_1$ -уравнений метода сферических гармоник на  $[x_{i-1}, x_i]$  — уравнения (9.9.5) и

$$\frac{1}{3} \frac{d\varphi_0}{dx} + \Sigma_1 \varphi_1 = f_1, \quad (9.9.7)$$

принимаящим заданные значения на концах отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$ :  $\varphi_0(x_i) = \varphi_{0i}$ ;  $\varphi_0(x_{i-1}) = \varphi_{0i-1}$ .

Если проинтегрируем (9.9.5) по отрезку  $[x_{i-1}, x_i]$ , а затем воспользуемся уравнением (9.9.7) для исключения функции  $\varphi_1$  и учтем, что  $f_1(x)$  постоянна внутри  $[x_{i-1}, x_i]$ , то получим

$$-\frac{1}{3\Sigma_1} \left( \left( \frac{d\varphi_0}{dx} \right)_i - \left( \frac{d\varphi_0}{dx} \right)_{i-1} \right) + \Sigma_0 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_0 dx = f_0 h. \quad (9.9.8)$$

Функцию  $\varphi_0(x)$  будем приближенно искать в виде

$$\varphi_0(x) = h^{-1} (\varphi_{0i-1}(x_i - x) + \varphi_{0i}(x - x_{i-1}) + b(x - x_{i-1})(x_i - x)), \quad (9.9.9)$$

где постоянную  $b$  выберем такой, чтобы для функции  $\varphi_0(x)$ , представленной формулой (9.9.9), было выполнено равенство (9.9.8). Подставляя (9.9.9) в (9.9.8), находим

$$b = \left( 1 + \frac{\Sigma_0 \Sigma_1 h^2}{4} \right)^{-1} \frac{3\Sigma_1 h}{2} \left( f_0 - \frac{\Sigma_0}{2} (\varphi_{0i} + \varphi_{0i-1}) \right).$$

При этом

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_0 dx = \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{\Sigma_0 \Sigma_1 h^2}{4} \right)^{-1} \left( \varphi_{0i-1} + \varphi_{0i} + \frac{\Sigma_1 h^2}{2} f_0 \right). \quad (9.9.10)$$

Подставляя (9.9.6), (9.9.10) в выражение для  $Q_{i-1/2}$ , получаем

$$Q_{i-1/2} = \frac{\Sigma_s}{2} \left( 1 + \frac{\Sigma_0 \Sigma_1 h^2}{4} \right)^{-1} \left( \varphi_{0i} + \varphi_{0i-1} + \frac{\Sigma_1 h^2 f_0}{2} \right) + \\ + \frac{\bar{\mu}\mu_k \Sigma_s \Sigma_0 h}{4} (\varphi_{0i} - \varphi_{0i-1}) + \frac{3\bar{\mu}\mu_k \Sigma_s}{2} (\varphi_{1i} + \varphi_{1i-1}) + f(x_{i-1/2}, \mu_k);$$

$$\bar{Q}_{i-1/2} = (2 + \sigma\tau^5) Q_{i-1/2} + \tau(Q_i - Q_{i-1})/3.$$

Краевые условия (5.2.11) аппроксимируются естественным образом: в них следует считать  $\mu = \pm\mu_k$ .

Теперь изложим метод получения разностного уравнения, предложенный В. И. Лебедевым и С. А. Фроловой, который точнее учитывает экспоненциальный рост или убывание решения вдоль характеристик. Для этого воспользуемся формулой (9.6.2), которая для рассматриваемого случая примет вид

$$\varphi(x_i, \mu_k) = \exp(-2\tau_k) \varphi(x_{i-1}, \mu_k) + \\ + \frac{1}{\mu_k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q(t, \mu_k) \exp\left((t-x_i) \frac{\Sigma}{\mu_k}\right) dt, \quad (9.9.11)$$

где  $\tau_k = \Sigma h / (2\mu_k)$ . Подынтегральный член в (9.9.11) вычислим в предположении, что функции  $\varphi_0, \varphi_1$ , входящие в него, связаны между собой не только уравнением баланса (9.9.7), но и продолжены внутрь отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$  по значениям на концах его как точные решения

$P_1$  - или  $P_2$ -уравнений метода сферических гармоник. Это значит, что к уравнению (9.9.5) мы добавляем второе уравнение

$$\frac{1}{3} \frac{d\varphi_0}{dx} + \tilde{\Sigma}_1 \varphi_1 = \tilde{f}_1(x), \quad (9.9.12)$$

в котором  $\tilde{\Sigma}_1 = \Sigma_1$ ;  $\tilde{f}_1 = f_1$  для  $P_1$ -приближения и  $\tilde{\Sigma}_1 = \Sigma_1/(1 + 4/\Sigma_0/5\Sigma)$ ;  $\tilde{f}_1 = f_1/(1 + 4\Sigma_0/5\Sigma)$  для  $P_2$ -приближения. Рассмотрим два решения системы (9.9.5), (9.9.12): первое — такое, в котором функция  $\varphi_0(x)$  удовлетворяет условиям

$$\varphi_0(x_{i-1}) = \varphi_{0i-1}; \quad \varphi_0(x_i) = \varphi_{0i}, \quad (9.9.13)$$

второе — такое, в котором функция  $\varphi_1(x)$  удовлетворяет условиям

$$\varphi_1(x_{i-1}) = \varphi_{1i-1}; \quad \varphi_1(x_i) = \varphi_{1i}. \quad (9.9.14)$$

Заметим, что можно было бы применить для продолжения функций  $\varphi_0, \varphi_1$   $P_3$ -приближение. Тогда можно потребовать от построенных таким способом продолжений одновременного выполнения краевых условий (9.9.13), (9.9.14). Однако это усложнило бы расчетные формулы.

Итак, решение задач (9.9.5), (9.9.12), (9.9.13) и (9.9.5), (9.9.12), (9.9.14) запишется в виде явных формул, которые можно рассматривать как интерполяционные формулы, учитывающие специфику решений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x) &= c_{10} \operatorname{sh} \lambda(x - x_{i-1}) + c_{20} \operatorname{sh} \lambda(x - x_i) + f_0/\Sigma_0; \\ \varphi_1(x) &= c_{11} \operatorname{sh} \lambda(x - x_{i-1}) + c_{21} \operatorname{sh} \lambda(x - x_i) + \tilde{f}_1/\tilde{\Sigma}_1, \end{aligned} \right\} \quad (9.9.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_{1j} &= p(\varphi_{ji}(x) - q); \quad c_{2j} = -p(\varphi_{ji-1} - q); \\ \lambda &= \sqrt{3\Sigma_0 \tilde{\Sigma}_1}; \quad p = 1/\operatorname{sh} \lambda h; \quad q = f_0/\Sigma_0, \\ \text{при } j=0 \text{ и } q &= \tilde{f}_1/\tilde{\Sigma}_1 \text{ при } j=1. \end{aligned} \right\} \quad (9.9.16)$$

Подставляя выражения (9.9.15), (9.9.16) во второе слагаемое формулы (9.9.11) (обозначим его  $\tilde{Q}$ ) и проводя точное интегрирование, получаем, что

$$\begin{aligned} Q &= (h/\mu_h) \{ \Sigma_s [J_1(c_{10} + 3\bar{\mu}_h c_{11}) + J_2(c_{20} + 3\bar{\mu}_h c_{21}) + \\ &+ J_3(f_0/\Sigma_0 + 3\bar{\mu}_h \tilde{f}_1/\tilde{\Sigma}_1)] + J_3(f_0 + 3\mu_h f_1) \}, \end{aligned} \quad (9.9.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= (\lambda h \operatorname{ch} \lambda h - \bar{\tau}_h \operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \exp(-\tau_h))/(\lambda^2 h^2 - \bar{\tau}_h^2); \\ J_2 &= (\lambda h - \exp(-\bar{\tau}_h)(\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \bar{\tau}_h \operatorname{sh} \lambda h))/(\lambda^2 h^2 - \bar{\tau}_h^2); \\ J_3 &= (1 - \exp(-\bar{\tau}_h))/\bar{\tau}_h, \quad \bar{\tau}_h = \Sigma h/\mu_h. \end{aligned} \right\} \quad (9.9.18)$$

Заменяя в  $J_3$  экспоненту рациональной дробью (9.6.14) при  $\sigma = \sigma_0$ , разлагая входящие в  $J_1$  и  $J_2$  выражения  $\exp(-\tau_h)$ ,  $\exp(-\lambda h)$ ,  $\operatorname{sh} \lambda h$ ,



$\operatorname{ch} \lambda h$  в ряды и подставляя эти выражения в равенство (9.9.17), в котором  $\exp(-2\tau_k)$  заменена рациональной дробью (9.6.14), получаем разностное уравнение, определяемое формулами (9.9.11), (9.9.17).

Для расчета  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  применим квадратурные формулы вида

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M A_k (\varphi(x, \mu_k) + \varphi(x, -\mu_k)); \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M A_k (\varphi(x, \mu_k) - \varphi(x, -\mu_k)) \mu_k, \end{aligned} \right\} \quad (9.9.19)$$

где  $A_k$ ,  $\mu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ , — веса и узлы некоторой квадратурной формулы для  $[0, 1]$ .

### § 9.10. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ (ПЛОСКИЙ СЛОЙ)

Рассмотрим уравнение (5.2.12). В нем, не уменьшая общности, можно предположить, что  $l = \text{const}$ , так как общий случай одномерной задачи приводится к задаче, в которой величина  $l$  постоянна. В самом деле, вводя среднюю оптическую длину по формуле

$$x = \int_0^z l^{-1}(t) dt$$

и делая в соответствии с этой формулой замену переменных, получаем кинетическое уравнение с постоянной функцией  $l$ . Итак, уравнение запишем в виде

$$-l^2 \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = cSu + F(x, \mu), \quad (9.10.1)$$

где  $0 \leq c(x) \leq 1$ , а оператор  $Su$  имеет при изотропном рассеянии вид

$$Su = \int_0^1 u(x, \mu) d\mu. \quad (9.10.2)$$

Напомним, что  $u(x, \mu)$  и  $F(x, \mu)$  — четные по  $\mu$  функции, и поэтому уравнение (9.10.1) достаточно рассмотреть лишь при  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Пусть для простоты выкладок краевая задача для уравнения (9.10.1) ставится в слое  $|x| \leq \pi$ . Построим на отрезке  $[-\pi \leq x \leq \pi]$  сетку  $D_1 = \{x_i = ih, i = 0, \pm 1, \dots, \pm N\}$ , где  $h = \pi N^{-1}$ , а  $N$  — некоторое целое положительное число.

На отрезке  $[0 \leq \mu \leq 1]$  построим сетку  $D_2 = \{\mu_k, k = 1, 2, \dots, M\}$ , образованную точками  $\mu_k, k = 1, 2, \dots, M$ , где  $M$  — некоторое положительное целое число. Пусть  $\mu_k < \mu_{k+1}$ ;  $t = M^{-1}$ , а  $D_h = D_1 \times D_2$  — декартово произведение сеток  $D_1$  и  $D_2$ . Введем в рассмотрение два разностных оператора

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 u &= u(x-h, \mu) - 2u(x, \mu) + u(x+h, \mu); \\ \omega u &= (u(x-h, \mu) + u(x+h, \mu))/12 + 5u(x, \mu)/6. \end{aligned} \right\} \quad (9.10.3)$$

Интегралы  $S_i u$  поставим в соответствие квадратурную формулу

$$S_i u = \sum_{k=1}^M A_k u(x, \mu_k), \quad (9.10.4)$$

в которой  $A_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$  и  $\sum_{k=1}^M A_k = 1$ . Далее будет выяснено, что за узлы  $\mu_k$  выгодно брать положительные корни некоторых ультрасферических многочленов степени  $2M$  [119, 210]. Если за эти многочлены взять многочлены Лежандра, то квадратура (9.10.4) будет квадратурой Гаусса, согласованной с выбором операции  $P$  в  $KP$ -методе (см. гл. 11).

Предполагая функцию  $c(x)$  непрерывной, построим во внутренних узлах сетки  $D_1$  следующие конечно-разностные аналоги для уравнения (9.10.1):

$$-l^2 h^{-2} \mu^2 \delta^2 u + u = c S_i u + F; \quad (9.10.5)$$

$$-l^2 h^{-2} \mu^2 \delta^2 u + \omega u = \omega (c S_i u + F) \quad (9.10.6)$$

при  $\mu = \mu_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, M$ . В случае периодической задачи эти уравнения составляем и для точки  $x = \pi$ .

Уравнения (9.10.5), (9.10.6) являются соответственно уравнениями (9.6.23), (9.6.22), переписанными для плоского слоя. На классе  $K^2 C_{n, \alpha}$  локальная аппроксимация по  $x$  уравнения (9.10.1) уравнением (9.10.5) будет величиной  $O(h^{\beta_1})$ , где  $\beta_1 = \min(2, n + \alpha)$ , а уравнением (9.10.6) — величиной  $O(h^{\beta_2})$ , где  $\beta_2 = \min(4, n + \alpha)$ . Для уравнения (9.10.6) дополнительно потребуем выполнения неравенства (9.6.18), которое в данном случае будет иметь вид

$$h \leq 2\sqrt{3} l \mu_1. \quad (9.10.7)$$

### § 9.11. НАХОЖДЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ

Сначала найдем общее решение однородных систем (9.10.5), (9.10.6) при  $c = \text{const}$ . Для определенности найдем общее решение системы (9.10.6), ибо для системы (9.10.5), а также для систем, аппроксимирующих несамосопряженное уравнение, соответствующие выкладки проводятся аналогично. Итак, однородная система (9.10.6), записанная для точек  $D_h$ , имеет вид

$$-l^2 h^{-2} \mu^2 \delta^2 u + \omega u = \omega c S_i u. \quad (9.11.1)$$

Решение ее ищем в виде

$$u(x, \mu) = \Phi_\gamma(\mu) \exp(-\gamma x/l), \quad (9.11.2)$$

где  $\gamma$  — неизвестный параметр. Пусть  $\beta = \gamma h/2l$ , а  $\varphi(\beta)$  обозначает функцию

$$\varphi = \varphi(\beta) = \frac{h}{2l \operatorname{sh} \beta} \left( 1 + \frac{\operatorname{sh}^2 \beta}{3} \right)^{1/2}. \quad (9.11.3)$$

Подставляя (9.11.2) в (9.11.1), получаем

$$(1 - \varphi^{-2}\mu^2) \Phi_\nu(\mu) = cS_t \Phi_\nu(\mu). \quad (9.11.4)$$

Поскольку достаточно найти решение (9.11.1), с точностью до постоянного множителя, можно потребовать, чтобы

$$S_t \Phi_\nu = 1. \quad (9.11.5)$$

Тогда из (9.11.4) получаем

$$\Phi_\nu(\mu) = \varphi^2 (\varphi^2 - \mu^2)^{-1} c. \quad (9.11.6)$$

Учитывая (9.11.5), видим, что величина  $\varphi(\beta)$  должна быть выбрана так, чтобы для нее выполнялось соотношение

$$\varphi^2 c S_t (\varphi^2 - \mu^2)^{-1} = 1. \quad (9.11.7)$$

Рассмотрим функцию

$$\omega(z) = cz \sum_{k=1}^M A_k (z - \mu_k^2)^{-1}.$$

Мы видим, что  $\omega(0) = 0$  и  $\omega(\pm\infty) = c$ , а в точках  $z = \mu_k^2$  функция  $\omega(z)$  имеет полюсы первого порядка. Следовательно, учитывая общее число перемен знака функции  $\omega(z)$  и порядок, в котором меняется знак функции  $\omega(z)$ , заключаем, что уравнение (9.11.7) имеет  $M$  корней  $\varphi_j^2$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , причем

$$\mu_1^2 < \varphi_1^2 < \mu_2^2 < \dots < \varphi_{M-1}^2 < \mu_M^2, \quad (9.11.8)$$

а

$$\varphi_M^2 \geq \mu_M^2 \text{ при } 0 \leq c < 1 \text{ и } \varphi_M^2 < 0 \text{ при } c > 1.$$

По найденным значениям  $\varphi_j^2$  из (9.11.3) определяем  $2M$  значений  $\gamma$ :  $\gamma_j = \gamma_j(\varphi_j) = \pm 2lh^{-1} \operatorname{arcsch} (4l^2 h^{-2} \varphi_j^2 - 1/3)^{-1/2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Можно показать, что значения  $\pm\gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M-1$ , соответствуют точкам непрерывного спектра дифференциального оператора, а  $\gamma_M \rightarrow \nu_0^{-1}$  при  $M, N \rightarrow \infty$ , где  $\nu_0$  — точка дискретного спектра точного оператора; при  $c > 1$  значение  $\gamma_M$  будет чисто мнимым. Справедлива

### Теорема 9.11.1.

$$S_t [\mu^2 \Phi_{\nu_i}(\mu) \Phi_{\nu_j}(\mu)] = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы 5.5.3. В самом деле, так как для  $\gamma = \gamma_i$ ,  $\gamma = \gamma_j$  справедливы равенства

$$(1 - \varphi_i^{-2} \mu^2) \Phi_{\nu_i}(\mu) = c S_t \Phi_{\nu_i}(\mu); \quad (1 - \varphi_j^{-2} \mu^2) \Phi_{\nu_j}(\mu) = c S_t \Phi_{\nu_j}(\mu),$$

то, умножая первое уравнение на  $\Phi_{\nu_j}(\mu)$ , а второе на  $\Phi_{\nu_i}(\mu)$ , вычитая друг из друга полученные уравнения и применяя к результату вычитания операцию  $S_t$ , находим

$$(\varphi_i^{-2} - \varphi_j^{-2}) S_t (\mu^2 \Phi_{\nu_i}(\mu) \Phi_{\nu_j}(\mu)) = 0.$$

Теорема 9.11.1 показывает, что система функций  $\Phi_{\nu_j}(\mu)$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , — полная система в пространстве функций, опре-

деленных на множестве  $D_2$ . Общее решение системы уравнений (9.11.1) может быть записано в виде

$$u_0(x, \mu) = \sum_{j=1}^M \Phi_{\gamma_j}(\mu) [a_j \exp(-\gamma_j x/l) + b_j \exp(\gamma_j x/l)],$$

где  $a_j, b_j$  — произвольные постоянные.

Найдем частное решение  $u_1$  неоднородной системы уравнений (9.10.6) при  $l = \text{const}$ . Будем искать  $2\pi$ -периодическое решение  $u_1(x, \mu)$  системы. Для этого предположим, что функция  $F(x, \mu)$  представима рядом Фурье

$$F(x, \mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n(\mu) \exp(inx), \quad (9.11.9)$$

а величины  $\bar{\lambda}_n^2, \bar{F}_n^1, \bar{r}(\bar{\lambda}_n)$  определены формулами

$$\bar{\lambda}_n^2 = 12l^2 h^{-2} \sin^2(nh/2) (3 - \sin^2(nh/2))^{-1}; \quad (9.11.10)$$

$$\bar{F}_n^1 = S_t [F_n(\mu) (1 + \bar{\lambda}_n^2 \mu^2)^{-1}]; \quad (9.11.11)$$

$$\bar{r}(\bar{\lambda}_n) = S_t [(1 + \bar{\lambda}_n^2 \mu^2)^{-1}]. \quad (9.11.12)$$

Решение  $u_1(x, \mu)$  ищем в виде ряда

$$u_1(x, \mu) = \sum_n g_n(\mu) \exp(inx). \quad (9.11.13)$$

Подставляя (9.11.9), (9.11.13) в (9.10.6) и приравнявая коэффициенты при  $\exp(inx)$ , получаем для  $g_n(\mu)$  уравнения

$$(\bar{\lambda}_n^2 \mu^2 + 1) g_n(\mu) = c S_t g_n + F_n(\mu).$$

Следовательно, повторяя рассуждения § 5.8, получаем

$$u_1(x, \mu) = \sum_{-\infty}^{\infty} (1 + \bar{\lambda}_n^2 \mu^2)^{-1} \exp(inx) \left( \frac{c \bar{F}_n^1}{1 - \bar{c} \bar{r}(\bar{\lambda}_n)} + F_n(\mu) \right); \quad (9.11.14)$$

$$S_t u = \sum_{-\infty}^{\infty} (1 - \bar{c} \bar{r}(\bar{\lambda}_n))^{-1} \bar{F}_n^1 \exp(inx). \quad (9.11.15)$$

В работах [119, 121] найдено частное решение при  $c = c(x)$ . Общее решение  $u(x, \mu)$  системы (9.10.6) можно теперь записать в виде  $u(x, \mu) = u_1(x, \mu) + u_0(x, \mu)$ .

Точно такими же способами находят общее решение системы (9.10.5), а также решения разностных аналогов кинетического уравнения для плоского слоя, записанного в несамосопряженной форме. Заметим, что  $u_0(x, \mu) \equiv 0$  для периодической задачи при  $c < 1$ .

## § 9.12. ИССЛЕДОВАНИЕ САМОСOPЯЖЕННЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Построим класс дробно-рациональных функций, имеющий непосредственное отношение к построению квадратур, для оператора  $Su$  и коэффициентов итерационного  $KP$ -метода, который разобран в

гл. 11. Как будет показано в § 11.9, 11.19,  $KP$ -метод при  $P = P_1$  для решения  $2\pi$ -периодической задачи определяется парой четных многочленов  $Q_n(z)$ ,  $P_n(z)$  степени  $2n$ , а скорость сходимости его характеризуется величиной

$$\bar{\psi}(z) = (1 - \theta P_n(z)/Q_n(z))^{-1} (\bar{r}(z) - P_n(z)/Q_n(z)), \quad (9.12.1)$$

где функция  $\bar{r}(z)$  дается равенством (9.11.12), а  $0 \leq \theta < 1$ . Способ выбора  $Q_n$ ,  $P_n$ , при которых величина  $|\bar{\psi}(z)|$  была бы достаточно малой, оказался связанным с задачей выбора квадратуры  $S_t$ , а от выбора  $S_t$  зависит, в свою очередь, погрешность метода сеток. Поскольку нам придется исследовать погрешность метода сеток, обсудим одновременно способы выбора  $S_t$  и  $Q_n$ ,  $P_n$ , с тем чтобы сразу же забраковать некоторые из них. Формула (9.11.15) для решения периодических задач показывает, что сначала необходимо оценить ошибку  $\eta_t(z)$  квадратуры  $S_t$ :

$$\eta_t(z) = Sg(\mu, z) - S_t g(\mu, z) \quad (9.12.2)$$

на классе функций  $S(-1, 1)$ , определенных на отрезке  $[-1 \leq \mu \leq 1]$  и имеющих вид  $g(\mu, z) = (1 + z^2 \mu^2)^{-1}$  при  $0 \leq z < \infty$ . Известно, что [см. (9.10.4), (9.11.12)]

$$Sg(\mu, z) = z^{-1} \operatorname{arctg} z = r(z), \quad (9.12.3)$$

а

$$S_t g(\mu, z) = \bar{r}(z) = \sum_{k=1}^M A_k (1 + z^2 \mu_k^2)^{-1}. \quad (9.12.4)$$

Допустим на время, что в формуле (9.12.4) величины  $\mu_k$  могут принимать любые несовпадающие положительные значения, при которых  $\mu_{k-1} < \mu_k$ . Нетрудно видеть, что функция  $\bar{r}(z)$  есть отношение двух четных полиномов  $C_{M-1}(z)$  и  $B_j(z)$  соответственно степени  $2(M-1)$  и  $2j$ , где  $j = M$  при  $\mu_1 \neq 0$  и  $j = M-1$  при  $\mu_1 = 0$ . Тогда

$$\|\eta_t(z)\| = \|z^{-1} \operatorname{arctg} z - \bar{r}(z)\| = \|z^{-1} \operatorname{arctg} z - C_{M-1}(z)/B_j(z)\|.$$

Итак, вопрос о построении на классе  $S(-1, 1)$  «хороших» квадратур  $\{A_k, \mu_k\}$  оказался эквивалентным вопросу о «хорошем» приближении в норме  $\|\cdot\|$  функции  $r(z)$  дробно-рациональными функциями. Очевидно, что выбор  $\{A_k, \mu_k\}$  зависит от выбора нормы  $\|\cdot\|$ , а вид последней, в свою очередь, определяется пространством, которому принадлежит функция  $F(x, \mu)$  [правая часть уравнения (9.10.1)]. Квадратуры с  $\mu_1 = 0$  и с  $\mu_1 \neq 0$  соответствуют разным видам приближения функции  $r(z)$ . Для первых квадратур  $\bar{r}(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ . Следовательно, если мы хотим наложить естественное требование, чтобы ошибка квадратуры стремилась к нулю с ростом номера гармоники, порождающей эту ошибку, то необходимо ограничиться случаями, где  $\mu_1 \neq 0$ .

Заранее не известно, будут ли приемлемые для нас квадратуры являться квадратурами интерполяционного типа [101]. Дифферен-

цированием выражения (9.12.2) по  $z$  можно показать, что они будут таковыми, если функции  $r(z)$  и  $\bar{r}(z)$  имеют в точке  $z = 0$  касание  $(2M - 1)$ -го порядка. В самом деле, вычисляя  $\eta_t(0)$  и  $\frac{\partial^{2k}}{\partial z^{2k}} \eta_t(z)|_{z=0}$ ,  $k = 1, 2, \dots, M - 1$ , и требуя, чтобы эти величины были равны нулю, получаем систему  $M$  уравнений относительно коэффициентов  $A_k$ , которая, как нетрудно показать, совпадает с соответствующей системой уравнений для определения весов квадратурных формул интерполяционного типа.

Далее, если необходимо, чтобы скорость стремления к нулю ошибок  $KP$ -метода, соответствующих гармоникам с большими номерами, возрастала вместе с номером гармоники, надо потребовать, чтобы степень полинома  $P_n(z)$  была равна  $2(n - 1)$ . Отметим, что функция  $\bar{\psi}$  (9.12.1) тождественно равна нулю при  $\bar{r} = P_n(z)/Q_n(z)$ ; однако отсюда вовсе не следует, что  $M$  должно обязательно равняться  $n$ . Но поскольку должны выполняться предельные соотношения  $S_{M-1}(z)/B_M(z) \rightarrow r(z)$ ,  $P_n(z)/Q_n(z) \rightarrow r(z)$  при  $N, n, M \rightarrow \infty$ , встает задача о построении хороших дробно-рациональных приближений для функции  $z^{-1} \arctg z$ . Наиболее разумно так выбрать функции  $S_{M-1}(z)/B_M(z)$ ;  $P_n(z)/Q_n(z)$ , чтобы они давали в соответствующих нормах наилучшее приближение для  $r(z)$ , но это сложные задачи. Остановимся лишь на двух методах построения дробно-рациональных приближений, достаточно хорошо решающих задачу о выборе коэффициентов многочленов  $S_{M-1}$ ,  $B_M$  и  $P_n$ ,  $Q_n$ . Поскольку обе задачи однотипные, всюду дальше будем вести речь лишь о выборе многочленов  $P_n(z)$ ,  $Q_n(z)$ , считая  $P_n(z)$  многочленом степени  $2(n - 1)$ .

Один из методов [119] основан на классических результатах А. А. Маркова [158] по теории цепных дробей и моментов: функцию  $r(z)$  раскладывают в цепную дробь (это будет цепная дробь Ламберта); ее подходящие дроби  $2n$ -го порядка будут определять многочлены  $P_n$ ,  $Q_n$ . Известна связь этих многочленов с многочленами Лежандра первого и второго рода. Квадратуры  $S_t$  будут в этом случае квадратурами гауссова типа (см. § 11.10). В работе В. И. Лебедева и О. В. Бабурина [146] изложен метод расчета и содержатся гауссовы квадратуры для  $2n = 60, 100$ .

Существуют более гибкие алгоритмы приближения  $r(z)$  дробно-рациональными функциями. Одним из них является так называемый  $\tau$ -метод, предложенный Ланцошем [117]. Мы изложим видоизменение этого метода, в котором нет необходимости ограничиваться многочленами Чебышева. Пусть  $S_m(\xi)$ ,  $W_n(\xi)$  — многочлены вида

$$S_m(\xi) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\xi^k}{2k+1}; \quad W_n(\xi) = \sum_{m=0}^n C_m^n \xi^m = \prod_{m=1}^n (1 - \xi_m \xi),$$

где  $0 < \xi_m < 1$ . Следуя рассуждениям, содержащимся в § 15 гл. VII работы [117], получим целый набор функций

$$y_n(z) = (W_n(-z^{-2}))^{-1} \sum_{m=1}^n (-1)^m C_m^n z^{-2m} S_{m-1}(z^2), \quad (9.12.5)$$

из которых можно выбрать хорошие приближения для функции  $r(z)$ . Для этого сначала оценим ошибку  $\eta_n(z) = r(z) - y_n(z)$ . Если  $v(\xi) = v(\xi, z) = \eta_n(\sqrt{\xi}z)$ , можно проверить, что  $v(\xi)$  как функция  $\xi$  является решением на отрезке  $[0, 1]$  дифференциального уравнения

$$(1 + z^2\xi)(2\xi v' + v) = W_n(\xi)/W_n(-z^{-2}),$$

удовлетворяющим условию  $v(0) = 0$ . Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$\eta_n(z) = v(1, z) = \frac{1}{2W_n(-z^{-2})} \int_{-1}^1 \frac{2W_n(x^2) dx}{1 + z^2 x^2}. \quad (9.12.6)$$

Наложим ограничение на выбор многочленов  $W_n(z^2)$ : пусть всюду дальше  $W_n(x^2) = \overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(x)$ , где  $\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(x)$  — ультрасферический многочлен  $2n$ -й степени, нормированный условием  $\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(0) = 1$ , а  $0 \leq \gamma \leq 1$ . С многочленами Якоби многочлены  $\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(x)$  связаны соотношением  $\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(x) = C_n P_{2n}^{(\gamma-1/2, \gamma-1/2)}(x)$  [210], где  $C_n$  — некоторая постоянная. Тогда, обозначая  $\beta = z^{-1}$ , получаем

$$\eta_n\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\beta^2}{2\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(i\beta)} \int_{-1}^1 \frac{\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(x) dx}{x^2 + \beta^2}. \quad (9.12.7)$$

Видно, что (9.12.6) является на классе  $S(-1, 1)$  формулой остатка квадратуры интерполяционного типа, порожденной многочленом  $\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(x)$ .

Нам понадобятся некоторые асимптотические формулы для  $\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(x)$  в комплексной плоскости. В целях сокращения дальнейших выкладок остановимся при доказательствах на разборе только многочленов Чебышева первого рода:  $\overline{P}_{2n}^{(\gamma)}(x) = (-1)^n T_{2n}(x)$ . Тогда справедлива

**Лемма 9.12.1.** *Существует такая постоянная  $c_1(k)$ , что при фиксированном  $k \geq 1$ ,  $n \rightarrow \infty$  и  $\beta \geq 0$  справедливо неравенство*

$$\max_{\beta} |\beta^{k-1} \eta_n(\beta^{-1})| \leq c_1(k)/n^k. \quad (9.12.8)$$

Лемма 9.12.1 дает возможность судить о характере дробно-рациональных приближений функции  $r(z)$ , построенных  $\tau$ -методом. Так, при  $k = 1$  она показывает, что  $|\eta_n| \leq cn^{-1}$  для разбираемой разностной задачи.

Получим зависимость между  $N$  и  $M$ , вытекающую из ограничения (9.10.7). Используя оценку снизу Стилтеса и оценку сверху Сегё [210] для наименьшего по модулю корня многочлена  $\overline{P}_{2M}^{(\gamma)}(x)$ , имеем при  $M \geq 1$

$$\frac{\pi}{2(2M + \gamma)} > \sin \frac{\pi}{2(2M + \gamma)} \geq \mu_1 \geq \sin \frac{\pi}{2(2M + 1)} > \frac{\pi}{2(2M + 1)}.$$

Поскольку  $h = \pi N^{-1}$ , для выполнения неравенства (9.10.7) необходимо, чтобы

$$N \geq (2M + \gamma) / (\sqrt{3}l), \quad (9.12.9)$$

а для этого достаточно, чтобы

$$N \geq \pi (2M + 1) / (3\sqrt{3}l). \quad (9.12.10)$$

Итак, густота пространственной и угловой сеток должна быть связана для уравнений (9.10.6) соотношениями (9.12.9), (9.12.10).

### § 9.13. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Исследуем вопрос о погрешности, возникающей в методе сеток при решении  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (9.10.1) при  $F = F(x)$ ,  $c = \text{const}$ . Полученная оценка погрешности будет зависеть только от коэффициентов уравнения и метрических свойств класса функций, к которому принадлежит функция  $F$ . В работах В. С. Владимирова [40] и В. И. Агошкова [6] также получены оценки погрешности метода сеток.

Предположим, что  $F(x) \in H(d, \alpha) = \{F : |F_n| \leq d |n|^{-\alpha}, n \neq 0, \alpha > 0\}$ , где  $d > 0$  — постоянная;  $F_n$  — коэффициенты Фурье функции  $F(x)$ . Для упрощения записи обозначим в оценках все положительные постоянные, не зависящие от  $M, N, F, c, l$ , одной буквой  $C$  и не будем их оценивать, хотя в ряде случаев это нетрудно сделать; положительные, встречающиеся в оценках постоянные, зависящие только от  $l, \alpha, k, c$ , обозначим одной буквой  $b$ ; их можно или вычислить, или оценить сверху.

Итак, согласно результатам § 5.8, точное решение плоской  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (9.10.1) выразится формулой (5.8.9). Следовательно,

$$Su = \sum_n r(\lambda_n) (1 - cr(\lambda_n))^{-1} F_n \exp(inx), \quad (9.13.1)$$

где  $\lambda_n = l |n|$ .

Пусть  $u_N$  — точное решение  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (9.10.1) при  $F = F_N$ , где  $F_N = \sum_{|n| \leq N} F_n \exp(inx)$ . Тогда разность  $S(u - u_N)$  равна

$$B_1 = S(u - u_N) = \sum_{|n| > N} r(\lambda_n) (1 - cr(\lambda_n))^{-1} F_n \exp(inx). \quad (9.13.2)$$

Приближенное решение  $v$  по методу сеток найдем как  $2\pi$ -периодическое решение уравнения (9.10.6) при  $F = F_N$ . Тогда согласно (9.11.15)  $S_t v$  выразится формулой

$$S_t v = \sum_{|n| \leq N} \bar{r}(\bar{\lambda}_n) (1 - c\bar{r}(\bar{\lambda}_n))^{-1} F_n \exp(inx), \quad (9.13.3)$$

где  $\bar{\lambda}_n, \bar{r}(\bar{\lambda}_n)$  определены формулами (9.11.10), (9.11.12).



Наша задача заключается в нахождении оценки для величины  $\eta = Su - S_i v$ . Используя формулы (9.13.1)—(9.13.3), получаем, что  $\eta = B_1 + B_2 + B_3$ , где

$$B_2 = \sum_{0 < |n| \leq N} a_n [r(\lambda_n) - r(\bar{\lambda}_n)] F_n \exp(inx);$$

$$B_3 = \sum_{0 < |n| \leq N} a_n [r(\bar{\lambda}_n) - \bar{r}(\bar{\lambda}_n)] F_n \exp(inx);$$

$$a_n = [(1 - cr(\lambda_n))(1 - \bar{c}\bar{r}(\bar{\lambda}_n))]^{-1}.$$

Выберем пространство  $B$ , в котором оценим погрешность  $\eta$ . За  $B$  возьмем пространство  $\tilde{C}_h$ , являющееся пространством периодических на  $[-\pi, \pi]$  функций  $\omega(x)$  вида  $\omega(x) = \sum_{n \neq 0} \omega_n \exp(inx)$ , ограниченных в полунорме

$$|\omega|_k = \max_x \left| \frac{d^k \omega}{dx^k} \right|, \quad (9.13.4)$$

где  $k$  — некоторое фиксированное целое число. Нам удобно определить полунорму в пространстве  $\tilde{C}_h$  формулой (9.13.4), так как у  $Su$  и  $S_i v$ , представимых суммами (9.13.1), (9.13.3), совпадают члены ряда при  $n = 0$ .

Замечая, что функция  $r(z)$  удовлетворяет неравенствам  $0 \leq r(z) \leq \min(1, \pi/2z)$ ,  $(1 - r(z))^{-1} < cz^{-2}(1 + z^2)$ , оценим сверху величину  $B_1$ :

$$\begin{aligned} |B_1|_k &= \left| \sum_{|n| > N} (in)^k r(\lambda_n) (1 - cr(\lambda_n))^{-1} F_n \exp(inx) \right| \leq \\ &\leq db \sum_{N+1}^{\infty} n^{k-\alpha-1} \leq \frac{db}{\alpha-k} N^{k-\alpha} \end{aligned} \quad (9.13.5)$$

при  $\alpha > k$ .

Оценим  $|B_2|_k$ . Для этого рассмотрим функцию  $\gamma(z) = 1 - z^{-1} \sin z \left(1 - \frac{\sin^2 z}{3}\right)^{-1/2}$ . Разлагая функцию  $\gamma$  в ряд по степеням  $z$ , можно показать, что

$$0 \leq \gamma(z) \leq Cz^4. \quad (9.13.6)$$

Оценивая сверху величину  $|r'(z)|$ , получаем

$$|r'(z)| \leq Cz(1 + z^2)^{-3/2}. \quad (9.13.7)$$

С учетом (9.13.5)—(9.13.7) имеем при  $|n| \leq N$

$$|\lambda_n - \bar{\lambda}_n| = l|n| \gamma\left(\frac{\pi|n|}{2N}\right) \leq C|n|^5 N^{-4}$$

и

$$|r(\lambda_n) - r(\bar{\lambda}_n)| \leq r' \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \lambda_n \right) (\bar{\lambda}_n - \lambda_n) \leq \frac{l^2 C n^6}{N^4 (1 + n^2 l^2)^{3/2}},$$

а также

$$|a_n| \leq \left[ 1 - r \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \lambda_n \right) \right]^{-2} \leq C(1 + \lambda_n^2) \lambda_n^{-4}.$$

Оценивая  $|B_2|_k$ , получаем

$$|B_2|_k = \left| \sum_{0 < |n| \leq N} a_n (ni)^k [r(\lambda_n) - r(\bar{\lambda}_n)] F_n \exp(inx) \right| \leq dbN^{-4} B_4,$$

где  $B_4 = \sum_{n=1}^N \lambda_n^{2-\alpha+k} (1 + \lambda_n^2)^{1/2}$ . Но  $B_4 \leq b \sum_{n=1}^N n^{3-\alpha+k}$ , следовательно,

$$B_4 \leq \begin{cases} b & \text{при } \alpha - k > 4; \\ b \ln N & \text{при } \alpha - k = 4; \\ bN^{4-\alpha+k} & \text{при } 0 < \alpha - k < 4. \end{cases}$$

Учитывая оценки для  $B_4$ , получаем при  $\alpha - k > 0$ :

$$|B_2|_k \leq \begin{cases} bdN^{-4} & \text{при } \alpha - k > 4; \\ bdN^{-4} \ln N & \text{при } \alpha - k = 4; \\ bdN^{-(\alpha-k)} & \text{при } 0 < \alpha - k < 4. \end{cases} \quad (9.13.8)$$

Величины  $B_1, B_2$  характеризуют степень точности пространственной аппроксимации уравнения (9.10.1) разностной системой уравнений (9.10.6). Из оценок (9.13.5), (9.13.8) следует, что если мы хотим получить решение (9.10.6) при  $F = F_N \in H(1, \alpha)$ , отличающееся на величину  $O(\varepsilon)$  в пространстве  $\tilde{C}_k$  от решения задачи (9.10.1), то для этого достаточно, чтобы

$$N \sim \begin{cases} b\varepsilon^{-1/4} & \text{при } \alpha - k > 4; \\ b\varepsilon^{-1/4} (1 + |\ln \varepsilon|) & \text{при } \alpha - k = 4; \\ b\varepsilon^{-1/(\alpha-k)} & \text{при } 0 < \alpha - k < 4. \end{cases} \quad (9.13.9)$$

Нам осталось оценить  $|B_3|_k$ . В соответствии с анализом связи между многочленами  $S_{M-1}, B_M$  и  $P_{n-1}, Q_n$ , сделанным в § 9.12, можно сказать, что оценка для  $|B_3|_k$  даст одновременно оценку для уменьшения ошибки  $KP$ -метода в норме  $\tilde{C}_k$  за одну итерацию.

Используя неравенство

$$|r(\lambda_n) - \bar{r}(\lambda_n)| \leq C\lambda_n^{2M} (1 + \lambda_n)^{-2M-1} \text{ при } |n| < N,$$

которое следует из того факта, что для аппроксимации оператора  $Su$  оператором  $S_i u$  применены формулы интерполяционного типа [см. (9.12.7) при  $n = M$ ], получаем

$$\begin{aligned} |B_3|_k &= \left| \sum_{0 < |n| \leq N} a_n (in)^k [r(\bar{\lambda}_n) - \bar{r}(\bar{\lambda}_n)] F_n \exp(inx) \right| \leq \\ &\leq db \sum_{n=1}^N \lambda_n^{2M-4+k-\alpha} / (1 + \lambda_n)^{2M-3} \leq db\psi_2^-(M), \end{aligned}$$

где

$$\Psi_2(M) = \int_0^{\infty} \frac{z^{2M-4+k-\alpha} dz}{(1+z)^{2M-3}} = \frac{\Gamma(\alpha-k)\Gamma(2M-3-\alpha+k)}{\Gamma(2M-3)}.$$

Таким образом,  $|B_3|_k \leq bM^{k-\alpha}$  при  $\alpha - k > 0$ . Следовательно, для выполнения оценки  $|B_3|_k \sim \varepsilon$  достаточно, чтобы

$$M \sim be^{1/(k-\alpha)} \text{ при } \alpha - k > 0. \quad (9.13.10)$$

Сравнивая (9.12.12), (9.13.9), (9.13.10), видим, что возможен такой выбор  $M, N$ , при котором асимптотически выполняются равенства (9.13.9), (9.13.10) и неравенства (9.12.12).

Если ошибку  $\eta$  оценивать в пространстве достаточно гладких  $2\pi$ -периодических функций с полунормой

$$\|\eta\|_{W_2^{(k)}} = \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\partial^k \eta}{\partial x^k} \right)^2 dx \right]^{1/2},$$

то, проводя оценки для  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , с применением изложенных методов, получаем

$$\|B_1\|_{W_2^{(k)}} \leq \frac{bd}{(\alpha-k+1/2)N^{\alpha-k+1/2}} \text{ при } \alpha-k+\frac{1}{2} > 0; \quad (9.13.11)$$

$$\|B_2\|_{W_2^{(k)}} \leq \begin{cases} bN^{-4} & \text{при } \alpha-k > 3,5; \\ bN^{-4} \ln N & \text{при } \alpha-k = 3,5; \\ bN^{-(\alpha-k+1/2)} & \text{при } 0 < \alpha-k < 3,5; \end{cases} \quad (9.13.12)$$

$$\|B_3\|_{W_2^{(k)}} < bM^{k-\alpha-1/2} \text{ при } \alpha-k+\frac{1}{2} > 0. \quad (9.13.13)$$

Из (9.13.11)—(9.13.13) нетрудно получить оценки для  $M$  и  $N$ , при которых задача (9.10.1) решается с точностью  $O(\varepsilon)$  в пространстве  $W_2^{(k)}$ . Для этого достаточно, чтобы

$$N \sim \begin{cases} b\varepsilon^{-1/4} & \text{при } \alpha-k > 3,5; \\ b\varepsilon^{-1/4}(1+|\ln \varepsilon|) & \text{при } \alpha-k = 3,5; \\ b\varepsilon^{-1/(\alpha-k+1/2)} & \text{при } 0 < \alpha-k < 3,5 \end{cases} \quad (9.13.14)$$

и

$$M \sim be^{1/(k-1/2-\alpha)} \text{ при } \alpha-k+1/2 > 0. \quad (9.13.15)$$

Аналогично получаются оценки перечисленных величин, если за пространство  $B$  взять пространство  $\tilde{C}_{k,\beta}, W_2^{(k+\beta)}$ ,  $\beta \in [0,1]$ , т. е. если учитывать еще и принадлежность  $k$ -х производных к классу  $\text{Lip } \beta$ . Оценки величин  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $M, N$  в пространствах  $C_{k,\beta}, W_2^{(k+\beta)}$  совпадут соответственно с оценками (9.13.11)—(9.13.13) и (9.13.14), (9.13.15), если в них всюду величину  $k$  заменить  $k + \beta$ .

Интересно рассмотреть случай, когда по самой сути дела необходимо для разумного решения задачи потребовать от величин  $M$  и  $\varepsilon$  связи, отличной от (9.13.10), (9.13.15). Пусть функция  $F(x)$  является

аналитической. Тогда для нее найдутся такие постоянные  $c_2 > 0$ ,  $c_3 > 0$ , что  $|F_n| \leq c_3 \exp(-c_2 |n|)$  для всех  $n$ . В этом случае в уравнении (9.10.6) можно не заменять  $F$  на  $F_N$ , ибо из (9.13.5) и (9.13.8) следует, что  $|B_1|_k + |B_2|_k \leq bN^{-4}$ . Следовательно, для решения задачи (9.10.1) с точностью  $O(\epsilon)$  достаточно, чтобы  $N \sim b\epsilon^{-1/4}$ . Оценим  $|B_3|_k$ . Если обозначить  $c_4 = c_2/l$ , то

$$|B_3|_k \leq b \sum_{n=1}^N \frac{e^{-c_4 \lambda_n} \lambda_n^{n_1+k-1}}{(1+\lambda_n)^{n_1}} \leq b\psi_3(M),$$

где  $n_1 = 2M - 3$ ;  $\psi_3(M) = B_5 + B_6$ , а  $B_5, B_6$  выражаются через функцию  $\psi_4(z) = e^{-c_4 z} z^{n_1+k-1} / (1+z)^{n_1}$  интегралами

$$B_5 = \int_0^1 \psi_4(z) dz; \quad B_6 = \int_1^\infty \psi_4(z) dz = \int_0^1 \frac{\exp(-c_4/z) dz}{z^k (1+z)^{n_1}}.$$

Величина  $B_5$  удовлетворяет неравенству  $B_5 \leq b2^{-n_1}$ . Поскольку подынтегральная функция в интеграле  $B_6$  достигает в точке  $z_0 = O(M^{-1/2})$  максимума (точка  $z_0$  вычисляется в явном виде), равного  $O(\exp(-c_5 \sqrt{M}))$ , где  $c_5 > 0$  — некоторая не зависящая от  $M$  постоянная, то  $B_6 \leq b \exp(-c_5 \sqrt{M})$ . Это значит, что  $|B_3|_k \leq \leq b \exp(-c_5 \sqrt{M})$ .

Следовательно, чтобы величина  $|B_3|_k$  была  $O(\epsilon)$ , достаточно, чтобы

$$M \sim b (\ln \epsilon)^2. \tag{9.13.16}$$

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ  
УРАВНЕНИЙ

## § 10.1. ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. Банахом [255] и Р. Каччополи [264] был сформулирован принцип сжатых отображений, нашедший широчайшее применение в самых разнообразных разделах математики. Этот принцип лежит в основе построения сходящихся итерационных методов. Принцип сжатых отображений мы сформулируем для метрических пространств [92], предполагая известными основные определения и свойства пространств такого рода; этому принципу можно придать более общую формулировку, используя теорию псевдометрических пространств [96].

Пусть  $X$  — полное метрическое пространство;  $\rho(x, y)$  — расстояние между элементами  $x, y \in X$ , а  $\Omega$  — замкнутое множество в  $X$ . Пусть на  $\Omega$  задан, вообще говоря, нелинейный оператор  $P$ , переводящий  $\Omega$  в себя. Элемент  $u \in \Omega$  назовем неподвижной точкой оператора  $P$ , если

$$u = P(u). \quad (10.1.1)$$

Таким образом, неподвижные точки оператора  $P$  являются решениями уравнения (10.1.1).

Оператор  $P$  называется сжатием на  $\Omega$ , если для любых  $x, y \in \Omega$  выполнено условие

$$\rho(P(x), P(y)) \leq \alpha \rho(x, y), \quad (10.1.2)$$

где  $0 < \alpha < 1$  не зависит от  $x, y$ . Пусть последовательность  $u^k \in \Omega$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , такая, что

$$u^{k+1} = P(u^k). \quad (10.1.3)$$

Тогда говорят, что на  $\Omega$  задан оператором  $P$  итерационный метод, или метод последовательных приближений, а рекуррентную последовательность  $\{u^k\}$  называют итерационной. Справедлива

**Теорема 10.1.1.** *Если  $P$  есть сжатие на  $\Omega$ , то в  $\Omega$  существует единственное решение и уравнения (10.1.1), которое может быть получено как предел последовательности (10.1.3), где  $u^0 \in \Omega$  — произвольный элемент. Быстрота сходимости последовательности  $\{u^k\}$  к решению оценивается неравенством*

$$\rho(u^k, u) \leq \alpha^k (1 - \alpha)^{-1} \rho(u^1, u^0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.1.4)$$

**Доказательство.** Поскольку для  $k \geq 1$

$$u^{k+1} = P(u^k), \quad u^k = P(u^{k-1}),$$

согласно (10.1.2) имеем

$$\rho(u^{k+1}, u^k) \leq \alpha \rho(u^k, u^{k-1}) \leq \dots \leq \alpha^k \rho(u^1, u^0).$$

Поэтому для  $\rho > 0$  в силу неравенства треугольника

$$\begin{aligned} \rho(u^{k+p}, u^k) &\leq \rho(u^{k+p}, u^{k+p-1}) + \dots + \rho(u^{k+1}, u^k) \leq \\ &\leq (\alpha^{k+p} + \dots + \alpha^k) \rho(u^1, u^0) \leq \alpha^k (1 - \alpha)^{-1} \rho(u^1, u^0). \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

Оценка (10.1.5) показывает, что последовательность  $\{u^k\}$  сходится в себе (ведь  $\alpha^k \rightarrow 0$ ), а в силу полноты пространства  $X$  она сходится к некоторому элементу  $u \in X$ . Но  $u^k \in \Omega$ , следовательно, в силу замкнутости  $\Omega$ ,  $u \in \Omega$  и  $P(u)$  имеет смысл. Пользуясь (10.1.2), имеем

$$0 \leq \rho(u^{k+1}, P(u)) = \rho(P(u^k), P(u)) \leq \alpha \rho(u^k, u),$$

но  $\rho(u^k, u) \rightarrow 0$ , следовательно,  $u^{k+1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P(u)$ , т. е. выполнено (10.1.1).

Единственность решения вытекает из (10.1.2). В самом деле, если бы  $x$  было вторым решением (10.1.1), то

$$\rho(x, u) = \rho(P(x), P(u)) \leq \alpha \rho(x, u),$$

а это могло быть лишь в случае, когда  $\rho(x, u) = 0$ , т. е.  $x = u$ . Оценка (10.1.4) получается из (10.1.5) переходом к пределу при  $p \rightarrow \infty$ . Эта оценка задает область расположения решения уравнения (10.1.1). Например, для  $k = 1$  получаем

$$\rho(u, u^1) \leq \alpha (1 - \alpha)^{-1} \rho(u^1, u^0).$$

Условие (10.1.2) нельзя, вообще говоря, заменить более слабым

$$\rho(P(x), P(y)) < \rho(x, y), \quad x, y \in \Omega, \quad (10.1.6)$$

о чем свидетельствует пример, когда  $X = \Omega = R_1$  — множество вещественных чисел  $P(x) = |x| + (1 + |x|)^{-1}$ , а  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

Однако имеет место теорема Шаудера [329]:

**Теорема 10.1.2.** Если оператор  $P$  отображает замкнутое множество  $\Omega$  на компактное множество  $\Delta \subset \Omega$  и если для любых  $x, y \in \Omega$  удовлетворено условие (10.1.6), то  $P$  на множестве  $\Delta$  есть сжатие и существует единственная в  $\Omega$  неподвижная точка оператора  $P$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $P(\Delta) \subseteq \Delta = P(\Omega)$ . Если бы оператор  $P$  не был сжатием на  $\Delta$ , то нашлись бы такие  $x^k, y^k \in \Delta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , что

$$\begin{aligned} \rho(P(x^k), P(y^k)) &\geq \alpha_k \rho(x^k, y^k); \quad 0 < \alpha_k < 1, \\ \alpha_k &\rightarrow 1; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10.1.7)$$

При этом вследствие компактности  $\Delta$  и замкнутости  $\Omega$  можно было, не уменьшая общности рассуждений, считать, что  $x^k \rightarrow x \in \Omega$ ;  $y^k \rightarrow y \in \Omega$ . Переходя к пределу в (10.1.7), получаем неравенство  $\rho(P(x), P(y)) \geq \rho(x, y)$ , которое противоречит (10.1.6). Таким образом,  $P$  на  $\Delta$  (а следовательно, и на  $\Omega$ ) есть сжатие, и по теореме 10.1.1 существует единственная неподвижная точка  $u \in \Delta$ . Если бы  $x \in \Omega$  была другой такой точкой, то из соотношения  $x = P(x)$

мы имели бы:  $x \in \Delta$  и, следовательно,  $x = u$ . Таким образом, в  $\Omega$  неподвижная точка единственна. Теорема доказана.

В итерационных методах часто оператор  $P$  зависит от числовых параметров, которые меняются от итерации к итерации. В этом случае имеют дело с итерационными методами вида

$$u^{k+1} = P_k(u^k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (10.1.8)$$

где каждому  $k$  соответствует оператор  $P_k$ , отображающий  $\Omega \subset X$  в себя.

Если для сходящихся стационарных итерационных методов (10.1.3), в которых оператор  $P$  не зависит от  $k$ , достаточным условием сходимости является выполнение условия (10.1.2), то достаточные условия сходимости нестационарных итерационных методов (10.1.8) более слабые.

## § 10.2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В основе последующего изложения лежат определения и понятия банаховых и гильбертовых пространств. Мы предполагаем знакомство читателя с элементами функционального анализа, для более детального ознакомления с затронутыми вопросами отсылаем его к монографиям Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [92], Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [73], К. Йосиды [85], К. Морена [185] и др. Из теорем этой области математики мы отобрали те, знание которых особенно полезно при изучении прикладных задач.

Линейные (ограниченные) операторы в комплексном банаховом пространстве  $X$  (в  $\mathcal{B}$ -пространстве), действующие в то же пространство, сами образуют банахово пространство  $\mathcal{B}(X)$ , которое является не только векторным пространством, но и банаховой алгеброй с единицей или нормированным кольцом. Это означает, что определено сложение и умножение элементов  $\mathcal{B}(X)$ , причем выполняются следующие условия.

1.  $\mathcal{B}(X)$  является векторным пространством над полем комплексных чисел  $C^1$ .

2. Для любых  $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$  и любых  $\lambda, \mu \in C^1$   $AB \in \mathcal{B}(X)$ ,  $(AB)C = A(BC)$ ,  $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ ,  $A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$ .

3. Существует единица  $I \in \mathcal{B}(X) : IA = AI = A$ .

4. Норма в  $\mathcal{B}(X)$

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|, \quad u \in X \quad (10.2.1)$$

кроме обычных свойств обладает еще следующими:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|I\| = 1. \quad (10.2.2)$$

В случае, когда для всех  $A, B \in \mathcal{B}(X)$  выполнено равенство  $AB = BA$ , алгебра  $\mathcal{B}(X)$  называется коммутативной алгеброй с единицей.

Мы скажем, что оператор  $A$  принадлежит коммутативной  $C^*$ -алгебре  $\mathfrak{B}(X)$  с единицей, если в  $\mathfrak{B}(X)$  определена операция  $(*)$  перехода к сопряженному оператору, называемая инволюцией и удовлетворяющая условиям

$$(A^*)^* = A; (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*; (A + B)^* = A^* + B^*; (AB)^* = B^* A^*;$$

$$\|A^* A\| = \|A\|^2 \text{ для } A, B \in \mathfrak{B}(X).$$

Мы скажем, что оператор  $A$  имеет обратный  $A^{-1}$ , если существует такой оператор  $A^{-1} \in \mathfrak{B}(X)$ , что

$$A^{-1}A = I, AA^{-1} = I.$$

Очевидно, что  $(A^{-1})^{-1} = A$  и что обратный оператор, если он существует, может быть только один. Оператор  $A$  называется самосопряженным, если  $A^* = A$ , и нормальным, если  $A^*A = AA^*$ , где  $A^*$  — сопряженный оператор. Два оператора  $A, B \in \mathfrak{B}(X)$  назовем подобными, если существует такой оператор  $S \in \mathfrak{B}(X)$ , что  $A = SBS^{-1}$ . Оператор  $A$  называется оператором скалярного типа, если у него существует базис в  $X$ , составленный из собственных векторов (собственный базис). Самосопряженные и нормальные операторы являются операторами скалярного типа. Для того чтобы оператор был оператором скалярного типа, необходимо и достаточно, чтобы он был подобен нормальному оператору. Если  $A$  — нормальный оператор, то существует такой самосопряженный оператор  $B$  и такая функция  $\varphi$ , что  $A = \varphi(B)$ .

Рассмотрим оператор  $T_\lambda \in \mathfrak{B}(X)$  вида  $T_\lambda = T - \lambda I$ . Резольвентным множеством оператора  $T \in \mathfrak{B}(X)$  называется множество  $\rho(T)$  всех комплексных чисел  $\lambda$ , для которых оператор  $R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}$  существует и является ограниченным оператором, заданным во всем пространстве  $X$ . Дополнение множества  $\rho(T)$  (в  $C^1$ ) называется спектром оператора  $T$ , его обозначим  $\text{Sp}(T)$ . Оператор  $R(\lambda, T)$ , где  $\lambda \in \rho(T)$ , называется резольвентой оператора  $T$ . Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 10.2.1.** *Если пространство  $X$  содержит более одного элемента, то*

1.  $\text{Sp}(T)$  — непустое множество;
2.  $\text{Sp}(T)$  — ограниченное замкнутое множество, лежащее в замкнутом круге с центром в точке нуль и радиусом, равным  $\|T\|$ ;
3.  $\rho(T)$  — открытое множество;
4.  $R(\lambda, T)$  — голоморфна по  $\lambda$  в каждой из компонент области  $\rho(T)$ .

**Теорема 10.2.2.** Если  $\omega(t)$  многочлен, то

$$\text{Sp}(\omega(A)) = \omega(\text{Sp}(A)). \quad (10.2.3)$$

Спектр  $\text{Sp}(T)$  можно разбить на три попарно непересекающихся множества.  $P(T)$  — множество комплексных чисел  $\lambda$ , для которых оператор  $T_\lambda$  не имеет обратного; это множество называется точечным спектром оператора  $T$ .  $C(T)$  — множество комплексных чисел  $\lambda$ , при которых оператор  $T_\lambda$  обладает обратным с плотной в  $X$  областью определения, но оператор  $T_\lambda^{-1}$  не является непрерывным;  $C(T)$  на-



зывается непрерывным спектром оператора  $T$ ;  $R(T)$  — множество комплексных чисел  $\lambda$ , таких, что  $T_\lambda$  имеет обратный оператор, область определения которого не является плотной в  $X$ ;  $R(T)$  называется остаточным спектром оператора  $T$ .

**Теорема 10.2.3.** Для того чтобы  $\lambda_0 \in P(T)$ , необходимо и достаточно, чтобы уравнение  $Tx = \lambda_0 x$  имело ненулевое решение  $x \neq 0$ .

В этом случае число  $\lambda_0$  называется собственным значением оператора  $T$ , а решение  $x$  — собственным вектором (элементом) оператора  $T$ , соответствующим собственному значению  $\lambda_0$ . Нуль-подпространство  $N(\lambda_0 I - T)$  оператора  $T_{\lambda_0}$  называется собственным подпространством оператора  $T$ , соответствующим собственному значению  $\lambda_0$ . Оно состоит помимо нулевого вектора из всех собственных векторов, соответствующих  $\lambda_0$ .

**Теорема 10.2.4.** Для всякого оператора  $T \in \mathfrak{B}(X)$  существует предел

$$\mu(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}. \quad (10.2.4)$$

**Доказательство.** При  $n \geq m$  ( $n = km + l$ ) в силу неравенства (10.2.2)

$$\|T^n\| = \|T^{km+l}\| \leq \|T^k\|^m \|T^l\| \quad (0 \leq l < m),$$

откуда  $0 \leq \|T^n\|^{1/n} \leq \|T^k\|^{1/k - l/nk} \|T^l\|^{1/n}$ . Теперь, фиксируя  $k$  и устремляя  $n$  к бесконечности имеем

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T^k\|^{1/k} \leq \|T\| < \infty. \quad (10.2.5)$$

Затем, устремляя в (10.2.5)  $k$  к бесконечности, получаем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\| < \infty.$$

Таким образом, предел  $\mu(T)$  существует и конечен.

Величину  $\mu(T)$  назовем спектральным радиусом оператора  $T$ .

**Теорема 10.2.5.** Если  $|\lambda| > \mu(T)$ , то резольвента  $R(\lambda, T)$  существует и представляется рядом вида

$$R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n, \quad (10.2.6)$$

который сходится по норме операторов.

**Доказательство.** В самом деле, если  $|\lambda| \geq \mu(T) + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ , то согласно (10.2.4)  $\|\lambda^{-n} T^n\| \leq (\mu(T) + \varepsilon)^{-n} (\mu(T) + \varepsilon/2)^n$  для достаточно больших  $n$ . Следовательно, ряд (10.2.6) сходится. Умножая его на  $(T - \lambda I)$  слева или справа, получаем оператор  $I$ , поэтому  $R(\lambda, T)$  действительно существует и представляется рядом (10.2.6)

**Теорема 10.2.6.** При  $T \in \mathfrak{B}(X)$  имеет место формула

$$\mu(T) = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(T)} |\lambda|. \quad (10.2.7)$$

**Доказательство.** Из теоремы 10.2.5 следует, что  $\mu(T) \geq \sup_{\lambda \in \text{Sp}(T)} |\lambda|$ . С другой стороны, функция  $R(\lambda, T)$  при

$|\lambda| > \sup_{\lambda' \in \text{Sp}(T)} |\lambda'|$  по теореме 10.2.1 голоморфна и поэтому раскладывается в ряд Лорана (10.2.6). Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda^{-n} T^n\| = 0$  при  $|\lambda| > \sup_{\lambda \in \text{Sp}(T)} |\lambda'|$ .

Значит,  $\|T^n\| \leq (\varepsilon + \sup_{\lambda \in \text{Sp}(T)} |\lambda|)^n$  для любого  $\varepsilon > 0$  и достаточно больших значений  $n$ , т. е.  $\mu(T) \leq \sup_{\lambda \in \text{Sp}(T)} |\lambda|$ .

Из теоремы 10.2.4 следует, что спектральный радиус обладает следующими свойствами:

$$\mu(T^k) = \mu^k(T); \quad \mu(\alpha T) = |\alpha| \mu(T), \quad (10.2.8)$$

и, кроме того, из (10.2.5) следует, что

$$0 \leq \mu(T) \leq \|T\|. \quad (10.2.9)$$

Справедлива

**Теорема 10.2.7.** Если  $T$  — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то

$$\mu(T) = \|T\|. \quad (10.2.10)$$

**Доказательство.** Сначала докажем, что  $\|T^2\| = \|T\|^2$ . Действительно,  $\|T^2\| \leq \|T\|^2$ , а в случае гильбертова пространства

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Tx, Tx) = \sup_{\|x\|=1} (T^2 x, x) \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|T^2 x\| = \|T^2\|. \end{aligned} \quad (10.2.11)$$

Из (10.2.11) следует, что  $\|T^{2^m}\| = \|T\|^{2^m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и что  $\mu(T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^{2^m}\|^{2^{-m}} = \|T\|$ .

**З а м е ч а н и е.** Теорема 10.2.7 останется справедливой, если оператор  $T$  нормален.

Пусть 
$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda - \lambda_0)^n \quad (10.2.12)$$

в некотором круге  $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ , где  $\alpha_n$  — комплексные числа, а  $\rho > 0$  — радиус сходимости:  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|^{-1/n}$ . Особый интерес представляют исследования операторных функций, задаваемых рядами

$$\varphi(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (T - \lambda_0 I)^n, \quad (10.2.13)$$

ибо любым методам суммирования таких рядов соответствуют определенные реализации итерационных методов. Выясним, когда можно гарантировать сходимость по норме операторного ряда (10.2.13). Справедлива

**Теорема 10.2.8.** Если ряд (10.2.12) на окружности  $|\lambda - \lambda_0| = \rho$  всюду расходится, то для сходимости по норме ряда (10.2.13) необходимо и достаточно, чтобы  $\mu(\bar{T}) < \rho$ , где  $\bar{T} = T - \lambda_0 I$ .

**Доказательство.** Если  $\mu(\bar{T}) = \rho - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ , то  $\|\bar{T}^n\| < (\rho - \varepsilon/2)^n$  при достаточно большом  $n$  и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| (\rho - \varepsilon/2)^n$ , а следовательно, и ряд (10.2.13) сходятся. Пусть

теперь ряд (10.2.13) сходится по норме, т. е.  $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \|\bar{T}^n\| < \infty$ .

Учитывая условия теоремы, заключаем, что по признаку Коши это имеет место, если  $r_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|\alpha_n| \|\bar{T}^n\|)^{1/n} < 1$ , но  $r_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n|^{1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{T}^n\|^{1/n} = \rho^{-1} \mu(\bar{T})$ , т. е.  $\mu(\bar{T}) < \rho$ .

Примером операторной функции и разобранной в теореме 10.2.8 ситуации служит ряд Неймана (операторная геометрическая прогрессия [317])

$$I + T + T^2 + \dots + T^n + \dots \quad (10.2.14)$$

Из теоремы 10.2.8 вытекает

**Следствие 10.2.1.** При  $\mu(T) < 1$  ряд (10.2.14) сходится, а при  $\mu(T) > 1$  расходится.

**Следствие 10.2.2.** Для того чтобы ряд (10.2.14) сходился, необходимо и достаточно, чтобы при некотором  $k$  было

$$\|T^k\| < 1. \quad (10.2.15)$$

Действительно, если ряд (10.2.14) сходится, то  $\|T^n\| \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$ , и поэтому (10.2.15) выполнено при достаточно большом  $k$ . Наоборот, если (10.2.15) имеет место, то  $\mu(T) < 1$  [см. формулы (10.2.8), (10.2.9)], и, следовательно, ряд (10.2.14) сходится.

Из доказательства теоремы 10.2.8 следует, что условие  $\mu(\bar{T}) < \rho$  является достаточным для сходимости ряда (10.2.13) при любой функции  $\varphi(\lambda)$  вида (10.2.12). Если ряд (10.2.12) абсолютно сходится при  $|\lambda - \lambda_0| = \rho$ , то ряд (10.2.13) сходится при  $\|\bar{T}\| \leq \rho$ , а если  $\rho = \infty$ , то ряд (10.2.13) сходится для всех  $T \in \mathcal{B}(X)$ .

Пусть в  $X$  задано уравнение

$$Au = f. \quad (10.2.16)$$

Ясно, что если существует  $A^{-1}$ , то уравнение (10.2.16) имеет единственное решение при любом  $f \in X$ , причем это решение есть  $u = A^{-1}f$ .

**Теорема 10.2.9.** Пусть уравнение (10.2.16) имеет решение при любом  $f \in X$  и пусть существует  $m > 0$ , такое, что при каждом  $x \in X$

$$\|Ax\| \geq m\|x\|. \quad (10.2.17)$$

Тогда оператор  $A$  имеет линейный обратный оператор  $A^{-1}$ , причем

$$\|A^{-1}\| \leq m^{-1}. \quad (10.2.18)$$

**Доказательство.** Очевидно, что отображение, осуществляемое оператором  $A$ , взаимно однозначно, так как если  $x_1 \neq x_2$ , то  $\|Ax_1 - Ax_2\| \geq m\|x_1 - x_2\| > 0$ . Кроме того, из разрешимости уравнения (10.2.16) при любом  $f \in X$  следует, что  $AX = X$ . Таким

образом, существует аддитивный и однородный оператор  $B = A^{-1}$ . А поскольку  $u = Bf$  означает, что  $f = Au$ , то из (10.2.17) получаем

$$\|f\| \geq m \|Bf\|, \text{ или } \|A^{-1}f\| = \|Bf\| \leq \frac{1}{m} \|f\|. \quad (10.2.19)$$

Другими словами,  $A^{-1}$  — ограниченный и, следовательно, линейный оператор. Оценка (10.2.18) следует из (10.2.19).

**Теорема 10.2.10.** Пусть  $X$  —  $\mathfrak{B}$ -пространство и  $A \in \mathfrak{B}(X)$ . Тогда если  $\|A\| \leq q < 1$ , то оператор  $I - A$  имеет линейный обратный, причем

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - q)^{-1}. \quad (10.2.20)$$

**Доказательство.** Ранее было показано (следствие 10.2.2), что ряд

$$I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots \quad (10.2.21)$$

при условии теоремы сходится. Обозначим  $B$  сумму этого ряда.

Имеем

$$B(I - A) = (I + A + \dots + A^n \dots)(I - A) = I. \quad (10.2.22)$$

Аналогично

$$(I - A)B = I. \quad (10.2.23)$$

Следовательно,  $B = (I - A)^{-1}$ . Далее имеем

$$\|B\| \leq \|I\| + \|A\| + \dots + \|A^n\| + \dots \leq 1 + q + \dots + q^n + \dots = (1 - q)^{-1},$$

что и дает оценку (10.2.20).

**Замечание.** Поскольку соотношения (10.2.22), (10.2.23) выполнены всегда, когда ряд (10.2.21) сходится, что по следствиям 10.2.1, 10.2.2 линейный оператор  $(I - A)^{-1}$  будет существовать и тогда, когда  $\mu(A) < 1$  или если  $\|A^k\| < 1$  для некоторого  $k \geq 1$ .

Пусть  $A, A^{-1} \in \mathfrak{B}(X)$ . Назовем

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (10.2.24)$$

числом обусловленности оператора  $A$ . Очевидно, что  $k(A) \geq 1$ . Для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве

$$k(A) = \mu(A) \mu(A^{-1}). \quad (10.2.25)$$

Если  $x$  — приближенное решение уравнения (10.2.16),  $\varepsilon = u - x$ , а  $r = f - Ax$ , то

$$\|\varepsilon\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|. \quad (10.2.26)$$

Относительную погрешность  $\|\varepsilon\| / \|u\|$  можно оценить следующим образом через величины  $k(A)$ ,  $\|r\|$ ,  $\|f\|$ :

$$k^{-1}(A) \|r\| / \|f\| \leq \|\varepsilon\| / \|u\| \leq k(A) \|r\| / \|f\|. \quad (10.2.27)$$

В самом деле, оценка сверху следует из неравенств (10.2.26) и  $\|f\| \leq \|A\| \|u\|$ , а оценка снизу — из неравенств  $\|r\| \leq \|A\| \|\varepsilon\|$  и  $\|u\| \leq \|A^{-1}\| \|f\|$ .

Следующая теорема теории возмущений характеризует множество элементов  $G$  банаховой алгебры  $\mathcal{B}(X)$ , для которых существуют обратные элементы, близкие к заданному.

**Теорема 10.2.11.** *Если  $A, A^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ , то множество  $G$  элементов  $\mathcal{B}(X)$ , имеющих в  $\mathcal{B}(X)$  обратные, содержит вместе с оператором  $A$  сферу*

$$\{B : \|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}\}. \quad (10.2.28)$$

Если оператор  $B$  лежит в этой сфере, то его обратный представим рядами

$$B^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(A - B) A^{-1}]^n \quad (10.2.29)$$

или

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [A^{-1}(A - B)]^n A^{-1}. \quad (10.2.30)$$

Если  $B_\varepsilon \in G$  и  $\|B_\varepsilon - A\| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то и  $\|A^{-1} - B_\varepsilon^{-1}\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

**Доказательство.** Пусть сначала  $\|I - B\| < 1$ . Тогда ряд

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (I - B)^n \quad (10.2.31)$$

сходится. Поскольку

$$SB = BS = [I - (I - B)]S = \sum_{n=0}^{\infty} (I - B)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (I - B)^n = I,$$

по теореме 10.2.10 множество  $\{B : \|I - B\| < 1\} \in G$ .

Пусть теперь  $A \in G$  и  $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ .

Тогда, поскольку  $\|I - BA^{-1}\| = \|(A - B)A^{-1}\| < 1$  и  $\|I - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| < 1$ , операторы  $BA^{-1}$  и  $A^{-1}B$  имеют обратные, представимые соответственно рядами

$$\sum_{n=0}^{\infty} (I - BA^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} [(A - B)A^{-1}]^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (I - A^{-1}B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} [A^{-1}(A - B)]^n,$$

а следовательно, и  $B$  имеет обратный, представимый формулами (10.2.29), (10.2.30).

Из (10.2.29) вытекает, что при  $\|(A - B)A^{-1}\| < 1$  выполняются соотношения

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \left\| A^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [(A - B)A^{-1}]^n \right\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A - B\| \|A^{-1}\|}. \quad (10.2.32)$$

Отсюда следует, что если  $B_\varepsilon \in G$  и  $\|A - B_\varepsilon\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ , то  $\|B_\varepsilon^{-1} - A^{-1}\| \rightarrow 0$ . Теорема доказана.

Теорема о возмущениях является фундаментальной при обосновании и исследовании многих вопросов как теории операторов, так и вычислительной математики. Справедлива

**Теорема 10.2.12.** *Если операторы  $A$  и  $B \in \mathfrak{B}(X)$  скалярного типа и коммутируют, то они обладают общим собственным базисом.*

Эта теорема лежит в основе операторного исчисления. В самом деле, пусть  $\mathfrak{B}(X)$  — коммутативная  $C^*$ -алгебра, тогда справедлива доказанная И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [185]

**Теорема 10.2.13.** *Каждая коммутативная  $C^*$ -алгебра  $\mathfrak{B}(X)$  изометрически изоморфна алгебре  $C(\Lambda)$  всех непрерывных (комплекснозначных) функций на компактном множестве  $\Lambda$  [ $\Lambda$  — множество максимальных идеалов алгебры  $\mathfrak{B}(X)$ ].*

При таком изоморфизме операции  $(*)$  в  $\mathfrak{B}(X)$  соответствует переход к комплексно сопряженной функции в  $C(\Lambda)$ . Если  $\mathfrak{B}(X)$  — минимальная коммутативная  $C^*$ -алгебра, содержащая  $A$ , то множество  $\Lambda$  гомеоморфно спектру оператора  $A$ . А если  $\mathfrak{B}(X)$  — максимальная коммутативная  $C^*$ -алгебра операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве  $X$ , то существует такая положительная мера  $\sigma$  на  $\Lambda$  и такое унитарное преобразование  $F$  пространства  $X$  на пространство  $L_2(\sigma)$ , которое диагонализует алгебру  $\mathfrak{B}(X)$ . Проиллюстрируем это на примере самосопряженных операторов. Пусть  $A = A^* \in \mathfrak{B}(X)$ , а функция  $\lambda \rightarrow \tilde{A}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$  отображает множество  $\Lambda$  на спектр оператора  $A$ :  $A(\lambda) = \text{Sp}(A)$ . Пусть  $\varphi(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$  — ортонормированная система собственных векторов оператора  $A$ , отвечающих собственным значениям  $\tilde{A}(\lambda)$ . Эта система полна в  $X$ . Имеем

$$A\varphi(\lambda) = \tilde{A}(\lambda)\varphi(\lambda); (\varphi(\lambda), \varphi(\lambda')) = \delta_{\lambda\lambda'}, \lambda, \lambda' \in \Lambda. \quad (10.2.33)$$

Ортонормированный базис  $\{\varphi(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  определяет унитарное отображение  $F$  пространства  $X$  на пространство  $H$  числовых функций, заданных на множестве  $\Lambda$ :

$$\mathfrak{B}(X) \ni u \rightarrow Fu = \tilde{u}(\lambda) \in H,$$

где  $\tilde{u}(\lambda) = (u, \varphi(\lambda))$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , причем скалярное произведение в  $H$  определяется формулой

$$(\tilde{u}, \tilde{v})_H = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tilde{u}(\lambda) \overline{\tilde{v}(\lambda)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} (u, \varphi(\lambda)) \overline{(v, \varphi(\lambda))} = (u, v)_X. \quad (10.2.34)$$

Таким образом, отображение  $F$  является изометрией. Назовем его преобразованием Фурье, индуцированным оператором  $A$ . Это преобразование приводит  $A$  к диагональному виду

$$\begin{aligned} (FAF^{-1}\tilde{u})(\lambda) &= (FAu)(\lambda) = (Au, \varphi(\lambda)) = \\ &= (u, A^*\varphi(\lambda)) = \tilde{A}(\lambda)(u, \varphi(\lambda)) = \tilde{A}(\lambda)\tilde{u}(\lambda), \lambda \in \Lambda. \end{aligned} \quad (10.2.35)$$

Это означает, что оператор  $FAF^{-1}$  является в пространстве  $H$  оператором умножения на функцию  $\tilde{A}(\lambda)$ , значение которой принадлежит спектру оператора  $A$ ,

При этом  $u = F^{-1}\tilde{u} = \sum_{\lambda \in \Lambda} (u, \varphi(\lambda)) \varphi(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tilde{u}(\lambda) \varphi(\lambda)$ .

Аналогично

$$(Ff(A) F^{-1}\tilde{u})(\lambda) = f(\tilde{A}(\lambda)) \tilde{u}(\lambda). \quad (10.2.36)$$

Происхождение термина «диагонализация» объясняется тем, что в конечно-мерном пространстве  $X$  оператору  $A$  соответствует диагональная матрица  $\text{diag}(\tilde{A}(\lambda_1), \dots, \tilde{A}(\lambda_N))$  и всем коммутирующим с  $A$  операторам также соответствуют диагональные матрицы.

Существование положительной меры  $\sigma$  проиллюстрируем на примере положительного самосопряженного оператора  $A$ , собственные значения которого  $\lambda_i$  различны и  $\lambda_i \in [m, M]$ , где  $0 < m < M$ . Пусть  $h$  — циклический элемент из  $X$ :

$$h = \sum_n h_n \varphi_n,$$

т. е. такой, что все  $h_n \neq 0$ . В силу показанного ранее изоморфизма оператору  $A$  соответствует функция  $\tilde{A}(\lambda) \in C(\Lambda)$ . Пусть

$$L(\tilde{A}) = (Ah, h).$$

Это положительный, непрерывный функционал. В силу теоремы Рисса [185] существует такая неотрицательная мера  $\sigma(\lambda)$ , что

$$L(\tilde{A}) = \int_m^M \tilde{A}(\lambda) d\sigma(\lambda).$$

Тогда если  $u = Bh$ ,  $v = Ch$ , где  $B, C \in \mathcal{B}(X)$ , то

$$(u, v) = (Bh, Ch) = \int_m^M \tilde{B}(\lambda) \overline{\tilde{C}(\lambda)} d\sigma(\lambda),$$

т. е. получили отображение  $F$  множества  $Uh$  ( $U \in \mathcal{B}(X)$ ) на множество всех функций  $L_2(\sigma)$ , сохраняющее скалярное произведение

$$Fu = u(\lambda), \text{ где } U \longleftrightarrow u(\lambda), u = Uh.$$

Это отображение взаимно однозначно. Поскольку

$$(Au, v) = (ABh, Ch) = \int_m^M \tilde{A}(\lambda) \tilde{B}(\lambda) \overline{\tilde{C}(\lambda)} d\sigma(\lambda)$$

для всех  $B, C \in \mathcal{B}(X)$ , то

$$F(Au)(\lambda) = \tilde{A}(\lambda) u(\lambda) = \tilde{A}(\lambda) (Fu)(\lambda). \quad (10.2.37)$$

Таким образом, при изоморфизме  $F$  операторы из  $\mathcal{B}(X)$  переходят в непрерывные функции на множестве  $\Lambda$ , действие этих операторов в  $L_2(\sigma)$  является просто умножением, а оператору  $\alpha A_1 + \beta A_2$ ,  $\alpha, \beta \in C^1$  соответствует функция  $\alpha_1 \tilde{A}_1(\lambda) + \beta \tilde{A}_2(\lambda)$ . Читателя, желающего подробнее изучить этот вопрос, мы отсылаем к монографиям Н. Данфорда, Дж. Т. Шварца [73], К. Морена [185].

### § 10.3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Уравнениями второго рода называются уравнения вида

$$u = Tu + \psi, \quad (10.3.1)$$

где  $T$  — линейный оператор в  $\mathcal{B}$ -пространстве  $X$ ;  $\psi$  — заданный, а  $u$  — искомый элемент пространства  $X$ .

Одним из распространенных методов нахождения решения уравнения (10.3.1) является метод последовательных приближений или метод простых итераций, который состоит в том, что, задавшись произвольным элементом  $u^0 \in X$ , называемым начальным приближением, строят, исходя из него, последовательность  $\{u^k\}$  приближенных решений

$$u^{k+1} = Tu^k + \psi. \quad (10.3.2)$$

Если последовательность (10.3.2) получается сходящейся, то говорят, что процесс последовательных приближений для уравнения (10.3.1), начатый с элемента  $u^0$ , сходится. Поскольку  $T$  — линейный оператор, то из одного факта сходимости последовательности  $\{u^k\}$  вытекает, что  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u^k$  есть решение уравнения (10.3.1). Чтобы в этом убедиться,

достаточно перейти к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в соотношении (10.3.2). Описанный способ решения уравнений (10.3.1) восходит к работам С. Гаусса [281], Дж. Лиувилля [304], С. Неймана [317], Дж. Якоби [291], Л. Зейделя [333], П. А. Некрасова [189], Е. Пикара [324], Дж. Пеано [322] и многих других математиков.

Сходимость метода последовательных приближений для уравнения (10.3.1) связана с принципом сжатых отображений, а выполнение этого принципа связывается со сходимостью по норме ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k u^0, \quad u^0 \in X, \quad (10.3.3)$$

сумма которого (в случае сходимости) есть  $(I - T)^{-1} u^0$ .

**Теорема 10.3.1.** *Метод последовательных приближений (10.3.2) для уравнения (10.3.1) сходится при любом начальном приближении  $u^0 \in X$  и при любой фиксированной  $\psi \in X$  к единственному решению  $u$  уравнения (10.3.1) тогда и только тогда, когда для любого  $u^0 \in X$  сходится ряд (10.3.3). В случае сходимости имеют место оценки для  $\varepsilon^k = u - u^k$ :*

$$\|\varepsilon^k\| = \|T\varepsilon^{k-1}\| \leq \|T\| \|\varepsilon^{k-1}\|; \quad (10.3.4)$$

$$\|\varepsilon^k\| = \|T^k \varepsilon^0\| \leq \|T^k\| \|\varepsilon^0\|; \quad (10.3.5)$$

$$\|\varepsilon^k\| = \|(I - T)^{-1} T^k (u^1 - u^0)\| \leq \|(I - T)^{-1} T^k\| \|u^1 - u^0\|. \quad (10.3.6)$$

**Доказательство.** Пусть ряд (10.3.3) сходится; применяя последовательно формулу (10.3.2), получаем

$$u^k = \psi + T\psi + \dots + T^{k-1}\psi + T^k u^0. \quad (10.3.7)$$



По следствию 10.2.2  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\| < 1$ , т. е.  $T^k u^0 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , существует  $(I - T)^{-1}$  и

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} u^k = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \psi = (I - T)^{-1} \psi, \quad (10.3.8)$$

т. е.  $u$  — решение уравнения (10.3.1). Покажем единственность найденного решения. Предположим, что уравнение (10.3.1) имеет другое решение  $x \neq u$ . Тогда  $v = x - u \neq 0$  и  $v = Tv$ ; следовательно,  $v = Tv = \dots = T^k v = \dots$ . Из существования предела при  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^n T^k v = (n+1)v$$

следует, что  $v \equiv 0$ . Противоречие доказывает единственность  $u$ .

Обратное утверждение очевидно, ибо если метод последовательных приближений (10.3.2) сходится для любого  $u^0 \in X$  к решению, определяемому формулой (10.3.8), то  $T^k u^0 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и из (10.3.7) и (10.3.8) следует, что ряд (10.3.3) сходится при любом фиксированном  $\psi \in X$ .

Оценка (10.3.4) получается вычитанием из уравнения (10.3.1) равенства (10.3.2), в результате которого будем иметь

$$e^{k+1} = T e^k. \quad (10.3.9)$$

Из (10.3.9) получаем

$$e^k = T^k e^0. \quad (10.3.10)$$

Из (10.3.10) следует оценка (10.3.5). Наконец, поскольку

$$(I - T)e^0 = u - Tu - u^0 + Tu^0 = \psi + Tu^0 - u^0 = u^1 - u^0,$$

то  $e^0 = (I - T)^{-1}(u^1 - u^0)$ . Подставляя это выражение для  $e^0$  (10.3.10), получаем

$$e^k = T^k (I - T)^{-1}(u^1 - u^0). \quad (10.3.11)$$

Отсюда сразу следует неравенство (10.3.6). Теорема доказана.

Заметим, что если выполнено условие теоремы 10.2.10, то оценка (10.3.6) может быть заменена оценкой

$$\|u - u^k\| \leq q^k (1 - q)^{-1} \|u^1 - u^0\|. \quad (10.3.12)$$

Следует также указать, что метод последовательных приближений сходится, если вместо сходимости ряда (10.3.3) потребовать выполнения одного из следующих условий:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|T^n f\|^{1/n} < 1 \text{ для } \{f: f \in X, \|f\| = 1\}; \quad (10.3.13)$$

$$\mu(T) < 1; \quad (10.3.14)$$

$$\|T\| < 1. \quad (10.3.15)$$

Степень этих ограничений возрастает в порядке следования формул (10.3.13)—(10.3.15).

Пусть  $\{\varphi_i\}$  — полная в  $X$  линейно-независимая система собственных элементов оператора  $T$ , а  $\lambda_i$  — соответствующие собственные значения:

$$T\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (10.3.16)$$

Тогда при выполнении условия (10.3.14)  $|\lambda_i| < 1$  для всех  $i \geq 1$ . Если теперь положить

$$u^k = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^k \varphi_i; \quad \psi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \varphi_i; \quad \varepsilon^k = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^k \varphi_i, \quad (10.3.17)$$

где  $u_i^k$ ,  $\psi_i$ ,  $\varepsilon_i^k$  — числовые коэффициенты, то легко видеть, что

$$u_i^{k+1} = \lambda_i u_i^k + \psi_i = (1 + \lambda_i + \dots + \lambda_i^k) \psi_i + \lambda_i^{k+1} u_i^0; \quad (10.3.18)$$

$$\varepsilon_i^{k+1} = \lambda_i \varepsilon_i^k = \lambda_i^{k+1} \varepsilon_i^0 = \lambda_i^{k+1} (1 - \lambda_i)^{-1} (u_i^1 - u_i^0). \quad (10.3.19)$$

#### § 10.4. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В любом итерационном методе решения линейного уравнения первого рода (10.2.16)  $Au = f$ , где  $u \in X$ ,  $f \in Y$ ,  $X$ ,  $Y$  — некоторые  $\mathfrak{B}$ -пространства, а  $A$  — линейный оператор из  $X$  в  $Y$ , определяется последовательность приближенных решений  $u^k \in X$ , которая предполагается сходящейся к  $A^{-1}f$  при  $k \rightarrow \infty$ . При итерации порядка  $r$  функция  $u^{k+1}$  считается зависящей от  $A$ ,  $f$ ,  $u^k$ , ...,  $u^{k-r+1}$ . Из-за требований, обусловленных памятью ЭВМ, обычно берут  $r = 1$ , так что

$$u^{k+1} = F_k(A, f, u^k). \quad (10.4.1)$$

Это так называемый одношаговый итерационный метод. Сходимость его, если она имеется, основана, как правило, на выполнении принципа сжатых отображений. Если  $F_k$  не зависит от  $k$ , итерацию (10.4.1) называют стационарной. Если вид функции  $F_k$  циклически по  $k$  меняется с периодом  $N$ , то итерации называют циклическими с периодом  $N$ . Очевидно, что такая итерация эквивалентна некоторой стационарной итерации относительно приближенных значений  $u^0$ ,  $u^N$ ,  $u^{2N}$ , ... Если  $F_k$  — линейная функция от  $u^k$ , итерацию называют линейной. Линейные итерации наиболее просты для исследований.

Наиболее общей линейной функцией  $F_k$  является функция вида  $T_k u^k + \psi^k$ , где  $T_k = T_k(A, f)$  — некоторый линейный оператор, а  $\psi^k$  — элемент из  $X$ . Если потребовать, чтобы такая операция  $F_k$  оставляла стационарной точкой точное решение задачи (10.2.16), т. е. чтобы

$$A^{-1}f = T_k A^{-1}f + \psi^k, \quad (10.4.2)$$

то получим, что  $\psi^k$ ,  $f$  и  $T_k$  должны быть связаны соотношением  $\psi^k = H_k f$ , где  $H_k = (1 - T_k)A^{-1}$ .

Таким образом, можно сделать заключение, что общий принцип построения линейных итерационных методов, использующих информацию лишь о предыдущем приближении и оставляющих точное ре-

шение  $u$  стационарной точкой, в конечном итоге состоит в том, что по некоторому элементу  $u^0$  строится последовательность элементов  $u^k$  согласно формулам

$$u^{k+1} = T_k u^k + \psi^k, \quad (10.4.3)$$

где  $T_k = I - H_k A$ ;  $\psi^k = H_k f$ ,  $H_k$  — некоторая последовательность операторов, характеризующая тип итерационного метода.

Различные методы ускорения сходимости итераций отличаются друг от друга или а) принципом построения операторов  $H_k$ , или б) конкретным выбором операторов  $H_k$  для конкретных уравнений (10.2.16), или в) вычислительной схемой по численной реализации операций  $T_k u^k$ ,  $H_k f$  (ведь способ и порядок реализации этих операций иногда существенно влияют из-за ошибок округления на окончательный результат; кроме того, от способа и порядка реализации зависит необходимый для этой цели объем памяти ЭВМ). Таким образом, можно сказать, что сущность каждого сходящегося итерационного метода состоит в том, что в нем, руководствуясь некоторым принципом, операторы  $H_k$  выбирают из некоторого строго определенного класса операторов  $\mathfrak{M}$  так, чтобы на этом классе операции  $T_k u^k$  были нетрудоемкими, а спектральные радиусы операторов  $T_k$  были достаточно малы. Очевидно, что ошибка  $\varepsilon^k = u - u^k$ , где  $u$  — точное решение уравнения (10.2.16), удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^{k+1} = T_k \varepsilon^k. \quad (10.4.4)$$

Это основное свойство линейных итераций. Из (10.4.4) следует, что

$$\varepsilon^{k+1} = M_k \varepsilon^0; \quad M_k = T_k T_{k-1} \dots T_0. \quad (10.4.5)$$

Значит, сходимость итераций для данной начальной ошибки  $\varepsilon^0$  зависит от поведения  $M_k \varepsilon^0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Очевидно, что итерация (10.4.3) будет сходиться для данной начальной ошибки тогда и только тогда, когда в рассматриваемом пространстве  $M_k \varepsilon^0 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Подставляя в (10.4.5)  $\varepsilon^{k+1} = u - u^{k+1}$ , получаем

$$u^{k+1} = M_k u^0 + (I - M_k) A^{-1} f. \quad (10.4.6)$$

Значение  $\varepsilon^0$  бывает, как правило, неизвестным, поэтому легче исследовать поведение невязки

$$r^k = f - Au^k, \quad (10.4.7)$$

так как ее можно вычислить, не зная точного решения  $u = A^{-1} f$ . В самом деле, поскольку  $r^k = Au - Au^k = A\varepsilon^k$ , из (10.4.4) следует, что  $r^{k+1} = AT_k A^{-1} r^k$  или  $r^{k+1} = (AM_k A^{-1}) r^0$ . Из (10.4.6) получаем

$$Au^{k+1} = AM_k u^0 + (I - AM_k A^{-1}) f.$$

Для стационарных линейных итераций имеем  $T_k = T$ , и, следовательно, сходимость их зависит от поведения  $T^k x$  при произвольном  $x$  и  $k \rightarrow \infty$ . Для таких методов согласно (10.2.4), (10.2.8) имеет место асимптотическое при  $k \rightarrow \infty$  соотношение

$$\|\varepsilon^k\| \leq \|T^k\| \|\varepsilon^0\| \sim \mu^k(T) b^k(k) \|\varepsilon^0\|, \quad (10.4.8)$$

где  $b(k) > 0$  — числовая функция, такая, что  $b(k) \rightarrow 1$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Таким образом, для уменьшения нормы ошибки в  $1/\varepsilon$  раз требуется при достаточно малом  $\varepsilon$  и  $\mu(T) \neq 0$  провести по порядку

$$k = \ln \varepsilon / [\ln \mu(T) + \ln b(k)] \sim \ln \varepsilon / \ln \mu(T) \quad (10.4.9)$$

итераций.

Формула (10.4.8) асимптотическая. На примере матриц  $n$ -го порядка исследуем подробнее поведение операторов  $T^k$  и сравним их нормы с величиной  $\mu(T)$ . Итак, пусть  $T$  — матрица  $n$ -го порядка,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — ее собственные значения. Из теории канонических жордановых форм известно, что существует невырожденная матрица  $S$ , такая, что  $J = S^{-1}TS$  является блочно-диагональной матрицей, в которой диагональные блоки  $J_i$  имеют вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \lambda_i & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (10.4.10)$$

Пусть порядок матрицы (10.4.10) равен  $N_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ , а  $\sum N_i = n$ . Тогда  $J = S^{-1}TS = \text{diag}\{J_1, \dots, J_m\}$ . Очевидно, что

$$T^k = SJ^kS^{-1}, \text{ а } J^k = \text{diag}\{J_1^k, \dots, J_m^k\}.$$

Изучим структуру матриц  $J_i^k$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Имеем  $J_i = \lambda_i I + C$ , где матрица  $C$  имеет порядок  $N_i$  и состоит из единиц на первой наддиагонали и нулей на остальных местах. Легко видеть, что матрица  $C^r$ ,  $r = 1, 2, \dots, N_i - 1$ , имеет единицы на  $r$ -й наддиагонали и нули на остальных местах, а  $C^r = 0$  при  $r \geq N_i$ .

Отсюда следует, что при  $k \geq N_i - 1$

$$J_i^k = (\lambda_i I + C)^k = \lambda_i^k I + C_1^k \lambda_i^{k-1} C + \dots + C_k^{N_i-1} \lambda_i^{k-N_i+1} C^{N_i-1}.$$

Таким образом, при  $k \rightarrow \infty$  и  $|\lambda_i| < 1$  в матрице  $J_i^k$  будет доминировать последний член, т. е.

$$J_i^k \sim C_k^{N_i-1} \lambda_i^{k-N_i+1} C^{N_i-1} \sim \lambda_i^k k^{N_i-1} \frac{1}{(N_i-1)! \lambda_i^{N_i-1}} C^{N_i-1}.$$

Учитывая последнее, приходим к выводу, что при  $k \rightarrow \infty$  и  $\mu(T) = \max_i |\lambda_i| \neq 0$  имеют место соотношения

$$\|T^k\| = \|S J^k S^{-1}\| \sim \alpha \mu^k(T) k^{\bar{N}-1}, \quad (10.4.11)$$

где  $\alpha > 0$  — некоторая постоянная;  $\bar{N}$  — максимальное значение из величин  $N_i$ , соответствующих  $\lambda_i = \mu(T)$ .

Всюду будем предполагать, что  $\mu(T) > 0$ . Однако существуют операторы  $T$ , называемые нильпотентными, для которых  $\mu(T) = 0$  (например, матрица  $C$  в рассмотренном примере); для них  $\|T^k\| q^{-k} \rightarrow 0$  при любом  $q > 0$  и  $k \rightarrow \infty$ .

## § 10.5. О СУЩЕСТВОВАНИИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В § 10.4 было выяснено, когда итерационный метод (10.4.3) сходится. Но пока не ясно, существуют ли вообще такие операторы  $H_k$ , которые обеспечат сходимость итераций (10.4.3) для решения уравнения (10.2.16), и какие условия должны быть выполнены, чтобы такие операторы  $H_k$  существовали. Оказывается, что существование  $H_k$  связано с разрешимостью уравнения (10.2.16), а часть того множества операторов  $H_k$ , которые могут давать сходящиеся итерационные методы, определяется теоремой 10.2.11 о возмущениях.

Прежде чем исследовать этот вопрос подробнее, остановимся на возможных типах преобразований, переводящих уравнение первого рода (10.2.16) в уравнение второго рода (10.3.1). Такой переход чаще всего осуществляется применением комбинаций следующих преобразований:

а) добавлением одного и того же элемента к обеим частям (10.2.16) или уже частично преобразованного уравнения;

б) применением к обеим частям (10.2.16) или уже частично преобразованного уравнения одного и того же оператора (умножение на оператор или скаляр);

в) заменой неизвестного  $u$  по формуле  $u = Qu$ , где  $Q$  — некоторый оператор (это преобразование осуществляется реже остальных).

При первом преобразовании уравнение переходит в эквивалентное. При втором, если при этом применяется линейный ограниченный оператор  $H$ , всякое решение исходного уравнения будет решением и нового уравнения. Если существует  $H^{-1}$ , то будет справедливо и обратное. А если оператор  $H$  переводит некоторые ненулевые элементы  $X$  в нулевые, то преобразование б) может добавить лишние решения. При замене неизвестного  $u = Qu$  необходимо, чтобы решение нового уравнения  $y$  принадлежало области определения оператора  $Q$ . В случае в) непредставимые в виде  $Qu$  решения  $u$  будут потеряны. Оператор  $Q$  в некоторых преобразованиях может быть оператором вложения.

Покажем простейший типичный вид преобразования. Умножим уравнение (10.2.16) на оператор  $D$ , затем прибавим к обеим частям по элементу  $-Cu$ , где  $C$  — некоторый оператор. Тогда уравнение (10.2.16) перейдет в уравнение

$$Cu = Cu - D(Au - f). \quad (10.5.1)$$

Следовательно, итерационный метод можно записать в виде

$$Cu^{k+1} = Cu^k - D(Au^k - f). \quad (10.5.2)$$

Этот метод, если оператор  $C$  имеет обратный, соответствует методу (10.4.3) с  $H_k = C^{-1}D$ .

Аналогично для решения итерационным методом уравнения

$$u = Bu + f \quad (10.5.3)$$

умножим его на оператор  $K$ :

$$Ku = KBu + Kf \quad (10.5.4)$$

и добавим к обеим частям (10.5.4) член  $-Lu$ . Предполагая, что существует оператор  $(K - L)^{-1}$ , в результате получаем уравнение

$$u = (K - L)^{-1} (KB - L) u + (K - L)^{-1} Kf. \quad (10.5.5)$$

Это уравнение в случае удачного выбора операторов  $K, L$  можно принять за уравнение для проведения итерационного метода (10.4.3). К уравнениям (10.5.1), (10.5.5) можно, в свою очередь, применить (если это целесообразно) группу описанных преобразований. В уравнениях (10.5.1), (10.5.5) операторы  $C, D, K, L$  могут зависеть от  $k$ .

В работе В. В. Петришина [323] показано, что многие известные эффективные итерационные методы могут быть реализованы по схеме (10.5.2), в которой класс операторов  $H = C^{-1}D$  определяется тем, что для каждого итерационного метода бывает возможным в весьма широком круге задач достаточно просто конструктивно построить классы операторов  $C, D$ , для которых сходимость итераций (10.5.2) будет достаточно быстрой при сравнительно малой затрате числа действий на одну итерацию. Кроме того, запись итерационного метода в виде (10.5.2) предопределяет в некоторой мере и последовательность действий при реализации итерации. Следует отметить, что уже в работе Л. Чезари [268] итерационные методы предлагалось строить по схеме (10.5.2) при  $D = I, H = C^{-1}$ . В работе Е. Шмидта [330] для решения интегральных уравнений второго рода предлагалась группа преобразований (10.5.5) при  $K = I$  и вырожденном интегральном операторе  $L$ , близком к  $B$ .

Уравнения типа (10.5.1) могут служить не только для использования их в итерационных методах, но и для доказательства существования и единственности решения уравнения типа (10.2.16). Докажем, следуя работе [323] и предполагая, что  $X = Y$ , следующую теорему.

**Теорема 10.5.1.** *Уравнение (10.2.16) имеет единственное решение  $u$  для каждого  $f \in X$  тогда и только тогда, когда существует оператор  $H$ , имеющий обратный  $H^{-1}$ , обладающий таким свойством, что ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k g, \quad (10.5.6)$$

где  $T = I - HA$ , сходится для любого  $g \in X$ . Решение  $u$  в этом случае дается формулой

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} T^k f. \quad (10.5.7)$$

**Доказательство.** Пусть существует оператор  $H$ , обладающий перечисленными в теореме свойствами. Положим  $g = Hf$ , тогда ввиду полноты пространства  $X$  и нашего предположения ряд

(10.5.6) сходится к некоторому элементу  $u \in X$  и  $u = \sum_{k=0}^{\infty} T^k g$ . Тогда

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} T^k g = u - g \quad \text{или} \quad u - HAu = u - g, \quad \text{т. е.} \quad (10.5.8)$$

$$HAu = Hf.$$

Умножая (10.5.8) на  $H^{-1}$ , убеждаемся, что  $u$  есть решение уравнения (10.2.16). Единственность его доказывается от противного. Пусть  $u$  — другое решение (10.2.16),  $v = u - \bar{u} \neq 0$ . Тогда  $Av = 0$ ,  $HAv = 0$ , т. е.  $(I - T)v = 0$ , где оператор  $T$  обладает свойствами, описанными в теореме 10.3.1, а так как  $v = Tv = T^k v$ , то из доказательства теоремы 10.3.1 следует, что  $v \equiv 0$ . Противоречие доказывает единственность. Для доказательства обратного утверждения теоремы заметим, что если уравнение (10.2.16) имеет единственное решение  $u \in X$  для каждого  $f \in X$ , то оператор  $A$  обладает обратным. Тогда можно выбрать  $H = \eta A^{-1}$ , где  $\eta$  — комплексное число, такое, что  $|1 - \eta| < 1$ . При этом  $H^{-1}$  существует и равен  $1/\eta A$  и  $T = I - HA = (1 - \eta)I$ . Поскольку  $\|T\| = |1 - \eta| < 1$  и  $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ , по следствию 10.2.2

ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} T^k g = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \eta)^k g$  сходится к некоторому элементу для любого  $g$ . Обозначим  $\bar{u}$  сумму этого ряда при  $g = Hf$ . Так как  $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \eta)^k g = \eta^{-1} g$ , то  $\bar{u} = \eta^{-1} g = \eta^{-1} Hf = A^{-1} f = u$ .

Теорема полностью доказана.

Таким образом, для того чтобы существовали операторы  $H$ , дающие сходящиеся итерационные методы для решения уравнения (10.2.16), необходимо и достаточно, чтобы это уравнение имело единственное решение при любом  $f \in X$ . Из доказательства теоремы 10.5.1 видно, что оператор  $A^{-1}$  играет исключительную роль в построении итерационных процессов, а именно, если  $H = A^{-1}$ , то за одну итерацию по формуле (10.4.3) получаем сразу точное решение, какое бы начальное приближение  $u^0$  мы ни взяли. Но это не единственный оператор, дающий сходящийся итерационный процесс. Если потребовать, чтобы  $H$  и  $A$  принадлежали банаховой алгебре  $\mathfrak{B}(X)$ , то теорема 10.2.11 о возмущениях также определяет некоторое множество операторов, из которого можно выбирать операторы  $H$ , а именно:

$$\{H: \|H - A^{-1}\| < \|A^{-1}\|^{-1}\}, \quad (10.5.9)$$

ибо при таком выборе  $H$  ряд (10.5.6) сходится. Условия сходимости итераций определяются также теоремой 10.3.1 или условиями (10.3.13)—(10.3.15).

Но как выбрать  $H$  «оптимальным» образом? Мы видели, что если  $H = A^{-1}$ , то уже за одну итерацию получается точное решение. Очевидно, что, вообще говоря, это не оптимальный способ решения, ибо для нахождения оператора  $A^{-1}$  может потребоваться затрата огромного количества арифметических действий. Если взять за  $H$  оператор более простой структуры, то можно получить итерационный процесс, требующий меньшего числа действий, производимых в одной итерации. Если он сходится, то, решая им задачу (10.2.16) с точностью  $\varepsilon$  [делая для этого  $k(\varepsilon)$  итераций, где  $k(\varepsilon)$  определяется формулой (10.4.9)], получаем приближенное с точностью  $\varepsilon$  решение, затрачивая, может быть, меньшее число действий по сравнению со случаем  $H = A^{-1}$ .

Таким образом, с одной стороны, все одношаговые итерационные методы, оставляющие решение стационарной точкой, попадают под одну формулу (10.4.3), которая в какой-то мере гасит энтузиазм в исследовании новых итерационных методов. С другой стороны, для каждого конкретного типа уравнения (10.2.16) известна масса соперничающих друг с другом методов, часть которых «лучше», а другие «хуже» решают задачу (10.2.16). Смысл, вкладываемый в «лучше» и в «хуже», интуитивно вырабатывается под влиянием практики расчетов большого количества задач. На наш взгляд, искусство исследователя новых итерационных методов для решения достаточно конкретного типа уравнений (10.2.16) как раз и состоит в том, чтобы миновать Сциллу субъективности и Харибду всеобщности.

Задачу по созданию эффективных итерационных методов следует реально поставить в такой формулировке: задан некоторый класс  $\mathfrak{M}$  операторов  $H$  (назовем его классом допустимых операторов), и на этом классе требуется найти эффективные итерационные методы. Возможны и другие постановки задачи, включающие в формулировку требование, чтобы для заданной точности  $\varepsilon$  не был превышен определенный объем памяти ЭВМ [123].

Сравнивать два «хороших» метода — тонкая и нелегкая задача, ибо всегда в такую оценку подспудно входит богатая интуиция оценивающей стороны, как правило, не передающаяся собеседнику (например, в выборе класса  $\mathfrak{M}$ ). Оценка метода зависит от типа имеющегося оборудования для решения задачи и от характера решения: одноразового, серийного и т. д. Мы пойдем на некоторую формализацию и упрощение действительной ситуации и попытаемся, отбрасывая некоторые факторы, значение которых на самом деле может быть в ряде случаев весьма существенно, подобрать критерии для сравнения эффективности итерационных методов для решения одной и той же задачи.

Очевидно, что скорость сходимости итерационного метода (10.4.3), характеризующую величиной  $-\ln \mu(T)$ , и число действий, производимых за одну итерацию, нельзя рассматривать как две независимые характеристики при оценке качества метода. В самом деле, рассмотрим сходящийся итерационный метод (10.3.2). Пусть  $v^k = u^{2k}$ , тогда метод

$$v^{k+1} = TTv^k + (T + I)\psi \quad (10.5.10)$$

будет также сходящимся. Он сходится со скоростью  $-\ln \mu(T^2)$ , т. е., грубо говоря, в два раза быстрее метода (10.3.2). В обоих методах подавляющая часть действий тратится на вычисление первых слагаемых в правых частях. Пусть имеет место следующая ситуация: мы не можем из-за недостаточного объема памяти ЭВМ вычислять оператор  $T^2v$  никаким другим способом, кроме последовательного двойного умножения элемента  $v$  на оператор  $T$  (эта ситуация довольно типична при решении задач математической физики). Пусть  $\zeta(T)$  — цена операции  $T$ , т. е. число приведенных арифметических и логических действий, необходимых для вычисления по элементу  $v$  элемента  $Tv$ , и  $0 < \mu(T) < 1$ . Вычислим асимптотически при  $k \rightarrow \infty$  общее число действий, затраченных в методах (10.3.2), (10.5.10) для



решения задачи с точностью  $\varepsilon$ : это будут соответственно величины  $\Omega(T) \ln \varepsilon / \ln \mu(T)$  и  $\Omega(T^2) \ln \varepsilon / \ln \mu(T^2) \sim \Omega(T) \ln \varepsilon / \ln \mu(T)$ . Таким образом, видно, что мы не получим никакого выигрыша во время счета, если вместо (10.3.2) применим метод (10.5.10). Пример с методами (10.3.2), (10.5.10) заведомо был взят столь простой, чтобы на нем была очевидна суть дела, а она заключается в том, что, создавая новый метод, мы, наверное, должны позаботиться, чтобы для него величина

$$\omega(T) = -\Omega(T) / \ln \mu(T)$$

была достаточно мала. Эту величину назовем функционалом потерь. Любые модификации «старых» итерационных методов, вообще говоря, тогда имеют смысл, когда они (при одном и том же по порядку со «старым» методом объеме памяти) уменьшают функционал потерь. Так, если метод простой итерации для уравнения (10.5.3) сходится, а к этому уравнению мы применяем преобразование (10.5.5), то метод «простой» итерации для уравнения (10.5.5) сбьит, вообще говоря, предпочесть методу простой итерации для уравнения (10.5.3), если при прочих равных условиях

$$-\Omega((K-L)^{-1}(KB-L)) / \ln \mu((K-L)^{-1}(KB-L)) < -\Omega(B) / \ln \mu(B).$$

Очевидно, что такое сравнение методов необходимо проводить отдельно для каждого типа уравнений.

При сформулированном способе частичного упорядочения алгоритмов, безусловно, имеется некоторая идеализация оценки реального процесса вычислений на ЭВМ. Например, мы не учитываем неоднородность памяти ЭВМ, ее разрядность, качество программ, влияние на результаты счета ошибок округлений и т. п. Мы предполагаем для всех алгоритмов одинаковый уровень априорных сведений о свойствах решения задачи. Эффективность алгоритма должна оцениваться и количеством запоминаемой и используемой при решении задачи промежуточной информации [123].

## § 10.6. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ. КР-МЕТОД

Вернемся еще раз к методам, ускоряющим сходимость итераций. Они, как показано в § 10.5, описываются некоторой группой преобразований, переводящих уравнение (10.2.16) или (10.5.3) соответственно в уравнения типа (10.5.1), (10.5.5). Попытаемся возможно подробнее «расщепить» и классифицировать приемы ускорения сходимости. В качестве примера выберем уравнение, вид которого инвариантен относительно преобразований, ускоряющих сходимость итераций. Предположения относительно операторов этого уравнения выберем такими, которые характерны для многих задач переноса. Способ, на основании которого предпринята классификация, заключающийся в анализе вида уравнений для поправок, не является единственно возможным, но он, как нам кажется, удобен.

Пусть  $X$  и  $Y$  суть  $\mathfrak{B}$ -пространства, а  $\lambda$  — числовой параметр. Пусть задано линейное операторное уравнение (10.2.16) с  $A = L - \lambda S$ :

$$Lu = \lambda Su + f, \quad (10.6.1)$$

где  $u \in Z_0 = D(L)$  и  $D(S) = X$ ,  $f \in Y$ , а  $D(L)$  и  $D(S)$  — области определения операторов  $L$  и  $S$ . Пусть  $L, S$  — операторы с областью значений в  $Y$ ,  $L$  имеет обратный [тогда  $D(L^{-1}S) = X$ ] и  $\lambda \|L^{-1}S\| < 1$ . Назовем операцией  $K$  операцию, состоящую в вычислении по элементу  $u^k \in X$  элемента  $y^k = L^{-1}(\lambda Su^k + f)$ . Если хотят ускорить сходимость простой итерации для (10.6.1), то для нахождения  $u^{k+1}$  по  $u^k$  применяют помимо операции  $K$  еще дополнительные операции  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ , действующие на  $u^k$  и  $y^k$ . Каждый метод ускорения характеризуется набором  $\{P_i\}$  и порядком (вычислительной схемой) реализации  $\{P_i\}$ . Рассмотрим линейные итерационные процессы, использующие лишь  $u^k$  и оставляющие точное решение  $u$  стационарной точкой. Существует соответствие между  $\{P_i\}$  и множеством преобразований, переводящих уравнение (10.6.1) в эквивалентное ему, заданное в некотором  $\mathfrak{B}$ -пространстве  $Z_\alpha$  в форме

$$u = T_\alpha u + S_\alpha f, \quad (10.6.2)$$

при котором выполнение операций  $K$  и  $\{P_i\}$  эквивалентно методу простой итерации для (10.6.2):

$$u^{k+1} = T_\alpha u^k + S_\alpha f. \quad (10.6.3)$$

Пусть  $\sigma = \alpha + 1$ ;  $\alpha$  — целое;  $V_i$  и  $R_i$  —  $\mathfrak{B}$ -пространства;  $V_i \subseteq X$ ;  $Z_i = Z_0 + V_1 + \dots + V_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, \alpha$  и  $u^k \in Z_\alpha$  — приближенное значение  $u$ . Переход  $u^k \rightarrow u^{k+1}$  делаем в две операции  $K$  и  $P = (P_1, \dots, P_\alpha)$ .

Операция  $K$  такова:

$$u^{k+1/\sigma} = L^{-1}(\lambda Su^k + f). \quad (10.6.4)$$

Операция  $P_i$  заключается в нахождении  $w^{k+i/\sigma} \in V_i$ ,  $u^{k+(i+1)/\sigma} \in Z_i$  из решения уравнений:

$$\left. \begin{aligned} B_i w^{k+i/\sigma} &= C_i [w^{k+i/\sigma} + \tau_i (u^{k+i/\sigma} - u^k)]; \\ u^{k+(i+1)/\sigma} &= u^{k+i/\sigma} + w^{k+i/\sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10.6.5)$$

В (10.6.5) линейные операторы  $B_i (V_i \rightarrow R_i)$ ;  $C_i (V_i \rightarrow R_i)$ ;  $C_i \tau_i (Z_{i-1} \rightarrow R_i)$  выбраны так, чтобы уравнения (10.6.5) легко решались,  $D(T_{i-1}) \subseteq Z_i$ , а оператор  $B_i^{-1} C_i$  приближал бы в некотором смысле  $T_{i-1}$  на  $D(T_{i-1})$ , где  $T_0 = \lambda L^{-1} S$  и

$$T_i = T_{i-1} + (B_i - C_i)^{-1} C_i \tau_i (T_{i-1} - I), \quad i = 1, \dots, \alpha. \quad (10.6.6)$$

Пусть

$$S_0 = L^{-1}, \quad S_i = (B_i - C_i)^{-1} [B_i - C_i (I - \tau_i)] S_{i-1}, \quad (10.6.7) \\ i = 1, 2, \dots, \alpha.$$

Тогда в  $Z_\alpha$  справедливо соотношение (10.6.3), и если  $\varepsilon^k = u - u^k$ , где  $u^k \in Z_\alpha$ , то  $\varepsilon^{k+1} = T_\alpha \varepsilon^k$ . Нетрудно видеть, что уравнения

(10.6.5) представляют собой цепочку преобразований трех типов, приводящих исходное уравнение к виду, удобному для итераций.

Если функционал потерь  $\omega = -\Pi(T_\alpha)/\ln \mu(T_\alpha)$  будет при этом достаточно мал, то получим эффективный итерационный метод, который назовем  $KP_1, \dots, P_\alpha$ -методом, или сокращенно  $KP_1, \dots, P_\alpha$ . Форма записи  $KP_1, \dots, P_\alpha$  позволяет сконструировать его по  $KP_1, \dots, P_{\alpha-1}$ , так как  $KP_1, \dots, P_\alpha$  есть  $K'P_\alpha$ -метод для уравнения  $u = T_{\alpha-1} u + S_{\alpha-1} f$ , если  $K'$  есть операция  $T_{\alpha-1} u^k + S_{\alpha-1} f$ . Можно считать, что переход от  $KP_1, \dots, P_{\alpha-1}$  к  $KP_1, \dots, P_\alpha$  целесообразен, если он уменьшает функционал потерь.

При  $\alpha = 1$ ,  $Z_0 = X$ ,  $R_0 \subseteq Y$  преобразование (10.6.6) является общеизвестным типа (10.5.5) преобразованием уравнения для ускорения сходимости итераций, примененным, по-видимому, впервые в работе Е. Шмидта [330]. В этих же предположениях итерационные методы подобного типа с применением проекционных операторов, но с другими вычислительными схемами были исследованы в работах Ю. В. Воробьева [44], Ю. Д. Соколова [222], А. Ю. Лучки [155], М. А. Красносельского, М. П. Забрейко, Е. И. Пустыльника, П. Е. Соболевского [99], А. А. Абрамова [2], Н. С. Курпеля [111] и др.

$KP$ -метод можно рассматривать как комбинацию простой итерации с решением последовательности модельных задач для поправок. Последние же могут быть построены на основании некоторых принципов (в частности, различных вариационных). Это дает возможность использовать в итерационных методах решения задач математической физики и прикладной математики широко развитые в этих областях модельные (например, вариационные [182]) методы решения тех же задач. Решения модельных задач могут не принадлежать  $Z_0$ , однако порядок вычисления поправок в  $KP$  позволяет в ряде случаев исследовать его сходимость [127]. Операторы в (10.6.5) можно, например, сконструировать, используя следующий прием.

Зададим последовательности подпространств  $L_n \subseteq D(L)$  и  $M_n \subseteq Y$  размерностью  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Пусть  $P_n$  — оператор проектирования из  $Y$  в  $M_n$ . Тогда в (10.6.5) при  $i = 1$  могут быть взяты уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} P_n L w^{k+1/\sigma} &= \lambda P_n S w^{k+1/\sigma} + \lambda P_n S (u^{k+1/\sigma} - u^k); \\ u^{k+2/\sigma} &= u^{k+1/\sigma} + w^{k+1/\sigma}, \quad w^{k+1/\sigma} \in L_n. \end{aligned} \right\} \quad (10.6.8)$$

Если  $\varphi_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , образуют базис в  $L_n$ ,  $w = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in L_n$  и  $Q$  — линейный оператор из  $X$  в  $Y$ ,  $L_n \subseteq D(Q)$ , то

$$P_n Q w = \sum_{j=1}^n l_j(Qw) \psi_j = \sum_{i,j=1}^n l_j(Q a_i \varphi_i) \psi_j,$$

где  $\psi_j$  — базис в  $M_n$ , а  $l_j$  — полная система линейных функционалов на  $M_n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда, полагая  $w^{k+1/\sigma} = \sum_{i=1}^n a_i^k \varphi_i$ , из (10.6.8) получаем

$$\sum_{i=1}^n l_j((L - \lambda S) a_i^k \varphi_i) = \lambda_j [S(u^{k+1/\sigma} - u^k)], \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.6.9)$$

В такой записи достаточно указать лишь функционалы  $l_j$  и не указывать  $M_n$ . Подпространства  $L_n$  и  $M_n$  могут зависеть от  $k$ . В описанную схему укладываются методы Бубнова — Галеркина, Канторовича, Петрова, Рэлея — Ритца, ортогональных проекций, моментов, разделения областей, коллокации, групповой релаксации, наименьших квадратов, вариационные, градиентные и др.

Если (10.6.1) разрешимо и для его решений имеются априорные оценки, то и задача (10.6.8) при выполнении некоторых условий [92] будет разрешимой и для ее решений можно дать априорные оценки, а тогда итерационная схема в  $KP$  будет устойчива по отношению к ошибкам округления.

Представляет интерес рассмотреть модельные задачи либо с полусходными операторами [180], либо с факторизованными операторами [80, 123], либо с операторами с быстроменяющимися коэффициентами, определенными в более широкой стандартной области [118], либо с операторами теории возмущений и т. п. Нетрудно распространить принципы построений операций  $KP$  и на нелинейные задачи.

Известно, что одним из распространенных научных методов исследования свойств решений сложной задачи является замена ее более простой модельной задачей, сохраняющей в основном интересующие нас свойства исходной задачи. Тогда если упрощенная задача достаточно хорошо отражает основные свойства исходной задачи, то, выбирая за малую цену на каждом итерационном шаге главную часть ошибки из решения упрощенной задачи, получаем быстроходящийся  $KP$ . В работах Р. П. Федоренко [234], Н. С. Бахвалова [22], К. В. Емельянова и А. М. Ильина [82], а также в [120, 123, 127] достаточно полно исследована эффективность таких методов для решения эллиптических, интегральных и кинетических задач.

## § 10.7. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Во всяком вариационном методе задача по нахождению решения уравнения сводится к задаче отыскания минимума некоторого нелинейного функционала. В процессе нахождения минимума появляется последовательность элементов, связанная между собой некоторой нелинейной рекуррентной зависимостью (10.4.1), которую можно рассматривать как результат некоторого, вообще говоря, нелинейного итерационного процесса. Идея вариационных методов восходит еще к Коши [267], применившему вариационный принцип для решения алгебраических уравнений. Серьезным обобщением и обоснованием этого метода являются работы Л. В. Канторовича [87, 91], Г. Темпля [337], Р. Куранта [265].

Пусть  $\Phi(u)$  — вещественный нелинейный функционал, заданный на  $X$ , значения которого ограничены снизу. В вариационных методах

решения уравнений строится последовательность  $u^k$ , минимизирующая функционал  $\Phi$ , т. е. такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(u^k) = \inf_{u \in X} \Phi(u).$$

В таких методах приходится дополнительно доказывать, сходится ли последовательность  $u^k$  в каком-либо смысле к некоторому элементу  $u^*$ , о котором мы можем сказать, что он является решением (может быть, обобщенным) уравнения (10.2.16). Пример с функционалом  $\Phi(u) = \exp[-(u, u)]$  показывает, что это не всегда имеет место. Предположим дополнительно, что  $\Phi(u)$  — непрерывный функционал, имеющий на  $X$  единственный минимум, а  $u^*$  составляет наименьшее значение  $\Phi$ :

$$\Phi(u) \geq m = \Phi(u^*) \quad (10.7.1)$$

при всех  $u \in X$ . Доказательство сходимости по норме  $u^k$  к  $u^*$  проводится стандартным способом, если  $\Phi(u)$  удовлетворяет условию

$$\Phi(u) - \Phi(u^*) \geq \alpha (\|u - u^*\|), \quad (10.7.2)$$

где  $\alpha(\rho)$  — некоторая монотонно возрастающая непрерывная положительная при  $\rho > 0$  функция и  $\alpha(0) = 0$ . Ибо в этом случае из (10.7.2) следует, что  $\|u^k - u^*\| \leq \rho (\Phi(u^k) - m) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ; здесь  $\rho(\alpha)$  — обратная к  $\alpha(\rho)$  функция.

Как правило, построение  $u^{k+1}$  по  $u^k$  в вариационных методах осуществляется с помощью следующего приема. Пусть  $B(\alpha)$  — некоторый линейный оператор [ $D(B(\alpha)) \subseteq X$ ], зависящий от численных параметров  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ;  $H$  — некоторое сравнительно маломерное пространство в  $X$  и  $z \in H$ . Тогда элемент  $u^{k+1}$  ищем в виде

$$u^{k+1} = au^k + bB(\alpha)r^k + cz, \quad (10.7.3)$$

где  $a, b, c$  — скаляры, а  $r^k = f - Au^k$ . В формуле (10.7.3) выбираем параметры и элемент  $z$  такими, чтобы при  $r^k \neq 0$  выполнялось неравенство

$$\Phi(u^{k+1}) < \Phi(u^k). \quad (10.7.4)$$

Оператор  $B(\alpha)$ , скаляры  $a, b, c$  и пространство  $H$  могут зависеть от  $k$ .

Описанная конструкция и составляет принципиальную схему вариационных методов. Различные вариационные методы решения задачи (10.2.16) различаются между собой или выбором вида функционала  $\Phi$ , или выбором вида оператора  $B(\alpha)$ , или пространства  $H$ , или, наконец, способом минимизации (10.7.4), при котором скаляр  $c$  может считаться равным нулю или единице, а скаляры  $a$  и  $b$  могут считаться или закрепленными (например,  $a, b = 1$  или  $0$ ), или удовлетворяющими некоторой наложенной на них связи, или подлежащими определению вместе со всеми, или частью параметров  $\alpha$  из условия, чтобы величина  $\Phi(u^{k+1})$  принимала возможно наименьшее значение. В последнем случае формула (10.7.3) определяет некоторый нелинейный итерационный метод (10.4.1).

Вариационные методы удобно разделить на четыре группы.

К первой группе отнесем методы, в которых  $u^{k+1}$  находится из условия

$$u^{k+1} = \{u^k + w : \min_{w \in H_k} \Phi(u^k + w)\}, \quad (10.7.5)$$

где  $H_k$  — некоторое подпространство. Очевидно, подпространство  $H$  должно меняться вместе с  $k$ , иначе будет получаться одно и то же приближение.  $H_k$  можно задавать как независимо от результатов предыдущих шагов, так и с учетом предыдущих приближений. Например, имея некоторый оператор  $B(\alpha)$ , зависящий от параметра  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , о котором известно, что с его помощью можно достаточно успешно решить частичную задачу минимизации, за  $H_k$  можно взять подпространство, образованное элементами вида

$$H_k = \{w : w = \beta B(\alpha) r^k\}, \quad (10.7.6)$$

где  $\beta$  — скаляр.

Или, имея некоторый набор функций  $\{\Phi_{1k}, \Phi_{2k}, \dots, \Phi_{n_k k}\}$ , за  $H_k$  можно взять подпространство, натянутое на эти функции.

Ко второй группе методов отнесем методы типа

$$u^{k+1} = \{au^k + w : \min_{a, w \in H_k} \Phi(au^k + w)\}, \quad (10.7.7)$$

в которых помимо минимизации по  $H_k$  происходит дополнительная минимизация еще и по параметру  $a$ . Это целесообразно делать, если минимизацию по  $a$  удастся выполнить, затрачивая дополнительно небольшое число действий.

В третьей группе методов по значению  $u^k$  сначала вычисляется промежуточное значение  $u^{k+1/2}$ . Оно может быть вычислено или как результат одного или нескольких шагов сходящегося итерационного процесса, начинающегося с  $u^k$ , или как результат минимизаций некоторого другого функционала (или цепочки функционалов), для которого решение задачи также является абсолютным минимумом. Тогда полагают

$$u^{k+1} = \{u^{k+1/2} + w : \min_{w \in H_k} \Phi(u^{k+1/2} + w)\}. \quad (10.7.8)$$

Имеется определенный смысл в рассмотрении такого типа методов. Это объясняется тем, что весьма часто при решении задач математической физики с применением вариационных методов типа (10.7.5), (10.7.7) наблюдается замедление убывания  $\|e^k\|$  или  $\|r^k\|$  для достаточно больших значений  $k$ . Последнее связано с существованием у функционала  $\Phi$  сравнительно «плоского дна с узкими оврагами». Не всегда целесообразно следовать мелким оврагам этого дна, а лучше перепрыгивать их, проявляя определенную гибкость путем использования других принципов «спуска». Методы этого типа могут совмещать преимущества и итерационных методов, основанных на идее подавления компонент ошибки, и вариационных методов.

К четвертой группе методов отнесем методы типа

$$u^{k+1} = \{au^{k+1/2} + w : \min_{a, w \in H_k} \Phi(au^{k+1/2} + w)\}. \quad (10.7.9)$$

В некоторых случаях, например для (10.7.8), когда выбор подпространства  $H_h$  и функционалов не зависит от  $u^k$ , а  $\Phi$  — квадратичный функционал, определяющий некоторую унитарную норму, формулы вариационного метода дают линейный стационарный метод. Этот новый подход к известным линейным итерационным методам удобен тем, что «проклятие некоммутативности» входящих в итерационные методы операторов, мешающее в исследовании сходимости, здесь не проявляется так сильно. В этом случае проще определить значения параметров, входящих в итерационный метод, при которых достигается оптимальная сходимость в унитарной норме.

Наметим в общих чертах несколько направлений в развитии вариационных методов и кратко остановимся на возникающих проблемах, намечающих возможные эффективные пути минимизации. Всюду будем предполагать, что функционал  $\Phi(u)$  имеет единственный минимум на решении уравнения (10.2.16).

Естественно начать со случая (10.7.5), в котором подпространство  $H_h$  задано формулой (10.7.6). Если  $B = \alpha A^{-1} \in \mathfrak{M}$ , то очевидно, что минимум функционала

$$\Phi(u^k + \alpha A^{-1} r^k) \quad (10.7.10)$$

достигается с одного шага, и он равен  $\Phi(A^{-1}f)$ . Но обычно оператор  $\alpha A^{-1}$  не принадлежит допустимому множеству операторов  $\mathfrak{M}$ . В этом случае естественно попытаться хорошо приблизить  $A^{-1}$  допустимыми операторами, надеясь при таком способе получить за один шаг хорошие приближения к минимальному значению  $\Phi$ . В качестве  $\mathfrak{M}$  часто берут многочлены от  $A$ . В самом деле, допустим, что существует такая постоянная  $\alpha$ , для которой  $\|I - \alpha A\| < 1$ . Тогда из формулы (10.2.29) имеем  $A^{-1} \approx \alpha \sum_{n=0}^N (I - \alpha A)^n$ , где  $N > 0$  — некоторое достаточно большое целое число. Очевидно, что мы только улучшим процесс минимизации функционала, если расширим произвол в выборе  $u^{k+1}$  тем, что  $u^{k+1}$  будем искать в виде

$$u^{k+1} = u^k + P_N(A) r^k, \quad (10.7.11)$$

где  $P_N(t) = \sum_{t=0}^N \alpha_t t^t$  — многочлен  $N$ -й степени, коэффициенты  $\alpha_0, \dots, \alpha_N$  которого подлежат определению согласно формуле

$$u^{k+1} = \{u^k + P_N(A) r^k : \min_{\alpha_h} \Phi(u^k + P_N(A) r^k)\}. \quad (10.7.12)$$

Если процесс нахождения  $u^{k+1}$  по формуле (10.7.12) не слишком трудоемкий, можно воспользоваться этим плодотворным направлением вариационных методов. Одними из первых в этом направлении являются работы Л. В. Канторовича [87, 91]. Особенно подробным исследованиям подверглись методы типа (10.7.12) при  $N = 0$ . Остановимся на специфике проблем, возникающих при численной реализации этих методов.

Рассмотрим луч, исходящий из точки  $\omega$ , т. е. совокупность элементов вида  $\omega + \alpha z$ , где  $\alpha$  — вещественное число, а  $z, \omega \in X$ . Построим

вещественную функцию параметра  $\alpha$ :  $\varphi(\alpha, w, z) = \Phi(w + \alpha z)$ . Назовем производной в точке  $w$  функционала  $\Phi$  по направлению  $z$  выражение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\|z\|} \left. \frac{\partial \varphi(\alpha, w, z)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{\|z\|} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(w + hz) - \Phi(w)}{h}. \quad (10.7.13)$$

Пусть производная существует и не равна нулю в точке  $u^0$  и для определенности функция  $\varphi(\alpha, u^0, z)$  убывает по крайней мере для достаточно малых положительных значений  $\alpha$ . Пусть  $\varepsilon_1$  — наименьший положительный корень уравнения  $\varphi'(\alpha, u^0, z) = 0$ . Тогда в промежутке  $[0, \varepsilon_1]$  функция  $\varphi$  убывает, следовательно, по направлению  $z$  функционал убывает по крайней мере до точки  $u^1 = u^0 + \varepsilon_1 z$ .

Пусть производная  $d\Phi/dz$  в точке  $u^0$  существует для каждого направления  $z$  и имеется направление  $z^0$ , по которому эта производная наименьшая. Это направление назовем направлением антиградиента функционала  $\Phi$  в точке  $u^0$ . В вариационном методе, называемом методом наискорейшего спуска или градиентным методом [87, 91], для определения минимума функционала используется процесс последовательных приближений, при котором переход к следующему приближению осуществляется по направлению наискорейшего убывания функционала. Существуют методы типа (10.7.5)

$$u^{k+1} = \{u^k + B(\alpha) r^k : \min_{\alpha} \Phi(u^k + B(\alpha) r^k)\},$$

в которых оператор  $B(\alpha)$  для некоторых значений  $\alpha$  является близким к  $A^{-1}$  оператором.

В качестве методов третьего и четвертого типов можно предложить комбинированный способ итераций типа (10.4.3) с вариационным методом (10.7.8) или (10.7.9): пусть мы знаем хороший итерационный метод типа (10.4.3) с оператором  $H = B(\alpha)$ ; тогда положим

$$u^{k+1/2} = u^k - B(\alpha)(Au^k - f).$$

Теперь если известно, что при  $r^k \neq 0$  имеет место неравенство  $\Phi(u^{k+1/2}) < \Phi(u^k)$ , а  $\Phi(u)$  определяет некоторую норму в  $X$ , то сходимость итерационных методов типа (10.7.8) и (10.7.9) в этой норме очевидна, и можно сосредоточить свое внимание на вопросах выбора подпространств  $H_k$ , параметров  $\alpha_k$ , на оценках скорости сходимости. Примером методов упомянутого типа являются градиентные методы с неполной релаксацией, методы групповой релаксации [233] и др.

## § 10.8. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Наиболее существенной разработке подверглись вариационные методы с квадратичным функционалом, заданным на элементах гильбертова пространства.

Пусть  $H$  — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ ;  $M(x, y)$  ( $x, y \in H$ ) — билинейный функционал, область определения  $D(M)$  которого есть линейное множество, плот-



ное в  $H$ , и  $M(x, x) > 0$  при  $x \neq 0$ . Пусть, кроме того,  $l(x)$  является линейным функционалом, таким, что  $D(l) \equiv D(M)$ . Рассмотрим квадратичный функционал

$$G_M(x) = M(x, x) - 2l(x) + c, \quad (10.8.1)$$

где  $c$  — константа.

Известно [180], что билинейный функционал  $M(x, y)$  на  $D(M)$  представим в виде  $M(x, y) = (Mx, y)$ , где  $M$  — симметричный оператор и  $M > 0$ . На  $D(M)$  введем новое скалярное произведение  $[x, y]_M = (Mx, y)$  и норму  $[x]_M = [x, x]_M^{1/2}$ .

Замыкая  $D(M)$  в норме  $[ ]_M$ , получаем новое гильбертово пространство, которое обозначим  $H_M$ . Пусть известно, что функционал  $l(x)$  ограничен в норме  $[ ]_M$ ; расширим его по непрерывности на все  $H_M$ . Тогда [180]: а)  $G_M(x)$  может быть расширен на все  $H_M$ ; б) существует единственный элемент  $u \in H_M$ , такой, что функционал  $l(x)$  представим в виде  $l(x) = [x, u]_M$ , а функционал  $G_M(x)$  — в виде

$$G_M(x) = [x - u]_M^2 - [u]_M^2 + c. \quad (10.8.2)$$

Из этой формулы видно, что  $G_M(x)$  достигает минимума при  $x = u$ , который равен  $c - [u]_M^2$ . Квадратичный функционал

$$\Omega_M(x) = [\eta]_M^2 = (M\eta, \eta), \quad (10.8.3)$$

где  $\eta = u - x$ , назовем функционалом ошибок. Минимум его, равный нулю, достигается при  $x = u$ .

Сделаем теперь следующее предположение: пусть элемент  $u$ , реализующий минимум функционала (10.8.1), является решением (может быть, обобщенным) уравнения (10.2.16).

В качестве функционалов  $G_M(x)$ , если наложить соответствующие ограничения на оператор  $A$ , можно взять функционалы вида

$$G_A(x) = (Ax, x) - 2(x, f),$$

функционал метода наименьших квадратов

$$G_{A^*A}(x) = (Ax - f, Ax - f),$$

функционалы метода ортогональных проекций и другие функционалы типа

$$G_{A^*BA}(x) = (B(Ax - f), Ax - f). \quad (10.8.4)$$

Вычислим значение антиградиента от  $G_M(x)$  в пространствах  $H_M$  и  $H = H_1$  (при  $M = I$ ). Пусть  $w = x + \alpha z$ . Тогда, пользуясь формулой (10.8.2) и  $x - u$  обозначая  $t$ , получаем

$$G_M(w) = \alpha^2 [z]_M^2 + 2\alpha [z, t]_M + [t]_M^2 - [u]_M^2 + c.$$

Согласно (10.7.13) в пространстве  $H_M$  имеем

$$\frac{\partial G_M}{\partial z} = [z]_M^{-1} \frac{\partial G_M}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 2[z, t]_M [z]_M^{-1}.$$

Это значит, что направление антиградиента задается элементом

$$z_0 = u - x. \quad (10.8.5)$$

Таким образом, в  $H_M$  антиградиент в любой точке  $u^0$  направлен прямо на решение  $u$ . Если бы мы знали  $z_0$ , то за один шаг решили бы задачу (10.2.16), полагая  $u^1 = u^0 + z_0$ . Рельеф функционала  $G_M(x)$  в пространстве  $H_M$  предельно прост. Но вся беда в том, что мы, как правило, не можем конструктивно вычислять скалярные произведения  $[x, y]_M$ . Если бы мы могли это делать всегда, тогда и решить уравнение (10.2.16) было бы нетрудно.

Вычислим значение антиградиента  $G_M(x)$  в  $H = H_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_M}{\partial z} &= \frac{1}{(z, z)^{1/2}} \frac{\partial G_M}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = 2 [z, t]_M (z, z)^{-1/2} = \\ &= 2 (z, M(x-u)) (z, z)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (10.8.6)$$

т. е.

$$z_0 = M(u - x). \quad (10.8.7)$$

В этом случае антиградиент, вообще говоря, «направлен» не на  $u$ , и, минимизируя функционал по этому направлению, мы проскакиваем мимо  $u$ .

В формулы (10.8.5), (10.8.7) входит неизвестное значение  $u$ . Чтобы их можно было использовать при вычислениях, требуется наложить определенные дополнительные ограничения на вид оператора  $M$ . Если  $u$  является решением уравнения (10.2.16), т. е.  $u = A^{-1}f$ , то

$$z_0 = MA^{-1}(f - Ax) = MA^{-1}r. \quad (10.8.8)$$

Следовательно, если  $M = BA$ , где оператор  $B$  выбран таким, чтобы оператор  $M$  был самосопряженным и положительно определенным, то из (10.8.8) получим, что при  $x = u^k$

$$z_0 = Br^k \quad (10.8.9)$$

является известной величиной.

Теперь вычислим то значение  $\alpha_0$ , при котором  $\Omega_M(x + \alpha z_0)$  достигает минимума по направлению  $z_0$ , заданному формулой (10.8.7). Поскольку

$$\Omega_M(x + \alpha z_0) = \Omega_M(x) - 2\alpha(z_0, z_0) + \alpha^2 [z_0, z_0]_M, \quad (10.8.10)$$

дифференцируя (10.8.10) по  $\alpha$ , находим

$$\alpha_0 = (z_0, z_0) / [z_0, z_0]_M = [MA^{-1}r]_M^2 / [MA^{-1}r]_M^2,$$

и, следовательно, элемент  $x_1 = x + \alpha_0 z_0$  минимизирует функционал  $\Omega_M$  на множестве элементов вида  $\{x + \alpha z_0\}$ .

Мы выяснили, что методы типа (10.7.5), в которых  $H_k$  задается одномерными пространствами, можно описать следующей общей схемой. Имеется начальное приближение  $u^0$  и некоторая последовательность  $z^k, k = 0, 1, \dots$ , которая или априори задана, или каждый член ее определяется после вычисления  $u^k$ , например, по формуле (10.8.9). Тогда полагаем

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k z^k, \quad (10.8.11)$$

где скаляр  $\alpha_k$  выбираем таким, чтобы  $u^{k+1}$  был ортогонален к  $z^k$  в некотором скалярном произведении  $[ \ , \ ]_M$  (тогда  $\alpha_k = - [z^k, u^k]_M [z^k, z^k]_M^{-1}$ ).

В этих методах отклонение  $e^k = u - u^k$  от точного решения  $u$  проектируется  $[\cdot, \cdot]_M$ -ортогонально на вектор  $z^k$ , и эта проекция прибавляется к  $u^k$ . Следовательно, новое отклонение  $e^{k+1}$  будет  $[\cdot, \cdot]_M$ -ортогонально к  $z^k$ .

Переходя к разбору метода типа (10.7.7), когда за  $H_k$  берется одномерное пространство, образованное элементами вида  $\alpha z_0$ , видим, что, приравнявая нулю частные производные от  $G_M(au^k + \alpha z_0)$  по  $a$  и  $\alpha$ , получаем систему двух линейных уравнений для определения  $a$  и  $\alpha$ . Находя  $a_0, \alpha_0$  (решение этой системы), берем за новое приближение элемент  $a_0 u^k + \alpha_0 z_0$ .

## § 10.9. ПОСТРОЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАЦИЙ $P$ В $KP$ -МЕТОДЕ

Построим уравнения для поправки (10.6.8), ускоряющие сходимость итераций для решения уравнения (10.6.1). В отношении операторов уравнения будем считать, что для них выполняются предположения § 10.8 в случае, когда  $X = H$  — вещественное гильбертово пространство. Дополнительно потребуем, чтобы

$$(Sx, x) \geq 0 \text{ при } x \in H; \quad (10.9.1)$$

$$(Lx, x) \geq m(x, x); (Lx, y) = (x, Ly) \text{ при } x, y \in D(L); \quad (10.9.2)$$

$$d_1(Lx, x) \leq ((L - \lambda S)x, x) \leq d_2(Lx, x) \text{ при } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0,$$

где  $m, \lambda_0, d_1$  — некоторые положительные постоянные. Пусть  $H^0$  — гильбертово пространство со скалярным произведением  $[x, y] = (Lx, y)$ , состоящее из элементов  $H$ , являющихся замыканием в норме  $[x] = [x, x]^{1/2}$  множества  $D(L) \subseteq H$ . Пусть  $L^{-1}S$  является самосопряженным положительным оператором из  $H^0$  в  $H^0$  и  $Y = H^0$ . Пусть

$$G_M(x) = [M\eta, \eta] - [Mu, u] + c; \quad \Omega_M(x) = [M\eta, \eta],$$

где  $\eta = u - x$  и  $u$  — решение задачи (10.6.1), а  $G_M, \Omega_M$  — квадратичные функционалы (см. § 10.8), минимум которых достигается на элементе  $u$ . Сходимость метода будем рассматривать в пространстве  $H_M$ . Достаточно описать переход в  $KP$ -методе от  $u^0$  к  $u^1$ . Здесь и далее для всех  $x, y \in H_M$  используются обозначения  $[x, y]_M = [Mx, y]$  и  $[x]_M^2 = [x, x]_M$ .

Пусть операция  $K_\gamma$  задается формулой

$$u^{1/2} = (1 - \gamma)u^0 + \gamma L^{-1}(\lambda S u^0 + f), \quad (10.9.3)$$

где  $\gamma$  — числовой параметр, и пусть далее (только в этом параграфе)

$$r^k = L^{-1}f - B u^k, \quad (10.9.4)$$

где  $B = I - A_1$ ;  $A_1 = \lambda L^{-1}S$ . Тогда  $u^{1/2} = u^0 + \gamma r^0$ .

Предположим, что существует такое  $\delta > 0$ , что итерации типа (10.9.3) сходятся в  $H_M$  для  $\gamma \in (0, \delta)$ , и существует последовательность величин  $\theta_k = \exp(-p_k)$ , такая, что  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \infty$  и

$$\Omega_M(u^{k+1/2}) \leq \theta_k^2 \Omega_M(u^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.9.5)$$

Для функционала ошибок  $\Omega_B(x)$  это справедливо. В самом деле, пусть  $\kappa = q\kappa$ , где величина  $\kappa$  определена формулой

$$\kappa = [r^0, r^0] / [Br^0, r^0] = 1 + \lambda (Sr^0, r^0) / ([r^0]^2 - \lambda (Sr^0, r^0)).$$

Учитывая свойства операторов  $L$  и  $S$ , определенные соотношениями (10.9.2), получаем, что  $\kappa \geq 1$ , а тогда для  $\Omega_B(u^{1/2})$  в процессе (10.9.3) имеет место равенство

$$\Omega_B(u^{1/2}) = \Omega_B(u^0) - q(2 - q)\kappa [r^0]^2. \quad (10.9.6)$$

Следовательно, при  $0 < q < 2$ ,  $[r^0] > 0$  выполняется неравенство (10.9.5). Для сокращения изложения воспользуемся в качестве иллюстрации только функционалами  $G_B(x)$  и  $\Omega_B(x)$ .

Пусть  $H'_M$  — подпространство  $H_M$ ;  $\Pi_1$  — оператор проектирования на  $H'_M$ ,  $\Pi_2 = I - \Pi_1$  и  $A_\gamma = (1 - \gamma)I + \gamma A_1$ ,  $\gamma \in (0, \delta)$ . Если определить в (10.6.5) элемент  $w^{1/2} \in H'_M$  по формуле

$$w^{1/2} = \{w : \min_{w \in H'_M} G_M(u^{1/2} + w)\}, \quad (10.9.7)$$

то получим сходящийся  $KP$ , определяемый (10.9.3), (10.6.5) и (10.9.7), ибо

$$[u^{k+1} - u]_M \leq [u^{k+1/2} - u]_M \leq \theta_k [u^k - u]_M. \quad (10.9.8)$$

Так как

$$\Omega_M(u^{1/2} + w) = \Omega_M(u^{1/2}) + \Phi_0(w), \quad (10.9.9)$$

где

$$\Phi_0(w) = [Mw, w] + 2[M(u^{1/2} - u), w],$$

то

$$w^{1/2} = \left\{ w : \min_{w \in H'_M} \Phi(w) = \min_{v \in H'_M} \Phi_0(\Pi_1 v) \right\}.$$

Кроме того,  $\Phi_0(\Pi_1 v) = [\Pi_1 v, v]_M + 2[\Pi_1(u^{1/2} - u), v]_M$ , и поэтому

$$w^{1/2} = \Pi_1 v = -\Pi_1(u^{1/2} - u), \quad (10.9.10)$$

т. е.  $w^{1/2}$  является  $[\cdot]_M$ -проекцией на  $H'_M$  ошибки  $\varepsilon^{1/2}$ . В формулу (10.9.10) входит  $u$ , поэтому она полезна лишь для доказательства сходимости  $KP$  и для выяснения характера сходимости.

Пусть  $\varphi_i, \lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) — ортонормированная в  $(S, \cdot)$  система собственных элементов и характеристических чисел уравнения

$$L\varphi = \tilde{\lambda}S\varphi, \quad (10.9.11)$$

причем

$$1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \text{ и } \lambda < \lambda_1,$$

тогда  $t_i = \lambda_i S L^{-1} t_i$ , где  $t_i = S\varphi_i$ .

Пусть  $v_i = \Pi_1 \varphi_i$  и  $w_i = S\Pi_1 \varphi_i$ . Разберем два случая: а) система  $\{\varphi_i\}$  полна в  $H^0$ ; б) система  $\{t_i\}$  полна в области значений оператора  $S$ .

а. Пусть  $L^{-1}f = \sum_i f_i \varphi_i$ ,  $u^0 \neq \sum a_i \varphi_i$  и  $\varepsilon^0 = \sum b_i \varphi_i$ .

Тогда точное решение  $u$  уравнения (10.6.1) выражается формулой

$$u = \sum_i (\lambda_i - \lambda)^{-1} \lambda_i f_i \varphi_i,$$

а  $u^{1/2} = \sum_i ((1 - \gamma + \gamma \lambda \lambda_i^{-1}) a_i + \gamma f_i) \varphi_i$ ;  $\varepsilon^{1/2} = \sum_i b_i (1 - \gamma + \gamma \lambda \lambda_i^{-1}) \varphi_i$ .

Из (10.9.10) следует, что

$$u^1 = u^{1/2} + \omega^{1/2} = \sum_i (\lambda_i - \lambda)^{-1} \lambda_i f_i v_i + \\ + \sum_i ((1 - \gamma + \gamma \lambda \lambda_i^{-1}) a_i + \gamma f_i) (\varphi_i - v_i);$$

$$\varepsilon^1 = \varepsilon^{1/2} - \Pi_1 \varepsilon^{1/2} = \Pi_2 \varepsilon^{1/2} = \sum_i b_i (1 - \gamma + \gamma \lambda \lambda_i^{-1}) (\varphi_i - v_i). \quad (10.9.12)$$

А из (10.9.12) вытекает

$$[\varepsilon^1]_M^2 = [\Pi_2 \varepsilon^{1/2}]_M^2 = [\varepsilon^{1/2}]_M^2 - [\Pi_1 \varepsilon^{1/2}]_M^2 = [\Pi_2 A_\gamma \varepsilon^0]_M^2, \quad (10.9.13) \\ \text{т. е. } [\varepsilon^1]_M^2 \leq [\varepsilon^{1/2}]_M^2 < \theta_0^2 [\varepsilon^0]_M^2.$$

Соотношение (10.9.13) показывает, что при удачном выборе  $H_M$  сходимость  $KP_1$  не замедляется при  $\lambda \rightarrow \lambda_1 - 0$ .

Пусть  $H'_M = H'_{Mn}$ , где  $n = \dim H'_{Mn}$  — размерность подпространства  $H'_{Mn}$  ( $H'_{Mn}$  могут быть и пространствами функций, получаемых продолжениями сеточных функций). Пусть начальное приближение  $u^0$  определено формулой

$$u^0 = \{ \omega : \min_{\omega \in H'_{Mn}} G_M(\omega) \}.$$

Тогда  $\varepsilon^0 = \Pi_2 u$ . Пусть известно, что  $\varepsilon^k \in W$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , где  $W$  — некоторое множество в  $H_M$ . Рассмотрим следующие множества элементов:

$$W_1 = \Pi_2 W; \quad W_2 = \{ x : x = y/[y]_M, y \in W_1 \}; \quad \overline{W} = \Pi_2 A_\gamma W_2.$$

Видим, что множество  $W_1$  есть проекция множества  $W$  на ортогональное к  $H'_{Mn}$  пространство;  $W_2$  — центральная проекция на единичную сферу в  $H_M$  множества  $W_1$ , а  $\overline{W}$  — проекция на подпространство, ортогональное к  $H'_{Mn}$ , образа множества  $W_2$ , получаемого применением к каждому элементу  $W_2$  оператора сжатия  $A_\gamma$ . Пусть  $E_n(\overline{W}) = \sup_{x \in \overline{W}} E_n(x) < 1$ , где  $E_n(x)$  — наилучшее в метрике  $[\ ]_M$  приближение элемента  $x$  элементами из  $H'_{Mn}$ . Тогда из (10.9.12), (10.9.13) получаем, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^k &= (\Pi_2 A_\gamma \Pi_2)^k \Pi_2 \varepsilon^0; \\ [\varepsilon^k]_M &\leq (E_n(\overline{W}))^k [\varepsilon^0]_M \leq \|\Pi_2 A_\gamma \Pi_2\|^k [\varepsilon^0]_M. \end{aligned} \right\} \quad (10.9.14)$$

Для уменьшения  $E_n(\overline{W})$  можно применить метод «регуляризации» итерационного процесса [99], улучшающий конструктивные характеристики множества  $\overline{W}$ .

Если предполагать, что операции  $K$  и  $P_1$  реализуются прямыми (неитерационными) алгоритмами, то асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\varepsilon > 0$  — точность решения задачи, имеем

$$\Pi(KP_1) \leq \Pi_0 = (\Pi(K) + \Pi(P_1)) (1 + \eta/\ln E_n(\overline{W})), \quad (10.9.15)$$

где  $\eta = \ln \varepsilon$ . Пусть  $\overline{W}$  — компакт, тогда  $E_n(\overline{W}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Обычно и  $\Pi(P_1) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, если в излагаемом методе величины  $\varepsilon$  и  $n$  связать такой зависимостью, чтобы  $\Pi_0(n, \varepsilon)$  достигала при этом минимума хотя бы асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то получим одну из разумных стратегий решения задачи в выборе  $n = n(\varepsilon)$ . Рассмотрим одну из типичных ситуаций при решении задач переноса. Пусть асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  справедливы следующие предположения.

1.  $\Pi(P_1) \sim b(\varepsilon) \varphi(n)$ , где функция  $x = \varphi(n) > 0$  и монотонно стремится к  $+\infty$ .
2. Функция  $a = a(\varepsilon) = b(\varepsilon)/\Pi(K) > 0$  монотонно стремится к 0.
3.  $\overline{W}$  — компакт.

Пусть  $\kappa(x) = |\ln E_{[\varphi^{-1}(x)]}(\overline{W})|^{-1}$ , где  $n = \varphi^{-1}(x)$  — обратная к  $\varphi$  функция. Ясно, что  $\kappa(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Тогда  $\Pi_0 = \Pi(K) y(x, \varepsilon)$ , где при  $0 < \varepsilon < 1$

$$y(x, \varepsilon) = [1 + a(\varepsilon)x] [1 - \kappa(x) \ln \varepsilon]. \quad (10.9.16)$$

Предполагая функцию  $\kappa(x)$  достаточно гладкой по  $x$  и считая, что функция  $y(x, \varepsilon)$  как функция от  $x$  имеет единственный минимум в точке  $x_d(\varepsilon)$  при достаточно малых  $\varepsilon$ , получаем, дифференцируя (10.9.16) по  $x$ , уравнение для  $x_d(\varepsilon)$ :

$$\frac{a(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} [1 - \kappa(x) \ln \varepsilon] - [1 + a(\varepsilon)x] \kappa'(x) = 0. \quad (10.9.17)$$

Для определенного класса компактов удается в явном виде найти асимптотическое значение  $x_d(\varepsilon)$  [127].

б. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} SL^{-1}f &= \sum_i f_i t_i; & Su^0 &= \sum_i a_i t_i; & Se^0 &= \sum_i b_i t_i; \\ Su &= \sum_i \lambda_i (\lambda_i - \lambda)^{-1} f_i t_i; \\ Su^{1/2} &= \sum_i [(1 - \gamma + \gamma \lambda \lambda_i^{-1}) a_i + \gamma f_i] t_i; \\ Se^{1/2} &= \sum_i (1 - \gamma + \gamma \lambda \lambda_i^{-1}) b_i t_i; \\ Se^1 &= \Pi \Pi_2 e^{1/2} = \sum_i (1 - \gamma + \gamma \lambda \lambda_i^{-1}) b_i (t_i - \omega_i). \end{aligned} \right\} \quad (10.9.18)$$

Вводя новую метрику в пространстве элементов вида  $Sx$ , можно получить для нормы  $Se^1$  оценки типа (10.9.13), (10.9.14).

Для получения явного вида уравнения для  $w^{1/2}$  только через известные величины надо найти первую вариацию функционала  $G_M(u^{1/2} +$

+  $\Pi_1 v$ ) и получить уравнение Эйлера для  $\omega^{1/2}$ , в виде

$$C_M \omega^{1/2} = \psi, \quad (10.9.19)$$

где  $\psi$  — известный элемент, а  $C_M$  — линейный оператор, определенный на  $H'_{Mn}$ . Получим уравнение (10.9.19) для  $M = B$ . Учитывая, что  $L^{-1}f = Bu^0 + \gamma^{-1}(u^{1/2} - u^0)$ , получаем

$$G_B(u^{1/2} + \omega) = C_1(u^{1/2}) + G_2(\omega),$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_1(u^{1/2}) &= [u^{1/2}, Bu^{1/2}] - 2[u^{1/2}, \gamma^{-1}(u^{1/2} - u^0) + Bu^0]; \\ G_2(\omega) &= [v, \Pi_1 B \Pi_1 v] + 2[v, \Pi_1 (B - \gamma^{-1} I)(u^{1/2} - u^0)], \end{aligned} \right\} \quad (10.9.20)$$

а  $\omega = \Pi_1 v$ .

Следовательно, для  $\omega^{1/2} \in H'_B$  получаем уравнение (10.9.19):

$$\Pi_1 B \omega^{1/2} = \Pi_1 (\gamma^{-1} I - B)(u^{1/2} - u^0), \quad (10.9.21)$$

заданное в  $H'_B$ .

Пусть  $\bar{B} = \Pi_1 B$ , а  $\tilde{B}^{-1}$  — оператор, обратный в  $H'_B$  к оператору  $\bar{B}$ . Тогда  $\omega^{1/2} \in H'_B$  находится по формуле

$$\begin{aligned} \omega^{1/2} &= \tilde{B}^{-1}(\gamma^{-1} \Pi_1 - \bar{B})(u^{1/2} - u^0) = (\gamma^{-1} \tilde{B}^{-1} - I) \Pi_1 (u^{1/2} - u^0) - \\ &\quad - \tilde{B}^{-1} \bar{B} \Pi_2 (u^{1/2} - u^0). \end{aligned} \quad (10.9.22)$$

Операторы  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $\tau_1$  в (10.6.5) в этом случае легко определяются через операторы уравнения (10.9.22).

Замечая, что ошибка  $\varepsilon^{1/2} = u - u^{1/2}$  удовлетворяет уравнению

$$B\varepsilon^{1/2} = (\gamma^{-1} I - B)(u^{1/2} - u^0), \quad (10.9.23)$$

видим, что  $\omega^{1/2}$  есть приближенное решение уравнения (10.6.8), полученное по обобщенному методу Галеркина для случая, когда замкнутая линейная оболочка базисных функций этого метода совпадает с  $H'_B$ .

Очевидно, что условие (10.9.5), являющееся достаточным для сходимости в  $H_M$  построенного  $KP_1$ , можно ослабить, требуя выполнения неравенства  $\Omega_M(u^{k+1}) < \theta_k^2 \Omega_M(u^k)$ .

Рассмотрим теперь задачу о выборе  $\gamma = \gamma_0$  согласно формуле

$$\gamma_0 = \left\{ \begin{array}{l} \gamma: \min G_M(u^{1/2} + \omega) \\ \gamma. \omega \in H'_M \end{array} \right\}.$$

Очевидно, что при таком выборе  $\gamma$  получим максимальное уменьшение функционала  $\Omega_M(u^1)$ .

Пусть  $M = B$ . Поскольку

$$\frac{dG_B(u^1)}{d\gamma} = -2 \left[ r^1, \frac{du^1}{d\gamma} \right], \quad \text{а } \frac{du^1}{d\gamma} = z^0 = (I - \tilde{B}^{-1} \bar{B}) \Pi_2 r^0,$$

приравнявая  $dG_B(u^1)/d\gamma$  нулю, получаем

$$\gamma_0 = - [Bz^0, z^0]^{-1} [z^0, (I + \tilde{B} \tilde{B}^{-1} \Pi_1) r^0].$$

Пусть далее  $\gamma = 1$ ,  $M = B$  и метод простой итерации для (10.6.1) сходится. Тогда, учитывая (10.9.3) и (10.9.22), получаем

$$u^1 = \Pi_2 A_1 u^0 + (\Pi_2 + \tilde{B}^{-1} \Pi_1) L^{-1} f. \quad (10.9.24)$$

Вспоминая, что точное решение  $u$  является решением уравнения

$$u = \Pi_2 A_1 u + (\Pi_2 + \tilde{B}^{-1} \Pi_1) L^{-1} f, \quad (10.9.25)$$

и вычитая (10.9.24) из (10.9.25), приходим к уравнению для  $\varepsilon^1$ :

$$\varepsilon^1 = \Pi_2 A_1 \varepsilon^1 + \Pi_2 A_1 (u^1 - u^0). \quad (10.9.26)$$

Уравнение (10.9.26) является уравнением типа (10.6.1).

## § 10.10. ДВА СПОСОБА ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАЦИИ $P_2$ В $KP_1 P_2$ -МЕТОДЕ

Для определенности в качестве операций  $K$  и  $P_1$  возьмем операции, построенные в § 10.9 при  $\gamma = 1$  и  $M = B$ . Они при соответствующей переиндексации имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Lu^{1/3} &= \lambda Su^0 + f; \quad \Pi_1 B \omega^{1/3} = \Pi_1 A_1 (u^{1/3} - u^0); \\ u^{2/3} &= u^{1/3} + \omega^{1/3}. \end{aligned} \right\} \quad (10.10.1)$$

Тогда согласно (10.9.26)

$$\varepsilon^{2/3} = \Pi_2 A_1 \varepsilon^{2/3} + \Pi_2 A_1 (u^{2/3} - u^0). \quad (10.10.2)$$

1. Построим один из классов операций  $P_2$ , релаксирующих некоторую систему квадратичных функционалов. Пусть  $H''$  — подпространство в  $H_B$ , не совпадающее с  $H'_B$ . Для нахождения приближенного решения (10.10.2) применим тот же метод Галеркина или минимизации на  $H''$  квадратичного функционала  $G^*(w)$ , связанного с задачей (10.10.2). За  $w^{2/3}$  возьмем элемент из  $H''$ , определяемый формулой

$$w^{2/3} = \left\{ w: \min_{w \in H''} G^*(w) \right\}, \quad (10.10.3)$$

и положим  $u^1 = u^{2/3} + w^{2/3}$ .

Задача (10.10.3) сведется к решению уравнения типа (10.9.21) для  $w^{k+2/3}$ . Выбор пространств  $H'_B$ ,  $H''$  может зависеть от номера приближения.

2. Можно по-другому построить операцию  $P_2$ . Пусть операция  $P_1$  выполнена; тогда для  $u^{k+2/3}$  будет справедливо соотношение

$$u^{k+2/3} = T_1 u^k + S_1 f,$$

где  $T_1$  — оператор перехода операции  $KP_1$ , определяемый формулой (10.6.6). Пусть известно, что оператор  $T_1$  является самосопряженным оператором, а  $M_1$  и  $M_2 > 0$  являются верхней и нижней границей спектра оператора  $I - T_1$ . Тогда положим

$$w^{k+2/3} = \alpha_k (u^{k+2/3} - u^k); \quad u^{k+1} = u^{k+2/3} + w^{k+2/3}. \quad (10.10.4)$$



Здесь  $\alpha_n$  — меняющийся с периодом  $N$  числовой параметр. Легко видеть, что после  $N$  итераций

$$\varepsilon^{k+N} = \prod_{j=1}^N (I - (1 + \alpha_j)(I - T_1)) \varepsilon^k.$$

Если положить  $\alpha_j = \delta_j^{-1} - 1$ , где  $\delta_j = (1/2)(M_1 + M_2 - (M_1 - M_2)\beta_j)$ ,  $\beta_j = \cos(2j - 1)\pi/(2N)$ , то

$$\|\varepsilon^{k+N}\| \leq |T_N[(M_1 + M_2)/(M_1 - M_2)]|^{-1} \|\varepsilon^k\|.$$

Здесь  $T_N(t)$  — многочлен Чебышева  $N$ -й степени (см. § 10.18).

Очевидны модификации  $KP_1P_2$ -метода, заключающиеся или в другом выборе скалярного произведения  $[, ]_M$ , или в преобразовании уравнения (10.6.1). Например, в задачах переноса нейтронов с вырожденной индикатрисой рассеяния задачу (10.6.1) целесообразно (см. § 5.1) преобразовать к виду

$$Su = \lambda SL^{-1} Su + SL^{-1}f \quad (10.10.5)$$

и в процессе итераций находить не  $u^k$ , а элемент  $Su^k$ , по которому  $u^k$  легко восстанавливается. В этом случае гильбертовы пространства и квадратичные функционалы могут быть построены уже для уравнения (10.10.5); функционалы будут определены на более узком пространстве функций и требуют для вычисления их меньшего числа арифметических действий. Целесообразно для построения квадратичных функционалов использовать следующее свойство приближений, полученных простой итерацией. Пусть  $u^\alpha$  ( $\alpha = k + 1/2$  или  $k + 2/3$ ) — результат операции  $K$  при  $\gamma = 1$ , тогда

$$\xi^\alpha = (L - \lambda S) u^\alpha - f = -\lambda S (u^\alpha - u^k),$$

и, следовательно,  $\xi^\alpha$  принадлежит пространству функций  $S\omega$ , где  $\omega \in H$ .

## § 10.11. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Отойдем от операторного вида изучаемых в настоящей главе итерационных методов, хотя большинство приводимых здесь утверждений легко распространяется на более общий случай. Рассмотрим один из эффективных методов решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Au = f \quad (10.11.1)$$

с матрицей  $A$  порядка  $n$  и вектором  $f \in E_n$  — пространству  $n$ -мерных вещественных векторов с обычным скалярным произведением  $(,)$  и нормой  $\| \cdot \| = (,)^{1/2}$ , называемый обобщенным методом сопряженных градиентов.

Предположим, что матрица  $A$  системы (10.11.1) симметрична и положительно определена. Тогда метод сопряженных градиентов, предложенный для решения таких систем в работе [285] (см. также [164]), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u^0 &\in E_n, \\ p_k &= \begin{cases} \xi^0, & k=1; \\ \xi^{k-1} - \alpha_k p_{k-1}, & k > 1, \end{cases} \quad \alpha_k = \frac{(\xi^{k-1}, p_{k-1})_A}{\|p_{k-1}\|_A^2}; \\ u^k &= u^{k-1} - \beta_k p_k; \quad \beta_k = (\xi^{k-1}, p_k) / \|p_k\|_A^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.11.2)$$

Здесь  $\xi^k = Au^k - f$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , а  $(\cdot, \cdot)_A$  обозначено скалярное произведение, порождаемое матрицей  $A$ , т. е.  $(\xi, \eta)_A = (A\xi, \eta)$  для всех  $\xi, \eta \in E_n$  (соответственно  $\| \cdot \|_A = (\cdot, \cdot)_A^{1/2}$ ).

Основные свойства метода (10.11.2), доказательство которых осуществляется по индукции, следующие:

$$\left. \begin{aligned} (p_i, p_j)_A &= \delta_{ij} \|p_i\|_A^2; \\ (\xi^i, p_j) &= 0 \text{ для всех } j \leq i; \\ (\xi^i, \xi^j) &= \delta_{ij} \|\xi^i\|_A^2, \\ i, j &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (10.11.3)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Из этих свойств сразу вытекает, что система векторов  $p_1, \dots, p_k$  образует  $A$ -ортогональный базис в подпространстве  $E_n$ , натянутом на систему векторов  $\xi^0, A\xi^0, \dots, A^{k-1}\xi^0$  и соответственно вектор  $\sum_{i=1}^k \beta_i p_i$  является  $A$ -ортогональной проекцией

вектора начальной ошибки  $\psi^0 = u^0 - A^{-1}f$  на это подпространство. Здесь  $\beta_k > 0$  для всех ненулевых векторов  $p_k$  и  $\beta_k = 0$  означает, что точное решение  $u^* = A^{-1}f$  системы (10.11.1) вычисляется по формуле

$$u = u^0 = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i p_i.$$

Из теории ортогональных многочленов следует (см., например, § 10.18), что для  $A$ -нормы вектора ошибки на  $k$ -й итерации будет справедлива оценка

$$\|\Psi_k\|_A \leq \|\psi^0\|_A / T_k(\delta), \quad (10.11.4)$$

где  $\psi^k = u^k - A^{-1}f$ ;  $T_k(x)$  — многочлен Чебышева порядка  $k$  и

$$\delta = (M + m) / (M - m), \quad (10.11.5)$$

а  $M$  и  $m$  — соответственно максимальное и минимальное собственные числа матрицы  $A$ . Заметим, что при фиксированном значении  $k \geq 1$  на классе всех матриц, собственные числа которых принадлежат отрезку  $[m, M]$ , и на множестве произвольных начальных приближений  $|\psi^0| \leq C$  оценка (10.11.4) неуплучшаема (см. § 10.18).

Часто на практике используются и другие, так называемые трехчленные формулы метода сопряженных градиентов. Выведем эти формулы, преобразовав предварительно выражения для коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  в (10.11.3). Так как

$$A p_{k-1} = (\xi^{k-2} - \xi^{k-1}) / \beta_k,$$

то

$$(\xi^{k-1}, p_{k-1})_A = (\xi^{k-1}, Ap_{k-1}) = \|\xi^{k-1}\|^2/\beta_{k-1};$$

$$(p_{k-1}, p_{k-1})_A = (p_{k-1}, \xi^{k-2} - \xi^{k-1})/\beta_{k-1} = \|\xi^{k-2}\|^2/\beta_{k-1}.$$

Отсюда имеем

$$\alpha_k = -\|\xi^{k-1}\|^2/\|\xi^{k-2}\|^2;$$

$$\beta_k = \frac{(\xi^{k-1}, p_k)}{\|p_k\|_A^2} = \frac{(\xi^{k-1}, \xi^{k-1} - \alpha_k p_{k-1})}{\|p_k\|_A^2} = \frac{\|\xi^{k-1}\|^2}{\|p_k\|_A^2}.$$

Теперь, подставляя выражения

$$p_k = (u^{k-1} - u^k)/\beta_k; \quad p_{k-1} = (u^{k-2} - u^{k-1})/\beta_{k-1}$$

в формулу

$$p_k = \xi^k - \alpha_k p_{k-1},$$

получаем

$$u^k = u^{k-1} - \beta [\xi^{k-1} - (\alpha_k/\beta_{k-1})(u^{k-2} - u^{k-1})]. \quad (10.11.6)$$

Введем обозначения

$$q_k = 1/\beta_k, \quad e_{k-1} = -\alpha_k/\beta_{k-1}. \quad (10.11.7)$$

Тогда после несложных преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} q_k &= \|p_k\|_A^2/\|\xi^{k-1}\|^2 = \|\xi^{k-1}\|_A^2/\|\xi^{k-1}\|^2 - e_{k-1}; \\ e_k &= -\alpha_{k+1}/\beta_k = -q_k \alpha_{k+1} = q_k \|\xi^k\|^2/\|\xi^{k-1}\|^2. \end{aligned} \right\} \quad (10.11.8)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\left. \begin{aligned} u_0 &\in E_n; \quad u^k = u^{k-1} - [ \xi^{k-1} - e_{k-1}(u^{k-1} - u^{k-2}) ] / q_k; \\ e_{k-1} &= \begin{cases} 0, & k=1; \\ q_{k-1} \|\xi^{k-1}\|^2 / \|\xi^{k-2}\|^2, & k>1; \end{cases} \\ q_k &= \|\xi^{k-1}\|_A^2 / \|\xi^{k-1}\|^2 - e_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.11.9)$$

Перейдем к рассмотрению обобщенного метода сопряженных градиентов в подпространстве, предложенного и развитого в работах [106, 108]. Пусть  $A$  и  $H$  — некоторые неособенные матрицы. Введем подпространства

$$U = (I - HA) E_n = \text{im} (I - HA); \quad U_A = AU = \text{im} (I - AH) \quad (10.11.10)$$

и предположим, что матрица  $D$  — самосопряженная и положительно определена в пространстве  $U_A$ , т. е.  $(D\psi, \varphi) = (\psi, D\varphi)$  для любых  $\psi, \varphi \in U_A$  и  $(D\psi, \psi) > 0$  для любого ненулевого  $\psi \in U_A$ . Далее предположим, что матрица  $HA$  является  $A^TDA$ -самосопряженным и  $A^TDA$ -положительно определенным оператором в пространстве  $U$ . Отсюда следует, что пространство  $U$  ( $U_A$ ) является линейной оболочкой некоторой  $A^TDA$ -ортогональной ( $D$ -ортогональной) системы собственных векторов матрицы  $HA$  (матрица  $AH$ ), соответствующих ее веществен-

ным собственным числам  $m = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_r = M$ , где  $r = \text{rg}(I - HA)$ .

При сделанных предположениях формулы обобщенного метода сопряженных градиентов применительно к решению системы (10.11.1) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= \varphi - H(A\varphi - f); \\ p_k &= \begin{cases} H\xi^0 & k=1; \\ H\xi^{k-1} - \alpha_k p_{k-1}, & k>1; \end{cases} \quad \alpha_k = \frac{(AH\xi^{k-1}, Ap_{k-1})_D}{\|Ap_{k-1}\|_D^2}; \\ u^k &= u^{k-1} - \beta_k p_k; \quad \beta_k = (\xi^{k-1}, Ap_k)_D / \|Ap_k\|_D^2, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.11.11)$$

где  $\varphi$  — некоторый произвольно выбранный элемент пространства  $E_n$ . Аналогично методу сопряженных градиентов (10.11.2) легко устанавливается, что

$$\left. \begin{aligned} (p_i p_j)_{A^T D A} &= (Ap_i, Ap_j)_D = \delta_{ij} \|Ap_i\|_D^2; \\ (\xi^i, Ap_j)_D &= 0 \quad \text{для всех } j \leq i; \\ (\xi^i, AH\xi^j)_D &= \delta_{ij} (\xi^i, AH\xi^i)_D, \\ i, j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.11.12)$$

Из этих свойств вытекает, что система векторов  $p_i$  ( $Ap_i$ ),  $i = \overline{1, k}$  образует  $A^T D A$ -ортогональный ( $D$ -ортогональный) базис в пространстве  $U$  (пространстве  $U_A$ ), натянутом на систему векторов  $H\xi^0, \dots, H(AH)^{k-1}\xi^0$  ( $AH\xi^0, \dots, (AH)^k \xi^0$ ). При этом  $\beta_k > 0$  для всех ненулевых векторов  $p_k$  и  $p_k = 0$  означает, что точное решение системы (10.11.1) вычисляется по формуле

$$u = u^0 - \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i p_i. \quad (10.11.13)$$

Аналог оценки (10.11.4) для обобщенного метода сопряженных градиентов (10.11.11) имеет вид

$$\|\xi^k\|_D \leq \|\xi^0\|_D / T_k(\delta), \quad (10.11.14)$$

где величина  $\delta$  определяется по формуле (10.11.5) с новыми значениями  $m$  и  $M$ .

Формулы (10.11.11), так же как и формулы (10.11.2), могут быть преобразованы к трехчленным:

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= \varphi - H(A\varphi - f); \\ u^k &= u^{k-1} - (1/q_k)[H\xi^{k-1} - e_{k-1}(u^{k-1} - u^{k-2})]; \\ e_{k-1} &= \begin{cases} 0, & k=1; \\ q_{k-1} = \frac{\|\xi^{k-1}\|_C^2}{\|\xi^{k-1}\|_C^2}, & k>1; \end{cases} \\ q_k &= \frac{\|AH\xi^{k-1}\|_D^2}{\|\xi^{k-1}\|_C^2} - e_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (10.11.15)$$

где  $C = DAH$  — самосопряженная и положительно определенная в пространстве  $U_A$  матрица.

Доказательство сформулированных выше утверждений везде использует тот факт, что в силу инвариантности пространства  $U$  ( $U_A$ ) относительно матрицы  $HA$  ( $AH$ ) все векторы  $\psi^k = u^k - u^*$  и  $p_k$  будут принадлежать пространству  $U$ , а векторы  $\xi^k$  и  $Ap_k$  — пространству  $U_A$ . Это обеспечивается специальным выбором начального приближения  $u^0$ , для которого  $\xi^0 = Au^0 - f = (I - AH)(A\varphi - f) \in U_A$ .

В заключение рассмотрим частный случай обобщенного метода сопряженных градиентов. Предполагая, что  $A$  и  $H$  — симметричные и положительно определенные матрицы, и выбирая  $D = A^{-1}$ , получаем

$$\alpha_k = (H\xi^{k-1}, p_{k-1})_A / \|p_{k-1}\|_A^2; \quad \beta_k = (\xi^{k-1}, p_{k-1}) / \|p_{k-1}\|_A^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.11.16)$$

## § 10.12. МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА

Начиная с работ Д. Писсмана, Дж. Дугласа, Х. Рэкфорда [271, 320] большое внимание было привлечено к итерационным методам (методам переменных направлений) решения задач математической физики, основанным на расщеплении сложных операторов на простейшие (см. также [272, 341]). В Советском Союзе это направление представлено исследованиями Н. Н. Яненко [247—250], Е. Г. Дьяконова [76—78], А. А. Самарского [202, 203], В. К. Саульева [209] и др. Эти работы привели к созданию ряда эффективных алгоритмов решения стационарных и нестационарных задач.

Пусть в уравнении (10.2.16) оператор  $A$  положительно определен и представим в виде

$$A = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}. \quad (10.12.1)$$

Пусть  $\bar{A}_{i_{\alpha}}$ , где  $\{i_{\alpha}\}$  — набор индексов  $(i_1, \dots, i_s)$ ,  $1 \leq i_j \leq n$ , являются операторами, каждый из которых близок по спектральным свойствам к оператору  $A_{i_{\alpha}}$ . образуем оператор

$$C = C(\tau_1, \dots, \tau_s) = (I + \tau_1 \bar{A}_{i_1})(I + \tau_2 \bar{A}_{i_2}) \dots (I + \tau_s \bar{A}_{i_s}), \quad (10.12.2)$$

где  $\tau_{i_{\alpha}}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, s$ ) — некоторые числовые параметры. Пусть множество допустимых операторов имеет вид  $\mathfrak{M} = \{C^{-1}(\tau_1, \dots, \tau_s)\}$ .

В методах расщепления сложился следующий конструктивный способ построения итерационных операторов:

$$\prod_{j=1}^s (I + \tau_{i_j} \bar{A}_{i_j})(u^{k+1} - u^k) = -\tau(Au^k - f), \quad (10.12.3)$$

где  $\tau$  — числовой параметр.

Уравнение типа (10.12.3) при  $\bar{A}_{i_j} = \bar{A}_j$  ( $s = n$ ) могло появиться как результат исключения вспомогательных функций в различных предложенных методах расщепления. Введенный класс операторов (10.12.2) родственен классу операторов, предложенному в работе



где  $\lambda_i = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_i^{(\alpha)}$ .

Уравнение (10.12.9) разрешим относительно неизвестной  $u_i^{k+1}$ . Тогда

$$u_i^{k+1} = \frac{\prod_{\alpha=1}^n (1 + \tau_{\alpha} \lambda_i^{(\alpha)}) - \tau \lambda_i}{\prod_{\alpha=1}^n (1 + \tau_{\alpha} \lambda_i^{(\alpha)})} u_i^k + \frac{\tau f_i}{\prod_{\alpha=1}^n (1 + \tau_{\alpha} \lambda_i^{(\alpha)})}. \quad (10.12.10)$$

Если спектр  $\{\lambda_i^{(\alpha)}\}$  положителен, то нетрудно сформулировать критерий сходимости итерационного метода (10.12.10). С этой целью рассмотрим знаменатель прогрессии

$$q_i = \left( \prod_{\alpha=1}^n (1 + \tau_{\alpha} \lambda_i^{(\alpha)}) - \tau \lambda_i \right) / \prod_{\alpha=1}^n (1 + \tau_{\alpha} \lambda_i^{(\alpha)}). \quad (10.12.11)$$

Нетрудно видеть, что сходимость будет иметь место при выполнении неравенства

$$\prod_{\alpha=1}^n (1 + \tau_{\alpha} \lambda_i^{(\alpha)}) > \tau \lambda_i / 2. \quad (10.12.12)$$

Очевидно, достаточным условием выполнения этого неравенства будет следующее:

$$2\tau_{\alpha} \geq \tau > 0, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (10.12.13)$$

Условие (10.12.13) позволяет осуществить в широкой области поиск оптимальных значений параметров  $\tau_{\alpha}$ ,  $\tau$ . Эта задача решается всякий раз самостоятельно исходя из конкретной структуры операторов задач.

Перейдем теперь к рассмотрению важного частного случая, когда

$$A = A_1 + A_2. \quad (10.12.14)$$

Этот случай в литературе рассмотрен с большой полнотой и общностью. Сначала исследуем частную схему, когда  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ,  $\bar{A}_{\alpha} = A_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Будем иметь

$$(I + \tau_1 A_1) (I + \tau_2 A_2) (u^{k+1} - u^k) / \tau + A u^k = 1. \quad (10.12.15)$$

Полезно отметить, что это уравнение с помощью тождественных преобразований переходит в следующее:

$$(I + \tau_1 A_1) (I + \tau_2 A_2) u^{k+1} = (I - \tau_2 A_1) (I - \tau_1 A_2) u^k + \tau f. \quad (10.12.16)$$

Возможны различные схемы реализации уравнения (10.12.16). Например,

$$\left. \begin{aligned} u^{k+1/4} &= (I - \tau_1 A_2) u^k; & u^{k+2/4} &= (I - \tau_2 A_1) u^{k+1/4} + \tau f; \\ (I + \tau_1 A_1) u^{k+3/4} &= u^{k+2/4}; & (I + \tau_2 A_2) u^{k+1} &= u^{k+3/4}. \end{aligned} \right\} \quad (10.12.17)$$

Анализ системы уравнений<sup>5</sup> показывает, что первые два уравнения оказываются явно разрешенными относительно вспомогательных неизвестных величин, а два последних уравнения являются уравнениями с операторами, реализация которых предполагается достаточно простой. Другая широко распространенная итерационная схема реализации, принятая в методе переменных направлений, следующая:

$$\left. \begin{aligned} (I + \tau_1 A_1) u^{k+1/2} &= (I - \tau_1 A_2) u^k + \tau_1 f; \\ (I + \tau_2 A_2) u^{k+1} &= (I - \tau_2 A_1) u^{k+1/2} + \tau_2 f. \end{aligned} \right\} \quad (10.12.18)$$

Представляя  $u^k$  в виде (10.12.7), приходим к системе уравнений вида (10.12.9), из которой получаем

$$u_i^{k+1} = q_i u_i^k + F_i, \quad (10.12.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_i &= (1 - \lambda_i^{(1)} \tau_2) (1 - \lambda_i^{(2)} \tau_1) / ((1 + \lambda_i^{(1)} \tau_1) (1 + \lambda_i^{(2)} \tau_2)); \\ F_i &= \tau_i f_i / ((1 + \lambda_i^{(1)} \tau_1) (1 + \lambda_i^{(2)} \tau_2)). \end{aligned} \right\} \quad (10.12.20)$$

Таким образом, для ошибок  $\varepsilon_i^k = u_i - u_i^k$  имеем

$$\varepsilon_i^k = q_i \varepsilon_i^{k-1}. \quad (10.12.21)$$

Выражение (10.12.21) показывает, что метод (10.12.16) сходится при

$$\sup |q_i| < 1. \quad (10.12.22)$$

Если  $\lambda_i^{(1)} > 0$ ,  $\lambda_i^{(2)} > 0$  и параметры  $\tau_i > 0$ , то условие (10.12.22) будет выполнено.

Уточним этот результат. Пусть параметры  $\tau_j$  ( $\tau_1 = \tau_2$ ) выбираются независимыми от  $k$ . Выберем их в методе (10.12.16) оптимальным образом, зная лишь только, что спектр каждого оператора  $A_j$  лежит в круге  $\Omega$  с центром в точке  $r_0 \exp(i\varphi_0)$  радиусом  $\rho < r_0$ . Для этого рассмотрим функцию комплексного переменного  $z$

$$\omega_j = (1 - \tau_j z) (1 + \tau_j z)^{-1}, \quad j = 1, 2. \quad (10.12.23)$$

Учитывая, что линия уровня с константой  $1 > c > 0$  для модуля функции  $\omega_j$  есть окружность радиусом  $2 |\tau_j|^{-1} c (1 - c^2)^{-1}$  с центром в точке  $(1 + c^2) (1 - c^2)^{-1} \tau_j^{-1}$ , заключаем, что  $\mu_j = \min_{z \in \Omega} \max |\omega_j|$  достигается при

$$\tau_j = \exp(-i\varphi_0) (r_0^2 - \rho^2)^{-1/2}; \quad \mu_j = \rho_j (r_0 + \sqrt{r_0^2 - \rho^2})^{-1}. \quad (10.12.24)$$

Тогда  $q_i \leq \mu^2$ . Если  $\varphi_0 = 0$ , то

$$\tau_j = (mM)^{-1/2}; \quad \mu_j = (M^{1/2} - m^{1/2}) (M^{1/2} + m^{1/2})^{-1}, \quad (10.12.25)$$

где  $M = r_0 + \rho$ ;  $m = r_0 - \rho$ .

Перейдем к рассмотрению проблемы оптимизации, когда параметры зависят от  $k$ . Пусть  $\tau_1 = \alpha_k^{-1}$ ,  $\tau_2 = \beta_k^{-1}$ , где  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  — меняющиеся с номером  $k$  параметры. Пусть  $0 < m_j \leq \lambda_i^{(j)} \leq M_j$ , где  $m_j$  и  $M_j$  — точные нижние и верхние границы спектров соответственно самосо-



ряженных операторов  $A_1, A_2$ . Тогда после  $N$  итераций для  $e^k = u - u^k$  имеем

$$\|e^N\| \leq Q_N \|e_0\|,$$

где

$$Q_N = \max_{\substack{m_1 \leq \lambda \leq M_1 \\ m_2 \leq \nu \leq M_2}} |F_N|; \quad F_N(\lambda, \nu, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N \frac{\lambda - \beta_i}{\lambda + \alpha_i} \frac{\nu - \alpha_i}{\nu + \beta_i}. \quad (10.12.26)$$

Параметры  $\alpha_k, \beta_k$  выберем так, чтобы  $F_N$  была функцией, наименее отклоняющейся от нуля в прямоугольнике  $D = \{m_1 \leq \lambda \leq M_1, m_2 \leq \nu \leq M_2\}$ . Решению этой задачи посвящены работы Е. И. Золотарева [84], Е. Вакспреса [342], Ю. В. Воробьева [47] и др.

Обозначим

$$\Psi_N(M_1, m_1, M_2, m_2, \alpha, \beta) = \max_{\substack{m_1 \leq \lambda \leq M_1 \\ m_2 \leq \nu \leq M_2}} |F_N(\lambda, \nu, \alpha, \beta)|; \quad (10.12.27)$$

$$E_N(M_1, m_1, M_2, m_2) = \inf_{\alpha, \beta} \Psi_N.$$

Для нахождения оптимального набора параметров  $\alpha, \beta$  требуется для заданного  $N$  найти среди функций вида (10.12.26) ту, для которой в области  $D$

$$\psi_N(M_1, m_1, M_2, m_2, \alpha, \beta) = E_N(M_1, m_1, M_2, m_2). \quad (10.12.28)$$

Эта задача решается в несколько этапов. Сначала найдем дробно-линейное преобразование, переводящее область  $D$  в квадрат и не меняющее вид функций (10.12.26). Его ищем в виде

$$\lambda = (q\mu + p)/(1 + s\mu), \quad \nu = (q\nu - p)/(1 - s\nu), \quad (10.12.29)$$

где параметры  $p, q, s$  выберем такими, чтобы: 1) область  $\{\eta \leq \mu, \gamma \leq 1\}$ , где  $\eta$  — подлежащее определению число, отображалась преобразованием (10.12.29) в область  $D$ ; 2) преобразование (10.12.29) не меняло тип каждого множителя в (10.12.26), т. е. чтобы

$$\frac{\lambda - \beta}{\lambda + \beta} \cdot \frac{\nu - \alpha}{\nu + \alpha} = \frac{\mu - \beta'}{\mu + \beta'} \cdot \frac{\gamma - \alpha'}{\gamma + \alpha'}.$$

При этих условиях получаем, что если

$$\theta = 2(M_1 - m_1)(M_2 - m_2)/[(M_1 + m_1)(M_2 + m_2)], \quad \text{то} \\ \eta = (1 + \theta + (\theta(2 + \theta))^{1/2})^{-1}; \quad (10.12.30)$$

$$s = (M_1 - M_2 + m_2 - m_1)/[M_1 + M_2 + (m_1 + m_2)\eta]^{-1}; \quad (10.12.31)$$

$$p = (M_2 - M_1 + (M_2 + M_1)s)/2, \quad q = (M_1 + M_2 + (M_2 - M_1)s)/2. \quad (10.12.32)$$

Пусть

$$\beta_i = (q\beta'_i + p)/(1 + s\beta'_i); \quad \alpha_i = (q\alpha'_i - p)/(1 - s\alpha'_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (10.12.33)$$

Тогда после замены переменных [(10.12.29), (10.12.33)] в  $F_N$  получим

$$F_N(\lambda, \nu, \alpha, \beta) = F_N(\mu, \gamma, \alpha', \beta')$$

и

$$\Psi_N(M_1, m_1, M_2, m_2, \alpha, \beta) = \Psi_N(1, \eta, 1, \eta, \alpha', \beta').$$

Можно показать, что  $\inf_{\alpha', \beta'} \Psi_N(1, \eta, 1, \eta, \alpha', \beta')$  достигается при  $\alpha'_i = \beta'_i$ . Следовательно, экстремальная функция вида (10.12.26) в новых переменных имеет вид  $f_N(\mu, \alpha') f_N(\gamma, \beta')$ , где

$$f_N(t, \sigma) = \prod_{i=1}^N \frac{t - \sigma_i}{t + \sigma_i}. \quad (10.12.34)$$

Следовательно,  $E_N(M_1, m_1, M_2, m_2) = \tilde{E}_N^2$ , где

$$\tilde{E}_N = \inf_{\sigma} \max_{\eta \leq t \leq 1} |f_N(t, \sigma)|, \quad (10.12.35)$$

а  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ . Функцию, реализующую равенство (10.12.35), обозначим  $\tilde{f}_N(t)$ . Решение задачи (10.12.35) было найдено Е. И. Золотаревым еще в 1877 г. [84] с помощью аппарата эллиптических функций, а затем вновь найдено Р. Жорданом [342]; параметры  $\sigma_i$  совпадают с множеством чисел

$$s_i = \operatorname{dn} \left( \frac{2(N-i)}{2N} K, k \right), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10.12.36)$$

Здесь  $\operatorname{dn}(u, k)$  — эллиптическая функция, определяемая равенством

$$\operatorname{dn}(u, k) = (1 - k^2 x^2)^{1/2},$$

где  $x = \sin \psi$ ;  $k = (1 - \eta^2)^{1/2}$ ;  $\int_0^{\psi} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta = u$ ;

$K = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta$ . При малых  $\eta$  имеем

$$s_i \approx 2c^{t_i} (1 + c^2 (1 - t_i)/(1 + c^{2t_i})), \quad (10.12.37)$$

где

$$c = \eta/4; \quad t_i = (2(N-i) + 1)/(2N).$$

При получении формул для параметров  $\sigma_k$  позаботимся о такой перенумерации параметров  $s_i$ , при которой происходило бы интенсивное уменьшение ошибки преимущественно на первых итерациях.

Итак, пусть  $N = 2^p$ , а параметры, реализующие (10.12.35) (обозначим их временно  $s_1, \dots, s_N$ ), пронумерованы в возрастающем порядке:  $s_i < s_k$  при  $i < k$ . Их порядок употребления в итерационном методе определим перестановкой  $\kappa_N = (j_1, j_2, \dots, j_N)$ ,  $1 \leq j_k \leq N$ , в которой число  $j_k$  означает, что на  $k$ -й итерации следует взять  $\sigma_k = s_{j_k}$ . Перестановки  $\kappa_N$  определим рекуррентно:  $\kappa_1 = (1)$ ; если известна перестановка  $\kappa_{2^q-1} = (j_1, j_2, \dots, j_{2^q-1})$ , то

$$\kappa_{2^q} = (2^{q-1} + 1 - j_1, 2^{q-1} + j_1, \dots, 2^{q-1} + 1 - j_k, 2^{q-1} + j_k, \dots).$$

Например,  $\nu_{16} = (6, 11, 3, 14, 7, 10, 2, 15, 5, 12, 4, 13, 8, 9, 1, 16)$ . Тогда формулы для параметров  $\sigma_k$ , реализующих (10.12.35) и упорядоченных в соответствии с перестановкой  $\kappa_{2^p}$ , имеют вид, если  $t_p = t$ ,  $\eta_p = \eta$ :

$$\eta_i = 2\eta_{i+1}^{1/2}/(1 + \eta_{i+1}), \quad t_i = (t_{i+1} + \eta_{i+1}/t_{i+1})/(1 + \eta_{i+1}), \quad i = p-1, \dots, 1, 0. \quad (10.12.38)$$

Тогда получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^0 &= \eta_0^{1/2}; \\ \sigma_{2j}^{i+1} &= \frac{1 + \eta_{i+1}}{2} \{ \sigma_j^i + [(\sigma_j^i)^2 - \eta_i^2]^{1/2} \}; \\ \sigma_{2j+1}^{i+1} &= \frac{\eta_{i+1}}{\sigma_{2j}^{i+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^i; \quad i = 0, 1, \dots, j-1 \end{aligned} \right\} \quad (10.12.39)$$

и  $\sigma_j = \sigma_j^p$  — оптимальный набор параметров задачи (10.12.35). Не трудно показать, что при этом для любого  $0 \leq r \leq p$

$$\tilde{f}_N(t) = \prod_{j=1}^{2^r} \frac{t_r - \sigma_j^r}{t_r + \sigma_j^r}, \quad \eta_r \leq t_s \leq 1 \quad (10.12.40)$$

и что

$$\tilde{E}_{2^p} = (1 - \eta_0^{1/2}) / (1 + \eta_0^{1/2}).$$

Упорядоченный набор параметров обозначим  $\Gamma_1^p = \{\sigma_k\}_1^N$ . Пусть

$$\Gamma_j^s = \{\sigma_k : 2^s(j-1) < k \leq 2^s j\};$$

$$\varphi_j^s(t) = \prod_{\sigma_k^p \in \Gamma_j^s} \frac{t - \sigma_k^p}{t + \sigma_k^p}; \quad \varphi_1^p(t) = \tilde{f}_N(t).$$

Тогда

$$\varphi_j^s(t) = (t_{p-s} - \sigma_j^{p-s}) / (t_{p-s} + \sigma_j^{p-s}); \quad \eta_{p-s} \leq t_{p-s} \leq 1.$$

Обозначим

$$P_j^s = \max_{\eta < t < 1} \varphi_j^s(t); \quad p_j^s = \min_{\eta < t < 1} \varphi_j^s(t); \quad m_j^s = \max_{\eta < t < 1} |\varphi_j^s(t)|.$$

Справедливы следующие леммы [135].

**Лемма 10.12.1.** Если  $1 \geq \sigma_k^{p-s} \geq \sigma_i^{p-s} \geq \sqrt{\eta_{p-s}}$  или  $\eta_{p-s} \leq \sigma_k^{p-s} \leq \sigma_i^{p-s} \leq \sqrt{\eta_{p-s}}$ , то  $m_i^s \leq m_k^s$ .

**Лемма 10.12.2.** Если  $\eta_{i-1} < \sigma_k^{i-1} < \sigma_j^{i-1} < 1$ ,  $1 < i \leq p$ ,  $\eta < 1$ , то

$$\eta_i < \sigma_{2j-1}^i < \sigma_{2k-1}^i < \sqrt{\eta_i} < \sigma_{2k}^i < \sigma_{2j}^i < 1.$$

**Лемма 10.12.3.** Для любого  $1 \leq s \leq p$  и  $1 \leq j \leq 2^{p-s}$  функция  $\varphi_j^s(t)$  имеет на отрезке  $[\eta, 1]$   $2^{s-1} + 1$  одинаковых положительных максимумов и  $2^{s-1}$  одинаковых отрицательных минимумов; при нечётном  $j$ :  $P_j^s \geq |p_j^s|$ , при чётном:  $|p_j^s| \geq P_j^s$ .

**Лемма 10.12.4.** Для любых  $0 \leq s \leq p-1$ ,  $1 \leq j \leq 2^{p-s-1}$ :

$m_{2j-1}^s = m_{2j}^s$ , а при нечетных  $j$ :  $m_{2j-1}^s \leq m_{2j+1}^s$ ,  $1 \leq j \leq 2^{p-s-1}$ , и  $m_{2j+1}^s \geq m_{2j+3}^s$ ,  $1 \leq j < 2^{p-s-1} - 2$ .

Значение  $m_{2j-1}^s$  достигается функцией  $\varphi_{2j-1}^s(t)$  при  $t=1$ , а  $m_{2j}^s$  — функцией  $\varphi_{2j}^s(t)$  при  $t=\eta$ .

**Следствие 10.12.1.**  $m_1^{p-1} = m_2^{p-1}$ ,  $m_1^{p-2} = m_2^{p-2} < m_3^{p-2} = m_4^{p-2}$ .

**Лемма 10.12.5.** Для каждого  $0 \leq s < p-1$   $\min_j m_j^s$  достигается при  $j = 2^{p-s} - 3, 2^{p-s} - 2$ , а  $\max_j m_j^s$  — при  $j = 2^{p-s} - 1, 2^{p-s}$ .

Пометим чертой сверху (соответственно снизу) те функции  $\varphi_j^s(t)$ , для которых достигается  $\min_j m_j^s$  (соответственно  $\max_j m_j^s$ ). Тогда после  $2^p$  итераций

$$\tilde{f}_N(t, \sigma) = \overline{\varphi}_1^{p-2} \overline{\varphi}_2^{p-2} \overline{\varphi}_5^{p-3} \overline{\varphi}_6^{p-3} \dots \overline{\varphi}_{2^k-3}^{p-k} \overline{\varphi}_{2^k-2}^{p-k} \dots \overline{\varphi}_{2^{p-3}}^0 \overline{\varphi}_{2^{p-2}}^0 \underline{\varphi}_{2^{p-1}}^1. \quad (10.12.41)$$

При этом каждая из функций  $\varphi_j^s(t)$  устроена аналогичным образом. Формула (10.12.41) показывает, что убывание ошибки на промежуточных этапах итерации происходит в определенном смысле оптимальным образом с достаточно равномерным подавлением всех компонент ошибки.

Алгоритм упорядочения параметров можно обобщить на случай  $N = \prod_{i=1}^n p_i$ , где  $p_i$  — любые простые числа. В работе [136] построены бесконечные последовательности параметров  $\{\sigma_i\}_i^\infty$  и целых чисел  $N_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , такие, что для каждого  $N = N_n$  функция  $\tilde{f}_{N_n}$  с параметрами  $\{\sigma_i\}_i^{N_n}$  наименее отклоняется от нуля на отрезке  $[\eta, 1]$ . Основой для получения таких последовательностей послужила теория главных преобразований эллиптических функций и результаты работы Е. И. Золотарева [84]. Опишем коротко конструкцию такого алгоритма.

Пусть  $\mathcal{P} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \dots, \overline{p}_s)$  — некоторый набор простых нечетных чисел;  $p_n \in \mathcal{P}$  — любое целое число из  $\mathcal{P}$ , выбираемое на  $n$ -м шаге. Пусть  $N_0 = 2^n$ , где  $n \geq 0$  — задано, а  $N_{n+1} = N_n p_n$ . В работе [136] построены классы бесконечных последовательностей  $\{\sigma_i\}_i^\infty$ , обладающие следующими свойствами.

1. Для каждой последовательности имеем

$$\tilde{f}_{N_{n+1}}(t) = \tilde{f}_{N_n}(t) \prod_{j=1}^{p_n-1} Q_j(t, N_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

2. Функции  $Q_j(t, N_n)$  имеют вид

$$Q_j(t, N_n) = (-1)^{N_n} \prod_{i=1}^n \frac{t - \sigma_{N_n} i + t}{t + \sigma_{N_n} i + t}, \quad f = 1, 2, \dots, p_n - 1.$$

Каждая функция  $Q_j(t, N_n)$   $N_n$  раз меняет знак на  $[\eta, 1]$  и имеет  $[N_n/2] + 1$  одинаковых максимумов и  $N_n - [N_n/2]$  одинаковых минимумов на  $[\eta, 1]$ . Это свойство назовем почти чебышевским альтернансом.

3. Функции  $Q_{2j-1}(t, N_n)$ ,  $Q_{2j}(t, N_n)$ ,  $j = 1, \dots, (p_n - 1)/2$ , имеют почти чебышевский альтернанс.

4. Пусть  $\delta$  — любое из чисел  $2^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $N_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а  $\Gamma_{\delta j}$  ( $= 0, 1, \dots$ ) — отрезок последовательности  $\{\sigma_i\}_{s_i}^{(j+1)}$ . Тогда для любых  $\delta$ ,  $j$  функции

$$\varphi_{\delta j}(t) = \prod_{\sigma_i \in \Gamma_{\delta j}} \frac{t - \sigma_i}{t + \sigma_i}$$

обладают почти чебышевским альтернансом.

Употребление в итерационном методе последовательностей  $\{\sigma_i\}_1^\infty$ , обладающих свойствами 1—4, позволяет вести итерационный процесс, не ограничивая его априори каким-то числом итераций; при этом для коммутативного случая итерационный процесс для всех  $k = N_n$  будет выходить на оптимальный режим, а для всех других значений  $k$  он обеспечивает достаточно хорошее убывание ошибки. Наиболее «плотные» и просто устроенные последовательности получаются при  $p_n = 3$ .

Пусть  $n = 0$ , т. е.  $N_0 = 1$  и  $\kappa_1 = (1)$ . Если известны перестановки  $\kappa_{3^n - 1} = (j_1^{n-1}, j_2^{n-1}, \dots, j_{3^n - 1}^{n-1})$ , то  $\kappa_{3^n} = (j_1^n, j_2^n, \dots, j_{3^n}^n)$  определяется так:

$$\left. \begin{aligned} j_k^n &= 3j_k^{n-1}; j_{k+3^{n-1}}^n = j_k^n + (-1)^{j_k^n}; \\ j_{k+2 \cdot 3^{n-1}}^n &= j_k^n - (-1)^{j_k^n}, k = 1, 2, \dots, 3^{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.12.42)$$

Например,  $\kappa_9 = (5, 2, 8, 6, 1, 7, 4, 3, 9)$ .

Если  $n > 0$ , то, зная перестановку  $\kappa_{2^q - 1 \cdot 3^n} = (j_1, \dots, j_{2^q - 1 \cdot 3^n})$ , образуем перестановку  $\kappa_{2^q \cdot 3^n}$  по правилу  $\kappa_{2^q \cdot 3^n} = (2^q - 1 \cdot 3^n + 1 - j_1, 2^q - 1 \cdot 3^n + j_1, \dots)$  и полагаем  $q = 1, 2, \dots, n$ .

Проведенные расчеты диффузионных задач в прямоугольнике с некоммутируемыми операторами показали высокую эффективность бесконечных последовательностей параметров, упорядоченных предложенными способами [15, 16].

## § 10.13. О ПРИНЦИПАХ, ПОЛОЖЕННЫХ В ОСНОВУ ОБЗОРА МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

К настоящему времени известно очень много различных итерационных методов. Классифицировать их все, отметить и исследовать оригинальные находки в каждом методе — задача невыполнимая. В этом деле лучше следовать по некоей колее, пусть довольно узкой, но позволяющей хоть отчасти систематизировать в определенном смысле известные методы. Очевидно, что при этом придется поступиться подчас

очень многим, в частности и приоритетными изобретениями тех авторов, чьи методы мы будем излагать.

Во-первых, будем условно считать эквивалентными итерационные методы, отличающиеся друг от друга вычислительной схемой (порядком реализации операций), во-вторых, вне нашего внимания останутся методы, специфичные только для какого-либо конкретного вида уравнения. В-третьих, предположим, что как оператор  $A$  в уравнении (10.2.16), так и операторы  $T$  и  $H$  в итерационных методах (10.4.3) принадлежат коммутативной  $C^*$ -алгебре скалярных операторов (см. § 10.2)  $\mathcal{B}(X)$  с единицей.

При предположении, что  $\mathcal{B}(X)$  есть коммутативная  $C^*$ -алгебра с единицей, можно интерпретировать и итерационные методы, и различные идеи, относящиеся к ускорению сходимости итераций, на уравнении, в котором оператор  $A$  является просто скалярной функцией  $A(\lambda)$ , где  $\lambda \in \Lambda$ . Мы уже воспользовались ранее этим приемом, проводя доказательства сходимости итераций в § 10.12 [см. также формулы (10.2.23) — (10.2.36), (10.3.16) — (10.3.19)]. Желающие ознакомиться с обзорами итерационных методов, где в качестве модельной задачи используются матричные уравнения линейной алгебры, могут обратиться к монографиям Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой [233], Р. Варги [341], Е. Вакспресса [342] и др.

Рассмотрим теперь уравнение, заданное в  $\mathcal{B}(X)$ :  $Au = f$ , где  $A$ ,  $f$  — заданные элементы, а  $u$  — искомый элемент. Согласно изложенному в § 10.2, этому уравнению в пространстве  $C(\Lambda)$  соответствует уравнение  $A(\lambda)u(\lambda) = f(\lambda)$ , а итерационным формулам решения уравнения в  $\mathcal{B}(X)$  соответствуют формулы в пространстве  $C(\Lambda)$ .

Пусть для простоты  $\Lambda$  — замкнутое множество, лежащее на действительной оси, а  $\lambda$  — элемент этого множества. Пусть функция  $M(\lambda) > 0$  на  $\Lambda$ . Норму элементов в этом пространстве определим как

$$\|f\|_M = \sup_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda) M(\lambda)|; f \in C(\Lambda), \quad (10.13.1)$$

где  $|f|$  — абсолютная величина элемента  $f$ .

Наряду с пространством  $C(\Lambda)$  рассмотрим гильбертово пространство  $H_M(\Lambda)$ , построенное следующим образом. На множестве функций из  $C(\Lambda)$  введем скалярное произведение и норму согласно формулам: если  $\varphi, \psi \in C(\Lambda)$ , то

$$[\varphi, \psi]_M = (M\varphi, \psi) = \int_{\Lambda} M(\lambda) \varphi(\lambda) \bar{\psi}(\lambda) d\sigma(\lambda), \quad (10.13.2)$$

где  $d\sigma(\lambda)$  — некоторая мера на  $\Lambda$ . Тогда  $\|\varphi\|_M = [\varphi, \varphi]_M^{1/2}$ . Замкнем множество  $C(\Lambda)$  в норме (10.13.2); получим гильбертово пространство функций, определенных на  $\Lambda$  с конечной нормой (10.13.2), его обозначим  $H_M(\Lambda)$ .

Таким образом, исследуем принципы построения итерационных методов решения уравнения

$$A(\lambda) u(\lambda) = f(\lambda) \quad (10.13.3)$$

по нахождению  $u(\lambda)$ , в котором  $A(\lambda), f(\lambda) \in C(\Lambda)$ . Будем всегда предполагать, что  $A(\lambda) \neq 0$  на  $\Lambda$ . Обозначим  $R(A)$  множество значений функции  $A(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Чрезвычайно прозрачна для уравнения типа (10.13.3) задача на собственные значения: найти такие значения  $\gamma$ , при которых уравнение

$$A(\lambda)x = \gamma x \quad (10.13.4)$$

имеет нетривиальное решение. Эта задача решается просто: для каждого  $\lambda_0 \in \Lambda$  собственное значение дается формулой  $\gamma = A(\lambda_0)$ , а собственная функция — формулой  $x_{\lambda_0} = \delta(\lambda - \lambda_0)$ , где  $\delta(\lambda)$  — дельта-функция, определяемая равенством

$$x(t) = \int_{\Lambda} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda \quad (10.13.5)$$

для любой функции  $x(t) \in C(\Lambda)$  при  $t \in \Lambda$ . Итак, спектр задачи (10.13.4) совпадает с  $R(A)$ .

Решение уравнения (10.13.3) дается формулой

$$u(\lambda) = A^{-1}(\lambda) f(\lambda). \quad (10.13.6)$$

Равенство (10.13.6) точнее следовало бы записать в обобщенных функциях  $u(t) \delta(\lambda - t) = A^{-1}(t) f(t) \delta(\lambda - t)$ , но в дальнейшем изложении будем придерживаться несколько формализованной записи типа (10.13.6).

Казалось бы, все просто: решение уравнения (10.13.3) дается формулой (10.13.6) и никаких проблем не должно возникать. Чтобы уж не очень выхолостить теорию итерационных методов и придерживаться требований реальной ситуации, возникающей при выборе операторов  $H$  и  $T$ , наложим на этот выбор следующие ограничения. Пусть  $\mathfrak{M}$  — некоторое априори заданное подмножество функций из  $C(\Lambda)$  и  $A^{-1}(\lambda) \notin \mathfrak{M}$ . Назовем  $\mathfrak{M}$  множеством допустимых функций.

Требуется для решения уравнения (10.13.3) построить сходящийся итерационный метод вида

$$u^{k+1} = [I - H(\lambda) A(\lambda)] u^k + H(\lambda) f(\lambda) \quad (10.13.7)$$

при условии, что  $H(\lambda) \in \mathfrak{M}$  [ $I$  — единица в  $C(\Lambda)$ ].

Пусть  $T(\lambda) = I - HA$ , а  $\varepsilon^k = u - u^k$ ,  $r^k = f - Au^k$ , где  $u$  — решение (10.13.6). Тогда легко видеть, что

$$\varepsilon^{k+1}(\lambda) = T(\lambda) \varepsilon^k(\lambda) \quad (10.13.8)$$

и

$$\|\varepsilon^{k+1}\| = \|T \varepsilon^k\| \leq \|T\|_1 \|\varepsilon^k\|, \quad (10.13.9)$$

где  $\|\cdot\|$  — любая из норм  $\|\cdot\|_M$ ,  $\|\cdot\|_m$ , а  $\mu(T) = \|T\|_1$ .

Наряду с уравнением первого рода (10.13.3) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$u(\lambda) = b(\lambda) u(\lambda) + \psi(\lambda), \quad (10.13.10)$$

в котором предполагаем, что  $|b| \leq \mu(b) < 1$ . Случай, когда  $m < b(\lambda) < M < 1$ , где  $m, M$  — вещественные числа, может быть сведен к рассматриваемому путем применения следующего преобразования

уравнения (10.13.10): из обеих частей уравнения (10.13.10) вычитают величину  $u(M+m)/2$  и затем делят результат почленно на  $1 - (M+m)/2$ . Получают новое уравнение типа (10.13.10):

$$u = \frac{2b(\lambda) - M - m}{2 - M - m} u + \frac{2\psi}{2 - M - m},$$

в котором

$$\left| \frac{2b(\lambda) - M - m}{2 - M - m} \right| \leq \frac{M - m}{2 - M - m} < 1.$$

Метод простой итерации для уравнения (10.13.10) запишется в виде

$$u^{k+1} = T u^k + \psi(\lambda), \quad (10.13.11)$$

где  $T = b(\lambda)$ .

Итерационные методы разделим на два класса: к первому классу отнесем те из них, сходимость которых исследуется в норме  $\| \cdot \|_M$ , ко второму — методы, сходимость которых исследуется в норме  $\| \cdot \|_m$ . Эти два класса имеют свою специфику как в построении итерационных формул, так и в исследовании сходимости. Неравенство (10.13.9) показывает, что результаты, полученные по исследованию сходимости методов первого класса, могут быть применены для исследования сходимости итерационных методов второго класса. Поэтому сначала исследуем сходимость итераций в пространстве  $C(\Lambda)$  с нормой  $\| \cdot \|_1$ , полагая для простоты  $M(\lambda) \equiv 1$ .

Согласно следствию 10.2.2, для сходимости итераций (10.13.7) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |1 - H(\lambda) A(\lambda)| < 1, \quad (10.13.12)$$

т. е. при действительных  $H(\lambda)$ ,  $A(\lambda)$

$$-1 < m_1 = \inf_{\Lambda} [1 - H(\lambda) A(\lambda)] \leq \sup_{\Lambda} [1 - H(\lambda) A(\lambda)] = m_2 < 1.$$

А это значит, что

$$(1 - m_2)/|A(\lambda)| \leq H(\lambda) \operatorname{sign} A(\lambda) \leq (1 - m_1)/|A(\lambda)|. \quad (10.13.13)$$

Таким образом, если множество  $\mathfrak{M}$  содержит функции, удовлетворяющие неравенству (10.13.13), то будем считать, что можно построить сходящиеся итерационные методы.

## § 10.14. СТАЦИОНАРНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Начнем с методов, для которых множество  $\mathfrak{M}$  состоит из достаточно простых классов функций. Очевидно, что по мере расширения  $\mathfrak{M}$  представляется возможность получать все более быстро сходящиеся итерационные методы.

1. Метод простой итерации для уравнения второго рода.

Пусть  $A(\lambda) = I - \gamma K(\lambda)$ ,  $\mathfrak{M} = \{I\}$ , где  $\gamma$  — числовой параметр. Тогда

$$u^{k+1} = \gamma K(\lambda) u^k + f(\lambda). \quad (10.14.1)$$



В этом случае имеем метод простой итерации, приводящей к образованию ряда Неймана

$$u^{k+1} = \sum_{n=0}^k (\gamma K)^n f + \gamma^{k+1} K^{k+1} u^0,$$

который сходится при  $|\gamma| \mu(K) < 1$ .

2. Пусть требуется решить уравнение (10.13.3) методом (10.13.7), если  $\mathfrak{R} = \{\alpha I\}$ , где  $\alpha$  — не зависящий от  $k$  скаляр. Тогда

$$u^{k+1} = [I - \alpha A(\lambda)] u^k + \alpha f. \quad (10.14.2)$$

Согласно (10.13.12) метод сходится при

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |1 - \alpha A(\lambda)| < 1.$$

Для нахождения оптимального  $\alpha$ , при котором сходимость одного итерационного шага является наилучшей в  $\|\cdot\|_1$ , необходимо иметь информацию о  $R(A)$  на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy = r \exp(i\varphi)$ . В этом случае

$$\alpha_{\text{опт}} = \left\{ \alpha : \inf_{\alpha} \sup_{\gamma \in R(A)} |1 - \alpha \gamma| \right\}. \quad (10.14.3)$$

Однако нахождение  $\alpha_{\text{опт}}$  из формулы (10.14.3) — довольно сложная задача. Обычно задача огрубляется следующим образом: пусть известно лишь, что  $R(A) \subseteq \Omega$ , где множество  $\Omega$  таково, что для него можно решить задачу (10.14.3). Тогда оптимальное значение  $\alpha$  находится уже для класса задач (10.14.2), для которых  $R(A) \subseteq \Omega$ . Решим одну из таких задач. Пусть известно, что  $R(A)$  принадлежит кругу  $\Omega$  с центром в точке  $r_0 \exp(i\varphi_0)$  и радиусом  $\rho < r_0$ . Тогда, учитывая, что линия уровня с константой  $C \geq 0$  для функции  $|1 - \alpha \gamma|$  есть окружность радиусом  $C |\alpha^{-1}|$  с центром в точке  $\alpha^{-1}$ , заключаем, что  $\min_{\alpha} \max_{\gamma \in \Omega} |1 - \alpha \gamma|$  достигается при

$$\alpha_{\text{опт}} = r_0^{-1} \exp(-i\varphi_0) \text{ и } \mu(I - \alpha_{\text{опт}} A) = \rho r_0^{-1} < 1. \quad (10.14.4)$$

Если известно, что  $R(A)$  принадлежит кругу  $\Omega$ , диаметром которого является отрезок действительной оси  $[m, M]$ , где  $0 < m = \inf_{\lambda \in \Lambda} |A(\lambda)|$ ,  $M = \sup_{\lambda \in \Lambda} |A(\lambda)|$ , то согласно (10.14.4) имеем

$$\alpha_{\text{опт}} = 2/(M + m); \quad \mu(I - \alpha_{\text{опт}} A) = (M - m)/(M + m). \quad (10.14.5)$$

Эти формулы для случая, когда  $R(A) \in [m, M]$ , указаны в работе И. П. Натансона [188]. Заметим, что если  $R(A)$  состоит всего из двух точек  $(m, 0)$ ,  $(M, 0)$ , то значения  $\alpha_{\text{опт}}$  и  $\mu(I - \alpha_{\text{опт}} A)$  выразятся теми же формулами. Этот факт указывает на целесообразность рассмотрения для стационарных методов задач такого типа: пусть для итерационного метода по множеству  $\Omega$  найдено значение  $\alpha_{\text{опт}}$  и  $\mu_0 = \sup_{\gamma \in \Omega} |1 - \alpha_{\text{опт}} \gamma|$ . Требуется указать такие множества  $\Omega_1 \supseteq \Omega$ , для которых  $\sup_{\lambda \in \Omega_1} |1 - \alpha_{\text{опт}} \lambda| = \mu_0$ .

Итерационные методы типа (10.14.2) были предложены и исследованы многими авторами.

3. Пусть  $A \neq |A|$ ;  $\bar{A}$  означает сопряженную к  $A$  величину, а  $\mathfrak{M} = \{\alpha \bar{A}(\lambda)\}$ . Положим

$$u^{k+1} = [1 - \alpha \bar{A}(\lambda) A(\lambda)] u^k + \alpha \bar{A}(\lambda) f. \quad (10.14.6)$$

Множество  $R(\bar{A}A)$  лежит на положительной полуоси плоскости  $z$ . Из неравенства (10.13.12) следует, что метод (10.14.6) сходится, если  $0 < \alpha < 2/\mu^2(A)$ . Если известно только, что  $0 < m \leq R(\bar{A}A) \leq M$ , то за  $\alpha$  целесообразно взять значение, рассчитанное по формуле (10.14.5). Заметим, что итерационный метод (10.14.6) есть метод (10.14.2), применяемый к уравнению  $\bar{A}Ax = \bar{A}f$ .

4. Рассмотрим метод, предложенный У. Бюхнером [262]:  $\mathfrak{M} = \{(-1)^k \alpha I\}$ ,

$$u^{k+1} = [I - (-1)^k \alpha A(\lambda)] u^k + (-1)^k \alpha f, \quad (10.14.7)$$

который не является уже стационарным. Из (10.14.7) следует, что

$$u^{k+1} = (I - \alpha^2 A^2(\lambda)) u^{k-1} + \alpha^2 A(\lambda) f. \quad (10.14.8)$$

Таким образом, итерационный метод (10.14.7) есть метод (10.14.2) для подпоследовательностей  $\{u^{2k}\}$ ,  $\{u^{2k+1}\}$  при решении уравнения

$$A^2(\lambda) u = A(\lambda) f. \quad (10.14.9)$$

Следовательно, при  $A^2(\lambda) > 0$  метод (10.14.7) будет сходиться при  $0 < \alpha < \sqrt{2/\mu(A)}$ . Значения  $\alpha_{\text{опт}}^2$  в этом случае определяются по формулам типа (10.14.4), (10.14.5).

## § 10.15. ОБОБЩЕННЫЕ МЕТОДЫ ЯКОБИ

Пусть  $A = D - S - Q$ , а  $\mathfrak{M} = \{(D - \alpha S)^{-1} \omega I\}$ , где  $\alpha$ ,  $\omega$  — числа. В линейной алгебре функциям  $D$ ,  $S$ ,  $Q$  соответствуют диагональная, нижняя и верхняя треугольные матрицы. Обобщенные итерационные методы Якоби имеют вид

$$(D - \alpha S) u^{k+1} = (D - \alpha S) u^k - \omega (A u^k - f). \quad (10.15.1)$$

В этих методах

$$T = (D - \alpha S)^{-1} [(1 - \omega) D + (\omega - \alpha) S + \omega Q], \quad (10.15.2)$$

а оптимальные  $\alpha$ ,  $\omega$  задаются формулой

$$(\alpha_{\text{опт}}, \omega_{\text{опт}}) = \left\{ (\alpha, \omega) : \inf_{\alpha, \omega} \sup_{\lambda \in \Lambda} |(D - \alpha S)^{-1} [(1 - \omega) D + (\omega - \alpha) S + \omega Q]| \right\}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев метода (10.15.1).

1. При  $\alpha = 0$ ,  $\omega = 1$  получаем метод Якоби [291], называемый также методом одновременных смещений

$$Du^{k+1} = (S + Q)u^k + f, \quad (10.15.3)$$

для которого  $\mu(T) = \sup_{\lambda \in \Lambda} |D^{-1}(S + Q)|$ . Необходимое и достаточное условие сходимости итерации (10.15.3) состоит в том, что

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |1 - D^{-1}A| < 1, \quad (10.15.4)$$

а это неравенство при  $D(\lambda) > 0$  и действительной функции  $A(\lambda)$  эквивалентно неравенству  $-D < D - A < D$ . Итак, справедлива

**Лемма 10.15.1.** *Для того чтобы метод (10.15.3) сходил для действительной функции  $A(\lambda)$  и  $D(\lambda) > 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $A > 0$  и  $2D - A > 0$ .*

2. При  $\omega = \alpha = 1$  получаем методы Гаусса — Зейделя [281, 333], А. П. Некрасова [189] и другие родственные методы, называемые методами последовательных смещений:

$$(D - S)u^{k+1} = Qu^k + f; \quad (10.15.5)$$

для них

$$\mu(T) = \sup_{\lambda \in \Lambda} |(D - S)^{-1}Q|. \quad (10.15.6)$$

Методы типа (10.15.5) можно трактовать и следующим образом. Пусть  $R, Q$  — два произвольных оператора, такие, что

$$A = R - Q, \quad \mathfrak{R} = \{R^{-1}\}. \quad (10.15.7)$$

Тогда

$$Ru^{k+1} = Qu^k + f, \quad (10.15.8)$$

при этом

$$\mu(T) = \sup_{\lambda \in \Lambda} |R^{-1}Q|. \quad (10.15.9)$$

Поскольку условие  $\mu(T) = q < 1$  эквивалентно условию  $0 \leq |R|^{-1}|Q| < 1$  или условию  $|R|^2 - |Q|^2 > 0$ , то справедлива

**Лемма 10.15.2.** *Для сходимости итераций (10.15.8) необходимо и достаточно, чтобы  $|R|^2 - |Q|^2 > 0$ .*

Представление (10.15.7) назовем расщеплением оператора  $A$ . Различные стационарные итерационные методы соответствуют различным расщеплениям оператора  $A$ . Регулярным расщеплением оператора  $A > 0$  назовем представление (10.15.7), в котором  $R > 0$ ,  $Q \geq 0$ . Для решения задач математической физики весьма эффективными оказались методы расщепления, в которых операторы  $R, Q$  зависят от  $k$ . Справедлива

**Лемма 10.15.3.** *Если (10.15.7) — регулярное расщепление и  $A > 0$ , то*

$$\mu(R^{-1}Q) = \frac{\mu(A^{-1}Q)}{1 + \mu(A^{-1}Q)} \leq \frac{\mu(Q)\mu(A^{-1})}{1 + \mu(Q)\mu(A^{-1})} < 1. \quad (10.15.10)$$

Доказательство. В самом деле,

$$R^{-1}Q = (A + Q)^{-1}Q = (I + G)^{-1}G, \quad (10.15.11)$$

где  $G = A^{-1}Q$ . Неравенство (10.15.10) следует из представления (10.15.11) и формулы  $\sup_{\lambda \in \Lambda} (1 + G)^{-1}G = (1 + \sup_{\lambda \in \Lambda} G)^{-1} \sup_{\lambda \in \Lambda} G$ .

**Теорема 10.15.1.** Пусть  $A = R_i - Q_i$ ,  $i = 1, 2$ , — два регулярных расщепления,  $A > 0$ . Тогда если  $Q_2 \geq Q_1 \geq 0$ , то  $0 \leq \mu(R_1^{-1}Q_1) \leq \mu(R_2^{-1}Q_2) < 1$ .

Доказательство. Утверждение теоремы следует из того, что  $A^{-1}Q_2 \geq A^{-1}Q_1$  и что  $\mu(R^{-1}Q)$  монотонно возрастает с ростом  $\mu(A^{-1}Q)$ .

Пусть  $A = I - B$ ,  $B = Q + S$ ,  $A > 0$ ,  $Q > 0$  и оператор  $A$  расщеплен по формуле  $A = R_\omega - Q_\omega$ , где

$$R_\omega = (I - \omega S)/\omega; \quad Q_\omega = [\omega Q + (1 - \omega)I]/\omega. \quad (10.15.12)$$

Пусть, кроме того,  $\mathfrak{M} = \{R_\omega^{-1}\}$ , тогда  $Q_{\omega_2} - Q_{\omega_1} = (\omega_1^{-1} - \omega_2^{-1})I$ , поэтому из теоремы 10.15.1 вытекает

**Следствие 10.15.1.** Метод (10.15.8) с операторами (10.15.12) сходится при  $0 < \omega \leq 1$ , и если  $0 < \omega_2 < \omega_1 \leq 1$ , то  $\mu(R_{\omega_1}^{-1}Q_{\omega_1}) < \mu(R_{\omega_2}^{-1}Q_{\omega_2}) < 1$ .

3. Рассмотрим методы типа экстраполяции по Либману [303] и релаксационные методы. Многие важнейшие особенности метода последовательной верхней релаксации, разработанного А. Островским [319], Д. Янгом, С. Франкелом, Б. Фридманом [348, 277, 278], к сожалению, нельзя проинтерпретировать на одном итерационном методе для выбранной нами модели уравнений, ибо выбор оптимальных параметров в этом методе существенно определяется таким свойством матриц, как их цикличность. Поэтому некоторые характерные свойства этого метода проинтерпретируем на нескольких различных итерационных схемах, каждая из которых схватывает лишь некоторую характерную особенность метода последовательной верхней релаксации.

а. Пусть  $\alpha = \omega$ . тогда

$$(D - \omega S) u^{k+1} = [(1 - \omega)D + \omega Q] u^k + \omega f. \quad (10.15.13)$$

Здесь

$$\mu(T) = q(\omega) = \sup_{\lambda \in \Lambda} |(D - \omega S)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega Q]|.$$

Оптимальное значение  $\omega$  определяется условием

$$\omega_{\text{опт}} = \{\omega: \inf_{\omega} q(\omega)\}. \quad (10.15.14)$$

б. Приближение  $u^{k+1}$ , получаемое методом последовательной верхней релаксации, можно трактовать как результат линейной комбинации предыдущего приближения и приближения, полученного по методу (10.15.5):

$$(D - S) u^{k+1/2} = Qu^k + f; \quad u^{k+1} = (1 - \omega) u^k + \omega u^{k+1/2}.$$

Здесь

$$T(\omega) = (D - S)^{-1} [(1 - \omega)(D - S) + \omega Q]; \quad \mu(T) = q(\omega) = \sup_{\lambda \in \Lambda} |T'(\omega)|.$$

Этот метод соответствует значениям  $\alpha = 1$  в методе (10.15.1). Оптимальные значения  $\omega$  определяются условием (10.15.14).

в. Еще одну трактовку метода последовательной верхней релаксации покажем на примере решения уравнения (10.13.10). Вместо одной неизвестной функции  $u$  рассмотрим две неизвестные функции  $x(\lambda)$ ,  $y(\lambda)$ , удовлетворяющие уже системе двух уравнений:

$$x = by + \varphi, \quad y = bx + \psi. \quad (10.15.15)$$

Очевидно, что решения  $x$ ,  $y$  системы (10.15.15) совпадают с решением  $u$  уравнения (10.15.10).

Систему (10.15.15) запишем в матричном виде

$$z = Bz + h,$$

где

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}; \quad h = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Матрица  $B$  является циклической матрицей индекса 2 [341], а поскольку  $B^2 = \text{diag} \{b^2, b^2\}$ , то  $\mu(B) = \mu(b)$ .

Итерационный метод последовательной верхней релаксации можно трактовать как следующий метод:

$$x^{k+1} = \omega(by^k + \varphi - x^k) + x^k; \quad y^{k+1} = \omega(bx^{k+1} + \psi - y^k) + y^k. \quad (10.15.16)$$

Если формально положить  $\xi^{2k} = x^k$ ,  $\xi^{2k+1} = y^k$ , то формулы (10.15.16) можно записать в виде:

$$\xi^0 = x^0; \quad \xi^1 = y^0; \quad \xi^{k+1} = \omega(b\xi^k + \psi - \xi^{k-1}) + \xi^{k-1}. \quad (10.15.17)$$

Формулы (10.15.17) при  $\omega = \omega_k$  идентичны по форме записи трехчленным итерационным методам и чебышевским методам, рассматриваемым ниже.

Разберем вопрос об определении оптимальных значений  $\omega$  в методе (10.15.16). Пусть

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega b & 1 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 1 - \omega & \omega b \\ 0 & 1 - \omega \end{pmatrix}.$$

Тогда схема (10.15.16) запишется в виде

$$Rz^{k+1} = Qz^k + \omega h.$$

Быстрота сходимости его обуславливается наибольшим по модулю собственным значением матрицы  $R^{-1}Q$ , которое определяется из уравнения

$$|tI - R^{-1}Q| = |R^{-1}||Rt - Q| = 0$$

или

$$(t + \omega - 1)^2 - t\omega^2 b^2 = 0. \quad (10.15.18)$$

Из (10.15.18) получаем, что  $t = f_{\pm}(\omega, b)$ , где

$$f_{\pm}(\omega, b) = (b\omega \pm \sqrt{b^2\omega^2 - 4\omega + 4^2})/4.$$

Так как  $f_+f_- = (\omega - 1)^2$ , то при  $|1 - \omega| \geq 1$  метод расходится. При

$$0 < \omega \leq 2 / (1 + \sqrt{1 - b^2}) = \psi(b)$$

эти корни вещественны, положительны и наибольший из корней есть

$$f(\omega, b) = (|b|\omega + \sqrt{b^2\omega^2 - 4\omega + 4})^2 / 4.$$

При  $\psi(b) < \omega < 2$  корни становятся комплексными и их модули равны  $\omega - 1$ .

Рассмотрим на плоскости  $(\omega, t)$  кривую

$$t = \varphi(\omega, b) = \begin{cases} f(\omega, b) & \text{при } 0 \leq \omega \leq \psi(b); \\ \omega - 1 & \text{при } \psi(b) \leq \omega \leq 2. \end{cases} \quad (10.15.19)$$

Оптимальное значение  $\omega$  определим согласно формуле

$$\omega_{\text{опт}} = \left\{ \omega : \sup_b \inf_{\omega} \varphi(\omega, b) \right\}. \quad (10.15.20)$$

Исследуем поведение функции  $\varphi(\omega, b)$  как функции от  $\omega$ :  $f(\omega, b)$  при  $0 < \omega \leq \psi(b)$  является убывающей функцией,  $f(0, b) = 1$ , а функция  $\omega - 1$  — возрастающая функция при  $\psi(b) \leq \omega < 2$ . Следовательно, минимум функции  $\varphi(\omega, b)$  по  $\omega$  достигается при  $\omega = \psi(b)$ .

Легко убедиться в том, что при возрастании  $|b|$  функция  $f(\omega, b)$  возрастает, а значит, точка минимума сдвигается вправо, и минимум возрастает. Следовательно.

$$\omega_{\text{опт}} = 2 / (1 + \sqrt{1 - \mu^2(b)}). \quad (10.15.21)$$

При таком выборе  $\omega_{\text{опт}}$  собственные значения матрицы  $R^{-1}Q$  становятся равными по модулю величине  $\omega_{\text{опт}} - 1 = \mu^2(1 + \sqrt{1 - \mu^2(b)})^{-2}$ . В самом деле, значениям  $b = 0$ ,  $b = \pm \mu(b)$  соответствуют корни  $\omega_{\text{опт}} - 1$ , а значениям  $|b| < \mu(b)$  соответствуют пары сопряженных комплексных корней, равных по модулю  $|\omega_{\text{опт}} - 1|$ . Функция  $t = \varphi(\omega, \mu(b))$  имеет, как легко проверить, в точке  $\omega_{\text{опт}}$  резкий минимум с вертикальной касательной слева и касательной справа, образующей угол  $\pi/4$  с осью  $\omega$ . Поэтому при неправильном определении  $\omega_{\text{опт}}$  (особенно в сторону уменьшения) может наблюдаться резкое замедление сходимости этого метода.

Если значение  $\mu(b)$  функцией  $b(\lambda)$  достигается на множестве  $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$ , то легко проверить, что матрица  $R^{-1}Q$  при  $\omega = \omega_{\text{опт}}$  и  $\lambda \in \Lambda_1$  имеет лишь один собственный вектор, т. е. в каноническом представлении она имеет клетку Жордана второго порядка. А это означает (см. § 10.4), что норма ошибки убывает по закону

$$\|\varepsilon^k\| \leq Ck(\omega_{\text{опт}} - 1)^k \|\varepsilon^0\|, \quad (10.15.22)$$

где  $\varepsilon_1^k = x - x^k$ ;  $\varepsilon_2^k = y - y^k$ ;  $\|\varepsilon^k\| = \max(|\varepsilon_1^k|_1, |\varepsilon_2^k|_1)$ , а  $C > 0$  — постоянная.

К еще одной интерпретации метода верхней релаксации (объясняющей отчасти название этого метода) вернемся в § 10.30.

Методы, изложенные в § 10.14, 10.15, предполагали наличие некоторой априорной грубой информации о расположении спектра оператора

А. Теперь рассмотрим два метода, которые сами учитывают получаемую в процессе итераций информацию о расположении спектра.

### § 10.16. МЕТОД Л. А. ЛЮСТЕРНИКА

Этот метод [156] явился одним из первых методов, ускоряющих сходимость итераций. Рассмотрим его для уравнения (10.13.10), в котором  $b(\lambda) \geq 0$ . Применяя метод простой итерации (10.13.11), получаем

$$u^{k+1} - u^k = b(\lambda)(u^k - u^{k-1}) = b^k(\lambda)(u^1 - u^0)$$

и, следовательно,

$$u - u^{k+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (u^{k+m+2} - u^{k+m+1}) = \frac{b^{k+1}(\lambda)(u^1 - u^0)}{1 - b(\lambda)}.$$

Таким образом,

$$u = u^{k+1} + \frac{b^{k+1}(\lambda)}{1 - b(\lambda)}(u^1 - u^0) = u^{k+1} + \frac{b^k(\lambda)}{1 - b(\lambda)}(u^{k+1} - u^k). \quad (10.16.1)$$

Пусть значение  $\mu(b)$  достигается функцией  $b(\lambda)$  на некотором множестве  $\Lambda_1$  и пусть  $\mu_1(b) < \mu(b)$ , где  $\mu_1(b) = \sup_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} |b(\lambda)|$ . Тогда, сделав достаточно большое количество итераций, можем считать что  $\sup_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} |u^{k+1} - u^k| = 0$  ( $\sup_{\lambda \in \Lambda} |u^{k+1} - u^k|$ ). Следовательно, можно ожидать, что функция

$$\bar{u}^{k+1}(\lambda) = u^{k+1}(\lambda) + \frac{\mu(b)}{1 - \mu(b)}(u^{k+1}(\lambda) - u^k(\lambda)) \quad (10.16.2)$$

будет ближе к точному решению  $u$ , чем  $u^{k+1}$ . Оценим порядок величины  $u - \bar{u}^{k+1}$ . Вычитая (10.16.2) из (10.16.1), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^{k+1} = u - \bar{u}^{k+1} &= \left( \frac{b(\lambda)}{1 - b(\lambda)} - \frac{\mu(b)}{1 - \mu(b)} \right) (u^{k+1} - u^k) = \\ &= \frac{b(\lambda) - \mu(b)}{(1 - b(\lambda))(1 - \mu(b))} b^k(\lambda)(u^1 - u^0). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\bar{\varepsilon}^{k+1} = 0$  при  $\lambda \in \Lambda_1$ , а при  $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1$  получаем

$$\begin{aligned} |\bar{\varepsilon}^{k+1}| &\leq \frac{1}{1 - \mu(b)} \sup_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} \left| \frac{\mu(b) - b(\lambda)}{1 - b(\lambda)} \right| \sup_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1} |b^k(\lambda)| |u^1 - u^0| \leq \\ &\leq \frac{\mu(b)}{1 - \mu(b)} \mu_1^k(b) |u^1 - u^0|. \end{aligned} \quad (10.16.3)$$

Следовательно, метод Люстерника ускоряет сходимость итераций по сравнению с методом простой итерации, для которого  $|\varepsilon^{k+1}| = |u - u^{k+1}| \leq [\mu^{k+1}(b)/(1 - \mu(b))] |u^1 - u^0|$ . Ускорение сходимости итераций будет тем больше, чем меньше отношение  $\mu_1(b)/\mu(b)$ . Ускорение особенно заметно при  $\mu(b)$ , близких к единице.

Пусть  $l(u)$  — линейный функционал, определенный на  $C(\Lambda)$ , для которого  $l((u^1 - u^0) \varphi_{\Lambda_1}) \neq 0$ , где  $\varphi_{\Lambda_1}(\lambda) = 1$  при  $\lambda \in \Lambda_1$  и  $\varphi_{\Lambda_1}(\lambda) = 0$  при  $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_1$ . Тогда  $\mu(b)$  вычисляется приближенно в процессе итераций по формуле

$$\mu(b) \approx l(u^{k+1} - u^k) / l(u^k - u^{k-1}), \quad (10.16.4)$$

откуда

$$\bar{u}^{k+1} = u^{k+1} - \frac{l(u^{k+1} - u^k)}{l(u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1})} (u^{k+1} - u^k). \quad (10.16.5)$$

Для приближенного вычисления  $\mu(b)$  могут быть использованы и однородные квадратичные функционалы, например вида

$$Q(u) = \int_{\Lambda} u^2 \rho d\lambda,$$

где  $\rho(\lambda) \geq \alpha > 0$  на  $\Lambda_1$ . Тогда

$$\mu^2(b) \approx Q(u^{k+1} - u_k) / Q(u^k - u^{k-1}). \quad (10.16.6)$$

Формулы (10.16.4), (10.16.6) дают возможность вычислять числитель и знаменатель дроби по мере получения соответствующих величин.

Таким образом, в методе Люстерника процесс «простых» итераций, которые могут, в свою очередь, представлять результат применения некоторого стационарного метода итераций, прерывается время от времени уточнением приближенного решения по формуле (10.16.2). Сигналом к применению этого приема может служить достаточно стационарное поведение на предыдущих итерациях значения  $\mu(b) < 1$ , полученного по одной из формул (10.16.4), (10.16.6). Этот процесс можно повторять в дальнейших итерациях, начинающихся уже с  $u^{k+1}$  как с начального приближения. При этом может измениться скорость сходимости последующих итераций. В самом деле, если на  $k$ -м шаге абсолютно точно по формуле (10.16.4) вычислено значение  $\mu(b)$ , то следующие итерации будут сходиться как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\mu_1(b)$ , а формулы (10.16.4), (10.16.6) при достаточно большом  $k$  будут уже давать, вообще говоря, приближенные значения для  $\mu_1(b)$ . Поэтому после вторичного применения приема (10.16.2) скорость сходимости метода Люстерника может снова возрасти. Однако следует заметить, что при вычислениях на ЭВМ, когда возникают ошибки округления, такой картины сходимости не будет наблюдаться при достаточно большой требуемой точности решения задачи.

## § 10.17. $\delta^2$ -ПРОЦЕСС ЭЙТКИНА

Излагаемый метод [251] основан на следующем соображении: если некоторая последовательность  $u^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , сходится к пределу  $u$  как геометрическая прогрессия со знаменателем  $b$ ,  $|b| < 1$ , то для любого  $k \geq 1$  имеем

$$u = (u^{k-1} u^{k+1} - (u^k)^2) / (u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}). \quad (10.17.1)$$



Исследуем и применим этот прием к решению уравнения (10.13.10) методом (10.13.11). Обозначив  $a_h(\lambda) = [1 - b(\lambda)]^{-1} b^{h-1}(\lambda) (u^1 - u^0)$ , получим для трех последовательных итераций

$$u - u^{k-1} = a_h(\lambda); \quad u - u^k = a_h(\lambda) b(\lambda); \quad u - u^{k+1} = a_h(\lambda) b^2(\lambda). \quad (10.17.2)$$

Определим  $a_h(\lambda)$  через  $u, u^{k-1}, u^k, u^{k+1}$ . Для этого вычтем второе уравнение (10.17.2) из первого, третье из второго и первое и третье уравнения из удвоенного второго:

$$\left. \begin{aligned} u^k - u^{k-1} &= a_h(1-b); & u^{k+1} - u^k &= a_h(1-b)b; \\ u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1} &= -a_h(1-b)^2. \end{aligned} \right\} \quad (10.17.3)$$

Из первого и третьего уравнений (10.17.3) имеем  $a_h(\lambda) = -(u^k - u^{k-1})^2 / (u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1})$ . Следовательно, учитывая первое уравнение (10.17.2), получаем формулу (10.17.1). В нашей трактовке  $\delta^2$ -процесс позволяет получить точное решение уже при  $k=1$ . Однако этого не происходит, когда мы имеем дело с решением общего операторного уравнения. Тогда целесообразно поступать так: в определенный момент, будучи уверенным в возможности успешного применения  $\delta^2$ -процесса, надо получить из  $u^{k-1}$  итерации  $u^k, u^{k+1}$ , затем найти уточненное значение  $\bar{u}^{k+1}$  по формуле (10.17.1) и продолжить итерационный процесс дальше, прерывая его время от времени описанным приемом ускорения сходимости итераций. Формулу (10.17.1) удобнее переписать в виде

$$\bar{u}^{k+1} = u^{k+1} - (u^{k+1} - u^k)^2 / (u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}). \quad (10.17.4)$$

Эта формула записи показывает, что разрядные цифры, совпадающие у элементов  $u^{k+1}, u^k, u^{k-1}$ , можно отбросить при вычислении поправки. При  $l(u) = u$  метод (10.16.5) совпадает с (10.17.4).

## § 10.18. ЧЕБЫШЕВСКИЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Так назовем методы, использующие многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля с весом. В методах такого типа предлагается решить следующую задачу. Пусть задано некоторое целое  $N > 0$ , а  $\mathfrak{M} = \{\alpha_k C_h(\lambda), k = 1, 2, \dots, N\}$ , где  $\alpha_k$  — константы, а  $C_h(\lambda)$  — некоторый заданный набор операторов. Требуется выбрать так константы  $\alpha_k$ , чтобы после  $N$  итераций по формуле

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{h+1} C_{h+1}(Au^k - f), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10.18.1)$$

получить наилучшую в некотором смысле сходимость итераций. Такой метод называется циклическим, если при необходимости дальнейшего продолжения итерационного процесса (10.18.1) выбранные значения  $\alpha_k C_h$  циклически повторяются:  $\alpha_i C_i = \alpha_k C_h \pmod{N}$ .

1. Наиболее подробно подвергались разработке и исследованию циклические методы, в которых  $C_h = H > 0$ . Это работы Л. Ричардсона [326, 327], Д. Фландерса и Г. Шортли [276], М. Ш. Бирмана [30], М. К. Гавурина [50], Д. Янга [347], Д. К. Фаддеева [232] и многих

других. В этом случае, не уменьшая общности, можно считать  $H \equiv 1$ . Тогда

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1} (Au^k - f) \quad (10.18.2)$$

Делая  $N$  итераций по формуле (10.18.2), получаем

$$u^{k+N} = P_N(A) u^k + [I - P_N(A)] A^{-1} f, \quad (10.18.3)$$

где  $P_N(t)$  — многочлен степени  $N$ , имеющий вид

$$P_N(t) = \prod_{k=1}^N (1 - \alpha_k t) \text{ и } P_N(0) = 1. \quad (10.18.4)$$

Легко проверить, что для ошибок  $\varepsilon^k = u - u^k$  справедливы рекуррентные соотношения

$$\varepsilon^{k+N} = P_N(A) \varepsilon^k. \quad (10.18.5)$$

Приближения  $u^0, u^N, u^{2N}$ , полученные по методу (10.18.2), связаны между собой формулой (10.18.3). Если забыть о приближениях  $u^k$  при  $k \neq 0 \pmod{N}$ , то формула (10.18.3) дает некоторый уже стационарный итерационный метод.

Рассмотрим некоторые способы построения итерационных процессов, основанные на различных первоначальных построениях, но сводящиеся в конечном счете к построению методов типа (10.18.3).

2. Пусть  $\mathfrak{M} = \{h_{N-1}(A)\}$ , где  $h_{N-1}(t)$  — многочлен степени  $N-1$ . Тогда

$$u^{k+1} = u^k - h_{N-1}(A) (Au^k - f). \quad (10.18.6)$$

Алгоритмы такого вида были названы в [233] универсальными. Легко видеть, что для них

$$P_N(t) = 1 - th_{N-1}(t). \quad (10.18.7)$$

Если  $\alpha_k^{-1}, k = 1, 2, \dots, N$ , — корни многочлена  $1 - th_{N-1}(t)$ , то этот многочлен представим в виде (10.18.4), а следовательно, один шаг метода (10.18.6) может быть реализован за  $N$  шагов метода (10.18.2).

3. М. Ш. Бирман [30] предложил для построения итерационных методов исходное уравнение предварительно преобразовать к виду

$$u = u + \sum_{k=1}^N b_k A^{k-1} (Au - f) = \left( I + \sum_{k=1}^N b_k A^k \right) u - \sum_{k=1}^N b_k A^{k-1} f$$

и применять метод простой итерации уже к этому преобразованному уравнению. Очевидно, что такой метод может быть также сведен к (10.18.2) при  $P_N(t) = 1 + \sum_{k=1}^N b_k t^k$ .

Итак, пусть  $N$  фиксировано. В методе (10.18.1) можно по-разному выбирать коэффициенты  $\alpha_k$ .

4. Рассмотрим сначала 1-й критерий выбора коэффициентов  $\alpha_k$ . Выберем коэффициенты  $\alpha_k$  так, чтобы многочлен  $P_N(t)$  вида (10.18.4)

был многочленом, наименее отклоняющимся с весом  $p(t)$  от нуля (МНОН) на множестве  $R(A)$  в норме  $|\cdot|_p$ , т. е. потребуем, чтобы

$$\sup_{t \in \Omega} |P_N(t) p(t)| = E_N(\Omega, p), \quad (10.18.8)$$

где

$$E_N(\Omega, p) = \inf_{a_k} \sup_{t \in \Omega} |(1 - \sum a_k t^k) p(t)|,$$

$p(t) > 0$  — непрерывная на  $\Omega$  функция, а  $\Omega = R(A)$ .

Это не единственно разумная стратегия, и существуют другие принципы выбора  $\alpha_k$ . Но при указанном сейчас способе определения  $\alpha_k$  происходит максимальное за  $N$  итераций подавление начальных ошибок в норме  $|\cdot|_p$  на классе  $l_\infty(p, c)$ :  $\varepsilon^0(\lambda) = \{\bar{\varepsilon}^0(\lambda) p(\lambda) : |\bar{\varepsilon}^0|_1 < C\}$ , поскольку

$$|\varepsilon^N|_p \leq \sup_{t \in R(A)} |P_N(t) p(t)| |\bar{\varepsilon}^0|_1. \quad (10.18.9)$$

Выбором функции  $p(t)$  можно учесть различные классы начальных ошибок, их гладкость, нормы пространств, в которых желательно оценить  $\varepsilon^N$  и  $\varepsilon^0$ , влияние на  $\varepsilon^0$  тех вычислительных алгоритмов, которые предшествуют употреблению метода [140] (например, итераций по нахождению границ спектра).

Построить фактически многочлен (10.18.8), как правило, не представляется возможным, ибо или не бывает точно известным расположение  $R(A)$ , или  $R(A)$  и  $p(t)$  таковы, что для них затруднительно построить МНОН. Обычно задача огрубляется следующим образом: пусть известно, что  $R(A) \subseteq \Omega$ , где множество  $\Omega$  такое, что на  $\Omega$  можно построить МНОН. Тогда  $\alpha_k$  равны обратным значениям корней этого многочлена.

Широко известны способы построения итерационных методов (10.18.2) для  $\Omega = [m, M]$ ,  $mM > 0$ ,  $M \geq m$ ,  $p \equiv 1$ . В этом случае минимизация (10.18.8) была дана П.Л. Чебышевым в 1881 г. [239]:

$$P_N(t) = (T_N(\delta))^{-1} T_N[(M + m - 2t)/(M - m)], \quad (10.18.10)$$

где

$$\delta = (M + m)/(M - m) > 1, \quad (10.18.11)$$

$$T_N(t) = \begin{cases} \cos(N \arccos t) & \text{при } -1 \leq t \leq 1, \\ \operatorname{ch}(N \operatorname{arccch} t) & \text{при } t \geq 1, t \leq -1, \end{cases}$$

т. е.  $T_N(t)$  — многочлен Чебышева  $N$ -го порядка первого рода для отрезка  $[-1; 1]$  [240]. Многочлены  $T_N(t)$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} T_{n+m}(t) + T_{n-m}(t) &= 2T_n(t) T_m(t); \\ T_n[T_m(t)] &= T_{nm}(t), \quad T_0 = 1, T_1 = t. \end{aligned} \right\} \quad (10.18.12)$$

и, кроме того,

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |T_N(t)| = 1, \quad T_N(t_k) = (-1)^k, \quad (10.18.13)$$

где  $t_k = \cos(k\pi/N)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ . Корнями  $T_N(t)$  являются числа

$$\beta_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2N}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10.18.14)$$

Нетрудно также видеть, что

$$2T_N(t) = (t + \sqrt{t^2 - 1})^N + (t - \sqrt{t^2 - 1})^N. \quad (10.18.15)$$

Из формул (10.18.10), (10.18.14) находим

$$\begin{aligned} \max_{m \leq i \leq M} |P_N(t)| = |T_N(\delta)|^{-1} &= 2 \left[ (\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})^N + \right. \\ &+ \left. (\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})^N \right]^{-1} = 2(\tau^N + \tau^{-N})^{-1} < 1; \\ \tau &= (M^{1/2} + m^{1/2}) / (M^{1/2} - m^{1/2}). \end{aligned} \quad (10.18.16)$$

Если  $\kappa_N = (j_1, j_2, \dots, j_N)$  обозначить целочисленную перестановку порядка  $N$ , тогда в методе (10.18.2) положим

$$\alpha_k = 2(M + m - (M - m)\beta_{j_k})^{-1}. \quad (10.18.17)$$

В этом случае при  $p \equiv 1$  после  $N$  итераций ошибка уменьшится не менее чем на множитель  $|T_N(\delta)|^{-1}$ , где

$$\begin{aligned} \delta &= (1 + m/M) / (1 - m/M); \\ |\varepsilon|_1 &\leq |T_N(\delta)|^{-1} |\varepsilon^0|_1. \end{aligned} \quad (10.18.18)$$

5. При применении метода (10.18.2) с  $\alpha_k$ , взятыми по формуле (10.18.17), оператор перехода  $(I - \alpha_k A)$  для некоторых  $k$  имеет очень большую норму при достаточно малых  $m/M$ . Это обстоятельство приводит при реальных расчетах на ЭВМ к возрастанию как  $\|u^k\|$ , что вызывает аварийную остановку и потерю значащих цифр, так и ошибок округления, допущенных на предыдущих итерациях. Пусть

$$\begin{aligned} R_i^N(t) &= \prod_{j=1}^i (1 - \alpha_j t); \quad Q_i^N(t) = \prod_{j=i+1}^N (1 - \alpha_j t); \\ r_i^N &= \max_{t \in [m, M]} |R_i^N(t)|; \quad q_i^N = \max_{t \in [m, M]} |Q_i^N(t)|. \end{aligned}$$

Существенной потери значащих цифр не будет из-за роста  $\|u^k\|$ , если

$$r_i^N < C_1, \quad (10.18.19)$$

а счет будет устойчив по отношению к допущенным ошибкам округления, если

$$q_i^N < C_2, \quad (10.18.20)$$

где  $C_1, C_2$  — зависящие от  $m/M$  постоянные. Значения  $r_i^N, q_i^N$  существенно зависят от перестановки  $\kappa_N$ .

Проблема упорядочения параметров в чебышевских методах была решена в работах В. И. Лебедева, С. А. Финогенова [149—152]\*,

\* Работа [149] докладывалась в лекциях, прочитанных одним из авторов на летней школе по оптимизации вычислений в г. Одессе в 1969 г., а также на семинаре по вычислительным методам линейной алгебры в Новосибирске в марте 1970 г.

А. А. Самарского и Е. С. Николаева [205]. Опишем два простейших алгоритма упорядочения параметров.

Пусть  $N = 2^p$ ,  $p > 0$  — целое и  $\kappa_{2^{p-1}} = (j_1, j_2, \dots, j_{2^{p-1}})$  — перестановка искомого алгоритма для  $N = 2^{p-1}$  ( $\kappa_1 = (1)$ ). Тогда  $\kappa_{2^p}$  определим по формуле  $\kappa_{2^p} = (j_1, 2^p + 1 - j_1, j_2, 2^p + 1 - j_2, \dots, 2^p + 1 - j_{2^{p-1}})$ . (10.18.21)

Например,  $\kappa_{16} = (1, 16, 8, 9, 4, 13, 5, 12, 2, 15, 7, 10, 3, 14, 6, 11)$ . Для этого алгоритма [150]

$$r_i^N \leq \left( \frac{\pi^2}{16N^2} + \Delta \right)^{-1} \left( 1 + \frac{(i-1)^2}{s} \Delta \right)^{-1}; \quad q_i^N \leq \left( 1 + \frac{(N-i)}{s} \Delta \right)^{-1};$$

$$\Sigma q_i^N \leq \exp [(1 + \Delta)^{-1} + \Delta / \ln 4] \Delta^{-\ln 4},$$

где  $\Delta = m(M - m)^{-1}$ ,  $1 \leq s \leq \log_2 N$ .

Второй алгоритм [151] разработан для  $N = \prod_{i=1}^s p_i^{n_i}$ , где  $p_i$  — простые числа. Ограничимся случаем  $N = 3^r$ . Пусть  $\kappa_{3^{r-1}} = (j_1, j_2, \dots, j_{3^{r-1}})$  — порядок номеров, установленных для  $N = 3^{r-1}$  в соответствии со вторым алгоритмом. Тогда  $\kappa_{3^r}$  определим по формуле

$$\kappa_{3^r} = (j_1, 2 \cdot 3^{r-1} + j_1, 2 \cdot 3^{r-1} + 1 - j_1, \dots, 2 \cdot 3^{r-1} + 1 - j_{3^{r-1}}). \quad (10.18.22)$$

Например,  $\kappa_9 = (1, 7, 6, 3, 9, 4, 2, 8, 5)$ .

При описанных алгоритмах операторы шага  $T_k = I - \alpha_k A$  с большой нормой достаточно равномерно распределяются среди операторов, уменьшающих норму ошибки.

Для метода (10.14.2) с фиксированным значением  $\alpha_{\text{опт}}$  справедливы формулы (10.14.5). После  $N$  итераций вида (10.18.2), (10.18.17) будет выполняться оценка  $|T_N(\delta)|^{-1} \leq \delta^{-N}$ . Следовательно, меняя скаляр  $\alpha$ , можно существенно ускорить сходимость итераций. При  $N = 1$  оба метода — (10.14.2) и (10.18.2), (10.18.17) совпадают.

6. Итерационный метод (10.18.2), (10.18.17) был описан как оптимальный для заданного  $N$ . Новый класс итерационных процессов — устойчивые бесконечно продолжаемые оптимальные методы типа (10.18.2) с чебышевскими параметрами — позволяют продолжить после  $N$  заданных итераций метод (10.18.2) так, чтобы он был устойчив и для некоторых  $N = N_n$  ( $N_n \rightarrow \infty$ ,  $N_n > N$ ) снова становился оптимальным. Такие методы исследованы в работе В. И. Лебедева и С. А. Финогенова [152]. Изложим алгоритм построения параметров такого метода для одного частного случая. Так как  $\cos 3x = \cos x (2 \cos 2x - 1)$ , то для многочленов  $T_N(t)$  и  $T_{3N}(t)$  справедливо соотношение

$$T_{3N}(t) = T_N(t)(2T_{2N}(t) - 1),$$

которое показывает, что множество корней многочлена  $T_{3N}(t)$  состоит из множества (10.18.14) — корней многочлена  $T_N(t)$  и множества корней многочлена  $2T_{2N} - 1$ :

$$\bar{\beta}_i = \cos \frac{2i-1}{6N} \pi, \quad 2i \not\equiv 1 \pmod{3}.$$

Следовательно, если после итераций, в которых в формулах (10.18.17) были использованы параметры (10.18.14), продолжим итерационный процесс. Далее, взяв в (10.18.17) за  $\beta_{jk}$  соответствующим образом переменные параметры  $\bar{\beta}_i$ , то при  $N_1 = 3N$  снова получим оптимальный метод. Продолжая процесс образования параметров аналогичным образом, получим бесконечную последовательность  $\beta_k$ , для которой метод (10.18.2) становится оптимальным при  $N_r = 3^r N$ . Последовательности  $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$  ( $\beta_i \in [-1, 1]$ ) поставим в соответствие последовательность  $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$  ( $\omega_k \in [0, 1]$ ) по формуле

$$\beta_k = \cos \omega_k \pi. \quad (10.18.23)$$

Построенную последовательность рациональных чисел  $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$  назовем  $T$ -последовательностью. Тогда в методе (10.18.2)

$$\alpha_k = 2(M + m - (M - m) \cos \omega_k \pi)^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10.18.24)$$

Приведем формулы, определяющие порядок использования  $\beta_i$ , когда  $N = 2$ . Полагаем сначала  $\beta_1 = -2^{-1/2}$ ,  $\beta_2 = -\beta_1$ . Пусть порядок последовательности  $\beta_k$  ( $k = 1, \dots, 2 \cdot 3^{r-1}$ ) построен. Отрезок последовательности  $\beta_k$  ( $k = 2 \cdot 3^{r-1} + 1, \dots, 2 \cdot 3^r$ ) построим следующим образом: используя перестановку  $\kappa_{3^r-1}$  (10.18.22), образуем величины

$$t_{i-1} = \sin \frac{2(j_i + [j_i/2]) - 1}{4 \cdot 3^r} \pi, \quad i = 1, \dots, 3^r - 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{2 \cdot 3^{r-1} + 4i + 1} &= -t_i; & \beta_{2 \cdot 3^{r-1} + 4i + 2} &= t_i; \\ \beta_{2 \cdot 3^{r-1} + 4i + 3} &= -\sqrt{1 - t_i^2}; & \beta_{2 \cdot 3^{r-1} + 4i + 4} &= \sqrt{1 - t_i^2}. \end{aligned}$$

Затем по перестановке  $\kappa_{3^r}$  вычисляем  $\beta_k$  ( $k = 2 \cdot 3^r + 1, \dots, 2 \cdot 3^{r+1}$ ) и т. д.

Соответствующая  $T$ -последовательность будет в этом случае иметь вид:

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{12}, \frac{11}{12}, \frac{17}{36}, \frac{19}{36}, \frac{1}{36}, \frac{35}{36}, \frac{11}{36}, \dots$$

7. Разберем при  $p \equiv 1$  случай, когда спектр  $A$  принадлежит множествам  $\Omega$ , отличным от  $[m, M]$ .

Пусть  $R(A) \in \mathcal{E}(M, m)$ , где  $\mathcal{E}(M, m)$  — замкнутая область, ограниченная эллипсом с фокусами в точках  $M, m$ , причем  $0 < m < M$  и  $0 \notin \mathcal{E}(M, m)$ . В работах [140, 143] показано, что в этом случае для оптимальных методов (10.18.2) справедливы формулы (10.18.17), (10.18.23) для параметров  $\alpha_k$ . Это означает, что чебышевским методом можно решать уравнения для несамосопряженных операторов не только с действительным, но и с комплексным спектром.

Рассмотрим случай, когда спектр  $A$  лежит в областях, состоящих из нескольких изолированных компонент. Справедлива следующая

**Теорема 10.18.1.** Пусть  $Q_m(t)$  — многочлен степени  $m \geq 1$ ;  $\Omega$  — множество точек  $t$ , удовлетворяющих неравенству  $|Q_m(t)| \leq r$ ,

$r > 0, 0 \notin \Omega$ ;  $l$  — произвольное натуральное число. Тогда для  $\forall N = ml$  экстремальное решение задачи для  $\Omega$  реализуется многочленом

$$P_N(t) = (Q_m(t)/Q_m(0))^l \quad \text{и} \quad E_N = (r/Q_m(0))^l.$$

Обозначим через  $t_1, \dots, t_m$  корни уравнения  $Q_m(t) = 0$ . Тогда для метода (10.18.2) при  $N = ml$  оптимальным будет набор параметров

$$\alpha_k = t_i^{-1} \quad \text{при} \quad k = i \pmod{m}.$$

При  $m = 1$  спектр  $A$  принадлежит некоторому кругу  $|t - a| \leq r$ ,  $|a| > r$  и  $t_1 = a$ . Следовательно, если (10.2.16) — уравнение, преобразованное из исходного алгоритмом, характерным для оптимальной последовательной верхней релаксации, то для такого уравнения  $\alpha_k = a^{-1}$  в оптимальном методе, т. е. чебышевское ускорение совпадает с самим алгоритмом последовательной верхней релаксации. Обобщение теоремы 10.18.1 дает

**Теорему 10.18.2.** [140, 143]. Пусть  $\Omega = \{t: Q_m(t) \in \mathcal{D}_d(-1, 1)\}$ ,  $Q_m(0) \in \mathcal{D}_d(-1, 1)$ , где  $Q_m(t)$  — многочлен  $m$ -й степени с действительными коэффициентами, а  $\mathcal{D}_d(-1, 1)$  — область, ограниченная эллипсом с фокусами в точках  $\pm 1$  и отношением осей, равным  $d < 1$ . Тогда для  $\forall N = ml$  экстремальное решение задачи для  $\Omega$  реализуется многочленом

$$P_N(t) = T_l(Q_m(t))/T_l(Q_m(0))$$

и

$$E_N(\Omega) = T_l((1 - d^2)^{-1/2})/T_l(Q_m(0)).$$

Пусть  $\{\omega_i\}_1^\infty$  —  $T$ -последовательность, а  $z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{mi}$  — корни уравнения

$$Q_m(t) = \cos \omega_i \pi.$$

Тогда параметры метода (10.18.2) при  $k = m(i - 1) + j, j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots$ , определим по формулам

$$\alpha_k = z_{ji}^{-1}. \quad (10.18.25)$$

Предельный случай теоремы —  $d = 0$ , когда спектр  $A$  лежит на нескольких отрезках, исследован в [128]. Эти отрезки могут лежать по разные стороны от нуля. Для  $m = 2$  длины отрезков должны быть одинаковыми.

8. Разберем оптимальные с весом циклические итерационные методы. Пусть  $\Omega = [m, M]$ , а  $\max_{t \in \Omega} p(t) = 1, p(t) > 0$  — непрерывная на  $\Omega$  функция, и пусть

$$t = (M + m - (M - m)x)/2. \quad (10.18.26)$$

Далее часто будем переходить от переменной  $t$  к переменной  $x \in [-1, 1]$ , а соответствующие функции от  $x$  обозначать старыми идентификаторами. В работе [140] показано, что при  $0 < c < p(x)$  средняя ско-

рость сходимости оптимального с весом метода (10.18.2) асимптотически оценивается величиной

$$\frac{1}{N} \left( \ln T_N(\delta) + \frac{\sqrt{\delta^2 - 1}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln p(z) dz}{(z - \delta) \sqrt{1 - z^2}} \right). \quad (10.18.27)$$

Второе слагаемое в (10.18.27) дает приращение скорости по сравнению с классическим случаем  $p \equiv 1$ . В [147] получены асимптотические формулы для параметров  $\alpha_k$ .

Для случая, когда

$$p(x) = \sqrt{\delta(x)/Q_m(x)}, \quad (10.18.28)$$

где  $\delta = \delta_1(x) = 1$ ,  $\delta = \delta_2(x) = (1 - x^2)$ ,  $\delta = \delta_3(x) = (1 \pm x)/2$ , а  $Q_m(x)$  — положительный на  $[-1, 1]$  многочлен степени  $m$ , для экстремальных многочленов  $P_N(x)$  и их корней, а следовательно, и параметров метода (10.18.2) можно дать явные формулы [140, 143]. Такие многочлены были исследованы П. Л. Чебышевым [240], А. А. Марковым [158], С. Н. Бернштейном [27], Г. Сегё [210]; назовем их ЧМБС-многочленами (по первым буквам фамилий).

Не уменьшая общности, можно считать, что

$$Q_m(x) = \sum_{j=1}^{2l} (1 + a_j x), \quad (10.18.29)$$

где  $a_j^2 \notin [1, \infty]$ ,  $2l \geq m$ ,  $a_j = 0$  при  $j > m$ . Пусть  $N \geq l$ ,  $\theta = \arccos x$ ,  $\beta_i = \cos \theta_i$ , где  $\beta_i$  — корни такого многочлена. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{2l} \psi_j(x),$$

где  $\psi_j(x)$  определены из условия

$$\cos \psi_k = \sqrt{\frac{(1 + a_k)(1 + x)}{2(1 + a_k x)}}; \quad \sin \psi_k = \sqrt{\frac{(1 - a_k)(1 - x)}{2(1 + a_k x)}}; \\ -\pi < \operatorname{Re} \psi_k < \pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2l.$$

Тогда при  $N \geq l$

$$P_N(x) = S_N(x)/S_N(\delta), \quad (10.18.30)$$

при  $\delta = \delta_1$

$$S_N(x) = \tilde{T}(x, Q_m) = \sqrt{Q_m(x)} \cos((N - l)\theta + \psi(\cos \theta)), \quad (10.18.31)$$

а корни  $\beta_k$  этого многочлена определяются из уравнений:  $\beta_i = \cos \theta_i$ ,  $\theta_i = ((i - 1/2)\pi + l\theta_i - \psi(\cos \theta_i))/N$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . (10.18.32)

При  $\delta = \delta_2$

$$S_N(x) = \tilde{U}_N(x, Q_m) = \sqrt{Q_m(x)/(1 - x^2)} \sin((N - l + 1)\theta + \psi(\cos \theta)), \quad (10.18.33)$$



а корни этого многочлена определяются из уравнений:  $\beta_i = \cos \theta_i$ ,

$$\theta_i = (i\pi + l\theta_i - \psi(\cos \theta_i))/(N + 1), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10.18.34)$$

Значения  $\theta_i$  могут быть успешно найдены из (10.18.32), (10.18.34) методом последовательных приближений. Заметим, что многочлены  $S_n(x)$  при  $n > l + 1$  ортогональны на  $[-1, 1]$  с весом  $\delta(x)(1 - x^2)^{-1/2}/Q_m(x)$  и

$$S_{n+1}(x) = 2S_n(x) - S_{n-1}(x). \quad (10.18.35)$$

Они переходят при  $Q_m \equiv 1$  в многочлены Чебышева первого и второго рода —  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$ . В этом случае в методе (10.18.2) параметры  $\alpha_k$  следует выбрать из множества чисел (10.18.17), где  $\beta_{jk}$  есть перемешанные перестановки  $\kappa_N$  числа, определяемые равенствами (10.18.23).

М. К. Гавуриным [50] был предложен критерий выбора параметров, основанный на сравнении невязки с ошибкой  $\epsilon^{k+N}$ . Поскольку  $\epsilon^k = A^{-1}r^k$ , то

$$\epsilon^{k+N} = P_N(A)A^{-1}r^k.$$

Это чебышевский с весом метод, в котором  $p(t) = t^{-1}$ . Такая стратегия предъявляет более сильные требования к подавлению ошибки  $\epsilon^{k+N}(\lambda)$  при значениях  $\lambda$ , соответствующих малым значениям  $A(\lambda)$ . Руководствоваться им целесообразно на заключительном цикле из  $N$  итераций. Тогда по известной функции невязки  $r^k(\lambda)$  можно оптимальным образом оценить убывание  $\epsilon^{k+N}$ .

9. В работе В. И. Лебедева, Ю. А. Власова, С. А. Финогенова [147] исследована эффективность метода (10.18.2), в котором параметры  $\alpha_k$  определяются  $T$ -последовательностью, в задачах, когда  $A$  — матрица, имеющая нелинейные элементарные делители. Е. Штифелем [336] был предложен метод выбора коэффициентов  $\alpha_k$ , в котором многочлены  $P_N(t)$  строились так, чтобы они в среднем с некоторым весом наименее отклонялись от нуля; подробнее этот метод разобран в § 10.21.

## § 10.19. БЛОЧНЫЙ ЧЕБЫШЕВСКИЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ДВУЦИКЛИЧЕСКИМИ МАТРИЦАМИ

Пусть уравнение (10.2.16) в результате разделения неизвестных  $u$  на две группы  $u_1$  и  $u_2$  можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D_1(\lambda) & -C_1(\lambda) \\ -C_2(\lambda) & D_2(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (10.19.1)$$

где  $D_i > 0$  и  $D_i^{-1} \in \mathfrak{M}$ ,  $i = 1, 2$ , а  $C_1^* = C_2$ . Матрицу в (10.19.1) с указанными свойствами назовем обобщенной двуциклической матрицей. На двуциклическом представлении оператора  $A$  основные методы блочной последовательной верхней релаксации [164, 341].

Рассмотрим следующий класс итерационных методов [141]:

$$\left. \begin{aligned} D_1 u_1^{k+1/2} &= C_1 u_2^k + f_1; & u_1^{k+1} &= u_1^k + \alpha_{k+1}(u_1^{k+1/2} - u_1^k); \\ D_2 u_2^{k+1/2} &= C_2 u_1^{k+1} + f_2; & u_2^{k+1} &= u_2^k + \beta_{k+1}(u_2^{k+1/2} - u_2^k), \end{aligned} \right\} \quad (10.19.2)$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & D_1^{-1} C_1 \\ D_2^{-1} C_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } \mu(B) = \mu^2 < 1, \quad \omega_0 = 2/(1 + \sqrt{1 - \mu^2}).$$

Обозначим  $L_m(\alpha, \beta)$  оператор перехода метода (10.19.2) после  $m$  шагов с параметрами  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_m, \beta_m$ .

При  $\alpha_k = \beta_k = \omega_0$  метод (10.19.2) превращается в оптимальный блочный метод последовательной верхней релаксации [341]. Для него, так же как в § 10.15, можно показать, что  $\mu(L_1(\omega_0, \omega_0)) = \omega_0 - 1$ , а

$$\|L_m(\omega_0, \omega_0)\| \approx Cm(\omega_0 - 1)^m, \quad (10.19.3)$$

где  $C > 0$  — некоторая постоянная.

Рассмотрим теперь один из вариантов блочного чебышевского метода [141]. Для этого положим в (10.19.2)  $\alpha_k = 1$  (тогда  $u_1^{k+1} = u_1^{k+1/2}$  и

$$\beta_k = [1 - \mu^2 \sin^2(\omega_k \pi / 2)]^{-1}, \quad (10.19.4)$$

где  $\{\omega_k\}_1^\infty$  —  $T$ -последовательность.

Оператор перехода от  $u_2^0$  к  $u_2^k$  будет в этом случае иметь вид  $V_k(\beta) = P_k(H)$ , где

$$P_k(t) = Q_k(t)/Q_k(1); \quad Q_k(t) = \prod_{i=1}^k (t - 1 + \beta_i^{-1}),$$

а  $H = D_2^{-1} C_2 D_1^{-1} C_1$ , причем  $H \geq 0$ , точнее,  $\text{Sp}(H) \in [0, \mu^2]$ .

Для  $k = N_n$  (в приведенном в § 10.18 примере  $T$ -последовательности  $N_n = 2 \cdot 3^n$ ) многочлен  $P_k(t)$  будет многочленом, наименее отклоняющимся от нуля на  $[0, \mu^2]$  среди всех многочленов, нормированных условием  $P_k(1) = 1$  и

$$\|V_{N_n}(\beta)\| = 2(\omega_0 - 1)^{N_n} (1 + (\omega_0 - 1)^{2N_n})^{-1}. \quad (10.19.5)$$

Оценки (10.19.3) и (10.19.5) показывают, что при  $k = N_n$  этот вариант блочного чебышевского метода сходится быстрее оптимального метода блочной последовательной верхней релаксации. Отметим, что для реализации этих обоих оптимальных методов требуется одна и та же априорная информация — знание величин  $\mu^2$ .

В работе [141] рассмотрены другие варианты метода (10.19.2), учитывающие для некоторых задач специфику расположения спектра оператора  $H$  и позволяющие ускорить сходимость итераций.

## § 10.20. ЧЕБЫШЕВСКИЙ ПОЛУИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

Пусть необходимо решить уравнение (10.13.10) методом (10.13.11). Идея полуитерационного метода основана на суммировании различными способами получающихся приближений  $u^k$ . Пусть  $v_k(N)$  — после-

довательность чисел, такая, что  $v_k(N) = 0$  при  $k > N$ . По последовательности  $u^k$  строим последовательность  $v^N$  по формулам

$$v^N = \sum_{k=0}^N v_k(N) u^k, \quad N = 1, 2, \dots \quad (10.20.1)$$

Например, полагая  $v_k(N) = (N+1)^{-1}$ , получаем средние, соответствующие методу суммирования Чезари.

Выясним, каким необходимым условиям должны удовлетворять коэффициенты  $v_k(N)$ . Если положить  $u^0 = u$ , то  $u^k = u$ . Естественно потребовать, чтобы и  $v^N = u$ , т. е.

$$\sum_{k=0}^N v_k(N) = 1. \quad (10.20.2)$$

Тогда для  $\varepsilon^N = u - v^N$  имеем

$$\varepsilon^N = \sum_{k=0}^N v_k(N) \eta^k = \sum_{k=0}^N v_k(N) b^k(\lambda) \eta^0, \quad (10.20.3)$$

где  $\eta^k = u - u^k$ . Пусть

$$Q_N(t) = \sum_{k=0}^N v_k(N) t^k. \quad (10.20.4)$$

Тогда если выполнено (10.20.2), то  $Q_N(1) = 1$  и  $\varepsilon^N = Q_N(b(\lambda))\eta^0$ .

Используя в качестве коэффициентов  $v_k(N)$  весовые множители разных методов суммирования, имеем довольно обширную группу итерационных методов, из которых можно выделить оптимальные в некотором смысле процессы. Легко убедиться, например, в том, что если  $Q_N(t) = t^N$ , то получаем метод простой итерации. Если же  $Q_N(t)$  есть многочлен Чебышева, то получаем итерационный метод, родственник с описанным в § 10.18. Однако он отличается от последнего тем, что если стратегию циклического метода (10.18.2) можно признать оптимальной лишь для заранее заданного фиксированного значения  $N$ , то методы типа (10.20.1) обеспечивают оптимальное в норме  $\|\cdot\|_1$  подавление компонент ошибки для любого  $N$ .

Одной из существенных особенностей итерационных методов типа (10.20.1) является то, что для вычисления  $v^N$  необходимо, вообще говоря, знать значения  $u^k$  при  $k = 0, 1, \dots, N$ , а это накладывает серьезные требования на память ЭВМ. Поэтому прежде всего выделим из этих методов те, которые требовали бы запоминания лишь конечного числа предыдущих приближений, и на этой группе методов проведем дальнейшую оптимизацию. Это можно сделать, например, следующим образом. Потребуем, чтобы коэффициенты  $v_k(N)$  в (10.20.1) были таковы, чтобы для многочленов  $Q_k(t)$ , определенных формулой (10.20.4), имели место рекуррентные соотношения

$$Q_{k+1}(t) = (a_k t + 1 - a_k - c_k) Q_k(t) + c_k Q_{k-1}(t), \quad (10.20.5) \\ k = 0, 1, 2, \dots; \quad Q_0(t) = 1; \quad c_0 = 0,$$

где  $a_k, c_k$  — вещественные скаляры. Можно убедиться в том, что это общий вид трехчленных соотношений для многочленов  $Q_k(t)$ , таких, что  $Q_k(1) = 1$ .

Тогда последовательность  $v^k$ , определенная формулами (10.20.1), (10.13.11), будет удовлетворять рекуррентным соотношениям

$$v^{k+1} = a_k [b(\lambda) v^k + \psi] + (1 - a_k - c_k) v^k + c_k v^{k-1}, \quad (10.20.6)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \text{ при } v^0 = u^0, c_0 = 0.$$

Таким образом, вычисляя  $v^{k+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) по формуле (10.20.6) можно реализовать итерационный метод (10.20.1), (10.13.11), запоминая в памяти ЭВМ только два предыдущих приближения:  $v^k$  и  $v^{k-1}$ .

Остановимся на одном из самых интересных вариантов, давшем название методу: это случай, когда многочлен  $Q_{k+1}(t)$  является многочленом Чебышева  $T_{k+1}[t/\mu(b)]/T_{k+1}[1/\mu(b)]$ , приведенным к отрезку  $[-\mu(b), \mu(b)]$ . Из формулы (10.18.12) при  $m = 1$  получаем коэффициенты рекуррентного соотношения (10.20.5) для  $k \geq 1$

$$a_k = 2T_k[1/\mu(b)]/\{\mu(b)T_{k+1}[1/\mu(b)]\}, c_k = 1 - a_k. \quad (10.20.7)$$

Следовательно, чебышевский полуитерационный метод имеет вид

$$v^{k+1} = a_k (bv^k + \psi - v^{k-1}) + v^{k-1}, \quad (10.20.8)$$

где  $a_k$  определены формулой (10.20.7).

Пользуясь формулами для  $T_k(t)$ , найдем предел  $a_k$  при  $k \rightarrow \infty$ :

$$a_k = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2(b)}} \frac{1 + (\mu^{-1}(b) + \sqrt{\mu^{-2}(b) - 1})^{-2k}}{1 + [\mu^{-1}(b) + \sqrt{\mu^{-2}(b) - 1}]^{-2(k+1)}}; \quad (10.20.9)$$

$$a_k \rightarrow \omega = 2 / (1 + \sqrt{1 - \mu^2(b)}). \quad (10.20.10)$$

Из (10.20.9) следует, что  $a_k$  стремится сверху к оптимальному множителю верхней релаксации. При  $a_k = \omega$  итерационный метод (10.20.8) совпадает с методом (10.15.17).

В статье Голуба и Варги [284] исследованы связи чебышевских полуитерационных методов с другими методами. В алгоритме Ланцоша [298] многочлен в (10.20.5) берется по формуле

$$Q_k(t) = (1 - T_{k+1}(t)) (1 + k)^{-2} (1 - t)^{-1}. \quad (10.20.11)$$

Положив в (10.20.11)  $t = \cos \theta$ , получим

$$Q_k(t) = \frac{1 - \cos(k+1)\theta}{(k+1)^2 (1 - \cos \theta)} = \frac{\sin^2 [(k+1)/2] \theta}{(k+1)^2 \sin^2 (\theta/2)}. \quad (10.20.12)$$

Из (10.20.12) следует, что многочлен  $Q_k(t)$  превращается при замене  $t = \cos \theta$  в ядро Фейера, употребляемое при суммировании тригонометрических рядов.

## § 10.21. ТРЕХЧЛЕННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Разбирая чебышевский полуитерационный метод, мы убедились в том, что трехчленные итерационные методы вида (10.20.6) принадлежат классу оптимальных методов среди всех многшаговых методов. Эти

методы привлекательны тем, что их теория связана с исследованием поведения многочленов  $Q_N(t)$ , подчиняющихся рекуррентным соотношениям (10.20.5), а формулы типа (10.20.5), как известно, могут определять последовательность многочленов, ортогональных в некоторой среднеквадратичной с весом метрике и минимизирующих некоторый положительный квадратичный функционал. Следовательно, если этот квадратичный функционал принять за квадрат нормы, в которой исследуется сходимость, то можно получить оптимальный метод относительно сходимости в этой норме. Ниже будет показано, что теория ортогональных многочленов составляет общий базис различных трехчленных методов. Трехчленные итерационные методы, основанные на теории ортогональных многочленов, исследовались многими авторами, например С. Ланцошем [298], М. Хестенсом и Е. Штифелем [285], Д. К. Фаддеевым [232] и др.

Общие трехчленные линейные итерационные методы решения уравнения (10.2.16), оставляющие точное решение стационарной точкой, можно записать в виде

$$u^{k+1} = u^k - H_k(Au^k - f) - S_k(u^k - u^{k-1}), \quad (10.21.1)$$

где  $H_k, S_k$  — некоторые операторы,  $S_0 \equiv 0$ . Пусть для простоты  $H_k = a_k I, S_k = c_k I$ , где  $a_k, c_k$  — скаляры,  $c_0 = 0$ . Тогда

$$u^{k+1} = u^k - a_k(Au^k - f) - c_k(u^k - u^{k-1}). \quad (10.21.2)$$

В методах типа (10.21.2) интересны для исследования три задачи.

1. Зная некоторую информацию о расположении спектра оператора  $A$ , определить коэффициенты метода (10.21.2) так, чтобы можно было достаточно эффективно оценить сходимость метода в некоторой, вообще говоря, унитарной норме для целого класса задач (10.2.16).

2. Для заданного уравнения (10.2.16) и заданного начального приближения  $u^0$  определить коэффициенты метода (10.21.2) так, чтобы получить оптимальную сходимость метода в некоторой, вообще говоря, подлежащей определению унитарной норме.

3. Обратная задача: задана некоторая последовательность пар чисел  $(a_k, c_k)$ , требуется определить, для каких задач и в какой метрике этот набор пар чисел дает оптимальный метод.

Устойчивость метода (10.21.2) будет иметь место, если корни уравнений  $z^2 - (1 - c_k - a_k)z - c_k = 0$  будут по модулю меньше единицы. Необходимым и достаточным условием этого является выполнение неравенств

$$|c_k| < 1, \quad |1 - c_k - a_k \gamma| < 1 - c_k \quad (10.21.3)$$

при  $\gamma \in \text{Sp}(A)$ .

Напомним основные свойства ортогональных многочленов. Соберем здесь для дальнейшего использования в итерационных методах некоторые результаты, связанные с именами Кристоффеля и Дарбу [210]. Пусть  $p_n(t)$  — ортогональная последовательность многочленов, соответствующих распределению  $d\sigma(t)$ :

$$\int p_n(t) p_m(t) d\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ N_n & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Здесь  $p_n(t)$  — многочлен  $n$ -й степени с единичным коэффициентом при  $t^n$ ,  $\sigma(t)$  — неубывающая функция ограниченной вариации, постоянная вне некоторого конечного отрезка  $[a, b]$ , а интегрирование проводится по всей действительной оси. Как правило, мы будем рассматривать функции  $d\sigma(t)$  вида  $d\sigma(t) = \rho(t) dt$ , где  $\rho(t)$  — непрерывная и положительная функция на некотором отрезке  $[a, b]$  и равная нулю вне этого отрезка, или где функция  $\rho(t)$  представима в виде

$$\rho(t) = \sum_{s=1}^m g_s^2 \delta(t - t_s). \quad (10.21.4)$$

Здесь  $a < t_s < b$ ,  $g_s \neq 0$  — действительные числа, а  $\delta(t)$  — дельта-функция. В последнем случае число ортогональных, отличных от нуля в точках  $t_s$  многочленов  $p_n(t)$  конечно, причем  $n = 0, 1, \dots, m - 1$ . Числа

$$C_n = \int t^n d\sigma(t), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (10.21.5)$$

назовем моментами. Многочлены  $p_n(t)$  находятся известным процессом ортогонализации Шмидта неотрицательных степеней  $t^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  Используя свойство ортогональности, получаем

$$p_{n+1}(t) = (t - \alpha_{n+1}) p_n(t) - \beta_{n+1} p_{n-1}(t), \quad (10.21.6)$$

где

$$\alpha_{n+1} = \int t p_n^2 d\sigma(t) / \int p_n^2 d\sigma(t); \quad \beta_{n+1} = \int t p_n p_{n-1} d\sigma(t) / \int p_{n-1}^2 d\sigma(t). \quad (10.21.7)$$

Функция

$$K_n(t_0, t) = \sum_{i=0}^n \frac{p_i(t_0) p_i(t)}{N_i} \quad (10.21.8)$$

носит название  $n$ -го ядра по отношению к распределению  $\sigma(t)$ . Она является многочленом  $n$ -й степени. Если  $R_m(t)$  — любой многочлен степени  $m \leq n$ , то

$$R_m(t) = \int K_n(t, \mu) R_m(\mu) d\sigma(\mu), \quad (10.21.9)$$

в частности, при  $R_m \equiv 1$  имеем

$$\int K_n(t, \mu) d\sigma(\mu) = 1.$$

Многочлен  $K_n(t_0, t)$  является ядром для представления  $n$ -й частной суммы  $s_n(t)$  ряда Фурье функции  $f(t)$ :

$$s_n(t) = \int f(\mu) K_n(\mu, t) d\sigma(\mu).$$

Введем унитарную норму

$$\|f\|_{\sigma} = \left[ \int f^2(t) d\sigma \right]^{1/2}. \quad (10.21.10)$$

Рассмотрим многочлен степени  $m \leq n$  с корнем в точке  $t_0$ :  $R_m(t) = (t - t_0) R_{m-1}(t)$ , где  $R_{m-1}(t)$  — многочлен степени  $m - 1$ . Из (10.21.9) получаем

$$0 = R_m(t_0) = \int K_n(t_0, \mu) R_{m-1}(\mu) (\mu - t_0) d\sigma(\mu).$$

Таким образом, справедлива

**Лемма 10.21.1.** Ядро  $K_n(t_0, t)$  ортогонально любому многочлену степени  $m < n$  относительно распределения  $d\sigma(t, t_0) = (t - t_0) d\sigma(t)$ .

Если  $t_0 \notin [a, b]$  и  $d\sigma(t) \geq 0$ , то распределение  $d\sigma(t, t_0)$  не меняет знака.

Подставляя в (10.21.9)  $R_n(t) = K_n(t_0, t)$ , имеем

$K_n(t_0, t) = \int K_n(t, \mu) K_n(t_0, \mu) d\sigma(\mu)$ , т. е. при  $t = t_0$  согласно (10.21.10) получаем

$$K(t_0, t_0) = \|K(t_0, t)\|_{\sigma}^2. \quad (10.21.11)$$

**Лемма 10.21.2.** Из всех многочленов степени  $n$ , равных единице при  $t = t_0$ , многочлен

$$S_n(t_0, t) = K_n(t_0, t)/K_n(t_0, t_0) \quad (10.21.12).$$

имеет наименьшую норму  $\|\cdot\|_{\sigma}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_n(t)$  — произвольный многочлен степени  $n$ , такой, что  $\varphi_n(t_0) = 0$ , а  $R_n(t) = \varphi_n(t) + S_n(t_0, t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|R_n(t)\|_{\sigma}^2 &= \|S_n(t_0, t)\|_{\sigma}^2 + \|\varphi_n(t)\|_{\sigma}^2 + 2 \int \frac{K_n(t_0, t) \varphi_n(t)}{K_n(t_0, t_0)} d\sigma(t) = \\ &= \|S_n(t_0, t)\|_{\sigma}^2 + \|\varphi_n(t)\|_{\sigma}^2 \geq \|S_n(t_0, t)\|_{\sigma}^2. \end{aligned} \quad (10.21.13)$$

Равенство в (10.21.13) достигается тогда и только тогда, когда  $\varphi_n(t) \equiv 0$ . Лемма доказана.

Если  $u^{k+1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , находятся из соотношений (10.21.2), то ошибки  $\varepsilon^{k+1}$  удовлетворяют равенствам  $\varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k - a_k A \varepsilon^k - c_k (\varepsilon^k - \varepsilon^{k-1})$ , так что

$$\varepsilon^{k+1} = P_{k+1}(A) \varepsilon^0, \quad (10.21.14)$$

где  $P_k(t)$  — последовательность многочленов, связанных рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) &= (1 - c_k - a_k t) P_k(t) + c_k P_{k-1}(t), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, P_0 = 1, c_0 = 0. \end{aligned} \quad (10.21.15)$$

Легко убедиться в том, что многочлены, найденные по формулам (10.21.15), такие, что  $P_{k+1}(0) = 1$ .

Пусть  $d\sigma(t)$  — некоторое распределение, равное нулю вне отрезка  $B = [m, M]$ ,  $0 < m < M$  и  $A(\lambda) \in [m, M]$ . Предположим для простоты, что функция  $t = A(\lambda)$  имеет обратную  $\lambda = \psi(t)$ , определенную на множестве  $B$  с областью значений в  $\Lambda$ . Пусть  $\eta^\alpha(t) = \varepsilon^\alpha[\psi(t)]$ , тогда равенство (10.21.14) примет вид

$$\eta^{k+1}(t) = P_{k+1}(t) \eta^0(t) \quad (10.21.16)$$

при  $t \in B$ . Не нарушая общности, можно считать, что  $\eta^0(t) = 0$  при  $t \notin B$ . Вычислим  $\|\eta^{k+1}\|_{\sigma}$ :

$$\|\eta^{k+1}\|_{\sigma}^2 = \int P_{k+1}^2(t) [\eta^0(t)]^2 d\sigma(t). \quad (10.21.17)$$

Формулу (10.21.17) можно переписать как квадрат некоторой нормы многочлена  $P_{k+1}(t)$ :

$$\|P_{k+1}\|_p^2 = \int P_{k+1}^2(t) d\rho(t), \quad (10.21.18)$$

где

$$d\rho(t) = [\eta^\circ(t)]^2 d\sigma(t). \quad (10.21.19)$$

Теперь посмотрим, как могут быть решены первые две задачи, сформулированные в начале параграфа.

1. Для исследования первой задачи удобнее исходить из системы ортогональных на отрезке  $[-1, 1]$  многочленов. Для этого перейдем от переменной  $t$  к  $x$  по формуле

$$t = (M + m - (M - m)x)/2. \quad (10.21.20)$$

Пусть  $p_n(x)$  — системы многочленов вида  $p_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots$ , ортогональная с некоторым весом  $t(x)$  на  $[-1, 1]$  и удовлетворяющая рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= (x - \delta_{n+1})p_n(x) - \lambda_{n+1}p_{n-1}(x), \\ p_0 &= 1; \quad p_{-1} = 0; \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (10.21.21)$$

Для нормированных многочленов Чебышева первого и второго рода  $\delta_k = 0$ ,  $\lambda_k = 1/4$  при  $k > 1$ , а для ЧМБС-многочленов  $\delta_k = 0$ ,  $\lambda_k = 1/4$  при  $k > l + 1$ . Для широкого класса весов  $t(x)$  имеем  $\delta_k \rightarrow 0$ ,  $\lambda_k \rightarrow 1/4$  при  $k \rightarrow \infty$ . Последовательности многочленов  $p_k(x)$  сопоставим метод (10.21.2) с

$$a_k = \frac{2p_k(\delta)}{(M-m)p_{k+1}(\delta)}; \quad c_k = -\lambda_{k+1} \frac{p_{k-1}(\delta)}{p_{k+1}(\delta)},$$

который удобнее реализовать по формуле

$$u^{k+1} = u^k - \frac{2\omega_k}{M-m} (Au^k - f) - \lambda_{k+1} \omega_{k+1} \omega_k (u^k - u^{k-1}), \quad (10.21.22)$$

где

$$\omega_{k+1} = ((\delta - \delta_{k+1}) - \lambda_{k+1} \omega_k)^{-1}; \quad \omega_0 = 0; \quad \delta = (M + m)/(M - m).$$

Тогда многочлен  $P_N(t)$  примет вид

$$P_N(t) = p_N\left(\frac{M+m-2t}{M-m}\right) / p_N(\delta). \quad (10.21.23)$$

При  $\delta_n = 0$ ;  $\lambda_n = 1/4$ ;  $n > 1$ ;  $\delta_1 = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$  получаем чебышевский метод, оптимальный в норме  $\|\cdot\|_1$  для каждого  $N$ . Для уравнений второго рода он был рассмотрен в § 10.20. Аналогично строится метод, оптимальный с весом вида (10.18.28), использующий ЧМБС-многочлены. Можно показать [143], что для этих методов

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \left(\frac{2}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}\right)^2; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}}\right)^2$$

и условия устойчивости (10.21.3) при  $k \geq l + 1$  выполнены.



Употребляя в (10.21.2) многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля в среднем с некоторым весом, получаем метод с соответствующими этому экстремальными характеристиками.

Трехчленные методы исследовались С. Франкелом [277], В. С. Рябенским и А. Ф. Филиповым [201], Р. Хохштрассером [286], А. А. Абрамовым [1], Д. К. Фаддеевым [232], Л. Ричардсоном [327] и многими другими авторами.

Проведем дальнейшие исследования их на уравнении второго рода (10.13.10). Рассмотрим подкласс методов (10.21.2) вида

$$u^{k+1} = (1 + \alpha_k) [b(\lambda) u^k + \psi] - \alpha_k u^{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

получающийся из общего случая при  $c_k = -\alpha_k$ ;  $a_k + c_k = 1$ . В методе простой итерации  $\alpha_k = 0$ . В методах, получивших название ВТ-процессов (см. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева [233]) и обобщающих метод А. А. Абрамова [1], предлагается выбирать  $\alpha_k$  из некоторой последовательности, состоящей из нулей и единиц. Пусть после  $k$ -го итерационного шага выбрана такая последовательность  $\alpha_j$ , что  $\alpha_k = \dots = \alpha_{k+i} = 0$ ;  $\alpha_{k+i+1} = \dots = \alpha_{k+N-1} = 1$ , где  $i \geq 0$ , а  $\alpha_{k+N} = 0$ . Тогда, воспользовавшись формулой (10.18.12) при  $m = 1$  для многочленов Чебышева, получаем

$$\varepsilon^{k+N} = b^i(\lambda) T_{N-i}(b(\lambda)) \varepsilon^k. \quad (10.21.24)$$

Следовательно, получаем сходящийся при  $\mu(b) < 1$  итерационный метод. Он оригинален тем, что ускорение сходимости в нем достигается без использования значения  $\mu(b)$ .

2. Очень интересно решение второй задачи. Оказывается, можно решить задачу об оптимальном выборе коэффициентов для каждого конкретного начального приближения, не зная явного вида начальной ошибки. Методы такого типа были разработаны С. Ланцошем [298], М. Хестенсом, Е. Штифелем [285, 336] и другими математиками; они получили названия методов минимальных итераций, или сопряженных градиентов. Для решения этой задачи обратимся к равенству (10.21.18). Из него следует, что коэффициенты рекуррентных соотношений для  $P_{k+1}(t)$  должны быть выбраны так, чтобы минимизировать  $\|P_{k+1}\|_\rho^2$ . Согласно лемме 10.21.2, минимум  $\|P_{k+1}\|_\rho^2$  достигается, если взять

$$P_{k+1}(t) = K_{k+1}(0, t)/K_{k+1}(0, 0), \quad (10.21.25)$$

где, согласно (10.21.17) и лемме 10.21.1,  $K_n(0, t)$  — система многочленов, ортогональных относительно распределения

$$d\tau = t [\eta^0(t)]^2 d\sigma(t). \quad (10.21.26)$$

Тогда, учитывая (10.21.11), (10.21.17), (10.21.18), получаем, что

$$\|\eta^{k+1}\|_\sigma = \|P_{k+1}\|_\rho = [K_{k+1}(0, 0)]^{-1/2}. \quad (10.21.27)$$

Таким образом, оценка (10.21.27) является оценкой снизу для ошибок на  $k + 1$ -м шаге в норме  $\|\cdot\|_\sigma$  для всех итерационных методов типа (10.21.2), начинающихся с одного и того же начального приближения.

Интересно рассмотреть случай, когда множество  $B$  состоит из конечного числа различных точек  $t_s > 0, s = 1, 2, \dots, M$ . Тогда, полагая  $d\sigma(t) = \rho dt$ , где функция  $\rho$  определена в (10.21.4), получаем

$$d\tau = t \sum_{s=1}^M [\eta^0(t_s)]^2 g_s^2 \delta(t - t_s) dt. \quad (10.21.28)$$

Следовательно, в этом случае существует только  $M$  первых многочленов  $K_n(0, t), n = 0, 1, \dots, M - 1$ , отличных от нуля во всех точках  $t = t_s$ , и поэтому

$$\|\eta^{k+1}\|_{\sigma}^2 = \sum_{s=1}^M g_s^2 [P_{k+1}(t_s)]^2 [\eta^0(t_s)]^2 t_s = 0 \text{ при } k \geq M - 1. \quad (10.21.29)$$

Если множители  $t_s$  сохраняют знак, то из (10.21.29) следует, что  $\eta^{k+1}(t_s) = 0$  при  $k \geq M$ . Таким образом, на  $M$ -й итерации метод дает точное решение при любом начальном приближении. В этом случае итерационный метод (10.21.2) перестает быть таковым и превращается в прямой метод. А поскольку результат каждой итерации по этому методу минимизирует функционал  $\|\eta^{k+1}\|_{\sigma}^2$ , то этот метод является вариационным.

Пусть  $A(\lambda) > 0$ . Получим формулы, дающие решение второй задачи. Для этого следует найти коэффициенты в (10.21.15) для многочленов  $P_{k+1}(t)$  вида (10.21.25). Заметим, что эти многочлены ортогональны относительно распределения (10.21.26) и  $P_{k+1}(0) = 1$ . Следуя работе Е. Штифеля [336], введем новые неизвестные  $c_k = -\gamma_k a_k$ . Тогда соотношения (10.21.15) запишутся в виде

$$P_{k+1}(t) = P_k(t) + a_k \{\gamma_k [P_k(t) - P_{k-1}(t)] - t P_k(t)\}. \quad (10.21.30)$$

Пусть  $\gamma_0 = 0, P_0(t) = 1$ , тогда  $P_1(t) = 1 - a_0 t$ . Величину  $a_0$  определим из условия ортогональности  $P_1(t)$  к  $P_0(t)$ :

$$a_0 = \int d\tau / \int t d\tau. \quad (10.21.31)$$

Умножая (10.21.30) на  $P_{k-1} d\tau$  и интегрируя, получаем

$$-\gamma_k \int P_{k-1}^2 d\tau - \int t P_{k-1} P_k d\tau = 0. \quad (10.21.32)$$

Из соотношения (10.21.30), в котором  $k$  заменено  $k - 1$ , получаем

$$-t P_{k-1} = P_k / a_{k-1} - (1/a_{k-1} + \gamma_{k-1}) P_{k-1} + \gamma_{k-1} P_{k-2}.$$

Подставляя это соотношение в (10.21.32), находим

$$\gamma_k = (1/a_{k-1}) \int P_k^2 d\tau / \int P_{k-1}^2 d\tau. \quad (10.21.33)$$

Умножим теперь (10.21.30) на  $P_k d\tau$  и результат проинтегрируем, тогда

$$a_k = \left( \left( \int t P_k^2 d\tau / \int P_k^2 d\tau \right) - \gamma_k \right)^{-1}; \quad (10.21.34)$$

$$c_k = -\gamma_k a_k. \quad (10.21.35)$$

Формулы (10.21.31), (10.21.33) — (10.21.35) дают возможность по известным величинам  $a_{k-1}, P_k(t), P_{k-1}(t)$  вычислить  $\gamma_k, a_k, c_k$ , а следовательно, и многочлен  $P_{k+1}(t)$  по формуле (10.21.30).

Формулы (10.21.31), (10.21.33), (10.21.34) с учетом (10.21.16), (10.21.26) и равенств  $t = A(\lambda)$ ,  $te^k = r^k$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \int r^0 \varepsilon^0 d\alpha / \int |r^0|^2 d\alpha; \\ \gamma_k &= (1/a_{k-1}) \int r^k \varepsilon^k d\alpha / \int r^{k-1} \varepsilon^{k-1} d\alpha; \\ a_k &= \left( \left( \int |r^k|^2 d\alpha / \int r^k \varepsilon^k d\alpha \right) - \gamma_k \right)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (10.21.36)$$

где  $\alpha(\lambda) = \sigma(A(\lambda))$ , а  $r^k$  означает невязку в решении на  $k$ -м итерационном шаге, которую можно вычислить, зная  $u^k$ .

Формулы (10.21.36) могут быть расчетными в том случае, когда уравнение (10.13.3) само есть результат преобразования уравнения

$$Lu = \psi \quad (10.21.37)$$

путем умножения его на сопряженный оператор  $\bar{L}$ . Тогда в уравнении (10.13.3)  $A = \bar{L}L$ , а  $f = \bar{L}\psi$ . Пусть  $L$  — действительная функция. Если обозначить  $q^k$  невязку уравнения (10.21.37) при  $u = u^k$ , то  $q^k = L\varepsilon^k$ ;  $r^k = Lq^k$  и формулы (10.21.36) примут вид

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \int |q^0|^2 d\alpha / \int |r^0|^2 d\alpha; \\ \gamma_k &= \frac{\int |q^k|^2 d\alpha}{a_{k-1} \int |q^{k-1}|^2 d\alpha}; \quad a_k = \left[ \frac{\int |r^k|^2 d\alpha}{\int |q^k|^2 d\alpha} - \gamma_k \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (10.21.38)$$

Подберем теперь распределение  $d\alpha(\lambda)$  так, чтобы в формулы (10.21.36) входили только невязки  $r^k$ . Для этого положим  $d\alpha(\lambda) = A(\lambda) d\xi(\lambda)$  и учтем, что  $r^k = A(\lambda)\varepsilon^k$ . Тогда формулы (10.21.36) переписутся в виде

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \int |r^0|^2 d\xi / \int A |r^0|^2 d\xi; \quad \gamma_k = (1/a_{k-1}) \int |r^k|^2 d\xi / \int |r^{k-1}|^2 d\xi; \\ a_k &= \left[ \left( \int A |r^k|^2 d\xi / \int |r^k|^2 d\xi \right) - \gamma_k \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10.21.39)$$

Это и есть формулы различных вариантов метода Ланцоша, или метода сопряженных градиентов. Варианты отличаются друг от друга удобными для реализации способами выбора распределений  $d\sigma(t)$  или, что одно и то же,  $d\xi(\lambda)$ , которые учитывают спектральную функцию  $A$ . Формулы (10.21.39) удобнее взять в виде

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= [r^0, r^0]_M / [Ar^0, r^0]_M; \\ \gamma_k &= \frac{1}{a_{k-1}} [r^k, r^k]_M / [r^{k-1}, r^{k-1}]_M; \\ a_k &= ([Ar^k, r^k]_M / [r^k, r^k]_M - \gamma_k)^{-1}, \\ & \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (10.21.40)$$

где оператором  $M > 0$  определяется метрика; в простейшем случае  $M = I$ .

Может сложиться впечатление, что метод сопряженных градиентов предпочтительнее чебышевских методов. Однако это не очевидно, так как:

1) в формулах (10.21.40) приходится подсчитывать скалярные произведения; это увеличивает цену одной итерации;

2) метод может быть неустойчив по отношению к ошибкам округления, а порождаемые им ошибки могут заметно изменить величины в формулах (10.21.40). Неустойчивость метода возникает, если  $\|P_k(A)\| \gg \gg 1$  при некоторых  $1 \leq k < N$ . В методе (10.21.2), (10.21.40) малость величины  $\|P_k(A)\|$  не является необходимым условием его сходимости.

Пусть решаем серию самосопряженных задач (10.2.16) методом (10.21.2), (10.21.40) с разными  $f, u^0, A$ , но такими, что  $\text{Sp}(A) \in [m, M]$ . Каждую задачу назовем вариантом  $(f, u^0, A)$ . Справедлива [144]

**Теорема 10.21.1.** Пусть все вычисления в методе (10.21.2), (10.21.40) выполняются точно. Тогда для любых  $N, R > 1$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что как только  $m/M < \varepsilon$ , то найдется такой вариант  $(f, u^0, A)$ , что  $\|P_s(A)\| > R^s$  при  $1 \leq s < N$ .

**Доказательство.** Не уменьшая общности, можно считать  $M = 1$ . Пусть  $\Delta = [1/(4(R+1)), 1/(2(R+1))]$ , тогда возьмем  $\varepsilon = 1/(4(R+1))$ . В качестве варианта  $(f, u^0, A)$  возьмем вариант, характеризующийся следующими свойствами: 1) спектр оператора состоит не менее чем из  $N$  точек; одна точка спектра, пусть это будет  $\lambda_1$ , совпадает с единицей, т. е.  $\lambda_1 = 1$ , а остальные точки спектра принадлежат отрезку  $\Delta$ ; 2) за начальное приближение  $u^0$  возьмем такую функцию, чтобы для ошибки  $\varepsilon^0$  было справедливо следующее представление:

$$\varepsilon^0 = \sum_{n>1} \varepsilon_n^0 \varphi_n, \quad (10.21.41)$$

где  $\varphi_n$  — собственные функции оператора  $A$ , и не менее  $N - 1$  чисел  $\varepsilon^0$  в (10.21.41) было отлично от нуля. Тогда все корни  $P_s(t)$ ,  $1 \leq s \leq N - 1$ , будут принадлежать отрезку  $\Delta$ , и поэтому

$$\|P_s(A)\| = |P_s(1)| \geq (1 + 2R)^s > R^s.$$

При численной реализации методом (10.21.2), (10.21.40) варианта  $(f, u^0, A)$  типа, описанного в теореме 10.21.1, сначала происходит сильный рост и накопление ошибок округления. В разложении по собственным функциям эти ошибки имеют большие по модулю коэффициенты Фурье при тех  $\varphi_n$ , которые соответствуют собственным значениям, близким к  $M$ . Вследствие этого изменяются значения коэффициентов  $a_k, c_k$  в (10.21.40), т. е. метод перестает быть оптимальным; он начинает «бороться» с порожденными им же самими ошибками, распределенными уже по всему спектру.

В работе [144] показано также, что на определенном классе начальных ошибок чебышевский метод с соответствующим весом является оптимальным методом типа (10.21.2) с точки зрения теории игр.

Интересно решение обратной задачи: по набору  $a_k, c_k$  воссоздать распределение  $dt$ , а по нему — класс начальных ошибок и операторов

$A(\lambda)$ , для которых метод (10.21.2) является оптимальным. Тема же этой задачи связана с решением неполной проблемы моментов [210] и изложена в § 10.22.

## § 10.22. КОМБИНИРОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Представляется заманчивым исследовать возможности следующего итерационного алгоритма [140, 143]. Сначала решаем задачу (10.21.6)  $(Sp(A) \in [m, M])$  методом сопряженных градиентов (10.21.2), (10.21.40). В процессе этих итераций вырабатывается информация о границах спектра и распределении начальной ошибки. А затем, используя эту информацию, переходим на линейный оптимальный с весом метод типа (10.18.2), (10.21.2), вес которого аппроксимирует спектральную функцию начального приближения.

Пусть для оператора  $A > 0$  мы сделаем  $l + 1$  итераций (10.21.2), (10.21.40). Метод сопряженных градиентов на каждом шаге оптимально минимизирует ошибку в некоторой унитарной норме, зависящей от оператора задачи и начального приближения: он порождает ортогональную, удовлетворяющую рекуррентным формулам (10.21.6) систему многочленов  $\{p_k(t)\}_0^{l+1}$  относительно некоторого неизвестного семейства весов, характеризующих начальное распределение ошибки. Пусть  $M_k, m_k$  — соответственно наибольший и наименьший корень  $p_k(t)$ ,  $M_{k+1} > M_k, 0 < m_{k+1} < m_k$ . Выбирая  $l$  достаточно большим и пользуясь асимптотическими формулами для нулей ортогональных многочленов [210], определяем границы спектра  $m, M$ . Перейдя в (10.21.21) от переменной  $t$  к переменной  $x$  по формуле (10.21.20) и нормировав затем многочлены  $p_k(x)$  так, чтобы коэффициент при  $x^k$  был равен единице, получим многочлены  $p_k(x)$ , для которых известны коэффициенты  $\delta_n, \lambda_n$  в (10.21.21),  $0 \leq n \leq l + 1$ .

Теперь сделаем допущение, что построенная система многочленов  $\{p_n(x)\}_0^{l+1}$  принадлежит бесконечному семейству многочленов, ортогональных на  $[-1, 1]$  с весом вида

$$W(x) = \sqrt{1-x^2}/B_{2l+1}(x), \quad (10.22.1)$$

где  $B_{2l+1}(x)$  — подлежащий определению неотрицательный на  $[-1, 1]$  многочлен степени  $2l + 1$ . Тогда, если в формулах (10.21.21) положить  $\delta_n = 0, \lambda_n = 1/4$  при  $n > l + 1$ , получим систему многочленов  $\{p_n(x)\}_0^\infty$ , ортогональную с весом (10.22.1) при

$$B_{2l+1}(x) = p_{l+1}^2(x) - xp_{l+1}(x)p_l(x) + p_l^2(x)/4. \quad (10.22.2)$$

Этому выбору параметров при  $k > l + 1$  соответствует линейный метод (10.21.22), оптимальный с весом (10.18.28) при  $\delta = \delta_2, Q_m(x) = B_{2l+1}(x)$ .

Многочлен  $\tilde{B}_{2l+1}(t) = B_{2l+1}(x(t))$  будет сравнительно мал в окрестности тех точек спектра, где величины  $|e_n^0|$  сравнительно велики. Таким образом, по поведению многочлена  $B_{2l+1}(t)$  можно определить расположение той части спектра оператора  $A$ , которой соответствует: а) существенная доля в начальной ошибке, разложенной по собственным функциям; б) спектральный состав ошибок округления.

Дальнейшие итерации можно продолжить и чебышевским с весом методом типа (10.18.2). Численные эксперименты, проведенные Ю. А. Власовым [143], подтвердили высокую эффективность такого рода методов.

### § 10.23. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

Этот метод основан на построении последовательности операторов, приближающихся к  $A^{-1}$  (см. [332, 287, 260]). Он является обобщением итерационной формулы для отыскания обратных чисел, полученной по методу Ньютона. Метод содержит достаточно экономичную схему вычисления  $A^{-1}$  и предполагает возможность хранения в памяти ЭВМ оператора, приближающего  $A^{-1}$ .

Пусть для решения уравнения (10.13.3) имеем оператор  $C(\lambda)$ , такой, что  $C(\lambda)A(\lambda) \sim I$ . Тогда если положить  $u^0 = Cf$ , то можно ожидать, что  $\varepsilon^0 \sim Cr^0$  и что приближение  $u^1 = u^0 + Cr^0 = C(2I - AC)f$  лучше аппроксимирует  $u$ , чем  $u^0$ . Таким образом, по начальному оператору  $C$  найдем новый оператор  $C_1 = C(2I - AC)$ , который должен лучше приближать  $A^{-1}$ . Разовьем эту идею. Определим последовательность операторов согласно формулам

$$B_p = I - C_p A; \quad C_{p+1} = (I + B_p) C_p,$$

где  $C_0 = C$ ;  $B_0 = I - C_0 A$ . Тогда

$$B_{p+1} = I - C_{p+1} A = I - (I + B_p)(I - B_p) = B_p^2,$$

т. е.  $B_p = B_0^{2^p}$ .

Если  $A(\lambda) > 0$ , то можно всегда, не уменьшая общности, считать, что  $0 < A(\lambda) < 1$ . Тогда  $0 < 1 - A < 1$ . Следовательно, можно найти такие операторы  $C_0$ , что  $|I - C_0 A| < 1$ , например  $C_0 = I$ , а тогда  $|B_p| = |I - C_0 A|^{2^p}$  достаточно быстро стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$ . Поскольку

$$\begin{aligned} (I + B_k)(I + B_{k-1}) \dots (I + B_0) &= (I + B_0^{2^k})(I + B_0^{2^{k-1}}) \dots (I + B_0) = \\ &= I + B_0 + \dots + B_0^{2^{k+1}-1} \rightarrow (I - B_0)^{-1} = A^{-1} C_0, \end{aligned}$$

последовательность операторов  $(I + B_k)(I + B_{k-1}) \dots (I + B_0) C_0$  стремится к  $A^{-1}$ . Значит, для нахождения  $u$  можно предложить итерационный процесс

$$u^0 = C_0 f; \quad u^{k+1} = (I + B_0^{2^k}) u^k, \quad (10.23.1)$$

в котором оператор  $B_0^{2^k}$  образуется умножением  $B_0^{2^{k-1}}$  на  $B_0^{2^{k-1}}$ .

В книге Хаусхолдера [236] предложено использовать этот метод при другой вычислительной схеме. Пусть

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= u^0 = Cf; \quad r^0 = f - Au^0 = Bf; \\ u^{k+1} &= Cr^k; \quad r^{k+1} = r^k - Av^{k+1} = Br^k. \end{aligned} \right\} \quad (10.23.2)$$

Тогда

$$u^k = v^0 + v^1 + \dots + v^k, \quad r^k = B^{k+1} f. \quad (10.23.3)$$

Этот процесс состоит в последовательности определенных операций над невязками  $r^k$  и нахождении новых добавок к приближенному решению.

#### § 10.24. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА АППРОКСИМАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

Пусть

$$P_n(\lambda, t) = \sum_{k=0}^n a_k(\lambda) t^k \quad (10.24.1)$$

есть многочлен по  $t$  с коэффициентами, зависящими от  $\lambda \in \Lambda$ , в котором  $a_0(\lambda) = A(\lambda)$ . Пусть  $\xi_k(\lambda)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — корни  $P_n(\lambda, t)$ , относительно которых известно, что

$$\xi_k(\lambda) \leq \beta < 0; \quad \lambda \in \Lambda. \quad (10.24.2)$$

Рассмотрим следующее нестационарное уравнение:

$$\sum_{k=0}^n a_k(\lambda) \frac{d^k u(\lambda, t)}{dt^k} = f(\lambda). \quad (10.24.3)$$

Для уравнения (10.24.3) поставим задачу Коши: найти решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\left. \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{t=0} = \varphi_i(\lambda), \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (10.24.4)$$

Решение этой задачи запишется в виде

$$u(\lambda, t) = \sum_{k=1}^n c_k(\lambda) \exp[\xi_k(\lambda) t] + A^{-1}(\lambda) f, \quad (10.24.5)$$

где коэффициенты  $c_k(\lambda)$  определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k(\lambda) + A^{-1}(\lambda) f(\lambda) &= \varphi_0(\lambda); \\ \sum_{k=1}^n c_k(\lambda) [\xi_k(\lambda)]^i &= \varphi_i(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (10.24.6)$$

В силу условия (10.24.2)

$$|u(\lambda, t) - A^{-1}(\lambda) f(\lambda)| \leq O[\exp(\beta t)] \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (10.24.7)$$

Видно, что решение (10.24.5) нестационарной задачи стремится при  $t \rightarrow \infty$  к решению стационарной задачи (10.13.3). Чем больше по абсолютной величине значение  $\beta$ , отделяющее в неравенстве (10.24.2)  $\xi_k(\lambda)$  от нуля, тем быстрее стремление  $u(\lambda, t)$  к своему пределу. Если заменить дифференциальное уравнение (10.24.3) разностным по  $t$  уравнением, определенным на некоторой сетке  $t = t_j$ ,  $j = 0, \dots$ , то получатся рекуррентные соотношения, связывающие значения функ-

ции  $u(\lambda, t)$  в некоторых точках сетки  $t_j$ . Если решение разностной схемы обладает тем же свойством (10.24.7), то полученную систему рекуррентных соотношений можно рассматривать как итерационный метод решения уравнения (10.13.3).

Существует другой способ получения системы разностных уравнений, в котором функции  $\exp[\xi_k(\lambda)t]$  заменяются дробно-рациональными функциями. Разберем его при  $n = 1$  и  $A \geq m > 0$ . Тогда задача (10.24.3), (10.24.4) запишется в виде

$$B(\lambda) \frac{du}{dt} = -[A(\lambda)u - f], \quad u|_{t=0} = \varphi_0(\lambda), \quad (10.24.8)$$

где  $B(\lambda) \geq b > 0$ . Решение задачи (10.24.8) дается формулой

$$u(\lambda, t) = \{1 - \exp[-S(\lambda)t]\} A^{-1}(\lambda)f(\lambda) + \exp[-S(\lambda)t] \varphi_0(\lambda), \quad (10.24.9)$$

где

$$S(\lambda) = B^{-1}(\lambda) A(\lambda). \quad (10.24.10)$$

Приближим функцию  $\exp(-z)$  дробно-рациональными функциями

$$\exp(-z) \approx n_q(z)/d_p(z), \quad (10.24.11)$$

где  $n_q(z)$ ,  $d_p(z)$  — многочлены степени  $q$  и  $p$  соответственно, имеющие  $p + q + 1$  подлежащих выбору коэффициентов, которые определяются условием  $d_p(z) \exp(-z) - n_q(z) = O(|z|^{p+q+1})$  при  $z \rightarrow 0$ . Дробно-рациональные разложения Падэ были известны давно, для получения их можно, например, пользоваться разложением  $\exp(-z)$  в цепную дробь. Вот разложения с первыми номерами:

$p \backslash q$	0	1	2
0	1	$1 - z$	$1 - z + z^2/2$
1	$\frac{1}{1+z}$	$\frac{2-z}{2+z}$	$\frac{6-4z+z^2}{6+2z}$
2	$\frac{1}{1+z+z^2/2}$	$\frac{6-2z}{6+4z+z^2}$	$\frac{12-6z+z^2}{12+6z+z^2}$

Используем их для построения итерационных формул. Формулу (10.24.9) перепишем в виде

$$u(\lambda, t + \Delta t) = \exp(-S\Delta t) u(\lambda, t) + (1 - \exp(-S\Delta t)) A^{-1}f. \quad (10.24.12)$$

Пусть  $p = 0$ ,  $q = 1$ , тогда  $\exp(-S\Delta t) \approx 1 - S\Delta t$ . Подставляя это разложение в (10.24.12), получаем, считая  $u^k = u(\lambda, t_k)$ ,

$$B(\lambda)(u^{k+1} - u^k)/\Delta t = -[Au^k - f]. \quad (10.24.13)$$



Мы построили разностную схему для интегрирования уравнения (10.24.8). Для нее известно ограничение на шаг:  $0 \leq \Delta t < \frac{2}{\max_{\lambda} |\lambda|}$ , при котором  $|1 - S\Delta t| < 1$ . Считая  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$  параметром, мы получим итерационный метод типа (10.18.1).

Пусть  $p = 1$ ,  $q = 0$ , тогда  $\exp(-S\Delta t) \approx (1 + S\Delta t)^{-1}$  и

$$B(u^{k+1} - u^k)/\Delta t = -(Au^{k+1} - f).$$

Это неявная разностная схема (или итерационный метод) без ограничений на шаг  $\Delta t > 0$ , в которой для оператора перехода  $T = (B + \Delta t A)^{-1} B$  всегда выполнены неравенства  $0 < T < 1$  при  $\Delta t > 0$ .

Пусть  $p = q = 1$ , тогда  $\exp(-S\Delta t) \approx (1 + S\Delta t/2)^{-1}(1 - S\Delta t/2)$  и

$$B(u^{k+1} - u^k)/\Delta t = -\frac{1}{2} A(u^k + u^{k+1}) + f.$$

Это схема Кранка — Николсона, для нее  $T = (1 + S\Delta t/2)^{-1} \times (1 - S\Delta t/2)$  и  $|T| < 1$  при  $\Delta t > 0$ .

Легко видеть, что при соответствующем выборе  $\Delta t$  и  $B$  таким путем можно получить методы, описанные в § 10.14—10.15, а при  $\Delta t = \Delta t_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) — циклические методы, или методы расщепления оператора.

Рассмотрим еще раз некоторые аналоги методов расщепления оператора. Пусть  $p = q = 1$ ,  $A = A_1 + A_2$  и  $B = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \exp(-A\Delta t) &= \exp(-A_1\Delta t) \exp(-A_2\Delta t) \approx \\ &\approx (1 + A_2\Delta t/2)^{-1} (1 - A_1\Delta t/2) (1 + A_1\Delta t/2)^{-1} (1 - A_2\Delta t/2). \end{aligned} \quad (10.24.14)$$

Формула (10.24.14) дает нам оператор  $T$  в методе Писмана — Рэкфорда [320].

Метод изучения решений стационарной задачи путем сведения ее к нестационарной был предложен еще М. В. Остроградским. В работе Дж. Шелдона [334] исследован вопрос о наиболее целесообразном выборе шагов  $\Delta t_k$ , размеры которых оказались связанными с корнями полиномов Чебышева. Как всегда, чрезвычайно интересны обратные задачи. Они заключаются в построении замыкания вычислительного алгоритма (по определению С. Л. Соболева [219]) для конкретных итерационных методов и исследований свойств решений получаемых непрерывных аналогов. В работе П. Гарабедяна [280] использован такой подход для исследования метода последовательной релаксации, а в работе Е. Г. Дьяконова и В. И. Лебедева [80] исследованы непрерывные аналоги методов дробных шагов [249] и расщепления оператора [77].

В работе Г. И. Марчука и К. Е. Сарбасова [172] исследован итерационный метод, в котором осреднение (см. § 10.20) определяется решением нестационарной задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^m u}{dt^m} + Au &= f; \\ \frac{d^k u}{dt^k} \Big|_{t=0} &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \right\} \quad (10.24.15)$$

Пусть

$$\varphi^T = S^T u = \frac{m!}{T^m} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} u dt,$$

тогда

$$A\varphi^T = f - \frac{m!}{T^m} u(\lambda, T). \quad (10.24.16)$$

Следовательно, если  $u(\lambda, t)$  равномерно ограничена по  $\lambda$  для всех  $0 \leq t < \infty$ , то  $\varphi^T$  стремится при  $T \rightarrow \infty$  к решению  $u^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u(\lambda, t)$  стационарной задачи.

## § 10.25. СЛУЧАЙНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Последовательные приближения в итерационных методах можно трактовать как осуществление некоторого специально подобранного случайного процесса, приводящего к вычислению приближенного решения с требуемой точностью и значительной степенью вероятности. Естественно, что в соответствии с таким подходом меняются и математический аппарат исследования, и понятие сходимости (сходимость по вероятности, в среднем, в смысле Бернулли, почти достоверная сходимость), и критерии качества итерационных процессов. Случайные итерационные процессы были исследованы в работах Ю. В. Воробьева [45—47].

Рассмотрим итерационный метод (10.18.2) при условии, что  $R(A) \in [m, M]$ ,  $m, M > 0$ . Пусть  $\alpha$  — случайная величина, а  $\alpha_1, \dots, \dots, \alpha_k$  — ее значения, получающиеся в результате независимых испытаний. Тогда после  $N$  итераций многочлен  $P_N(t)$ , выраженный формулами (10.18.4), будет случайным многочленом. Пусть  $p_k = |1 - \alpha_k t|$ , тогда  $\ln |P_N| = \sum_{k=1}^n \ln p_k$ .

Случайные величины  $\ln p_k$  имеют одну и ту же функцию распределения, определяемую функцией распределения случайной величины  $\alpha$ , и они получаются в результате независимых испытаний. Поэтому выполнены условия центральной предельной теоремы, и, следовательно, при возрастании  $N$  закон распределения  $\ln |P_N|$  приближается к нормальному с плотностью распределения

$$K(x) = (1/\sqrt{2\pi ND}) \exp [-(x - Na)^2/(2ND)],$$

где  $a = M (\ln |1 - \alpha_k t|)$  и  $D$  — математическое ожидание и дисперсия случайных величин  $\ln p_k$ .

Пользуясь формулами, связывающими функции распределения, находим, что функция распределения  $|P_N(t)|$  стремится к функции

$$S(x) = \int_0^x K(\ln x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi ND}} \int_0^x \exp [-(\ln x - Na)^2/2ND] \frac{dx}{x}$$

при  $x > 0$  и  $S(x) = 0$  при  $x \leq 0$ .

Оценим степень отклонения от нуля случайного многочлена  $P_N(t)$ , вычислив  $P(|P_N| > \varepsilon)$ , — вероятность того, что  $|P_N(t)| > \varepsilon$ . В нашем случае при больших  $N$

$$P(|P_N| > \varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi ND}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \exp[-(\ln x - Na)^2 / 2ND] \frac{dx}{x} =$$

$$= 1 - \Phi[(\ln \varepsilon - Na) / \sqrt{2ND}], \quad (10.25.1)$$

$$\text{где } \Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

Из (10.25.1) следует, что для того чтобы вероятность отклонения  $P_N(t)$  от нуля стремилась к нулю с возрастанием  $N$ , необходимо и достаточно, чтобы математическое ожидание  $a = M(\ln |1 - \alpha t|)$  было меньше нуля.

Как выбрать плотность распределения  $\varphi(x)$  случайной величины  $\alpha$ , чтобы  $u^k$  сходились по вероятности к искомому решению? Естественно потребовать, чтобы  $\varphi(x)$  была отлична от нуля лишь на отрезке  $[M^{-1}, m^{-1}]$ . Тогда

$$a = \int_{1/M}^{1/m} \ln |tx - 1| \varphi(x) dx, \quad D = \int_{1/M}^{1/m} (\ln |tx - 1| - a)^2 \varphi(x) dx.$$

Поскольку предполагается, что ничего не известно о распределении  $R(A)$  внутри  $[m, M]$ , естественно потребовать, чтобы  $a$ , характеризующая скорость сходимости, не зависела от  $t$ . Это требование приводит к однородному сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{da}{dt} = \int_{1/M}^{1/m} \frac{x\varphi(x)}{tx - 1} dx = 0,$$

решением которого при условии  $\int_{1/M}^{1/m} \varphi(x) dx = 1$  является функция

$$\varphi(x) = [\pi x \sqrt{(1 - mx)(Mx - 1)}]^{-1} \text{ при } M^{-1} \leq x \leq m^{-1};$$

$$\varphi(x) = 0 \text{ при } x \notin [M^{-1}, m^{-1}].$$

Для этой функции  $\varphi(x)$  можно показать, что

$$a = -\ln[(\sqrt{M} + \sqrt{m}) / (\sqrt{M} - \sqrt{m})], \quad (10.25.2)$$

а дисперсия оценивается неравенством

$$D \leq \pi^2 + 8\sqrt{m/M} \ln 2 + O[(m/M)^{3/2}].$$

Пусть  $d = \max_{t \in [M^{-1}, m^{-1}]} D(t)$ . Тогда из неравенства (10.18.9) и формул

(10.25.1), (10.25.2) получаем

$$P \left( \frac{|\varepsilon^N|_1}{|\varepsilon^0|_1} > \varepsilon \right) \leq 1 - \Phi(\chi), \quad (10.25.3)$$

где

$$\chi = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2d}} \ln \left\{ \sqrt{\varepsilon} \frac{\sqrt{M} + \sqrt{m}}{\sqrt{M} - \sqrt{m}} \right\}. \quad (10.25.4)$$

Случайный итерационный процесс реализуем, проводя следующий порядок вычислений. Задаваясь доверительной вероятностью  $\gamma$  и точностью  $\varepsilon$ , находим  $\chi$  из уравнения  $1 - \Phi(\chi) = \gamma$ , после чего число необходимых итераций  $N$  находится по равенству (10.25.4). Так как  $\chi > 0$ , то

$$N \geq |\ln \varepsilon| / \ln [( \sqrt{M} + \sqrt{m} ) / ( \sqrt{M} - \sqrt{m} )].$$

Практически удобнее вычислять значения случайной величины  $1/\alpha_k$ . Они могут быть найдены по формуле

$$\frac{1}{\alpha_k} = \frac{M-m}{2} \cos \pi \beta_k + \frac{M+m}{2}. \quad (10.25.5)$$

где  $\beta_k$  — значения равномерно распределенной на отрезке  $[0,1]$  случайной величины  $\beta$ . Этот метод асимптотически при  $N \rightarrow \infty$  равносильен по скорости сходимости методам, разобранным в § 10.18—10.21.

Для снижения дисперсии полезно прибегнуть к выборкам по группам. Для этого отрезок изменения  $\beta$  разобьем равноотстоящими точками на  $N$  частей и в формуле (10.25.5) для  $\alpha_k$  случайную величину  $\beta$  заменим  $(j - \xi_j)/N$ , где  $j$  — циклически с периодом  $N$  меняющиеся от 1 до  $N$  целые числа, а  $\xi_j$  — равномерно распределенные на отрезке  $[0, 1]$  случайные величины. Если же в выборках по группам  $\xi_j$  заменить их математическим ожиданием, равным  $1/2$ , то метод перейдет в чебышевский метод (см. § 10.18).

Ю. В. Воробьевым [47] исследованы случайные итерационные процессы в методе расщепления оператора и найдены оптимальные значения параметров этих процессов.

## § 10.26. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ С БАЛАНСНЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

Уравнение (10.13.3) преобразуем к виду (10.13.10), для которого метод итерации сходится. Для ускорения сходимости нормируем каждое приближенное значение, полученное методом итерации так, чтобы оно удовлетворяло некоторому интегральному соотношению баланса.

Для этого умножим (10.13.3) на некоторую подходящую функцию  $\Phi_k(\lambda)$  и результат проинтегрируем по  $\Lambda$ :

$$\int_{\Lambda} \Phi_k A u d\lambda = \int_{\Lambda} \Phi_k f d\lambda, \quad (10.26.1)$$

Обычно функцию  $\Phi_k$  выбирают такой, чтобы равенство (10.26.1) являлось некоторым законом сохранения (или разностным аналогом его). Предположим, что  $\int_{\Lambda} \Phi_k A u d\lambda > 0$ , и введем величину

$$\Delta_k(u) = \int_{\Lambda} \Phi_k f d\lambda / \int_{\Lambda} \Phi_k A u d\lambda. \quad (10.26.2)$$

В физических задачах обычно имеют дело со случаем, когда  $f > 0$ ,  $u > 0$ ,  $\Phi_k > 0$ ,  $A > 0$ .

Теперь рассмотрим нелинейный итерационный метод

$$u^0 > 0; u^{k+1/2} = b u^k + \psi; u^{k+1} = \Delta_k(u^{k+1/2}) u^{k+1/2}. \quad (10.26.3)$$

Здесь необходимо предположить, что  $\int_{\Lambda} \Phi_k A u^{k+1/2} d\lambda > 0$  для всех  $k$ .

Таким образом, каждое приближение  $u^{k+1}$  ( $k \geq 0$ ) удовлетворяет уравнениям «баланса» (10.26.1). Сходимость описанного итерационного процесса исследована в работе Келлога и Нодерера [295].

Итерационные схемы с балансными множителями были использованы Макмилланом [316] для решения задач термализации, Х. Хонекком [289] и В. Н. Морозовым [186] для задач переноса с пространственной зависимостью (см. § 11.4).

## § 10.27. НЕЛИНЕЙНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Для решения линейного или нелинейного уравнения

$$u = T(u) \quad (10.27.1)$$

где  $T$  — некоторая функция от  $u$ ,  $\lambda$ , в работе Н. С. Курпеля [111] был предложен следующий метод. Пусть для  $T(u)$  имеется представление  $T(u) = F(u, u, \lambda)$ . Последовательные приближения определяются как решения уравнений

$$u^k = F_j(u^k, u^{k-1}, \lambda), \quad (10.27.2)$$

где функции  $F_j$  удовлетворяют рекуррентным формулам:

$$F_1(u, v, \lambda) = F(u, v, \lambda); \\ F_j(u, v, \lambda) = F(u, F_{j-1}(u, v, \lambda), \lambda), \quad j = 2, 3, \dots, m.$$

Функция  $F$  выбирается так, чтобы решение уравнения (10.27.2) относительно  $u^k$  было задачей более легкой по сравнению с исходной задачей (10.27.1), а функция  $F$  слабо зависела от  $v$ . В работе [111] найдены некоторые достаточные условия сходимости этого метода. Таким методом можно решать и линейные уравнения (см. § 11.5).

## § 10.28. МЕТОДЫ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Теперь перейдем к обзору второй группы методов, называемых часто вариационными, сходимость которых исследуется в унитарной норме  $\| \cdot \|_M$ , заданной формулой (10.13.2). Некоторые черты таких методов

были исследованы в § 10.7 — 10.11. Пусть  $u = A^{-1}f$ . Квадратичный функционал

$$\Omega_M(u^k) = \|u^k - u\|_M^2 = (M(u^k - u), u^k - u) \quad (10.28.1)$$

будет функционалом ошибок. Тогда направление антиградиента в точке  $u^k$  дается элементом

$$z^k = M(u - u^k). \quad (10.28.2)$$

Элемент  $z^k$  можно записать по-иному:

$$z^k = M(A^{-1}f - u^k) = MA^{-1}r^k. \quad (10.28.3)$$

Вычислим то значение  $\alpha_k$ , при котором  $\Omega_M(x)$  достигает минимума по направлению  $z^k$ . Имеем

$$\Omega_M(u^k + \alpha z^k) = \Omega_M(u^k) - 2\alpha \|z^k\|_M^2 + \alpha^2 \|z^k\|_M^2. \quad (10.28.4)$$

Дифференцируя равенство (10.28.4) по  $\alpha$ , находим, что

$$\alpha_k = \|z^k\|_M^2 / \|z^k\|_M^2 = \|MA^{-1}r^k\|_M^2 / \|MA^{-1}r^k\|_M^2. \quad (10.28.5)$$

Следовательно, элемент

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k z^k \quad (10.28.6)$$

минимизирует функционал  $\Omega_M(u^k + \alpha z^k)$ .

Различные варианты методов наискорейшего спуска для решения уравнения (10.13.3) отличаются друг от друга выбором оператора  $M$ , задающего метрику в пространстве  $H_M$ .

Формулы (10.28.3), (10.28.5), (10.28.6) задают итерационный метод; для него

$$(z^{k+1}, z^k) = (z^k, z^k) - \alpha_k (Mz^k, z^k) = 0.$$

Из формулы (10.28.4) следует

$$\|e^{k+1}\|_M^2 = \|e^k\|_M^2 - \|z^k\|_M^2 / \|z^k\|_M^2. \quad (10.28.7)$$

Пусть здесь

$$0 < m_0 \leq A(\lambda) \leq M_0 \text{ при } \lambda \in \Lambda. \quad (10.28.8)$$

Справедлива

**Лемма 10.28.1.** *Последовательность  $u^k$ , полученная по формулам (10.28.3), (10.28.5), (10.28.6), сходится в  $H_M$  к элементу  $u$ . Быстрота сходимости оценивается неравенством*

$$\|e^k\|_M \leq q^k \|e^0\|_M \leq q^k m_0^{-1} \|r^0\|_M, \quad (10.28.9)$$

где  $q = (M_0 - m_0)/(M_0 + m_0)$ .

**Доказательство.** Пусть  $u^k$  задано. Найдем  $u^{k+1}$  по формулам (10.28.3), (10.28.5), (10.28.6) и одновременно найдем приближение, которое обозначим  $v^{k+1}$ , по методу (10.14.2) при  $\alpha = 2/(M_0 + m_0)$  [см. (10.14.5)]. Тогда, учитывая (10.13.8), (10.14.5), имеем

$$\|e^{k+1}\|_M \leq \|u - v^{k+1}\|_M \leq q \|e^k\|_M \leq q^{k+1} \|e_0\|_M.$$

Но

$$\|e^0\|_M = \|A^{-1}r^0\|_M \leq m_0^{-1} \|r^0\|_M,$$

и, следовательно, формула (10.28.9) верна.

а. Пусть оператор  $A$  обладает свойством (10.28.8). Положим  $M = A$ . Тогда легко убедиться, что значение функционала  $\Omega_A(x)$  лишь постоянным слагаемым отличается от значения функционала

$$G_A(x) = (Ax, x) - (x, f) - (f, x). \quad (10.28.10)$$

Формулы (10.28.5), (10.28.6) примут простой вид:

$$\alpha_k = (r^k, r^k)/(Ar^k, r^k); u^{k+1} = u^k + \alpha_k r^k. \quad (10.28.11)$$

б. Пусть  $A(\lambda) \neq 0$ . Положим  $M = \bar{A}A$ . Тогда получим функционал  $\Omega_{\bar{A}A}(x)$  метода наименьших квадратов

$$\Omega_{\bar{A}A}(x) = (Ax - f, Ax - f) = (r, r), \quad (10.28.12)$$

значение которого можно вычислить. Формулы (10.28.5) — (10.28.6) принимают вид

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k \bar{A}r^k; \alpha_k = (\bar{A}r^k, \bar{A}r^k)/(A\bar{A}r^k, A\bar{A}r^k). \quad (10.28.13)$$

в. Очевидным обобщением случаев «а», «б» является способ выбора оператора  $M$  согласно формуле  $M = \bar{A}BA$ , где  $B > 0$  — некоторый оператор. Тогда

$$\Omega_{\bar{A}BA}(x) = (B(Ax - f), Ax - f) = (Br, r), \quad (10.28.14)$$

и формулы (10.28.5), (10.28.6) принимают вид

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k \bar{A}Br^k; \alpha_k = (\bar{A}Br^k, \bar{A}Br^k)/(BA\bar{A}Br^k, A\bar{A}Br^k). \quad (10.28.15)$$

Таким образом, одношаговые методы градиентного спуска оптимальным образом уменьшают функционал ошибок, но они требуют дополнительной затраты арифметических действий для вычисления коэффициентов  $\alpha_k$  этого метода. Нам желательно было бы получить наиболее глубокий спуск при затрате заданного числа действий. Неизвестно, решают ли градиентные методы эту задачу.

## § 10.29. НЕГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ СПУСКА

1. Рассмотрим семейство функционалов  $\Omega_M(x)$  при разных  $M$ , имеющих один и тот же минимум, значения градиента у них, вообще говоря, различные. Можно предложить итерационные методы, в которых производится спуск по отношению к одному функционалу в направлении антиградиента другого функционала. Примером такого метода является метод, предложенный М. А. Красносельским и С. Г. Крейнсом [97] для положительно определенных матриц, в котором минимизация функционала  $\Omega_{\bar{A}A}(x) = (r, r)$  осуществляется в направлении антиградиента функционала  $\Omega_A(x)$ . Свое дальнейшее развитие этот метод для положительно определенных и несимметрических операторов получил в работе Ю. А. Кузнецова [105]. Найдем расчетные формулы метода, в котором минимизируется функционал  $\Omega_{\bar{A}BA}(x)$  в направлении антиградиента функционала  $\Omega_{BA}(x)$ .

Пусть  $B > 0$ , а

$$u^{k+1} = u^k + \beta_k B r^k. \quad (10.29.1)$$

Тогда  $r^{k+1} = r^k - \beta_k A B r^k$ , т. е.  $\Omega_{\bar{A}BA}(u^{k+1}) = (B r^{k+1}, r^{k+1}) =$   
 $= (B r^k, r^k) - 2\beta_k \operatorname{Re}(B r^k, A B r^k) + \beta_k^2 (B A B r^k, A B r^k)$ .

Следовательно,

$$\beta_k = \operatorname{Re}(B r^k, A B r^k) / (B A B r^k, A B r^k);$$

$$\Omega_{\bar{A}BA}(u^{k+1}) = \Omega_{\bar{A}BA}(u^k) - [\operatorname{Re}(B r^k, A B r^k)]^2 / (B A B r^k, A B r^k).$$

2. Не следует думать, что никогда невозможно использовать в вариационных методах самый естественный вид функционала  $\Omega_M(x)$  при  $M = 1$ . Это можно сделать за счет специального выбора подпространств  $H_k$ , на которых минимизируется функционал  $\Omega_I(x)$ . Такой метод был предложен В. М. Фридманом [235]; изложим его на примере вариационных методов третьей группы [см. (10.7.8)].

Пусть в (10.7.8)  $H_k$  — подпространство элементов  $w^{k+1/2}$ , представимых в виде

$$w^{k+1/2} = \sum_{i=1}^{n_k} a_i^k \bar{A} \varphi_i^k,$$

где  $\varphi_i^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_k$ , — некоторый набор элементов. Найдем минимум

$$\Omega_I(u^{k+1/2} + w^{k+1/2}) = (u^{k+1/2} + w^{k+1/2} - u, u^{k+1/2} + w^{k+1/2} - u).$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \Omega_I(u^{k+1/2} + w^{k+1/2})}{\partial a_j^k} = -2 \operatorname{Re} \left( \varphi_j^k, r^{k+1/2} - A \bar{A} \sum_{i=1}^n a_i^k \varphi_i^k \right) =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \left[ (\varphi_j^k, r^{k+1/2}) - \left( \bar{A} \varphi_j^k, \bar{A} \sum_{i=1}^n a_i^k \varphi_i^k \right) \right], j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, для коэффициентов  $a_i^k$ , при которых реализуется искомый минимум, получаем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^n a_i^k \operatorname{Re}(\bar{A} \varphi_j^k, \bar{A} \varphi_i^k) = \operatorname{Re}(\varphi_j^k, r^{k+1/2}), j = 1, 2, \dots, n,$$

Решив которую, найдем  $w^{k+1/2}$  и затем положим

$$u^{k+1} = u^{k+1/2} + w^{k+1/2}.$$

### § 10.30. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ С НЕПОЛНОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ

Рассмотрим методы типа

$$u^{k+1} = u^k + \omega_k \alpha_k M A^{-1} r^k, \quad (10.30.1)$$



где  $\alpha_k$  соответствует коэффициенту в методе наискорейшего спуска, а  $\omega_k \neq 1$  [233]. Из формул (10.28.4), (10.28.5) следует, что

$$\Omega_M(u^{k+1}) = \Omega_M(u^k) - \omega_k(2 - \omega_k) \|z^k\|^2 / \|z^k\|_M^2, \quad (10.30.2)$$

где  $z^k = MA^{-1}r^k$ .

Из формулы (10.30.2) видно, что для выполнения неравенства  $\Omega_M(u^{k+1}) < \Omega_M(u^k)$  при  $z^k \neq 0$  необходимо и достаточно, чтобы

$$0 < \omega_k < 2. \quad (10.30.3)$$

Методы (10.30.1), в которых  $\omega_k < 1$ , назовем методами нижней релаксации, а если  $\omega_k > 1$ , — методами верхней релаксации.

Обозначим  $\gamma_k = \omega_k \alpha_k$  и определим границы  $\gamma_k$ , при которых методы типа

$$u^{k+1} = u^k + \gamma_k MA^{-1}r^k \quad (10.30.4)$$

сходятся в  $H_M$ . Если  $m_0(u, u) \leq (Mu, u) \leq M_0(u, u)$ , тогда

$$M_0^{-1} \leq \alpha_k = (z^k, z^k) / (Mz^k, z^k) \leq m_0^{-1},$$

и, следовательно, достаточным условием сходимости является

$$0 < \gamma_k < 2M_0^{-1}. \quad (10.30.5)$$

Зафиксируем постоянным  $\gamma_k = \gamma$ . Тогда при выполнении неравенства (10.30.5) метод

$$u^{k+1} = u^k + \gamma MA^{k-1}r^k \quad (10.30.6)$$

сходится. Преобразуем формулу (10.30.6):

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(Mu^k - MA^{-1}f). \quad (10.30.7)$$

Следовательно, метод (10.30.7) есть метод типа (10.14.2) для решения эквивалентного уравнения

$$Mu = MA^{-1}f.$$

### § 10.31. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРА

Итерационные методы, рассмотренные нами ранее, использовали, как правило, для нахождения решения уравнения (10.2.16) операторы, которые, вообще говоря, могли быть не близки к оператору  $A^{-1}$ . Однако существуют определенные идеи и методы, позволяющие в ряде случаев использовать и строить в итерационном методе операторы, близкие к  $A^{-1}$ . Одно из семейств таких итерационных методов изложено в § 10.6, 10.23.

Начнем с методов, основанных на задачах о возмущении оператора или продолжения по параметру. Такого рода методы были рассмотрены Л. Чезари [268].

Существует большое число задач «на возмущение», когда исследуют вместе с «невозмущенной» задачей  $\mathcal{A}_0$  в известном смысле близкую к ней задачу  $\mathcal{A}_1$ . Наиболее естественным является введение числового параметра  $\varepsilon$  и рассмотрение семейства задач  $\mathcal{A}_\varepsilon$ , непрерывно в опре-

деленном смысле зависящего от  $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0$  имеем невозмущенную задачу  $\mathfrak{A}_0$ . Например, пусть  $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$  — линейные операторы, а

$$A_\varepsilon = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots \quad (10.31.1)$$

есть оператор, расщепленный на главную часть  $A_0$  и возмущающие члены  $\sum_1^\infty \varepsilon^l A_l$ . Пусть требуется найти решение  $u_\varepsilon$  уравнения

$$A_\varepsilon u_\varepsilon = f, \quad (10.31.2)$$

предполагая, что это уравнение при  $\varepsilon = 0$  сравнительно легко решается, т. е.  $\mathfrak{M} = \{A_0^{-1}\}$ . Методы решения задач путем введения в них малого параметра восходят к работам Лагранжа, Гильберта и Бернштейна. Существуют различные алгоритмы решения задач такого типа. Мы остановимся на методе представления степенным рядом (см. работы Л. Чезари [268], М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [38], М. К. Гавурина [51], А. А. Дородницына [75]), оставляя в стороне метод вариации параметра, предложенный Д. Ф. Давиденко [70], который также может явиться основой для получения итерационных формул [71].

Представим решение  $u_\varepsilon$  степенным рядом:

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (10.31.3)$$

Подставляя (10.31.1), (10.31.3) в (10.31.2), получаем

$$f = A_\varepsilon u_\varepsilon = (A_0 + \varepsilon A_1 + \dots)(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем для последовательного определения  $u_0, u_1, \dots$ , систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_0 u_0 &= f; & A_0 u_1 &= -A_1 u_0; \\ A_0 u_2 &= -A_1 u_1 - A_2 u_0; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.31.4)$$

Система уравнений (10.31.4) задает некоторый итерационный процесс. Чтобы показать это, ограничимся для простоты рассмотрением случая  $A_i \equiv 0$  при  $i \geq 2$ . Умножим  $i$ -е уравнение системы (10.31.4) на  $\varepsilon^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , и сложим результаты:

$$A_0 u^{k+1} = -\varepsilon A_1 u^k + f, \quad (10.31.5)$$

где

$$u^k = \sum_{i=1}^k \varepsilon^i u_i.$$

Таким образом, результат после нахождения  $u_0, \dots, u_k$  по формулам (10.31.4) равен результату, полученному при  $k$  итерациях (10.31.5), если  $u^0 = u_0 = A_0^{-1} f$ . Очевидно, что здесь

$$T = \varepsilon A_0^{-1} A_1. \quad (10.31.6)$$

Если оператор  $A_0$  хорошо приближает  $A_\varepsilon$  ( $\varepsilon$  мало!), то методы подобного типа обладают быстрой сходимостью итераций. Полагая  $A_i \equiv 0$

при  $i \geq 3$  и повторяя описанный прием, получаем метод, использующий информацию о двух предыдущих приближениях:

$$A_0 u^{k+1} = -\varepsilon A_1 u^k - \varepsilon^2 A_2 u^{k-1} + f. \quad (10.31.7)$$

### § 10.32. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО ИЛИ НАИМЕНЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ СОБСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим несколько методов определения наибольшего или наименьшего собственного значения и соответствующей собственной функции. Отметим, что задачи на нахождение наименьшего собственного значения, называемого  $k_{эф}$  (эффективного коэффициента размножения), являются одними из основных реакторных задач. Исследуем методы, основанные на использовании многочленов Чебышева первого, второго и третьего рода; эти методы одинаково хорошо приспособлены к задачам нахождения как наибольшего, так и наименьшего собственного значения. Целесообразно снова вернуться к операторам, заданным в банаховом или гильбертовом пространстве.

Рассмотрим уравнение на собственные значения, записанное в виде

$$Ax = \lambda x, \quad (10.32.1)$$

где  $A$  — линейный ограниченный оператор, заданный в банаховом пространстве  $B$  и имеющий полную линейно-независимую систему нормированных собственных функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \geq 0$ , где  $\lambda_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (это предположение несущественно) и можно априори указать величину  $0 < a < \lambda_2$ . В задаче мы найдем наибольшее собственное значение  $\lambda_1$  и собственную функцию  $\varphi_1$ .

#### Первый метод, использующий чебышевские параметры и значения некоторого линейного функционала

Пусть  $l(x)$  — линейный функционал из сопряженного пространства  $B^*$ ,  $l_n = l(\varphi_n)$ , причем  $l_1, l_2 \neq 0$ . Применим итерационный метод с переменными сдвигами, величина которых будет определяться бесконечной  $T$ -последовательностью чебышевских параметров, взятых в определенном порядке. Для нахождения  $\lambda_1, \lambda_2$  обобщим на случай переменных сдвигов метод Бернулли: это позволит быстрее находить интересные нас собственные функции и значения, особенно в случаях, когда  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  близки [142].

Для нахождения  $\lambda_1, \varphi_1$  рассмотрим итерационный метод. По начальному приближению

$$x^0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^0 \varphi_n,$$

для которого предполагается, что  $l(x^0) = 1$ ;  $c_1^0 \neq 0$ , а ошибка принадлежит классу

$$|c_n^0| \leq C_0, n = 2, 3, \dots, \quad (10.32.2)$$

где здесь и далее  $C_i > 0$  — некоторые константы; приближения

$$x^k = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^k \varphi_n$$

находим по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^{k+1} &= Ax^k - \beta_{k+1} x^k; \\ x^{k+1} &= \tilde{x}^{k+1} / l(\tilde{x}^{k+1}), \end{aligned} \right\} \quad (10.32.3)$$

где  $\beta_k = M \sin^2(\pi\omega_k/2)$ ,  $\{\omega_k\}_1^\infty$  — бесконечная последовательность;  $\omega_k \in (0, 1)$ ;  $M$  — параметр, которым будем распоряжаться на каждом этапе нахождения  $\lambda_1, \varphi_1$ .

Э т а п 1. Сначала найдем  $\lambda_1, \lambda_2$ . Для этого положим  $M = a$ , а  $\{\omega_k\}_1^\infty$  —  $T$ -последовательность. Тогда  $0 < \beta_k < a$  и

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^k &= (\lambda_1 - \beta_k) \left[ \varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \psi_k(\lambda_n) B_n \varphi_n \right] \left[ l_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \psi_{k-1}(\lambda_n) B_n l_n \right]^{-1}; \\ x^k &= \left[ \varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \psi_k(\lambda_n) B_n \frac{l_n}{l_1} \right] \left[ l_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \psi_k(\lambda_n) B_n l_n \right]^{-1}; \\ \gamma_k = l(\tilde{x}^k) &= (\lambda_1 - \beta_k) \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \psi_k(\lambda_n) B_n \frac{l_n}{l_1} \right] \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \psi_{k-1}(\lambda_n) \times \right. \\ &\quad \left. \times B_n \frac{l_n}{l_1} \right]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (10.32.4)$$

где  $B_n = c_n^0/c_n^1$ ;

$$\psi_k(\lambda) = P_k(\lambda)/P_k(\lambda_1); P_k(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \beta_i).$$

Пусть  $\theta_n = 2\lambda_n/a - 1$ , тогда для  $\lambda_n \geq a$  имеем

$$0 \leq \psi_k(\lambda_n) \leq \frac{T_{\tilde{k}}(\theta_n)}{T_{\tilde{k}}(\theta_1)} \left( \frac{\lambda_n - a/2}{\lambda_1 - a/2} \right)^{k-\tilde{k}} \leq \left( \frac{\lambda_n - a/2}{\lambda_1 - a/2} \right)^k, \quad (10.32.5)$$

где  $\tilde{k} \leq k$  — то максимальное значение  $k$ , для которого отрезок  $T$ -последовательности  $\{\omega_n\}_1^{\tilde{k}}$  соответствует всем корням многочлена  $T_{\tilde{k}}(x)$ .

Для  $\lambda_n \in [0, a]$ , имеем

$$|\psi_k(\lambda_n)| \leq \alpha(\Delta)/T_{\tilde{k}}(\theta_1), \quad (10.32.6)$$

где  $\Delta = \lambda_1/a - 1$ , а  $\alpha(\Delta) = 1$  при  $k = \tilde{k}$  или для  $\lambda_n > 2a - \lambda_1$  и  $\alpha(\Delta) = c_1 \Delta^{-1}$ ,  $c_1 > 0$  в остальных случаях.

Из (10.32.5), (10.32.6) следует, что коэффициенты в (10.32.4) при  $\varphi_n, l_n$  для  $n \geq 2$  убывают при  $k \rightarrow \infty$  по модулю быстрее, чем в методе простой итерации (при  $\beta_k = 0$ ), а при  $k = \tilde{k}$  происходит оптимальное на

классе (10.32.2) подавление тех коэффициентов  $c_n^0$ , для которых  $\lambda_n \in [0, a]$ .

Пусть известны значения  $\beta_k; \beta_{k+1}; \beta_{k+2}; \gamma_k; \gamma_{k+1}; \gamma_{k+2}$ . Тогда, обозначая  $\tilde{c}_1 = c_1^{k-1} l_1; \tilde{c}_2 = c_2^{k-1} l_2$  и ограничиваясь в суммах (10.32.4) двумя первыми членами [считая тем самым, что члены при  $n > 2$  малы при достаточно большом  $k$ , см. (10.32.5), (10.32.6)], получаем систему четырех уравнений

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 &= D_k; \\ \sum_{n=1}^2 \tilde{c}_n \prod_{i=0}^m (\lambda_n - \beta_{k+i}) &= D_k \prod_{i=0}^m \gamma_{k+i}, \quad m = 0, 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (10.32.7)$$

где  $D_k$  — некоторая не равная нулю постоянная.

Это обобщенная моментная система, ее решение удается найти: если

$$\sigma_k = \gamma_{k+1} (\gamma_{k+2} - \gamma_{k+1} + \beta_{k+2} - \beta_{k+1}) / (\gamma_{k+1} - \gamma_k + \beta_{k+1} - \beta_k);$$

$$q_k = \gamma_k \sigma_k; \quad p_k = \gamma_{k+1} + \beta_{k+1} - \beta_k + \sigma_k;$$

$$t_1 = p_k/2 + (p_k^2/4 - q_k)^{1/2}; \quad t_2 = q_k/t_1,$$

где  $t_1, t_2$  — корни уравнения  $t^2 - p_k t + q_k = 0$ , то

$$\lambda_1 = t_1 + \beta_1; \quad \lambda_2 = t_2 + \beta_2. \quad (10.32.8)$$

Этот этап итераций с использованием  $T$ -последовательности и  $M = a$  продолжаем по формулам (10.32.3), (10.32.8) до тех пор, пока не получим устойчивые значения  $\lambda_1, \lambda_2$ . Пусть это наступило при  $k = k_1$ , а критерий окончания итераций по точности определения собственной функции еще не выполнен.

Э т а п 2. После первого этапа класс ошибок трансформировался после  $k_1$  итераций в класс

$$|c_n^{k_1}| \leq C_1 |\psi_{k_1}(\lambda_n)|.$$

При  $\lambda = \lambda_2$  функция  $|\psi_{k_1}(\lambda)|$  для больших  $k_1$  имеет острый пик; это означает, что в ошибке к этому моменту сравнительно велики компоненты  $c_n^{k_1} \varphi_n$  для первых  $n \geq 2$ . Эту неравномерность в ошибке устраняем специальными итерациями. Простейший способ заключается в том, чтобы взять  $\beta_{k_1+1} = \lambda_2$ . В работе [142] изложены более совершенные стратегии по специальному выбору на следующих четырех итерациях параметров  $\beta_k$ .

Э т а п 3. Полагаем в алгоритме (10.32.3)  $M = \lambda_2$  и, начиная с  $\omega_1$ , употребляем  $T$ -последовательность. Можно применить и другие последовательности  $\{\omega_k\}_1^\infty$ , учитывая также специальный выбор параметров на втором этапе. Если в процессе итераций на третьем этапе величина  $\lambda_2^k$ , высчитываемая по формуле (10.32.8), снова примет устойчивое значение  $\tilde{\lambda}_2^k$  (это будет обозначать, что к этому моменту главная часть ошибки сосредоточена на собственных функциях с собственными значениями в окрестности  $\tilde{\lambda}_2^{(k)}$ ), то полагаем

$$\beta_{k+1} = \tilde{\lambda}_2^{(k)}$$

и продолжаем далее итерации с  $T$ -последовательностью.

**Второй метод определения собственных значений, использующий чебышевские параметры и значения двух линейных функционалов**

В задачах, где операция  $Ax^k$  на ЭВМ выполняется не точно, а находится методом итераций (внутренним итерационным циклом), формулы для определения  $\lambda_1, \lambda_2$  (10.32.8) являются достаточно чувствительными по отношению к погрешностям, допускаемым во внутреннем цикле итераций, в случае, когда  $\lambda_2$  близко к  $\lambda_1$ . Второй способ несколько улучшает обусловленность систем уравнений по определению  $\lambda_1, \lambda_2$  на первом этапе вычислений.

Пусть  $l(x), m(x)$  — два линейных функционала, такие, что

$$l(\varphi_1) m(\varphi_2) - l(\varphi_2) m(\varphi_1) \neq 0.$$

Введем дополнительные обозначения:

$$m_n = m(\varphi_n); \delta_\alpha = m(x^\alpha); \gamma_\alpha = l(x^\alpha).$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс, в котором для простоты изложения отсутствует нормировка решения

$$x^{k+1/2} = Ax^k, x^{k+1} = x^{k+1/2} - \beta_{k+1} x^k; \beta_{k+1} = M \sin^2(\omega_k \pi/2), \quad (10.32.9)$$

где  $\{\omega_k\}$  —  $T$ -последовательность. В процессе итераций вычислим  $\gamma^k, \delta_k, \gamma_{k+1/2}, \delta_{k+1/2}$ . Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_n A_n^k - \gamma_k; & \quad \sum_n B_n^k = \delta_k; \\ \sum_n A_n^k \lambda_n = \gamma_{k+1/2}; & \quad \sum_n B_n^k \lambda_n = \delta_{k+1/2}; \\ \sum_n A_n^k \lambda_n (\lambda_n - \beta_{k+1}) = \gamma_{k+3/2}; & \quad \sum_n B_n^k \lambda_n (\lambda_n - \beta_{k+1}) = \delta_{k+3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (10.32.10)$$

где  $A_n^k = c_n^k l_n; B_n^k = c_n^k m_n$ .

Используем эти соотношения для определения  $\lambda_1, \lambda_2$ . Для этого оставим в суммах лишь слагаемые с  $n = 1, 2$ . Решая полученную систему шести уравнений, находим формулы для  $\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \tau_2 = \lambda_1 \lambda_2$ :

$$\tau_1 = \beta_{k+1} + (\delta_k \gamma_{k+3/2} - \gamma_k \delta_{k+3/2})/s_k; \tau_2 = (\delta_{k+1/2} \gamma_{k+3/2} - \gamma_{k+1/2} \delta_{k+3/2})/s_k,$$

где  $s_k = \delta_k \gamma_{k+1/2} - \gamma_k \delta_{k+1/2}$ . Тогда

$$\lambda_{1,2} = \tau_1/2 \pm \sqrt{\tau_1^2/4 - \tau_2} \quad (10.32.11)$$

Эти формулы используем на первом этапе итерационного процесса с чебышевскими параметрами.

Исследуем качественно влияние ошибок на определение  $\lambda_1^k, \lambda_2^k$  по формулам (10.32.10). Если величина  $s_k$  становится очень малой в процессе итераций, то формулы (10.32.10) сильно чувствительны к ошибкам, допущенным при вычислении  $\delta_\alpha, \gamma_\alpha$ . Если величины  $\delta_\alpha, \gamma_k$  вычислены точно, то при  $k \rightarrow \infty$   $s_k \approx (A_1^k B_2^k - A_2^k B_1^k) (\lambda_2 - \lambda_1)$ .

Если же вместо этих величин мы вычисляем

$$\bar{\gamma}_k = \gamma_k (1 + \xi_k); \bar{\delta}_k = \delta_k (1 + \varepsilon_0);$$

$$\bar{\gamma}_{k+1/2} = \gamma_{k+1/2} (1 + \xi_k) (1 + \bar{\xi}_k); \bar{\delta}_{k+1/2} = \delta_{k+1/2} (1 + \varepsilon_k) (1 + \bar{\varepsilon}_k),$$

то вместо  $s_k$  получаем

$$\bar{s}_k = (1 + \varepsilon_k) (1 + \xi_k) (s_k + \gamma_{k+1/2} \delta_k \bar{\varepsilon}_k - \gamma_k \delta_{k+1/2} \bar{\xi}_k).$$

Следовательно, для успешного определения  $\lambda_1, \lambda_2$  необходимо по крайней мере, чтобы  $|\xi_k|, |\bar{\xi}_k| = O(|\lambda_1 - \lambda_2|)$ . Это соотношение требует, чтобы внутренние итерации проводились с достаточной точностью. Аналогичный анализ для формул (10.32.8) показывает, что в первом методе внутренние итерации необходимо проводить с точностью, не превышающей  $O(|\lambda_1 - \lambda_2|^2)$ .

### Третий метод, использующий чебышевские параметры и сопряженное уравнение

В ряде случаев требуется наряду с задачей (10.32.1) решить аналогичную задачу для сопряженного уравнения

$$A^*y = \lambda y \quad (10.32.12)$$

для получения функции ценности. Полную систему собственных элементов задачи (10.32.12) обозначим  $\{\psi_n\}$ . Пусть системы  $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$  биортогональны, т. е.  $(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$ , где  $(\cdot)$  — скалярное произведение.

Итерационные последовательности  $x^k \rightarrow \varphi_1, y^k \rightarrow \psi_1$  при  $k \rightarrow \infty$  строим согласно следующему алгоритму, начиная с  $x^0, y^0$ :

$$x^{k+1} = Ax^k - \beta_{k+1} x^k; y^{k+1} = A^*y^k - \alpha_{k+1} y^k, \quad (10.32.13)$$

где

$$\beta_{k+1} = M \sin^2(\omega'_{k+1} \pi/2); \alpha_{k+1} = M \sin^2(\omega''_{k+1} \pi/2); \quad (10.32.14)$$

$\omega'_k, \omega''_k \in [0, 1]$  — бесконечные последовательности чисел, которые мы выберем позднее, а  $M$  на первом этапе равно  $a$ , на втором и третьем —  $\lambda_2$ .

Приближения находим в следующей последовательности:  $x^1, y^1, x^2, y^2$  и т. д. Пусть

$$x^k = \sum_n a_n^k \varphi_n; y^k = \sum_n b_n^k \psi_n; a_1^0, b_1^0 \neq 0.$$

Тогда

$$x^k = P_k(A) x^0; y^k = Q_k(A^*) y^0,$$

где

$$P_k(t) = \prod_{i=1}^k (t - \beta_i); Q_k(t) = \prod_{i=1}^k (t - \alpha_i)$$

или

$$x^k = \sum_n P_k(\lambda_n) a_n^0 \varphi_n; \quad y^k = \sum_n Q_k(\lambda_n) b_n^0 \psi_n.$$

В процессе итераций подсчитаем следующие скалярные произведения:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_k &= (x^k, y^k) = \sum_n A_n^k; \quad \delta_k = (x^{k+1}, y^k) = \sum_n A_n^k (\lambda_n - \beta_{k+1}); \\ \gamma_{k+1} &= (x^{k+1}, y^{k+1}) = \sum_n A_n^k (\lambda_n - \beta_{k+1}) (\lambda_n - \alpha_{k+1}); \\ \delta_{k+1} &= (x^{k+2}, y^{k+1}) = \sum_n A_n^k (\lambda_n - \alpha_{k+1}) \prod_{i=1}^2 (\lambda_n - \beta_{k+i}); \\ \gamma_{k+2} &= (x^{k+2}, y^{k+2}) = \sum_n A_n^k \prod_{i=1}^2 (\lambda_n - \beta_{k+i}) (\lambda_n - \alpha_{k+i}), \end{aligned} \right\} \quad (10.32.15)$$

где  $A_n^k = P_k(\lambda_n) Q_k(\lambda_n) a_n^0 b_n^0$ .

Каждое скалярное произведение вычисляем сразу же вслед за получением каждого нового приближения.

Пусть мы вычислили  $x^{k+2}$ ,  $M = a$ . Тогда, рассматривая первые четыре скалярных произведения, оставляя в суммах лишь слагаемые при  $n = 1, 2$  и решая систему четырех уравнений, находим приближенные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  по формулам: если  $d = \tau_1^2/4 - \tau_2$ ;  $\tau_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ ;  $\tau_2 = \lambda_1 \lambda_2$ , то

$$\lambda_{1,2} = \tau_1/2 \pm \sqrt{d}, \quad (10.32.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= d_1/a; \\ \tau_2 &= d_2/a; \quad d_1 = a_{22} \tilde{b}_1 - a_{12} \tilde{b}_2; \quad d_2 = a_{11} \tilde{b}_2 - a_{21} \tilde{b}_1; \\ a_{11} &= -\gamma_k; \quad a_{21} = -\delta_k; \quad a_{12} = \delta_k + \beta_{k+1} \gamma_k; \quad a_{22} = \gamma_{k+1} + \alpha_{k+1} \delta_k; \\ \tilde{b}_1 &= \gamma_{k+1} + (\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}) \delta_k + \beta_{k+1}^2 \gamma_k; \quad \tilde{b}_2 = \delta_{k+1} + (\alpha_{k+1} + \\ &+ \beta_{k+2}) \gamma_{k+1} + \alpha_{k+1}^2 \delta_k. \end{aligned} \right\} \quad (10.32.17)$$

Аналогичным образом получаем формулы для  $\lambda_1, \lambda_2$  после вычисления  $y^{k+2}$ . Для этого используем в (10.32.15) последние четыре скалярных произведения. Эти формулы совпадут с (10.32.16), (10.32.17), если в них величины  $\gamma_k; \delta_k; \gamma_{k+1}; \delta_{k+1}; \beta_{k+1}; \alpha_{k+1}; \beta_{k+2}$  заменить соответственно  $\delta_k; \gamma_{k+1}; \delta_{k+1}; \gamma_{k+2}; \alpha_{k+1}; \beta_{k+2}; \alpha_{k+2}$ . Параметры  $\beta_k, \alpha_k$  в итерационном методе (10.32.13) выбираем так, чтобы выражения  $P_{k+i}(\lambda_n) Q_{k+i}(\lambda_n)/P_{k+i}(\lambda_1) Q_{k+i}(\lambda_1)$  были малы при  $\lambda_n \in [0, M]$ , где величина  $M$  меняется так же, как и в первом методе.

Есть несколько способов выбора последовательностей  $\omega_k', \omega_k''$ :

а) за  $\omega_k', \omega_k''$  возьмем  $T$ -последовательность;  
 б) за  $\omega_k', \omega_k''$  возьмем соответственно  $T$ - и  $U$ -последовательности [152];

в) рассмотрим  $T$ -последовательность, разобрannую в § 10.18. каждый ее отрезок длиной  $3^n$  состоит из трех частей:  $\{\omega_n\}_1^{3^n-1}$ ;



$\{\omega_n\}_{3^{n+1}}^{2 \cdot 3^{n-1}}$ ;  $\{\omega_n\}_{2 \cdot 3^{n-1}-1}^{3^n}$ . Переставим для каждого  $n$  между собой последние две части и полученную таким образом последовательность обозначим  $\bar{T}$ . Тогда в итерационном методе (10.32.13), (10.32.14) за  $\omega_k'$  и  $\omega_k''$  возьмем соответственно  $T$ - и  $\bar{T}$ -последовательности. Итерационный метод (10.32.13), (10.32.14) удобнее вести с нормировкой: пусть  $l(u)$ ,  $l^*(u)$  — линейные функционалы, такие, что  $l(\varphi_1) \neq 0$  и  $l^*(\psi_1) \neq 0$ , тогда после каждой итерации нормируем полученные приближения  $x^{k+1}$ ,  $y^{k+1}$ , деля их на  $l(x^{k+1})$ ,  $l^*(y^{k+1})$  соответственно. При этом несколько изменятся расчетные формулы для  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ .

Сделаем заключения по итерационным методам с чебышевскими параметрами:

1) расчетные формулы не изменятся, если предположить, что спектр рассматриваемых операторов принадлежит эллипсу  $\mathcal{E}(M, 0)$  с фокусами в точках  $M, 0$ ;

2) нетрудно видоизменить формулы итерационных процессов так, чтобы они были приспособлены для нахождения минимального изолированного собственного значения.

## Глава 11

### ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА

#### § 11.1. СПЕЦИФИКА ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Краевые задачи для кинетического уравнения являются типичными многомерными задачами. Как правило, число неизвестных значений функций в системе разностных уравнений, аппроксимирующих кинетическое уравнение, столь велико, что при решении этих систем уравнений итерационными методами не представляется возможным из-за ограниченности памяти ЭВМ одновременно запомнить все неизвестные, полученные на одном итерационном шаге. Положение улучшится, если сузить класс кинетических уравнений, рассмотрев только кинетические уравнения с вырожденной индикатрисой рассеяния. Проиллюстрируем это на примере уравнения (5.1.4) с изотропным рассеянием ( $\bar{S} = S$ ). Для такого уравнения простая итерация или метод итераций столкновений по источникам строится так. По функции  $\varphi^k$  следующее приближение  $\varphi^{k+1}$  находим по формуле

$$\Omega \nabla \varphi^{k+1/2} + \sum_s \varphi^{k+1/2} = \sum_s^+ S \varphi^k + f. \quad (11.1.1)$$

Предполагаем, что функция  $\varphi^{k+1/2}$  удовлетворяет краевым условиям и  $\varphi^{k+1} = \varphi^{k+1/2}$ . Поскольку мы часто будем пользоваться итерацией (11.1.1), то для удобства дальнейших рассуждений назовем операцию

нахождения  $\varphi_0^{k+1/2} = S\varphi^{k+1/2}$  из решения уравнения (11.1.1) операцией  $K$  и результат ее обозначим

$$\varphi^{k+1/2} = K(S\varphi^k, f); \varphi_0^{k+1/2} = S\varphi^{k+1/2} \quad (11.1.2)$$

(здесь и далее под  $\varphi_0$  будем понимать функцию  $S\varphi$ ). Из формулы (11.1.1) видно, что для нахождения  $\varphi^{k+1/2}$  вовсе не обязательно знать  $\varphi^k$  и запоминать в процессе итерации  $\varphi^{k+1/2}$ , а достаточно знать только  $S\varphi^k$  и образовывать по мере счета для запоминания лишь величины  $S\varphi^{k+1/2}$ . Функция  $S\varphi^k$  уже не зависит от  $\Omega$  и для запоминания ее требуется гораздо меньше, чем для  $\varphi^k$ , ячеек памяти ЭВМ. То же самое справедливо для невязки  $r^{k+1/2}$ , ибо

$$\begin{aligned} r^{k+1/2} &= f + \sum_s S\varphi^{k+1/2} - \Omega \nabla \varphi^{k+1/2} - \sum \varphi^{k+1/2} = \\ &= \sum_s S(\varphi^{k+1/2} - \varphi^k), \end{aligned}$$

а ошибка  $\eta^{k+1/2} = \varphi - \varphi^{k+1/2}$  удовлетворяет уравнению

$$\Omega \nabla \eta^{k+1/2} \sum \eta^{k+1/2} = \sum_s S \eta^{k+1/2} + \sum_s S(\varphi^{k+1/2} - \varphi^k) \quad (11.1.3)$$

и, следовательно, невязка  $r^{k+1/2}$  и источник в (11.1.3) не зависят от  $\Omega$ . Не случайно поэтому операция  $K$  входит как составная часть во многие итерационные процессы, ускоряющие сходимость итераций для кинетического уравнения. Ввиду многомерности задач могут стать неприемлемыми многие хорошо разработанные и эффективные итерационные методы только потому, что они требуют запоминания полной информации о предыдущем приближении. Таким образом, специфика задач переноса с вырожденной индикатрисой рассеяния требует разработки таких быстросходящихся итерационных методов, которые требовали бы запоминания не всей информации о проводимом итерационном шаге в пространстве  $D \times \Omega$ , а только части ее существенно меньшей размерности. Независимость  $r^{k+1/2}$  от  $\Omega$  после операции  $K$  открывает возможность эффективно использовать вариационные методы решения, ибо в этом случае существенно облегчается задача подсчета скалярных произведений, заданных в  $D \times \Omega$ .

В работе В. С. Владимирова [41] найдены условия, при которых метод простой итерации (11.1.2) сходится. Однако мы, как правило, не будем доказывать сходимость его и других методов в самом общем случае. Сходимость описываемых нами методов будем исследовать на модельной периодической задаче, описанной в § 5.8. Ее мы избрали по двум соображениям: во-первых, для этой задачи метод Фурье дает явное представление операторов задачи в виде алгебры функций, и поэтому довольно просто удастся не только показать сходимость, но и оценить скорость сходимости через явным образом получаемые функции; во-вторых, периодическая задача — это задача, для которой медленнее всего сходятся итерационные методы и, следовательно, мы имеем возможность сравнивать различные итерационные методы при довольно неблагоприятной ситуации.

Каждой функции  $f$ , участвующей в наших рассуждениях, поставим в соответствие ее ряд Фурье:

$$f = \sum f_n \exp(i n x),$$

где  $f_{-n} = \overline{f_n}$ , а суммирование осуществляется по целочисленным индексам  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Норму функции определим равенством  $\|f\| = \max_n |f_n|$  и сходимость, как правило, будем рассматривать в этой норме в пространстве последовательностей  $\{f_n\}$ , которое обозначим  $m$ .

Итак, рассмотрим  $2\pi$ -периодическую задачу для уравнения

$$-l^2 (\nabla \mathbf{V})^2 u + u = c S u + F(x, \Omega), \quad (11.1.4)$$

где  $0 \leq c \leq 1$ ;  $c, l = \text{const}$ . Решение задачи (11.1.4) дается формулами (5.8.8) — (5.8.10):

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum \left( (1 + l^2 (\mathbf{n}\Omega)^2)^{-1} (c(1 - cr(l|\mathbf{n}|)^{-1} F_n^1 + F_n(\Omega)) \exp(i n x); \right. \\ &\quad \left. F_n^1 = S \left[ (1 + l^2 (\mathbf{n}\Omega)^2)^{-1} F_n(\Omega) \right]; \right. \\ u_0 &= \sum (1 - cr(l|\mathbf{n}|)^{-1} F_n^1 \exp(i n x). \end{aligned} \right\} \quad (11.1.5)$$

Операция  $K$  для уравнения (11.1.4) имеет вид

$$-l^2 (\nabla \mathbf{V})^2 u^{k+1/2} + u^{k+1/2} = c S u^k + F; \quad (11.1.6)$$

$$u_0^{k+1/2} = S u^{k+1/2}. \quad (11.1.7)$$

Очевидно, результат ее совпадает с соответствующей операцией (11.1.2), примененной к  $2\pi$ -периодической задаче для уравнения в несамосопряженной форме (11.1.1) при  $f(x, \Omega) = f(x, -\Omega)$ , если положить  $\Sigma^{-1} = l$ ;  $c = \Sigma_s / \Sigma$ ;  $F = f / \Sigma$ . Наименьшим собственным числом однородной задачи (11.1.4) является величина  $c^{-1} > 1$ .

Введем следующие обозначения. Пусть  $u$  — решение (11.1.4),  $u^\alpha$  — приближенное решение (11.1.4):

$$u_0^\alpha = S u^\alpha; r_n = r(l|\mathbf{n}|); \lambda_n = l|\mathbf{n}|; \sum_0 = \sum - \sum_s;$$

$$\eta^\alpha(x, \Omega) = u - u^\alpha = \sum \eta_n^\alpha(\Omega) \exp(i n x); \quad (11.1.8)$$

$$\varepsilon^\alpha(x) = S \eta^\alpha(x, \Omega) = \sum \varepsilon_n^\alpha \exp(i n x); \quad (11.1.9)$$

$$u_0^\alpha = \sum u_{0n}^\alpha \exp(i n x). \quad (11.1.10)$$

Исследуем сходимость простой итерации. Применяя формулы (11.1.5), видим, что

$$u_n^{k+1/2} = (1 + l^2 (\mathbf{n}\Omega)^2)^{-1} (c u_{0n}^k + F_n(\Omega)); \quad (11.1.11)$$

$$u_{0n}^{k+1/2} = cr_n u_{0n}^k + F_n^1. \quad (11.1.12)$$

Это значит, что для  $\varepsilon^\alpha$  справедливы соотношения

$$\varepsilon_n^{k+1} = \varepsilon_n^{k+1/2} = cr_n \varepsilon_n^k \quad (11.1.13)$$

или

$$\|\varepsilon^{k+1}\| \leq q \|\varepsilon^k\|, \quad (11.1.14)$$

где  $q = c$ .

Следовательно, метод простой итерации сходится при  $0 \leq c < 1$ . Из равенства (11.1.13) видно, что сходимость простой итерации замедляется при  $c \rightarrow 1 - 0$ . Заметим, что формула для ошибок (11.1.13) формально получается из формулы (11.1.12) для итераций, если в последней  $u_n^\alpha$  заменить  $\varepsilon_n^\alpha$  и положить неоднородный член равным нулю. Это свойство всех линейных итерационных процессов, которым будем часто пользоваться, не делая каждый раз специальных оговорок.

Пусть  $\Pi_0$  — цена (количество действий) в численной реализации операции  $K$ ;  $\Pi$  — цена полной итерации;  $\Delta\Pi = \Pi - \Pi_0$ . Для оценки итерационного метода приведем две величины:  $\Delta\Pi$  и  $q$ ,  $0 < q < 1$ , характеризующую скорость убывания нормы ошибки в неравенстве (11.1.14). Так, для метода простой итерации  $\Delta\Pi = 0$ ,  $q = c$ . Условно полезно считать, что при дискретизации задачи имеем  $N$  пространственных точек, в каждой из которых имеется в среднем  $M$  угловых направлений. Тогда  $\Pi_0 = O(NM)$ . Если  $\Delta\Pi$  не зависит от  $N$ ,  $M$ , то условно будем писать, что  $\Delta\Pi = o(N)$ .

Из формул (11.1.5), (11.1.11) следует, что при изотропном источнике  $F(x)$  решение  $u$ ,  $u^{k+1/2}$  и  $\eta^{k+1/2}$  принадлежат классу  $V$  функций вида

$$v(x, \Omega) = \sum (1 + l^2(n\Omega)^2)^{-1} v_n \exp(inx). \quad (11.1.15)$$

где  $v_n$  — скаляры.

Поэтому можно проверить, пользуясь формулой (5.1.36), что функционал

$$G_B(v) = \sum b_n r_n (|v_n|^2 (1 - cr_n) - 2F_n \bar{v}_n), \quad (11.1.16)$$

где  $B = \{b_n\}$  ( $b_n > 0$ ) — квадратичный функционал, минимум которого на классе  $V$  достигается на решении задачи (11.1.4). Соответствующий функционал ошибок имеет вид

$$\Omega_B(v) = \sum b_n r_n (1 - cr_n) |v_n - (1 - cr_n)^{-1} F_n|^2. \quad (11.1.17)$$

Функционал  $\Omega_B(v)$  на элементах вида  $u - v$  определяет для  $v$  квадрат некоторой унитарной нормы  $\|v\|_B$ . При  $b_n = 4\pi^2$  функционал  $G_B(v)$  превращается в функционал типа (5.1.25) для периодической задачи.

Сравним значения  $\Omega_B(u^k)$  и  $\Omega_B(u^{k+1/2})$ . Если  $u_n^k = (1 + l^2(n\Omega)^2)^{-1} \times \times \tilde{u}_n^k$ , то согласно (11.1.11)

$$u_n^{k+1/2} = (1 + l^2(n\Omega)^2)^{-1} (cr_n \tilde{u}_n^k + F_n);$$

$$\Omega_B(u^{k+1/2}) = c^2 \sum b_n r_n^3 (1 - cr_n) |\tilde{u}_n^k - (1 - cr_n)^{-1} F_n|^2,$$

т. е.

$$\Omega_B(u^{k+1/2}) \leq c^2 \Omega_B(u^k) \quad (11.1.18)$$

или

$$\|\eta^{k+1/2}\|_B \leq c \|\eta^k\|_B. \quad (11.1.19)$$

## § 11.2. МЕТОД Л. А. ЛЮСТЕРНИКА

Этот метод является одним из немногих классических методов ускорения сходимости итераций, которые можно эффективно применять для решения задач переноса. Метод для задач переноса был исследован и обоснован в работах В. С. Владимирова [40,41] и применен для расчетов В. Н. Морозовым [186].

Метод Л. А. Люстерника изложим, следуя работе [41]. Пусть требуется решить неоднородное уравнение переноса (5.1.18) в условиях, когда метод простой итерации сходится. Пусть  $\lambda_1$  — первое собственное значение задачи (5.1.27). Последовательные приближения строим по схеме

$$\bar{S}_0 \varphi^0 = F; L_0 \varphi^i = \bar{S}_0 \varphi^{i-1}, i = 1, 2, \dots, \quad (11.2.1)$$

и за приближенное решение берем функцию

$$u^k = \sum_{i=1}^k \varphi^i + (\lambda_1 - 1)^{-1} \varphi^k, k = 1, 2, \dots \quad (11.2.2)$$

Для случая изотропного рассеяния последовательные приближения можно переписать в эквивалентной форме:

$$L_0 \varphi^i = c \varphi_0^{i-1}; \varphi_0^i = S \varphi^i. \quad (11.2.3)$$

Тогда приближения для  $u_0$  примут вид

$$u_0^k = \sum_{i=1}^k \varphi_0^i + (\lambda_1 - 1)^{-1} \varphi_0^k. \quad (11.2.4)$$

Для периодической задачи с изотропным источником уравнения (11.2.1) для функции  $u_0^i$  [см. (11.1.10)] переходят в следующие соотношения:

$$c \varphi_{0n}^i = F_n; \varphi_{0n}^i = c r_n \varphi_{0n}^{i-1} = c^{i-1} r_n^i F_n \quad (11.2.5)$$

Учитывая, что  $\lambda_1 = c^{-1}$ ,  $r_0 = 1$ , из уравнения (11.2.4) получаем

$$u_{0n}^k = r_n F_n ((1 - (c r_n)^k) / (1 - c r_n) + c^k r_n^{k-1} / (1 - c)). \quad (11.2.6)$$

Сравнивая (11.2.6) с (11.1.5), видим, что

$$e_n^k = c^k r_n^k F_n (r_n - 1) (1 - c r_n)^{-1} (1 - c)^{-1}. \quad (11.2.7)$$

Замечая, что когда  $\mathbf{n} = (0, 0, 0)$ , то  $r_0 = 1$ , а из (11.2.7) получаем:  $e_0^k = 0$  при  $k = 1, 2, \dots$ , и, следовательно,

$$\|e^k\| \leq ((c r(t))^k \|F\| (1 - c)^{-1}). \quad (11.2.8)$$

Учитывая, что  $0 < r(t) < 1$  при  $t > 0$ , из формул (11.2.7), (11.2.8) следует, что хотя скорость сходимости метода Люстерника больше скорости сходимости простой итерации, но сходимость замедляется при  $c \rightarrow 1 - 0$ ,  $l \rightarrow 0$ . Здесь  $\Delta \Pi = O(N)$ ;  $q = c r(t)$ .

Другой вариант метода состоит в том, что до некоторого  $k$  мы производим простые итерации, затем определяем

$$u^{k+1/2} = K(u_0^k, F); u_0^{k+1/2} = S u^{k+1/2} \quad (11.2.9)$$

и полагаем

$$u_0^{k+1} = u_0^{k+1/2} + (\lambda_1 - 1)^{-1} (u_0^{k+1/2} - u_0^k). \quad (11.2.10)$$

Если  $\lambda_1$  неизвестно, то при достаточно большом  $k$  (см. § 10.16) принимаем

$$\lambda_1 \approx \int_D (u_0^{k-1/2} - u_0^{k-1}) dx \Big/ \int_D (u_0^{k+1/2} - u_0^k) dx, \quad (11.2.11)$$

где интегрирование ведется по пространственной области  $D$ , в которой рассматривается процесс переноса нейтронов.

Исследуем этот процесс для периодической задачи. Поскольку  $e_n^k = (cr_n)^k e_n^0$  и область  $D$  — куб периодичности, вследствие ортогональности функций  $\exp(i\mathbf{n}\mathbf{x})$  формула (11.2.11) при  $e_0^0 \neq 0$  принимает вид  $\lambda_1 = e_0^{k-1}/e_0^k = c^{-1}$ , т. е.  $\lambda_1$  в этом случае определяется формулой (11.2.11) точно. Тогда

$$e_n^{k+1} = c(1-c)^{-1} (r_n - 1) e_n^k = c(1-c)^{-1} (r_n - 1) (cr_n)^k e_n^0. \quad (11.2.12)$$

Таким образом, видим, что  $e_0^{k+1} = 0$ , а при итерациях с номером  $m$ , где  $m > k + 1$ , скорость сходимости определяется величиной  $0 \leq cr(l) < 1$ , которая стремится к единице при  $c \rightarrow 1 - 0$ ,  $l \rightarrow 0$ . Поскольку  $e_0^{k+1} = 0$ , повторное применение формул (11.2.10) при  $m > k + 1$  уже не имеет смысла. Здесь  $\Delta C = O(N)$ ;  $q = cr(l)$ .

Заманчиво рассмотреть схему (11.2.9), (11.2.10), в которой на каждом шаге используется прием ускорения сходимости. Для периодической задачи получаем

$$\lambda_1 = c^{-1}; \quad e_n^{k+1} = c(1-c)^{-1} (r_n - 1) e_n^k. \quad (11.2.13)$$

Из формул (11.2.13) видим, что хотя  $e_0^k = 0$  при  $k \geq 1$ , однако, поскольку  $c(1-c)^{-1} > 1$  при  $c > 1/2$ , при достаточно больших значениях  $l | \mathbf{n} |$  имеет место неравенство  $c(1-c)^{-1} (r_n - 1) < -1$ , и тогда этот метод расходится. В § 11.8 покажем, что если считать  $\lambda_1$  изменяющимся по  $k$  параметрам, то можно получить сходящиеся схемы.

### § 11.3. МЕТОД ОЦЕНКИ ИТЕРАЦИОННЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

В. Н. Морозовым [186] был разработан метод улучшения сходимости итераций для решения уравнения переноса, учитывающий специфику таких задач. В методе итерационных отклонений по значению  $\varphi_0^k = S\varphi^k$  делаем сначала операцию  $K$  (11.1.2). Тогда ошибка  $\eta^{k+1/2}$  удовлетворяет уравнению (11.1.3). Задача (11.1.3) упрощается следующим образом. Интегральный член в уравнении (11.1.3) заменим приближенно квадратурной формулой с одним узлом, а именно положим

$$S\eta^{k+1/2} \approx \eta^{k+1/2}(\mathbf{x}, \Omega). \quad (11.3.1)$$

Очевидно, что если решение задачи изотропно, то последнее соотношение является точным.

Учитывая (11.3.1), уравнение (11.1.3) для  $\eta^{k+1/2}$  заменим уравнением для  $\omega^{k+1/2}$ :

$$\left. \begin{aligned} \Omega \nabla \omega^{k+1/2} + \Sigma_0 \omega^{k+1/2} &= \Sigma_s (\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k); \\ \omega^{k+1/2} &= 0 \text{ на } \Gamma \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.3.2)$$

Задача (11.3.2) легко решается. Найдя  $\omega^{k+1/2}$ , положим

$$\varphi_0^{k+1} = \varphi_0^{k+1/2} + \omega_0^{k+1/2}. \quad (11.3.3)$$

Такой метод является балансным. Это значит, что он сохраняет для любых  $k$  общий баланс нейтронов. Докажем это. Уравнение (11.1.1) для нахождения  $\varphi^{k+1/2}$  проинтегрируем по  $\Omega \times D$ . Тогда получим

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Gamma} |\Omega \mathbf{n}| \varphi^{k+1/2} d\Gamma + \int_D \Sigma \varphi_0^{k+1/2} dx = \int_D \Sigma_s \varphi_0^k dx + \int_D f_0 dx. \quad (11.3.4)$$

Аналогичную операцию сделаем с уравнением (11.3.2):

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Gamma} |\Omega \mathbf{n}| \omega^{k+1/2} d\Gamma + \int_D \Sigma_0 \omega_0^{k+1/2} dx = \int_D \Sigma_s (\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k) dx. \quad (11.3.5)$$

Сложив (11.3.4) и (11.3.5), получим

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Gamma} |\Omega \mathbf{n}| \varphi^{k+1} d\Gamma + \int_D \Sigma_0 \varphi_0^{k+1} dx = \int_D f_0 dx, \quad (11.3.6)$$

а это и есть уравнение баланса.

В данном методе процесс нахождения функции  $\omega_0^{k+1/2}$  требует почти столько же действий, сколько затрачивается в операции  $K$ . Доказательство сходимости метода оценки итерационных отклонений в общем случае не получено.

Исследуем сходимость этого метода на периодической задаче [125]. Поправку  $\omega^{k+1/2}$  находим, решая уравнение (11.3.2), где  $\varepsilon_n^{k+1/2} = cr_n \varepsilon_n^k$ ;  $c = \Sigma_s / \Sigma$ . Оно примет вид

$$(i \ln \Omega + 1 - c) \omega_n^{k+1/2} = c (cr_n - 1) \varepsilon_n^k,$$

откуда  $\omega_n^{k+1/2} = c (cr_n - 1) \varepsilon_n^k / (1 - c + i \ln \Omega)$ , и значит, для  $\omega_0^{k+1/2} = S \omega^{k+1/2}$  имеем  $\omega_{0n}^{k+1/2} = c (1 - c)^{-1} (cr_n - 1) r (\lambda_n (1 - c)^{-1})$ .

Следовательно,

$$\varepsilon_n^{k+1} = \varepsilon_n^{k+1/2} + \omega_{0n}^{k+1/2} = y_n c \varepsilon_n^k, \quad (11.3.7)$$

где  $y_n = y(\lambda_n, c)$ , а

$y(t, c) = r(t) - r(t(1-c)^{-1}) - c(1-c)^{-1} [1 - r(t)] r(t(1-c)^{-1})$ .

Оценим функцию  $y(t, c)$ . Для этого заметим, что  $r(t') \leq r(t)$  при  $t' \geq t \geq 0$  и

$$3(3+t^2)^{-1} \leq r(t) \leq \min(\pi t^{-1/2}, 1). \quad (11.3.8)$$

Левое неравенство в (11.3.8) следует из разложения функций  $r(t)$  в цепную дробь (см. § 11. 10), а правое очевидно.

Легко видеть, что

$$y(t, c) \leq r(t); \quad y(0, c) = 0 \text{ при } 0 \leq c < 1. \quad (11.3.9)$$

Оценим теперь  $y(t, c)$  снизу, для этого найдем такое  $0 < \alpha < 1$ , для которого при  $0 \leq c < 1$  можно гарантировать выполнение неравенства

$$y(t, c) \geq -\alpha c. \quad (11.3.10)$$

Учитывая (11.3.8), такое  $\alpha$  находим из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} y(t, c) &\geq -c(1-c)^{-1} [1-r(t)] r(t(1-c)^{-1}) \geq \\ &\geq -\pi t(3+t^2)^{-1/2} \geq -\pi \sqrt{3} c/12. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$-\pi \sqrt{3} c^2/12 \leq y_n c \leq r_n c, \quad n \neq 0. \quad (11.3.11)$$

Это значит, что при  $c \rightarrow 1 - 0$  метод оценки итерационных отклонений сходится быстрее метода простой итерации. Рассмотрим, как ведет себя этот метод при  $c \rightarrow 1 - 0$ . Пусть  $\bar{y}(t) = \lim_{c \rightarrow 1-0} y(t, c)$ . Вычисляя предел, находим

$$\bar{y}(t) = r(t) - \pi t^{-1} [1-r(t)]/2. \quad (11.3.12)$$

Из (11.3.12) следует, что для любого  $0 < \varepsilon < 1$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $y(t) > 1 - \varepsilon$  при  $0 < t \leq \delta$ . Следовательно, при достаточно малых значениях  $l$  и значениях  $c$ , достаточно близких к единице, метод оценки итерационных отклонений будет сходиться сколь угодно медленно. Итак,  $\Delta \Pi = O(NM)$ ;  $q = \max(cr(l), \pi \sqrt{3} c^2/12)$ .

Поскольку в методе итерационных отклонений за один шаг от  $k$  к  $k+1$  производится такое количество арифметических действий, которое сравнимо с числом арифметических действий в двух простых итерациях, то интересно сравнить убывание ошибки за одну итерацию в методе итерационных отклонений с убыванием ошибки за две итерации в методе простых итераций. Для этого сравним для периодической задачи две предельные (при  $c \rightarrow 1 - 0$ ) функции перехода этих методов:  $r^2(t)$  для двух простых итераций и  $\bar{y}(t)$  для метода итерационных отклонений. Можно показать, что при достаточно малых  $t$ , т. е. при всех значениях  $l |n|$ , для которых оба метода сходятся медленно, справедливо неравенство  $r^2(t) \geq \bar{y}(t) > 0$ , т. е. при  $c$ , достаточно близких к единице, и достаточно малых  $l$  метод итерационных отклонений за одну итерацию сходится быстрее двух простых итераций.

Теперь рассмотрим этот метод применительно к самосопряженному уравнению (11.1.4) [120]. Уравнение для поправки  $\omega^{k+1/2}$  получается из уравнения (11.1.4), если в нем  $Su$  заменить  $u$ :

$$-l^2(\Omega\nabla)^2 \omega^{k+1/2} + (1-c)\omega^{k+1/2} = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k), \quad (11.3.13)$$

или для коэффициентов Фурье в периодической задаче

$$l^2(n\Omega)^2 \omega_n^{k+1/2} + (1-c)\omega_n^{k+1/2} = c(cr_n - 1)\epsilon_n^k,$$



т. е.

$$\omega_{0n}^{k+1/2} = S\omega_n^{k+1/2} = c(1-c)^{-1}(cr_n-1)\varepsilon_n^k r(\lambda'_n),$$

где  $\lambda'_n = l|n|(1-c)^{-1/2} \geq \lambda_n$ .

Следовательно,

$$\varepsilon_n^{k+1} = \varepsilon_n^{k+1/2} + \omega_{0n}^{k+1/2} = t_n \varepsilon_n^k,$$

где

$$t_n = c[r_n - (1-c)^{-1}(1-cr_n)r(l|n|(1-c)^{-1/2})]. \quad (11.3.14)$$

Из формулы (11.3.14) легко увидеть, что  $\varepsilon_n^k \equiv 0$  при  $k \geq 1$ , а при каждом фиксированном  $n \neq 0$  и  $c \rightarrow 1 - 0$  величина  $t_n = O\left[-\frac{\pi}{2l|n|} \times \times (1-r_n)(1-c)^{-1/2}\right]$  стремится к  $-\infty$ . Следовательно, метод для самосопряженного уравнения расходится при значениях  $c$ , достаточно близких к единице.

К такому же результату придем и для несамосопряженного уравнения, если для нахождения поправки оператор  $S\varphi$  заменим  $(1/2) \times \times [\varphi(x, \Omega) + \varphi(x, -\Omega)]$ , ибо в этом случае результат итераций совпадает с итерациями, проведенными для уравнения в самосопряженной форме.

#### § 11.4. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ С БАЛАНСНЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ПОПРАВКАМИ

Мы ознакомились со схемами такого рода в § 10.26. Изложим этот метод для решения кинетического уравнения. Интегрируя по  $\Omega \times D$  уравнение (5.1.4), где  $\bar{S} = S$ , получаем уравнение баланса

$$\int_{\Gamma} \varphi_{1n} d\Gamma + \int_D \Sigma_0 \varphi_0 dx = \int_D f_0 dx,$$

где  $\varphi_1 = S(\Omega\varphi)$ , а  $\varphi_{1n}$  — нормальная составляющая  $\varphi_1$  к поверхности  $\Gamma$ .

Определим величину  $\Delta(\varphi)$  отношением

$$\Delta(\varphi) = \int_D f_0 dx \left/ \left( \int_{\Gamma} \varphi_{1n} d\Gamma + \int_D \Sigma_0 \varphi_0 dx \right) \right. \quad (11.4.1)$$

В работе В. Н. Морозова [186] предлагается для ускорения сходимости метод итераций с балансными множителями, состоящий в том, что для каждого  $k$  а) выполняется операция  $K$  [см. (11.1.2)]; б) полученное значение  $\varphi_0^{k+1/2}$  нормируется так, чтобы было выполнено уравнение баланса нейтронов

$$\varphi_0^{k+1} = \Delta(\varphi_0^{k+1/2}) \varphi_0^{k+1/2}. \quad (11.4.2)$$

Эта функция берется в качестве нового приближения. Доказательство сходимости описанного нелинейного процесса в общем случае не получено. Исследуем его на периодической задаче (11.1.4) с изотропным источником [120].

Операция  $K$  имеет вид (11.1.6), (11.1.7), а уравнение баланса —

$$(1 - c) u_{00} = F_0. \quad (11.4.3)$$

Следовательно

$$\Delta(u^{k+1/2}) = F_0(1 - c)^{-1}/u_{00}^{k+1/2}. \quad (11.4.4)$$

Легко видеть, что если за  $u_0^0$  взята такая функция, что у нее  $u_{00}^0 = F_0(1 - c)^{-1}$ , то из (11.4.4) для всех  $k \geq 0$  следует

$$\Delta(u^{k+1/2}) \equiv 1. \quad (11.4.5)$$

При другом выборе  $u_0^0$  равенство (11.4.5) имеет место при  $k \geq 1$  и тогда  $u_{00}^k = F_0(1 - c)^{-1}$ . Значит, этот метод сводится в данном случае к простой итерации для компонент  $u_{0n}$ ,  $n \neq 0$  и  $\varepsilon_n^{k+1} = q_n \varepsilon_n^k$ , где  $q_0 = 0$ ,  $q_n = cr(l | n |)$ , причем  $\max_{n \neq 0} q_n = cr(l)$ .

Таким образом, видно, что метод сходится для нашего модельного примера при всех  $0 \leq c < 1$ , что нулевая гармоника определяется точно уже при первой итерации, а быстрота сходимости его характеризуется величиной второго собственного значения задачи (она может быть медленной при малых значениях  $l$  и значениях  $c$ , близких к единице). Для этого метода  $\Delta \Pi = O(N)$ ;  $q = cr(l)$ .

При комбинировании метода Люстерника и метода балансных множителей видим, что результатом как одной, так и другой операции является точное восстановление лишь нулевой гармоники. Следовательно, при последовательном их применении одна из операций сработает впустую.

Т. А. Гермогеновой [59, 60] развит метод с мультипликативными поправками, выбираемыми из некоторого задаваемого множества функций. Изложим этот метод для самосопряженного уравнения (5.1.23). Пусть  $u^{k+1/2}(x, \Omega)$  получена в результате операции  $K$ . Положим  $u^{k+1}(x, \Omega) = b^k(x) u^{k+1/2}(x, \Omega)$ , где функция  $b^k(x)$  выбирается так, чтобы минимизировать функционал (5.1.25). Простые итерации сходятся в норме  $[ ]$ , порожденной функционалом (5.1.25), а поправки  $b^k$  могут только уменьшить значение этого функционала. Следовательно, последовательность  $u^{k+1}$  сходится к точному решению. Уравнение Эйлера для  $b^k$  будет уравнением в частных производных с коэффициентами, зависящими от  $u^{k+1/2}$ ; на границе области задается косая производная. Этот нелинейный метод близок к методу Л. В. Канторовича [89], но отличается от последнего тем, что единственная базисная функция, по которой идет разложение, сама образуется в процессе итераций.

На примере плоской задачи в слое  $0 \leq x \leq H$  для уравнения

$$-\mu^2 l \frac{\partial}{\partial x} l \frac{\partial u}{\partial x} + u = c \int_0^1 u d\mu + F(x, \mu) \quad (11.4.6)$$

изложим предложенную В. И. Лебедевым модификацию метода, в которой определяется функция  $v^k(x) = b^k(x) - 1$ . Поскольку  $b^k \rightarrow 1$  и  $u^{k+1/2} - u^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то, по-видимому, целесообразнее искать аддитивную поправку  $v^k$  к единице, стремящуюся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда ошибки, возникающие от округлений и от погрешности

аппроксимации разностных уравнений для поправки, будут стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Итак, положим

$$u^{k+1}(x, \mu) = (1 + v^k(x)) u^{k+1/2}(x, \mu). \quad (11.4.7)$$

Подставляя (11.4.7) в функционал (5.1.25), слагаемые которого для одномерного случая определены формулами (5.2.14), получаем уравнение для определения  $v^k(x)$ :

$$-\frac{l}{2} \left( D^k \frac{d}{dx} l \frac{d}{dx} v^k + \frac{d}{dx} l \frac{d}{dx} D^k v^k \right) + g^k v^k = c u_0^{k+1/2} (u_0^{k+1/2} - u_0^k), \quad (11.4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } g^k &= \int_0^1 \left[ l^2 \mu^2 \left( \frac{\partial u^{k+1/2}}{\partial x} \right)^2 + (u^{k+1/2})^2 \right] d\mu - c (u_0^{k+1/2}); \\ D^k &= \int_0^1 \mu^2 (u^{k+1/2})^2 d\mu; \left. \frac{dv^k}{dx} \right|_{x=0, H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.4.9)$$

для основной задачи.

Исследуем сходимость метода для одномерной периодической задачи (11.1.4) с неизотропным источником. Пусть

$$\left. \begin{aligned} u_0^\alpha &= a_n^\alpha \sin(nx + \psi); \quad F(x, \mu) = F_n(\mu) \sin(nx + \psi); \\ F_n^0 &= \int_0^1 F_n(\mu) d\mu; \quad F_n^1 = \int_0^1 F_n(\mu) (1 + \lambda_n^2 \mu^2)^{-1} d\mu. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.10)$$

Тогда нулевой момент от точного решения выразится формулой

$$u_0 = (1 - cr_n)^{-1} F_n^1 \sin(nx + \psi); \quad (11.4.11)$$

$$\left. \begin{aligned} u^{k+1/2} &= (1 + \lambda_n^2 \mu^2)^{-1} (ca_n^k + F_n) \sin(nx + \psi); \\ a_n^{k+1/2} &= cr_n a_n^k + F_n^1. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.12)$$

Вычисляя коэффициенты  $D^k$  и  $g^k$ , убеждаемся, что уравнение (11.4.8) имеет вид

$$-d_n^k \left( \frac{d^2 v^k}{dx^2} + 2n \operatorname{ctg}(nx + \psi) \frac{dv^k}{dx} \right) + T_n^k v^k = ca_n^{k+1/2} (a_n^{k+1/2} - a_n^k), \quad (11.4.13)$$

где

$$\begin{aligned} T_n^k &= (r_n^{-1} - c) (a_n^{k+1/2})^2 + f_n r_n^{-1}; \\ f_n &= r_n \int_0^1 (F_n - F_n^1/r_n)^2 (1 + \lambda_n^2 \mu^2)^{-1} d\mu; \\ d_n^k &= l^2 \int_0^1 \mu^2 (1 + \lambda_n^2 \mu^2)^{-2} (ca_n^k + F_n)^2 d\mu. \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (11. 4.13) выразится формулой

$$v^k = v_0^k + z^k/\sin (nx + \psi),$$

где  $v_0^k = cr_n a_n^{k+1/2} (a_n^{k+1/2} - a_n^k) [(1 - cr_n)(a_n^{k+1/2})^2 + f_n]^{-1}$

— частное решение неоднородного уравнения, а  $z^k/\sin (nx + \psi)$  — общее решение однородного уравнения, в котором функция  $z^k$  равна

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sin b_k (x + C_2) & \quad \text{при } b_k^2 > 0; \\ C_1 \exp \rho_k x + C_2 \exp (-\rho_k x) & \quad \text{при } \rho_k^2 = -b_k^2 > 0; \\ C_1 + C_2 x & \quad \text{при } b_k = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.4.14)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные, а  $b_k^2 = n^2 - T_n^k/a_n^k$ .

Предположим сначала, что  $b_k^2 \neq j^2$ , где  $j$  — целое положительное число. Тогда  $z^k \equiv 0$  и искомым решением (11.4.13) будет постоянная  $v_0^k$ , а значит,

$$a_n^{k+1} = (a_n^{k+1/2} F_n^1 + f_n) a_n^{k+1/2} [(1 - cr_n)(a_n^{k+1/2})^2 + f_n]^{-1}. \quad (11.4.15)$$

Зная точное решение (11.4.6), найдем  $\varepsilon^{k+1} = u_0 - u_0^{k+1} = \varepsilon_n^{k+1} \sin (nx + \psi)$ :

$$\varepsilon_n^{k+1} = P_n (\varepsilon_n^k), \quad (11.4.16)$$

где  $P_n (y) = cr_n f_n y [f_n + (1 - cr_n)^{-1} (F_n^1 - cr_n (1 - cr_n) y)^2]^{-1}$ .

Исследуем рекуррентные соотношения (11.4.16). При изотропном источнике выполняются равенства  $F_n^1 = r_n F_n^0, f_n = 0$ , т. е.  $\varepsilon_n^{k+1} = 0$  при  $k \geq 0$  при любом начальном приближении вида (11.4.10).

Пусть источник анизотропен. Решая уравнение  $y = P_n (y)$ , находим, что неподвижными точками  $P_n (y)$  являются  $y_1 = 0, y_{2,3} = (cr_n)^{-1} [(1 - cr_n)^{-1} F_n^1 \pm i \sqrt{f_n}]$ , причем

$$0 \leq \frac{dP_n}{dy} \Big|_{y=0} = cr_n f_n [f_n + (1 - cr_n)^{-1} (F_n^1)^2]^{-1} \leq cr_n. \quad (11.4.17)$$

Следовательно, в этом случае метод уже не дает точного решения за одну итерацию; сходимость его в окрестности точного решения оценивается величиной  $dP_n/dy |_{y=0}$ . Сходимость метода замедляется при увеличении анизотропии источника. В самом деле, рассмотрим источник единичной мощности вида  $F_n = m$  при  $|\mu - 1/2| \leq m^{-1/2}$  и  $F_n = 0$  при  $|\mu - 1/2| > m^{-1/2}$ , где  $m > 1$ . Тогда  $F_n^0 = 1; F_n^1 = m\alpha; f_n = m^2\alpha (r_n - \alpha)$ , где  $\alpha = \lambda_n^{-1} \arctg \{ \lambda_n [m (1 + \lambda_n^2/4) - \lambda_n^2/(4m)]^{-1} \}$ ;  $0 \leq \alpha \leq m^{-1}$ , а  $dP_n/dy |_{y=0} = cr_n \{ 1 + [(1 - cr_n) \times m (r_n - \alpha)]^{-1} \}^{-1}$ . Следовательно, для любого  $0 < \varepsilon < 1$  существуют при каждом фиксированном  $n$  такие  $\delta > 0$  и  $M(\delta) > 0$ , что при  $1 - \delta < c < 1 - \delta/2, 0 \leq ln < \delta$  и  $m > M(\delta)$  имеем  $\frac{dP_n}{dy} \Big|_{y=0} > 1 - \varepsilon$ . Заметим, что при увеличении  $m$  возрастают значения  $D^k$  и  $g^k$ , входящие в уравнение для поправки.

Пусть теперь  $b_k^2 = j^2$  для некоторого  $k$ . Тогда семейство функций

$$v^k = C_1 \sin j (x + C_2) / \sin (nx + \psi) + v_0^k \quad (11.4.18)$$

с произвольными постоянными  $C_1, C_2$  будет периодическими решениями уравнения (11.4.13). Решения (11.4.18) при  $n \neq 0$  имеют, вообще говоря, особенности при значениях  $nx + \psi$ , кратных  $\pi$ .

Так как при численной реализации периодической задачи (11.4.13) (с вырожденным дифференциальным оператором при  $n \neq 0$ ) вычисления проводятся с конечной точностью, то в решении ее даже при  $b_k^2 \neq j^2$  могут присутствовать члены типа (11.4.14) [аналоги ненулевых, имеющих особенности решений однородного уравнения (11.4.13)], а при  $b_k^2 \approx j^2$  система разностных уравнений становится еще и почти вырожденной [см. (11.4.18)]; то и другое приводит к неустойчивости счета. Поэтому для нахождения устойчивых алгоритмов получения функции  $u_0^{k+1}$  требуется специальный анализ методов решения уравнения (11.4.18). Для этого метода  $\Delta \Pi = O(NM)$ .

### § 11.5. КВАЗИДИФФУЗИОННЫЙ МЕТОД

В. Я. Гольдиным [68] был предложен нелинейный итерационный метод, названный квазидиффузионным. Ускорение сходимости в нем достигается путем введения зависящего от пространственных координат коэффициента диффузии, который заново вычисляется в процессе итераций. Разберем этот метод на примере кинетического уравнения для плоскопараллельной геометрии:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \varphi d\mu + f(x, \mu) \quad (11.5.1)$$

при  $-H \leq x \leq H$ ,  $-1 \leq \mu \leq 1$ , где  $f(x, \mu) = f(x, -\mu)^*$ .

Пусть решение четно относительно  $x = 0$  и  $\varphi(H, \mu) = 0$ ,  $\mu < 0$ . Умножим (11.5.1) на  $\mu$  и, проинтегрировав результат по  $\mu$  от  $\mu = -1$  до  $\mu = 1$ , получим

$$\frac{d}{dx} \varphi_2 + \Sigma \varphi_1 = 0, \quad (11.5.2)$$

где

$$\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^i \varphi d\mu. \quad (11.5.3)$$

Уравнение (11.5.2) перепишем в виде

$$\frac{d}{dx} D\varphi_0 + \Sigma \varphi_1 = 0, \quad (11.5.4)$$

где  $D = \varphi_2/\varphi_0$ . Из условий симметрии следует, что  $\varphi_1(0) = 0$ , а из граничных условий при  $x = H$  получаем

$$\varphi_1(H)/\varphi_0(H) = c_1, \quad (11.5.5)$$

\* В работе [68] этот метод рассмотрен для изотропного источника.

где  $c = \int_0^1 \mu \varphi d\mu / \int_0^1 \varphi d\mu$ ,  $x = H$  (здесь мы предполагаем, что  $\varphi_0 \geq \geq \alpha > 0$ ).

Итерационный процесс строится следующим образом. Выполняем операцию  $K$  (11.1.1), в результате которой находим  $\varphi_0^{k+1/2}$ ,  $\varphi_2^{k+1/2}$  и  $\int_0^1 \mu \varphi^{k+1/2}(H, \mu) d\mu$ ,  $\int_0^1 \varphi^{k+1/2}(H, \mu) d\mu$ . Затем вычисляем  $D^{k+1/2}(x)$ ,  $c_1^{k+1/2}$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} D^{k+1/2}(x) &= \varphi_2^{k+1/2} / \varphi_0^{k+1/2}; \\ c_1^{k+1/2} &= \int_0^1 \mu \varphi^{k+1/2}(H, \mu) d\mu \left/ \int_0^1 \varphi^{k+1/2}(H, \mu) d\mu \right. \end{aligned} \right\} \quad (11.5.6)$$

Подставляя эти значения  $D^{k+1/2}$ ,  $c_1^{k+1/2}$  в (11.5.4), (11.5.5), находим  $\varphi_1^{k+1}$ ,  $\varphi_0^{k+1}$  как решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \varphi_1^{k+1} + \Sigma_0 \varphi_0^{k+1} &= f_0(x), \quad \frac{d}{dx} D^{k+1/2} \varphi_0^{k+1} + \Sigma \varphi_1^{k+1} = 0, \\ \varphi_1^{k+1}(0) = 0, \quad \varphi_1^{k+1}(H) &= c_1^{k+1/2} \varphi_0^{k+1/2}(H). \end{aligned} \right\} \quad (11.5.7)$$

Коэффициент диффузии  $D$  и параметр  $c_1$  в граничном условии определяются однородными дробно-линейными функционалами, зависящими от функции  $\varphi$ . Поэтому можно ожидать слабой зависимости  $D$  и  $c_1$  от  $\varphi$  для достаточно регулярных функций  $\varphi$  в окрестности  $\mu = 0$ . Метод требует вычисления  $\varphi_2^{k+1/2}$ . Сходимость описанного процесса не доказана, однако в ряде случаев он приводит к быстрой сходимости. Для получения квазидиффузионной системы уравнений в общем случае надо сконструировать уравнение баланса и три уравнения для величин  $\varphi_0 = S\varphi$ ,  $\varphi_1 = S(\Omega \varphi)$ .

Ш. С. Николайшвили [190] предложил применительно к одномерным задачам модификацию этого метода с использованием приближения Ивона—Мартенса [81]. Если обозначить

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}_1^n &= \int_0^1 \varphi \mu^n d\mu \left/ \int_0^1 \varphi d\mu \right.; \quad u = \int_0^1 \varphi d\mu; \\ \bar{\mu}_2^n &= \int_{-1}^0 \varphi \mu^n d\mu \left/ \int_{-1}^0 \varphi d\mu \right.; \quad v = \int_{-1}^0 \varphi d\mu, \end{aligned} \right\} \quad (11.5.8)$$

то уравнениям (11.5.7) можно придать вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} (\bar{\mu}_1^1 u + \bar{\mu}_2^1 v) + \Sigma_0 (u + v) &= f_0; \\ \frac{d}{dx} (\bar{\mu}_1^2 u + \bar{\mu}_2^2 v) + \Sigma (\bar{\mu}_1^1 u + \bar{\mu}_2^1 v) &= 0; \\ v(H) = 0; \quad u(0) = v(0). \end{aligned} \right\} \quad (11.5.9)$$

Итерационный процесс проводим следующим образом. Пусть заданы  $u^k, v^k$ -приближения для  $u, v$ . Используя  $u^k, v^k$ , с помощью операции  $K$  находим  $\varphi^{k+1/2}(x, \mu)$  и получаем по формулам (11.5.8)  $\bar{\mu}_1^1, \bar{\mu}_2^1, \bar{\mu}_1^2, \bar{\mu}_2^2$ . Подставляя их в систему (11.5.9) и решая задачу (11.5.9), находим новые значения  $u^{k+1}, v^{k+1}$  и т. д. Хотя уравнения (11.1.1), (11.5.1), (11.5.6), (11.5.9) при соответствующих краевых условиях являются согласованными, для их разностных аналогов это не обязательно так. В работе В. Е. Трощиева, В. Ф. Юдинцева, В. И. Федянина [229] для случая сферически-симметрических задач и при условии, что кинетическое уравнение решается дивергентными разностными схемами  $S_n$ -метода, получены согласованные разностные схемы метода квазидиффузии. Вопросы согласованности для общей геометрии весьма сложны. Это, а также пересчет на каждой итерации новых граничных условий (что может быть обременительным делом, например, в многомерных задачах) побудило некоторых авторов использовать, как в  $KP$ -методе, уравнения квазидиффузии лишь для нахождения поправки, удовлетворяющей на границе области более простым, априори заданным краевым условиям. Уравнение для поправки выводится в предположении, что на каждой итерации можно пренебречь разностью  $\frac{d}{dx} [(D - D^v) \varphi_0]$ . Применимость подобного допущения нуждается в дополнительном исследовании.

Получим уравнение для поправки методом, изложенным в работе [229]. Для этого проинтегрируем два раза уравнение (11.1.3) для  $\eta^{k+1/2}$  по  $\mu$  от  $-1$  до  $1$ , умножив предварительно его на  $1$  и  $\mu$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \eta_1^{k+1/2} + \Sigma_0 \eta_0^{k+1/2} &= \Sigma_s (\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k); \\ \frac{d}{dx} \eta_2^{k+1/2} + \Sigma \eta_1^{k+1/2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.5.10)$$

где  $\eta_i^\alpha = \varphi^i - \varphi_i^\alpha$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Преобразуем выражение  $\eta_2^{k+1/2}$ :

$$\eta_2^{k+1/2} = (\varphi_2 / \varphi_0) \varphi_0 - (\varphi_2^{k+1/2} / \varphi_0^{k+1/2}) \varphi_0^{k+1/2} = D^{k+1/2} (\eta_0^{k+1/2}) + (D - D^{k+1/2}) \varphi_0. \quad (11.5.11)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx} D^{k+1/2} \eta_0^{k+1/2} + \Sigma \eta_1^{k+1/2} = -\frac{d}{dx} (D - D^{k+1/2}) \varphi_0. \quad (11.5.12)$$

Пренебрегая членом  $-\frac{d}{dx} [(D - D^{k+1/2}) \varphi_0]$ , получаем уравнения для поправок  $\omega_0^{k+1/2}, \omega_1^{k+1/2}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \omega_1^{k+1/2} + \Sigma_0 \omega_0^{k+1/2} &= \Sigma_s (\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k); \\ \frac{d}{dx} D^{k+1/2} \omega_0^{k+1/2} + \Sigma \omega_1^{k+1/2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.5.13)$$

На границе области для  $\omega_1$ ,  $\omega_0$  можно потребовать выполнения условий Маршака — Владимирова [41]. Решив уравнения (11.5.13), положим

$$\varphi_0^{k+1} = \varphi_0^{k+1/2} + \omega_0^{k+1/2}. \quad (11.5.14)$$

Для методов квазидиффузии  $\Delta U = O(NM)$ .

Приведем исследование В. И. Лебедева метода квазидиффузии в случае периодической задачи для одномерного самосопряженного уравнения (11.1.4) с неизотропным источником в предположениях (11.4.10). В этом случае  $u_0$ ,  $u_0^{k+1/2}$ ,  $u^{k+1/2}$  выразятся формулами (11.4.11), (11.4.12), а для второго момента от  $u^{k+1/2}$  будет справедливо равенство

$$u_2^{k+1/2} = \lambda_n^{-2} [c(1-r_n) a_n^k + F_n^0 - F_n^1] \sin(nx + \psi), \quad (11.5.15)$$

а потому

$$D^{k+1/2} = \lambda_n^{-2} [c(1-r_n) a_n^k + F_n^0 - F_n^1] / (cr_n a_n^k + F_n^1). \quad (11.5.16)$$

Уравнение квазидиффузии имеет вид

$$-l^2 \frac{d}{dx^2} D^{k+1/2} u_0^{k+1} + (1-c) u_0^{k+1} = F_n^0 \sin(nx + \psi). \quad (11.5.17)$$

Решая его, находим

$$u_0^{k+1} = (cr_n a_n^k + F_n^1) F_n^0 \sin(nx + \psi) (c(1-cr_n) a_n^k + F_n^0 - cF_n^1)^{-1}. \quad (11.5.18)$$

Зная точное решение, находим  $\varepsilon^{k+1} = u_0 - u_0^{k+1} = \varepsilon_n^{k+1} \sin(nx + \psi)$ :

$$\varepsilon_n^{k+1} = P_n(\varepsilon_n^k), \quad (11.5.19)$$

где

$$P_n(y) = c(F_n^1 - r_n F_n^0) y / (c(1-cr_n) y - F_n^0).$$

Исследуем рекуррентные соотношения (11.5.19). При изотропном источнике или при  $n=0$  имеет место равенство  $F_n^1 = r_n F_n^0$ . А это значит, что при любом начальном приближении вида (11.4.10) квазидиффузионный метод (11.5.15) — (11.5.18) дает точное решение за одну итерацию [это же справедливо для изотропного источника и начального приближения, содержащих гармоники  $\exp(i nx)$  и  $\exp(-i nx)$ ]. Пусть теперь источник анизотропен,  $n \neq 0$  и  $F_n^1 \neq r_n F_n^0$ . Найдем, решая уравнение  $y = P_n(y)$ , неподвижные точки операции  $P_n(y)$ . Ими будут точки  $y_1 = 0$  и  $y_2 = (c(F_n^1 - r_n F_n^0) + F_n^0) c^{-1} (1-cr_n)^{-1}$ , причем

$$\left. \frac{dP_n}{dy} \right|_{y=y_1} = 1 \left/ \left. \frac{dP_n}{dy} \right|_{y=y_2} = c \left( r_n - \frac{F_n^1}{F_n^0} \right). \quad (11.5.20)$$

Следовательно, в этом случае метод уже не дает точного решения за одну итерацию. Имеются две стационарные точки, одна из которых соответствует точному решению (11.4.11), а другая дает паразитическое решение с  $u_{0n} = -F_n^0/c$ . Значения коэффициентов квазидиффузии



(11.5.16) в этих точках соответственно равны  $D_1 = t^{-2} ((1 - cr)F_n^0/F_n^1 - (1 - c))$  и  $D_2 = -t^{-2}$ , где  $t = \lambda_n$ . Поскольку функция  $P_n(y)$  — гипербола, нетрудно показать, что итерации сходятся к устойчивой точке при любом начальном приближении, лишь бы оно не соответствовало неустойчивой точке.

Если  $r_n - 1 < F_n^1/F_n^0 < r_n + 1$ , то из (11.5.20) следует, что

$$-c \leq \left. \frac{dP_n}{dy} \right|_{y=y_1} = 1 / \left. \frac{dP_n}{dy} \right|_{y=y_2} \leq c,$$

т. е. точка  $y = y_1$  устойчива, а  $y = y_2$  — неустойчива. Оценим скорость сходимости метода в окрестности  $y = y_1$ , когда  $F_n(\mu) = \delta(v - \mu) + \delta(v + \mu)$ . В этом случае

$$\left. \frac{dP_n}{dy} \right|_{y=y_1} = c[r_n - (1 + v^2 \lambda_n^2)^{-1}].$$

На основании данных табл. 11.2 заключаем, что  $\min \max |r(t) - (1 + v^2 t^2)^{-1}|$ , равный 0,089, достигается при  $v^2 = 0,155$ . Однако для любого  $\varepsilon > 0$  нетрудно показать, что  $|c(r(t) - (1 + v^2 t^2)^{-1})| > 1 - \varepsilon$  (например, при  $1 - \varepsilon/2 < c < 1$ ,  $N \leq t \leq 2N$ ,  $v^2 < \delta$ , где  $N = [4\pi/\varepsilon]$ ,  $\delta = \pi^{-2} \varepsilon^2/32$ ), т. е. скорость сходимости метода для некоторой группы гармоник замедляется при  $v \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow 1 - 0$ .

Если функция  $F_n(\mu)$  знакопеременная, то характер устойчивости точек  $y_1, y_2$  может измениться. Например, при  $F_n(\mu) = 1 + b(\mu^2 - 1/3)$  справедливо равенство  $r(t) - F_n^1/F_n^0 = b(r(t)/3 - (1 - r(t)) \times t^{-2})$  и, следовательно, для каждого фиксированного  $t \neq 0$  при  $c \neq 0$  и достаточно большом  $|b|$  будем иметь

$$\left| \left. \frac{dP_n}{dy} \right|_{y=y_1} \right| = 1 / \left| \left. \frac{dP_n}{dy} \right|_{y=y_2} \right| > 1,$$

т. е. метод при  $\varepsilon_n^0 \neq 0$  не сходится к точному решению.

Разберем теперь пример, в котором точное решение, представляемое двумя гармониками, имеет положительный нулевой момент и неотрицательный второй, однако уравнение квазидиффузии на этом решении имеет сингулярные решения с потерей единственности. Пусть  $F(x, \mu) = F_0(\mu) + F_2(\mu) \cos 2(x + \psi)$ , где функции  $F_0(\mu), F_2(\mu)$  такие, что

$$\begin{aligned} F_0^0 &= j(j-1) - m^2/2, \quad \int_0^1 F_0(\mu)(\mu^2 - 1/3) d\mu = 1/2 - \\ &- [j(j-1) - m^2/2]/[3(1-c)]; \quad F_2^0 = m^2/2 + 2l^2; \\ F_2^1 &= [1 - cr(2l)] m^2/[2(1-c)]. \end{aligned}$$

Здесь  $j > 1$  — целое, а  $m^2 < j(j-1)$ . При этих предположениях для решения (11.4.6) имеем

$$u_0 = [j(j-1) - m^2 \sin^2(x + \psi)]/(1-c) > 0, \quad \text{а } u_2 = \sin^2(x + \psi) \geq 0.$$

Следовательно, в уравнении (11.5.17) коэффициент квазидиффузии  $D$  на точном решении равен  $(1-c) \sin^2(x + \psi)/[j(j-1) - m^2 \times \sin^2(x + \psi)] \geq 0$ , а в правой части (11.5.17) стоит нулевой момент

$F_0$  от источника, равный  $j(j-1) - m^2/2 + (m^2/2 + 2l^2) \cos 2(x + \psi)$ . При этих значениях  $D$  и  $F_0$  уравнение (11.5.17) имеет общее решение вида

$$(1-c)^{-1} [j(j-1) - m^2 \sin^2(x + \psi)] [1 + C_1 \sin^{j-2}(x + \psi) \times \\ \times \left( \frac{1}{\sin(x + \psi)} \frac{d}{dx} \right)^j \sin(mx + C_2)],$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. При целых  $m$  это решение периодически, однако оно имеет особенности при  $x = k\pi - \psi$ . А это значит, что если итерации сходятся к точному решению (11.4.6), то при численном решении уравнения (11.5.17) система разностных уравнений для нахождения  $u_0^{k+1}$  становится почти вырожденной, имеющей при  $h \rightarrow 0$  неограниченные решения, а ошибки округления породят неустойчивость счета.

Ввиду четности по  $\mu$  источника  $f(x, \mu)$  квазидиффузионные приближения, полученные с использованием самосопряженных и несамопряженных форм уравнений, совпадают. Выкладки, подобные приведенным, показывают, что для разбираемого случая периодической задачи итерационные методы (11.5.8), (11.5.9) и (11.5.13), (11.5.14) дают для  $u_0^{k+1}$  формулу (11.5.18). Значит, весь проведенный анализ справедлив и для этих методов.

Будем искать после операции  $K$  функцию  $u^{k+1}$  в виде

$$u^{k+1}(x, \mu) = u^{k+1/2}(x, \mu) + (1 + 5v^{k+1/2}(x) P_2(\mu)) \omega^{k+1/2}(x), \quad (11.5.21)$$

где

$$v^{k+1/2} = (3D^{k+1/2} - 1)g, \quad (11.5.22)$$

$P_2(\mu)$  — многочлен Лежандра,  $g$  — числовой параметр, а функция  $\omega^{k+1/2}$  находится из условия минимизации функционала (5.1.25); она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$-\frac{l}{3} \left\{ \frac{d}{dx} l \frac{d}{dx} [(1 + 2v^{k+1/2}) \omega^{k+1/2}] + v^{k+1/2} \frac{d}{dx} l \times \right. \\ \left. \times \frac{d}{dx} \left[ \left( 2 + \frac{55}{7} v^{k+1/2} \right) \omega^{k+1/2} \right] \right\} + (1-c + 5(v^{k+1/2})^2) \omega^{k+1/2} = \\ = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k). \quad (11.5.23)$$

Тогда

$$u_0^{k+1} = u_0^{k+1/2} + \omega^{k+1/2}. \quad (11.5.24)$$

Этот метод сходится медленнее  $KP_1(2)$ -метода с применением  $P_3$ -уравнений (см. § 11.7, 11.10); при  $g = 0$  он превращается в  $KP_1(1)$ -метод, а при  $g = 1/2$  — в метод, предложенный в работе Л. В. Майорова и Г. Я. Труханова [157].

В предположениях (11.4.10) исследуем этот метод на одномерной периодической задаче (11.1.4). Из (11.5.16), (11.5.22) определяем  $v^{k+1/2}$ , тогда  $\omega^{k+1/2} = \omega_n^{k+1/2} \sin(nx + \psi)$ , где  $\omega_n^{k+1/2} = c(a_n^{k+1/2} - a_n^k) \times \times (B(v^{k+1/2}, \lambda_n) - c)^{-1}$ , а

$$B(v, t) = (1 + 4v + 55v^2/7) t^2/3 + 5v^2 + 1, \quad t = \lambda_n. \quad (11.5.25)$$

Из (11.5.24) получаем

$$\epsilon_n^{k+1} = \epsilon_n^{k+1/2} + \omega_n^{k+1/2} = c\bar{P}_n(\epsilon_n^k, \lambda_n), \quad (11.5.26)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{P}_n(y, t) &= y(r - (1 - cr)(B(v, t) - c)^{-1}); \\ v &= [3t^{-2}((1 - cr)(F_n^0 - c(1 - r)y) - (1 - c)F_n^1) \times \\ &\times (F_n^1 - cr(1 - cr)y)^{-1} - 1]^{1/2}, \quad \left| \frac{d\bar{P}_n}{dy} \right| \leq 1. \end{aligned}$$

Операция  $\bar{P}_n(y, t)$  имеет значение  $y = 0$  единственной действительной неподвижной точкой, в которой

$$\left. \frac{d\bar{P}_n}{dy} \right|_{y=0} = A(t, c, g) = (B(v_0, t)r - 1)(B(v_0, t) - c)^{-1} \quad (11.5.27)$$

при  $v_0 = (3D_1(t) - 1)g$ .

Пусть  $F_n^1 = r_n R_n^0$ , тогда  $v_0 = (3(1 - r)t^{-2}/r - 1)g$ ; расчеты показали, что  $0 \leq A(t, c, 1/2) \leq 0,136$  при  $0 \leq c < 1$ , а при  $g = 0,335$  достигается  $\inf_g \sup_{t,c} |A(t, c, g)| = 0,111$ .

Пусть теперь  $F_n(\mu) = 1 + b(\mu^2 - 1/3)$  [источник взят соответствующим типом приближения (11.5.21)]. Тогда

$$v_0 = g[b(1 + 3(1 - c)t^{-2}) - 3][r/(r/3 - (1 - r)t^{-2}) - b]^{-1}.$$

При больших значениях  $|v_0|$  имеем:  $A(t, c, g) \approx r(t)$ , а значение  $|v_0|$  при  $g \neq 0$  сколь угодно велико или при  $t \neq 0$  и  $b \rightarrow r/[r/3 - (1 - r)t^{-2}]$  (тогда  $u_0 \rightarrow 0$ ,  $D_1 \rightarrow \infty$ ), или при  $t \rightarrow 0$  и достаточно больших  $|b|$ . Следовательно, для любого  $0 < \varepsilon < 1$  и фиксированного значения  $g \neq 0$  найдутся такие  $\delta > 0$  и  $d(\delta) > 0$ , что если  $\delta/2 < t < \delta$ ,  $|v_0| > gd(\delta)$ ,  $1 - \delta < c < 1 - \delta/2$ , то  $|cA(t, c, g)| > 1 - \varepsilon$ , т. е. метод может сходиться сколь угодно медленно. При  $b = r/[r/3 - (1 - r)t^{-2}]$  имеем  $u_0 \equiv 0$  и, следовательно,  $|v_0| = \infty$ , а это значит, что коэффициенты в (11.5.23) обращаются при любом  $x$  в бесконечность и решать уравнение (11.5.23) невозможно.

В § 11.4, 11.5 на модельных примерах показано, что сходимость нелинейных методов может замедляться или даже нарушаться при возрастании анизотропии источника. В случае, когда каждая из функций  $F(x, \mu)$ ,  $u_0^0$  задана несколькими гармониками с разными частотами, картина сходимости резко изменится в том, что в  $u_0^{k+1}$  уже будут присутствовать гармоники с частотами, отличными от заданных. От этого анализ сходимости усложняется. По-видимому, целесообразно рекомендовать следующий порядок использования нелинейных методов: сначала совершаем операцию  $K$ , а затем решаем этими методами уравнение для ошибки (11.1.3), которое имеет уже изотропный источник (при изотропной индикатрисе рассеяния).

Опишем в общем виде  $KP_1$ -метод применительно к кинетическим уравнениям и обсудим некоторые способы построения операции  $P = P_1$  [120, 133, 134]. Удобнее рассматривать самосопряженную задачу (5.1.18). При четной индикатрисе рассеяния и четной функции источника это не накладывает никаких дополнительных ограничений, так как очевидно, что последовательные приближения метода итераций источников по столкновениям, которые в  $KP_1$ -методе рассматриваются как операции  $K$ , например, эквивалентны для краевых задач (5.1.2), (5.1.6) и (5.1.15), (5.1.20).

Предположим, что сходимость итераций рассматриваем в некотором банаховом пространстве  $\mathcal{B}$ -пространстве функций, определенных в области  $D$ . Предположим также, что все операторы, которыми определяется  $KP_1$ , существуют и определены в пространстве  $\mathcal{B}$ . Для простоты предположим, что рассеяние нейтронов изотропно. Это значит, что индикатриса рассеяния не зависит от  $\Omega$ , а  $\bar{S}_0 = cS$ .

Рассмотрим уравнение (5.1.18), где оператор  $L_0$  определен на множестве функций, удовлетворяющих краевому условию (5.1.17).

1. Выполняем операцию  $K$ , т. е.

$$L_0 u^{k+1/2} = cu_0^k + F. \quad (11.6.1)$$

Операцию  $K$  используем только для вычисления  $u_0^{k+1/2} = Su^{k+1/2}$ . Задача (11.6.1) является краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка вдоль каждой траектории нейтрона с направлением  $\Omega$ ; она может быть решена методом прогонки. Итак, если рассматривать (11.6.1) как операторное уравнение, то

$$u_0^{k+1/2} = SL_0^{-1}(cu_0^k + F), \quad (11.6.2)$$

а  $\eta^{k+1/2}$  есть решение задачи

$$\tilde{L}_0 \eta^{k+1/2} = c\eta_0^{k+1/2} + f_1, \quad (11.6.3)$$

где  $f_1 = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k)$ , а  $\tilde{L}_0$  — оператор  $L_0$ , определенный на функциях  $\eta$ , удовлетворяющих краевому условию

$$B\eta|_{\Gamma \times \Omega} = B(u - u^{k+1/2})|_{\Gamma \times \Omega}. \quad (11.6.4)$$

2. Операцию  $P = P_1$  строим следующим образом. Пусть задаче (11.6.3) ставится в соответствие краевая задача в области  $D$  для линейного дифференциального уравнения  $2n$ -го порядка

$$Q_n w = P_n(cw + f_1). \quad (11.6.5)$$

Назовем это операторное уравнение  $P$ -уравнением. В нем  $Q_n$ ,  $P_n$  — дифференциальные операторы порядка  $2n$ , определенные на функциях  $w(\mathbf{x})$ , которые удовлетворяют краевым условиям

$$\tilde{B}(w - u + u^{k+1/3})|_{\Gamma} = 0, \quad (11.6.6)$$

в некотором смысле соответствующим краевым условиям (11.6.4) и аппроксимирующих их. Предположим, что существует и сравнительно легко находится оператор  $(Q_n - P_n c)^{-1} P_n c$ . Тогда, согласно изло-

жению в § 10.6, операция  $P$  при  $\alpha = 1$  состоит в нахождении решения задачи (11.6.5), (11.6.6) при  $f_1 = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k)$ :

$$\omega^{k+1/2} = (Q_n - P_n c)^{-1} P_n c (u_0^{k+1/2} - u_0^k). \quad (11.6.7)$$

Далее полагаем

$$u_0^{k+1} = u_0^{k+1/2} + \omega^{k+1/2}. \quad (11.6.8)$$

За нулевое приближение  $u_0^0 = Su^0$  можно взять решение задачи (11.6.5) с  $f_1 = F$  при соответствующих краевых условиях. Между функциями  $u_0^{k+1}$  и  $u_0^k$  существует соотношение, которое получается, если в равенство (11.6.8) подставить результат операций (11.6.1); (11.6.7):

$$u_0^{k+1} = M c u_0^k + M_1 F, \quad (11.6.9)$$

где операторы  $M$ ,  $M_1$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} M &= (I - Q_n^{-1} P_n c)^{-1} (S L_0^{-1} - Q_n^{-1} P_n); \\ M_1 &= (I - Q_n^{-1} P_n c)^{-1} S L_0^{-1}. \end{aligned} \quad (11.6.10)$$

Очевидно, что при  $\|M c\| = \bar{q} < 1$   $KP_1$ -метод, определенный формулами (11.6.1), (11.6.7), (11.6.8), сходится в пространстве  $\mathcal{B}$  со скоростью  $-\ln \bar{q}$ . Также очевидно, что если метод простой итерации сходится в  $\|\cdot\|$ , то существуют операторы сходящегося  $KP$ -метода (например, таковыми являются операторы с  $P_n \equiv 0$ ).

Если отойти от той общей постановки задачи, которая была изложена, и перейти к рассмотрению некоторого более узкого класса задач, то на этом классе интерес представляет

**Задача А.** *Найти вид дифференциальных операторов  $Q_n$ ,  $P_n$  и вид граничных условий (11.6.6), чтобы на заданном классе задач, во-первых, задача (11.6.5), (11.6.6) была разрешима и довольно легко решалась численными методами и, во-вторых,  $\|M c\|$  была достаточно малой величиной.*

Очевидно, что при практической реализации  $KP_1$  под операцией  $K$  можно понимать и простую итерацию для задачи (5.1.2), (5.1.5).

В случае вырожденной индикатрисы рассеяния находят в операции  $K$  кроме нулевого момента функции  $u^{k+1/2}$  еще конечное число некоторых линейных функционалов от  $u^{k+1/2}$ , вид которых определяется слагаемыми индикатрисы рассеяния. Уравнения (11.6.5) следует рассматривать в этом случае как систему уравнений для нахождения поправок к этим функционалам и нулевому моменту.

Приведем два возможных способа построения операторов  $Q_n$ ,  $P_n$ .

1. Краевая задача с условиями (11.6.6) для  $P_n$ -уравнений метода сферических гармоник определяет одновременно с моментами высших порядков от функции  $\varphi$  (или  $u$ ) и нулевой момент  $\omega = \varphi_0$ . Алгоритм нахождения нулевого момента  $\omega = \varphi_0$  из решения этой задачи назовем операцией  $P$ . Иногда удается более конкретно записать вид уравнения (11.6.5). Для этого исключают, если это возможно, из  $P_n$ -уравнений все моменты  $\varphi$ , кроме  $\omega$ . Для случая постоянных коэффициентов и  $f_1 = 0$  процесс исключения описан в [81, 122]. В результате получают краев-

вую задачу для дифференциального уравнения относительно функции  $\omega$ . При численной реализации такой операции  $P$  могут возникнуть трудности, связанные с тем, что выражение  $P_n(f_1)$  иногда (например, в задачах с неизотропным источником или многозонных задачах) является обобщенной функцией, а коэффициенты уравнений могут быть разрывными функциями. Тогда системы разностных уравнений следует составлять подобно тому, как это сделано в [118]. Сначала составляем для первоначальной системы  $P_n$ -уравнений, содержащей все моменты функции, систему разностных уравнений дивергентного типа, а потом в системе разностных уравнений исключаем все функции, кроме  $\omega$ .

2.  $P_{N1}$ -Уравнения (см. гл. 8) могут быть также использованы в операции  $P$ . Для некоторых задач показано [120], что метод сферических гармоник не является оптимальной операцией  $P$ , а лучшую сходимость  $KP_1$  дает операция  $P$  с использованием  $P_{N1}$ -уравнений при специальном выборе коэффициентов.

Далее обозначим  $P_i(n)$  операцию  $P_i(i = 1, 2, \dots, \alpha)$ , которая заключается в решении уравнения (11.6.5) с дифференциальным оператором  $Q_n$  2-го порядка.

В работе Г. Коппа [296] предложено использовать при решении уравнения Пайерлса в качестве облегченной краевую задачу для  $P_1$ -уравнения. Итерационная схема метода, который был назван синтетическим, иная, нежели для  $KP_1$ : она определяется формулами (10.23.2), (10.23.3). Вычислительные схемы обоих методов по-разному чувствительны к ошибкам округления. Наибольшее различие как в алгоритмической реализации, так и в обосновании этих методов проявляется в задачах, в которых операторы определены на классах функций, удовлетворяющих краевым условиям. Однако очевидна и общность идей в  $KP_1$ - и синтетическом методе.

## § 11.7. СХОДИМОСТЬ $KP_1(n)$ -МЕТОДА

Сходимость  $KP_1$ -метода покажем для самосопряженного кинетического уравнения (5.1.23). Класс дифференциальных операторов  $Q_n, P_n$ , дающих сходящийся  $KP_1$ -метод, был описан леммой 1 и задачей  $A$  в работе [120] (см. задачу  $A$  в § 6). Далее будем использовать обозначения и результаты § 5.1. Функция  $u \in H_0$ , реализующая минимум функционала (5.1.25), является обобщенным решением задачи (5.1.23), и для  $G(v)$  справедливы неравенства (5.1.26), а оператор  $L_0^{-1}S_0$  является вполне непрерывным положительным и самосопряженным в  $H_0$  оператором. Поэтому для уравнения (5.1.23) применимы утверждения, изложенные в § 10.9.

Сходимость  $KP_1$ -метода докажем в унитарной норме, порожденной функционалом  $G(v)$ . Согласно неравенству (10.9.6) операция  $K$  уменьшает значение функционала  $G(v)$ .

Пусть операция  $P_1$  состоит в решении уравнений метода сферических гармоник в  $P_{2n-1}$ -приближении с граничными условиями Маршака — Владимирова [41]. В обозначениях работы [41] эти уравнения имеют вид

$$L^{(n)} \omega^{k+1/2} = S_0^{(\bar{n})} \omega^{k+1/2} + F^{(n)}, \quad (11.7.1)$$

где для операции  $P_1 F^{(n)} = \bar{S}_0^{(n)} (u^{k+1/2} - u^k)$ .

Окончательно

$$u^{k+1} = u^{k+1/2} + \omega^{k+1/2}. \quad (11.7.2)$$

В уравнениях (11.7.1) функция  $\omega^{k+1/2}$  принадлежит пространству функций, представимых в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_I \Psi_{2k, i}(\mathbf{x}) Y_{2k, i}(\Omega), \quad (11.7.3)$$

где функции  $\Psi_{2k, i}(\mathbf{x})$  пробегают соболевское пространство  $W^{(1)}_2(D)$  [218], а  $Y_{2k, i}(\Omega)$  — сферические функции. Это пространство функций  $\omega$  обозначим  $H'$ . Тогда (...) в формуле (11.7.1) означает проектирование на это пространство. В работе В. С. Владимирова [41] показано, что функция  $\omega \in H'$ , реализующая  $\min_{\omega \in H'} G(\omega)$ , является решением

уравнений (11.7.1) при соответствующей правой части. Следовательно,  $KP_1$ -метод сходится в  $H_0$  [124].

Пусть теперь операция  $P_1$  состоит в решении краевой задачи для  $P_{1I}$ -уравнений, рассмотренной в § 8.4. Пусть  $H'$  — пространство кусочно-постоянных по  $\Omega$  функций, на котором определены  $P_{1I}$ -уравнения. В § 8.4 показано, что решение  $P_{1I}$ -уравнений реализует  $\min_{v \in H'} G(v)$ . Следовательно, если за операцию  $P_1$  взять решение краевой

задачи для  $P_{1I}$ -уравнений, то такой  $KP_1$ -метод сходится в  $H_0$  [124].

Заметим, что в обоих методах ускорения сходимости поправка  $\omega^{k+1/2}$  не удовлетворяет точно краевым условиям: она не лежит в области определения оператора  $L_0$ , однако лежит в области определения обобщенных операторов задачи.

## § 11.8. ЦИКЛИЧЕСКИЙ $KP_1(O)$ -МЕТОД

Рассмотрим краевую задачу (5.1.23). За операторы  $B_1, C_1, \tau_1$  в формулах (10.6.5) возьмем простейшие операторы  $B_1 = I; C_1 = \alpha_j I; \tau_1 = I$ , где  $\alpha_j$  — циклически меняющийся относительно  $k$  числовой параметр. Пусть  $N$  — период его изменения. Тогда после операции  $K$  полагаем

$$\left. \begin{aligned} u_0^{k+1/2} &= \bar{S}_0 u^{k+1/2}; \quad \omega^{k+1/2} = (1 - \alpha_j)^{-1} \alpha_j (u_0^{k+1/2} - u_0^k); \\ u_0^{k+1} &= u_0^{k+1/2} + \omega^{k+1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (11.8.1)$$

где  $k = 0, 1, \dots, \alpha_{j+N} = \alpha_j$ . В этом случае  $P_1(0)$  является довольно простой операцией в пространстве функций, представимых в виде  $\bar{S}_0 u$ . Пусть

$$e^k = u_0 - u_0^k = \sum_i z_i^k \bar{S}_0 v_i,$$

где  $v_k$  — собственные функции задачи (5.1.27), соответствующие собственным значениям  $\lambda_j > 0$  (обозначим  $\gamma_j = \lambda_j^{-1}$ ). Тогда после  $N$

итераций

$$\varepsilon^{k+N} = \sum_i \bar{M}_i z_i^k \bar{S}_0 v_i, \quad (11.8.2)$$

где величины  $\bar{M}_i$  определяются формулой  $\bar{M}_i = \prod_{j=1}^N (\gamma_j - \alpha_j) / (1 - \alpha_j)$ .

Пусть  $T_N(x)$  — многочлен Чебышева  $N$ -й степени на  $[-1, 1]$ , а  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , — упорядоченные перестановкой  $\kappa_N$  корни многочлена. Тогда если взять  $\alpha_j = \bar{\theta} (\beta_j + 1)/2$ , где  $\bar{\theta} = \bar{g} [1 - \exp(-d a_0^{-1})] < 1$ ;  $\bar{g} = \sup_{x \in D} \operatorname{vrai} |c S|g|$ ;  $d$  — диаметр области  $D$ , а

величина  $a_0$  определена в § 5.1. и считать, что величина  $\bar{\theta}$  довольно точно оценивает границу интервала, в котором находятся значения  $\gamma_k$ , то после  $N$  итераций  $|\bar{M}_i| \leq \theta'_N = |T_N(2\bar{\theta}^{-1} - 1)|^{-1} < 1$  и, следовательно,

$$[\varepsilon_0^{k+N}] \leq \theta'_N [\varepsilon_0^k].$$

Здесь  $\Delta \zeta = O(N)$ . За  $\alpha_j$  можно взять числа, полученные из  $T$ -последовательности (см. § 11.18).

### § 11.9. $KP_1(n)$ -МЕТОД ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Оценим скорость сходимости различных вариантов  $KP$ -метода для задачи (11.1.4) с постоянными коэффициентами. Некоторые изложенные результаты непосредственно обобщаются на  $2\pi T$ -периодические задачи с переменной функцией  $c$  [120, 121]. Начнем с исследования  $KP_1(n)$ -метода, в котором операция  $P_1(n)$  сконструирована следующим образом. Пусть  $Q_n(t)$ ,  $P_m(t)$  — многочлены вида

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^n q_{nk} t^{2k}; \quad P_m(t) = \sum_{k=0}^m p_{mk} t^{2k}, \quad (11.9.1)$$

где  $p_{m0} = 1$ ,  $n \geq m$ , удовлетворяющие при  $-\infty < t < \infty$  условиям

$$P_m(t) \geq 0; \quad Q_n(t) - cP_m(t) > 0. \quad (11.9.2)$$

Пусть  $\mathcal{L} = i/\Delta^{1/2}$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа. Операцию  $P_1(n)$  определим как операцию по нахождению  $2\pi$ -периодического решения уравнения

$$Q_n(\mathcal{L}) \omega^{k+1/2} = P_m(\mathcal{L}) (c\omega^{k+1/2} + f_1), \quad (11.9.3)$$

где  $f_1 = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k)$ . После выполнения ее полагаем

$$u_0^{k+1} = u_0^{k+1/2} + \omega^{k+1/2}. \quad (11.9.4)$$

Оценим в пространстве  $m$  скорость убывания ошибок. Пусть

$$\omega^{k+1/2} = \sum \omega_j^{k+1/2} \exp(ijx). \quad (11.9.5)$$

Подставляя в (11.9.3) это выражение и заменяя  $f_1$  выражением  $\sum [cr_j - 1] \varepsilon_j^k \exp(ijx)$ , получаем

$$\omega_j^{k+1/2} = [Q_n(\lambda_j) - P_m(\lambda_j) c]^{-1} P_m(\lambda_j) c [cr(\lambda_j) - 1] \varepsilon_j^k, \quad (11.9.6)$$



где  $\lambda_j = l|j|$ . Для ошибок  $\varepsilon_j^{k+1} = \varepsilon_j^{k+1/2} + \omega_j^{k+1/2}$  справедливы рекуррентные соотношения

$$\varepsilon_j^{k+1} = \psi(\lambda_j) c \varepsilon_j^k, \quad (11.9.7)$$

где функция  $\psi$  имеет вид

$$\psi(t) = \psi[t, Q_n(t), P_m(t), c] = [1 - c P_m(t)/Q_n(t)]^{-1} [r(t) - P_m(t)/Q_n(t)]. \quad (11.9.8)$$

Следовательно, если обозначить

$$\|\psi\| = \|\psi\|(Q_n, P_m, c) = \max_t |\psi(t)|, \quad (11.9.9)$$

то

$$\|\varepsilon^{k+1}\| \leq c \|\psi\| \|\varepsilon^k\|. \quad (11.9.10)$$

Справедлива

**Лемма 11.9.1.** Если многочлены  $Q_n(t)$ ,  $P_m(t)$  удовлетворяют условиям (11.9.1), (11.9.2) и

$$P_m(t)/Q_n(t) \leq [1 + r(t)](1 + c)^{-1}, \quad (11.9.11)$$

то

$$\|\psi\|(Q_n, P_m, c) \leq 1. \quad (11.9.12)$$

Доказательство состоит в установлении при выполнении условий леммы справедливости неравенства  $|\psi| \leq 1$ . Лемма 11.9.1 останется справедливой, если в (11.9.11), (11.9.12) заменить знак  $\leq$  знаком  $<$ .

Расчеты показали, что  $\|\psi\| < 0,225$  при  $Q_1(t) = 1 + q_{11}t^2$ ;  $P_0(t) = 1$ ;  $q_{11} = 1/3$  и  $0 \leq c \leq 1$ . Это значит, что для любых  $n > 0$ ,  $m \geq 0$  ( $n \geq m$ ) существуют  $Q_n, P_m$ , для которых  $\|\psi\| < 1$ . Пусть  $E_{nm}(c) = \inf_{P_m, Q_m} \|\psi\|(Q_n, P_m, c)$  — наилучшее приближение нуля на

классе многочленов  $Q_n, P_m$  вида (11.9.1), (11.9.2). Тогда

$$E_{nm}(c) < 0,225 \text{ при } n \geq 1, m \geq 0, 0 \leq c \leq 1. \quad (11.9.13)$$

**Лемма 11.9.2.** Справедливы неравенства

$$E_{hi}(c) \leq E_{nm}(c) \text{ при } k \geq n, i \geq m; \quad (11.9.14)$$

$$E_{nm}(c') \leq E_{nm}(c) \text{ при } 0 \leq c' \leq c. \quad (11.9.15)$$

Доказательство (11.9.14) очевидно. Неравенство (11.9.15) доказывается цепочкой неравенств  $E_{nm}(c) \geq \max_t |\psi(t, Q_n^0, P_m^0, c')| \geq E_{nm}(c')$ , где  $Q_n^0(t)$ ,  $P_m^0(t)$  — те многочлены, на которых достигается  $E_{nm}(c)$ . Из рассуждений этого параграфа вытекает

**Теорема 11.9.1.** Если в  $KP_1(n)$ -методе для  $2\pi$ -периодической задачи операция  $P_1(n)$  состоит в решении уравнения (11.9.3), в котором многочлены  $Q_n(t)$ ,  $P_m(t)$  удовлетворяют требованиям (11.9.1), (11.9.2) и леммы 11.9.1. а  $0 \leq c < 1$ , то  $KP_1(n)$ -метод сходится в пространстве  $m$  и

$$\|\varepsilon^k\| \leq [c \|\psi\|(Q_n, P_m, c)]^k \|\varepsilon^0\|, \quad (11.9.16)$$

где  $\varepsilon^0$  — ошибка начального приближения, а  $\|\psi\| < 1$ .

Нетрудно убедиться в том, что оценка (11.9.16) для величины  $\|e^k\|$  достигается, а следовательно, ее нельзя улучшить.

**Лемма 11.9.3.** Если полиномы  $Q_n, P_m$  удовлетворяют условиям (11.9.1), (11.9.2) и  $Q_n(0) = P_m(0)$ , то  $KP_1(n)$ -метод сохраняет на каждой итерации при  $k > 0$  общий баланс нейтронов.

Доказательство. Из условий леммы 11.9.3 получаем, что  $q_{n0} = 1$ . Проводя полную итерацию по  $KP_1(n)$ -методу, находим, что  $u_0^{k+1}$  — коэффициент при нулевой гармонике функции  $u_0^{k+1}$  — всегда удовлетворяет при  $q_{n0} = 1$  уравнению  $u_0^{k+1} = (1 - c)^{-1} F_{00}, k = 0, 1, \dots$ , а это и есть уравнение баланса нейтронов.

Из леммы 11.9.3 следует, что для получения «балансного» приближения решения задачи достаточно лишь последнюю итерацию провести с многочленами  $Q_n, P_m$ , удовлетворяющими условиям леммы 11.9.3, а все предыдущие итерации выполнять с  $Q_n, P_m$ , дающими большую сходимость итераций. Балансные и небалансные схемы  $KP$ -метода будем обозначать соответственно через БКР и НБКР.

## § 11.10. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ОПЕРАЦИИ $P$ И ОЦЕНКА $\|\Psi\|$

Эффективность операции  $P$  зависит от выбора параметров  $q_{nk}, p_{mk}$ , определяющих эту операцию [120]. Очевидно, что операция  $P$  будет наиболее эффективной в пространстве  $\mathfrak{M}$ , если

$$\|\Psi\|(Q_n, P_m, c) = E_{nm}(c). \quad (11.10.1)$$

Решение задачи (11.10.1) по нахождению многочленов  $Q_n^0(t), P_m^0(t)$  может быть получено нелинейным методом последовательных приближений, основанным на чебышевском альтернансе.

В качестве меры эффективности можно взять величину квадратичного функционала

$$J(Q_n, P_m, c) = \int_0^{\infty} \Psi^2(t) \rho(t) dt \quad (11.10.2)$$

[где  $\rho(t)$  — некоторая неотрицательная функция] и решить задачу о минимизации функционала  $J$ . Значения  $p_{mk}, q_{nk}$ , минимизирующие  $J$ , будут оптимальными, если рассматривать сходимость итераций в некоторых других функциональных пространствах. В этом случае параметры удовлетворяют системе трансцендентных уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial p_{mk}} = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial q_{ni}} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (11.10.3)$$

При  $m = 0, n = 1, c = 1$  значение для  $q_{11}$  находится из (11.10.3) в явном виде:

$$q_{11} = \left[ \int_0^{\infty} \frac{1-r(t)}{t^2} r(t) \rho(t) dt \right]^{-1} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1-r(t)}{t^2} \right]^2 \rho(t) dt. \quad (11.10.4)$$

В табл. 11.1 приведены результаты расчета БКР при  $c = 1; P_0 = 1; Q_1 = q_{11}t^2 + 1$ ; в табл. 11.2 — при  $Q_1 = q_{11}t^2 + q_{10}; P_1 = p_{11}t^2 + 1$ ;

Таблица 11.1

Налагаемые требо- вания	$q_{11}$	$\ \psi\ $	Налагаемые требо- вания	$q_{11}$	$\ \psi\ $
$P_1$ -приближение	1/3	0,225	$\rho = r(t)$	0,286	0,196
$\ \psi\  = E_1$	0,281	0,186	$\rho = (1+t^2)^{-1}$	0,302	0,206
$\rho = 1$	0,256	0,262			

\* Результат для  $P_1$ -приближения, опубликованный в [120, 134], был вновь получен в работе Е. М. Гелбарда и Л. А. Хагемана [282].

Таблица 11.2

Налагаемые требования	$q_{11}$	$q_{10}$	$p_{11}$	$E_{1m}(c)$
БКР, $c=0,99$	0,281	1	0,017	0,118
БКР, $c=1; p_{11}=0$	0,281	1	0	0,186
БКР, $c=0,99; p_{11}=0$	0,262	1	0	0,172
БКР, $c=1$	0,296	1	0,019	0,128
НБКР, $c=0,99$	0,273	1,0013	0,016	0,114
НБКР, $c=0,99; p_{11}=0$	0,253	1,0019	0	0,166
БКР, $c=0,9; p_{11}=0$	0,227	1	0	0,145
БКР, $c=0; p_{11}=0$	0,155	1	0	0,089

Таблица 11.3

Налагаемые требования	$10^3 q_{22}$	$10^4 q_{21}$	$10^4 p_{22}$	$10 p_{21}$	$E_{2m}(c)$
$P_3$ -приближение, $c=1$	$10^8 \times 3/35$	10.6/7	0	10.17/21	0,111
БКР, $c=1; p_{22}=0$	7,785	5,011	0	1,771	0,029
БКР, $c=0,99; p_{22}=0$	6,663	4,795	0	1,616	0,027
БКР, $c=1$	12,50	5,353	2,6	2,088	0,021
БКР, $c=0,99$	10,74	5,127	2,1	1,912	0,020

в табл. 11.3 — при  $Q_2 = q_{22}t^4 + q_{21}t^2 + 1; P_2 = p_{22}t^4 + p_{21}t^2 + 1$ . Значения величин  $p_{mk}, q_{nk}$  даны с точностью, гарантирующей точность  $0,5 \cdot 10^{-3}$  в значениях  $E_{mn}(c)$ .

Используем аппарат цепных дробей для построения многочленов  $Q_n, P_m$ . Известно разложение функции  $t^{-1} \operatorname{arctg} t$  в цепную дробь Ламберта:

$$t^{-1} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{1+} \frac{t^2}{3+} \frac{4t^2}{5+} \dots \frac{(n-1)^2 t^2}{2n-1+} \dots \quad (11.10.5)$$

Подобрав подходящую дробь  $n$ -го порядка  $R_n/Q_n$  и пронормировав ее предварительно так, чтобы  $R_n(0) = 1$ , возьмем за многочлены  $P_m(t)$  и  $Q_n(t)$  соответственно числитель и знаменатель этой дроби. Поскольку (11.10.5) является цепной дробью с положительными коэффициентами, справедливы неравенства

$$R_2(t-1)/Q_2(t-1) \leq R_{2i}/Q_{2i} \leq r(t) \leq R_{2i+1}/Q_{2i+1}. \quad (11.10.6)$$

Можно убедиться в том, что

$$R_n > 0; Q_n > 0 \text{ и } 0 < R_n/Q_n \leq 1 \quad (11.10.7)$$

при действительных  $t$ , что при четном  $n$  степень многочлена  $Q_n$  равна  $2n$ , а степень многочлена  $R_n(t)$  равна  $2(n-1)$ ; при нечетном  $n$  степень многочленов  $Q_n(t)$  и  $R_n(t)$  равна  $2n$ , а при  $c \in [0, 1]$ ,  $n = 2i$  многочлены  $P_{n-1} = R_n$ ,  $Q_n$  удовлетворяют условиям (11.9.1), (11.9.2). Для построения операции  $P$  следует взять многочлены  $P_{n-1}$ ,  $Q_n$  только при четных значениях  $n$ ; основанием для такого выбора служат рассуждения в § 9.10, неравенство (11.10.6) и

**Лемма. 11.10.1.**  $\|\Phi\| (Q_{2i}, R_{2i}, 1) \leq c_0 i^{-1}$ , где  $Q_{2i}, R_{2i}$  — подходящие многочлены цепной дроби (11.10.5)  $2i$ -го порядка, а  $c_0$  — постоянная, не зависящая от  $i$ .

Вспоминая связь между ортогональными многочленами и цепными дробями [210], мы видим, что многочлен  $t^{2j} Q_{2j}(it^{-1})$  с точностью до постоянного множителя совпадает с многочленом Лежандра  $2j$ -й степени.

Покажем, что в случае периодической задачи операция  $P$

$$[Q_n(\mathcal{L}) - cP_{n-1}\mathcal{L}] \omega^{k+1/2} = P_{n-1}(\mathcal{L}) c (u_0^{k+1/2} - u_0^k) \quad (11.10.8)$$

с выбранными в данном параграфе многочленами сведется к  $n$ -кратному решению периодических задач для эллиптических уравнений 2-го порядка. Для этого многочлен  $Q_n - cP_{n-1}$  разложим на множители

$$Q_n(t) - cP_{n-1}(t) = b_n \prod_{i=1}^n (t^2 + \tau_{i1}^2), \quad (11.10.9)$$

где  $b_n$  — коэффициент при  $t^{2n}$  многочлена  $Q_n(t)$ , а  $\tau_{i1}^2 = \varphi_i^{-2}$ ,  $\varphi_i^2$  — корни уравнения (9.11.7) для  $n = M$ . Из неравенств (9.11.8) заключаем, что  $\tau_{i1}^2 > 1$  при  $i = 1, 2, \dots, n-1$  и  $0 < \tau_{n1}^2 < \mu_n^{-2}$ .

Поскольку все корни уравнения

$$Q_n(it) = 0 \quad (11.10.10)$$

действительны и по модулю больше единицы [ибо они обратны  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\mu_k < \mu_{k+1}$ ) — положительным корням многочлена Лежандра], а корни многочлена  $P_{n-1}(i, t)$  лежат между корнями уравнения (11.10.10) (см. [121]), заключаем, что многочлен  $P_{n-1}(t)$  представим в виде

$$P_{n-1}(t) = d_n \prod_{i=1}^{n-1} (t^2 + \tau_{i2}^2), \quad (11.10.11)$$

где  $\tau_{i2}^2 > 1$ , а  $d_n$  — коэффициент при  $t^{2(n-1)}$ , и что  $\mu_{i+1}^{-2} < \tau_{i1}^2$ ,  $\tau_{i2}^2 < \mu_i^{-2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , а следовательно,

$$\tau_{i2}^2/\tau_{i1}^2 = 1 + O(n^{-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (11.10.12)$$

Переписав уравнение (11.10.8) в виде

$$b_n \prod_{i=1}^n (-t^2 \Delta + \tau_{i1}^2) \omega^{k+1/2} = d_n \prod_{i=1}^{n-1} (-t^2 \Delta + \tau_{i2}^2) c (u_0^{k+1/2} - u_0^k), \quad (11.10.13)$$

видим, что решение этого уравнения сводится к последовательному нахождению решений периодических задач

$$(-l^2 \Delta + \tau_{n1}^2) z_0^k = \frac{d_n c}{b_n} (u_0^{k+1/2} - u_0^k); \quad (11.10.14)$$

$$\left. \begin{aligned} (-l^2 \Delta + \tau_{i1}^2) v_{i-1}^k &= (\tau_{i2}^2 - \tau_{i1}^2) z_{i-1}^k; \\ z_i^k &= z_{i-1}^k + v_{i-1}^k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (11.10.15)$$

В результате получим, что  $w^{k+1/2} = z_{n-1}^k$ . В силу соотношения (11.10.12) процесс нахождения  $z_i^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , устойчив по  $n$ .

Таким образом, имеет место следующая ситуация: скорость сходимости  $KP_1(n)$ -метода растет с ростом  $n$  как  $\ln n$ , а трудоемкость операции  $P_1(n)$  при этом увеличивается. В работах [119—121, 127] на модельных задачах исследованы оптимальные с точки зрения общей затраты числа арифметических действий алгоритмы  $KP_1(n)$ -метода, названные дешевыми по цене  $\Pi(KP_1(n))$  алгоритмами; для них показана асимптотика роста  $n(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\varepsilon$  — точность решения задачи.

В следующих параграфах мы рассмотрим различные модификации  $KP$ -метода для 2  $\pi$ -периодической задачи. Для этого введем некоторые единые обозначения:  $Q_n$  и  $P_m$  — многочлены, удовлетворяющие условиям (11.9.1), (11.9.2);  $T_N(x)$  — многочлен Чебышева первого рода для  $[-1, 1]$  степени  $N$ ,

$$\beta_k = \cos(2k-1)\pi/2N; \quad \theta_N = |T_N(\delta)|^{-1}; \quad \mathcal{L} = l i \Delta^{1/2}, \quad (11.10.16)$$

где величина  $\delta$  определяется по-своему в каждом конкретном случае; предполагается, что  $|\delta| > 1$  при  $0 \leq c < 1$ .

### § 11.11. $KP_1(n)P_2(0)$ -МЕТОД

Рассмотрим  $KP$ -метод при  $\alpha = 2$ , в котором за операции  $P_1, P_2$  возьмем операции  $P_1(n), P_2(0)$ . Пусть  $P_1(n)$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} Q_n(\mathcal{L}) w^{k+1/3} &= P_m(\mathcal{L}) [c w^{k+1/3} + c(u_0^{k+1/3} - u_0^k)]; \\ u_0^{k+2/3} &= u_0^{k+1/3} + w^{k+1/3}, \end{aligned} \right\} \quad (11.11.1)$$

где  $u^{k+1/3}$  является результатом выполнения операции  $K$ . Пусть операция  $P_2(0)$  выполняется при  $B_2 = I, C_2 = \alpha_k c I, \tau_2 = I$ :

$$\begin{aligned} w^{k+2/3} &= (1 - \alpha_k c)^{-1} \alpha_k c (u_0^{k+2/3} - u_0^k); \\ u_0^{k+1} &= u_0^{k+2/3} + w^{k+2/3}. \end{aligned} \quad (11.11.2)$$

Тогда после полного цикла из  $N$  итераций

$$e_n^{k+N} = \prod_{l=1}^N (\psi(l|n) - \alpha_j) (c^{-1} - \alpha_j)^{-1} e_n^k.$$

Пусть  $m = \min_n \psi(l|n)$ ;  $M = \max_n \psi(l|n) < c^{-1}$ , а об ошибке начального приближения  $e^0$  известно только, что  $|e_n^0|$  ограничены некоторой постоянной  $c_0$ . Для максимального уменьшения всех  $|e_n^k|$  за  $N$  итераций необходимо взять  $\alpha_j$  из множества чисел

$$(M + m + (M - m) \beta_n)/2, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (11.11.3)$$

Тогда

$$|e_n^{k+N}| \leq \theta_N |e_n^k|; \quad \delta = (2c^{-1} - M - m)/(M - m). \quad (11.11.4)$$

В частности,  $\alpha_1 = (M + m)/2$  при  $N = 1$ . Ясно, что чем больше  $|\delta|$ , тем быстрее сходится  $KP_1(n) P_2(0)$ . Поэтому интересно найти такие коэффициенты уравнения (11.11.1), которые давали бы наибольшую величину  $|\delta|$  при заданном значении  $n$ . Можно показать, что для  $n = 1$  оптимальным в этом смысле является  $P_1$ -приближение метода сферических гармоник ( $P_0 \equiv 1, q_{11} = 1/3$ ): для него  $|\delta| \geq 8,88 c^{-1} - 1$ , т. е.  $\theta_1 \leq c/(8,88 - c) < 0,127 c$ .

Если за  $Q_n(t), P_{n-1}(t)$  взять многочлены, определенные леммой 11.10.1, а величину  $M$  для этих многочленов обозначить  $M_n$  ( $0 < M_n < 1$ ) и учесть, что для них  $m = 0$ , то при  $N = 1$  имеем  $|\delta| > 2 c^{-1} M_n^{-1} - 1$ , т. е.  $\theta_1 \leq M_n c / (2 - M_n c) < M_n c$ . Например, для  $n = 2$   $\theta_1 \leq c/(18 - c)$ .

За  $\alpha_j$  можно взять числа, образованные из  $T$ -последовательности.

## § 11.12. $K^2P$ -МЕТОД

В § 11.10 изложены алгоритмы построения многочленов  $Q_n(t), P_{n-1}(t)$ , для которых  $\|\psi\| (Q_n, P_{n-1}, 1) = O(n^{-1})$ . Указанный порядок малости  $\|\psi\|$  нельзя улучшить. Объясняется это тем, что величины  $r(t)$  и  $Q_n^{-1}(t) P_{n-1}(t)$  с разной скоростью убывают при  $t \rightarrow \infty$  [как  $O(t^{-1})$  и  $O(t^{-2})$  соответственно], что приводит к различным асимптотическим поведением собственных значений операторов операций  $K$  и  $P$ . Для ускорения сходимости итераций можно предложить такой вариант метода: за один итерационный шаг выполнять две операции  $K$  и операцию  $P$ . Тогда собственные числа операций  $K^2$  и  $P$  будут убывать асимптотически одинаково [как  $O(\lambda_n^{-2})$ ], и поэтому можно надеяться при разумном выборе многочленов  $Q_n(t), P_{n-1}(t)$  на более быстрое убывание ошибки  $K^2P_1(n)$  за один итерационный цикл. Если же окажется, что сходимость одной итерации  $K^2P_1(n)$  сравнима со сходимостью пары итераций  $KP_1(n)$ , то  $K^2P_1(n)$  будет предпочтительнее. Схема  $K_2P_1(n)$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} u_0^{k+1/3} &= SL_0^{-1}(cu_0^k + F); & u_0^{k+2/3} &= SL_0^{-1}(cu_0^{k+1/3} + F); \\ Q_n(\mathcal{L}) \omega^{k+2/3} &= P_{n-1}(\mathcal{L})(c^2 \omega_0^{k+2/3} + c^2(u_0^{k+2/3} - u_0^k)); \\ u_0^{k+1} &= u_0^{k+2/3} + \omega^{k+2/3}; \end{aligned} \right\} \quad (11.12.1)$$

где  $Q_n(t), P_{n-1}(t)$  — многочлены вида (11.9.1) и  $Q_n(t) - c^2 P_{n-1}(t) > 0$ . Тогда

$$e_n^{k+1} = \psi_1(l|n) c^2 e_n^k,$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \psi_1(Q_n, P_{n-1}, c^2) = \\ &= [1 - c^2 Q_n^{-1}(t) P_{n-1}(t)]^{-1} [r^2(t) - Q_n^{-1}(t) P_{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Свойства функции  $\psi_1(t)$  аналогичны соответствующим свойствам функции  $\psi(t)$  (11.9.8).

Рассмотрим балансную схему  $K^2 P_1(1)$ , для которой дифференциальное уравнение в (11.12.1) имеет вид

$$-q_{11} t^2 \Delta \omega^{k+2/3} + (1 - c^2) \omega^{k+2/3} = c^2 (u_0^{k+2/3} - u_0^k), \quad (11.12.2)$$

где  $q_{11}$  — подлежащий выбору параметр. Легко убедиться в том, что при  $q_{11} = 2/3$  функция  $\psi_1(Q_1, 1, 1)$  для уравнения (11.12.2) равна нулю вместе с производной при  $t = 0$ . Численные расчеты показали, что при  $0 \leq c^2 \leq 1$  значения функции  $\psi_1(Q_1, 1, c^2)$  при  $q_{11} = 2/3$  заключены в пределах  $0 \leq \psi_1(Q_1, 1, c^2) \leq 0,049$ , а при  $q_{11} = 0,643$  достигается  $\min \max |\psi_1(Q_1, 1, c^2)|$ , равный 0,038. Для сравнения укажем, что в  $K P_1$  (11.9.3) ошибка уменьшается за две итерации не менее чем на множитель 0,051  $c^2$ , если за операцию  $P_1(1)$  взять  $P_1$ -приближение, и на множитель 0,035  $c^2$  в оптимальном случае.

Незначительно увеличивая цену одной итерации, можно предположить более быстро сходящийся метод  $K^2 P_1(n) P_2(0)$ :

$$\left. \begin{aligned} u_0^{k+1/4} &= S L_0^{-1} (c u_0^k + F); \quad u_0^{k+1/2} = S L_0^{-1} (c u_0^{k+1/4} + F); \\ Q_n(\mathcal{L}) \omega^{k+1/2} &= P_{n-1}(\mathcal{L}) c^2 (\omega^{k+1/2} + (u_0^{k+1/2} - u_0^k)); \\ u_0^{k+3/4} &= u_0^{k+1/2} + \omega^{k+1/2}; \\ \omega^{k+3/4} &= (1 - \alpha_n c^2)^{-1} \alpha_n c^2 (u_0^{k+3/4} - u_0^k); \\ u_0^{k+1} &= u_0^{k+3/4} + \omega^{k+3/4}, \end{aligned} \right\} \quad (11.12.3)$$

где  $Q_n(t)$ ,  $P_{n-1}(t)$  — многочлены, определенные выше. Если  $m = \min_t \psi_1(t)$ ;  $M = \max_t \psi_1(t) < c^{-2}$ , то, взяв величины  $\alpha_j$  из множества (11.11.3), получим

$$\varepsilon_n^{k+N} = \prod_{j=1}^N [|\psi_1(t|n) - \alpha_j| / (c^{-2} - \alpha_j)] \varepsilon_n^k.$$

Тогда  $|\varepsilon_n^{k+N}| \leq \theta_N |\varepsilon_n^k|$ ;  $\delta = (2c^{-2} - M - m) / (M - m)$ .

Например, если  $n = 1$  и за операцию  $P_1(1)$  взять уравнение (11.12.2) при  $q_{11} = 2/3$ , то  $m = 0$ ;  $|\delta| \geq 41 c^{-2} - 1$ , т. е. для  $N = 1$   $\theta_1 \leq c^2 / (41 - c^2) < 0,025 c^2$ .

Очевидными обобщениями предложенных методов являются  $S_q(K) P_1(n)$  и  $S_q(K) P_1(n) P_2(0)$ , где  $S_q(x)$  — многочлен  $q$ -й степени. Эффективность этих методов зависит от порядка аппроксимации функции  $S_q[r(t)]$  дробно-рациональными функциями  $P_{n-1}/Q_n$ .

§ 11.13.  $(K^2P_1(t))^m KP_2(n)$ -МЕТОД

Спектральная функция операции  $K^2$  — функция  $c^2 r^2(t)$  — убывает при  $t \rightarrow \infty$  как  $c^2 \pi^2 t^{-2}/4$ . Следовательно, если в операции  $P_1(1)$  (см. § 10.6) положить

$$B_1 = Q_1(\mathcal{L}) = -4\pi^{-2} t^2 \Delta + I; C_1 = P_0(\mathcal{L}) c^2 = c^2 I, \tau_1 = I,$$

то спектральная функция операции  $P_1(1)$  имеет ту же асимптотику убывания на бесконечности, что и функция  $c^2 r^2(t)$ , а спектральная функция  $\Psi_2(t)$  операции  $K^2 P_1(1)$  выражается в виде

$$\Psi_2(t) = (1 - c^2 + 4 t^2 \pi^{-2})^{-1} [r^2(t) (1 + 4 t^2 \pi^{-2}) - 1] c^2.$$

Она убывает при  $t \rightarrow \infty$  как  $-\pi t^{-3} c^2$ . Легко видеть, что  $\Psi_2(t) < 0$  и  $\Psi_2(0) = 1 - \pi^2/6$  при  $c = 1$ . Можно показать, что при  $c \in [0, 1]$  функция  $\Psi_2$  удовлетворяет неравенству

$$|\Psi_2| \leq c_1 c^2 \beta^3 (\beta + \sqrt{1 + \beta^2})^{-3}, \quad (11.13.1)$$

где  $\beta = t^{-1}$ , а  $c_1 > 0$  — некоторая не зависящая от  $c$  постоянная.

В операции  $P_2(n)$  положим  $B_1 = Q_n(\mathcal{L})$ ;  $C_1 = P_{n-1}(\mathcal{L}) c$ ,  $\tau_1 = I$ , где за многочлены  $P_{n-1}(t)$ ,  $Q_n(t)$  возьмем числитель и знаменатель дроби

$$P_{n-1}/Q_n = \sum_{k=1}^n A_k (1 + \mu_k^2 t^2)^{-1},$$

представляющей собой квадратурную формулу интерполяционно-го типа для интеграла  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \mu^2 t^2)^{-1} d\mu$ ; в ней  $\mu_k$  — положительные корни многочлена  $T_{2n}(x)$ . Для спектральной функции операции  $KP_2(n)$ , выражаемой формулой (11.9.8), справедливо неравенство

$$|\Psi(t) c| \leq c_2 c \beta (\beta + \sqrt{1 + \beta^2})^{2-n}, \quad (11.13.2)$$

где  $c_2 > 0$  — не зависящая от  $n$  и  $c$  постоянная.

Мы не будем выписывать подробную итерационную схему  $(K^2 P_1(1))^m KP_2(n)$ -метода. Она очевидна из самого обозначения этого метода. Сопоставляя формулы (11.13.1), (11.13.2), видим, что после выполнения операции  $(K^2 P_1(1))^m KP_2(n)$  величины  $|e_n^k|$  уменьшаются не менее чем на множитель  $c_1^m c_2 c^{2m+1} \beta^{3m+1} (\beta + \sqrt{1 + \beta^2})^{2-n-3m}$ . Поскольку операцию  $K$  проделали при этом  $2m+1$  раз, то на одну операцию  $K$  за один цикл итераций происходит уменьшение величины  $|e_n^k|$  в среднем не менее чем на множитель  $c_3 c \Psi_3$ , где  $c_3 > 0$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $m, n, c$ , а

$$\Psi_3(\beta) = \beta^{(3m+1)/(2m+1)} (\beta + \sqrt{1 + \beta^2})^{(2-n-3m)/(2m+1)}.$$

Пусть  $N = n - 3$ ;  $\alpha = (3m+1)N^{-1}$ . Найдем  $\max_{\beta} \Psi_3(\beta)$ :

$$\Psi_4(\alpha) = \max_{\beta} \Psi_3(\beta) = \alpha^{3\alpha N / (2\alpha N + 1)} (1 + 2\alpha)^{-3N} (1 + 2\alpha)^{1/2} (1 + 2\alpha N). \quad (11.13.3)$$



Для вычисления  $\min_{\alpha} \Phi_4(\alpha)$  дифференцируем функцию  $\Phi_4$  по  $\alpha$ ; получаем, что в точке минимума должно быть справедливо уравнение

$$(1 + 2\alpha)^{N-1} \alpha = 1. \quad (11.13.4)$$

Таким образом, если взять  $m \approx (\alpha N - 1)/3$ , где  $\alpha$  — решение уравнения (11.13.4), то получится максимальная скорость сходимости итераций. Найдем асимптотические при  $N \rightarrow \infty$  значения  $\alpha$ . Из (11.13.4) получаем, что  $\alpha \rightarrow 0$  и  $2Na \sim -\ln \alpha$  при  $N \rightarrow \infty$ , т. е.  $\alpha \sim (\ln N)/(2N)$  и, следовательно,  $m \sim (\ln N)/6$ . Подставляя эти значения в (11.13.3), получаем, что  $\Phi_4 \sim O[(n^{-1} \ln n)^{3/2}]$  при  $m \sim (\ln N)/6$ .

Итак, каждой выполняемой операции  $K$  в  $(K^2 P_1(1))^m K P_1(n)$  соответствует уменьшение ошибки в среднем не менее чем на множитель  $O[(n^{-1} \ln n)^{3/2}]$ , т. е. этот метод при больших значениях  $n$  сходится быстрее  $K P_1(n)$ -метода.

В рассмотренных методах  $\Delta \zeta = O(mN)$ .

#### § 11.14. ЦИКЛИЧЕСКИЙ $K P_1(1)$ -МЕТОД

Пусть операция  $P_1(1)$  выполняется при  $Q_1(t) = 1 + g_k t^2/3$ ,  $P_0(t) = 1$ , где  $g_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) — меняющийся с периодом  $N$  числовой параметр [126]. Тогда после  $N$  итераций

$$\epsilon_j^{k+N} = \Phi_N(t|j) c^N \epsilon_j^k, \quad (11.14.1)$$

где

$$\Phi_N(t) = \Phi_N(t, c) = \prod_{i=1}^N [(1 + g_i t^2/3) r(t) - 1] (g_i t^2/3 + 1 - c)^{-1}.$$

Для выбора  $g = (g_1, \dots, g_N)$ , где  $g_k \geq g_{k+1}$ , применим минимальный критерий; поскольку  $|\Phi_N(t, c)| \leq |\Phi_N(t, 1)|$  при  $c < 1$ , оптимальные значения  $g$  получим из условия минимальности некоторой нормы  $\Phi_N(t, 1)$ .

Имеем

$$\Phi_N(t, 1) = r^N(t) \bar{S}_N[x(t)], \quad (11.14.2)$$

где

$$\bar{S}_N(x) = \prod_{i=1}^N (1 - x/g_i); \quad x(t) = 3[1 - r(t)] t^{-2}/r(t)$$

и  $x(0) = 1$ ;  $x(\infty) = 0$ ;  $x(t) = x(-t)$ ;  $x'(t) \leq 0$  при  $t \geq 0$ .

Решим две задачи оптимизации.

1. Выберем  $g$  такими, чтобы за  $N$  итераций циклический  $K P_1(1)$  в максимальное число раз уменьшал ошибки  $\epsilon_j^k$  при  $|j| \leq n_0$  по сравнению с методом простой итерации.

Поскольку при  $j = 0$ ,  $k > 1$  имеем  $\epsilon_0^k = 0$ , достаточно рассмотреть убывание ошибок  $\epsilon_j^k$  при  $1 \leq |j| \leq n_0$ .

Обозначим  $M = x(t)$ ,  $m = x(tn_0)$ . Для решения первой задачи необходимо найти

$$g^0 = \{g : \max_t |\bar{S}_N[x(t)]| = a_N\}, \quad (11.14.3)$$

где

$$a_N = \min_g \max_{m \leq x \leq M} |\bar{S}_N(x)|. \quad (11.14.4)$$

Решение задачи (11.14.3), (11.14.4) известно [см. § 10.18 и (11.10.19)]:

$$g_i = [M + m + (M - m) \beta_i]/2; a_N = \theta_N, \quad (11.14.5)$$

где  $\delta = (M + m)/(M - m)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Уменьшение ошибок  $\epsilon_j^k$ ,  $1 \leq |j| \leq n_0$  увеличивается более чем в  $\theta_N^{-1}$  раз.

2. Рассмотрим класс периодических функций

$$H(\varphi) = \{f : |f_j| \leq \varphi(|j|)\},$$

где  $\varphi(t) \geq 0$  — ограниченная на  $[0, \infty]$  функция и  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Введем новые переменные:

$$x = (1 + y)/2; S_N(y) = \bar{S}_N((1 + y)/2).$$

Перед формулировкой второй задачи оптимизации заметим, что вследствие неравенства  $r(t) \leq x(t) (1 + (12/\pi^2 - 1)(1 - x(t)))^{-1}$  имеем

$$|\Phi_N(t, 1)| \leq |x^N(t) \bar{S}_N[x(t)]|.$$

Пусть функция  $\tau(x)$  — обратная к  $x(t)$ ,  $\tilde{\varphi}(y) = \varphi[\tau((1 + y)/2)]$ , а  $\psi(y) \geq 0$  — суммируемая функция на отрезке  $[-1, 1]$ .

Пусть теперь  $\epsilon^k \in H(\varphi)$ . Вторую задачу оптимизации поставим на классе  $H(\varphi)$ : найти такие значения  $g$ , при которых реализуется

$$J_N = J_N(\psi, g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+y}{2}\right)^{2N-1} S_N^2(y) \tilde{\varphi}^2(y) \psi(y) dy. \quad (11.14.6)$$

Пусть  $\{P_n(y)\}$  — система многочленов, ортогональных на  $[-1, 1]$  с весом

$$p(y) = \left(\frac{1+y}{2}\right)^{2N} \tilde{\varphi}^2(y) \psi(y).$$

Тогда решение задачи (11.14.6) известно (см. леммы 10.21.1, 10.21.2): за  $g$  следует взять величины, при которых имеет место равенство  $S_N(y) = P_N(y)/P_N(-1)$ . Следовательно,

$$g = \left\{ \frac{1+y}{2} : P_N(y) = 0 \right\}. \quad (11.14.7)$$

Взяв  $g$  согласно (11.14.7), получим наилучшую сходимость к нулю за  $N$  итераций величины  $\epsilon^{k+N}$  в метрике, порожденной функционалом (11.14.6).

Если вес  $p(y)$  — монотонно возрастающая функция на  $[-1, 1]$ , то (см. [210])

$$\max_{y \in [-1, 1]} |p^{1/2}(y) S_N(y)| = |p^{1/2}(1) P_N(1)/P_N(-1)|. \quad (11.14.8)$$

Пусть

$$p(y) = \left(\frac{1-y}{2}\right)^\alpha \left(\frac{1+y}{2}\right)^{2(N+\beta)}, \quad (11.14.9)$$

где  $\alpha > -1$ ;  $\beta > -(N+1/2)$ . Тогда

$$P_N(y) = P^{(\alpha, 2(N+\beta))}(y),$$

где  $P_N^{(\alpha, \gamma)}(y)$  — многочлен Якоби [210]:

$$P_N^{(\alpha, \gamma)}(y) = 2^{-N} \sum_{m=0}^N \binom{N+\alpha}{m} \binom{N+\gamma}{N-m} (y-1)^{N-m} (y+1)^m. \quad (11.14.10)$$

Используя формулы для многочленов Якоби, запишем выражение для  $J_N$ :

$$J_N = \frac{\Gamma(N+1) \Gamma(N+\alpha+1) \Gamma^2(2N+2\beta+1)}{(\alpha+2(N+\beta)) \Gamma(3N+\alpha+2\beta+1) \Gamma(3N+2\beta+1)}. \quad (11.14.11)$$

Далее в этом параграфе будем предполагать, что  $\alpha=0$ , а  $\varphi(t) = ar^\beta(t)$ , где  $a$  и  $\beta$  — некоторые положительные числа. Класс функции  $H(\varphi)$  для выбранной таким образом функции  $\varphi$  обозначим  $H(a, \beta)$ . Тогда из (11.14.8) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1+y}{2}\right)^{N+\beta} S_N(y) \right| &\leq \Theta(N, \beta) = \\ &= \Gamma(N+1) \Gamma(2N+2\beta+1) / \Gamma(3N+2\beta+1). \end{aligned} \quad (11.14.12)$$

Значит, если ошибка  $\varepsilon^k \in H(c_k, \beta_k)$ , то

$$A(N, \beta_k, g) = \max_t |x^{N+\beta_k}(t) \bar{S}_N[x(t)]| \leq \Theta(N, \beta_k).$$

Величины  $J_N$ ,  $\Theta(N, \beta)$  при  $N \rightarrow \infty$  можно оценить, пользуясь формулой Стирлинга

$$\Theta(N, \beta) \sim 2\sqrt{\pi/3} (2/3)^{2/\beta} N^{1/2} [4N(N+\beta)^2/(3N+2\beta)^3]^{1/N}, \quad (11.14.13)$$

т. е.

$$N^{-1} \ln \Theta(N, \beta) \sim \ln(4/27) \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

а

$$J_N = (1/2) (N+\beta)^{-1} [\Theta(N, \beta)]^2.$$

Поскольку

$$\Phi_N(t, c) = \left\{ \frac{(\operatorname{arctg} t)^2}{3[1-r(t)]} \right\}^N x^N(t) \bar{S}_N[x(t)] \prod_{i=1}^N [1+3(1-c)g_i^{-1}t^{-2}]^{-1},$$

то при  $\varepsilon^k \in H(a_k, \beta_k)$

$$|\Phi_N(t, c) \varepsilon_j^k| \leq a_k \Theta(N, \beta_k) \left\{ \frac{(\operatorname{arctg} t)^2}{3[1-r(t)]} \right\}^N \times$$

$$\times \prod_{i=1}^N [1 + 3(1-c) g_i^{-1} t^{-2}]^{-1} \leq a_h \Theta(N, \beta_h). \quad (11.14.14)$$

Учитывая (11.14.1), (11.14.14),

$$|e_j^{k+N}| \leq a_h \Theta(N, \beta_h) c^N.$$

Можно показать, что значения  $g$ , реализующие  $\min A(N, \beta_h, g)$ , лучше приближаются по формуле (11.14.7) через корни  $P_N^{g(-1/2, 2(N+\beta)-2/3)}(y)$ . После того как найдено  $e^{k+N}$ , процесс итераций можно продолжить, считая, что  $e^{k+N} \in H(\bar{a}_h, 0)$ . Осталось выяснить, что взять за  $\beta_0$ . Если источник  $F \in H(a, \beta)$  и за начальное приближение  $u_0^0$  берем  $P_1$ -приближение метода сферических гармоник, то можно показать, что  $e^0 = u_0 - u_0^0 \in H(a_0, \beta + 1)$ , т. е.  $\beta_0 = \beta + 1$ . Применение циклического  $KP_1(1)$  для задач с переменными коэффициентами показало существенное ускорение сходимости итераций (см. пример в § 11.20).

### § 11.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ЦИКЛИЧЕСКОМ $KP_1(1)$ -МЕТОДЕ

Пусть вес  $p(y)$  определен формулой (11.14.9), а коэффициенты  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , — формулой (11.14.7). При  $1 \leq N \leq 4$  значения  $g_i$  вычисляются в явном виде через корни многочленов Якоби (11.14.10):

$$N=1: \quad g_1 = (2\beta + 3)/(2\beta + \alpha + 4);$$

$$N=2: \quad g_{1,2} = \frac{2\beta + 6}{2\beta + \alpha + 8} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{a+2}{(2\beta+6)(2\beta+\alpha+7)}} \right);$$

$$N=3: g_i = (2\beta + \alpha + 12)^{-1} (2\beta + 9 + 2(-1)^i \sqrt{\frac{(\alpha+3)(2\beta+9)}{2\beta+\alpha+11}} \times \\ \times \cos \frac{\varphi + 2\pi(i-2)}{3});$$

$$\varphi = \arccos \left[ -\frac{2\beta+6-\alpha}{2\beta+10+\alpha} \sqrt{\frac{2\beta+\alpha+11}{(\alpha+3)(2\beta+9)}} \right], \quad i = 1, 2, 3.$$

Для  $N = 4$  получаются громоздкие выражения, мы не будем их выписывать.

В работе [126] найдены асимптотические формулы для корней многочленов Якоби  $P_n^{(\alpha, \omega(n))}(y)$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $\omega(n)$  — не убывающая по  $n$  функция. Воспользуемся этими результатами.

Введем некоторые обозначения. Пусть  $j_i$  — первый положительный корень функции Бесселя  $J_\alpha(z)$ ;  $\gamma = 2(N + \beta)$ ;  $M^2 = (N + \gamma + (\alpha + 1)/2)(N + (\alpha + 1)/2) - \alpha^2/12 + 1/12$ ;  $\bar{N} = N + (\alpha + \gamma + 1)/2$ ;  $y_{1N} > y_{2N} > \dots > y_{NN}$  — нули многочлена  $P_N^{(\alpha, \gamma)}(y)$ , записанные в убывающем порядке. Положим  $y_{\nu N} = \cos \Theta_{\nu N}$ ,  $y = \cos \Theta$ ,

$$u(\Theta) = (\sin(\Theta/2))^{\alpha+1/2} (\cos(\Theta/2))^{\gamma+1/2} P_N^{(\alpha, \gamma)}(\cos \Theta).$$

Можно показать, что функция  $u(\Theta)$  удовлетворяет уравнению

$$u'' + b^2(\Theta)u = 0, \quad (11.15.1)$$

где  $b^2(\Theta) = \left( \frac{1/4 - \alpha^2}{4 \sin^2(\Theta/2)} + \frac{1/4 - \gamma^2}{4 \cos^2(\Theta/2)} + \bar{N}^2 \right)$ . В работе [126] показано, что для  $\Theta_{1N}$  справедлива асимптотическая формула

$$\Theta_{1N} = j_1/M, \quad (11.15.2)$$

а следовательно,

$$g_1 = \cos^2(j_1/(2M)). \quad (11.15.3)$$

Для нахождения  $\Theta_{vN}$ , а значит, и  $g_v$  поступим следующим образом. В уравнении (11.15.1) используем подстановку  $\rho(\Theta) \sin \vartheta(\Theta) = bu$ ,  $\rho(\Theta) \cos \vartheta(\Theta) = u'$ . Тогда для функции  $\vartheta(\Theta)$  получим уравнение

$$\vartheta' = b + (b'/2b) \sin 2\vartheta. \quad (11.15.4)$$

Нули функции  $u$  соответствуют значениям  $\vartheta = i\pi$ , где  $i$  — целое число. Из (11.15.4) получаем

$$\frac{d\vartheta}{d\Theta} = \left[ b(\Theta) + \frac{b'(\Theta)}{2b(\Theta)} \sin 2\vartheta \right]^{-1}. \quad (11.15.5)$$

Таким образом, задача по нахождению корней функции  $u(\Theta)$  свелась к определению значений  $\Theta(\vartheta)$  при  $\vartheta = i\pi$  как решения уравнения (11.15.5), удовлетворяющего начальному условию  $\Theta(0) = \Theta_{1N}$ , где за  $\Theta_{1N}$  можно взять значение из асимптотической формулы (11.15.2). Численно интегрируя каким-нибудь методом уравнение (11.15.5), найдем приближенные значения  $\Theta_{vN}$ . Применяя, например, улучшенную формулу Эйлера с шагом  $\pi/2$ , получаем

$$\Theta_{iN} = \Theta_{i-1N} + \pi/b(\bar{\Theta}_{iN}), \quad (11.15.6)$$

где

$$\bar{\Theta}_{iN} = \Theta_{i-1N} + (\pi/2)/b(\Theta_{i-1N}), \quad \Theta_{1N} = j_1/M, \quad i = 2, \dots, n.$$

Тогда значения  $g$  в формуле (11.14.7) можно взять равными

$$g_i = \cos^2(\Theta_{iN}/2), \quad i = 1, \dots, N, \quad (11.15.7)$$

где  $\Theta_{iN}$  рассчитываются по формулам (11.15.2), (11.15.6). Применяя для интегрирования (11.15.5) более точные формулы, например формулы Рунге — Кутты или формулы интегрирования с меньшим шагом, можно получить более точные значения  $\Theta_{iN}$ .

Если  $\bar{\Theta}_N$  — корень уравнения  $b(\Theta) = 0$ , то  $\cos^2(\bar{\Theta}_N/2) < g_i < 1$ . Легко видеть, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\Theta}_N = 2\pi/3$ , а  $g_i \rightarrow 1-0$  для каждого фиксированного значения  $i$  и  $N \rightarrow \infty$ .

Сравним точные значения  $g_i$  с асимптотическими (11.15.7) при  $N = 5$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ :

i	1	2	3	4	5
$g_{\text{точн}}$	0,99	0,93	0,82	0,68	0,50
$g_{\text{асимп}}$	0,99	0,93	0,83	0,69	0,52

Значения  $g_i$  приведены с двумя значащими цифрами. Видно, что точность асимптотических формул достаточна для практических расчетов.

### § 11.16. ЦИКЛИЧЕСКИЕ $K^2P_1(1)$ - И $KP_2(2)$ -МЕТОДЫ

Пусть операция  $P_1(1)$  выполняется при  $Q_1(t) = 1 + 2g_k t^2/3$ ,  $P_0(t) = 1$ , где  $g_k > 0$  — меняющийся с периодом  $N$  числовой параметр. Тогда после  $N$  итераций по  $K^2P_1(1)$ -методу

$$\varepsilon_j^{k+N} = \bar{\Phi}_N(t|j|) c^{2N} \varepsilon_j^k,$$

где

$$\bar{\Phi}_N(t) = \bar{\Phi}_N(t, c) = \prod_{i=1}^N \{[1 + 2g_i t^2/3] r^2(t) - 1\} (2g_i t^2/3 + 1 - c^2)^{-1}.$$

Очевидно, что

$$|\bar{\Phi}_N(t, c)| \leq |\bar{\Phi}_N(t, 1)|; \bar{\Phi}_N(t, 1) = r^{2N}(t) \bar{S}_N[x(t)],$$

где

$$\bar{S}_N(x) = \prod_{i=1}^N (1 - x/g_i); x(t) = \frac{3[1 - r^2(t)]}{2t^2 r^2(t)} \text{ и } x(0) = 1;$$

$$x(\infty) = 6/\pi^2; x'(t) \leq 0 \text{ при } t \geq 0.$$

1. Выберем  $g$  такими, чтобы за  $N$  итераций циклический  $K^2P_1(1)$  в максимальное число раз уменьшал все ошибки  $\varepsilon_j^k$  по сравнению с методом простой итерации. Тогда, повторяя рассуждения § 11.15, заключаем, что для решения этой задачи необходимо найти (11.14.3), где

$$a_N = \min_g \max_{6/\pi^2 \leq x \leq 1} |\bar{S}_N(x)|. \quad (11.16.1)$$

Задача (11.14.3), (11.16.1) решается при  $g_i = (1/2)(1 + 6/\pi^2 + (1 - 6/\pi^2)\beta_i)$  и  $a_N = \Theta_N$ , где  $\delta = (1 + 6/\pi^2)(1 - 6/\pi^2)^{-1} = 4,1$ .

2. Задача оптимизации на классе  $H(\varphi)$  решается аналогично задаче 2 в § 11.15. Для класса  $H(a, \beta)$  ищутся значения  $g$ , реализующие минимум функционала:

$$\bar{J}_N = \int_{6/\pi^2}^1 \left( \frac{x - 6/\pi^2}{1 - 6/\pi^2} \right)^{4N+2\beta-1} \bar{S}_N^2(x) dx. \quad (11.16.2)$$

Мы не будем проводить дальнейшие выкладки, ибо они очевидны. Заметим лишь, что оптимальные значения  $g$  будут связаны в этом случае с корнями многочлена  $P_N^{(0, 4N+2\beta)}(y)$ .

Представляет интерес рассмотреть циклический  $KP_1(2)$ -метод, в котором используются уравнения, близкие к уравнениям  $P_3$ -приближения. Этот метод исследован В. И. Лебедевым и Ю. А. Власовым для плоской периодической задачи. В нем за операцию  $P_1(2)$  взято решение дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} l \frac{d\omega_1^{k+1/2}}{dx} + (1-c)\omega_0^{k+1/2} &= c(u_0^{k+1/2} - u_0^k); \\ l \frac{d\omega_0^{k+1/2}}{dx} + 2l \frac{d\omega_2^{k+1/2}}{dx} + 3\omega_1^{k+1/2} &= 0; \\ 2l \frac{d\omega_1^{k+1/2}}{dx} + 3l \frac{d\omega_3^{k+1/2}}{dx} + 5\omega_2^{k+1/2} &= 0; \\ 3g_h l \frac{d\omega_2^{k+1/2}}{dx} + 7\omega_3^{k+1/2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11.16.3)$$

в которые входит циклически меняющийся параметр  $g_h$ . При  $g_h = 1$  эти уравнения переходят в  $P_3$ -уравнения. Показано, что за значения  $g_h$  на классе  $H(\alpha, \beta)$  следует взять значения, реализующие минимум функционала (11.14.6) с весом (11.14.9) при  $\alpha = 4N$ . Оптимальные значения  $g_h$  будут равны  $(1 + y_h)/2$ , где  $y_h$  — корни многочлена  $P_N^{(4N, 2(N+\beta))}(y)$ . Для них, применяя метод, изложенный в § 11.15, можно найти асимптотические формулы. В этом случае

$$J_N = \frac{\Gamma(N+1) \Gamma(5N+1) \Gamma^2(2N+2\beta+1)}{2(\beta+3N) \Gamma(7N+2\beta+1) \Gamma(3N+2\beta+1)},$$

или при  $N \rightarrow \infty$

$$J_N \sim c_0 \left(\frac{4}{21}\right)^{2\beta} \left[ \frac{10^5 N^6 (N+\beta)^4}{2(7N+2\beta)^7 (3N+2\beta)^3} \right]^N,$$

где  $c_0 > 0$  — вычисляемая константа. Отсюда

$$N^{-1} \ln \sqrt{J_N} \sim \ln 0,041. \quad (11.16.4)$$

## § 11.17. СХОДИМОСТЬ $KP_1(n)$ -МЕТОДА ДЛЯ ВСЕГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть  $\tilde{\varepsilon}^k(v)$  — преобразование Фурье от функции  $\varepsilon^k(x) = u_0 - u_0^k$  в  $R_3(x)$ . Сходимость итераций будем рассматривать в пространстве  $\mathcal{B}_{p, K}$  [237], в котором норма вводится следующим образом: если функция  $\omega \in \mathcal{B}_{p, K}$ , то

$$\|\omega\|_{p, K} = \left[ \int_{R_3} |\tilde{\omega}(v) K(v)|^p dv \right]^{1/p},$$

где  $1 \leq p < \infty$ , а  $K(v)$  — медленно растущая весовая функция.

За  $Q_n(t)$ ,  $P_m(t)$  возьмем многочлены вида (11.9.1), (11.9.2) для всех  $c \in [0, 1]$ . За операцию  $P_1(n)$  примем решение уравнения

$$Q_n(\mathcal{L}) \omega - P_m(\mathcal{L}) c \omega = P_m(\mathcal{L}) f_1, \quad (11.17.1)$$

где

$$f_1 = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k).$$

Пусть сначала  $c = \text{const}$ ,  $l = \text{const}$ . Применяя к операции  $K$  и к (11.17.1) преобразование Фурье, получаем

$$\tilde{\varepsilon}^{k+1}(\mathbf{v}) = \psi[Q_n(l|\mathbf{v}|); P_m(l|\mathbf{v}|), c] c \tilde{\varepsilon}^k(\mathbf{v}), \quad (11.17.2)$$

где функция  $\psi(Q_n, P_m, c)$  определена формулой (11.9.8). Если существует такое целое число  $N > 0$ , что после  $N$  итераций  $\|\varepsilon^N\|_{p, K} < \infty$ , то из (11.17.2) следует, что

$$\|\varepsilon^{k+N}\|_{p, K} \leq (\|\psi\| c)^k \|\varepsilon^N\|_{p, K}. \quad (11.17.3)$$

Нами попутно оценена сходимость  $KP_1(n)$  для задач, в которых функция  $Su$  инвариантна относительно вращения в  $R_3(\mathbf{x})$ , в частности, для задач со сферической и цилиндрической симметриями.

Пусть теперь  $c = c_1$  при  $x_1 > 0$  и  $c = c_2$  при  $x_1 < 0$ , где  $0 \leq c_i \leq 1$ ,  $c_1 \geq c_2$ ,  $c_i$  — постоянные. Пусть далее

$$M_i(t) = Q_n(t) - c_i P_m(t) = \prod_{k=1}^n (t^2 + \alpha_{ik}^2),$$

где  $\alpha_{ik} > 0$ , и

$$\varphi_+(\mathbf{v}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{x_1 > 0} \varphi(\mathbf{x}) \exp(-i \mathbf{xv}) d\mathbf{x};$$

$$\varphi_-(\mathbf{v}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{x_1 < 0} \varphi(\mathbf{x}) \exp(-i \mathbf{xv}) d\mathbf{x}.$$

Тогда

$$\tilde{\varphi} = \varphi_+ + \varphi_-; \quad (c\tilde{\varphi}) = c_1\varphi_+ + c_2\varphi_-. \quad (11.17.4)$$

Умножим уравнение (11.1.4) на  $\exp(-i\mathbf{xv})$  и проинтегрируем по  $R_3(\mathbf{x})$ . Применяя затем к результату оператор  $S$ , получаем

$$\tilde{u}_0 = r(t) (\tilde{c}u_0) + \tilde{F}^1,$$

где  $\tilde{u}_0 = S\tilde{u}$ ,  $t = l|\mathbf{v}|$ , т. е. в операции  $K$  имеем

$$\tilde{\varepsilon}^{k+1/2} = r(t) [\tilde{c}\varepsilon^k]. \quad (11.17.5)$$

За операцию  $P_1(n)$  возьмем нахождение решения  $\omega$  уравнения (11.17.1), в котором  $\omega$  удовлетворяет условиям сопряжения при  $x_1 = 0$ . Не будем выписывать условия сопряжения явно, так как для наших целей достаточно заметить, что при выполнении их  $[\omega]_{x_1=0}^1 = 0$ , где  $[\omega]^1$  — скачок функции  $\omega$  и

$$\{[Q_n(t) - P_m(t)c]\omega\} = M_1(t)\omega_+(\mathbf{v}) + M_2(t)\omega_-(\mathbf{v}). \quad (11.17.6)$$



Для анализа ошибок положим в (11.17.1)  $f_1 = c (\varepsilon^{k+1/2} - \varepsilon^k)$ .

Применяя к (11.17.1) преобразование Фурье и учитывая (11.17.4) — (11.17.6), получаем

$$M_1 \omega_+ + M_2 \omega_- - P_m(t) (\widetilde{c \varepsilon^{k+1/2}}) = -P_m(t) (\widetilde{c \varepsilon^k}). \quad (11.17.7)$$

Складываем (11.17.7) с уравнением (11.17.5), умноженным на  $Q_n(t)$ :

$$M_1 \varepsilon_+^{k+1} + M_2 \varepsilon_-^{k+1} = (Q_n r - P_m) (\widetilde{c \varepsilon^k}). \quad (11.17.8)$$

Пусть найдено такое  $\tau > 0$ , что функция  $(Q_n r - P_m) (\widetilde{c \varepsilon^k})$  регулярна в полосе  $|\operatorname{Im} v_1| < \tau$  при всех действительных  $v_j$  ( $j \neq 1$ ) и пусть

$$M_i(t) = N_i(v) \bar{N}_i(v), \text{ где } N_i(v) = \prod_{k=1}^n (v_1 + i\beta_{ik}); \bar{N}_i(v) = \prod_{k=1}^n (v_1 - i\beta_{ik});$$

$\beta_{ik} = (\alpha_{ik}^2 + \sum_{j=2}^3 v_j^2)^{1/2} > 0$ . Разделим (11.17.8) на  $\bar{N}_1(v) N_2(v)$ . Тогда

$$[N_1(v)/N_2(v)] \varepsilon_+^{k+1} + [\bar{N}_2(v)/\bar{N}_1(v)] \varepsilon_-^{k+1} = \gamma^k(v), \quad (11.17.9)$$

где

$$\gamma^k(v_1, v_2, v_3) = \gamma^k(v) = (Q_n r - P_m) \bar{N}_1^{-1} N_2^{-1} (\widetilde{c \varepsilon^k}). \quad (11.17.10)$$

Пусть  $\operatorname{Im} v_j = 0$  при  $j = 2, 3$ . Тогда  $\gamma^k(v)$  регулярна в полосе  $|\operatorname{Im} v_1| < \tau_1$ , где  $\tau_1 = \min(\tau, \alpha_0)$ ,  $\alpha_0 = \min_{i,k} |\alpha_{ik}|$ , а функции

$N_1/N_2$  и  $\bar{N}_2/\bar{N}_1$  регулярны и не имеют нулей соответственно в полуплоскостях  $\operatorname{Im} v_1 > -\tau_1$ ;  $\operatorname{Im} v_1 < \tau_1$ . Применяя метод Винера — Хопфа [191], получаем

$$\varepsilon_+^{k+1} = (N_2/(2N_1)) [\gamma^k(v) + g^k(v)]; \varepsilon_-^{k+1} = (\bar{N}_1/2\bar{N}_2) [\gamma^k(v) - g^k(v)],$$

где

$$g^k(v) = g^k(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^k(x, v_2, v_3) dx}{x - v_1} \quad (11.17.11)$$

(символ  $P$  означает главное значение интеграла). Следовательно,

$$(\widetilde{c \varepsilon^{k+1}}) = \psi_1(t) (\widetilde{c \varepsilon^k}) + \psi_3(t) g^k, \quad (11.17.12)$$

где

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 c_i \psi(t, Q_n, P_m, c_i); \psi_3(t) = \frac{1}{2} (c_1 - c_2) (N_1 \bar{N}_2)^{-1} Q_n.$$

Оценим  $\gamma^k$ ; для этого умножим (11.17.12) на  $(Q_n r - P_m) (\bar{N}_1 N_2)^{-1}$ :

$$\gamma^{k+1} = \psi_1 \gamma^k + \psi_3 \psi_0 g^k, \quad (11.17.13)$$

где

$$\psi_2 = (1/2) (c_1 - c_2) (1 - c_2 Q_n^{-1} P_m)^{-1}; \psi_0 = \psi(t, Q_n, P_m, c_1). \quad (11.17.14)$$

Пусть  $[f]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f_2| dv_1$ ;  $|f|_1 = \max_t |f(t)|$ . Из (11.17.11) для действительных  $v$ , пользуясь неравенством Гильберта — Рисса [73], получаем

$$[g^k] \leq [\gamma^k] \leq |\psi_0|_1 [(\widetilde{c\varepsilon^k})], \quad (11.17.15)$$

а из (11.17.13) имеем

$$[\gamma^{k+1}] \leq |\psi_1|_1 [\gamma^k] + |\psi_2|_1 |\varphi_0|_1 [g_k] \leq v [\gamma^k], \quad (11.17.16)$$

где  $v = |\psi_1|_1 + |\psi_2|_1 |\varphi_0|_1$ . Из (11.17.14) следует, что

$$|\psi_2| \leq (1/2) (c_1 - c_2) (1 - c_2)^{-1} < 1/2, \text{ а } |\psi_0|_1 \text{ и } |\psi_1|_1$$

легко оцениваются, если воспользоваться результатами § 11. 9, 11.10. Учитывая это, получаем  $v \leq (1/2) (c_1 + c_2 + (c_1 - c_2)/(1 - c_2)) |\psi_0|_1$ , где  $(c_1 + c_2 + (c_1 - c_2) (1 - c_2)^{-1}) \leq 3$ , а при  $Q_1 = q_{11} t^2 + 1$ ;  $P_0 = 1$ ;  $0 \leq c_2 \leq c_1 \leq 1$  имеем  $|\psi_0|_1 \leq 0,225$  для  $q_{11} = 1/3$  и  $|\psi_0|_1 \leq 0,186$  для  $q_{11} = 0,286$ .

Из (11.17.15) и (11.17.16) получаем  $[\gamma^k] \leq v^k [\gamma^0] \leq v^k |\psi_0|_1 [(\widetilde{c\varepsilon^0})]$ ;  $[g^k] \leq v^k |\psi_0|_1 [(\widetilde{c\varepsilon^0})]$ . Очевидно, что  $|\psi_3|^2 = (1/4) (c_1 - c_2)^2 (1 - c_1 Q_n^{-1} P_m)^{-1} (1 - c_2 Q_n^{-1} P_m)^{-1}$ , т. е.  $|\psi_3|_1 \leq (1/2)(c_1 - c_2) \times \times [(1 - c_1) (1 - c_2)]^{-1/2}$ . Пусть  $\alpha = |\psi_1|_1 v^{-1} < 1$ .

Тогда из (11.17.12) находим

$$\begin{aligned} [(\widetilde{c\varepsilon^{k+1}})] &\leq |\psi_1|_1 [(\widetilde{c\varepsilon^k})] + |\psi_3|_1 [g^k] \leq |\psi_1|_1 [(\widetilde{c\varepsilon^k})] + \\ &+ v^k |\psi_3|_1 |\psi_0|_1 [(\widetilde{c\varepsilon^0})] \leq \left( |\psi_1|_1^{k+1} + |\varphi_3|_1 |\varphi_0|_1 \sum_{i=0}^k |\varphi_1|_1^i v^{k-i} \right) [(\widetilde{c\varepsilon^0})] = \\ &= (|\psi_1|_1^{k+1} + |\varphi_3|_1 |\varphi_2|_1 (1 - \alpha^{k+1}) v^{k+1}) [(\widetilde{c\varepsilon^0})] \leq v_{k+1} [(\widetilde{c\varepsilon^0})], \end{aligned} \quad (11.17.17)$$

где  $v_{k+1} = |\psi_1|_1^{k+1} + \sqrt{(1 - c_2)/(1 - c_1)} (1 - \alpha^{k+1}) v^{k+1}$ .

Если решение зависит только от  $x_1$ , то (11.17.17) дает оценку сходимости в норме  $[\quad]$ . В самом деле, пользуясь равенством Парсеваля, получаем  $[c\varepsilon^k] \leq v_k [c\varepsilon^0]$ .

Для многомерного случая рассмотрим норму

$$\|f\|_{p, K} = \left( \int_{\bar{K}_s} |\widetilde{f}K(v_2, v_3)|^p dv \right)^{1/p},$$

где  $K(v_2, v_3)$  — медленно растущая весовая функция,  $1 < p < \infty$ . Тогда из (11.17.17) следует, что

$$\|(\widetilde{c\varepsilon^{k+1}})\|_{2, K} \leq v_{k+1} \|c\varepsilon^0\|_{2, K}, \quad (11.17.18)$$

а из (11.17.18) вытекает сходимость в  $\| \cdot \|_{2, K}$   $KP_1(n)$ -метода. Нетрудно оценить сходимость  $KP_1(n)$  и в норме  $\| \cdot \|_{p, K}$ . Модификация оценок в этом случае состоит только в том, что неравенство (11.17.15) будет иметь вид  $[g^k]_p \leq A_p [\gamma^k]_p \leq A_p |\psi_0|_1 [c\varepsilon^k]_p$ , где  $A_p$  — некоторая постоянная, а  $[f]_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f|^p dv_1 \right)^{1/p}$ .

§ 11.18. ИССЛЕДОВАНИЕ  $KP_1$ -МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧ С ЛИНЕЙНОЙ ИНДИКАТРИСОЙ РАССЕЯНИЯ

Используя самосопряженное уравнение с изотропной индикатрисой рассеяния, мы оценили сходимость  $KP$ -методов для периодических задач; в этом случае полученные оценки сходимости справедливы и для периодических решений несамосопряженного уравнения. Положение меняется, если рассмотреть несамосопряженное уравнение с линейной индикатрисой рассеяния. Поэтому представляет интерес особо рассмотреть этот случай.

Проведем исследование на примере  $2\pi$ -периодической задачи, когда индикатриса рассеяния является линейной функцией от  $\Omega\Omega'$ . Итак, рассмотрим уравнение

$$l \Omega \nabla \varphi + \varphi = c \left( \varphi_0 + 3\bar{\mu} \sum_{j=1}^3 \Omega_j \varphi_j \right) + f(x, \Omega), \quad (11.18.1)$$

где  $\bar{\mu}$  — заданная величина, а  $\varphi_0 = S\varphi$ ,  $\varphi_j = S(\Omega_j \varphi)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Операцию  $K$  определим формулой

$$l \Omega \nabla \varphi^{k+1/2} + \varphi^{k+1/2} = c \left( \varphi_0^k + 3\bar{\mu} \sum_{j=1}^3 \Omega_j \varphi_j^k \right) + f(x, \Omega). \quad (11.18.2)$$

Это значит, что если  $\varphi^\alpha = \Sigma g_n^\alpha \Omega \exp(inx)$ , то

$$g_n^{k+1/2} = (1 + i t \omega \Omega)^{-1} \left( c \left( g_{n0}^k + 3\bar{\mu} \sum_{j=1}^3 \Omega_j g_{nj}^k \right) + f_n \right), \quad (11.18.3)$$

где  $t = l |n|$ ,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $\omega_i = n_i / |n|$ . Если через  $G_n^\alpha$  обозначить вектор-столбец  $(g_{n0}^\alpha, g_{n1}^\alpha, g_{n2}^\alpha, g_{n3}^\alpha)$ , состоящий из нулевого и первых моментов функций  $g_n^\alpha$ , то, используя формулу (5.1.36), из (11.18.3) получим

$$G_n^{k+1/2} = cR(t) MG_n^k + \psi_n, \quad (11.18.4)$$

где  $R(t) = (R_{jk})$  — матрица, у которой  $R_{11} = r$ ;  
 $R_{1j} = -3i(1-r)t^{-1}\omega_{j-1}$ ;  $R_{j1} = -i(1-r)t^{-1}\omega_{j-1}$ ;  
 $R_{jj} = 3(1-r)t^{-2} - \alpha(1-\omega_{j-1}^2)$  при  $j = 2, 3, 4$  и  
 $R_{jk} = \alpha\omega_{j-1}\omega_k$  при  $j \neq k$  и  $j, k > 1$ ;  $\alpha = (3/2)[3(1-r)t^{-2} - r]$ ;  
 $M = \text{diag}\{1, \bar{\mu}, \bar{\mu}, \bar{\mu}\}$ ;  $\psi_n$  — вектор, полученный из  $f_n$ .

В качестве операции  $P_1$  возьмем решение  $2\pi$ -периодической задачи для системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} l \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \omega_j^{k+1/2}}{\partial x_j} + (1-c)\omega_0^{k+1/2} &= c(\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k); \\ \frac{gl}{3} \frac{\partial \omega_0^{k+1/2}}{\partial x_j} + (1-c\bar{\mu})\omega_j^{k+1/2} - \frac{sl^2}{5} \left( \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial x_m^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_j \partial x_i} \right)^{k+1/2} &= c\bar{\mu}(\varphi_i^{k+1/2} - \varphi_j^k), \end{aligned} \right\} \quad (11.18.5)$$

где  $i, j, m = 1, 2, 3; i \neq m \neq j$ .

Система уравнений (11.18.5) занимает промежуточное положение по отношению к  $P_1$ - и  $P_3$ -уравнениям метода сферических гармоник. Она совпадает с  $P_1$ -уравнениями при  $g = 1, s = 0$ . Коэффициенты Фурье  $W_n^{k+1/2} = (\omega_{n_0}^{k+1/2}, \omega_{n_1}^{k+1/2}, \omega_{n_3}^{k+1/2})$  от решения этой системы имеют вид

$$W_n^{k+1/2} = c(Q + I - M)^{-1} (G_n^{k+1/2} - G_n^k),$$

где матрица  $Q = (Q_{jk})$  имеет элементы:  $Q_{11} = 0; Q_{1j} = -i\omega_j t; Q_{j1} = i\omega_j g t/3; Q_{jj} = (st^2/5)(1 - \omega_j^2)$  при  $j = 2, 3, 4$  и  $Q_{jk} = -\omega_j \omega_k st^2/5$  при  $j \neq k$  и  $j, k > 1$ .

Следовательно, ошибки  $\epsilon_n^k$  удовлетворяют соотношению

$$\epsilon_n^{k+1} = c(Q + I - cM)^{-1} ((Q + I)R - I)M \epsilon_n^k. \quad (11.18.6)$$

Найдем собственные значения матрицы перехода в (11.18.6), деленной на  $c$ ; они являются корнями уравнения  $D(\lambda) = 0$ , где  $D(\lambda) = |((Q + I)R - I)M - \lambda(Q + I - cM)|$ . Определитель  $D(\lambda)$  имеет вид

$$D(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} 1-c & -\omega_1 t & -\omega_2 t & -\omega_3 t \\ b\omega_1 & \beta\omega_1^2 + a & \beta\omega_1\omega_2 & \beta\omega_1\omega_3 \\ b\omega_2 & \beta\omega_1\omega_2 & \beta\omega_2^2 + a & \beta\omega_2\omega_3 \\ b\omega_3 & \beta\omega_1\omega_3 & \beta\omega_2\omega_3 & \beta\omega_3^2 + a \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} b &= (gt^2/3 - (1-r)t^{-1}) - \lambda gt/3; \\ \beta &= \bar{\mu}((1-r)(g - 3s/5) + \alpha(1 + st^2/5)) + \lambda st^2/5; \\ a &= \bar{\mu}(3(1-r)t^{-2} - 1 + (3s/5)(1-r) - \alpha(1 + st^2/5)) - \\ &\quad - \lambda(1 - c\bar{\mu} + st^2/5). \end{aligned}$$

Вычисляя определитель, получаем уравнение для  $\lambda$ :

$$\lambda a^2 ((1-c)(\beta + a) + bt) = 0. \quad (11.18.7)$$

Из (11.18.7) имеем  $\lambda_1 = 0$ ;

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{(gt^2/3 + 1)r - 1 + (1-c)\bar{\mu}(3(1-r)t^{-2} - 1 + g(1-r))}{(1-c)(1-c\bar{\mu}) + gt^2/3}; \\ \lambda_{3,4} &= \bar{\mu}\bar{\psi}(t, c\bar{\mu}, s), \end{aligned} \right\} \quad (11.18.8)$$

где  $\bar{\psi}(t, c\bar{\mu}, s) = [3r - 2 - 3(1-r)t^{-2} - (3s/5)(1-r - rt^2)][2(1 - c\bar{\mu} + st^2/5)]^{-1}$ . Следовательно, за одну итерацию ошибки убывают не менее чем на множитель  $c \max_{t, t} |\lambda_i|$ . Можно проверить, что для одномерной периодической задачи собственными значениями будут только числа 0 и  $\lambda_2$ , а для двумерной — 0,  $\lambda_2, \lambda_3$ .

Оценим теперь  $|\lambda_2|, |\lambda_{3,4}|$ . Очевидно, что

$$|\lambda_2| \leq \Phi_1(t) = (3t^{-2}/g)((gt^2/3 + 1)r - 1 + (1-c)\bar{\mu}(3(1-r)t^{-2} - 1 + g(1-r))).$$

Если параметр  $g$  выразить через  $q$  по формуле

$$g = (1 - 4\tau/(9\tau + 5) + q)^{-1}, \text{ где } \tau = (1 - c)\bar{\mu}, \quad (11.18.9)$$

то  $\Phi_1(t) = r - 3(1 - r)t^{-2} + [9\tau(1 + \tau)/(9\tau + 5)]y(t) - qz(t)$ ,

где  $y(t) = 3(1 - r)/t^2 - (5/3)(t^2 - 3(1 - r))/t^4$ ;

$$z(t) = 3(1 - r)/t^2 + 3\tau(t^2 - 3(1 - r))/t^4.$$

Можно убедиться, что  $y(0) = 0$ ;  $z(0) = 1 + 9\tau/5$  и, следовательно,  $\Phi_1(0) = 0$  при  $q = 0$ . Функция  $\Phi_1(t)$  убывает как  $t^{-1}$ , а  $y(t)$  — как  $t^{-2}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Известно, что  $0 \leq r - 3t^{-2}(1 - r) \leq 0,225$  (см. § 11.10), а расчеты показали, что  $0 \leq y(t) \leq 0,06$ . Следовательно, при достаточно малых  $q$  и  $\tau$ , далеких от  $-5/9$ , величина  $m_1 = \max_t |\Phi_1(t)|$  достаточно мала. Например, при  $\tau = 1/2$  получено  $m_1 < 0,26$  при  $q = 0$  и  $m_1 < 0,217$  при  $q = 0,114$ , а при  $\tau = 1$  найдено, что  $m_1 < 0,299$  при  $q = 0$  и  $m_1 < 0,241$  при  $q = 0,086$ . Для исследования поведения  $\lambda_2$  при  $\tau \approx -5/9$  целесообразно сделать другую замену параметра  $g$ , учитывая, что величина  $(1 - c)(1 - c\bar{\mu})$  не становится малой при  $\tau = -5/9$ .

Оценим функцию  $\bar{\Phi}(t, c\bar{\mu}, s)$ . При  $s = 0$  имеем

$$\bar{\Phi} = (1/2)(3r - 2 - 3(1 - r)t^{-2})(1 - c\bar{\mu})^{-1}, \text{ т. е.}$$

$$c|\bar{\mu}|\bar{\Phi}(t, c\bar{\mu}, 0) \leq c|\bar{\mu}|(1 - c\bar{\mu})^{-1}.$$

Следовательно,  $KP_1(1)$ -метод с применением уравнений (11.18.5) при  $s = 0$  сходится для многомерных задач при  $c\bar{\mu} < 1/2$ .

Поскольку функция  $\Phi(t, c\bar{\mu}, 0)$  мала при малых  $t$ , для  $1/2 \leq c\bar{\mu} < 1$  сходимость итераций обеспечивается методом, состоящим в чередовании серии операций  $K$  с одной описанной операцией  $KP_1(1)$ . При  $s = 1$  функция  $\bar{\Phi}$  обращается в нуль вместе с первой производной в точке  $t = 0$  для любых  $|c\bar{\mu}| \leq 1$ ; подсчитано, что  $0 \leq \bar{\Phi}(t, c\bar{\mu}, 1) < 0,265$  при  $|c\bar{\mu}| \leq 1$ . Для  $m(d) = \min_s \max_{t; |c\bar{\mu}| \leq d} |\bar{\Phi}(t, c\bar{\mu}, s)|$

получены оценки:  $m(1) = 0,22$  при  $s = 0,49$ ;  $m(0,99) = 0,2$  при  $s = 0,45$  и  $m(0,9) = 0,16$  при  $s = 0,36$ .

## § 11.19. $KP_1(n)$ -МЕТОД ДЛЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ АНАЛОГОВ ПЛОСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим сетку  $D_h = D_1 \times D_2$ , построенную в § 9.10 и систему разностных уравнений (9.10.6), аппроксимирующую периодическую задачу для самопряженного кинетического уравнения (9.10.1). В этом параграфе мы воспользуемся обозначениями § 9.10—9.13. Операцию  $K$  запишем в виде

$$-l^2 h^{-2} \mu^2 \delta^2 u^{k+1/2} + \omega u^{k+1/2} = \omega(cS_i u^k + F), u_0^{k+1/2} = S_i u^{k+1/2}.$$

$$(11.19.1)$$

Разлагая  $u_0^{k+1/2}$ ,  $u_0^k$ ,  $F = F(x)$  в ряды Фурье, получаем

$$u_{0j}^{k+1/2} = \bar{r}(\bar{\lambda}_j) (c u_{0j}^k + F_j), \quad (11.19.2)$$

где  $F_j$  — коэффициенты Фурье функции  $F(x)$ , а величины  $\bar{\lambda}_j$ ,  $\bar{r}_j$ ,  $(\bar{\lambda}_j)$  определены формулами (9.11.10), (9.11.12). Пусть  $Q_n(t)$ ,  $P_m(t)$  — многочлены, заданные формулами (11.9.1), (11.9.2), а  $\omega^{-1}$  — оператор, обратный к оператору  $\omega$ , определенному на множестве периодических сеточных функций.

За  $P$ -уравнения возьмем систему разностных уравнений, определенных на сетке  $D_1$ :

$$\omega^n Q_n \left( \frac{li}{h} (\omega^{-1} \delta^2)^{1/2} \right) \omega = \omega^n P_m \left( \frac{li}{h} (\omega^{-1} \delta^2)^{1/2} \right) (c\omega + f_1) \quad (11.19.3)$$

с периодическими краевыми условиями и  $f_1 = c(u_0^{k+1/2} - u_0^k)$ . Легко убедиться в том, что при  $\omega \in C_{2n+\beta, \alpha}[-\pi, \pi]$ , где  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \beta \leq 3$ , система (11.19.3) с точностью  $O(h^{\beta+\alpha})$  локально аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$Q_n \left( li \frac{\partial}{\partial x} \right) \omega = P_m \left( li \frac{\partial}{\partial x} \right) (c\omega + f_1). \quad (11.19.4)$$

Систему уравнений (11.19.3) перепишем в удобной для счета форме

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k q_{nk} \omega^{n-k} \frac{\delta^{2k} \omega}{h^{2k}} = \sum_{k=0}^m (-1)^k p_{mk} \omega^{n-k} \frac{\delta^{2k} (c\omega + f_1)}{h^{2k}}, \quad (11.19.5)$$

Найдем периодическое решение (11.19.5), взяв

$$\omega = \Sigma \omega_j \exp(ijx). \quad (11.19.6)$$

Подставляя (11.19.6) в (11.19.5), получаем уравнения

$$[Q_n(\bar{\lambda}_j) - P_m(\bar{\lambda}_j) c] \omega_j = P_m(\bar{\lambda}_j) f_{1j},$$

т. е.

$$\omega_j = [Q_n(\bar{\lambda}_j) - P_m(\bar{\lambda}_j) c]^{-1} P_m(\bar{\lambda}_j) f_{1j}, \quad (11.19.7)$$

где  $f_{1j}$  — коэффициенты Фурье функции  $f_1$ , которые согласно (11.19.2) равны  $f_{1j} = c \{ [c\bar{r}(\bar{\lambda}_j) - 1] u_{0j}^k + \bar{r}(\bar{\lambda}_j) F_j \}$ . Положим  $u_0^{k+1} = u_0^{k+1/2} + \omega$ . Повторяя стандартные рассуждения, видим, что ошибки  $\varepsilon^\alpha = S_t u - S_t u^\alpha$  удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon_j^{k+1} = \bar{\psi}_j c \varepsilon_j^k, \quad \psi_j = \bar{\psi}(\bar{\lambda}_j), \quad (11.19.8)$$

где

$$\bar{\psi}(t) = [1 - Q_n^{-1}(t) P_m(t) c]^{-1} [\bar{r}(t) - Q_n^{-1}(t) P_m(t)]. \quad (11.19.9)$$

Следовательно, в  $m$  справедлива оценка  $\|\varepsilon^k\| \leq [c \|\bar{\psi}\| (Q_n, P_m, c)]^k \times \|\varepsilon^0\|$ , где

$$\|\bar{\psi}\|(Q_n, P_m, c) = \|\bar{\psi}\| = \max_t |\bar{\psi}(t)|. \quad (11.19.10)$$

Таким образом, мы убедились в том, что способ выбора многочленов  $Q_n, P_m$ , при котором величина  $\bar{r}(t) = Q_n^{-1}(t) P_m(t)$  была бы достаточно мала [а это гарантирует быструю сходимость  $KP_1(n)$ -метода], оказался связанным с задачей о выборе квадратуры  $S_t$  [от  $S_t$ -квadrатуры зависит вид функции  $\bar{r}(t)$ ], а от выбора  $S_t$  зависит точность метода сеток. Очевидна

**Лемма 11.19.1.** При  $m = n - 1$ ,  $\bar{r}(t) = P_{n-1}(t)/Q_n(t)$  и  $f_1(x) = F(x)$  для периодической задачи имеет место равенство  $\omega = S_t u$ , где сеточные функции  $u, \omega$  являются соответственно периодическими решениями систем разностных уравнений (11.19.1), (11.19.5).

Лемма 11.19.1 следует из того, что в указанных условиях  $\bar{r}(t) [1 - cr(t)]^{-1} = [Q_n(t) - P_{n-1}(t)c]^{-1} P_{n-1}(t)$ , т. е. формулы (9.11.15) для  $S_t u$  и (11.19.7) для  $\omega$  совпадают при  $f_1 = F$ .

Из леммы 11.19.1 вытекает [119]

**Следствие 11.19.1.** Существует прямой алгоритм  $\mathcal{A}$  решения периодической задачи, для которого  $\Pi(\mathcal{A})$  — общее число приведенных арифметических действий — есть величина порядка  $O(MN)$ , а  $\mathcal{E}(\mathcal{A})$  — двоичный логарифм числа ячеек памяти ЭВМ, необходимых для реализации алгоритма  $\mathcal{A}$ , есть величина  $\log_2 N + O(1)$ .

В самом деле, решение периодической задачи сведется в условиях леммы 11.19.1 к решению периодической задачи для сильноэллиптического обыкновенного дифференциального уравнения  $2M$ -го порядка с постоянными коэффициентами, а последняя задача сводится к последовательному  $M$ -кратному интегрированию периодических задач для уравнений 2-го порядка, правые части которых, заданные в  $N$  точках, зависят только от результата предыдущего интегрирования [см. формулы (11.10.17), (11.10.18)]. А так как каждая из периодических задач для уравнения 2-го порядка решается методом прогонки с затратой  $O(N)$  действий и запоминанием  $O(N)$  чисел, всего требуется  $O(MN)$  действий с запоминанием только  $O(N)$  чисел.

В условиях леммы 11.19.1 имеет место равенство  $M = n$ . Это накладывает ограничения на вид операции  $P$ . Поэтому рассмотрим другой способ выбора  $P_m$  и  $Q_n$ . Пусть  $P_{n-1}, Q_n$  выбраны согласно лемме 11.10.1; они являются соответственно числителем и знаменателем подходящей для  $r(t)$  дроби порядка  $2n$ . Пусть  $n < M$ , а многочлены  $C_{M-1}(t), B_M(t)$ , определяющие квадратуру  $S_t$  (см. § 9.11), являются также соответственно числителем и знаменателем подходящей для  $r(t)$  дроби порядка  $2M$ . Тогда, учитывая неравенства (11.10.6), получаем  $0 \leq \bar{\psi}(t, Q_n, P_{n-1}, c) = (C_{M-1}/B_M - P_{n-1}/Q_n) \times (1 - cP_{n-1}/Q_n)^{-1} \leq (r(t) - P_{n-1}/Q_n) (1 - cP_{n-1}/Q_n)^{-1}$ , т. е. по лемме 11.10.1 имеем  $\|\bar{\psi}\|(Q_n, P_{n-1}, c) = O(n^{-1})$ . Таким образом, скорость сходимости  $KP_1(n)$ -метода оказалась асимптотически равна  $-\ln cn^{-1}$ . На каждую операцию  $K$  затрачивается  $O(NM)$  действий и требуется  $O(N)$  ячеек памяти ЭВМ, а на операцию  $P_1(n)$  затрачивается  $O(nN)$  действий и требуется  $O(N)$  ячеек памяти. Пусть при  $N, M \rightarrow \infty$  цена операции  $K$ , которая обозначена  $\Pi(K)$ , с точностью до членов  $O(N), O(M)$  равна  $aMN$ , а  $\Pi(P(n))$  — цена операции  $P_1(n)$  — с точностью до членов  $o(N), O(n)$  равна  $dnN$ , где  $a, d$  —

некоторые постоянные. Тогда за одну итерацию совершается асимптотически  $N(aM + dn)$  арифметических действий. Следовательно, общее число действий, необходимых для решения разностной периодической задачи с точностью  $\varepsilon$   $KP_1(n)$ -методом, которое обозначим  $\Pi[KP_1(n), \varepsilon]$ , можно при  $c \neq 0$  асимптотически считать равным

$$\Pi[KP_1(n), \varepsilon] \sim N(aM + dn)(1 + \eta/\ln n), \quad (11.19.11)$$

где  $\eta = |\ln \varepsilon|$ .

Пусть мы хотим решить 2  $\pi$ -периодическую задачу (9.10.1) с точностью  $\varepsilon$  в норме  $|\cdot|_0$  [см. (9.13.4)] в предположении, что  $F \in H(d, \alpha)$ , где  $\alpha > 4$ . Тогда согласно формулам (9.13.9), (9.13.10) следует взять  $N = O(\varepsilon^{-1/4})$ ,  $M = O(\varepsilon^{-\gamma})$ , где  $\gamma = 1/\alpha$ . Подставляя эти значения в формуле (11.19.11), получаем

$$\Pi[KP_1(n), \varepsilon] \sim A\varepsilon^{-1/4}(B\varepsilon^{-\gamma} + n)(1 - \ln \varepsilon/\ln n), \quad (11.19.12)$$

где  $A, B$  — некоторые положительные постоянные. Найдем такие значения  $n = n_d$ , при которых правая часть (11.19.12) асимптотически минимальна при  $\varepsilon \rightarrow 0$  [123]. Для этого необходимо найти минимум функции

$$y(x) = (x + B\varepsilon^{-\gamma})(1 - \ln \varepsilon/\ln x).$$

Продифференцировав функцию  $y(x)$ , получим уравнение

$$1 - \ln \varepsilon/\ln x + (1 + B\varepsilon^{-\gamma}/x) \ln \varepsilon/\ln^2 x = 0. \quad (11.19.13)$$

Сделаем замену переменных  $t = x^{-1}$ . Тогда уравнение (11.19.13) относительно нового неизвестного  $t$  запишется следующим образом:

$$t = -B^{-1}\varepsilon^\gamma(1 + \ln t + \ln^2 t/\ln \varepsilon). \quad (11.19.14)$$

Можно показать, что решение уравнения (11.19.14) имеет вид

$$t = -B^{-1}\gamma(1 + \gamma)\varepsilon^\gamma \ln \varepsilon [1 + \beta(\varepsilon)], \quad (11.19.15)$$

где  $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда дешевый алгоритм  $KP_1(n)$ -метода определяется значениями  $n = n_d$ , удовлетворяющими соотношению

$$n_d = -B\varepsilon^{-\gamma}(1 + a(\varepsilon))/\gamma(1 + \gamma) \ln \varepsilon, \quad (11.19.16)$$

где  $a(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

При этих значениях формула (11.19.12) принимает вид

$$\Pi(KP_1(n_d), \varepsilon) \sim AB\varepsilon^{-1/4-\gamma} \left[ 1 - \frac{1+a(\varepsilon)}{\gamma(1+\gamma)\ln \varepsilon} \right] \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right), \quad (11.19.17)$$

или более грубо

$$\Pi[KP_1(n_d)] \sim AB(1 + \alpha)\varepsilon^{-(1/4 + \alpha^{-1})}. \quad (11.19.18)$$

Цена операции  $K$  для этого случая есть

$$\Pi(K) = O(\varepsilon^{-(1/4 + 1/\alpha)}). \quad (11.19.19)$$

Сравнивая формулы (11.19.18) и (11.19.19), видим, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Pi[KP_1(n_d), \varepsilon] = O[\Pi(K)]. \quad (11.19.20)$$

Таким образом, общее число действий в оптимальном (дешевом)  $KP_1(n)$ -методе асимптотически при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равно по порядку числу



действий в операции  $K$ , т. е. задача решается с затратой числа действий, равной по порядку затрате числа действий в одной итерации.

Алгоритмы  $KP_1(n)$ -метода, обладающие свойством (11.19.20), существуют не только для  $n$ , заданных формулой (11.19.16); но и для всех  $n$  вида

$$n = \varepsilon^{-\gamma} f(\varepsilon), \quad (11.19.21)$$

где положительная функция  $f(\varepsilon)$  имеет следующие свойства:  $f(\varepsilon) \rightarrow 0$  и  $0 < \beta(\varepsilon) = \ln f(\varepsilon) / \ln \varepsilon < O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В этом легко убедиться, подставив (11.19.21) в (11.19.12) и получив (11.19.20) [может быть, с большими по сравнению с (11.19.18) константными множителями]. В качестве функций  $f(\varepsilon)$  могут быть взяты, например, функции  $f(\varepsilon) = C\varepsilon^\beta$  для  $0 < \beta < \gamma$ . Тогда  $\Omega(KP_1(n), \varepsilon) \sim AB(1 + (\gamma - \beta)^{-1}) \times \times \varepsilon^{-(1/4 + \alpha^{-1})}$ , что больше при  $\beta > 0$ , величины, заданной выражением (11.19.18). Для функций  $f(\varepsilon) = C(\ln \varepsilon)^\beta$  при любом  $\beta > 0$  асимптотическое равенство (11.19.18) не изменится. Таким образом, оценка (11.19.16) носит качественный асимптотический характер.

### § 11.20. $KP_1(1)$ -МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ (БЕСКОНЕЧНЫЙ ЦИЛИНДР)

В § 9.7, 9.8 были получены разностные уравнения, аппроксимирующие кинетическое уравнение с линейной индикатрисой рассеяния для цилиндрически-симметричной геометрии. Рассмотрим случай, когда в операции  $P$  для функции  $w(r)$  взяты уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{r} \frac{d}{dr} (rv) + (1-c)w &= F_0(r); \\ gl \frac{dw}{dr} + 3(1-\bar{\mu}c)v &= 3\psi(r), \end{aligned} \right\} \quad (11.20.1)$$

переходящие при  $g = 1$  в  $P_1$ -уравнения метода сферических гармоник. Здесь  $c = \Sigma_s / \Sigma$ , кусочно-постоянные функции  $F_0(r)$ ,  $\psi(r)$  являются соответственно нулевым и первым угловыми моментами от источника, а  $w(r)$ ,  $v(r)$  представляют собой приближенные значения соответственно нулевого и первого угловых моментов функции  $\varphi$ . Для системы (11.20.1) ставится на отрезке  $[0, R]$  следующая краевая задача. Пусть  $v(0) = 0$ . При  $r = R$  возьмем краевое условие, которое аппроксимирует условие (5.3.6). Применяя к обеим частям (5.3.6) оператор  $J_-$  [см. (9.8.18)] и учитывая, что  $J_- T\varphi = -J_+\varphi$  и  $J_-(\cos \psi T\varphi) = (\pi/4)J_+\varphi$ , получаем

$$J_-\varphi = -\kappa J_+\varphi + J_-V. \quad (11.20.2)$$

Представляя приближенно функцию  $\varphi$  в виде

$$\varphi(R, \mu, \gamma) \approx w(R) + 3\Omega n v(R), \quad (11.20.3)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности цилиндра, и учитывая, что в этом случае  $J_{\pm}\varphi = \pm \omega/4 + v/2$ , получаем краевое условие для системы (11.20.1):

$$v(0) = 0; v(R) = [(1 - \kappa)/(2(1 + \kappa))] \omega(R) + [2/(1 + \kappa)] J_- V. \quad (11.20.4)$$

Опишем первый шаг  $KP_1$ -метода, предполагая, что

$$V = V_0 + 3V_1 \sin \vartheta \cos \psi \quad (\text{тогда } J_- V = -V_0/4 + V_1/2).$$

Пусть заданы начальные значения  $\varphi_0^0(r)$ ,  $\varphi_1^0(r)$ ,  $T\varphi^0$ ,  $J_+\varphi^0$ . Пользуясь уравнением (5.3.6), находим при  $r = R$ ,  $\mu < 0$  значение  $\varphi^{1/2}$  на каждой характеристике  $y = y_j$ :

$$\varphi^{1/2} = \kappa [a - 4(1 - a)\mu/\pi] T\varphi^0 + V. \quad (11.20.5)$$

Выполняя операцию  $K$ , находим на каждой характеристике  $\varphi^{1/2}$ , решая дифференциальные уравнения сразу для всех  $\gamma$  с начальным условием (11.20.5). Найденные значения  $\varphi^{1/2}$  тут же используем для образования  $\varphi_0^{1/2}$  при  $0 \leq r < R$ , а при  $r = R$  получаем  $S_+\varphi^{1/2}$ ,  $T\varphi^{1/2}$ ,  $J_+\varphi^{1/2}$ . Учитывая краевые условия (5.3.6) при  $r = R$ , полагаем

$$S_- \varphi^{1/2} = \kappa \left( \frac{a}{2} + \frac{4}{\pi^2} (1 - a) \right) \int_0^1 T\varphi^{1/2} d\gamma + \frac{V_0}{2} - \frac{3V_1}{4};$$

$$\varphi_0^{1/2}(R) = S\varphi^{1/2} = S_+ \varphi^{1/2} + S_- \varphi^{1/2}.$$

Пользуясь уравнением баланса (9.7.7) и зная, что  $\varphi_1^{1/2}(0) = 0$  и  $\varphi_0^{1/2}(r)$  задано, находим  $\varphi_1^{1/2}(r)$  при  $0 < r \leq R$ . Вычитая (11.20.5) из (5.3.6), видим, что ошибка  $\eta^{1/2} = \varphi - \varphi^{1/2}$  удовлетворяет краевому условию

$$\eta^{1/2} = \kappa [a - 4(1 - a)\mu/\pi] [T\eta^{1/2} + T(\varphi^{1/2} - \varphi^0)]. \quad (11.20.6)$$

Представляя функцию  $\eta^{1/2}$  в виде

$$\eta^{1/2} \approx \omega^{1/2} + 3\Omega n v^{1/2},$$

условие (11.20.6) заменяем приближенным (11.20.4), которое в этом случае будет иметь вид

$$v(0) = 0, v(R) = \frac{1 - \kappa}{2(1 + \kappa)} \omega(R) - \frac{2\kappa}{1 + \kappa} J_+(\varphi^{1/2} - \varphi^0) \quad (11.20.7)$$

при  $v = v^{1/2}$ ,  $\omega = \omega^{1/2}$ .

Теперь выполняем операцию  $P_1$ : решая краевую задачу (11.20.1), (11.20.7) при  $F_0(r) = c[\varphi_0^{1/2}(r) - \varphi_0^0(r)]$ ,  $\psi(r) = c\bar{\mu}[\varphi_1^{1/2}(r) - \varphi_1^0(r)]$ , находим  $\omega^{1/2}(r)$ ,  $v^{1/2}(r)$ .

Для  $0 \leq r < R$  полагаем

$$\varphi_0^1(r) = \varphi_0^{1/2}(r) + \omega^{1/2}(r), \quad (11.20.8)$$

а при  $r = R$  вычисляем:

$$\left. \begin{aligned} S_+ \varphi^1 &= S_+ \varphi^{1/2} + \omega^{1/2}/2 + 3v^{1/2}/4; \\ S_- \varphi^1 &= S_- \varphi^{1/2} + \kappa(a/2 + 4(1-a)/\pi)(\omega^{1/2} + 3\pi^2 v^{1/2}/16); \\ \varphi_0^1(R) &= S_+ \varphi^1 + S_- \varphi^1; J_+ \varphi^1 = J_+ \varphi^{1/2} + (\omega^{1/2}/2 + v^{1/2})/2; \\ T\varphi^1 &= T\varphi^{1/2} + \omega^{1/2} + 3\pi v^{1/2} \sqrt{1-\gamma^2}/4. \end{aligned} \right\} (11.20.9)$$

Пользуясь уравнением баланса (9.7.7) и подставляя в него  $\varphi_0 = \varphi_0^1$ ,  $\varphi_1^1(0) = 0$ , находим  $\varphi_0^1(r)$  при  $0 < r \leq R$ . Для контроля точности расчета вычисляем величину  $\tilde{\varphi}_1^1(R) = (1 - \kappa) J_+ \varphi^1 - V_0/4 + V_1/2$ , являющуюся приближенным значением  $\varphi_1(R)$ , и величину

$$\delta = \left( \int_0^R f_0 r dr + IR(V_0/2 - V_1)/2 \right) / \left( \int_0^R (1-c)\varphi_0^1 r dr + (1-\kappa)IRJ_+\varphi(R) \right). \quad (11.20.10)$$

Величины  $\tilde{\varphi}_1^1(R)$  и  $\delta$  используем для оценки точности решения. При хорошей точности должно быть:  $\tilde{\varphi}_1^1(R) \approx \varphi_1^1(R)$ ,  $\delta \approx 1$ .

Описанный процесс итерации повторяется при  $k = 1, 2, \dots$ , величины  $g$  в уравнениях (11.20.1) циклически меняются с некоторым периодом  $N$  согласно формулам § 14, 15.

В качестве начального приближения  $\varphi_0^0$ ,  $\varphi_1^0$  берут соответственно функции  $\omega$ ,  $v$ , получаемые в результате решения краевой задачи (11.20.1), (11.20.4) при  $g = 1/3$ ,  $J_- V = -V_0/4 + V_1/2$ , если за  $F_0(r)$  и  $\psi(r)$  взять соответственно нулевой и первый моменты функции  $f(r, \mu, \gamma)$ ; функции  $T\varphi^0$ ,  $J_+\varphi^0$  вычисляют из представления (11.20.3)

Небольшая модификация описанного  $KP_1$ -метода состоит в вычислении по особым формулам величин  $\varphi_0^\alpha(R)$ , которые путем использования краевого условия (5.3.6) рассчитываются только через значения  $S_+ \varphi^\alpha$ ,  $T\varphi^\alpha$ , представляющие конечный итог итерационного шага. Тем самым осуществляется некоторая экстраполяция по  $k$  изменения величины  $\varphi_0^k(R)$ . Это выгодно делать, например, при расчете ячеек, где результаты итераций, как правило, медленнее всего стабилизируются на внешней границе. В свою очередь, краевое условие (11.20.7) достаточно эффективно выводит решение при  $r = R$  на требуемую величину, несмотря на то, что в каждой операции  $K$  краевые условия выполняются лишь приближенно. Вариант  $KP$ -метода с точным выполнением на каждой итерации краевых условий зеркального отражения описан в [119]. Разностные аппроксимации операции  $K$  содержатся в § 9.6—9.8, а разностные аппроксимации операции  $P_1(1)$  — в § 7.4.

Многочисленные (начиная с 1962 г.) расчеты многозонных задач со сложным распределением свойств сред по программам, составленным одним из авторов совместно с Е. А. Григорьевой, С. А. Фроло-

вой, Ю. А. Власовым и С. И. Коняевым, показали высокую эффективность  $KP_1$ -метода. Некоторые результаты расчетов для цилиндрической геометрии докладывались в 1964 г. на Третьей международной конференции по мирному использованию атомной энергии в Женеве [20]. Средняя скорость сходимости итераций, как правило, близка к расчетной, вычисленной для модельных задач.

Приведем методический, типичный в определенном смысле пример расчета ячейки, для которого метод простой итерации плохо сходится. Константы выберем так, чтобы они качественно соответствовали свойствам реальных ячеек и имели простой вид. Пусть

$$\left. \begin{aligned} R=2; \kappa=1; a=1,09; V=0; \bar{\mu}=0; f_1=0; \\ \Sigma=1/2; \Sigma_s=1/4; f_0=0 \text{ при } 0 \leq r \leq r_0=1; \\ \Sigma=\Sigma_s=1/5; f_0=5 \text{ при } r_0 < r \leq R=2. \end{aligned} \right\} \quad (11.20.11)$$

Возьмем 127 точек по радиусу, 126 характеристик, 8 угловых направлений по  $\gamma$ , в качестве начального приближения выберем  $P_1$ -приближение. После решения задачи окажется, что  $\max_r \varphi_0(r) \approx 15,76$ ;

$$\|\varepsilon^0\| = \max_r |\varepsilon^0| \approx 2,82; \delta = 1,0007; \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right|_{r=R} = 0.$$

Задачу (11.20.11) решим циклическим  $KP_1(1)$ -методом. Параметры  $N, \beta$  выберем из следующего условия: ошибка, оцениваемая по модельной периодической задаче при  $c=1$ , должна уменьшаться приблизительно в 1000 раз (этого вполне достаточно для расчета большинства реальных задач). Поскольку имеем в ячейке две зоны и во внешней зоне  $\Sigma_s/\Sigma=1$ , то априори трудно приписать  $\varepsilon^0$  определенному пространству типа  $H(a, \beta)$ , в котором  $\beta$  характеризует закон убывания коэффициентов Фурье  $a_n$ , в разложении  $\varepsilon^0$  по нормированным собственным функциям  $\varphi_n$  [ $a_n = O(n^{-\beta})$ ]. Естественно предположить, что  $\varepsilon^0$  имеет ограниченные коэффициенты Фурье  $a_n$ . Поэтому выберем  $\beta=0$ . Учитывая, что  $J_4^{1/2} = 7,2 \cdot 10^{-4}$  при  $\alpha = \beta = 0$  [см. (11.14.11)], выбираем  $N=4$ . Проследим за поведением величин  $\xi_k = \max_r |\varphi_0^{k+1} - \varphi_0^k|$  ( $k=0, 1, 2, 3, 4$ ). При  $N=4, \beta=0$  имеем  $g_1=0,46, g_2=0,69, g_3=0,87, g_4=0,97$ . Для получения  $\xi_4$  необходимо проделать пятую итерацию. Выполним ее при  $g_5=1$ . Расчеты показали, что  $\xi_0=2,52, \xi_1=3,4 \cdot 10^{-1}, \xi_2=4,9 \cdot 10^{-2}, \xi_3=8,7 \cdot 10^{-3}, \xi_4=2,5 \cdot 10^{-3}$ . Следовательно,  $\|\xi_4\|/\|\varepsilon^0\| = 8,9 \cdot 10^{-4}$ , что близко к  $J_4^{1/2}$  — мажорантной оценке для периодической задачи.

На разбираемом примере поучительно показать разницу между постановками и результатами решения проблем оптимизации итерационных методов на классе задач (чем мы обычно занимались) и на отдельной задаче. Пусть мы решаем задачу (11.20.11) циклическим  $KP_1(1)$ -методом при  $N=4$ , в котором  $g_k$  выбраны по формулам (11.15.7), где  $\beta$  — некоторый параметр. Требуется выбрать  $\beta = \beta_{\text{opt}}$  таким, чтобы величина  $|\xi_4|$  была минимальна. Видно, что в такой постановке задачи исчезла связь  $\beta$  с пространствами  $H(a, \beta)$ . Величины  $g_k$  выбираются по определенным формулам, асимптотический характер которых становится неясным при фиксированном  $N$ .

От этих формул требуется лишь, чтобы они были разумными для какого-нибудь пространства ошибок и какой-нибудь (пусть неудобной для численной реализации) метрики, в которой оценивается ошибка [пример тому — пространства  $H(a, \beta)$  и функционал (11.14.6)]. Очевидно, что мы имеем совершенно другую задачу оптимизации. Для нашего примера получаем:

$$g_{\text{опт}} = -3,08; \text{ при этом } g_1 = 0,19, g_2 = 0,47, \\ g_3 = 0,76, g_4 = 0,95, \xi_0 = 3,22, \xi_1 = 3,9 \cdot 10^{-1},$$

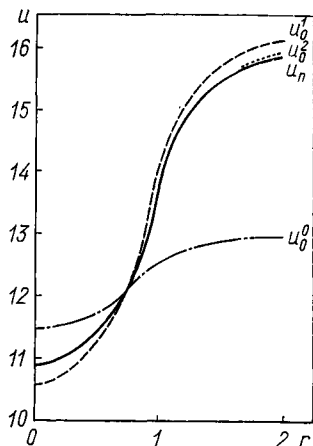


Рис. 11.1. Иллюстрация сходимости итераций

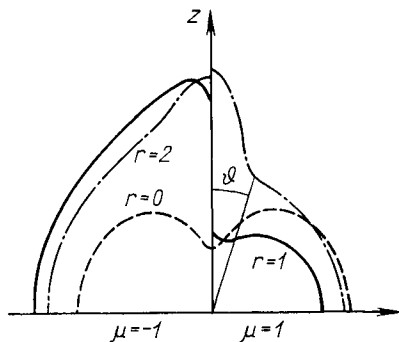


Рис. 11.2. Распределение значений функции  $\varphi(r, \mu, \gamma)$

$\xi_2 = 3,7 \cdot 10^{-2}$ ,  $\xi_3 = 3,3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\xi_4 = 3,6 \cdot 10^{-4}$ . Здесь  $\|\xi_4\|/\|\epsilon^0\| = 1,3 \cdot 10^{-4}$ . Точность расчета повысилась в 7 раз. На рис. 11.1 приведены первые итерации при  $\beta = -3,08$ , а на рис. 11.2 — значения  $\varphi(r, \mu, \gamma)$  при  $r = 0, 1, 2$ ,  $\mu = \pm 1$ .

На основании этих расчетов можно сделать заключение, что метод введения параметра  $\beta$  по формулам (11.15.2), (11.15.6), (11.15.7) удобен при оптимизации  $KP_1(1)$ -метода для задач с переменными коэффициентами.

### § 11.21. УРАВНЕНИЯ $KP_1(2)$ -МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧ В ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И С ЛИНЕЙНОЙ ИНДИКАТРИСОЙ РАССЕЯНИЯ

На примере плоской задачи покажем еще один из способов построения операции  $P$  с использованием приближения Ивона — Мертенса или двойного  $P_1$ -приближения [81]. В § 9.9 были построены разностные схемы решения краевой задачи (9.9.1), (5.2.11). Операцию  $K$  проводим следующим образом. По известным значениям  $\varphi_0^k, \varphi_1^k, \varphi^k(H, \mu)$  для  $\mu > 0$  и  $\varphi^k(0, \mu)$  для  $\mu < 0$  сначала определяем  $\varphi^{k+1/2}(0, \mu)$ :  $\varphi^{k+1/2}(0, \mu) = \kappa_1 \varphi^k(H, \mu) + V_1(\mu)$  при  $\mu > 0$ . Затем, решая уравнение (9.9.1) для  $\mu > 0$ , в правой части которого полагаем  $\varphi_0 = \varphi_0^k, \varphi_1 = \varphi_1^k$ , находим  $\varphi^{k+1/2}(x, \mu)$  при  $\mu > 0$ . Зна-

чения этих функций используем для вычисления  $\varphi_0^{k+1/2}(x)$  и запоминания  $\varphi^{k+1/2}(H, \mu)$ . Такой же цикл совершаем для  $\mu < 0$ : полагая  $\varphi^{k+1/2}(H, \mu) = \kappa_1 \varphi^k(0, \mu) + V_2(\mu)$ , находим  $\varphi^{k+1/2}(x, \mu)$  при  $\mu < 0$ , по этим значениям заканчиваем вычисление  $\varphi_0^{k+1/2}(x)$  и запоминаем  $\varphi^{k+1/2}(0, \mu)$  при  $\mu < 0$ ; из уравнения баланса (9.9.5) по функции  $\varphi_0^{k+1/2}$  находим функцию  $\varphi_1^{k+1/2}$ .

После проведения описанной операции  $K$  ошибка  $\eta^{k+1/2}(x, \mu) = \varphi - \varphi^{k+1/2}$  удовлетворяет уравнению (9.9.1) с функцией

$$f(x, \mu) = \Sigma_s [\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k + 3\bar{\mu} (\varphi_1^{k+1/2} - \varphi_1^k)] \quad (11.21.1)$$

и краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} \eta^{k+1/2}(0, \mu) &= \kappa_1 \eta^{k+1/2}(H, \mu) + \kappa_1 [\varphi^{k+1/2}(H, \mu) - \\ &\quad - \varphi^k(H, \mu)], \quad \mu > 0; \\ \eta^{k+1/2}(H, \mu) &= \kappa_2 \eta^{k+1/2}(0, \mu) + \kappa_2 [\varphi^{k+1/2}(0, \mu) - \\ &\quad - \varphi^k(0, \mu)], \quad \mu < 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.21.2)$$

Для операции  $P_1$  можно взять уравнения из § 11.18 или уравнения  $P_3$ -приближения. Напишем уравнение двойного  $P_1$ -приближения для ошибки. Уравнения для ошибки с источником (11.21.1) умножим на 1 и  $\mu$ , проинтегрируем полученные уравнения сначала в пределах от 0 до 1, а затем от  $-1$  до 0 и в результирующих равенствах осуществим замену

$$\left. \begin{aligned} \eta^{k+1/2} &= \omega_+^{k+1/2}(x) + \mu v_+^{k+1/2}(x) \quad \text{при } \mu > 0; \\ \eta^{k+1/2} &= \omega_-^{k+1/2}(x) + \mu v_-^{k+1/2}(x) \quad \text{при } \mu < 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.21.3)$$

В итоге получим систему четырех дифференциальных уравнений для определения функции  $\omega_{\pm}^{k+1/2}$ ,  $v_{\pm}^{k+1/2}$ , которая (если опустить индекс  $k + 1/2$  у функций) имеет вид

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{2} \frac{d\omega_{\pm}}{dx} + \frac{1}{3} \frac{dv_{\pm}}{dx} + \Sigma \left( \omega_{\pm} + \frac{1}{2} v_{\pm} \right) &= \Sigma_s \left( \tilde{\varphi}_0 \pm \frac{3\bar{\mu}}{2} \tilde{\varphi}_1 \right) + F_{\pm}; \\ \frac{1}{3} \frac{d\omega_{\pm}}{dx} - \frac{1}{4} \frac{dv_{\pm}}{dx} + \Sigma \left( \pm \frac{\omega_{\pm}}{2} + \frac{1}{3} v_{\pm} \right) &= \\ &= \Sigma_s \left( \pm \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_0 + \bar{\mu} \tilde{\varphi}_1 \right) + f_{\pm}, \end{aligned} \quad (11.21.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_0 &= [\omega_+ + \omega_- + (v_+ - v_-)/2]/2; \\ \tilde{\varphi}_1 &= [(\omega_+ - \omega_-)/2 + (v_+ + v_-)/3]/2; \\ F_{\pm} &= \Sigma_s [\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k \pm 3\bar{\mu} (\varphi_1^{k+1/2} - \varphi_1^k)/2]; \\ f_{\pm} &= \Sigma_s [\pm (\varphi_0^{k+1/2} - \varphi_0^k)/2 + \bar{\mu} (\varphi_1^{k+1/2} - \varphi_1^k)]. \end{aligned} \right\} \quad (11.21.5)$$

Подставляя значения  $\eta^{k+1/2}$ , выраженные формулами (11.21.3), в краевые условия (11.21.2), умножая их на 1 и  $\mu$ , интегрируя первое

из полученных уравнений по отрезку [0, 1], а второе — по [-1, 0], находим

$$\begin{aligned}
 & \omega_+^{k+1/2}(0) + (1/2) v_+^{k+1/2}(0) = \kappa_1 [\omega_+^{k+1/2}(H) + \\
 & + (1/2) v_+^{k+1/2}(H)] + \kappa_1 \int_0^1 [\varphi^{k+1/2}(H, \mu) - \varphi^k(H, \mu)] d\mu; \\
 & (1/2) \omega_+^{k+1/2}(0) + (1/3) v_+^{k+1/2}(0) = \kappa_1 [(1/2) \omega_+^{k+1/2}(H) + \\
 & + (1/3) v_+^{k+1/2}(H)] + \kappa_1 \int_0^1 [\varphi^{k+1/2}(H, \mu) - \varphi^k(H, \mu)] \mu d\mu; \\
 & \omega_-^{k+1/2}(H) - (1/2) v_-^{k+1/2}(H) = \kappa_2 [\omega_-^{k+1/2}(0) - \\
 & - (1/2) v_-^{k+1/2}(0)] + \kappa_2 \int_{-1}^0 [\varphi^{k+1/2}(0, \mu) - \varphi^k(0, \mu)] d\mu; \\
 & -(1/2) \omega_-^{k+1/2}(H) + (1/3) v_-^{k+1/2}(H) = \kappa_2 [-(1/2) \omega_-^{k+1/2}(0) + \\
 & + (1/3) v_-^{k+1/2}(0)] + \kappa_2 \int_{-1}^0 [\varphi^{k+1/2}(0, \mu) - \varphi^k(0, \mu)] \mu d\mu.
 \end{aligned}
 \tag{11.21.6}$$

Решая краевую задачу (11.21.4)–(11.21.6) методом прогонки, вычисляем значение  $\tilde{\varphi}_0^{k+1/2} = (1/2) [\omega_+ + \omega_- + (v_+ - v_-)/2]^{k+1/2}$  и полагаем

$$\begin{aligned}
 \varphi_0^{k+1} &= \varphi_0^{k+1/2} + \tilde{\varphi}_0^{k+1/2}; \\
 \varphi^{k+1}(H, \mu) &= \varphi^{k+1/2}(H, \mu) + \omega_+^{k+1/2}(H) + \mu v_+^{k+1/2}(H), \quad \mu > 0; \\
 \varphi^{k+1}(0, \mu) &= \varphi^{k+1/2}(0, \mu) + \omega_-^{k+1/2}(0) + \mu v_-^{k+1/2}(0), \quad \mu < 0.
 \end{aligned}$$

Функцию  $\varphi_1^{k+1}(0)$  рассчитываем по квадратурной формуле, а в остальных точках функцию  $\varphi_1^{k+1}$  находим из уравнения баланса. Затем повторяем описанный цикл итераций.

## § 11.22. РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Рассмотрим нестационарное односкоростное уравнение

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Omega \nabla \varphi + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}, \Omega', t) d\Omega' + f(\mathbf{x}, \Omega, t). \tag{11.22.1}$$

Для уравнения (11.22.1) поставим смешанную задачу Коши:

$$\varphi(\mathbf{x}, \Omega, t) = 0 \text{ при } \Omega \mathbf{n} < 0, \mathbf{x}, t \in \gamma, \tag{11.22.2}$$

$$\varphi(\mathbf{x}, \Omega, 0) = \Phi(\mathbf{x}, \Omega), \mathbf{x}, \Omega \in D \times \Omega \tag{11.22.3}$$

в цилиндрической области  $\Pi = D \times \Omega \times T$  с основанием  $D \times \Omega$  и боковой границей  $\gamma = \Gamma \times T$ . В этом параграфе используем обозначения § 5.1.

Наряду с нестационарной задачей (11.22.1)—(11.22.3) рассмотрим стационарную задачу (5.1.4), (5.1.6) при  $g(\mu_0) = 1$ . Решение ее будем искать в классе  $D_0$  (см. § 5.1.). Для интегрирования задачи (11.22.1)—(11.22.3) используем схему расщепления [171]

$$(\varphi^{k+1/2} - \varphi^k)/\tau + L_2(\alpha\varphi^{k+1/2} + \beta\varphi^k) = \bar{f}; \quad (11.22.4)$$

$$(\varphi^{k+1} - \varphi^{k+1/2})/\tau + L_1(\alpha\varphi^{k+1} + \beta\varphi^{k+1/2}) = 0, \quad (11.22.5)$$

где  $L_2 = \Sigma I - \Sigma_s S$ ,  $L_1 = \Omega \delta$  — разностные аппроксимации операторов  $\Lambda_2 = \Sigma I - \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int d\Omega'$ ,  $\Lambda_1 = \Omega \nabla$  соответственно;  $\bar{f}$  — аппроксимация  $f$ ;  $\tau = \nu \Delta t$ ;  $\alpha > 0$ ;  $\beta > 0$ ;  $\alpha + \beta = 1$ .

Расщепляя оператор второго дробного шага, получаем схему полного расщепления

$$(\varphi^{k+1/4} - \varphi^k)/\tau + L_2(\alpha\varphi^{k+1/4} + \beta\varphi^k) = \bar{f}; \quad (11.22.6)$$

$$(\varphi^{k+(s+1)/4} - \varphi^{k+s/4})/\tau + L_{1s}(\alpha\varphi^{k+(s+1)/4} + \beta\varphi^{k+s/4}) = 0, \quad (11.22.7)$$

где  $L_1 = L_{11} + L_{12} + L_{13}$ ;  $L_{1i}$  — аппроксимации одномерных операторов  $\Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Основная цель наших исследований — решение стационарной задачи (5.1.4), (5.1.6). Сформулируем некоторые свойства операторов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  в пространстве  $L_2(D \times \Omega)$ .

**Лемма 11.22.1.** Оператор  $\Lambda_2$  при  $\Sigma_0 = \Sigma - \Sigma_s > 0$  положительно определен.

**Лемма 11.22.2.** Оператор  $\Lambda_1$  является положительным.

**Лемма 11.22.3.** Оператор  $(I + \tau\Lambda_1)^{-1}$  существует и ограничен из  $L_2(D \times \Omega)$  в  $D_0$ , причем  $\|(I + \tau\Lambda_1)^{-1} F\| \leq (1 - \exp(-d/\tau)) \|F\|$ ,  $F \in L_2(D \times \Omega)$ , где  $d$  — диаметр области  $D$ .

Рассмотрим теперь самосопряженную формулировку задачи (5.1.4), (5.1.6). Для этого уравнение (5.1.15) вдоль характеристик  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \xi \Omega$  запишем в виде (9.6.19):

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \Sigma u = \frac{\Sigma_s}{4\pi} u_0 + \bar{F}(\mathbf{x}, \Omega), \quad (11.22.8)$$

где  $\bar{F} = F\Sigma$ , а функция  $u(\mathbf{x}' + \xi\Omega, \Omega)$  удовлетворяет граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \partial u / \partial \xi + \Sigma u |_{\Gamma_{-\Omega}} &= 0; \\ \partial u / \partial \xi - \Sigma u |_{\Gamma_{\Omega}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.22.9)$$

Рассмотрим операторы

$$\Lambda'_1 = -\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \xi} + \Sigma_0 I; \quad \Lambda'_2 = \Sigma_s(I - S), \quad (11.22.10)$$

где штрих означает, что операторы  $\Lambda'_1$  и  $\Lambda'_2$  связаны с задачей (11.22.8), (11.22.9). Отметим свойства операторов  $\Lambda'_1$  и  $\Lambda'_2$ .

**Лемма 11.22.4.** Оператор  $\Lambda'_1$  положительно определен при  $\Sigma_0 \geq 0$ .

**Лемма 11.22.5.** Оператор  $\Lambda'_2$  положительно полуопределен.

Утверждения лемм 11.22.1—11.22.5 являются следствиями результатов работы В. С. Владимирова [41]. Кроме перечисленных свойств



отметим следующие свойства операторов  $\Lambda_2$  и  $\Lambda'_2$ : они ограниченные и самосопряженные в  $L_2$ , причем преобразуют любую функцию из  $L_2$  снова в функцию из  $L_2$ . При  $\Sigma_0 = 0$  оператор  $\Lambda_2$  становится положительно полуопределенным.

Введем в линейном множестве  $\tilde{D}_0$  и соответственно в  $D_0$  норму, положив  $\|\varphi\|_1 = \|(I + \tau\Lambda_1)\varphi\|$ ;  $\varphi \in \tilde{D}_0$ ;  $\|\varphi\|_2 = \|(I + \tau\Lambda'_1)\varphi\|$ ;  $\varphi \in D_0$  и отметим неравенства  $\|\varphi\| \leq (1 - \exp(-d/\tau)) \|\varphi\|_1$ ;  $\varphi \in \tilde{D}_0$ ;  $\|\varphi\| \leq (1 - \exp(-d/\tau)) \|\varphi\|_2$ ;  $\varphi \in D_0$ . Норма  $\|\varphi\|$  понимается как норма в пространстве  $L_2$ . Отсюда из сходимости в  $\tilde{D}_0$  (соответственно в  $D_0$ ) вытекает сходимость в  $L_2$ . Принимая, что область определения оператора  $\Lambda_1$  составляют функции множества  $\tilde{D}_0$ , а область определения оператора  $\Lambda'_1$  — функции множества  $D_0$ , краевую задачу (5.1.4), (5.1.6) можно записать в виде

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)\varphi = f, \quad (11.22.11)$$

а краевую задачу (11.22.8), (11.22.9) — в виде

$$(\Lambda'_1 + \Lambda'_2)\varphi = f. \quad (11.22.12)$$

Для решения задачи (11.22.11) построим итерационный метод

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k - \alpha\tau B(\Lambda\varphi^k - f); \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad (11.22.13)$$

где

$$B = [(I + \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_1)]^{-1}, \quad (11.22.14)$$

$\alpha$ ,  $\tau$  — итерационные параметры. Формальная подстановка вместо  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  операторов  $\Lambda'_1$  и  $\Lambda'_2$  в соотношения (11.22.13) и (11.22.14) дает итерационные методы для решения задачи (11.22.12). Докажем сходимость метода (11.22.13) к решению задачи (11.22.11) или (11.22.12). Для дальнейшего анализа нам потребуется

**Лемма 11.22.6.** *Если  $0 < \alpha < \beta < \infty$  и оператор  $A$  удовлетворяет в  $L_2$  условию  $(A\varphi, \varphi) \geq 0$  для всех  $\varphi$ , тогда существует  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ), такое, что для каждого  $\alpha \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \beta$  оператор  $I + \tau_2 A$  имеет обратный и  $\|(I - \tau_1 A)(I + \tau_2 A)^{-1}\| < \gamma$ . Если оператор  $A$  ограничен и  $(A\varphi, \varphi) > 0$ , то  $\gamma < 1$ .*

**Доказательство.** Существование оператора  $(I + \tau_2 A)^{-1}$  следует непосредственно из условия  $(A\varphi, \varphi) \geq 0$ . Обозначим

$$Q = (I - \tau_1 A)(I + \tau_2 A)^{-1}; \quad \psi = (I + \tau_2 A)^{-1}\varphi, \quad (11.22.15)$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} \|Q\|^2 &= \sup_{\varphi \neq 0} \frac{(Q\varphi, Q\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \sup_{\psi \neq 0} \frac{((I - \tau_1 A)\psi, (I - \tau_1 A)\psi)}{((I + \tau_2 A)\psi, (I + \tau_2 A)\psi)} = \\ &= \sup_{\psi \neq 0} \frac{(\psi, \psi) - 2\tau_1(A\psi, \psi) + \tau_1^2(A\psi, A\psi)}{(\psi, \psi) + 2\tau_2(A\psi, \psi) + \tau_2^2(A\psi, A\psi)} \leq \gamma. \end{aligned} \quad (11.22.16)$$

Очевидно, что если оператор  $A$  ограничен и  $(A\psi, \psi) > 0$ , то при всех  $\alpha \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \beta$  выполняется неравенство  $\gamma < 1$ . Из лемм 11.22.1—11.22.5 следует, что операторы  $\Lambda_1, \Lambda'_1, \Lambda_2, \Lambda'_2$  удовлетворяют условиям леммы 11.22.6.

**Лемма 11.22.7.** При всех  $0 < \tau < \infty$

$$\|R\| = \|(I - \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}(I - \tau\Lambda_1)(I + \tau\Lambda_1)^{-1}\| < 1 \quad (11.22.17)$$

на классе функций  $\tilde{D}_0$ ,

$$\|R'\| = \|(I - \tau\Lambda_2')(I + \tau\Lambda_2')^{-1}(I - \tau\Lambda_1')(I + \tau\Lambda_1')^{-1}\| < 1 \quad (11.22.18)$$

на классе функций  $D_0$ .

**Доказательство.** Докажем первое неравенство. Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем  $\|(I - \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}(I - \tau\Lambda_1)(I + \tau\Lambda_1)^{-1}\| \leq \|(I - \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\| \|(I - \tau\Lambda_1)(I + \tau\Lambda_1)^{-1}\|$ . В силу леммы 11.22.6, учитывая свойства оператора  $\Lambda_1$ , имеем  $\|(I - \tau\Lambda_1)(I + \tau\Lambda_1)^{-1}\| \leq 1$ . Рассмотрим норму  $\|(I - \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\| \equiv \|C\|$ . При  $\Sigma_0 > 0$  оператор  $\Lambda_2$  ограничен и положительно определен, поэтому  $\|(I - \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\| < 1$ , что доказывает неравенство. Рассмотрим случай  $\Sigma_0 = 0$ . При этом оператор положительно полуопределен. Согласно лемме 11.22.6,  $\|C\| = 1$ . По определению нормы в  $L_2$  имеем

$$\begin{aligned} \|C\| &= \sup_{\|\varphi\| \neq 0} \frac{\|C\varphi\|}{\|\varphi\|} = \\ &= \sup_{\|\varphi\| \neq 0} \frac{((I - \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\varphi, (I - \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \\ &= \sup_{\|\psi\| \neq 0} \frac{(\psi, \psi) - 2\tau(\Lambda_2\psi, \psi) + \tau^2(\Lambda_2\psi, \Lambda_2\psi)}{(\psi, \psi) + 2\tau(\Lambda_2\psi, \psi) + \tau^2(\Lambda_2\psi, \Lambda_2\psi)}. \end{aligned}$$

Из полученного соотношения следует, что равенство нормы единице может быть только в случае  $(\Lambda_2, \psi, \psi) = 0$ . В силу свойств оператора  $\Lambda_2$  это эквивалентно уравнению

$$\Lambda_2\psi = 0. \quad (11.22.19)$$

Проанализируем пространство решений этого уравнения. При  $\Sigma_0 = 0$  имеем  $\Sigma_s(\psi - S\psi) = 0$ . Учитывая, что  $\Sigma_s \neq 0$ , получаем  $\psi - S\psi = 0$ , т. е.  $\psi(x, \Omega) = \psi(x)$ . Таким образом, пространство решений уравнения (11.22.19) не принадлежит классу  $\tilde{D}_0$ , если  $\psi(x)|_{\Gamma} \neq 0$ . Случай  $\psi(x)|_{\Gamma} \equiv 0$  требует дополнительного исследования. Аналогично доказывается второе неравенство.

Основываясь на леммах 11.22.6 и 11.22.7, докажем следующую теорему.

**Теорема 11.22.1.** При любом начальном приближении  $\varphi^0 \in \tilde{D}_0$ ,  $0 < \tau < \infty$ ,  $0 < a \leq 2$  метод (11.22.13) сходится в  $L_2$  к единственному решению задачи (11.22.11).

**Доказательство.** Проводя тождественные преобразования, перепишем уравнение (11.22.13) в виде

$$\varphi^{k+1} = T\varphi^k + g, \quad (11.22.20)$$

где  $T = (1 - a/2)I + (a/2)P$ ;  $P = (I + \tau\Lambda_1)^{-1}(I + \tau\Lambda_2)^{-1}(I - \tau\Lambda_2) \times (I - \tau\Lambda_1)$ ;  $g = a\tau(I + \tau\Lambda_1)^{-1}(I + \tau\Lambda_2)^{-1}f$ . Очевидно, что  $T$  является

линейным преобразованием и отображает множество  $\tilde{D}_0$  в себя. Пусть  $\varphi \in \tilde{D}_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|T\varphi\|_1 &= \|(I + \tau\Lambda_1)T\varphi\| = \|[ (1 - a/2)(I + \tau\Lambda_1) + (a/2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1} \times \\ &\times (I - \tau\Lambda_2)(I - \tau\Lambda_1)(I + \tau\Lambda_1)^{-1}(I + \tau\Lambda_1) ]\varphi\| \leq \| (1 - a/2)I + \\ &+ (a/2)(I + \tau\Lambda_2)^{-1}(I - \tau\Lambda_2)(I - \tau\Lambda_1)(I + \tau\Lambda_1)^{-1} \| \| (I + \tau\Lambda_1)\varphi \| = \\ &= \| (1 - a/2)I + aR/2 \| \cdot \|\varphi\|_1. \end{aligned} \quad (11.22.21)$$

В силу леммы 11.22.7 получим  $\|T\|_1 \leq \| (1 - a/2)I + aR/2 \| < 1$  при  $0 < a \leq 2$ . Отсюда следует сходимость. Поскольку оператор  $T$  является сжатием с областью определения, плотной в  $L_2$ , метод (11.22.13) сходится к решению задачи (11.22.11). Теорема доказана.

Все доказательства мы проводили для уравнения переноса с изотропным рассеянием. Легко видеть, что доказательства остаются в силе при  $g = g(\mu_0) \neq 1$ . Действительно, в предположении неизотропности рассеяния справедлива

**Лемма 11.22.8.** *Оператор*

$$\Lambda = \Sigma I - \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_{\Omega} g(\mu_0) d\Omega' \quad (11.22.22)$$

положительно определен при  $\Sigma_0 > 0$  и положительно полуопределен при  $\Sigma_0 = 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} (\Lambda_2 \varphi, \varphi) &= \int_{D \times \Omega} \Sigma(x) \varphi^2(x, \Omega) d\Omega dx - \\ &- \int_{D \times \Omega} \Sigma_s(x) \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} g(\mu_0) \varphi(x, \Omega') d\Omega' \right] \varphi(x, \Omega) d\Omega dx. \end{aligned}$$

Применяя ко второму интегралу неравенство Коши — Буняковского и учитывая условие нормировки индикатрисы, получаем  $(\Lambda_2 \varphi, \varphi) \geq \Sigma_0 \|\varphi\|^2$  ( $\Sigma_0 \geq 0$ ). Полученное неравенство доказывает лемму. Следствием зависимости функции  $g(\mu_0)$  лишь посредством  $\mu_0$  является самосопряженность оператора  $\Lambda_2$ .

Полагая  $\tau = \nu \Delta t$ , видим, что алгоритм (11.22.13) при  $a = 2$  применим для решения задачи (11.22.1) — (11.22.3). При этом оператор  $T = (I + \tau\Lambda_1)^{-1}(I + \tau\Lambda_2)^{-1}(I - \tau\Lambda_2)(I - \tau\Lambda_1)$  является оператором шага. Область определения оператора плотна в  $L_2(D \times \Omega)$ . Выполнение неравенства  $\|T\| < 1$  при любом  $\tau > 0$  обеспечивает равномерную ограниченность семейства операторов при всех  $j > 0$ . Кроме этого, при выполнении условий леммы 11.22.6 имеет место неравенство  $\|(I + \tau\Lambda_1)^{-1}(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\| \leq \|(I + \tau\Lambda_1)^{-1}\| \cdot \|(I + \tau\Lambda_2)^{-1}\| < 1$  при любом  $0 < \tau < \infty$ ,  $\varphi \in \tilde{D}_0$ . Указанные свойства оператора  $T$  гарантируют устойчивость счета. Непосредственная проверка показывает, что имеется аппроксимация по  $t$ . Тогда по теореме эквивалентности получим сходимость расщепленной задачи (11.22.11) к решению нестационарной задачи (11.22.1) — (11.22.3).

При практической реализации алгоритмов численного решения кинетического уравнения методом расщепления возможны различные схемы и их модификации. Общие принципы построения таких схем и постановки граничных условий для схем расщепления обсуждаются в работе [171]. Применим метод (10.12.15):

$$(I + \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_1)(\varphi^{k+1} - \varphi^k) = -a\tau(\Lambda\varphi^k - f). \quad (11.22.23)$$

Введем вспомогательные функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и представим уравнение (11.22.23) в виде системы уравнений:

$$(I + \tau\Lambda_2)\varphi_1^{k+1} = a\tau r^k; \quad (I + \tau\Lambda_1)\varphi_2^{k+1} = \varphi_1^{k+1}; \quad \varphi^{k+1} = \varphi^k + \varphi_2^{k+1}, \quad (11.22.24)$$

где  $r^k = f - A\varphi^k$  — невязка. Интегрируя первое уравнение (11.22.24) по всем направлениям  $\Omega$ , получаем

$$(1 + \tau\Sigma_0)\varphi_1^k = a\tau r_0^k. \quad (11.22.25)$$

После этого из (11.22.24) с использованием уравнения (11.22.25) находим

$$\varphi_1^{k+1} = \frac{a\tau}{1 + \tau\Sigma} \left[ \frac{\Sigma_0 r_0^k}{4\pi(1 + \tau\Sigma_0)} + r^k \right]. \quad (11.22.26)$$

Второе уравнение (11.22.24) с граничными условиями решается как соответствующая краевая задача для дифференциального уравнения. Задачу для него можно записать в виде

$$\Omega\nabla\psi + \psi/\tau = g/\tau; \quad \psi|_{\Gamma} = 0; \quad \Omega n < 0, \quad (11.22.27)$$

где  $\psi = \varphi_2^{k+1}$ ;  $g = \varphi_1^{k+1}$ .

Введем в рассмотрение формальный параметр  $\xi$  и задачу (11.22.27) дополним следующей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\xi} + \Omega_1 \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial z} = 0; \\ \tilde{\psi}|_{\xi=0} = g/\tau, \quad \tilde{\psi}|_{\Gamma} = 0, \quad \Omega n < 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.22.28)$$

Нетрудно убедиться, что решением задачи (11.22.27) является функция

$$\psi = \int_0^{\infty} \tilde{\psi} \exp(-\xi/\tau) d\xi. \quad (11.22.29)$$

Уравнение (11.22.28) допускает расщепление на одномерные задачи. С этой целью интервал  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  разобьем на частичные интервалы шириной  $\Delta\xi = \xi_{p+1} - \xi_p$ .

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial\xi} + \Omega_1 \frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x} = 0, \quad \tilde{\psi}_1^p = \tilde{\psi}^p; \\ \frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial\xi} + \Omega_2 \frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial y} = 0, \quad \tilde{\psi}_2^p = \tilde{\psi}_1^{p+1}; \\ \frac{\partial\tilde{\psi}_3}{\partial\xi} + \Omega_3 \frac{\partial\tilde{\psi}_3}{\partial z} = 0; \quad \tilde{\psi}_3^p = \tilde{\psi}_2^{p+1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.22.30)$$

Решение задачи (11.22.28)  $\tilde{\psi}^{p+1}$  найдется из соотношения  $\tilde{\psi}^{p+1} = \tilde{\psi}_3^{p+1}$ . Полученная система дифференциальных уравнений (11.22.30) в частных производных позволяет найти решение задачи (11.22.28) на системе точек  $\xi_h$ . Продолжение искомого решения на всю область проводится с помощью подходящих квадратурных формул.

Для оценки сходимости на периодической задаче (11.1.4) исследуем несколько модифицированный метод. Модификация заключается в том, что метод простой итерации (операцию  $K$ ) будем чередовать с методом расщепления (принимая, таким образом, этот метод за операцию  $P_1$ ). При таком способе итераций удается сравнительно просто получить рекуррентные соотношения между нулевыми моментами последовательных приближений, ибо в этом случае ошибка после операции  $K$  принадлежит классу функций вида (11.1.15). Поскольку операция  $K$  сама уменьшает ошибку, то, получив формулы для ошибки предлагаемого метода, найдем оценку снизу для скорости сходимости метода расщепления.

Операторы  $\Lambda_1, \Lambda_2$  для  $n$ -го коэффициента Фурье  $u_n$  определим как

$$\Lambda_1 = l^2 (n\Omega)^2 + 1 - c; \Lambda_2 = c (1 - S). \quad (11.22.31)$$

Выполняя операцию  $K$  (11.1.11), получаем  $u^{k+1/2}$ , где, как всегда,  $f_{0n} = Sf_n$ , а применяя метод расщепления, находим  $u^{k+1}$  из формулы

$$(I + \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_1)u^{k+1} = (I - \tau\Lambda_2)(I - \tau\Lambda_1)u^{k+1/2} + 2\tau F. \quad (11.22.32)$$

Получим формулы для ошибки  $\eta^\alpha(x, \Omega)$  в методе (11.1.11), (11.22.32) Для этого в (11.1.11), (11.22.32) положим  $F = 0$ :

$$\eta_n^{k+1/2} = (I + l^2 (n\Omega)^2)^{-1} c e_n^k; \quad (11.22.33)$$

$$(I + \tau\Lambda_2)(I + \tau\Lambda_1)\eta_n^{k+1} = (I - \tau\Lambda_2)(I - \tau\Lambda_1)\eta_n^{k+1/2}.$$

Учитывая (11.22.31), получаем

$$[I + \tau c (I - S)][I + \tau (l^2 (n\Omega)^2 + I - c)]\eta_n^{k+1} = f_n^{k+1/2}, \quad (11.22.34)$$

где

$$f_n^{k+1/2} = [I - \tau c (I - S)][I - \tau (l^2 (n\Omega)^2 + I - c)]\eta_n^{k+1/2}. \quad (11.22.35)$$

Введем функцию  $\psi_n^{k+1}$ , определяемую равенством

$$[I + \tau (l^2 (n, \Omega)^2 + I - c)]\eta_n^{k+1} = \psi_n^{k+1}. \quad (11.22.36)$$

Тогда

$$[I + \tau c (I - S)]\psi_n^{k+1} = f_n^{k+1/2}. \quad (11.22.37)$$

Уравнение (11.22.37) — интегральное с вырожденным ядром; его решение находится известным способом. Применяя к (11.22.37) оператор  $S$  и учитывая, что  $S^2 = S$ , получаем  $\psi_{0n}^{k+1} = f_{0n}^{k+1/2}$ , а значит,  $\psi_n^{k+1} = (1 + \tau c)^{-1} (f_n^{k+1/2} + \tau c f_{0n}^{k+1/2})$ . Из (11.22.36) получаем

$$\eta_n^{k+1} = (1 + \tau c)^{-1} [1 + \tau (l^2 (n\Omega)^2 + I - c)]^{-1} (f_n^{k+1/2} + \tau c f_{0n}^{k+1/2}). \quad (11.22.38)$$

Но так как из (11.22.35), (11.22.34) следует, что

$$f_n^{k+1/2} + \tau c f_{0n}^{k+1/2} = c(1 - \tau c + 2\tau c S) [1 - \tau(l^2(\mathbf{n}\Omega)^2 + 1 - c)] \times \\ \times (1 + l^2(\mathbf{n}\Omega)^2)^{-1} \varepsilon_n^k,$$

то из (11.22.38) находим соотношение между  $\eta_n^{k+1}$  и  $\varepsilon_n^k$ , применяя к которому оператор  $S$ , получаем  $\varepsilon_n^{k+1} = cT(l|\mathbf{n}|)\varepsilon_n^k$ , где

$$T(l|\mathbf{n}|) = (1 + \tau c)^{-1} S [(1 + \tau(l^2(\mathbf{n}\Omega)^2 + 1 - c))^{-1} [1 - \tau c) + \\ + 2\tau c S] [1 - \tau(l^2(\mathbf{n}\Omega)^2 + 1 - c)(1 + l^2(\mathbf{n}\Omega)^2)^{-1}]. \quad (11.22.39)$$

Обозначим  $t = l|\mathbf{n}|$  и применим формулы суммирования по сфере (5.1.36). Тогда

$$T(t) = \frac{1 - \tau c}{1 + \tau c} \int_0^1 [1 + \tau(t^2 \mu^2 + 1 - c)]^{-1} [1 - \tau(t^2 \mu^2 + 1 - c)] \times \\ \times (1 + t^2 \mu^2)^{-1} d\mu + \frac{2\tau c}{1 + \tau c} \int_0^1 [1 + \tau(t^2 \mu^2 + 1 - c)]^{-1} d\mu \times \\ \times \int_0^1 [1 - \tau(t^2 \mu^2 + 1 - c)] (1 + t^2 \mu^2)^{-1} d\mu.$$

Вычисляя интегралы, находим

$$T(t) = r(t) - \frac{2\tau[1 - cr(t)]}{1 + \tau(1 - c)} r \left[ t \sqrt{\frac{\tau}{1 + \tau(1 - c)}} \right]. \quad (11.22.40)$$

Исследуем поведение функции  $T(t)$  при фиксированном значении  $\tau > 0$  и  $c \rightarrow 1-0$ . Предельная функция  $T_1(t) = \lim_{c \rightarrow 1-0} T(t)$  имеет вид

$T_1(t) = r(t) - 2\tau[1 - r(t)]r(t\sqrt{\tau})$ . Очевидно, что  $T_1(t) < r(t) \leq 1$ ,  $T_1(0) = 1$  и  $T_1 > 1 - \varepsilon$  при достаточно малых  $t > 0$ , где  $\varepsilon > 0$  — любое наперед заданное число. Проверим, выполняется ли условие  $T_1(t) > -1$ . Оно эквивалентно требованию

$$(1 + r(t))/(1 - r(t)) > 2\sqrt{\tau} t^{-1} \operatorname{arctg} t\sqrt{\tau}. \quad (11.22.41)$$

Зафиксируем некоторое  $t > 0$ . Тогда найдутся такие достаточно большие  $\tau > 0$ , что условие (11.22.41) выполнено не будет, а тогда  $T_1(t) < -1$ .

Подводя итог проведенному анализу, можно сделать следующее заключение: а) если метод расщепления сходится при некотором фиксированном  $\tau > 0$ , то его сходимость замедляется при  $c \rightarrow 1-0$ ; б) существуют такие достаточно большие  $\tau > 0$ , что метод расщепления при значениях  $c$ , достаточно близких к единице, расходится.

Потребуем теперь, чтобы метод был балансным, т. е. чтобы нулевая гармоника определялась им точно [ $T(0) = 0$ ]. Тогда получим  $\tau = (1 - c)^{-1}$ , а

$$T(t) = r(t) - \frac{1 - cr(t)}{(1 - c)^{1/2}} t^{-1} \operatorname{arctg} [t(1 - c)^{-1/2}]. \quad (11.22.42)$$

Зафиксируем любое  $t > 0$ . Из (11.22.42) видим, что для любого  $M > 1$  найдется  $\delta = \delta(t) > 0$ , такое, что  $-T(t) > M$  при  $0 < 1 - c < \delta(t)$ ,  $t > 0$ . Это значит, что балансный метод расщепления расходится при значениях  $c$ , достаточно близких к единице.

Итак, найден метод, который сходится для краевой задачи, рассматриваемой в начале параграфа, и расходится на периодических задачах при достаточно близких к единице значениях  $c$ . Этот факт является достаточно убедительным аргументом в пользу того, что периодическая задача является серьезным испытанием для итерационных методов. Исследуя в § 11.23 аналогичный метод для несамосопряженного уравнения, убедимся, что для него расходимости нет. Таким образом, здесь имеется полная аналогия с методом итерационных отклонений (см. § 11.3), примененным к самосопряженному и не самосопряженному уравнениям.

### § 11.23. О НЕКОТОРЫХ МОНОТОННЫХ СХЕМАХ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Для кинетического уравнения переноса Г. И. Марчуком и У. М. Султангазиным [173, 224] предложены монотонные схемы расщепления, при которых решения остаются в классе положительных функций. Рассмотрим эти схемы применительно к кинетическому уравнению для плоской геометрии (11.5.1) при следующих условиях:

$$\varphi(0, \mu) = 0, \mu > 0; \quad \varphi(H, \mu) = 0, \mu < 0. \quad (11.23.1)$$

Введем операторы

$$\Lambda_1 = \mu \frac{\partial}{\partial x}; \quad \Lambda_2 = \Sigma I - \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 d\mu. \quad (11.23.2)$$

При этом уравнение (11.5.1) запишется в виде (11.22.11). Обозначим  $D(\Lambda_1)$  область определения оператора  $\Lambda_1$ . Здесь  $D(\Lambda_1)$  есть класс функций, суммируемых с квадратом вместе со своими производными первого порядка по  $x$  и удовлетворяющих граничным условиям (11.23.1). Пусть  $f(x, \mu) \in D(\Lambda_1)$ ,  $\Lambda_1 f \in D(\Lambda_1)$ . Тогда задаче (11.5.1), (11.23.1) можно поставить в соответствие нестационарную задачу

$$\partial\psi/\partial t + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = f(x, \mu). \quad (11.23.3)$$

Решение задачи (11.23.3) связано с решением исходной стационарной задачи следующим образом:

$$\varphi(x, \mu) = \int_0^\infty \psi(t, x, \mu) dt. \quad (11.23.4)$$

Оператор  $\Lambda_1$  является производящим оператором сжимающей полугруппы  $S$ . Тогда любое решение  $\psi(t) \in L_2(0, \infty)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(t) = S(t, 0) f - \int_0^{\infty} S(t, \tau) \Lambda_2 \psi(\tau) d\tau. \quad (11.23.5)$$

Для приближенного построения решения последнего уравнения рассмотрим задачу

$$\hat{\psi}(0) = f; \quad \frac{\partial \check{\psi}}{\partial t} + \Lambda_1 \check{\psi} = 0; \quad \check{\psi}(t_k) = \hat{\psi}(t_k) - \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \hat{\psi}(t_k); \quad (11.23.6)$$

$$\hat{\psi}(t_{k+1}) = \check{\psi}(t_{k+1}) - \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \hat{\psi}(t_{k+1}). \quad (11.23.7)$$

На первом шаге в промежутке  $0 \leq t \leq \tau$  решается задача Коши

$$\frac{\partial \check{\psi}}{\partial t} + \Lambda_1 \check{\psi} = 0; \quad \check{\psi}(0) = f(x, \mu) - \frac{\tau}{2} \Lambda_2 f(x, \mu).$$

На втором шаге в этом же промежутке решается интегральное уравнение (11.23.7). Затем процесс определения  $\check{\psi}(t)$ ,  $\hat{\psi}(t)$  повторяется по схеме (11.23.6), (11.23.7). Функция  $\hat{\psi}(t)$ , построенная таким образом, является решением задачи (11.23.6).

Исключая  $\check{\psi}$  из уравнений (11.23.6), (11.23.7), получаем

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(t_{k+1}) = & S(t_{k+1}, t_k) \hat{\psi}(t_k) - \\ & - \frac{\tau}{2} [S(t_{k+1}, t_k) \Lambda_2 \hat{\psi}(t_k) + \Lambda_2 \hat{\psi}(t_{k+1})]. \end{aligned} \quad (11.23.8)$$

С другой стороны, из уравнения (11.23.5) вытекает

$$\psi(t_{k+1}) = S(t_{k+1}, t_k) \psi(t_k) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S(t_{k+1}, \tau) \Lambda_2 \psi(\tau) d\tau. \quad (11.23.9)$$

Сравнивая (11.23.8) и (11.23.9), можно установить, что уравнение (11.23.6) имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Теперь исследуем устойчивость решения задачи (11.23.6). Для этого (11.23.8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(t_{k+1}) = & S(t_{k+1}, t_k) \left[ \left(1 - \frac{\tau}{2} \Sigma\right) \hat{\psi}(t_k) + \frac{\tau \Sigma_s}{4} \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t_k) d\mu \right] - \\ & - \frac{\tau}{2} \Sigma \hat{\psi}(t_{k+1}) + \frac{\tau \Sigma_s}{4} \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t_{k+1}) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(1 + \tau \Sigma / 2) \hat{\psi}(t_{k+1}) = (1 - \tau \Sigma / 2) S(t_{k+1}, t_k) \hat{\psi}(t_k) +$$



$$+ \frac{\tau \Sigma_s}{4} S(t_{k+1}, t_k) \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t_k) d\mu + \frac{\tau \Sigma_s}{4} \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t_{k+1}) d\mu. \quad (11.23.10)$$

Проинтегрировав последнее уравнение по  $\mu$ , находим

$$\int_{-1}^1 \hat{\psi}(t_{k+1}) d\mu = \frac{1}{1 + \tau \Sigma_0/2} \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{2} \Sigma\right) \int_{-1}^1 S(t_{k+1}, t_k) \hat{\psi}(t_k) d\mu + \right. \\ \left. + \frac{\tau \Sigma_s}{4} \int_{-1}^1 S(t_k, t_{k+1}) \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t_k) d\mu d\mu \right\}. \quad (11.23.11)$$

Подставив (11.23.11) в (11.23.10), окончательно получим

$$\hat{\psi}(t_{k+1}) = \frac{1}{1 + \tau \Sigma/2} \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{2} \Sigma\right) S(t_{k+1}, t_k) \hat{\psi}(t_k) + \frac{\tau \Sigma_s}{4} S(t_{k+1}, t_k) \times \right. \\ \times \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t_k) d\mu + \frac{\tau \Sigma_s}{4(1 + \tau \Sigma_0/2)} \left[ \left(1 - \frac{\tau}{2} \Sigma\right) \times \right. \\ \left. \times \int_{-1}^1 S(t_{k+1}, t_k) \hat{\psi}(t_k) d\mu + \frac{\tau \Sigma_s}{4} \int_{-1}^1 \hat{\psi}(t_k) d\mu \int_{-1}^1 S(t_{k+1}, t_k) d\mu \right] \left. \right\}.$$

Если  $\tau \leq 2/\Sigma$  и  $f(z, \mu) \geq 0$ , то  $\hat{\psi}(t)$  всегда остаются в классе неотрицательных функций. При этом имеем

$$\|\hat{\psi}(t_{k+1})\| \leq \frac{1 - \tau \Sigma_0/2}{1 + \tau \Sigma_0/2} \|S(t_{k+1}, t_k)\| \cdot \|\hat{\psi}(t_k)\|. \quad (11.23.12)$$

Из устойчивости решения и аппроксимации (11.23.6) следует сильная сходимость  $\hat{\psi}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  к решению задачи (11.23.3).

Укажем еще один способ решения задачи (11.5.1), (11.23.1). Рассмотрим следующую схему расщепления:

$$(I + \tau \Lambda_2) \varphi^{k+1/2} = (I - \tau \Lambda_2) \varphi^k + \tau f/2; \\ (I + \tau \Lambda_1) \varphi^{k+1} = (I - \tau \Lambda_1) \varphi^{k+1/2} + \tau f/2. \quad (11.23.13)$$

Метод (11.23.13) сходится при любом  $\tau > 0$ , причем  $\varphi^{k+1} + \varphi^{k+1/2} \rightarrow \varphi$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $\varphi$  — точное решение задачи (11.5.1), (11.23.1) [173, 224]. Его можно записать в несколько иной форме:

$$(I + \tau \Lambda_2) \psi^{k+1/2} = 2\varphi^k + \tau f/2; \\ (I + \tau \Lambda_1) \psi^{k+1} = 2(\psi^{k+1/2} - \varphi^k) + \tau f/2; \\ \varphi^{k+1} = \psi^{k+1} - (\psi^{k+1/2} - \varphi^k). \quad (11.23.14)$$

При этом  $\psi^{k+1} \rightarrow \varphi$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Метод расщепления в виде (11.23.14) содержит операторы  $\Lambda_1, \Lambda_2$  только в неявной форме. Поэтому для реализации данной схемы потребуется меньшее количество арифметических операций по сравнению с обычными четырехслойными схемами расщепления. Следует

отметить, что при некоторых ограничениях на  $\tau$  можно добиться монотонности схемы.

На  $2\pi$ -периодической задаче для уравнения

$$i\Omega \nabla \varphi + \varphi = cS \varphi + f$$

с постоянными  $l$  и  $c$  исследуем сходимость  $KP_1$ -метода, в котором в качестве операции  $P_1$  взята схема расщепления (11.23.14). В (11.23.14) можно с помощью тождественных преобразований исключить функцию  $\varphi^k$ . Тогда для функций  $\psi^{k+1}$ ,  $\psi^k$  получим уравнение

$$(1 + \tau\Lambda_2)(1 + \tau\Lambda_1)\psi^{k+1} = (1 - \tau\Lambda_2)(1 - \tau\Lambda_1)\psi^k + 2\tau f, \quad (11.23.15)$$

где  $\Lambda_2 = I - cS$ ,  $\Lambda_1 = i\Omega \nabla$ .

Проследим за поведением ошибки  $\eta^\alpha = \varphi - \psi^\alpha$  и нулевого момента  $\varepsilon^\alpha$ . Пусть  $\psi^k$ ,  $\varepsilon^k$  заданы. Тогда после операции  $K$  получаем

$$\eta_n^{k+1/2} = c(1 + i/n\Omega)^{-1} \varepsilon_n^k; \quad \varepsilon_n^{k+1/2} = cr(t) \varepsilon_n^k; \quad t = l|n|. \quad (11.23.16)$$

Если результат операции  $K$  использовать в уравнении (11.23.15), подставив его вместо функции  $\psi^k$ , и найти таким способом функцию  $\psi^{k+1}$ , то уравнение, связывающее ошибки  $\eta^{k+1}$  и  $\eta^{k+1/2}$ , будет иметь вид

$$(1 + \tau\Lambda_2)(1 + \tau\Lambda_1)\eta^{k+1} = (1 - \tau\Lambda_2)(1 - \tau\Lambda_1)\eta^{k+1/2}. \quad (11.23.17)$$

Найдем  $\eta^{k+1}$  из уравнения (11.23.17), считая, что  $\eta^{k+1/2}$  задано формулой (11.23.16). Имеем  $(1 - \tau\Lambda_2)(1 - \tau\Lambda_1)\eta^{k+1/2} = \psi_1$ , где

$$\psi_{1n} = [(1 - \tau)(1 + \tau)/(1 + i/n\Omega) - \tau(1 - \tau) + \tau c(1 + \tau)r(t) - \tau^2 c] c \varepsilon_n^k.$$

Пусть

$$\psi_2 = (1 + \tau\Lambda_1)\eta^{k+1}. \quad (11.23.18)$$

Тогда

$$(1 + \tau(1 - cS))\psi_2 = \psi_1. \quad (11.23.19)$$

Уравнение (11.23.19) — интегральное уравнение с вырожденным ядром. Его решение имеет вид

$$\psi_{2n} = \frac{c\varepsilon_n^k}{1 + \tau} \left[ \frac{(1 - \tau)(1 + \tau)}{1 + i/n\Omega} - \tau(1 - \tau) + \frac{2\tau c((1 + \tau)r(t) - \tau)}{1 + \tau(1 - c)} \right].$$

Наконец, решая уравнение (11.23.18), находим  $\eta^{k+1}$ , а по  $\eta^{k+1}$  вычисляем  $\varepsilon^{k+1}$ :

$$\varepsilon_n^{k+1} = cT(l|n|)\varepsilon_n^k;$$

$$T(t) = r(t) - 2\tau[1 - cr(t)]r(\tau t)/(1 + \tau(1 - c)). \quad (11.23.20)$$

Сначала исследуем поведение функции  $T(t)$  при фиксированном значении  $\tau > 0$  и  $c \rightarrow 1 - 0$ . Предельная функция  $T_1(t) = \lim_{c \rightarrow 1-0} T(t)$

имеет вид  $T_1(t) = r(t) - 2\tau[1 - r(t)]r(\tau t)$ . Видно, что при достаточно малых  $t$  функция  $T_1(t)$  близка к единице, а  $T(0) = 1$ . Следовательно, сходимость метода замедляется при  $c \rightarrow 1 - 0$  и при любом фиксированном значении  $\tau > 0$ .

Потребуем теперь, чтобы при  $0 < c < 1$  метод был балансным, т. е. чтобы  $T(0) = 0$ . Из последнего требования получим, что на  $\tau$  и  $c$  должна быть наложена связь  $\tau = (1 - c)^{-1}$ . Исследуем поведение функции  $T(t)$  при этом условии:

$$T(t) = r(t) - [1 - cr(t)] t^{-1} \operatorname{arctg}(t/(1 - c)). \quad (11.23.21)$$

Из (11.23.21) следует, что

$$T_2(t) = \lim_{c \rightarrow 1-0} T(t) = \begin{cases} 0, & t=0; \\ r(t) - \frac{\pi}{2} [1 - r(t)] t^{-1}, & t > 0. \end{cases} \quad (11.23.22)$$

Формула (11.23.22) показывает, что при достаточно малых  $t > 0$   $T_2(t) > 1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — любое наперед заданное число. С другой стороны,  $|T_2| \leq 1$ . В самом деле,  $T_2(t) < r(t)$ , а если заменить в (11.23.22) функцию  $r(t)$  меньшей  $3/(3 + t^2)$ , то нетрудно получить для  $T_2(t)$  оценку снизу  $-1 < -\sqrt{9 + 3\pi^2}/(6(1 + 3/\pi^2 + (1/\pi) \times \sqrt{9 + 3\pi^2})) < T_2(t)$ . Следовательно, метод при  $\tau = (1 - c)^{-1}$  сходится, но его сходимость замедляется при  $c \rightarrow 1-0$ .

#### § 11.24. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В настоящем параграфе изложены результаты Ю. А. Кузнецова [105, 107, 108] по применению обобщенного метода сопряженных градиентов для решения систем сеточных уравнений

$$Au = f, \quad (11.24.1)$$

построенных в § 9.5. Используя свойства матрицы  $A$  системы (11.24.1), сформулированные в § 9.5, укажем конкретные способы выбора матриц  $D$  и  $H$ , которые обеспечивают  $A^T D A$  — самосопряженность и положительную определенность матрицы  $HA$  в пространстве  $U = (I - HA) E_n$ .

1. **Общий случай.** Используя разложение (9.5.30) (9.5.31), выберем  $D = H = \tilde{L}^{-1}$  и покажем, что матрица  $\tilde{L}^{-1}$  является самосопряженным оператором в пространстве  $U_A = (I - AH) E_n = \tilde{S} \tilde{L}^{-1} E_n = \tilde{S} E_n$  (положительная определенность  $\tilde{L}^{-1}$  в  $U_A$  следует из положительной определенности  $\tilde{L}^{-1}$  в пространстве  $E_n$ ), установим  $A^T D A$  — самосопряженность и положительную определенность матрицы  $AH = I - L^{-1} \tilde{S}$  в пространстве  $U$ .

Действительно, так как  $\tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S}$  — симметричная матрица (см. § 9.5), то для всех  $\psi = \tilde{S}v$ ,  $\varphi = \tilde{S}w$  из  $U_A$  ( $v, w$  — некоторые векторы из  $E_n$ ) имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{L}^{-1} \psi, \varphi) &= (\tilde{L}^{-1} \tilde{S}v, \tilde{S}w) = (\tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S}v, w) = (v, \tilde{S} \tilde{L}^{-1} \tilde{S}v, w) = \\ &= (\tilde{S}v, \tilde{L}^{-1} S w) = (\psi, \tilde{L}^{-1} \varphi) \end{aligned} \quad (11.24.2)$$

и, следовательно,  $\tilde{L}^{-1}$  является самосопряженным оператором в  $U_A$ .  
 Для доказательства  $A^TDA$ -самосопряженности и положительной определенности матрицы  $HA$  в пространстве  $U$  достаточно показать, что матрица  $AH$  является  $D$ -самосопряженным и положительно определенным оператором в пространстве  $U_A$ . Пусть  $\varphi = \tilde{S}v$  и  $\psi = \tilde{S}w$  — некоторые произвольные векторы пространства  $U_A$  ( $v, w \in E_n$ ). Тогда так как матрицы  $\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}$  и  $\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}$  симметричны, то

$$\begin{aligned} (\tilde{A}\tilde{L}^{-1}\psi, \varphi)_{\tilde{L}^{-1}} &= (\tilde{L}^{-1}(I - \tilde{S}\tilde{L}^{-1})\psi, \varphi) = (\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}v, w) - \\ &- (\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}v, w) = (v, S(\tilde{L}^{-1} - \tilde{L}^{-1}\tilde{S}\tilde{L}^{-1})\tilde{S}w) = (\psi, AH\varphi)_{\tilde{L}^{-1}} \end{aligned} \quad (11.24.3)$$

и, следовательно, матрица  $AH$  является  $\tilde{L}^{-1}$ -самосопряженным оператором в пространстве  $U_A$ . Из доказанного и инвариантности пространства  $U_A$  относительно матрицы  $I - AH = \tilde{S}\tilde{L}^{-1}$  вытекает, что  $U_A$  является линейной оболочкой  $D\tilde{L}^{-1}$  — ортонормированной системы собственных векторов  $\tilde{\psi}_r, \dots, \tilde{\psi}_1$  матрицы  $\tilde{S}\tilde{L}^{-1}$ , соответствующих ее собственным числам  $\mu_r \leq \dots \leq \mu_1 < 1$  (последнее неравенство доказано в конце § 9.5), где  $r = rg\tilde{S}$ .

Таким образом, для любого  $\varphi \in U_A$  выполняется неравенство

$$(AH\varphi, \varphi)_D \geq (1 - \lambda_1)(\varphi, \varphi)_D, \quad (11.24.4)$$

и, следовательно, матрица  $AH$  является  $D = \tilde{L}^{-1}$  — положительно определенным оператором в пространстве  $U_A$ .

Таким образом, согласно § 10.11, если использовать дополнительные обозначения  $z_k = \tilde{S}p_k$  и  $y_k = Ap_k$  для выбранных матриц  $D$  и  $H$ , обобщенный метод сопряженных градиентов принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}u^0 &= \tilde{S}\tilde{L}^{-1}\tilde{S}\varphi + \tilde{S}\tilde{L}^{-1}f; \quad \xi^0 = \tilde{S}\tilde{L}^{-1}(A\varphi - f); \\ \tilde{S}u^k &= \tilde{S}u^{k-1} - (1/q_k)[\tilde{S}\tilde{L}^{-1}\xi^{k-1} - e_{k-1}(\tilde{S}u^{k-1} - \tilde{S}u^{k-2})]; \\ \xi^k &= \xi^{k-1} - (1/q_k)[(I - \tilde{S}\tilde{L}^{-1})\xi^{k-1} - e_{k-1}(\xi^{k-1} - \xi^{k-2})]; \\ e_{k-1} &= \begin{cases} 0 & k=1; \\ q_{k-1} \frac{\|\xi^{k-1}\|_C^2}{\|\xi^{k-2}\|_C^2}, & k>1; \end{cases} \\ q_k &= \frac{\|(I - \tilde{S}\tilde{L}^{-1})\xi^{k-1}\|_{\tilde{L}^{-1}}^2}{\|\xi^{k-1}\|_C^2} - e_{k-1}, \quad k=1, \dots, k_\varepsilon; \\ u^{k_\varepsilon+1} &= \tilde{L}^{-1}(\tilde{S}u^{k_\varepsilon} + f), \end{aligned} \right\} \quad (11.24.5)$$

где  $Ce = \tilde{L}^{-1} - \tilde{L}^{-1}\tilde{S}\tilde{L}^{-1}$  — самосопряженная и положительно определенная в пространстве  $U_A$  матрица.

Рассмотрим на примере системы (11.24.1), возникающей при аппроксимации кинетического уравнения для сферической геометрии,

некоторые вопросы практической реализации предлагаемого метода. Нетрудно видеть, что поскольку матрица  $\tilde{L}$  является блочной нижней треугольной матрицей с диагональными блоками порядка  $m$ , то при произвольной индикатрисе рассеяния  $g = g(r, \mu_0)$  каждый шаг метода (11.24.5) требует  $D(Nm^3)$  арифметических действий. Если же индикатриса рассеяния четная по переменной  $\mu_0$  функция, т. е.  $g(r, \mu_0) = g(r, -\mu_0)$ , то  $\tilde{L} = L$  и, следовательно, каждый шаг процесса требует только  $O(Nm)$  арифметических действий.

Очень важным на практике является случай, когда индикатриса рассеяния имеет вид

$$g(r, \mu_0) = \sum_{i=0}^t a_i(r) \mu_0^i. \quad (11.24.6)$$

В этом случае

$$g(r, \mu_0) - g(r, -\mu_0) = 2 \sum_{i=1}^{t_0} a_{2i-1} \mu^{2i-1}, \quad (11.24.7)$$

где  $t_0 = [(t+1)/2]$ , и, следовательно, в формуле (9.5.31) ранг матрицы  $C_1 - C_2 = \sum_{i=1}^{t_0} [\hat{\mu}^{2i-1} Q \hat{\mu}^{2i-1}] \otimes \hat{a}_{2i-1}$  не превосходит величины  $Nt_0$ . Здесь

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (11.24.8)$$

— матрица порядка  $m$ , матрица  $\hat{\mu}$  введена в § 9.5 и  $\hat{a}_i = \text{diag} \{a_{i1}, \dots, a_{iN}\}$ ,  $i = \overline{0, t}$ . Нетрудно показать, что для специального вида индикатрисы (11.24.8) общее число арифметических действий на итерацию не превосходит величины  $O(Nmt_0^2)$ , а при неотрицательных коэффициентах  $a_{2i-1}$ ,  $i = \overline{1, t_0}$ , — величины  $O(Nmt_0)$ . При этом общий объем требуемых ячеек памяти ЭВМ, достаточных для реализации процесса, является величиной  $O(Nt_0)$ .

**2. Частный случай.** Предположим, что индикатриса является четной функцией по переменной  $\mu_0$  и матрица  $S$  положительно полуопределена в  $E_n$ . Тогда матрицы  $S$  и  $S^+$ , где  $S^+$  — обобщенная обратная для матрицы  $S$  матрица, являются самосопряженными и положительно определенными операторами в пространстве  $SE_n$ .

Выберем  $H = L^{-1}$  и  $D = S^+$  и покажем, что матрица  $AH$  является  $D$ -самосопряженным и положительно определенным оператором в пространстве  $U_A = (I - AH)E_n = SL^{-1}E_n = SE_n$  и, следовательно, для решения системы (11.24.1) применим обобщенный метод сопряженных градиентов. Так как для четной по переменной  $\mu_0$  индикатрисы

$$S = S_1 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

то матрица  $S$  положительно полуопределена в  $E_n$  только тогда, когда матрица  $S_1$  положительно полуопределена в  $E_{n/2}$ . Нетрудно также видеть, что

$$S^+ = \frac{1}{4} C_1^+ \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad S^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_1^{1/2} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$[S^+]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [S^+]^{1/2} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь поскольку  $S^{1/2} [S^+]^{1/2} \psi = \psi$  для любого  $\psi \in SE_n$ , то

$$\begin{aligned} (AH\psi, \varphi)_{S^+} &= ((I - SL^{-1})\psi, \varphi)_{S^+} = ((I - S^{1/2}L^{-1}S^{1/2})\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}) = \\ &= (\tilde{\psi}, (I - S^{1/2}L^{-1}S^{1/2})\tilde{\varphi}) = (\psi, AH\varphi)_{S^+} \end{aligned} \quad (11.24.9)$$

для любых  $\psi, \varphi \in SE_n$ , где  $\tilde{\psi} = [S^+]^{1/2} \psi$ ,  $\tilde{\varphi} = [S^+]^{1/2} \varphi$  и  $T = I - S^{1/2}L^{-1}S^{1/2}$  — симметричная матрица, чем  $D$ -самосопряженность матрицы  $AH$  в пространстве  $U_A$  доказана. Далее, так как все собственные числа матрицы  $S^{1/2}L^{-1}S^{1/2}$  и  $L^{-1}S$  совпадают, и, согласно § 9.5,  $\rho(L^{-1}S) < 1$ , то матрица  $T$  будет положительно определена в  $E_n$  и, следовательно, матрица  $AL^{-1}$  будет  $S^+$ -положительно определена в пространстве  $U_A$ , причем будет выполняться неравенство

$$(AH\varphi, \varphi)_{S^+} \geq (1 - \rho(L^{-1}S))(\varphi, \varphi)_{S^+}. \quad (11.24.10)$$

Таким образом, для решения системы (11.24.1) применим обобщенный метод сопряженных градиентов с выбранными матрицами  $D = S^+$  и  $H = L^{-1}$ . На первый взгляд основную трудность при реализации формул (11.24.5) составляет участие в вычислении скалярных произведений матрицы  $S^+$ , прямое нахождение которой в общем случае весьма трудоемко. Очень простой эта задача оказывается лишь в случае изотропного рассеяния, когда  $g(\mu_0) \equiv 1/2$  (здесь и далее опять ограничиваемся случаем сферической геометрии). В этом случае  $S_1 = (\Delta_1 \mu Q \otimes \hat{\Sigma}_s)/2$ , где матрица  $Q$  определена в (11.24.8), и нетрудно видеть, что  $S_1^+ = 2\Delta_1 \mu Q \otimes \hat{\Sigma}_s^+$  и, следовательно,

$$S^+ = \frac{1}{4} S_1^+ \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \hat{\Sigma}_s^+ = \text{diag} \{ \Sigma_{sN}^+, \dots, \Sigma_{s1}^+ \}; \quad \Sigma_{st}^+ = \begin{cases} 0, & \text{если } \Sigma_{si} = 0; \\ 1/\Sigma_{si}, & \text{если } \Sigma_{si} \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда, используя соотношения

$$S^+ \psi = \Sigma_s^+ \psi \equiv (\hat{\Sigma}_s^+ \otimes I_N) \otimes I_2 \psi; \quad S^+ S \psi = S S^+ \psi = \psi, \quad (11.24.11)$$

которые выполняются для любого вектора  $\psi \in U_A = SE_n$ , получаем формулы для вычисления, например, коэффициентов  $e_k$  и  $q_k$  из (11.24.5) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}
 e_{k-1} &= \begin{cases} 0 & , k=1; \\ q_k ((\Sigma_s^+ - L^{-1}) \xi^{k-1}, \xi^{k-1}) / ((\Sigma_s^+ - L^{-1}) \xi^{k-1}, \xi^{k-2}), & k > 1; \end{cases} \\
 q_k &= \| \Sigma_s^+ - L^{-1} \xi^{k-1} \|^2 / \| \xi^{k-1} \|^2_{\Sigma_s^+} - e_{k-1} & , k=1, 2, \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (11.24.12)$$

Реализация этих формул уже не вызывает никаких затруднений и требует дополнительно к  $O(Nm)$  арифметических действий, необходимых для вычисления вектора  $SL^{-1} \xi^{k-1}$  по заданному вектору  $\xi^{k-1} \in U_A$ , только  $O(N)$  арифметических действий. При этом объем памяти ЭВМ, достаточный для реализации процесса, составляет  $O(N)$  ячеек.

В общем случае трудности, вызванные участием в скалярных произведениях, легко устранимы путем изменения вычислительной схемы и использованием второго из соотношений (11.24.11). Окончательные трехчленные формулы этого процесса имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 u^0 &= L^{-1}(S\varphi + f); \quad g^0 = L^{-1}(A\varphi - f); \quad \xi^0 = Sg_0; \\
 Su^k &= Su^{k-1} - (1/q_k) [(I - SL^{-1}) \xi^{k-1} - e_{k-1} (Su^{k-1} - Su^{k-2})]; \\
 q_k &= g_{k-1} - (1/g_k) [(I - L^{-1}S) g_{k-1} - e_{k-1} (g_{k-1} - g_{k-2})]; \\
 &\quad \xi^k = Ag_k; \\
 e_{k-1} &= \begin{cases} 0 & , k=1; \\ q_k ((I - SL^{-1}) \xi^{k-1}, g_{k-1}) / ((I - SL^{-1}) \xi^{k-2}, g_{k+2}), & k > 1; \end{cases} \\
 q_k &= ((I - SL^{-1}) \xi^{k-1}, (I - L^{-1}S) g_{k-1}) / ((I - SL^{-1}) \xi^{k-1}, g_{k-1}) - \\
 &\quad - e_{k-1}, \quad k=1, \dots, k_e; \\
 u^{k_e+1} &= L^{-1}(Su^{k_e} + f).
 \end{aligned} \right\} \quad (11.24.13)$$

## § 11.25. МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Метод сферических гармоник позволяет сформулировать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений относительно коэффициентов в разложении искомой функции по сферическим гармоникам. В многомерном случае даже при низких порядках приближений матричная факторизация оказывается затруднительной из-за необходимости обращения матриц высокого порядка.

Для многомерных уравнений метод сферических гармоник мог бы удачно дополниться методом расщепления. Система уравнений сферических гармоник в  $P_N$ -приближении представима в виде  $(\hat{R} + \hat{Z} + \hat{\Sigma}) \varphi = f$ , где  $\hat{R}$  — матрица с элементами, зависящими только от  $r$ ;  $\hat{Z}$  — матрица с постоянными коэффициентами;  $\hat{\Sigma}$  — диагональная матрица, элементы которой зависят от  $r$  и от  $z$ . Матрица  $\hat{R}$  обладает





Ограничимся рассмотрением случая, когда на внешней границе цилиндра все составляющие потока принимают равными нулю (случай экстраполированной границы), а в центре на оси цилиндра имеет место условие симметрии. Будем считать, что решение задачи (11.25.1) принадлежит классу достаточно гладких функций, и для определения такого решения используем следующую разностную схему:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{R} + \hat{Z})_{ij} \varphi_{ij} &= f_{ij}; \\ \varphi_{ij} &= (\varphi_0^j, \varphi_1^j, \varphi^1)_{ij}; \quad f_{ij} = (f_0^j, f_1^j, f^1)_{ij}; \end{aligned} \right\} \quad (11.25.2)$$

$$\hat{R}_{ij} = \begin{bmatrix} \sum_{0ij} & 0 & \frac{r_{i+1} T_{1,0} - r_{i-1} T_{-1,0}}{2r_i \Delta r} \\ 0 & 3 \sum_{1ij} & 0 \\ \frac{T_{1,0} - T_{-1,0}}{2\Delta r} & 0 & 3 \sum_{1ij} \end{bmatrix};$$

$$\hat{Z}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{T_{0,1} - T_{0,-1}}{\Delta z} & 0 \\ \frac{T_{0,1} - T_{0,-1}}{\Delta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad (N+1)\Delta r = R; \quad (M+1)\Delta z = H;$$

$$(\hat{R}_{0j} + \hat{Z}_{0j}) = f_{0j}; \quad (11.25.3)$$

$$\hat{R}_{0j} = \text{diag} \{ \sum_{00j}, \sum_{10j}, \sum_{10j} \};$$

$$f_{0j} = (f_0^j, f_1^j, 0)_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, M;$$

$$\varphi_{N+1, j} = 0; \quad j = 0, 1, \dots, M+1;$$

$$\varphi_{i, 0} = \varphi_{i, M+1} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N+1, \quad (11.25.4)$$

В приведенных формулах  $T_{kl}$  — оператор сдвига, действующий по правилу  $T_{kl}\varphi_{ij} = \varphi_{i+k, j+l}$ . Задача (11.25.3) — (11.25.4) совпадает по формуле и по существу с задачей для плоского слоя, решение которой легко получить любым из известных методов. Поэтому можно считать, что  $\varphi_{0j}$  на оси цилиндра заданы при всех  $j$ , и задача (11.25.2), (11.25.4) превращается в краевую задачу с граничными условиями первого рода.

Для решения указанной задачи можно применить следующий итерационный алгоритм:

$$\left. \begin{aligned} (I + \tau \hat{R}_{ij})(I + \tau \hat{Z}_{ij})(\varphi_{ij}^{k+1} - \varphi_{ij}^k) &= 2\tau [f_{ij} - (\hat{R}_{ij} + \hat{Z}_{ij}) \varphi_{ij}^k], \\ i &= 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M; \\ \varphi_{N+1, j}^k &= \varphi_{0j}^k = 0; j = 0, 1, M + 1; \\ \varphi_{i, 0}^k &= \varphi_{i, M+1}^k = 0; i = 0, 1, \dots, N + 1. \end{aligned} \right\} \quad (11.25.5)$$

Здесь  $\tau > 0$  — параметр, который можно выбирать на основе метода минимальных невязок (см. § 29, гл. 10). Граничные условия на оси цилиндра учтены в  $f_{ij}$ . Следуя работе Ю. Е. Бояринцева и О. П. Узнадзе\*, введем в рассмотрение пространство  $u$  векторов размерности  $N \times M$ :

$$u = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1M}, \varphi_{21}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{2M}, \dots, \varphi_{N1}, \varphi_{N2}, \dots, \varphi_{NM}),$$

где, в свою очередь,  $\varphi_{ij}$  — трехкомпонентные векторы, обращающиеся в нуль на границе рассматриваемой области. Определим далее в этом пространстве скалярное произведение  $[,]$  и норму следующим образом:

$$[u, v] = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N r_i(\varphi_{ij}, \psi_{ij}) \Delta r \Delta z, \|u\| = \sqrt{[u, u]}. \quad (11.25.6)$$

Здесь  $(\varphi_{ij}, \psi_{ij})$  — евклидово скалярное произведение. В качестве нормы оператора, действующего во введенном пространстве, будем брать норму, подчиненную норме векторов (11.25.6).

Для доказательства сходимости итерационного метода (11.25.5) достаточно показать, что все собственные числа оператора шага этого процесса  $C = (I + \tau \hat{Z})^{-1} (I + \tau \hat{R})^{-1} (I - \tau \hat{R}) (I - \tau \hat{Z})$  по модулю меньше единицы. Здесь  $\hat{R}$  и  $\hat{Z}$  — матрицы с элементами  $\hat{R}_{ij}$  и  $\hat{Z}_{ij}$ . Очевидно, что множества собственных чисел оператора  $C$  и подобного ему оператора  $\tilde{C} = (I + \tau \hat{Z}) C (I + \tau \hat{Z})^{-1}$  совпадают. С другой стороны, собственные числа оператора не превосходят его нормы. Поэтому достаточно будет доказать, что

$$\|\tilde{C}\| \leq \|(I + \tau \hat{R})^{-1} (I - \tau \hat{R})\| \|(I + \tau \hat{Z})^{-1} (I - \tau \hat{Z})\| < 1. \quad (11.25.7)$$

Покажем, что

$$\|(I + \tau \hat{Z})^{-1} (I - \tau \hat{Z})\| = 1, \text{ а } \|(I + \tau \hat{R})^{-1} (I - \tau \hat{R})\| < 1.$$

\* Бояринцев Ю. Е., Узнадзе О. П. Об одном способе решения нестационарного уравнения переноса. — ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, № 6, с. 1406.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 & \| (I + \tau \hat{Z})^{-1} (I - \tau \hat{Z}) \|^2 = \\
 & = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{[(I + \tau \hat{Z})^{-1} (I - \tau \hat{Z}) u, (I + \tau \hat{Z})^{-1} (I - \tau \hat{Z}) u]}{[u, u]} = \\
 & = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{[(I - \tau \hat{Z}) u, (I - \tau \hat{Z}) u]}{[(I + \tau \hat{Z}) u, (I + \tau \hat{Z}) u]} = \\
 & = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{[u, u] - 2\tau [\hat{Z}u, u] + \tau^2 [\hat{Z}u, \hat{Z}u]}{[u, u] + 2\tau [\hat{Z}u, u] + \tau^2 [\hat{Z}u, \hat{Z}u]}. \quad (11.25.8)
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 & \| (I + \tau \hat{R})^{-1} (I - \tau \hat{R}) \|^2 = \\
 & = \sup_{\|u\| \neq 0} \frac{[u, u] - 2\tau [Ru, u] + \tau^2 [Ru, Ru]}{[u, u] + 2\tau [Ru, u] + \tau^2 [Ru, Ru]}. \quad (11.25.9)
 \end{aligned}$$

Используя определение скалярного произведения и равенство нулю векторов  $\varphi_{ij}$  на границе области, имеем

$$\begin{aligned}
 [\hat{Z}u, u] &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N r_i (\hat{Z}_{ij} \varphi_{ij}, \varphi_{ij}) \Delta r \Delta z = \\
 &= \sum_{i=1}^N r_i \Delta r \left( \sum_{j=1}^M [T_{0,1} - T_{0,-1}] \varphi_{ij}^0 \varphi_{0ij} - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^M (T_{0,1} - T_{0,-1}) \varphi_{ij}^0 \varphi_{0ij}^0 \right) = 0; \quad (11.25.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\hat{R}u, u] &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N r_i (\hat{R}_{ij} \varphi_{ij}, \varphi_{ij}) \Delta r \Delta z = \\
 &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \Delta r \Delta z (r \sum_{0ij} (\varphi_{0ij}^0)^2 + 3r_i \sum_{1ij} (\varphi_{1ij}^0)^2 + 3r_i \sum_{1ij} (\varphi_{1ij}^0)^2 + \\
 &\quad + \frac{T_{1,0} - T_{-1,0}}{2\Delta r} r_i \varphi_{1ij}^1 \varphi_{0ij}^0 + \frac{T_{1,0} - T_{-1,0}}{2\Delta r} \varphi_{0ij}^0 r_i \varphi_{1ij}^1) = \\
 &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \Delta r \Delta z r_i (\sum_{0ij} (\varphi_{0ij}^0)^2 + 3 \sum_{1ij} (\varphi_{1ij}^0)^2 + 3 \sum_{1ij} (\varphi_{1ij}^1)^2) > 0. \quad (11.25.11)
 \end{aligned}$$

Соотношения (11.25.8)—(11.25.11) доказывают неравенство (11.25.7). Вопросы численной реализации этой схемы также освещены в работе Ю. Е. Бояринцева и О. П. Узнадзе. Этот метод распространяется на случай  $P_N$ -уравнений метода сферических гармоник.

## § 11.26. ФАКТОРИЗОВАННЫЕ ОПЕРАЦИИ $P$

Поскольку главную трудность для многомерных задач составляет в операции  $P_1$  обращение операторов  $R = Q - Pc$ , интересно рассмотреть такие операторы  $R$ , которые представимы в виде произведения одномерных дифференциальных операторов. Тогда трудность нахождения  $R^{-1}$  заметно снизится. Операторы  $R$  в операции  $P$  применяются для вычисления ошибки. Идею построения факторизованных уравнений изложим на примере периодической задачи, когда решение ее не зависит от  $x_3$ . Положим оператор  $\tau_1 = I$ , а операторы  $R$  и  $P$  ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} R &= \prod_{i=1}^2 \left[ -\alpha(1-c)^{-1/2} l^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + (1-c)^{1/2} \right]; \\ P &= I - b_1 \alpha l^2 \Delta + \frac{b_2 \alpha^2 l^4}{(1-c)} \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \end{aligned} \right\} (11.26.1)$$

где  $\alpha$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  — неизвестные параметры. Можно убедиться, что при таких операторах  $R$ ,  $P$   $KP_1$ -метод будет балансным, а спектральная функция перехода для пробной функции вида  $\exp[i(n_1 x_1 + n_2 x_2)]$  имеет вид  $c\psi$ , где

$$\psi = \psi(t, \varphi) = r(t) - [1 - cr(t)] \frac{1 + b_1 \alpha t^2 + b_2 \alpha^2 t^4 \sin^2 2\varphi / [4(1-c)]}{1 - c + \alpha t^2 + \alpha^2 t^4 \sin^2 2\varphi / [4(1-c)]}, \quad (11.26.2)$$

а  $\varphi = \arctg(n_2/n_1)$ . Из вида функции  $\psi(t, \varphi)$  следует, что

$$\max_{t, \varphi} |\psi| = \max_t (\max_t |\psi(t, 0)|, \max_t |\psi(t, \pi/4)|).$$

Варьируя всю группу неизвестных параметров  $\alpha$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  или только некоторые из них, находим  $m = \min_t \max_{\varphi, 0 \leq c \leq d} |\psi|$ , где  $0 \leq d \leq 1$ .

Результаты расчета для некоторых значений  $c$ , близких к единице, приведены в табл. 11.4. В ней варианты со значениями  $b_i = 0$  соответствуют априорным предположениям относительно этих неизвестных.

Таблица 11.4

$d$	$\alpha$	$b_1$	$b_2$	$m$
0,9	0,201	0,24	0,24	0,24
0,9	0,287	0	0,253	0,254
0,9	0,165	0	0	0,33
0,99	0,197	0,488	0,488	0,489
0,99	0,191	0	0,493	0,495
0,999	0,187	0,72	0,72	0,75
0,999	0,173	0	0	0,805

Если учесть, что скорость сходимости простой итерации оценивается величиной  $-\ln c$ , а скорость сходимости в излагаемом методе есть  $-(\ln c + \ln m)$ , то при применении факторизованных уравнений получим ускорение сходимости в  $1 + \ln m / \ln c$  раза.

Дифференциальные операторы предложенного типа можно применять и при решении основной краевой задачи для двумерной области, составленной из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. От функции  $\omega^{k+1/2}$  нужно тогда потребовать, чтобы она удовлетворяла на границе области однородным условиям типа Маршака—Владимирова. Метод решения разностных уравнений с рашепляющим оператором изложен в работе [80].

Основываясь на результатах § 11.12, можно утверждать, что больший эффект ускорения сходимости итераций будет иметь место при применении факторизованных уравнений в  $K^2P_1$ -методе. В этом случае вид операторов  $R, P$  и спектральной функции в  $K^2P_1$  отличается от вида операторов  $R, P$  и спектральной функции  $\psi$  в  $KP(1)$ , выраженных формулами (11.26.1), (11.26.2), только тем, что вместо величин  $c$  и  $r(t)$  в этих формулах стоят величины  $c^2$  и  $r^2(t)$ . В табл. 11.5 приведены результаты расчетов оптимальных значений  $\alpha, b_1, b_2$  для  $K^2P_1(1)$ .

Таблица 11.5

$d$	$\alpha$	$b_1$	$b_2$	$m$
0,9	0,443	0	0	0,184
0,99	0,4	0	0	0,455
0,999	0,362	0	0	0,733
0,9	0,478	0	0,144	0,144
0,99	0,425	0	0,37	0,37

В рассмотренных методах  $\Delta C = O(N)$ .

## Приложение 1

### ПРОГРАММЫ

На протяжении ряда лет сотрудниками Института атомной энергии им. И. В. Курчатова и Вычислительного центра СО АН СССР были созданы программы решения уравнения переноса нейтронов в различных приближениях и для разных геометрий. В основу алгоритмов положены аппроксимации уравнения, изложенные в гл. 6—9, и итерационные методы, описанные в гл. 10, 11. Программы оформлены в виде препринтов, в которых содержатся подробные описания программ и перечисляются их особенности. Авторы в настоящем изложении не ставят своей целью сделать обзор всего программного хозяйства, созданного в Советском Союзе для решения реакторных задач. Однако среди других программ упомянем систему «Радуга» [19], состоящую из библиотеки модулей для решения уравнения переноса в средах с осевой симметрией.

## § П1.1. СЕТОЧНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ПРОГРАММЫ

**Плоская геометрия.** Для этого случая Ю. А. Власовым составлены следующие программы.

1. Решение одnogруппового кинетического уравнения в  $P_1$ -приближении для плоской геометрии. Препринт ИАЭ-2407, М., 1974.

2. Решение кинетического уравнения в  $P_3$ -приближении в плоской геометрии. Препринт ИАЭ-2513, М., 1975.

3. Решение уравнения переноса нейтронов в плоском слое. Препринт ИАЭ-2588, М., 1975.

4. Решение кинетического многогруппового уравнения в  $P_3$ -приближении для плоской геометрии. Препринт ИАЭ-2514, М., 1975.

5. Решение многогруппового уравнения переноса нейтронов в плоском слое. Препринт ИАЭ-2562, М., 1975.

6. Программа численного решения уравнения Больцмана для плоской геометрии. Препринт ИАЭ-2958, М., 1978.

Программы 1—3 находят решение методом сеток одnogрупповых уравнений  $P_1$ ,  $P_3$ -приближения и одnogруппового уравнения переноса. Для уравнений сферических гармоник использованы разностные схемы повышенной точности и метод матричной факторизации, описанные в § 7. 4—7. 6. Решение уравнения переноса находится методом характеристик с применением формул, описанных в § 9.9. Для ускорения итераций применен циклический  $KP_1(2)$ -метод, использующий уравнения типа  $P_3$ -приближения для поправки (см. § 11.16). Индикатриса рассеяния и источник уравнения могут быть линейно-анизотропными. Краевые условия могут быть либо условиями зеркального отражения, либо условиями Маршака — Владимирова (см. § 6.2). Для уравнения переноса можно задавать и периодические условия.

Программы 4—6 позволяют численно решать многогрупповые уравнения. Значения потока и тока нейтронов в каждой группе вычисляются в узлах сетки, которая строится в каждой зоне самой программой так, что она сгущается у границ зон (см. § 9.9). Программы позволяют решать как задачу с заданными источниками, распределенными по границам и зонам, так и задачу на собственное значение ( $k_{эф}$ ) (см. § 1.3). Во втором случае вычисляется кроме потоков и токов пространственное распределение функции мощности генерации вторичных нейтронов. Эффективный коэффициент размножения  $k_{эф}$  вычисляется методом простой итерации в программах 4,5 и чебышевским методом с применением  $T$ -последовательности и определением двух максимальных собственных чисел (см. § 10.32). В программах 5,6 в качестве начального приближения к решению многогруппового уравнения переноса берется решение соответствующих  $P_3$ -уравнений, т. е. все выходные величины сначала вычисляются в  $P_3$ -приближении, а затем в кинетическом приближении.

### **Цилиндрическая геометрия.**

Для этого случая С. И. Коняевым составлены такие программы.

7. Решение кинетического уравнения в цилиндрической геометрии в  $P_3$ -приближении. Препринт ИАЭ-2395, М., 1974.

8. Решение многоскоростного кинетического уравнения в  $P_3$ -приближении в цилиндрической геометрии. Препринт ИАЭ-2396, М., 1974.

С. А. Фроловой составлена программа РЕКИНУР:

9. Программа решения многогруппового кинетического уравнения в цилиндрической геометрии. Препринт ИАЭ-2481, М., 1975.

По программам 7,8 вычисляются решения соответственно одnogруппового и многогруппового уравнений в  $P_3$ -приближении. Разностная аппроксимация  $P_3$ -уравнений в одной группе производится по формулам § 7.3; для решения применен метод матричной факторизации (см. § 7.6). Программы позволяют находить значения потоков нейтронов в точках сетки, которая является неравномерной в каждой зоне и рассчитывается программой по формулам § 9.7. По одnogрупповой программе вычисляются все три четных момента решения, по многогрупповой решаются задачи с заданными источниками и задачи на  $k_{эф}$ .

По программе РЕКИНУР находится численное решение многогруппового уравнения переноса в бесконечном многозонном цилиндре методом характеристик (см. § 9.7, 9.8) при краевых условиях (5.3.6). Для ускорения внутренних ите-

раций в каждой группе применен циклический  $KP_1$  (1)-метод (см. § 11.14, 11.15, 11.20); в случае рассеяния вверх по группам применены итерации по Зейделю. Программа позволяет решать задачи с заданным источником и на  $k_{эф}$ ; в последнем случае для ускорения внешних итераций применен чебышевский метод с  $T$ -последовательностью (см. § 10.32). Сетка по радиусу и угловым переменным является неравномерной, она строится по формулам § 9.7. В качестве начального приближения к решению уравнения переноса программа находит численное решение многогрупповых уравнений в  $P_1$ -приближении. Разностная схема для  $P_1$ -уравнений строится по формулам § 7.4. Программа может выдавать не только значения  $\Phi_0(r)$ ,  $\Phi_1(r)$ , но и само решение  $\Phi(r, \mu, \gamma)$ .

#### **Сферическая геометрия.**

Для этого случая С. И. Коняевым составлены следующие программы.

10. Программа решения кинетического уравнения для сферически-симметричной области в  $P_1$ -приближении. Препринт ИАЭ-2302, М., 1973.

11. Решение кинетического уравнения для сферически-симметричной области в  $P_3$ -приближении. Препринт ИАЭ-2517, М., 1975.

Программы 10, 11 предназначены для нахождения приближенного решения одnogрупповых уравнений  $P_1$ - и  $P_3$ -приближения в многозонной сферически-симметричной области (см. § 6.2). Решается задача с заданными источниками. Разностная аппроксимация уравнений описана в § 7.2, 7.4. Программы выдают численные значения всех моментов решения в узлах неравномерной сетки.

Все описанные выше программы написаны на языке АЛГОЛ и могут быть запущены на любой ЭВМ, имеющей транслятор с АЛГОЛА. При этом потребуются только заменить операторы, описывающие ввод и вывод информации и распределение памяти. В программах коэффициенты уравнений и задаваемые источники предполагаются кусочно-постоянными по зонам. Входная информация (полные сечения, сечения рассеяния, источники и т. п.) вводится с перфокарт, поэтому программы не связаны с какой-либо фиксированной библиотекой реакторных констант. Каждый упомянутый препринт содержит текст программы на языке АЛГОЛ, описание и результаты расчета тестовых вариантов, включая машинную печать.

## **§ 11.2. ОДНОМЕРНЫЕ ПРОГРАММЫ, ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПСЕВДОИСТОЧНИКОВ**

### **Плоская геометрия.**

Для этого случая Н. В. Султановым составлена программа.

1. Одногорупповая программа расчета коэффициентов использования тепловых нейтронов в плоской решетке с анизотропным рассеянием, ПРАКТИНЕП (АР).— Атомная энергия, 1973, т. 34, вып. 6, с. 450.

В. Ф. Бояриновым составлена программа.

2. Программа нейтронного группового расчета плоской ячейки реактора НЕГР-П. Препринт ИАЭ-3142, М., 1979.

Программа ПРАКТИНЕП (АР) позволяет решать одnogрупповое уравнение переноса методом поверхностных псевдоисточников (см. § 6.5); рассчитывать средние потоки по зонам, потоки и токи на границах зон, поглощение нейтронов в каждой зоне и коэффициент использования тепловых нейтронов в многозонной плоской ячейке. В разложении индикатрисы рассеяния по многочленам Лежандра учитывается до пяти членов.

Программа НЕГР-П предназначена для решения многогруппового уравнения переноса с изотропным рассеянием методом поверхностных псевдоисточников; позволяет рассчитывать средние потоки по зонам и потоки на границах зон в многозонной плоской ячейке в  $G_N$ -приближении (см. § 6.5).

### **Цилиндрическая геометрия.**

Для этого случая Н. В. Султановым написаны следующие программы.

3. Одногорупповая программа расчета коэффициента использования тепловых нейтронов в многозонной цилиндрической ячейке, ПРАКТИНЕЦ 3Ф. Препринт ИАЭ-2143, ИАЭ-2144, М., 1971.

4. Многогрупповая программа расчета многозонной цилиндрической ячейки (приближенное разделение пространственно-угловой и энергетической переменных); МГПРАКТИНЕЦ. Препринт ИАЭ-3376/5, М., 1981.

В. Ф. Бояриновым составлена программа.

5. Программа нейтронного группового расчета цилиндрической ячейки реактора НЕГР-Ц. Препринт ИАЭ-3377/5, М., 1981.

Кроме коэффициента использования тепловых нейтронов программа 3 рассчитывает средние по зонам потоки нейтронов, потоки и токи нейтронов на границах зон. Решается одnogрупповое кинетическое уравнение методом поверхностных псевдоисточников, использующим цилиндрически-симметрическую функцию Грина (см. § 5.6). Ячейка рассчитывается в  $G_1$ - и  $G_3$ -приближениях (см. § 6. 5).

Многогрупповая программа 4 рассчитывает многозонную цилиндрическую ячейку путем разделения пространственно-угловой и энергетической переменных, что позволяет свести многогрупповой расчет к решению одnogрупповых задач с последующим решением системы энергетических уравнений. Программа рассчитывает средние по группам и зонам потоки нейтронов, групповые потоки нейтронов на границах зон, средние по группам интегральные потоки и средние по энергии сечения.

Программа 5 решает многогрупповое уравнение переноса с изотропным рассеянием, она рассчитывает средние потоки по зонам и потоки на границах зон в многозонной цилиндрической ячейке в  $G_1$ - и  $G_3$ -приближениях.

### § П1.3. ПРОГРАММЫ ДВУМЕРНОГО РАСЧЕТА

#### Расчет прямоугольных ячеек.

В. Ю. Пляшкевичем составлена программа:

Решение кинетических уравнений в периодических решетках. Препринт ИАЭ-2421, М., 1974; ИАЭ-2549, М., 1975.

По программе методом Галеркина проводится двумерный расчет потока нейтронов и средних потоков по зонам в многозонной прямоугольной ячейке с цилиндрическими и прямоугольными зонами в четырехгрупповом кинетическом приближении при заданных источниках. Ячейка предполагается симметричной относительно центра; граничными условиями являются условия периодичности; источник, сечения и рассеяние предполагаются изотропными и кусочно-постоянными; при этом рассеяние нейтронов в верхние группы отсутствует.

Поток нейтронов находится из решения системы уравнений переноса, записанных в самосопряженной форме Владимирова (см. § 5.1). Поскольку рассеяние в верхние группы отсутствует, задача сводится к решению четырех неоднородных односкоростных уравнений переноса, а каждое из уравнений решается методом Галеркина, в котором пробные функции зависят только от пространственных переменных (см. § 6.9). В этом случае системой уравнений Галеркина является система вырожденных интегральных уравнений, которая решается с применением квадратур для сферы (см. § 5.9). В качестве пробных функций взяты тригонометрические и локальные функции, позволяющие лучше учесть поведение потоков нейтронов вблизи неоднородностей. Подробности алгоритма содержатся в § 6.9.

Программа написана на ФОРТРАНЕ и пригодна для любой ЭВМ, имеющей транслятор с ФОРТРАНА. При оперативной памяти ЭВМ не менее 32 К число вводимых зон в программе не более 50 (общее число зон в ячейке может достигать 100); максимальное число пробных функций в разложении в каждой группе 82, число различных веществ в ячейке не выше 10. Количество арифметических действий при решении задачи зависит от числа пробных функций, числа угловых направлений, числа зон в ячейке и пропорционально числу групп. При вводе входной информации учитывается симметрия ячейки относительно центра.

Программа RZ-1.

Программа создана Г. И. Курченковой.

Метод Галеркина для диффузионных уравнений. Часть III. Программа RZ-1. Препринт ИАЭ-2280, М., 1973.

Она позволяет решить методом Галеркина двумерную двугрупповую задачу диффузии нейтронов в геометрии  $(r, z)$ ; получить  $k_{eff}$ , распределение нейтро-



нов и ряд интегральных характеристик в двумерном многозонном, цилиндрически-симметричном по азимуту реакторе в двугрупповом диффузионном приближении. Пробные функции в программе взяты в виде произведения функций  $I_0(\mu_K r)$  и тригонометрических функций по  $z$ , параметры в которых выбраны так, чтобы удовлетворить общему типу краевых условий третьего рода. Выбор этих функций и конструкция функций по  $z$  осуществлены согласно алгоритмам, изложенным в § 6.8. Коэффициенты уравнения предполагаются кусочно-постоянными. Собственное значение  $k_{эф}$  находится методом простой итерации с предварительным обращением групповых матриц Галеркина. Программа написана на языке АЛГОЛ. Число зон, наборов коэффициентов и пробных функций зависит от размеров оперативной памяти ЭВМ.

Двумерная программа, основанная на методе поверхностных псевдисточников ПРАКТИНЕК.

Написана программа Н. В. Султановым.

Одногрупповая двумерная программа расчета коэффициента использования тепловых нейтронов ПРАКТИНЕК. Препринт ИАЭ-3005, М., 1978.

По программе рассчитываются средние по зонам потоки нейтронов и токи нейтронов на границах зон в двумерных ячейках типа реактора РБМК. Решается одногрупповое кинетическое уравнение с использованием метода поверхностных псевдисточников в  $S_N^P$ -приближении (см. § 6.5). При решении используется функция Грина с аксиальной асимметрией.

Программа ПРЕСС-3.

Программа создана в ВЦ СО АН СССР В. В. Смеловым и Л. И. Долговой. Предназначена для двумерного расчета на ЭВМ БЭСМ-6 поля потока нейтронов в односкоростном  $P_3$ -приближении для следующих типов периодических полирешеток с цилиндрическими многослойными блоками двух сортов: а) ячейка решетки (см. § 6.7) — треугольник, в двух вершинах которого расположены центры (разных) блоков; б) ячейка решетки — прямоугольник, в двух диагонально противоположных вершинах каждого расположены центры (разных) блоков. В каждом из случаев а) и б) предполагается, что прямолинейные звенья контура ячейки являются линиями симметрии. Программа позволяет рассчитывать и классические (квадратные и треугольные) решетки с блоками только одного сорта.

Метод решения задачи основан на реализации идей § 6.6 и 6.7. Решение системы дифференциальных уравнений ищется на основе конечно-разностного принципа с последующим применением алгоритма матричной прогонки.

Программа написана на языке АЛГОЛ-60 и рассчитана на ЭВМ типа БЭСМ-6 с емкостью МОЗУ 32 К. В программе есть обращение к стандартным процедурам INVERT (обращение матрицы) и GAUSS (решение системы линейных уравнений).

При использовании программы необходимо иметь в виду следующие ограничения: количество концентрических зон в каждом из блоков может быть произвольным в пределах от 0 (блок отсутствует) до 8. Общее количество расчетных узлов по радиальной переменной в каждом из блоков с примыкающей долей замедлителя  $\leq 100$ . Программа не рассчитана на случай касания блоков. При малом расстоянии между блоками может случиться, что хотя бы один из двух расчетных шагов в замедлителе (определяемых в процессе счета) окажется больше половины расстояния между блоками. При осуществлении такой ситуации на печать выдается конкретная рекомендация об изменении числа расчетных узлов в замедлителе. Полное время решения типичной задачи (с учетом времени трансляции) — 2—2,5 мин.

Вместе с текстом программы (на языке АЛГОЛ-60) имеется инструкция с описанием входных и выходных данных и тестовая задача.

## § П1.4. ТРЕХМЕРНЫЕ ПРОГРАММЫ

Программа ХУЗ-5.

Создана программа Е. С. Шапелкиным.

Метод Галеркина для диффузионных уравнений. Часть V. Программа ХУЗ-5. Препринт ИАЭ-2474, М., 1975.

Она позволяет решить методом Галеркина трехмерную двугрупповую многозонную задачу диффузии нейтронов в геометрии  $(x, y, z)$ ; получить  $k_{эф}$ , распр-

деления нейтронов и некоторые интегральные характеристики. Краевая задача для диффузионных уравнений решается в прямоугольном параллелепипеде, краевые условия — 3-го типа, коэффициенты уравнений — кусочно-постоянны, границы зон образованы плоскостями, параллельными границам области. Пробные функции в программе взяты в виде тройного произведения одномерных функций, вычисленных по алгоритму, описанному в § 6.8; они в среднем удовлетворяют условиям сшивки; отбор их описан в § 6.8.

Программа обращает групповые матрицы Галеркина, а затем соответственное значение находится методом простой итерации. Программа написана на языке АЛГОЛ. Число зон, наборов коэффициентов и пробных функций зависит от размеров оперативной памяти ЭВМ.

## Приложение 2

### ВЫРАЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА В. С. ВЛАДИМИРОВА ЧЕРЕЗ СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ В ТЕНЗОРНОЙ ФОРМЕ ( $P_3$ -ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Следуя работе И. А. Адамской, С. К. Годунова и Г. П. Прокопова [2], получим, предполагая, что  $g(\mu_0) \equiv 1$ , тензорную запись функционала (5.1.25) в произвольных криволинейных координатах. Такая запись функционала  $G(u)$  позволит нам получить вариационные уравнения метода сферических гармоник в криволинейных координатах. Для этого достаточно уметь находить вид в произвольных координатах таких функционалов:

$$I = \int d\Omega \int_D dx l(x) (\Omega \nabla u)^2;$$

$$J = \int d\Omega \int_D dx x l^{-1}(x) u^2;$$

$$K = \int d\Omega \int_D dx \frac{c(x)}{l(x)} u(x, \Omega) \int d\Omega' u(x, \Omega');$$

$$T = \int d\Omega \int_{\Gamma} d\Gamma |\Omega n| u^2(x, \Omega).$$

Как показано В. С. Владимиром [41], разложению  $\varphi(x, \Omega)$  решения уравнения (5.1.2) по степеням  $\Omega$  до 3-й степени включительно ( $P_3$ -приближению) соответствует квадратичная аппроксимация функции  $u$ —решения самосопряженного уравнения (5.1.15):

$$u = \varphi_{00} + \varphi_{ij} \Omega^i \Omega^j, \quad (\text{П.2})$$

где

$$\varphi_{00} = \varphi_{00}(x^1, x^2, x^3); \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ij}(x^1, x^2, x^3).$$

Здесь мы перешли к тензорной записи величин, в соответствии с которой нижние и верхние индексы соответствуют понятиям ковариантности и контравариантности, а под вторым слагаемым в (П.2) подразумевается суммирование от 1 до 3 по каждому индексу.

Не ограничивая общности,  $u(x, \Omega)$  можно считать гармоническим многочленом от  $\Omega$ , так как на единичной сфере  $g_{ij} \Omega^i \Omega^j = 1$  любой многочлен от  $\Omega$  может быть заменен гармоническим. Поэтому можно считать, что коэффициенты  $\varphi_{ij}$  образуют симметрический ковариантный тензор второго ранга, удовлетворяющий условию гармоничности  $g^{ij} \varphi_{ij} = 0$ , где  $g^{ij}$  — контравариантные

составляющие фундаментального тензора, определяющего метрику в криволинейных координатах  $(x^1, x^2, x^3)$ , т. е.  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ ,  $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$  (символ Кронекера).

Начнем с преобразования к произвольным координатам функционала

$$I = \int_D d\Omega \int dx^l(x) (\Omega \nabla u)^2 = \int I^* l(x) dx.$$

Подставляя в него выражение (П.2) и интегрируя по единичной сфере  $g_{ij} \Omega^i \Omega^j = 1$ , получаем

$$I^* = E^{il} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial x^l} + 2E^{ijkp} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial x^i} \frac{\nabla \varphi_{jk}}{\nabla x^p} + E^{ijkpqr} \frac{\nabla \varphi_{ij}}{\nabla x^k} \frac{\nabla \varphi_{pq}}{\nabla x^r},$$

где

$$E^{il} = \int \Omega^i \Omega^l d\Omega = \frac{4\pi}{3} g^{il};$$

$$E^{ijkp} = \int \Omega^i \Omega^j \Omega^k \Omega^p d\Omega = \frac{4\pi}{15} (g^{ij} g^{kp} + g^{ik} g^{jp} + g^{ip} g^{jk});$$

$$\begin{aligned} E^{ijkpqr} &= \int \Omega^i \Omega^j \Omega^k \Omega^p \Omega^q \Omega^r d\Omega = \\ &= \frac{4\pi}{105} (g^{il} g^{kp} g^{qr} + g^{ip} g^{kl} g^{qr} + g^{ij} g^{kr} g^{qp} + g^{lr} g^{kp} g^{qi} + g^{ip} g^{kr} g^{qi} + \\ &+ g^{ik} g^{jp} g^{qr} + g^{ik} g^{lq} g^{pr} + g^{ik} g^{lr} g^{qp} + g^{iq} g^{jk} g^{pr} + g^{iq} g^{jp} g^{kr} + g^{iq} g^{lr} g^{kp} + \\ &+ g^{ij} g^{kq} g^{pr} + g^{ip} g^{kq} g^{lr} + g^{lr} g^{kq} g^{jp} + g^{lr} g^{kj} g^{qp}), \end{aligned}$$

$\nabla/\nabla x^p$  — символ ковариантной производной по  $x^p$ :

$$\frac{\nabla \varphi_{jk}}{\nabla x^p} = \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial x^p} - \varphi_{\alpha k} \Gamma_{jp}^\alpha - \varphi_{j\beta} \Gamma_{kp}^\beta,$$

$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  — символы Кристоффеля II рода:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = g^{i\lambda} \Gamma_{i, \alpha\beta}, \quad \Gamma_{i, \alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right),$$

а  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$  — символы Кристоффеля I рода.

Пользуясь этими формулами и формальными операциями, связанными с переобозначением индексов суммирования, подынтегральное выражение запишем в виде

$$I^* = M^{(ij)(pq)(kr)} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi_{pq}}{\partial x^r} + N^{(ij)(pq)s} \varphi_{ij} \frac{\partial \varphi_{pq}}{\partial x^s} + H^{(ij)(pq)} \varphi_{ij} \varphi_{pq},$$

где подразумевается суммирование по индексам  $(kr)$ ,  $(ij)$ ,  $(pq)$ , принимающим значения (11), (12), (22), (23), (33), и по индексу  $s = 1, 2, 3$ . Коэффициенты  $M^{(ij)(pq)(kr)}$ ,  $N^{(ij)(pq)s}$ ,  $H^{(ij)(pq)}$  можно свести в квадратные матрицы 7-го порядка  $M_{kr}$  ( $kr = 11, 12, 22, 13, 23, 33$ ),  $N_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ),  $H$ , элементы которых выражаются через  $E^{il}$ ,  $E^{ijkp}$ ,  $E^{ijkpqr}$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ . Преобразуем к произвольным криволинейным координатам функционал

$$J = \int d\Omega \int dx^l(x) u^2 = \int \frac{dx}{l(x)} J^*.$$

Учитывая (П.2), получаем

$$J^* = 4\pi\varphi_{00}^2 + 2E^{ij}\varphi_{00}\varphi_{ij} + E^{ljpq}\varphi_{ij}\varphi_{pq}.$$

Но поскольку  $g^{ij}\varphi^{ij} = 0$ ; то

$$E^{ij}\varphi_{00}\varphi_{ij} = \frac{4\pi}{3}\varphi_{00}g^{ij}\varphi_{ij} = 0.$$

Следовательно;

$$J = \int_D (4\pi\varphi_{00}^2 + E^{ljpq}\varphi_{ij}\varphi_{pq}) \frac{dx}{l(x)}.$$

В силу соотношения

$$\int_{\Omega} u(x, \Omega') d\Omega = 4\pi\varphi_{00} + E^{ij}\varphi_{ij} = 4\pi\varphi_{00}$$

имеем

$$K = \int_{\Omega} d\Omega \int_D (\varphi_{00} + \varphi_{ij}\Omega^i\Omega^j) \varphi_{00} \frac{c(x)}{l(x)} dx = 4\pi \int_D \varphi_{00}^2 \frac{c(x)}{l(x)} dx.$$

Наконец, рассмотрим функционал

$$T = \int_{\Omega} d\Omega \int_{\Gamma} d\Gamma | \Omega n | u^2(x, \Omega),$$

где  $n = (n_1, n_2, n_3)$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ . Вследствие четности функции  $u$  по  $\Omega$  имеем

$$T = 2 \int_{\Gamma} d\Gamma \int_{\Omega_1} \Omega n u^2 d\Omega = 2 \int_{\Gamma} d\Gamma T^*,$$

где  $\Omega_1$  — такая полусфера, на которой  $\Omega n > 0$ . Далее

$$T^* = F^{00}\varphi_{00}^2 + 2\varphi_{00}F^{ij}\varphi_{ij} + F^{ljpq}\varphi_{ij}\varphi_{pq},$$

где

$$F^{00} = \int_{\Omega_1} \Omega^k n_k d\Omega = \pi;$$

$$F^{ij} = \int_{\Omega_1} \Omega^i \Omega^j \Omega^k n_k d\Omega = \frac{5}{64} E^{ij} + \frac{35}{64} E \frac{n_p n_q}{g^{kr} n_k n_r} - \frac{\pi}{24} \frac{g^{ip} g^{jq} n_p n_q}{g^{kr} n^k n^r};$$

$$F^{ljpq} = \int_{\Omega_1} \Omega^l \Omega^j \Omega^p \Omega^q \Omega^k n_k d\Omega =$$

$$= \frac{5}{6} E^{ljpq} + \frac{35}{64} E^{ljpqkr} - \frac{\pi}{24} \frac{g^{lk} g^{ir} g^{ps} g^{qt} n_k n_r n_s n_t}{(g^{\sigma\tau} n_{\sigma} n_{\tau})^2}.$$

Таким образом;

$$T = 2 \int_{\Gamma} (\pi\varphi_{00}^2 + 2F^{ij}\varphi_{00}\varphi_{ij} + F^{ljpq}\varphi_{ij}\varphi_{pq}) d\Gamma.$$

В работе [12] подробно разобран вид функционалов для случая, когда координаты  $(x^1, x^2)$  произвольны, а  $x^3$  ортогональна им (плоская и цилиндрическая геометрия) и когда  $x^3$  есть угол поворота вокруг оси вращения, а  $(x^1, x^2)$  — произвольные координаты в плоскости, содержащей ось вращения (вращательная симметричная система координат).

## ОБ ОПТИМИЗАЦИИ АЛГОРИТМА ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ ИТЕРАЦИЙ В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Для нахождения минимального по модулю собственного значения  $\lambda_1$  и соответствующей собственной функции  $\Phi_1$  уравнения

$$Au = \lambda u; \quad (\text{ПЗ.1})$$

как правило, не представляется возможным в многомерных задачах математической физики находить последовательность приближений степенным методом с чебышевским ускорением (см. § 10.32), примененным к обратному оператору  $A^{-1}$ . Поэтому для таких задач получил распространение метод обратных итераций [233]

$$\tilde{u}^k = \gamma u^{k-1}, \quad (\text{ПЗ.2})$$

$$u^k = \tilde{u}^k - \beta_k u^{k-1}, \quad (\text{ПЗ.3})$$

который содержит два цикла итераций: внешний [см. ПЗ.3] — для нахождения последовательности  $u^k \rightarrow \Phi_1$  и внутренний — для решения неоднородного уравнения (ПЗ.2).

Для ускорения внешних итераций часто применяют метод Виланда (метод сдвига по спектру) [233], заменяя уравнение (ПЗ.2) следующим:

$$(A - \omega I) \tilde{u}^k = \gamma u^{k-1}, \quad (\text{ПЗ.4})$$

где  $\omega \approx \lambda_1$ ; однако этот метод ухудшает обусловленность уравнения (ПЗ.4), решаемого внутренними итерациями. У метода Виланда много сторонников, считающих, что общий эффект от применения этого метода положителен.

Для успешного совместного проведения внешних и внутренних итераций необходимо иметь представление о том, с какого начального приближения начинать каждый цикл внутренних итераций и какая должна быть зависимость длины цикла внутренних итераций  $N_k$  от номера внешней итерации  $k$ .

Относительно выбора наилучшего начального приближения во внутренних итерациях существует почти единодушное мнение о том, что за него следует взять приближенное решение, полученное после последней внешней итерации, умноженное на скалярный множитель:

$$\delta = \gamma (\lambda_1 - \omega)^{-1}, \quad (\text{ПЗ.5})$$

ибо тогда цикл внутренних итераций начинается (при больших  $k$ ) почти с решения уравнения (ПЗ.4)

$$(A - \omega I) \gamma (\lambda_1 - \omega)^{-1} u^{k-1} \approx \gamma u^{k-1}.$$

Относительно длительности внутренних итераций получили широкое распространение в практических расчетах следующие три стратегии (см., например, [233, 342]).

**Стратегия 1** — числа  $N_k$  убывают (может быть, не строго монотонно). При этой стратегии возможная внутренняя итерация от тех пор, пока не будет достигнута фиксированная заданная абсолютная точность решения уравнения (ПЗ.4).

**Стратегия 2** — числа  $N_k$  возрастают (может быть, не строго монотонно). Основанием для выбора такой стратегии служат рассуждения о том, что первые внешние итерации еще не дают хорошего приближения к собственной функции  $\Phi_1$ , поэтому и внутренние итерации можно проводить неточно.

**Стратегия 3** — числа  $N_k$  постоянны. При этой стратегии, если внутренний цикл итерации проводить одинаковым образом, ошибка в решении уравнения (ПЗ.4) уменьшается в одинаковое число раз по сравнению с начальной, а опера-

тор перехода цикла внутренних итераций не меняется с ростом  $k$ ; поэтому можно говорить о собственных значениях этого оператора и находить связь их с собственными значениями исходной задачи. Интересен для исследования крайний случай —  $N_k = 1$ .

Является ли каждая из перечисленных стратегий; а также способы ускорения (ПЗ.4), (ПЗ.5) необходимыми элементами в любых оптимальных методах обратных итераций? Оптимальность здесь понимается с точки зрения минимизации затрат общей вычислительной работы. Ниже покажем, что способы (ПЗ.4); (ПЗ.5) и стратегии 1, 2, 3 не являются необходимыми элементами в оптимальных методах и что для определенного класса методов обратных итераций любая из перечисленных стратегий и способы ускорения (ПЗ.4), (ПЗ.5) могут быть применены при реализации оптимального итерационного метода.

### ПЗ.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА И КРИТЕРИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Задачу на собственные значения (ПЗ.1) рассмотрим в  $n$ -мерном пространстве  $E_n$ . Пусть  $\lambda_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , являются собственными значениями и собственными элементами оператора (матрицы)  $A$ . Пусть система  $\{\varphi_i\}_1^n$  полна в  $E_n$ ; и

$$\lambda_1 = \min_i |\lambda_i| > 0, \quad \lambda_1 \notin \Delta(m, M, \varepsilon),$$

$$\lambda_i \in \Delta(m, M, \varepsilon), \quad i > 1, \quad (\text{ПЗ.6})$$

где  $\Delta(m, M; \varepsilon)$  — замкнутая область; ограниченная эллипсом с фокусами в точках  $m, M$  и эксцентриситетом  $\varepsilon > 0$  (при  $\varepsilon = 0$  область превращается в отрезок  $[m, M]$ ). Пусть  $\lambda_1$  — однократное собственное значение. Требуется для задачи (ПЗ.1) найти  $\varphi_1$  (относительно способов нахождения  $\lambda_1$  см. § 10. 32).

Введем обозначения. Пусть  $u^k$  — приближение, полученное на  $k$ -й внешней итерации, а

$$u^0 = \sum_{i=1}^n u_i^0 \varphi_i, \quad u_i^0 \neq 0 \quad (\text{ПЗ.7})$$

— начальное приближение;  $v_j^k$  — приближение, полученное на  $j$ -й внутренней итерации; соответствующей  $k$ -й внешней итерации, а  $N_k$  — длина цикла этой внутренней итерации.

Пусть  $\delta_k$ ;  $\gamma_k$ ;  $\omega_k$ ;  $\beta_k$  — числовые параметры. Внешние итерации мы будем ускорять с помощью параметров  $\beta_k$ . В  $k$ -й внутренней итерации по решению уравнения (ПЗ.4) за начальное приближение  $v_0^k$  будем брать  $\delta_k u^{k-1}$ , за правую часть —  $\gamma_k u^{k-1}$ , сдвиг —  $\omega_k I$ . Пусть  $A_k = A - \omega_k I$ .

Для нахождения  $\varphi_1$  рассмотрим следующий метод обратных итераций с ускорением: по заданному  $u^{k-1}$  приближение  $u^k$  вычисляем по формулам:

$$\left. \begin{aligned} v_j^k &= v_{j-1}^k - H_{kj} (A_k v_{j-1}^k - \gamma_k u^{k-1}); \\ v_0^k &= \delta_k u^{k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_k; \\ \tilde{u}^k &= v_{N_k}^k; \end{aligned} \right\} \quad (\text{ПЗ.8})$$

$$u^k = \tilde{u}^k - \beta_k u^{k-1},$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{ПЗ.9})$$

где  $H_{kj}$  — операторы; определяющие тип итерационного метода решения уравнения (ПЗ.4). Пусть они принадлежат некоторому классу  $\bar{H}$ . Формулы (ПЗ.9) отнесем к внешним итерациям, а формулы (ПЗ.8) — к внутренним, используя их; находим  $v_{N_k}^k$  — приближенное решение уравнения (ПЗ.4).

Найдем операторы перехода внутреннего и внешнего итерационных циклов. Для  $k$ -го внутреннего итерационного цикла имеем следующую связь между  $u^k$  и  $u^{k-1}$ :

$$\tilde{u}^k = v_{N_k}^k = Q_{N_k}^k(A_k, H_k) u^{k-1}, \quad (\text{ПЗ.10})$$

где

$$Q_{N_k}^k(A_k, H_k) = \delta_h P_{N_k}^k(A_k, H_k) + \gamma_k (I - P_{N_k}^k(A_k, H_k)) A_k^{-1}; \quad (\text{ПЗ.11})$$

$$P_{N_k}^k(A_k, H_k) = \prod_{j=1}^{N_k} (I - H_{kj} A_k); \quad (\text{ПЗ.12})$$

$$H_k = \{H_{kj}\}_1^{N_k}$$

Пусть  $\bar{N} = \sum_{k=1}^N N_k$ ; тогда связь между  $u^0$  и  $u^N$  задается формулой

$$u^N = S_{\bar{N}}(A, H) u^0, \quad (\text{ПЗ.13})$$

где

$$S_{\bar{N}}(A, H) = \prod_{k=1}^N (Q_{N_k}^k(A_k, H_k) - \beta_k I); \quad (\text{ПЗ.14})$$

$$H = \{H_k\}_1^N.$$

Таким образом,  $Q_{N_k}^k$  и  $S_{\bar{N}}$  — операторы перехода соответственно внутренних и внешнего итерационных циклов.

Задачу оптимизации метода (ПЗ.8), (ПЗ.9) рассмотрим в предположении; что операторы  $A$  и  $H_{kj}$  коммутируют, т. е.  $AH_{kj} = H_{kj}A$ . В этом случае  $\{\varphi_i\}_1^n$  будут собственными элементами операторов  $H_{kj}$  с собственными значениями, которые обозначим  $h_{kj} = h_{kj}(i)$ . Естественным образом можно определить соответствие ( $\sim$ ) между введенными операторами и скалярными функциями (от  $i$ ):

$$\left. \begin{aligned} A \sim \lambda = \lambda(i), \quad H_{kj} \sim h_{kj} = h_{kj}(i); \\ P_{N_k}^k(A_k, H_k) \sim P_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) = \prod_{j=1}^{N_k} (1 - h_{kj}(\lambda - \omega_k)), \end{aligned} \right\} \quad (\text{ПЗ.15})$$

причем

$$P_{N_k}^k(0) = 1; \quad (\text{ПЗ.16})$$

$$Q_{N_k}^k(A_k, H_k) \sim Q_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) = \delta_h P_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) + \gamma_k (1 - P_{N_k}^k(\lambda - \omega_k)) / (\lambda - \omega_k); \quad (\text{ПЗ.17})$$

$$Q_{N_k}^k(\gamma_k / \delta_k) = \delta_h, \quad \delta_h \neq 0. \quad (\text{ПЗ.18})$$

Из (ПЗ.17) следует, что

$$P_{N_k}^k(\lambda) = \frac{\lambda Q_{N_k}^k(\lambda - \gamma_k)}{\delta_h \lambda - \gamma_k}. \quad (\text{ПЗ.19})$$

А

$$S_{\bar{N}}(A, H) \sim S_{\bar{N}}(\lambda) = \prod_{k=1}^N (Q_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) - \beta_k). \quad (\text{ПЗ.20})$$

Собственными элементами и значениями оператора  $S_{\bar{N}}(A, H)$  будут  $\{\varphi_i\}_1^n$  и  $S_{\bar{N}}(\lambda_i)$ . Поэтому, учитывая формулу (ПЗ.7) для начального приближения, получаем, что

$$u^N = \sum_{i=1}^n u_i^e S_{\bar{N}}(\lambda_i) \varphi_i. \quad (\text{ПЗ.21})$$

Таким образом, эффективность метода (ПЗ.8), (ПЗ.9) будет зависеть от скорости убывания к нулю отношений  $|S_{\bar{N}}(\lambda_i)/S_{\bar{N}}(\lambda_1)|$  при  $i > 1$ . Учитывая, что функция  $S_{\bar{N}}(\lambda)$  является однородной функцией первой степени относительно каждой группы переменных  $\delta_k, \gamma_k, \beta_k$ , замечаем, что эти отношения не изменятся, если величины  $\delta_k, \gamma_k, \beta_k$  заменить в них величинами  $a\delta_k, a\gamma_k, a\beta_k$  при  $a \neq 0$ , а приближения, получаемые после такой замены, будут отличаться от прежних лишь нормировочным множителем. Будем считать еще, что эффективность метода (ПЗ.8), (ПЗ.9) существенно определяется общим числом внутренних итераций  $\bar{N} = \sum_{k=1}^n N_k$ . Итак, мы видим, что функция  $S_{\bar{N}}(\lambda)$  зависит от  $\bar{N}$  функций  $h_{kj}$  и  $5N$  числовых параметров  $\delta_k, \gamma_k, \beta_k, \omega_k, N_k, k = 1, 2, \dots, N$ , на которые наложены упомянутые выше связи.

Задачу оптимизации метода (ПЗ.8), (ПЗ.9), в котором  $H_{kj} \in \bar{H}$ , а  $\bar{N}$  — задано, для решения класса задач (ПЗ.1), спектр которых обладает перечисленными выше свойствами, в частности, свойством (ПЗ.6), сформулируем в следующей постановке: назовем итерационный метод (ПЗ.8), (ПЗ.9) оптимальным, если параметры  $\delta_k, \gamma_k, \beta_k, N_k$  и операторы  $H_{kj} \in \bar{H}$  выбраны так, чтобы при этом реализовался

$$\inf_{\delta_k, \omega_k, \gamma_k, \beta_k, N_k} \inf_{H_{kj} \in \bar{H}} \sup_{\lambda \in \mathfrak{E}(m, M, e)} \left| \frac{S_{\bar{N}}(\lambda)}{S_{\bar{N}}(\lambda_1)} \right|. \quad (\text{ПЗ.22})$$

Из формулы (ПЗ.21) для  $u^N$  следует, что в оптимальном методе компоненты при  $\varphi_i$  с  $i > 1$  наиболее интенсивно уменьшаются с ростом  $\bar{N}$  по сравнению с компонентой при  $\varphi_1$ .

### ПЗ.2. СКАЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Далее исследуем случай, когда внутренние итерации проводятся методом чебышевского типа с операторами

$$H_{kj} = \alpha_{kj} I \quad (h_{kj} = \alpha_{kj}), \quad (\text{ПЗ.23})$$

где  $\alpha_{kj}$  — скалярные параметры. Тогда в формуле (ПЗ.22), определяющей оптимальный метод, условие  $\inf$  следует заменить  $\inf_{H_{kj} \in H}$ , а функции  $P_{N_k}^k(\lambda)$ ,  $Q_{N_k}^k(\lambda)$ ,  $S_{\bar{N}}(\lambda)$  будут многочленами от  $\lambda$  с коэффициентами, зависящими от  $\delta_k, \gamma_k, \omega_k, \beta_k, \alpha_{kj}$ :

$$P_{N_k}^k(\lambda) = \prod_{j=1}^{N_k} (1 - \alpha_{kj} \lambda); \quad (\text{ПЗ.24})$$

$$Q_{N_k}^k(\lambda) = \delta_k P_{N_k}^k(\lambda) + \gamma_k (1 - P_{N_k}^k(\lambda)) \lambda^{-1}; \quad (\text{ПЗ.25})$$

$$S_{\bar{N}}(\lambda) = \prod_{k=1}^n (Q_{N_k}^k(\lambda) - \beta_k). \quad (\text{ПЗ.26})$$



Заметим, что  $\alpha_{kj} = a_{kj}^{-1}$ , где  $a_{kj}$  — корни уравнения

$$P_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) = 0. \quad (\text{ПЗ.27})$$

Многочлен  $S_{\bar{N}}(\lambda)$ , реализующий условие оптимальности (ПЗ.22) для рассматриваемого случая известен:

$$S_{\bar{N}}(\lambda) = C_N^0 \prod_{i=1}^{\bar{N}} (\lambda - \mu_i), \quad (\text{ПЗ.28})$$

где

$$\mu_i = \frac{1}{2} (M + m + (M - m) \cos \omega_i \pi); \quad (\text{ПЗ.29})$$

$$\omega_i = (2k_i - 1) / (2\bar{N}), \quad (\text{ПЗ.30})$$

а  $\kappa_{\bar{N}} = (k_1, k_2, \dots, k_{\bar{N}})$  — некоторая перестановка порядка  $\bar{N}$ , обеспечивающая устойчивость счета в чебышевских методах;  $C_N^i$  здесь и далее будем обозначать положительные постоянные.

Таким образом, задача построения оптимального метода свелась к нахождению таких наборов параметров  $\delta_k, \gamma_k, \omega_k, \beta_k, \alpha_{kj}$  в количестве  $\bar{N} + 4N$  штук, чтобы многочлен  $S_{\bar{N}}(\lambda)$  степени  $\bar{N}$ , заданный формулой (ПЗ.26), имел вид (ПЗ.28)—(ПЗ.30). Поскольку общее число параметров превышает необходимое для определения  $S_{\bar{N}}(\lambda)$  на  $3N$ , получаем многопараметрическое семейство оптимальных итерационных методов типа (ПЗ.8), (ПЗ.9), дающих с точностью до нормировки один и тот же окончательный результат. При этом каждый набор параметров будет имитировать метод (ПЗ.8), (ПЗ.9) со своей структурой проведения циклов внутренних итераций, способом выбора начальных приближений и сдвигов по спектру.

### ПЗ.3. РАЗЛИЧНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

Используя возможность неоднозначного выбора параметров  $\delta_k, \gamma_k, \omega_k, \beta_k, \alpha_{kj}$ , реализующих оптимальный метод, проимитируем различные типы оптимальных методов вида (ПЗ.8), (ПЗ.9) При этом в рассуждениях часто будем следовать от конечного результата (см. формулы (ПЗ.28)—(ПЗ.30)). Сначала будем считать, что  $\delta_k \neq 0$ .

1. Пусть  $N_k = 1$ . Прежде всего заметим, что сами формулы (ПЗ.28)—(ПЗ.30) уже подсказывают простейший тип оптимального итерационного метода

$$u^k = Au^{k-1} - \mu_k u^{k-1}. \quad (\text{ПЗ.31})$$

Это, по-видимому, наилучшая реализация оптимального степенного итерационного метода с чебышевским ускорением, примененным к оператору  $A$ . Этот метод можно интерпретировать как метод (ПЗ.8), (ПЗ.9), с  $N_k = 1$ ;  $\gamma_k = \omega_k = 0$ ;  $\delta_k = 1$ ;  $\alpha_{k1} = -1$ ;  $\beta_k = \mu_k + 1$ .

Нетрудно убедиться, что в общем случае при  $N_k = 1$  метод (ПЗ.8), (ПЗ.9) будет оптимальным в том и только в том случае, когда его параметры удовлетворяют соотношениям

$$\delta_k (1 + \alpha_{k1} (\omega_k - \mu_k)) = \beta_k - \alpha_{k1} \gamma_k, k = 1, 2, \dots, \bar{N}. \quad (\text{ПЗ.32})$$

Следовательно, условие

$$\delta_k = \gamma_k (\lambda_1 - \omega_k)^{-1} \quad (\text{ПЗ.33})$$

не является необходимым для оптимального метода, хотя, зная  $\lambda_1$ , его можно выполнять, налагая дополнительную связь (ПЗ.33) на параметры в соотношениях (ПЗ.32). Аналогичное замечание справедливо и относительно употребления метода Виланда: если параметры  $\omega_k$  удовлетворяют (ПЗ.32), то такой метод будет оптимальным (при этом предельные значения  $\alpha_{k1}$  при  $\omega_k \rightarrow \lambda_1$  будут равны  $(\mu_k - \lambda_1)^{-1}$ ). Однако поскольку окончательная формула для  $S_{\bar{N}}(\lambda)$  (ПЗ.30) не зависит от  $\omega_k$ , то применение сдвигов не является необходимым условием в оптимальном методе.

Наконец, заметим, что выбирая  $\beta_k = 0$ , а остальные параметры метода — удовлетворяющими соотношениям (ПЗ.32), получаем оптимальный метод без ускорения внешних итераций.

2. Теперь постараемся явно проинитировать произвольные циклы внутренних итераций. Пусть  $N_k \geq 1$ ,  $k = 1, \dots, N$ , — произвольные целые числа, такие, что  $\bar{N} = \sum_{k=1}^N N_k$ ; пусть  $\bar{N}_k = \sum_{i < k} N_i$ ,  $\bar{N}_1 = 0$ , а

$$R_{N_k}^k(\lambda) = \prod_{j=\bar{N}_k+1}^{\bar{N}_k+1} (\lambda - \mu_j). \quad (\text{ПЗ.34})$$

Возьмем

$$Q_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) = B_k R_{N_k}^k(\lambda) + \tau_k, \quad (\text{ПЗ.35})$$

где  $B_k \neq 0$  и  $\tau_k \neq \delta_k$  — дополнительные параметры. Тогда  $\beta_k = \tau_k$ , а в силу условия (ПЗ.18) имеем

$$\delta_k = B_k R_{N_k}^k(v_k) + \tau_k, v_k = \omega_k + \gamma_k / \delta_k, \quad (\text{ПЗ.36})$$

т. е.

$$Q_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) = \delta_k + B_k (R_{N_k}^k(\lambda) - R_{N_k}^k(v_k)), \quad (\text{ПЗ.37})$$

а

$$\beta_k = \delta_k - B_k R_{N_k}^k(v_k). \quad (\text{ПЗ.38})$$

При этом согласно (ПЗ.19)

$$P_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) = 1 + \frac{B_k(\lambda - \omega_k)}{\delta_k(\lambda - v_k)} (R_{N_k}^k(\lambda) - R_{N_k}^k(v_k)). \quad (\text{ПЗ.39})$$

Следовательно, для заданного набора значений  $\delta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\omega_k$ ,  $B_k$  параметры  $\alpha_{kj}$   $k$ -го цикла внутренних итераций равны  $a_{kj}^{-1}$ , где  $a_{kj}$  — корни уравнения (ПЗ.27).

Удобнее (но не обязательно) параметры  $\delta_k, \gamma_k; \omega_k, B_k$  выбирать такими, чтобы все  $\alpha_{kj}$  были действительными, эти исследования проводятся методами, которые будут применены для анализа расположения корней уравнения (ПЗ.48). Из формул (ПЗ.35)—(ПЗ.39) следует, что мы можем выбирать любые длины циклов внутренних итераций (в частности; по любой из трех стратегий) и что метод Виланда положительного эффекта не дает. Начальные же приближения можно выбирать в широком диапазоне величин.

Рассмотрим несколько конкретных алгоритмов, связанных с реализацией формул (ПЗ.34)—(ПЗ.39).

3. Если в (ПЗ.35)  $\tau_k = 0$ , тогда  $\beta_k = 0$  и

$$Q_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) = \delta_k R_{N_k}^k(\lambda) / R_{N_k}^k(v_k),$$

т. е. оптимальный режим проведения итераций возможен без ускорения внешних итераций.

4. Пусть  $\tau_k = 0, \gamma_k = 0$ . Тогда  $\nu_k = \omega_k; \beta_k = 0$ ;

$$P_{N_k}^k(\lambda - \omega_k) = R_{N_k}^k(\lambda) / R_{N_k}^k(\omega_k) = \prod_{j=\bar{N}_k+1}^{\bar{N}_k+1} \left( 1 - \frac{\lambda - \omega_k}{\mu_j - \omega_k} \right),$$

т. е.

$$\alpha_{kj} = (\mu_{j+\bar{N}_k} - \omega_k)^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_k. \quad (\text{ПЗ.40})$$

В этом случае формулы (ПЗ.8) примут вид

$$v_j^k = \frac{\mu_{\bar{N}_k+j}}{\mu_{\bar{N}_k+j} - \omega_k} \left( v_{j-1}^k - \frac{1}{\mu_{\bar{N}_k+j}} A v_{j-1}^k \right), \quad (\text{ПЗ.41})$$

$$v_0^k = \delta_k u^k.$$

Таким образом; видим, что в этом случае итерационный метод (ПЗ.41) нет обязан давать сходящуюся к решению уравнения (ПЗ.4) последовательность  $v_j^k$ .

Рассмотрим еще два варианта, в которых коэффициенты вычисляются по явным формулам.

5. Пусть  $N_k = 1$ ; а

$$Q_1^k(\lambda - \omega_k) = B_k(\lambda - \mu_k) + \tau_k.$$

Учитывая (ПЗ.18), получаем

$$Q_1^k(\lambda - \omega_k) = \delta_k + B_k(\lambda - \omega_k).$$

Следовательно,

$$\beta_k = \delta_k - B_k(v_k - \mu_k), \quad (\text{ПЗ.42})$$

а

$$P_1^k(\lambda) = 1 + \frac{B_k}{\delta_k} \lambda,$$

т. е.

$$\alpha_{k1} = -B_k / \delta_k. \quad (\text{ПЗ.43})$$

6. Пусть  $N_k = 2$ ,

$$R_2^k(\lambda) = (\lambda - \mu_{2k-1})(\lambda - \mu_{2k}).$$

Тогда

$$P_2^k(\lambda) = 1 + \frac{B_k}{\delta_k} \lambda (\lambda + \omega_k + \nu_k - \mu_{2k-1} - \mu_{2k}),$$

т. е.  $\alpha_{kj}$ ,  $j = 1, 2$ , — величины, обратные корням уравнения

$$(\lambda - \omega_k)(\lambda + \nu_k - \mu_{2k-1} - \mu_{2k}) = -B_k/\delta_k.$$

7. Представляет интерес найти семейство итерационных методов (ПЗ.8); (ПЗ.9), для которого параметры внутренних итераций не зависят от  $k$ , т. е.  $N_k = l$ ,  $\gamma_k = \gamma$ ,  $\delta_k = \delta$ ,  $\alpha_{kj} = \alpha_j$ . Тогда  $\bar{N} = lN$ . Пусть

$$x = (M + m - 2\lambda)/(M - m),$$

а

$$\bar{\mu}_i = \cos \frac{2k_i - 1}{2N} \pi, \quad 1 \leq k_i \leq N, \quad k_i \neq k_j \text{ при } i \neq j.$$

Тогда, пользуясь формулой для многочленов Чебышева  $T_{lN}(x)$ :

$$T_{lN}(x) = T_N(T_l(x)) = C_N^l \prod_{i=1}^N (T_l(x) - \bar{\mu}_i),$$

представим многочлен  $S_N(\lambda)$  (ПЗ.28) в виде

$$S_N(\lambda) = C_N^2 \prod_{i=1}^N (T_l(x) - \bar{\mu}_i). \quad (\text{ПЗ.44})$$

Возьмем

$$Q_l^k(\lambda - \omega) = BT_l(x) + \tau;$$

тогда вследствие (ПЗ.18) имеем

$$\tau = \delta - BT_l(\bar{\nu}),$$

где

$$\bar{\nu} = (M + m - 2\nu)/(M - m); \quad \nu = \omega + t; \quad t = \gamma/\delta.$$

Поэтому

$$\beta_k = \tau + (\delta - \tau) \mu_k / T_l(\bar{\nu}); \quad (\text{ПЗ.45})$$

$$Q_l^k(\lambda - \omega) = \tau + (\delta - \tau) T_l(x) / T_l(\bar{\nu}), \quad (\text{ПЗ.46})$$

а

$$P_l^k(\lambda - \omega) = 1 + \frac{(\delta - \tau)(\lambda - \omega)}{\delta(\lambda - \nu)} \left( \frac{T_l(x)}{T_l(\bar{\nu})} - 1 \right). \quad (\text{ПЗ.47})$$

Уравнение (ПЗ.27) для определения корней  $a_{ki} = a_i \neq v$  преобразуем к виду

$$T_l(x)/T_l(\bar{v}) = \psi(\lambda, \delta, \gamma, \omega, \tau), \quad (\text{ПЗ.48})$$

где

$$\psi(\lambda, \delta, \gamma, \omega, \tau) = \frac{\gamma - \tau(\lambda - \omega)}{(\delta - \tau)(\lambda - \omega)}. \quad (\text{ПЗ.49})$$

Заметим, что значение  $\lambda = v$  является паразитным корнем (ПЗ.48). Поскольку  $\psi$  — монотонная функция вне любой окрестности  $\lambda = \omega$ , а правая часть (ПЗ.48) при  $|x| < 1$ ,  $v < m$  стремится к нулю при  $l \rightarrow \infty$ , то при фиксированных значениях  $\sigma, \gamma, \omega, \tau$  уравнение (ПЗ.48) будет для достаточно больших  $l$  иметь комплексные корни. Однако всегда можно добиться выбором зависящих от  $l$  параметров  $\delta, \gamma, \omega, \tau$ , чтобы уравнение (ПЗ.48) имело действительные корни. Приведем один из алгоритмов, для которого все корни многочлена  $P_l^k(\lambda - \omega)$  лежат на отрезке  $[m, M]$ . Для этого выберем  $\tau$  так, чтобы функция  $\psi$  принимала одинаковые по модулю, но противоположные по знаку значения при  $\lambda = m, M$ :

$$\tau = \frac{\gamma(M + m - 2\omega)}{2(M - \omega)(m - \omega)}. \quad (\text{ПЗ.50})$$

При этом значении  $\tau$

$$\psi(m, \delta, \gamma, \omega, \tau) = \frac{t(M - m)}{2(m - \omega)(M - \omega) - t(M + m - 2\omega)}.$$

Теперь зададимся некоторым  $v = \omega + t < m$  таким, чтобы  $M(1 - b_l) - m(1 + b_l) - 2b_l v > 0$ , где  $b_l = T_l^{-1}(\bar{v}) < 1$ , и потребуем, чтобы уравнение (ПЗ.48) имело корень при  $\lambda = m$ , т. е. чтобы

$$b_l = \frac{t(M - m)}{2(M - v)(m - v) + t(M + m - 2v)}.$$

Из этого уравнения определяем  $t = \gamma/\delta$ :

$$t = \frac{2b_l(M - v)(m - v)}{M - m - b_l(M + m - 2v)} > 0,$$

а следовательно, и  $\delta, \gamma, \omega$ . Тогда все корни  $a_i \neq v$  многочлена (ПЗ.47) будут принадлежать отрезку  $[m, M]$ , а

$$a_i = a_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Можно поступить по-другому. Пусть  $\omega < v < m$ . Положим в (ПЗ.48)  $\tau = 0$  и устремим  $t = \gamma/\delta$  к нулю. Тогда корни  $a_i \rightarrow a_i^?$ , где  $a_i^?$  — корни многочлена Чебышева первого рода, отнесенного к отрезку  $[m, M]$ . Следовательно, для заданного  $l$  при достаточно малом  $t$  все корни  $a_i \in [m, M]$  и для них можно дать асимптотические выражения. Отметим, что метод Виланда с  $\delta = \gamma(\lambda_1 - \omega)^{-1}$  и  $\omega \approx \lambda_1$  как раз является методом, в котором  $t = \gamma/\delta$  может быть сделано сколько угодно малым. Это единственная привлекательная черта метода Виланда в методах обратных итераций.

8. Наконец, рассмотрим случай, когда  $\delta_k = 0$ . Тогда

$$Q_{N_k}^k(\lambda) = \gamma_k (1 - P_{N_k}^k(\lambda)) \lambda^{-1},$$

или

$$P_{N_k}^k(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{\gamma_k} Q_{N_k}^k(\lambda). \quad (\text{ПЗ.51})$$

Заметим, что степени у  $P_{N_k}^k(\lambda)$  и  $Q_{N_k}^k(\lambda)$  различны. Если в обозначениях п. 7  $N_k = l > 1$ , а при  $B \neq 0$ ,  $\omega < m$

$$Q_l^k(\lambda - \omega) = BT_l(x) + \tau,$$

то

$$\beta_k = \tau + B \bar{\mu}_k,$$

и уравнение для определения  $a_l$  имеет вид

$$T_l(x) = \frac{1}{B} \left( \frac{\gamma}{\lambda - \omega} - \tau \right). \quad (\text{ПЗ.52})$$

При достаточно малых  $\tau/B$  и  $\gamma/B$  уравнение (ПЗ.52) имеет  $l$  действительных корней на  $[m, M]$  и один корень в окрестности  $\lambda = \omega$ . В этом случае внутренний цикл итераций состоит из  $l + 1$  итерации, однако первая итерация происходит без вычисления  $Au^{k-1}$ , т. е. ее выполнение эквивалентно заданию некоторого начального приближения для второй итерации.

## Список литературы

1. **Абрамов А. А.** Ускорение сходимости в итерационных процессах. — Докл. АН СССР, 1950, т. 74, № 5, с. 1051.
2. **Абрамов А. А.** Идеи теории возмущений в некоторых алгоритмах линейной алгебры. — В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. Вып. 1. М., изд. ВЦ АН СССР, 1968, с. 85.
3. **Агошков В. И.** Вариационные методы в теории переноса. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1975.
4. **Агошков В. И.** Некоторые особенности решения уравнения переноса и учет их при построении базисных функций. Препринт № 58. Новосибирск, 1977.
5. **Агошков В. И.** О вариационной форме интегрального тождества Г. И. Марчука. Препринт № 39. Новосибирск, 1977.
6. **Агошков В. И.** О гладкости решений уравнения переноса и приближенных методах построения. — В кн.: Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1977, с. 44.
7. **Агошков В. И.** О дифференциальных свойствах решений периодических задач о переносе частиц. Препринт № 23. Новосибирск, 1976.
8. **Агошков В. И.** Приближенное решение уравнения переноса в плоско-параллельной геометрии обобщенным методом Бубнова—Галеркина. — В кн. Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1975, т. 6, № 5, с. 5.
9. **Агошков В. И., Лобарев И. В.** Решение задачи на собственные значения для уравнения переноса. — В кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1978, с. 102.
10. **Агошков В. И.** Решение многомерного уравнения переноса обобщенным методом Бубнова—Галеркина. Препринт № 14. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1975.
11. **Адамская И. А.** Запись кинетического уравнения в сферических гармониках (криволинейные координаты — осесимметричный случай). — ЖВМ и МФ\*, 1963, т. 3, № 5, с. 927.
12. **Адамская И. А., Годунов С. К., Прокопов Г. П.** Выражение функционала В. С. Владимирова через сферические гармоники в тензорной форме ( $P_2$ -приближение). — Там же, 1968, т. 8, № 4, с. 824.
13. **Адамская И. А., Годунов С. К.** Метод сферических гармоник в задаче о критических параметрах. — Там же, 1964, т. 4, № 3, с. 473.
14. **Айнс Э.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., ОНТИ, 1939.
15. **Алексеев П. П., Болобов П. А., Зарицкий С. М. и др.** Сравнение четырех итеративных методов решения однокрупных уравнений для двумерных моделей быстрых реакторов. — Атомная энергия, 1978, т. 45, вып. 5, с. 386.
16. **Алексеев П. Н., Зарицкий С. М., Шишков Л. К.** Выбор оптимального варианта метода переменных направлений для расчета двумерных моделей реакторов. — Там же, вып. 5, с. 384.
17. **Амбарцумян В. А.** Рассеяние и поглощение света в планетных атмосферах. Уч. зап. ЛГУ, 1941, т. 82, с. 141.

\* Здесь и далее ЖВМ и МФ — Журнал вычислительной математики и математической физики.

18. **Achieser N. I.** Ueber einige Funktionen, die in gegebenen Interwalen am wenigsten von Null abweichen. — Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва, 1928, с. 1.
19. **Бас Л. П., Гермогенова Т. А., Хмылев А. Н.** Модульная структура программ в осесимметричных задачах теории переноса системы «Радуга». Препринт 97 ИПМ АН СССР. М., 1973.
20. **Бать Г. А., Григорьева Е. А., Лебедев В. И., Прохоров А. И.** Вычисление коэффициента теплового использования в ячейках со сложными тепловыделяющими элементами. Доклад (СССР), представленный на Третью международную конференцию по мирному использованию атомной энергии, А/CONF 28/P/373. Женева, 1964.
21. **Бахвалов Н. С.** О численном решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа. — Вестн. Моск. ун-та, 1959, № 5, с. 171.
22. **Бахвалов Н. С.** О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор. — ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 5, с. 861.
23. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. Т. 1. М., Наука, 1973.
24. **Белл Д., Глесстон С.** Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1974.
25. **Березин И. С., Жидков И. П.** Методы вычислений. Т. 1, 2. М., Физматгиз, 1959.
26. **Бернштейн С. Н.** Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций. Собр. соч. Т.1. М., Изд-во АН СССР, 1952, с. 127.
27. **Бернштейн С. Н.** О многочленах, ортогональных на конечном отрезке. Собр. соч. Т.2. М., Изд-во АН СССР, 1954, с. 7.
28. **Биркгоф Г., Вигнер Е.** Положительность и критичность. — В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1963, с. 132.
29. **Бирман М. Ш.** Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска. — Успехи матем. наук, 1950, т. 5, № 3, с. 152.
30. **Бирман М. Ш.** Об одном варианте метода последовательных приближений. — Вестн. ЛГУ, 1952, т. 9, с. 69.
31. **Большаков Л.** Лекции по теории газов. Сер. «Классики естествознания». Пер. с нем. М., Гостехтеориздат, 1956.
32. **Де Брейн И. Г.** Асимптотические методы в анализе. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
33. **Вазов В., Форсайт Дж.** Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
34. **Варга Р. С.** Численные методы решения многомерных многогрупповых дифференциальных уравнений. — В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1963, с. 187.
35. **Варга Р. С.** Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. Пер. с англ. М., Мир, 1974.
36. **Вейнберг А., Вигнер Е.** Физическая теория ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
37. **Вигнер Е. В.** Математические проблемы теории ядерных реакторов. — В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1963, с. 103.
38. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц, самосопряженных и несамосопряженных уравнений. — Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 3, с. 93.
39. **Владимиров В. С.** Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. — Прикл. матем. и мех., 1955, т. 19, вып. 3, с. 315.
40. **Владимиров В. С.** Численные методы решения кинетического уравнения для сферы. — Вычислит. матем., 1958, № 3, с. 31.
41. **Владимиров В. С.** Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. — Тр. матем. ин-та АН СССР, 1961, т. 61.
42. **Владимиров В. С.** О некоторых вариационных методах приближенного решения уравнения переноса. — Вычислит. матем., 1961, № 7, с. 93.
43. **Владимиров В. С.** Особенности решения уравнения переноса. — ЖВМ и МФ, 1968, т. 8, № 4, с. 842.



44. **Воробьев Ю. В.** Метод моментов в прикладной математике. М., Физматгиз, 1958.
45. **Воробьев Ю. В.** Случайный итерационный процесс. — ЖВМ и МФ, 1964, т. 4, № 6, с. 1088.
46. **Воробьев Ю. В.** Случайный итерационный процесс. — Там же, 1965, т. 5, № 5, с. 787.
47. **Воробьев Ю. В.** Случайные итерационные процессы в методе переменных направлений. — Там же, 1968, т. 8, № 3, с. 663.
48. **Вычислительные методы в теории переноса.** Сб. статей под ред. Г. И. Марчука. М., Атомиздат, 1969.
49. **Вычислительные методы в физике реакторов.** Сб. статей. Под ред. Х. Гринспена, К. Кольбера, Д. Окрента. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1972.
50. **Гауриин М. К.** Применение полиномов наилучшего приближения для улучшения сходимости итерационных процессов. — Успехи матем. наук, 1950, т. 5, № 3, с. 156.
51. **Гауриин М. К.** О методе ложных возмущений для разыскания собственных значений. — ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 5, с. 757.
52. **Гауриин М. К.** Лекции по методам вычислений. М., Наука, 1971.
53. **Галанин А. Д.** Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. М., Атомиздат, 1957.
54. **Галеркин Б. Г.** Стержни и пластинки. — Вестн. инженеров, 1915, т. 19, с. 897.
55. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М., Наука, 1966.
56. **Гельфанд И. М., Локуцкий О. В.** Метод прогонки для решения разностных уравнений. — В кн.: Годунова С. К., Рябенского В. С. «Введение в теорию разностных схем». М., Физматгиз, 1962, с. 452.
57. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними. Л. — М., Физматгиз, 1958.
58. **Гермогорова Т. А.** О характере решения уравнения переноса для плоского слоя. — ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 6, с. 1001.
59. **Гермогорова Т. А.** О сходимости некоторых приближенных методов решения уравнения переноса. — Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 3, с. 519.
60. **Гермогорова Т. А.** Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса. — ЖВМ и МФ, 1969, т. 9, № 3, с. 605.
61. **Гермогорова Т. А.** Локальные свойства решения уравнения переноса. Препринт ИПМ АН СССР. М., 1968.
62. **Гермогорова Т. А., Дегтярев С. Ф., Орлов В. В. и др.** Перенос быстрых нейтронов в плоских защитах. М., Атомиздат, 1971.
63. **Глесстон С., Эдлунд М.** Основы теории ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
64. **Годунов С. К.** Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений. — ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 6, с. 972.
65. **Годунов С. К., Прокопов Г. П.** Вариационный подход к решению больших систем линейных уравнений, возникающих в сильноэллиптических задачах. — Препринт ИПМ АН СССР. М., 1968.
66. **Годунов С. К., Рябенский В. С.** Разностные схемы. Введение в теорию. М., Наука, 1973.
67. **Гольдин В. Я.** Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения. — Докл. АН СССР, 1960, т. 133, № 4, с. 748.
68. **Гольдин В. Я.** Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. — ЖВМ и МФ, 1964, т. 4, № 6, с. 1078.
69. **Гольдин В. Я., Калиткин И. Н., Шишова Г. В.** Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений. — Там же, 1965, т. 5, № 5, с. 938.
70. **Давиденко Д. Ф.** Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. — Докл. АН СССР, 1953, т. 88, № 4, с. 601.
71. **Давиденко Д. Ф.** О применении метода вариации параметра к построению итерационных формул повышенной точности для определения численных решений нелинейных интегральных уравнений. — Там же, 1965, т. 162, № 3, с. 499.
72. **Давыдов А. С.** Теория атомного ядра. М., Физматгиз, 1958.

73. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы (спектральная теория). Пер. с англ. М., Мир, 1966.
74. Деклу А. Метод конечных элементов. Пер. с франц. М., Мир, 1976.
75. Дородницын А. А. К задаче вычисления собственных чисел и собственных векторов. — Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 6, с. 1170.
76. Дьяконов Е. Г. Метод переменных направлений решения систем конечно-разностных уравнений. — Там же, 1961, т. 138, № 2, с. 271.
77. Дьяконов Е. Г. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи сеток. Диссертация. М., МГУ, 1962.
78. Дьяконов Е. Г. О некоторых разностных схемах для решения краевых задач. — ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 1, с. 57.
79. Дьяконов Е. Г. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру. — Там же, 1966, т. 6, № 1, с. 12.
80. Дьяконов Е. Г., Лебедев В. И. Метод расщепления для третьей краевой задачи. — Вычислительные методы и программирование. Вып. IV. М., Изд-во МГУ, 1967, с. 101.
81. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1960.
82. Емельянов К. В., Ильин А. М. О числе арифметических действий, необходимых для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. — ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, № 3, с. 905.
83. Желязны Р. Метод разложения по собственным функциям в теории транспорта нейтронов. Доклад (ПНР), представленный на Третью международную конференцию по мирному использованию атомной энергии. A/CONF 28/P/498. Женевы, 1964.
84. Золотарев Е. И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля. — В кн.: Записки Санкт-Петербургской Академии Наук. 1877, т. XXX, № 5.
85. Иосида К. Функциональный анализ. Пер. с англ. М., Мир, 1967.
86. Кадомцев Б. Б. О функции влияния в теории переноса лучистой энергии. — Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 3, с. 541.
87. Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла. — Изв. АН СССР. Сер. ОМЭН; 1933, т. 5, с. 647.
88. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. — Успехи матем. наук, 1948, т. 3, № 6 (28), с. 89.
89. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М. — Л., Гостехиздат, 1949.
90. Канторович Л. В. Об основных приемах численного интегрирования четных и нечетных функций. — Тр. матем. ин-та АН СССР, 1949, т. 28, с. 3.
91. Канторович Л. В. Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала. — Докл. АН СССР, 1945, т. 48, № 7, с. 485.
92. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
93. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. 2-е. Пер. с нем. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
94. Карлсон Б., Белл Дж. Решение транспортного уравнения  $S_d$ -методом. — В кн.: Физика ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
95. Карлсон Б. Численное решение задач кинетической теории нейтронов. — В кн.: Теория ядерных реакторов. Пер. с англ. М., Госатомиздат, 1963.
96. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. Пер. с нем. М., Мир, 1969.
97. Красносельский М. А., Крейн С. Г. Итеративный процесс с минимальными невязками. — Матем. сб., 1952, т. 31 (73), с. 2.
98. Красносельский М. А., Забрейко М. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространстве суммируемых функций. М., Наука, 1966.
99. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко М. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., Наука, 1969.

100. Крылов А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. Изв. АН СССР. Сер. ОМЭН, 1931, т. 4, с. 491.
101. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., Физматгиз, 1959.
102. Кублановская В. Н. Применение аналитического продолжения методом замены переменных в численном анализе. — Тр. матем. ин-та АН СССР, 1959, т. 53, с. 145.
103. Кузнецов Е. С. Лучистое равновесие газовой оболочки, окружающей черную сферу. — Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1951, № 3, с. 69.
104. Кузнецов Е. С. К методике расчета ячейки гетерогенного реактора. — ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, № 3, с. 488.
105. Кузнецов Ю. А. Некоторые вопросы теории и приложений итерационных процессов. Диссертация. Новосибирск, 1969.
106. Кузнецов Ю. А. К теории итерационных процессов. — Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2, с. 274.
107. Кузнецов Ю. А. О симметризации приближенных задач теории переноса. — В кн.: Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. Новосибирск, Наука, 1978, с. 125.
108. Кузнецов Ю. А. О симметризации итерационных процессов. — В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1969, с. 30.
109. Кузнецов Ю. А., Протасов А. В. Об одном подходе к решению кинетического уравнения для сферы. — Там же, с. 41.
110. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики. — Успехи матем. наук, 1940, вып. 8, с. 125.
111. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Киев, Наукова думка, 1968.
112. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1965.
113. Ладженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М., Гостехиздат, 1953.
114. Лалетин Н. И. Элементарные решения уравнения переноса нейтронов для задач с цилиндрической и сферической симметрией. — Атомная энергия, 1966, т. 20, вып. 6, с. 509.
115. Лалетин Н. И. Метод поверхностных псевдоисточников для решения уравнения переноса ( $G_N$ -приближения). — В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. М., Атомиздат, 1969, с. 228.
116. Лалетин Н. И. Метод поверхностных псевдоисточников для решения уравнения переноса нейтронов ( $G_N$ -приближения). — В кн.: Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов. М., Атомиздат, 1974, с. 187.
117. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Пер с англ. М., Физматгиз, 1961.
118. Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. — ЖВМ и МФ, 1964, т. 4, № 3, с. 449; № 4, с. 649.
119. Лебедев В. И. Метод характеристик для решения кинетического уравнения. — Там же, 1966, т. 6, № 2, с. 251.
120. Лебедев В. И. О КР-методе ускорения сходимости итераций при решении кинетического уравнения. — В кн.: Численные методы решения задач математической физики. М., Наука, 1966, с. 154.
121. Лебедев В. И. О нахождении решений кинетических задач. — ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 5, с. 895.
122. Лебедев В. И.  $P_{NI}$ -уравнения. — Там же, 1967, т. 7, № 4, с. 813.
123. Лебедев В. И. Об итерационном КР-методе. — Там же, 1967, т. 7, № 6, с. 1250.
124. Лебедев В. И. О нахождении решений некоторых задач переноса. Symposium of Neutron Thermalization and Reactor Spectra. Ann Arbor, USA 17—21 July, 1967.

125. Лебедев В. И. К вопросу о сходимости метода итерационных отклонений. — ЖВМ и МФ, 1968, т. 8, № 5, с. 67.
126. Лебедев В. И. О сходимости  $KP$ -метода для некоторых задач переноса. — Там же, 1969, т. 9, № 1, с. 226.
127. Лебедев В. И. О построении операции  $P$  в  $KP$ -методе. — Там же, 1969, т. 9, № 4, с. 762.
128. Лебедев В. И. Об итерационных методах решения операторных уравнений со спектром, лежащим на нескольких отрезках. — Там же, 1969, т. 9, № 6, с. 1247.
129. Лебедев В. И. О  $KP$ -методе и разностных схемах для кинетического уравнения. — В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. М., Атомиздат, 1969, с. 43.
130. Лебедев В. И. Элементарные решения многомерных задач переноса. — Там же, с. 71.
131. Лебедев В. И. О задаче Дирихле и Неймана на треугольных и шестиугольных сетках. Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 1, с. 33.
132. Лебедев В. И. О четырехточечных схемах повышенной точности. — Там же, 1962, т. 142, № 3, с. 526.
133. Лебедев В. И. О нахождении решений кинетических задач теории переноса. Диссертация. Новосибирск, 1967.
134. Лебедев В. И.  $KP$ -метод итераций для кинетического уравнения. — Материалы Совещания по математическим методам решения задач ядерной физики. Дубна, 17—20 ноября 1964, с. 93.
135. Лебедев В. И. О задаче Золотарева в методе переменных направлений. — ЖВМ и МФ, 1977, т. 17, № 2, с. 349.
136. Лебедев В. И. О задаче Золотарева в методе переменных направлений II. — В кн.: Труды семинара С. Л. Соболева. Вып. I. Новосибирск, Наука, 1976, с. 51.
137. Лебедев В. И. Об одном типе квадратурных формул повышенной алгебраической точности для сферы. — Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 1, с. 32.
138. Лебедев В. И. О квадратурах на сфере. — ЖВМ и МФ, 1976, т. 16, № 2, с. 293.
139. Лебедев В. И. Квадратурные формулы для сферы 25—29 порядка точности. — Сиб. матем. журн., 1977, т. 18, № 1, с. 132.
140. Лебедев В. И. Оптимальные с весом итерационные методы. — В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1977, с. 31.
141. Лебедев В. И. Чебышевские методы для решения систем с двучислическими матрицами; сравнение с методами блочной последовательной верхней релаксацией. — В кн.: Разностные и вариационно-разностные методы. Вып. 2. Новосибирск изд. ВЦ СО АН СССР, 1977, с. 47.
142. Лебедев В. И. Итерационный метод с чебышевскими параметрами для определения наибольшего собственного значения и соответствующей собственной функции. — ЖВМ и МФ 1977, т. 17, № 1, с. 100.
143. Лебедев В. И. Итерационные методы решения линейных операторных уравнений и многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля. — В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, Наука, 1978, с. 89.
144. Лебедев В. И. Теория игр и оптимальность итерационных методов. — В кн.: Разностные и вариационно-разностные методы. Вып. 4. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1979, с. 11.
145. Лебедев В. И., Курченкова Г. И., Цапелкин Е. С. Метод Галеркина для диффузионных уравнений. — ЖВМ и МФ, 1975, т. 15, № 4, с. 957.
146. Лебедев В. И., Бабуринов О. В. О вычислении интегралов в смысле главного значения, весов и узлов квадратурных формул Гаусса. — Там же, 1965, т. 5, № 3, с. 454.
147. Лебедев В. И., Власов Ю. А., Финогенов С. А. Об асимптотически оптимальных итерационных методах, учитывающих информацию о спектре оператора и распределение начальной ошибки. — В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1977, с. 61.

148. Лебедев В. И., Пляшкевич В. Ю. Решение кинетических уравнений методом Галеркина. — В кн.: Сборник докладов по программам и методам физического расчета быстрых реакторов. Димитровград, изд. СЭВ, 1975, с. 141.
149. Лебедев В. И., Финогенов С. А. О порядке выбора параметров в чебышевских циклических методах. Доклад на симпозиуме «Вычислительные методы в линейной алгебре». Новосибирск, март 1970.
150. Лебедев В. И., Финогенов С. А. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе. — ЖВМ и МФ, 1971, т. 11, № 2, с. 425.
151. Лебедев В. И., Финогенов С. А. Решение проблемы упорядочения параметров в чебышевских итерационных методах. — Там же, 1973, т. 13, № 1, с. 18.
152. Лебедев В. И., Финогенов С. А. Об использовании упорядоченных чебышевских параметров в итерационных методах. — Там же, 1976, т. 16, № 4, с. 895.
153. Лебедев В. И., Шишков Л. К., Ярославцева Л. Н. Сравнение итерационных методов решения уравнения диффузии для гексагональных конечно-разностных сеток. — В кн.: Разностные и вариационно-разностные методы. Вып. 5. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1979, с. 5.
154. Лукьянов А. А., Орлов В. В. Влияние резонансной структуры сечений на диффузию нейтронов. — В кн.: Нейтронная физика. М., Госатомиздат, 1961, 105.
155. Лучка А. Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. Киев, Наукова думка, 1963.
156. Люстерник Л. А. Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток. — Тр. матем. ин-та АН СССР, 1947, т. 20, с. 49.
157. Майоров Л. В., Труханов Г. Я. Некоторые методы решения задач термализации нейтронов. Symposium of Neutron Thermalization and Reactor Spectra. Ann Arbor, USA, 17—21 July, 1967.
158. Марков А. А. Избранные труды. М. — Л., ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.
159. Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева. Спб, «Academia», 1889, с. 1, 62.
160. Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. Спб, Изд-во Петербургского ун-та, 1892, с. 93.
161. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
162. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
163. Марчук Г. И. Численные методы прогноза погоды. Л., Гидрометеоиздат, 1967.
164. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1977.
165. Марчук Г. И., Агошков В. И. О выборе координатных функций в обобщенном методе Бубнова—Галеркина. — Докл. АН СССР, 1977, т. 232, № 6, с. 1253.
166. Марчук Г. И., Кочергин В. П. Эффективный метод решения двумерного уравнения диффузии для ячеек квадратной и шестиугольной формы. — Атомная энергия, 1965, т. 18, вып. 6, с. 638.
167. Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А. К вопросу об оптимальных итерационных процессах. — Докл. АН СССР, 1968, т. 181, № 6, с. 1331.
168. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск, Наука, 1976.
169. Марчук Г. И., Николайшвили Ш. С. Применение метода сферических гармоник к задачам теории переноса. Общие свойства  $P_n$ -приближения. — В кн.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1962 с. 5.
170. Марчук Г. И., Орлов В. В. К теории сопряженных функций. — В кн.: Нейтронная физика. М., Госатомиздат, 1961, с. 30.
171. Марчук Г. И., Пененко В. В., Султангазин У. М. О решении кинетического уравнения методом расщепления. — В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, Наука, 1966, с. 152.
172. Марчук Г. И., Сарбасов К. Е. Об одном методе решения стационарной задачи. — Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 1, с. 42,

173. Марчук Г. И., Султангазин У. М. О сходимости метода расщепления для уравнения переноса излучения. — Там же, 1965, т. 161, № 1, с. 66.
174. Марчук Г. И., Султангазин У. М. К обоснованию метода расщепления для уравнения переноса излучения. — ЖВМ и МФ, 1965, т. 5, № 5, с. 85.
175. Марчук Г. И., Яненко Н. Н. Решение многомерного кинетического уравнения методом расщепления. — Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6, с. 1291.
176. Марчук Г. И., Яненко Н. Н. Применение метода расщепления (дробных шагов) — для решения задач математической физики. — В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, Наука, 1966, с. 5.
177. Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов/Под ред. Я. В. Шевелева, М., Атомиздат, 1974.
178. Михайлов Г. А. Расчеты критических систем методом Монте-Карло. — ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 1, с. 71.
179. Михайлов Г. А. Оценка некоторых нелинейных функционалов и приближенный расчет групповых констант теории переноса методом Монте-Карло. — Там же, 1968, т. 8, № 3, с. 590.
180. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
181. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М., Гостехиздат, 1952.
182. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., Физматгиз, 1966.
183. Михлин С. Г. Вариационно-сеточная аппроксимация. Численные методы и автоматическое программирование. (Записки ЛОМИ.) Л., Наука, 1974, т. 48, с. 32.
184. Мордашев В. М. О наилучшем приближении функций многих переменных суммой функций меньшего числа переменных. — Матем. заметки, 1969, т. 5, вып. 2, с. 217.
185. Морен К. Методы гильбертова пространства. Пер. с польск. М., Мир, 1965.
186. Морозов В. Н. О решении кинетических уравнений с помощью  $S_n$ -метода. — В кн.: Теория и методы расчета ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1962, с. 91.
187. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
188. Натансон И. П. К теории приближенного решения уравнений. — Уч. зап. Ленингр. ун-та им. А. И. Герцена, 1948, т. 64, с. 2.
189. Некрасов П. А. К вопросу о решении линейной системы уравнений с большим числом неизвестных посредством последовательных приближений. Приближение к т. XIX. — Записки Акад. наук, 1892, № 5, с. 1.
190. Николайшвили Ш. С. О решении односкоростного уравнения переноса с использованием приближения Ивона — Мартенса. — Атомная энергия, 1966, т. 20, вып. 4, с. 344.
191. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
192. Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ч. 1. Дифференциальные уравнения и их применение. Вып. 5. Вильнюс, изд. Ин-та физики и матем. АН Лит. ССР, 1973.
193. Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ч. 2. Дифференциальные уравнения и их применение. Вып. 8. Вильнюс, изд. Ин-та физики и матем. АН Лит. ССР, 1973.
194. Пененко В. В. Об алгоритмах и системе программирования задач расчета двумерных реакторов и некоторых задач теории переноса. Диссертация. Новосибирск, 1965.
195. Пляшкевич В. Ю. Вариационный метод решения кинетических уравнений в периодических решетках. Препринт ИАЭ-2549. М., 1975.

196. **Пляшкевич В. Ю.** Об одном вариационном методе решения кинетических уравнений. — В кн.: Вариационно-разностные методы решения задач математической физики. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 86.
197. **Прокопов Г. П.** Об одном методе отыскания максимального собственного значения симметрической матрицы. — ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, № 5, с. 1167.
198. **Рихтмайер Р. Д.** Разностные методы решения краевых задач. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
199. **Румянцев Г. Я.** Граничные условия в методе сферических гармоник. — Атомная энергия, 1961, т. 10, вып. 1, с. 26.
200. **Рыжик И. М., Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
201. **Рябенский В. С., Филиппов А. Ф.** Об устойчивости разностных уравнений. М., Физматгиз, 1956.
202. **Самарский А. А.** Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. — ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 5, с. 787.
203. **Самарский А. А.** Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. — Там же, 1964, т. 4, № 3, с. 580.
204. **Самарский А. А.** Некоторые вопросы теории разностных схем. — Там же, 1966, т. 6, № 4, с. 665.
205. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971.
206. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М., Наука, 1977.
207. **Самокиш Б. А.** Исследование быстроты сходимости метода наискорейшего спуска. — Успехи матем. наук, 1957, т. 12, № 1, с. 238.
208. **Сансон Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1, 2. Пер. с ит. М., Изд-во иностр. лит., 1953, 1954.
209. **Саульев В. К.** Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
210. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963.
211. **Слесарев И. С., Сироткин А. М.** Вариационно-разностные схемы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1978.
212. **Смелов В. В.** Лекции по теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1978.
213. **Смелов В. В.** Об эффективном методе расчета нейтронного поля в геометрически сложных решетках гетерогенных реакторов. — Атомная энергия, 1972, т. 33, вып. 5, с. 915.
214. **Смелов В. В., Илясова Г. А.** Применение эффективного метода решения уравнения переноса для расчета шестиугольной и квадратной ячеек гетерогенного реактора. — Там же, 1968, т. 24, № 3, с. 235.
215. **Смелов В. В.** О симметризации нечетного  $P$ -приближения односкоростного уравнения переноса. — ЖВМ и МФ, 1980, т. 20, № 1, с. 121.
216. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 3, 4. М., Гостехиздат, 1951.
217. **Соболев С. Л.** Об оценках сумм для функций, заданных на сетках. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940, т. 4, № 1, с. 5.
218. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
219. **Соболев С. Л.** Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, т. 20, № 4, с. 413.
220. **Соболев С. Л.** Лекции по теории кубатурных формул. Ч. I, II. Новосибирск, изд. Ин-та матем. СО АН СССР, 1964, 1966.
221. **Соболев С. Л.** О формулах механических кубатур на поверхности сферы. — Сиб. матем. журн., 1962, т. 3, № 5, с. 769.
222. **Соколов Ю. Д.** Метод осреднения функциональных поправок. Киев, Наукова думка, 1967.
223. **Стренг Г., Фикс Дж.** Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. М., Мир., 1977.
224. **Султангазин У. М.** О решении уравнения переноса в случае анизотропного рассеяния методом расщепления. — Сиб. матем. журн., 1967, т. 8, № 1, с. 156.
225. **Теория и методы расчета ядерных реакторов.** Под ред. Г.И. Марчука. М., Госатомиздат, 1962.

226. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами. — Докл. АН СССР, 1956, т. 108, № 3, с. 393.
227. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Об однородных разностных схемах. — ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 1, с. 5.
228. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках. — Там же, № 3, с. 425.
229. Трощев В. Е., Юдинцев В. Ф., Федянин В. И. Об ускорении сходимости итераций при решении кинетического уравнения. — Там же, 1968, т. 8, № 2, с. 452.
230. Усачев Л. Н. Уравнение для ценности нейтронов кинетического реактора и теория возмущений. — В кн.: Реакторостроение и теория реакторов. М., Изд-во АН СССР, 1955, с. 251.
231. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Кублановская В. Н. Линейные алгебраические системы с прямоугольными матрицами. — В кн.: Вычислительные методы линейной алгебры. М., Наука, 1968, с. 16.
232. Фаддеев Д. К. О некоторых последовательностях полиномов, полезных для построения итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. — Вестн. ЛГУ, 1958, № 7, с. 155.
233. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.
234. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. — ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 5, с. 922.
235. Фридман В. М. Новые методы решения линейного операторного уравнения. — Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 3, с. 482.
236. Хаусхолдер А. Основы численного анализа. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
237. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Пер. с англ. М., Мир., 1965.
238. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
239. Чебышев П. Л. О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменных. Полн. собр. соч. Т. 3, М. — Л., ГИТТЛ, 1948, с. 108.
240. Чебышев П. Л. Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций. Полн. собр. соч. Т. 2, М. — Л., ГИТТЛ, 1947.
241. Шихов С. Б. Учет влияния изменения размеров на критическую массу быстрого реактора с помощью теории возмущений. — Атомная энергия, 1959, т. 6, вып. 2, с. 162.
242. Шихов С. Б. Некоторые вопросы математической теории критического состояния реактора. — ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, № 1, с. 113.
243. Шихов С. Б. Некоторые вопросы математической теории критического состояния реактора. — В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. М., Атомиздат, 1969, с. 210.
244. Шихов С. Б. Вопросы математической теории реакторов. М., Атомиздат, 1973.
245. Шихов С. Б., Шмелев А. И. Учет влияния произвольного изменения размеров на критическую массу быстрого реактора с помощью теории возмущений. — В кн.: Физика ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1968, с. 67.
246. Шишков Л. К. Методы решения диффузионных уравнений двумерного ядерного реактора. М., Атомиздат, 1976.
247. Яненко Н. Н. Об экономичных неявных функциях. (Метод дробных шагов.) — Докл. АН СССР, 1961, т. 134, № 5, с. 71.
248. Яненко Н. Н. О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. — Изв. вузов. Математика, 1961, т. 4 (23), с. 148.
249. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967.
250. Яненко Н. Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. — Докл. АН СССР, 1959, т. 1125, № 6, с. 1207.
251. Aitkin A. Studies in practical mathematics. On the iterative solution of a system of linear equations. — Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1950, v. 63, p. 52.



252. **Albrecht J.** Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge. — Num. Math., 1962, v. 4, p. 196.
253. **Arkuszewski J., Kulikowska T., Mika J.** Box Explicit Method in Neutron Transport Theory. — Inst. of Nuclear Research. Warszawa, 1971, N 1330/XXI/PR.
254. **Arkuszewski I.** Rigorous analysis of the diamond approximation for the Neutron Transport Equation. Vienna, 1972.
255. **Banach S.** Sur les opérations dan les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals. — Fund. Math., 1922, N 3, p. 133.
256. **Buslik A. L.** Extremum Variational Principles for the Monoenergetic Neutron Transport Equation with Arbitrary Adjoint Source. — Nucl. Sci. and Engng, 1969, v. 35, N 3, p. 303.
257. **Bednarz R., Mika J. J.** Math. Phys., 1963, v. 4, p. 1282.
258. **Bereiss E.** Decomposition of the stationary isotropic transport in three independent space variables. Тезисы доклада на Международном конгрессе математиков. М., 1966. — Прикл. матем. и матем. физ., 1966, т. 12, с. 3
259. **Bethe H., Tonks L., Hurwitz H.** Neutron Penetration and Slowing Down at Intermediate Distances through Medium and Heavy Nuclei. — Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 11.
260. **Bodevig E.** Bericht über die verschiedenen Methoden zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit realen Koeffizienten. — Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc., 1947, S. 50, 51, 53, 211, 1248.
261. **Borysiewicz M., Stankiewicz R.** Variational Formulation and Projectional Methods for the Second Order Transport Equation. — Preprint 05-400. (Institute of Nuclear Research Computing Center CYFRONET.) Poland, 1977.
262. **Buckner U.** Über ein unbeschränkt anwendbares Iterationsverfahren für Systems linear Gleichungen. — Arch. Math., 1950, Bd 2, S. 172.
263. **Cayley A.** On linear differential equations (The Theory of Decomposition). — Quarterly J. Math., 1886, v. 21, p. 331.
264. **Cacciopoli R.** Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali: un'osservazione sui problemi di valori ai limiti. — Atti Assad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur. Ser. I. 1931, v. 6, p. 498.
265. **Courant R.** — Bull. Amer. Math. Soc., 1949, v. 49, p. 1.
266. **Case K. M.** Elementary solutions of the transport equations and their applications. — Ann. Phys., 1960, v. 9, p. 233.
267. **Cauchy A.** Compt. Rend., 1947, v. 25, p. 536.
268. **Cesari L.** Sulla risoluzione bei sistem di equazioni lineari per approssimazioni successive. — Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur. Sez. I. 1937, v. 25, p. 422.
269. **Davis J. A.** Transport Error Bounds Via  $P_n$ -Approximations. — cl. Sci. and Engng, 1968, v. 31, p. 127
270. **Daniel J.** The conjugate gradient method for linear and non-linear operator equations. — SIAM Num. Anal., 1967, v. 4, N 1, p. 10.
271. **Douglas J., Rachford H.** On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. — Trans. Amer. Math. Soc., 1956, v. 82, N 2, p. 421.
272. **Douglas J., Gunn J. E.** A general formulation of alternating direction methods. Part I. Parabolic and hyperbolic problems. — Num. Math., 1964, v. 6, N 5 p. 428.
273. **Dudley T., Daitch P.** Transport effects in the  $P_3$ -treatment of cylindrical rods in a square lattice. — Nucl. Sci. and Engng, 1966, v. 25, p. 14.
274. **Ehrlich R., Hurwitz H.** Multigroup Methods for Neutron Diffusion Problems. — Nucleonics, 1954, v. 12, N 2, p. 23.
275. **Fenkyö I.** Über eine Klasse von Integralgleichungen. — Publs. Math. Debrecen, 1952, v. 2, p. 248.
276. **Flanger D., Shortley G.** Numerical determination of fundamental modes. — J. Appl. Phys., 1950, v. 21, p. 1326.
277. **Frankel S.** Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. — Math. Tables and Other Aids Comput., 1950, v. 4, p. 65.

278. **Friedman B.** The iterative solution of elliptic difference equations. Report N 40-7698, Inst. of Math. Sciences, N. Y., University, 1957.
279. **Fucks K.** Perturbation theory in neutron multiplication problems.— Proc. Phys. Soc., 1949, v. 62, p. 791.
280. **Garabedian P.** Estimation of the relaxation factor for small mesh size.— Math. Tables and Other Aids Comput., 1956, № 56, p. 183.
281. **Gauss C. F.** Brief an Gerling. 26. Dez. 1823 Werke, B. 9, S. 278.
282. **Gelbard E. M., Hageman L. A.** The Synthetic Method as Applied to the Sne Equations.— Nucl. Sci. and Engng, 1969, v. 37, N 2, p. 288.
283. **Glendenin W. W.** Effect of zero gradient boundary conditions on cell calculations in cylindrical geometry.— Ibid., 1962, v. 14, p. 103.
284. **Golub G. H., Varga R. S.** Chebyshev semi — iterative methods, successive verrelaxation iterative methods and second order Richardson iterative methods. Parts I, II. — Num. Math., 1961, v. 3, p. 147.
285. **Hestens M., Stiefel E.** Methods of conjugate gradients for solving linear systems— J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, v. 49, p. 409.
286. **Hochstrasser R.** Die Anwendung der Methode der konjugierten Gradienten und ihrer Modifikation auf die Lösung linear Randwertprobleme.— Diss. Zürich. Truminder, 1954, Bd 45.
287. **Hotelling H.** Some new methods in matrix calculation.— Ann. Math. Stat., 1943, v. 14, p. 1.
288. **Hopf E.** Mathematical problem of radiative equilibrium.— Cambridge Tracts, 1934, v. 31, p. 233.
289. **Honeck H.** The Distribution of Thermal Neutrons in Space and Energy in Reactor Lattices.— Nucl. Sci. and Engng, 1960, v. 8, p. 193.
290. **Hurwitz H., Nelkin M., Habatler G.** Neutron thermalisation. — Nucl. Sci. and Engng, 1956, v. 1, p. 280.
291. **Jacobi G.** Über eine neue Auflösungsart der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden lineären Gleichungen.— Astron. Nachr., 1845, Bd 22, N 523, S. 297.
292. **Jörgens K.** An asymptotic expansion in the theory of neutron transport.— Commun Pure and Appl. Math., 1958, v. 11, p. 219.
293. **Kaplan S., Davis J.** Canonical and Involutory Transformers of the Variational Problems of Transport Theory. — Nucl. Sci. and Engng, 1967, v. 28, p. 166.
294. **Kellog O. D.** On the existence and closure of sets of characteristic functions. Math. Ann., 1922, v. 86, p. 14.
295. **Kellog R. B., Noderer L. C.** Scaled iterations of linear equations.— J. Soc. Ind. Appl. Math., 1966, v. 8, N 4, p. 114.
296. **Kopp H.** Synthetic method of solution of the transport equation.— Nucl. Sci. and Engng, 1963, v. 17, p. 65.
297. **Kulikowska T.** Box explicit Method in one-dimensional Spherical Geometry. IAEA-SM-154/6. Vienna, 1972.
298. **Lanszons C.** Solution of systems of linear equations by minimized iterations. — J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, v. 49, p. 33.
299. **Lax P. D.** Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation.— Commun Pure and Appl. Math. 1954, v. 7, p. 159.
300. **Lesaint P., Raviart P. A.** On a finite clement method for solving the neutron transport equation.— Universite Paris VI, Laboratoire Analyse Numerique, L. A. Vienna, IAEA, 1972, p. 189.
301. **Lehner, Wing.** An asymmetric operator arising in the theory of neutron diffusion.— Commun Pure and Appl. Math., 1956, v. 9, p. 487.
302. **Lehner, Wing.** On the spectrum of an asymmetric operator arising in the transport theory of neutron.— Ibid., 1955, v. 8, p. 213.
303. **Liebmann H.** Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und Konformer Abbildung (nach Ideen von Boltzmann und Jacobi) Sitzungsberichte der Bayer. Akad. Wiss. Math.— Phys., 1918, Bd 47, S. 385.
304. **Lioville J.** Sur le developpement des fonctions ou parties fonctions en series dont les divers termes sont assujetis a satisfaire a une meme equation. differentielle du second ordre contenant un parametre variable.— J. de Math Pur. et Appl., 1836, v. 1, p. 253; 1837, v. 11, N 16, p. 418.

305. **Lions J. L., Magenes E.** *Troblimes aux limites non homogènes et applications*. V. 1, 2. Dynod, Paris, 1968.
306. **Lions J.** *Equations différentielles orationnelles dan les espaces de Hilbert*. Centro. Int. Estivo, Varenna, 1963.
307. **Marek I.** On a problem of mathematical physics.— *Arlikace matematiky*, 1966, v. 11, p. 89.
308. **Mark J. C.** The spherical harmonic method.— National Research Council of Canada, 1944, v. 1, p. 15.
309. **Mark J. C.** The spherical harmonic method.— *Ibid.*, 1945, v. 2, p. 81.
310. **Marshak R.** Theory of the slowing down of neutrons by elastic collision with atomic nuclei.— *Rev. Mod. Phys.*, 1947, v. 12, p. 185.
311. **Marshak R.** Note on the spherical harmonic method as applied to the Milne problem for a sphere.— *Ibid.*, 1947, v. 71, p. 443.
312. **Marshak R., Brooks H., Hurwitz H.** Introduction to the theory of diffusion and slowing down of neutrons.— *Nucleonics*, 1949, v. 4, p. 6; 1949, v. 5, p. 1.
313. **Mika J., Zelazny R.**— *Bull. Acad. Polon. Sci. Engng*, 1963, v. 17, p. 8.
314. **Mika J.** Approximation Theory for the Neutron Transport Equation in Rectangular Geometry.— In: *Numerical Reactor Calculations*. IAEA. Vienna, 1972, p. 129.
315. **Mitsis G. J.** Argonne Report ANL-6459, 1961.— *Nucl. Sci. and Engng*, 1963, v. 17, p. 55.
316. **Nelkin M.** Neutron thermalization.— *Nucl. Sci. and Engng*, 1957, v. 2, p. 199.
317. **Neumann C.** *Untersuchungen über das logarithmische Potential*. Leipzig, 1877.
318. **Numerical Reactor Calculations**. Proc. of a Seminar. Vienna, 17—21 January, 1972. Vienna, IAEA, 1972.
319. **Ostrowski A.** On over and under relaxation in the theory of the cyclic single step iteration.— *Math. Tables and Other Aids Comput.*, 1953, v. 7, p. 152.
320. **Peaceman D., Rachford H.** The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations.— *J. Soc. and Appl. Math.*, 1955, v. 3, p. 28.
321. **Peierls R.** Critical conditions in the neutron multiplication.— *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1939, v. 35, p. 610.
322. **Peano G.** *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*.— *Atil della R. Acc. Sc. Torino*, 1887, v. 22, p. 293; *Math. Ann.*, 1888, v. 32, p. 450.
323. **Petryshyn W.** On a general iterative method for the approximate solution of linear operator equations.— *Math. Comput.*, 1963, v. 17, p. 81.
324. **Picard E.** *Memoire sur la theorie des equations aux derives partiélles et la méthode des approximations successives*.— *J. math. pures et appl.*, 1890, v. 4, p. 6.
325. **Rayleigh J. W.** *Phil. Mag.*, 1899, v. 47, p. 566; *Scientific Papers*, 1899, v. 4, p. 407.
326. **Richardson L.** The approximate arithmetical solution for finite differencies of physical problems involving differential equations, with an application to the stress in a masonry dam. — *Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. (A)*, 1910, v. 210, p. 307; v. 83, p. 335.
327. **Richardson L.** A purification method for computing the latent columns of numerical matrices and some integrals of differential equations.— *Phyl. Trans. Roy. Soc., Lond. Ser. A*, 1950, v. 242, p. 439.
328. **Ritz W.** Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.— *J. reine und angew. Math.*, 1908, v. 135, p. 25.
329. **Schauder.** Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. — *Stud. Math.*, 1930, Bd 2, S. 171.
330. **Schmidt E.** Auflösung der allgemeinen linearer Integralgleichungen.— *Math. Ann.*, 1907, Bd 64, S. 161.
331. **Schröder J.** Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstrandsbegriff.— *Math. Z.* 1956, Bd 66, S. 111.
332. **Schulz, Gunther.** Iterative Berechnung der reziproken Matrix. *ZAMM*, 1933, Bd 13, S. 57.
333. **Seidel L.** Über ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten quadrate führt, sowie lineäre Gleichungen überhaupt, durch successi-

- ve Annäherung aufzulösen.—Abhandl. math.-phys. Bayerische, Akad. Wiss. München, 1874, Bd 11 (111), S. 81.
334. **Sheldon J.** On the difference solution of elliptic difference equations.—*Mat. Tables and Other Aids Comput.*, 1955, v. 9, N 51, p. 101.
335. **Shortley G.** Use of Tschebyscheff polynomials operators in the numerical solution of boundary — value problems.—*J. Appl. Phys.*, 1953, v. 24, p. 392.
336. **Stiefel E.** Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications.—*Nat. Bur. Stand. Appl. Math., Ser.*, 1958, v. 49, p. 1.
337. **Temple G.** The general theory of relaxation methods applied to linear systems.—*Proc. Roy. Soc., Ser A*, 1939, v. 169, p. 476.
338. **Thie J.** Failure of neutron transport approximation in small cell in cylindrical geometry.—*Nucl. Sci. and Engng*, 1961 v. 9, p. 286.
339. **Ukai S.** Solution of Multi-Dimensional Neutron Transport Equation by Finite Element Method.—*J. Nucl. Sci. and Techn.*, 1972, v. 9, N 6, p. 366.
340. **Van Kampen.** *Physica*, 1955, v. 21, p. 949.
341. **Varga R. S.** *Matrix iterative analysis.* New Jersey, 1963.
342. **Wachspress E. L.** Iterative solution of elliptic systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. Y., 1966.
343. **Weinberg A.** Current status of nuclear reactor theory. — *Amer. J. Phys.*, 1952, v. 20, p. 401.
344. **Wickg** Über ebene Diffusionsprobleme.—*Z. Phys.*, 1943, Bd 121, S. 702.
345. **Wick G.** On the space distribution of slow neutrons.—*Phys. Rev.*, 1949, v. 75, p. 5.
346. **Wilkinson J.** *The algebraic eigenvalue problem.* Oxford, Clarendon Press, 1965.
347. **Young D.** On Richardson's method for solving linear systems with positive definite matrices.—*J. Math. and Phys.*, 1954, v. 32, N 4, p. 243.
348. **Young D.** Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type.—*Trans. Amer. Math. Soc.*, 1954, v. 76, p. 92.
349. **Zelazny R.** — *J. Math. Phys.*, 1961, v. 2, p. 538.
350. **Zienkiewicz O. C.** The finite element method: from intuition to generality.—*Appl. Mech. Rev.*, 1970, v. 23, p. 249.

# АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебра банахова 242  
— коммутативная 242  
—  $C^*$  243
- Граничные условия 20, 52, 56, 60, 61, 65  
— метода сферических гармоник 99, 101, 105, 107, 109, 114, 116, 118
- Итерационный метод 240  
— — верхней релаксации 332  
— — линейный 253  
— — нижней релаксации 332  
— — одновременных смещений 294  
— — одношаговый 253  
— — последовательной верхней релаксации 295  
— — последовательных смещений 294  
— —  $r$ -го порядка 253  
— — стационарный 253  
— — универсальный 301  
— — циклический 253, 300
- Квадратичный функционал 268  
— — уравнения переноса 57
- Квадратурная формула Эйлера 134
- Класс функций
- |                     |     |
|---------------------|-----|
| $\mathcal{B}_{p,K}$ | 378 |
| $C_{n,\alpha}$      | 210 |
| $C(\Lambda)$        | 289 |
| $D_0$               | 56  |
| $\tilde{D}_0$       | 53  |
| $E\alpha$           | 124 |
| $\mathcal{H}$       | 53  |
| $H_0$               | 57  |
| $H(a,\alpha)$       | 235 |
| $K^1 C_{n,\alpha}$  | 210 |
| $K^2 C_{n,\alpha}$  | 213 |
| $l\infty(p,c)$      | 302 |
| $m$                 | 342 |
- Матрица неразложимая 206  
— положительно определенная 206
- $M$ -матрица 207
- Метод Кейса 75  
— переменных направлений 283  
— последовательных приближений 240, 251
- Метод прогонки 147  
— матричной прогонки 148, 150  
— простой итерации 251, 291  
— столкновений по источникам 340
- Многочлены Лежандра 58  
— ультрасферические 234  
— Чебышева 302  
— ЧМБС 307  
— наименее отклоняющиеся от нуля (МНОН) 302
- Норма оператора 242
- Обобщенное решение 76, 81, 82, 85
- Оператор нормальный 243  
— нильпотентный 255  
— обратный 243  
— перехода 254  
— самосопряженный 243  
— сжатия 240  
— скалярного типа 243
- Операторная функция 245
- Операция  $K$  261, 341  
—  $P$  261, 359
- Падэ-приближения 323
- Периодические решения 92
- Полнота элементарных решений 77
- Преобразование уравнения для итераций 256
- Производная функционала 267
- $P$ -уравнение 359
- $P_n$ -уравнения 98, 363
- Разностная схема «алмаз» 197  
— — шаговая 197
- Резольвента оператора 243
- Ряд Неймана 246
- Скорость сходимости итерационного метода 255
- Собственное значение 244  
— подпространство 244
- Собственный элемент 244
- Спектр оператора 243, 244
- Спектральный радиус оператора 244
- Степенные моменты 313
- Сферические функции 58

Тензорное произведение матриц 202  
τ-Метод 233

Уравнение баланса 14, 188, 192, 216

— второго рода 251

— замедления 20

— первого рода 253, 246

— переноса 52

— — одномерное 59—65

— — самосопряженнос 55

— — сопряженное 29

Фазовое пространство 13

Формулы усреднения групповых кон-  
стант 41

Функционал ошибок 268

— потерь 260

Функция Грина 88

— ценности нейтронов 27, 29

Характеристики 209

Цена операции 259

Число обусловленности 247

Ядро распределения 313

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию . . . . .	3
Предисловие ко второму изданию . . . . .	5
Введение . . . . .	7

---

## ЗАМЕДЛЕНИЕ НЕЙТРОНОВ

<b>Глава</b>	<b>Кинетическое уравнение реактора . . . . .</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	§ 1.1. Кинетическое уравнение замедления. . . . .	10
	§ 1.2. Граничные условия . . . . .	20
	§ 1.3. Уравнение критичности . . . . .	20
	§ 1.4. Односкоростное кинетическое уравнение . . . . .	23
	§ 1.5. Кинетическое уравнение для бесконечной однородной среды . . . . .	25
<b>Глава</b>	<b>Сопряженные уравнения . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2</b>	§ 2.1. Общая теория сопряженных уравнений реактора . . . . .	26
	§ 2.2. Сопряженные уравнения реактора . . . . .	29
	§ 2.3. Теория возмущений . . . . .	33
	§ 2.4. Формулы теории возмущений . . . . .	34

---

## МЕТОД ГРУПП

<b>Глава</b>	<b>Многогрупповые кинетические уравнения . . . . .</b>	<b>36</b>
<b>3</b>	§ 3.1. Основные положения . . . . .	36
	§ 3.2. Формулы усреднения для групповых констант . . . . .	37
	§ 3.3. Многогрупповая система основных и сопряженных уравнений реактора . . . . .	40
	§ 3.4. Дальнейшие обобщения метода групп . . . . .	42
	§ 3.5. Многогрупповая теория возмущений. . . . .	43

---

## ЭФФЕКТИВНАЯ ОДНОГРУППОВАЯ ТЕОРИЯ

<b>Глава</b>	<b>Одногрупповое кинетическое уравнение . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	§ 4.1. Эффективное одногрупповое кинетическое уравнение . . . . .	45
	§ 4.2. Общий метод одногруппового усреднения физических констант. . . . .	48

Глава <b>5</b>	<b>Решение односкоростных задач теории переноса . . . . .</b>	<b>51</b>
	§ 5.1. Формулировка задачи переноса и некоторые обозначения . . . . .	51
	§ 5.2. Кинетическое уравнение для различных геометрий	59
	§ 5.3. О краевых условиях на границе бесконечного цилиндра . . . . .	65
	§ 5.4. Интегральное уравнение Пайерлса . . . . .	67
	§ 5.5. Нахождение элементарных решений однородных задач . . . . .	75
	§ 5.6. Фундаментальное решение для однородной бесконечной среды . . . . .	87
	§ 5.7. Фундаментальные решения самосопряженного уравнения . . . . .	90
	§ 5.8. $2\pi T$ -периодические решения . . . . .	92
	§ 5.9. Квадратурные формулы для сферы . . . . .	94

---

## МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ

Глава <b>6</b>	<b>Метод сферических гармоник, метод Галеркина . . . . .</b>	<b>98</b>
	§ 6.1. Основные положения метода сферических гармоник	98
	§ 6.2. Плоскопараллельные и сферически-симметричные системы . . . . .	100
	§ 6.3. Бесконечные цилиндрические системы. . . . .	103
	§ 6.4. $P_1$ -приближение. Уравнение диффузии. . . . .	107
	§ 6.5. Метод поверхностных псевдисточников. . . . .	110
	§ 6.6. Решение уравнения переноса методом сферических гармоник применительно к квадратной и шестиугольной ячейкам гетерогенного реактора . . . . .	111
	§ 6.7. Решение уравнения переноса методом сферических гармоник применительно к ячейкам со сложной геометрией . . . . .	118
	§ 6.8. Метод Галеркина для решения диффузионных уравнений . . . . .	120
	§ 6.9. Метод Галеркина для решения кинетических уравнений . . . . .	127
Глава <b>7</b>	<b>Конечно-разностные уравнения метода сферических гармоник</b>	<b>133</b>
	§ 7.1. Конечно-разностные уравнения $P_n$ -приближения для плоской геометрии . . . . .	133
	§ 7.2. Конечно-разностные уравнения $P_n$ -приближения для сферической геометрии . . . . .	137
	§ 7.3. Конечно-разностные уравнения метода сферических гармоник для цилиндрической геометрии . . . . .	138
	§ 7.4. Разностные уравнения повышенной точности для уравнений типа $P_1$ -приближения и диффузии для плоской, сферической и цилиндрической геометрий	140
	§ 7.5. Метод факторизации . . . . .	147
	§ 7.6. Метод факторизации для решения конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих $P_n$ -уравнения для одномерных задач . . . . .	150
	§ 7.7. Устойчивость метода факторизации для $P_1$ -приближения . . . . .	152



Глава	Проекционно-сеточный метод и $P_{NI}$ -уравнения . . . . .	155
8	§ 8.1. Формулировка проекционно-сеточного алгоритма на основе минимизации функционала . . . . .	155
	§ 8.2. Проекционно-сеточные схемы для некоторых задач	161
	§ 8.3. $P_{NI}$ -уравнения, вывод . . . . .	167
	§ 8.4. $P_{1I}$ -уравнений. . . . .	169
	§ 8.5. О выборе угловых направлений. . . . .	174
	§ 8.6. Построение проекционно-сеточных схем на основе метода Галеркина . . . . .	176
	§ 8.7. Обобщенный метод Бубнова — Галеркина со специальным выбором базисных функций . . . . .	179
	Глава	Разностные аналоги кинетических уравнений . . . . .
9	§ 9.1. Метод дискретных ординат . . . . .	185
	§ 9.2. $S_n$ -метод . . . . .	187
	§ 9.3. Метод дискретных ординат для плоской геометрии ( $S_n$ - и $DS_n$ -методы) . . . . .	195
	§ 9.4. ВЕМ-схемы . . . . .	197
	§ 9.5. Устойчивые системы конечно-разностных уравнений и некоторые их свойства. . . . .	201
	§ 9.6. Разностные схемы метода характеристик для общего случая. . . . .	209
	§ 9.7. Построение сетки и разностная аппроксимация кинетического уравнения для цилиндрически-симметричных областей (бесконечный цилиндр) . . . . .	214
	§ 9.8. Квадратурные формулы в методе характеристик для интегральных операторов в цилиндрически-симметричных геометриях . . . . .	219
	§ 9.9. Построение сетки и разностная аппроксимация повышенной точности кинетического уравнения для плоского слоя. . . . .	224
	§ 9.10. Разностные схемы метода характеристик для самосопряженного уравнения (плоский слой) . . . . .	228
	§ 9.11. Нахождение общего решения разностных уравнений для плоского слоя . . . . .	229
	§ 9.12. Исследование самосопряженных систем разностных уравнений . . . . .	231
	§ 9.13. Оценка погрешности метода сеток для плоской периодической задачи. . . . .	235

## ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Глава	Итерационные методы решения операторных уравнений	240
10	§ 10.1. Принцип сжатых отображений. . . . .	240
	§ 10.2. Некоторые сведения из теории банаховых алгебр ограниченных операторов . . . . .	242
	§ 10.3. Метод последовательных приближений для линейных уравнений второго рода . . . . .	251
	§ 10.4. Итерационные методы решения линейных уравнений первого рода. . . . .	253
	§ 10.5. О существовании итерационных методов для решения линейных уравнений первого рода. . . . .	256
	§ 10.6. Итерационные методы решения. $KP$ -метод . . . . .	260
	§ 10.7. Вариационные методы. . . . .	263
	§ 10.8. Вариационные методы с квадратичным функционалом. . . . .	267
	§ 10.9. Построение одного класса операций $P$ в $KP$ -методе	270

§ 10.10.	Два способа построения операции $P_2$ в $KP_1P_2$ -методе. . . . .	275
§ 10.11.	Метод сопряженных градиентов . . . . .	276
§ 10.12.	Метод расщепления оператора . . . . .	280
§ 10.13.	О принципах, положенных в основу обзора методов построения итерационных процессов . . . . .	288
§ 10.14.	Стационарные итерационные методы . . . . .	291
§ 10.15.	Обобщенные методы Якоби . . . . .	293
§ 10.16.	Метод Л. А. Люстерника . . . . .	298
§ 10.17.	$\delta^2$ -Процесс Эйткина . . . . .	299
§ 10.18.	Чебышевские итерационные методы . . . . .	300
§ 10.19.	Блочный чебышевский метод для решения уравнений с двуциклическими матрицами . . . . .	308
§ 10.20.	Чебышевский полуитерационный метод, использующий методы суммирования рядов . . . . .	309
§ 10.21.	Трехчленные итерационные методы . . . . .	311
§ 10.22.	Комбинированные итерационные методы . . . . .	320
§ 10.23.	Метод последовательного приближения обратного оператора. . . . .	321
§ 10.24.	Итерационные методы, основанные на аппроксимации нестационарных задач . . . . .	322
§ 10.25.	Случайные итерационные процессы . . . . .	325
§ 10.26.	Итерационные схемы с балансными множителями . . . . .	327
§ 10.27.	Нелинейный итерационный метод . . . . .	328
§ 10.28.	Методы наискорейшего спуска . . . . .	328
§ 10.29.	Неградиентные методы спуска . . . . .	330
§ 10.30.	Градиентные методы с неполной релаксацией. . . . .	331
§ 10.31.	Итерационные методы, основанные на теории возмущений оператора . . . . .	332
§ 10.32.	Итерационные методы нахождения наибольшего или наименьшего собственного значения и соответствующей собственной функции . . . . .	334

**Глава Итерационные методы решения задач переноса . . . . . 340**

**11**

§ 11.1.	Специфика итерационных методов для задач переноса. Метод простой итерации . . . . .	340
§ 11.2.	Метод Л. А. Люстерника . . . . .	344
§ 11.3.	Метод оценки итерационных отклонений . . . . .	345
§ 11.4.	Итерационные схемы с балансными множителями и мультипликативными поправками. . . . .	348
§ 11.5.	Квазидиффузионный метод . . . . .	352
§ 11.6.	$KP_1$ -метод . . . . .	359
§ 11.7.	Сходимость $KP_1(n)$ -метода . . . . .	361
§ 11.8.	Циклический $KP_1(0)$ -метод . . . . .	362
§ 11.9.	$KP_1(n)$ -метод для периодической задачи . . . . .	363
§ 11.10.	Выбор параметров операции $P$ и оценка $\ \psi\ $ . . . . .	365
§ 11.11.	$KP_1(n) P_2(0)$ -метод . . . . .	368
§ 11.12.	$K^2P$ -метод . . . . .	369
§ 11.13.	$K^2P_1(1) mKP_2(n)$ -метод . . . . .	371
§ 11.14.	Циклический $KP_1(1)$ -метод . . . . .	372
§ 11.15.	Определение оптимальных коэффициентов в циклическом $KP_1(1)$ -методе . . . . .	375
§ 11.16.	Циклические $K^2P_1(1)$ - и $KP_1(2)$ -методы . . . . .	377
§ 11.17.	Сходимость $KP_1(n)$ -метода для всего пространства . . . . .	378
§ 11.18.	Исследование $KP_1$ -метода для задач с линейной индикатрисой рассеяния. . . . .	382
§ 11.19.	$KP_1(n)$ -метод для конечно-разностных аналогов плоской периодической задачи . . . . .	384

§ 11.20	$KP_1$ (1)-метод для задач с цилиндрической симметрией (бесконечный цилиндр) . . . . .	388
§ 11.21.	Уравнения $KP_1$ (2)-метода для задач в плоской геометрии и с линейной индикатрисой рассеяния. . .	392
§ 11.22.	Решение кинетического уравнения методом расщепления . . . . .	394
§ 11.23.	О некоторых монотонных схемах расщепления. . .	402
§ 11.24.	Метод сопряженных градиентов решения кинетических уравнений . . . . .	406
§ 11.25.	Метод расщепления для решения системы сферических гармоник . . . . .	410
§ 11.26.	Факторизованные операции $P$ . . . . .	415
Приложения . . . . .		416
Список литературы . . . . .		434
Алфавитно-предметный указатель . . . . .		448

**Гурий Иванович Марчук  
Вячеслав Иванович Лебедев**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ**

**Редактор: О. М. Малявина**  
**Художественный редактор А. С. Александров**  
**Оформление художника И. И. Каледина**  
**Технический редактор Н. А. Власова**  
**Корректоры Л. С. Тимохова, Н. А. Смирнова**

**ИБ № 785**

Сдано в набор 03.07.80. Подписано в печать 29.01.81. Т-01035  
Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная.  
Печать высокая. Усл. печ. л. 28,5. Уч.-изд. л. 29,89.  
Тираж 1800 экз. Зак. изд. 72069. Зак. тип. 1955. Цена 4 р. 80 к.  
Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли  
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

## **Уважаемый читатель!**

В 1981 г. выходит в свет книга:

**УСЫНИН Г. Б., КАРАБАСОВ А. С. ЧИРКОВ В. А.**  
**Оптимизационные модели реакторов на быстрых нейтронах.** — М.: Атомиздат, 1981. — 13 л.

Рассматриваются вопросы создания математических моделей для комплексной оптимизации перспективных реакторов на быстрых нейтронах. Построение моделей проводится на основании анализа опыта практического проектирования. Описана методика аппроксимации расчетных характеристик с использованием концепций теории планирования эксперимента. Приведены инженерные методики расчета нейтронно-физических, теплогидравлических и конструкционных характеристик реактора. Особое внимание уделено вопросам адекватности и практической реализации полученных математических моделей. Приведены результаты комплексной оптимизации реакторов на быстрых нейтронах по различным критериям в условиях неопределенности исходных данных.

Для инженеров, занимающихся расчетом и проектированием реакторов. Может быть использована студентами и аспирантами соответствующих специальностей.