Проф. М. К. БЕНТЦЕЛЬ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

ГЕОДЕЗИЗДАТ

Москва — 1948

Проф. М. К. ВЕНТЦЕЛЬ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Краткий курс

Издание 2-е, исправленное и дополненное

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
20	2 снизу	AB и $A'B'$	AB и $A'B'$ в их середине
52	1—3 снизу	$\frac{A}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{A}{2}$
		$\frac{C}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{C}{2}$
60	24 снизу	$\lg\frac{\sin}{\sin C}$	$\lg\frac{\sin c}{\sin C}$
79	11 сверху	49	43
86	1 сверху		$\frac{b_1}{R}, \frac{c_1}{R}, \frac{p_1}{R}, \frac{p_1-a_1}{R}, \frac{p_1-b_1}{R}, \frac{p_1-c_1}{R}$
97	28 сверху	$\alpha-\lambda'$, а во втором $\alpha+\lambda'$	$\alpha+\lambda'$, а во втором $\alpha-\lambda'$
117	18 сверху	стороны	угла
131	24 снизу	$b=82°39'$	$b=82°40'$
138	1 сверху	58 продолжить дугу. Если	58. Если продолжить дугу
150	8 снизу	13',9	1°3',9

Сферическая тригонометрия.

Издательство геодезической и картографической литературы
МОСКВА 1948

Проф. М. К. ВЕНТЦЕЛЬ

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Краткий курс

Издание 2-е, исправленное и дополненное

Министерством высшего образования СССР допущено в качестве учебника для институтов геодезии, аэросъемки и картографии

Издательство геодезической и картографической литературы

МОСКВА 1948

АННОТАЦИЯ

При составлении настоящего курса имелось в виду применение сферической тригонометрии при изучении астрономии, в особенности сферической и практической, и геодезии, главным образом, высшей.

Книга предназначена служить в качестве учебника для студентов младших курсов геодезических и землеустроительных институтов и факультетов, а также для учащихся различных отделений геодезических, топографических и землеустроительных техникумов при изучении сферической тригонометрии. Она может служить также учебным пособием для студентов старших курсов и аспирантов специальных кафедр тех же втузов. Кроме того, она принесет существенную методическую пользу преподавателям математики этих втузов при чтении лекций и ведении упражнений по сферической тригонометрии, а также будет полезна и инженерам-геодезистам различных уклонов и специализаций.

Изложение предмета дано в объеме, необходимом и достаточном для всех вышеуказанных целей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время преподавание сферической тригонометрии в геодезических и землеустроительных втузах и техникумах ведут математики, и притом на младших курсах. Астрономам и геодезистам часто приходится отмечать недостаточную подготовку в этой области студентов старших курсов, приступающих к изучению этих основных специальных дисциплин. В свою очередь, преподаватели математики также не всегда ясно представляют себе объем и специфический уклон, в котором было бы наиболее целесообразно вести преподавание этого предмета.

Желание дать преподавателям математики исчерпывающий ответ на их многократные запросы, а студентам старших курсов возможность восполнить пробелы и освежить свои знания в этой маленькой области математики, без которой, однако, невозможно сколько-нибудь сознательное и продуктивное занятие сферической и практической астрономией и высшей геодезией, побудило меня составить это краткое руководство по сферической тригонометрии в объеме, строго необходимом и минимально достаточном для прохождения и усвоения астрономии и геодезии.

При подготовке к печати настоящего, 2-го издания мною руководило желание учесть, по возможности, указания и замечания рецензентов, а также свой личный опыт преподавания за последние годы, не изменяя в то же время сколько-нибудь существенно ни объема и содержания этого краткого курса, ни, в особенности, самого характера изложения. Интересы и запросы астрономии и высшей геодезии были и неизменно остаются в центре внимания автора. Для этого издания мною написаны вновь §§ 3, 20, 26, главы VII и VIII и большая часть „Приложений“.

В соответствии с пожеланиями рецензентов я вновь написал: § 26 (Формулы синуса половины сферического избытка треугольника), § 33 (Об измерении углов), § 40 (Диференциальные соотношения сферического треугольника) и § 41 (Решение сферических треугольников с малыми сторонами по способу аддитаментов) и основательно переработал: § 22 (Решение прямоугольных треугольников) и § 27 (Решение косоугольных треугольников). В двух последних параграфах мною увеличено число разобранных случаев решения сферических треугольников того и другого вида и способов решения в каждом случае, и, кроме того, на каждый случай приведен пример, который решен всеми рассмотренными способами. В связи с этим добавлен и § 39 (Практическое замечание о решении треугольников) о так называемом правиле Лаланда, так как это „правило" использовано во втором и третьем случаях решения косоугольных треугольников при решении их по аналогиям Непера и формулам Делямбра-Гаусса.

Параграфы 34, 35 и 36 главы VII, написанной вновь, посвящены изложению элементов аналитической геометрии на сфере с точки зрения применения ее в астрономии и геодезии и адресованы по преимуществу преподавателям математики специальных втузов и факультетов. Эти параграфы вводят в круг вопросов, которые могут встретиться при применении сферической тригонометрии на практике. В этом именно смысле они и могут быть использованы при преподавании предмета.

Наоборот, § 3 (Обобщенные треугольники) и § 37 (Вторая система сферических координат) имеют целью ознакомить астрономов и геодезистов, хотя бы отчасти, с обобщенной трактовкой сферической тригонометрии и имеют в виду, главным образом, аспирантов специальных кафедр геодезических втузов. Что касается § 42 (Сферические треугольники с сверхтупыми углами), то он, дополняя и § 3 и § 36, представляет некоторый интерес и для тех и для других читателей этой книжки.

В „Приложениях" приведены задачи по сферической геометрии и тригонометрии, дающие материал для ведения упражнений и для самостоятельной работы учащихся.

Не перечисляя более подробно, отметим только, что бо́льшие или меньшие добавления сделаны еще в §§ 5, 8, 9, 14, 25, 33, часть в интересах большей доказательности и связности изложения, часть и по другим соображениям аналогичного характера.

В последнее время выявилось, что основательные сведения по сферической тригонометрии необходимы также и при прохождении курсов картографии, фотограмметрии и других родственных дисциплин. Полагаю, что и эти запросы будут здесь в достаточной мере удовлетворены, в особенности в связи с теми дополнениями, которые сделаны в настоящем издании.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность всем лицам, оказавшим мне помощь при переработке этой книги для второго издания, в особенности же рецензенту, доктору техн. наук инженер-полковнику А. В. Мазаеву и ответственному редактору, кандидату техн. наук доценту А. И. Витман за их весьма ценные указания и замечания, принятые мною во внимание при окончательном редактировании книги.

Д-р техн. наук проф. *М. К. Вентцель*

Глава I

ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ

§ 1. Элементы фигур на сфере. Аналогия между сферой и плоскостью

Сферическая тригонометрия занимается решением треугольников, расположенных на сфере, и имеет большое применение в астрономии (особенно в сферической и практической), в геодезии (особенно в высшей), в инструментоведении, в картографии, в фотограмметрии, в кристаллографии и в ряде других наук.

Причины этого указать не трудно. В астрономии часто пользуются вспомогательной небесной сферой и постоянно выполняют на ней ряд построений, пользуясь методом сферических координат. В геодезии идеальную поверхность земли в первом приближении рассматривают как сферическую. В картографии пользуются сферой как промежуточной ступенью между реальной земной поверхностью и изображением ее на плоскости. В инструментоведении и в кристаллографии применяют вспомогательную сферу для изучения взаимного расположения в пространстве осей инструмента или кристалла и различных плоскостей, рассматривая на сфере относительное положение точек и линий пересечения этих осей и плоскостей с ее поверхностью и т. д.

Роль сферической тригонометрии заключается в том, что она дает исследователю систему математических формул и соотношений, помогающих ему выражать законы изучаемых явлений кратким, точным и выразительным языком математики, математического анализа — в самом широком смысле этого слова.

В дальнейшем сферическая тригонометрия излагается в объеме, необходимом для изучения астрономии и геодезии.

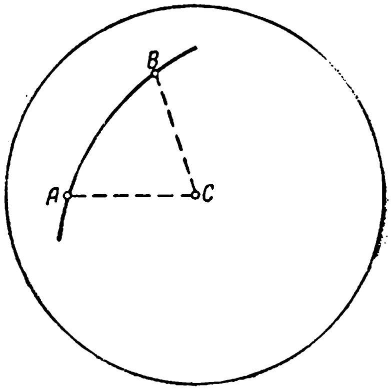
Однако, прежде чем приниматься за изучение сферической тригонометрии, нужно познакомиться с некоторыми основными положениями элементарной геометрии на сфере. Хотя геометрические построения на сферической поверхности и на плоскости весьма различаются между собой, но все же между ними можно провести некоторые аналогии, облегчающие изучение сферической геометрии. Сферическая геометрия или геометрия на сфере рассматривает геометрические свойства фигур, расположенных на поверхности шара.

Рассмотрим в первую очередь простейшие элементы фигур на сфере. На плоскости элементарными геометрическими образами, так сказать, простейшими элементами фигур, прежде всего являются точка и прямая. На сфере такими элементами будут в первую очередь точка и дуга большого круга.

Как известно, через две точки на плоскости (и в пространстве) можно провести прямую и притом только одну, т. е. прямая вполне определяется двумя точками, через которые она проходит.

Точно так же и через две точки на сфере всегда можно провести дугу большого круга и, вообще говоря, только одну.

Теорему эту можно доказать следующим образом. Известно, что через три точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. Проведем через две точки A и B (черт. 1) и центр сферы C плоскость. Всякая плоскость, проходящая через центр сферы, пересекает сферу, как известно, по окружности большого круга. Следовательно, дуга AB, полученная в сечении сферы с проведенной нами плоскостью, есть дуга большого круга; а так как через точки A, B и C может быть проведена только одна плоскость, то и через точки A и B проходит лишь одна окружность большого круга, что и доказывает нашу теорему.

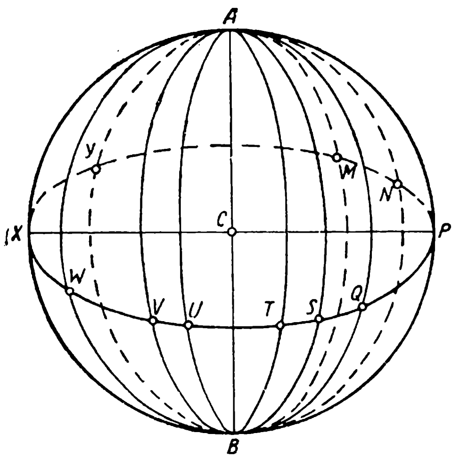


Черт. 1

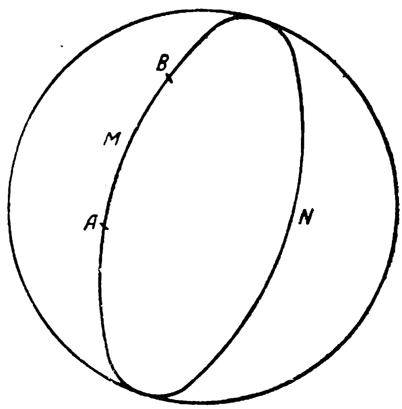
В этом состоит **первая аналогия** между прямой на плоскости и дугой большого круга на сфере. Однако, в то время как для прямой не приходится делать никаких ограничений или оговорок, с дугой большого круга дело обстоит несколько иначе.

В теореме о плоскости, проходящей через три точки, содержится требование, чтобы эти три точки не лежали на одной прямой, иначе, как известно, через них можно будет провести уже не одну плоскость, а бесчисленное множество плоскостей. Две точки A и B на поверхности сферы могут иногда оказаться на одной прямой с центром сферы; это случится, когда они будут лежать на концах одного и того же диаметра (черт. 2).

В таком случае через эти точки можно провести уже не одну окружность большого круга, а сколько угодно. Следовательно, нашу теорему более точно должно формулировать следующим образом: **через две точки на сфере, не лежащие на концах одного и того же диаметра, можно провести дугу большого круга и притом только одну.**



Черт. 2



Черт. 3

Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками. В элементарной геометрии и в анализе доказывается, что и дуга большого круга есть кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере.

Это положение является **второй аналогией** между прямой на плоскости и дугой большого круга на сфере.

Однако, и здесь между ними есть некоторое различие. Через две точки на сфере, не лежащие на концах одного и того же диаметра, можно провести окружность большого круга, но в этом случае наши две точки разделяют эту окружность на две неравные части (черт. 3): на меньшую часть AMB и бóльшую BNA. Так как вся окружность составляет $360°$, то, следовательно, меньшая дуга $AMB < 180°$, а бóльшая дуга $BNA > 180°$. Очевидно, утверждение

Решение. Из данной точки A (черт. 11) сферическим радиусом *), равным 90°, опишем дугу QR; это и будет искомая дуга большого круга, для которой точка A будет полюсом.

Доказательство. Если взять на дуге QR какие-нибудь две точки M и N, не лежащие на одном диаметре, и соединить их дугами AM и AN с точкой A, то по построению

$$\smile AM = \smile AN = 90°,$$

а, значит, точка A и есть полюс дуги QR.

Задача 2. *Найти полюс данной дуги большого круга.*

Решение. Из двух каких-нибудь точек M и N данной дуги QR (черт. 12), не лежащих на одном диаметре, проведем две дуги сферическим радиусом, равным 90°; получим соответственно дуги KL и gH. Точка пересечения этих дуг A и будет полюсом дуги QR.

Доказательство. Соединим точку A с точками M и N дугами больших кругов; по построению будем иметь:

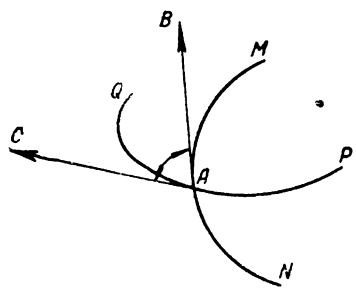
$$\smile AM = \smile AN = 90°.$$

Следовательно, точка A, отстоящая от двух точек дуги QR на 90°, и есть полюс этой дуги большого круга.

§ 5. Сферические углы и их измерение

Две дуги большого круга MN и PQ (см. черт. 4), пересекаясь в точке A, образуют сферический угол MAQ. Точка A называется его вершиной, дуги MA и QA — сторонами.

В высшей математике угол между двумя любыми кривыми MN и PQ (черт. 13), пересекающимися в точке A, определяется, как угол между касательными AB и AC к этим кривым, проведенным в точке их пересечения.



Черт. 13

Это общее определение применяется и к сферическому углу. Таким образом, мы можем сказать, что сферический угол MAQ (черт. 14) измеряется углом между касательными AB и AC, проведенными к его сторонам, через вершину угла A. Короче говорят, что сферический угол MAQ равняется углу BAC между касательными, т. е. сф. $\angle MAQ = \angle BAC$.

Теорема III. *Сферический угол MAQ* (черт. 15) *измеряется дугой QM, заключенной между его сторонами, для которой вершина угла, точка A, является полюсом, т. е.*

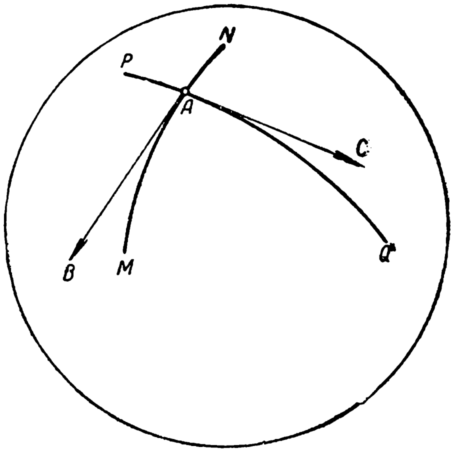
$$\text{сф. } \angle MAQ = \smile MQ.$$

---

*) Сферическим центром окружности (или дуги) большого или малого круга называется точка сферы, от которой все точки этой окружности (или дуги) лежат на одинаковом сферическом или дуговом расстоянии, не большем 90°. Сферическим радиусом окружности (или дуги) большого или малого круга называется дуга большого круга, соединяющая сферический центр этой окружности (или дуги) с любой точкой, лежащей на окружности. Очевидно, для большого круга его сферический центр совпадает с полюсом, а сферический радиус равен 90°. Для малого круга сферический радиус меньше 90°. Проведение на сфере дуг и окружностей больших и малых кругов выполняется с помощью сферического циркуля, который, в отличие от обыкновенного циркуля, имеет изогнутые ножки. Легко сообразить, что линейное расстояние между концами (остриями) ножек сферического циркуля, так сказать, его растворение, должно быть равно хорде дуги большого круга, равной сферическому радиусу описываемой окружности.

Доказательство. Проведем плоскости $AA'M$ и $AA'Q$ через диаметр AA' и точки M и Q соответственно. Эти плоскости, очевидно, можно назвать плоскостями сторон сферического угла MAQ. Плоскости эти образуют двугранный угол $MAA'Q$, который мы можем назвать соответствующим сферическому углу MAQ.

К каждой из сторон угла в точке A проведем касательные AB и AC соответственно. По свойству касательной, каждая из этих прямых лежит в плоскости той дуги, которой она касается, и будет перпендикулярна к радиусу OA, проведенному в точку касания, т. е.



Черт. 14

$$AB \perp AA' \text{ и } AC \perp AA'.$$

Следовательно, угол BAC, являясь линейным углом двугранного угла $MAA'Q$, измеряется тем же числом градусов, минут и проч. Короче это выражают, говоря, что угол BAC равняется двугранному углу $MAA'Q$.

Проведем через центр сферы O плоскость RMQ, перпендикулярную к диаметру AA'. В сечении получим дугу большого круга QMR, для которой точка A будет полюсом.

По построению

$$OQ \perp AA' \text{ и } OM \perp AA'.$$

Следовательно, угол MOQ тоже будет линейным углом двугранного угла $MAA'Q$. Так как угол MOQ центральный, то он измеряется дугой окружности MQ, на которую он опирается.

Таким образом, можем записать, что

$$\text{сф. } \angle MAQ = \angle BAC,$$

согласно определению;

$$\angle BAC = \text{двугранному углу } MAA'Q,$$

по свойству линейных углов;

$$\text{двугранный угол } MAA'Q = \angle MOQ$$

на таком же основании, а по свойству центрального угла

$$\angle MOQ = \smile MQ.$$

Объединив эти четыре равенства, получим:

$$\text{сф. } \angle MAQ = \angle BAC = \text{дв. уг. } MAA'Q = \angle MOQ = \smile MQ, \qquad (1)$$

а следовательно,

$$\text{сф. } \angle MAQ = \smile MQ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Сферический угол и соответствующий ему двугранный угол имеют одну и ту же меру*, т. е.

$$\text{сф. } \angle MAQ = \text{двугранному углу } MAA'Q.$$

Это непосредственно следует из равенства (1).

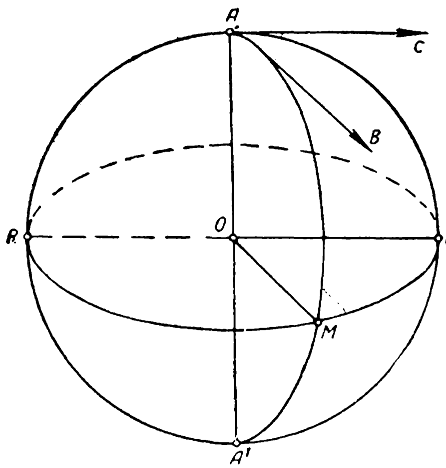
Следствие 2. *Дуга большого круга, проходящая через полюс, перпендикулярна к поляре*, т. е.

$$\smile AM \perp \smile MQ.$$

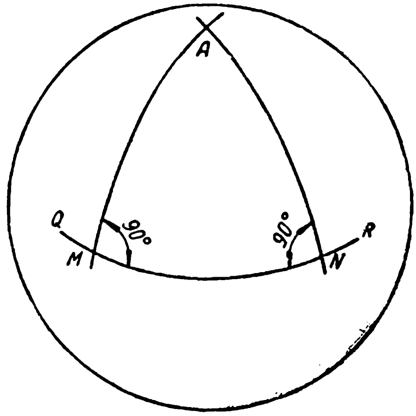
Доказательство. Из стереометрии известно, что плоскость MAA' (черт. 15), проходящая через прямую AA', перпендикулярную к плоскости RQM, будет также перпендикулярна к этой плоскости. Значит, двугранный угол $QMOA$, составленный этими плоскостями, будет равняться 90°, а, стало быть, и соответствующий ему сферический угол QMA тоже будет равняться 90°, а это и значит, что

$$\smile AM \perp \smile MQ.$$

Дуга AM называется сферическим перпендикуляром к дуге QM, если сферический угол между ними равняется 90°.



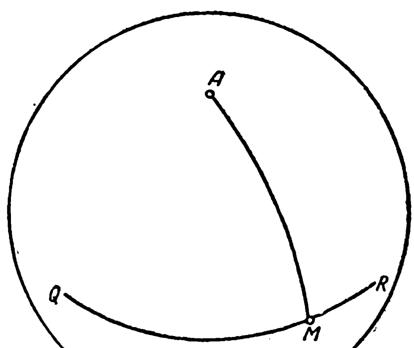
Черт. 15



Черт. 16

Следствие 3. *Сферический перпендикуляр к данной дуге большого круга проходит через ее полюс.*

Доказательство. Через две пересекающиеся прямые OM и OA (черт. 15) можно провести только одну плоскость AOM; эта плоскость будет перпендикулярна к плоскости RQM, будет проходить через точки M и A и в сечении со сферой даст дугу AM, перпендикулярную к дуге MQ и проходящую через точку A, что и доказывает следствие 3.



Черт. 17

Следствие 4. Задача о нахождении полюса данной дуги большого круга (см. задачу 2 предыдущего параграфа) теперь может быть решена другим способом, а именно: на дуге QR (черт. 16) возьмем две произвольные точки M и N, не лежащие на одном диаметре, и восставим в этих точках сферические перпендикуляры MA и NA к дуге QR. Точка их пересечения будет полюсом дуги QR.

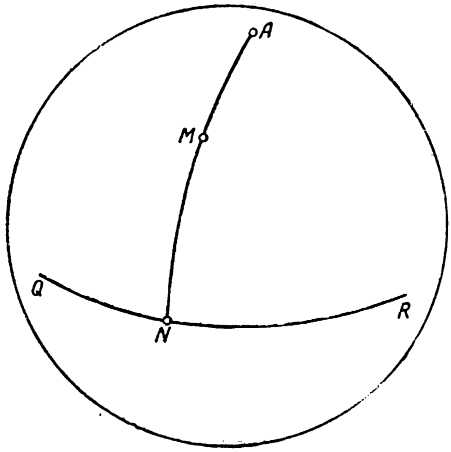
Доказательство. Согласно следствию 3 полюс дуги большого круга QR должен лежать одновременно на обоих сферических перпендикулярах к этой дуге. Следовательно, он лежит в точке их пересечения A.

Задача 3. *Дана дуга большого круга QR и ее полюс, точка A* (черт. 17). *Из точки M, лежащей на этой дуге, восставить в ней сферический перпендикуляр.*

Решение. Соединим полюс A и точку M дугой большого круга. Дуга AM и будет сферическим перпендикуляром к дуге QR в точке M. Это вытекает из следствия 2.

Задача 4. *Дана дуга большого круга QR и ее полюс, точка A* (черт. 18). *Из точки M, не лежащей на дуге QR, опустить на нее сферический перпендикуляр.*

Решение. Соединим полюс A с точкой M дугой большого круга и продолжим дугу AM до пересечения с дугой QR в точке N. Дуга AMN и будет сферическим перпендикуляром к дуге QR. Это также вытекает из следствия 2.



Черт. 18

Следствие 5. *Вертикальные сферические углы равны.*

Доказательство. Вертикальными сферическими углами называются такие сферические углы, у которых стороны одного будут продолжением дуг, являющихся сторонами другого сферического угла, как, например, углы MAQ и NAP на черт. 14. Если мы продолжим касательные AB и AC к сторонам AM и AQ сферического угла MAQ в направлении точек N и P соответственно, то угол между продолжениями этих касательных будет, с одной стороны, равен сферическому углу NAP, согласно определению, а, с другой стороны, будет равен углу BAC, как вертикальный. Следовательно,

$$\text{сф.} \angle NAP = \text{сф.} \angle MAQ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 6. *Смежные сферические углы равны в сумме* 180°.

Доказательство. Смежными сферическими углами называются углы, которые имеют общую вершину и одну общую сторону и у которых две другие стороны лежат на одном и том же большом круге, как, например, сф. $\angle QAM$ и сф. $\angle MAR$ на черт. 15. Из чертежа видно, что дуга QM есть мера сф. $\angle QAM$, а дуга MR — мера сф. $\angle MAR$, т. е.

$$\text{сф.} \angle QAM = \smile QM;$$
$$\text{сф.} \angle MAR = \smile MR.$$

Складывая почленно, получим:

$$\text{сф.} \angle QAM + \text{сф.} \angle MAR = \smile QM + \smile MR = \smile QR.$$

Но из чертежа видно, что $\smile QR$ есть половина окружности большого круга QMR и, следовательно, равняется 180°. Таким образом,

$$\text{сф.} \angle QAM + \text{сф.} \angle MAR = 180°,$$

что и требовалось доказать.

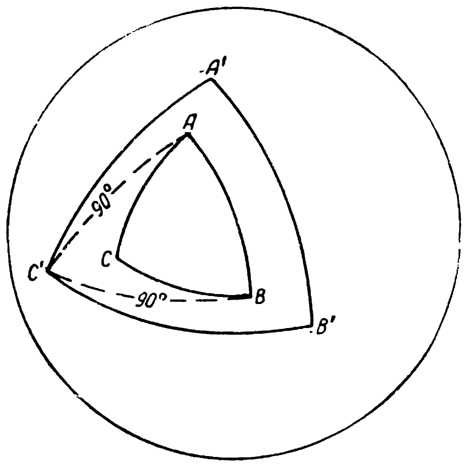
§ 6. Полярные треугольники

Если вершины треугольника ABC являются полюсами сторон другого сферического треугольника $A'B'C'$, то этот последний треугольник называется полярным по отношению к данному.

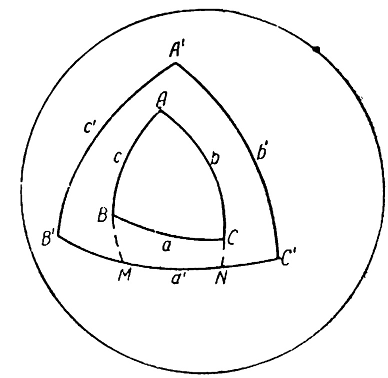
Теорема IV. *Если треугольник $A'B'C'$ полярен по отношению к треугольнику ABC, то и, наоборот, треугольник ABC будет полярен по отношению к треугольнику $A'B'C'$* (черт. 19).

Доказательство. Соединим вершину данного треугольника A (черт. 19) с какой-нибудь из точек стороны $B'C'$ другого треугольника, для которой точка A служит полюсом, например, с вершиной C', дугой большого круга AC'. По свойству полюса, дуга AC' будет равняться $90°$. Соединим также вершину B треугольника ABC дугой большого круга с какой-нибудь из точек стороны $A'C'$, для которой эта вершина является полюсом, например, опять с точкой C'. Дуга BC' будет также равна $90°$.

Мы получили, что вершина C' треугольника $A'B'C'$ отстоит от двух точек A и B стороны AB треугольника ABC на $90°$. Следовательно, на основании теоремы II, вершина C' есть полюс стороны AB. Таким же образом можно показать, что точки A' и B' являются полюсами сторон CB и CA треугольника ABC. Итак, все вершины треугольника $A'B'C'$ суть полюсы сторон треугольника ABC; значит, этот треугольник является полярным по отношению к треугольнику $A'B'C'$, что и требовалось доказать.



Черт. 19



Черт. 20

На основании этой теоремы выводим заключение, что сферические треугольники ABC и $A'B'C'$ взаимно полярны друг другу.

Иначе это можно формулировать таким определением. Если вершины одного сферического треугольника являются полюсами сторон другого, то такие треугольники называются взаимно полярными*).

Теорема V. *Угол данного треугольника и соответствующая ему сторона полярного с ним треугольника в сумме равняются 180°*, т. е. (черт. 20)

$$A + a' = 180°.$$

Доказательство. Возьмем треугольник ABC и взаимно полярный с ним треугольник $A'B'C'$ (черт. 20). Продолжим стороны AB и AC до пересечения со стороной $B'C'$ соответственно в точках M и N. Так как вершина A есть полюс дуги $B'C'$, то дуга MN, на основании теоремы III, является мерой угла A. Из чертежа видно, что сторона $B'C'$, которую мы обозначили через a', делится точками M и N на три части — $B'M$, MN и NC'.

---

*) При пересечении трех больших кругов получается 8 сферических треугольников. Из них взаимно полярен с данным лишь тот, у которого любая вершина A', вляющаяся полюсом стороны BC, и вершина A треугольника ABC, противолежащая тороне BC, лежат по одну сторону от этой стороны.

Это можно записать так:

$$A = MN;$$
$$a' = B'M + MN + NC'.$$

Складывая, находим:

$$A + a' = B'M + MN + MN + NC' = B'N + MC'.$$

Но

$$\smile B'N = 90^\circ,$$

так как B' есть полюс дуги AC, на продолжении которой лежит точка N, и

$$\smile MC' = 90^\circ,$$

так как C' есть полюс дуги AB, на продолжении которой лежит точка M.

Следовательно,

$$A + a' = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

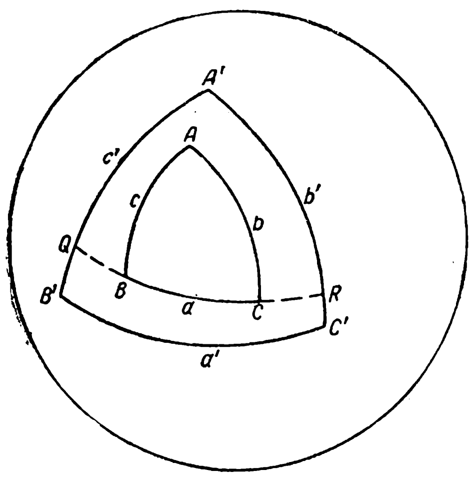
что и требовалось доказать.

Применяя теорему V к каждому из углов треугольника ABC, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} A + a' &= 180^\circ \\ B + b' &= 180^\circ \\ C + c' &= 180^\circ \end{aligned}\right\}. \qquad (2)'$$

Теорема VI. *Сторона данного треугольника и соответствующий ей угол полярного с ним треугольника в сумме равняются 180°*, т. е. (черт. 21)

$$a + A' = 180^\circ.$$



Черт. 21

Доказательство. Это соотношение вытекает уже из того, что треугольники ABC и $A'B'C'$ взаимно полярны; однако, оно может быть доказано и независимо от предыдущей теоремы.

Для этого продолжим дугу BC в обе стороны до пересечения ее с дугами $A'B'$ и $A'C'$ в точках Q и R (черт. 21). Дуга QR является мерой угла A', так как вершина A' есть полюс этой дуги, и она заключена между сторонами угла A'. В то же время дуга QR точками B и C делится на три части QB, BC и CR.

Таким образом, на основании чертежа можем записать:

$$a = BC;$$
$$A' = QB + BC + CR.$$

Складывая, найдем:

$$a + A' = QB + BC + BC + CR = QC + BR.$$

Но

$$\smile QC = 90^\circ,$$

так как C есть полюс дуги $A'B'$ и точка Q есть одна из точек этой дуги, а

$$\smile BR = 90^\circ,$$

так как B есть полюс дуги $A'C'$ и точка R лежит на этой дуге.

Следовательно,

$$a + A' = 90° + 90° = 180°,$$

что и требовалось доказать.

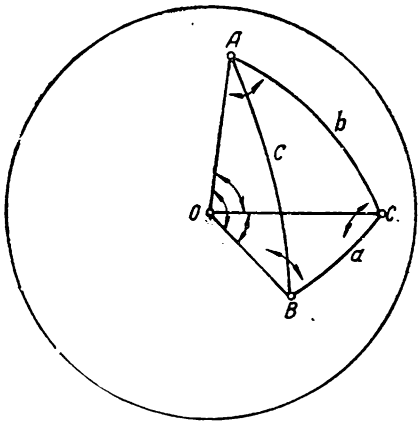
Применяя теорему VI к каждой из сторон треугольника ABC, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} a + A' &= 180° \\ b + B' &= 180° \\ c + C' &= 180° \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Свойства взаимно полярных треугольников, выражаемые равенствами (2) и (3), имеют весьма важное значение в сферической геометрии и тригонометрии. Они, например, позволяют какие-либо свойства и формулы, выведенные для сторон сферического треугольника, распространять, с соответствующими изменениями, на его углы и, наоборот,— и облегчают, таким образом, вывод целого ряда формул и соотношений.

§ 7. Сферический треугольник и соответствующий ему трехгранный угол

Если вершины сферического треугольника ABC (черт. 22) соединим радиусами OA, OB, OC с центром сферы O и через каждую пару радиусов проведем плоскости, которые будут плоскостями соответствующих сторон треугольника ABC, то получим трехгранный угол $OABC$, **соответствующий** данному сферическому треугольнику ABC. Вершиной этого трехгранного угла является центр сферы O, ребрами — радиусы сферы OA, OB, OC, а гранями — плоскости сторон сферического треугольника OAB, OBC и OCA.



Черт. 22

В стереометрии рассматриваются следующие шесть элементов трехгранного угла: три плоских угла, составленных попарно его ребрами, т. е. углы AOB, BOC и COA, и три двугранных угла, составленных попарно его гранями, т. е. двугранные углы $AOBC$, $BOCA$, $COAB$.

В стереометрии доказываются следующие свойства плоских и двугранных углов трехгранного угла:

а) Сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла.

б) Разность двух плоских углов трехгранного угла меньше третьего плоского угла.

в) Сумма всех трех плоских углов трехгранного угла больше нуля и меньше 360°.

В справедливости первых двух свойств можно легко убедиться на раздвижной модели трехгранного угла. Справедливость третьего свойства станет очевидной на основании следующих рассуждений. Если мы будем уменьшать плоские углы нашего трехгранного угла, сдвигая между собой его ребра, т. е. радиусы OA, OB и OC, то и сумма плоских углов будет уменьшаться; в пределе сумма этих углов может стать равной нулю; однако, это произойдет только в том случае, если каждое из слагаемых, т. е. каждый из плоских углов в отдельности, станет равным нулю. Но тогда ребра должны будут слиться между собой в одну прямую и трехгранный угол исчезнет, он обратится в прямую. Значит, если трехгранный угол существует, сумма его плоских углов должна быть больше нуля. Если, наоборот, мы будем увеличивать плоские углы нашего трехгранного угла, раздвигая его ребра, то и сумма его плоских углов будет увеличиваться. В пределе, когда сумма эта достигнет 360°, трехгранный угол исчезнет — он обратится в плоскость. Значит, пока трехгранный угол существует, сумма его плоских углов должна быть меньше 360°.

г) Сумма всех двугранных углов трехгранного угла больше 180° и меньше 540°. Доказательство этого свойства можно найти в некоторых полных курсах элементарной геометрии.

Между элементами сферического треугольника ABC и элементами соответствующего ему трехгранного угла $OABC$ существуют определенные взаимосвязи, а именно:

1) Плоские углы трехгранного угла равняются соответствующим сторонам сферического треугольника.

Это вытекает из того, что плоские углы трехгранного угла измеряются, как углы центральные, дугами, на которые они опираются, т. е. как раз сторонами треугольника ABC.

2) Двугранные углы трехгранного угла равняются соответствующим сферическим углам треугольника ABC.

Это свойство явствует из следствия 1 теоремы III (см. стр. 12). Формулами эти зависимости можно выразить так:

$$\left.\begin{aligned} a&=\angle BOC\\ b&=\angle COA\\ c&=\angle AOB \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{сф. } \angle A=\text{двугранному углу } COAB\\ &\text{сф. } \angle B= \quad \text{»} \quad\quad \text{»} \quad AOBC\\ &\text{сф. } \angle C= \quad \text{»} \quad\quad \text{»} \quad BOCA \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

§ 8. Свойства сторон и углов сферического треугольника

Свойства элементов сферического треугольника вытекают из свойств элементов трехгранного угла, перечисленных в предыдущем параграфе.

На основании свойства а) и формул (4) выводим следующее свойство сторон треугольника:

1) Сумма двух сторон сферического треугольника больше третьей, т. е.

$$a+b>c. \tag{6}$$

На основании свойства б) и формул (4) имеем:

2) Разность двух сторон сферического треугольника меньше третьей его стороны, т. е.

$$c-b<a. \tag{7}$$

3) Сумма сторон сферического треугольника больше нуля и меньше 360°, т. е.

$$0<a+b+c<360°. \tag{8}$$

Это вытекает из формул (4) и свойства в), а также может быть доказано следующим простым рассуждением.

Если мы будем уменьшать стороны сферического треугольника, то в пределе он исчезнет, превратясь в точку, и, следовательно, сумма его сторон обратится в нуль. Если мы будем увеличивать стороны сферического треугольника, то в пределе он тоже исчезнет, он превратится в окружность большого круга, и, следовательно, сумма его сторон будет стремиться к 360°, как к пределу. Значит, пока сферический треугольник существует, сумма его сторон должна быть больше нуля и меньше 360°.

4) Сумма углов сферического треугольника больше 180° и меньше 540°, т. е.

$$180°<A+B+C<540°. \tag{9}$$

Это вытекает из формул (5) и свойства г) двугранных углов трехгранного угла, приведенных в предыдущем параграфе.

Ввиду важности этого свойства, докажем его еще иным путем.

Возьмем двойное неравенство (8) и разобьем его на два простых:

$$a+b+c<360^\circ$$

и

$$a+b+c>0.$$

Применим эти неравенства к треугольнику $A'\,B'\,C'$ (черт. 21), взаимно полярному с данным треугольником ABC, т. е. запишем:

$$a'+b'+c'<360^\circ \qquad \text{(I)}$$

и

$$a'+b'+c'>0. \qquad \text{(II)}$$

По свойству взаимно полярных треугольников, по формулам (2) § 6 получим:

$$\left.\begin{aligned} a' &= 180^\circ - A \\ b' &= 180^\circ - B \\ c' &= 180^\circ - C \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III)}$$

Подставляя в неравенство (I) вместо a', b' и c' их выражения через правые части равенств (III), получим:

$$(180^\circ - A)+(180^\circ - B)+(180^\circ - C)<360^\circ,$$

или

$$540^\circ - (A+B+C)<360^\circ,$$

или $540^\circ - 360^\circ < A+B+C$,

или $180^\circ < A+B+C$,

т. е. $A+B+C>180^\circ$.

Таким образом, первая часть неравенства (9) доказана.

Теперь выполним такую же подстановку выражений (III) в неравенство (II):

$$(180^\circ - A)+(180^\circ - B)+(180^\circ - C)>0,$$

или $540^\circ - (A+B+C)>0$,

или $540^\circ > A+B+C$,

т. е. $A+B+C<540^\circ$.

Таким образом, неравенство (9) полностью доказано. Попутно этим доказательством дан пример применения свойств взаимно полярных треугольников, о котором было упомянуто в конце § 6.

Итак, сумма углов сферического треугольника всегда больше 180° на некоторую величину, которая называется **сферическим избытком** или **эксцессом** и обозначается буквой ε. Таким образом, мы можем записать

$$A+B+C=180^\circ+\varepsilon. \qquad (10)$$

Сравнивая равенство (10) с неравенством (9), видим, что

$$0<\varepsilon<360^\circ,$$

т. е. сферический избыток больше нуля и меньше 360°.

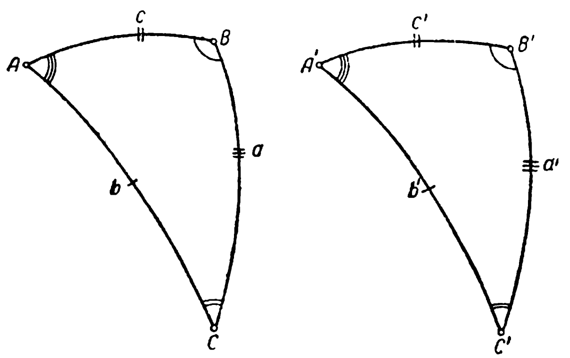
Первые два свойства сферического треугольника аналогичны свойствам плоского треугольника, последние два свойства присущи только сферическому треугольнику. Следует отметить и еще некоторые свойства сферических треугольников, аналогичные свойствам плоских, — а именно: в сферическом треугольнике:

5) против равных сторон лежат равные углы;
6) против равных углов лежат равные стороны;
7) против большей стороны лежит больший угол;
8) против большего угла лежит бóльшая сторона.

Свойства 5) — 8) могут быть доказаны с помощью построений и рассуждений, аналогичных тем, которые служат для доказательства подобных же теорем в планиметрии.

§ 9. Равные и симметричные сферические треугольники

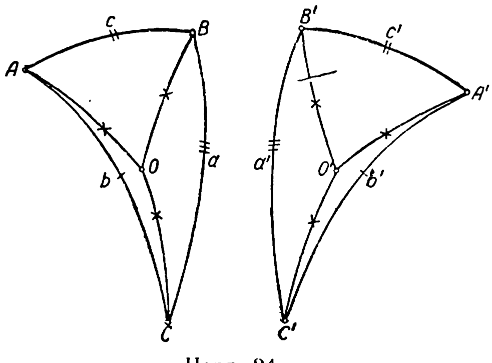
Равными называются такие сферические треугольники, которые при наложении совпадают. Очевидно, у равных треугольников и все соответственные элементы равны, как, например, у треугольников ABC и $A'B'C'$ на черт. 23.



Черт. 23

Однако, обратное утверждение не всегда справедливо, как например, для треугольников ABC и $A'B'C'$ на черт. 24. Хотя у этих треугольников все части одного треугольника соответственно равны всем частям другого, однако, эти треугольники не равны, так как вследствие их сферичности и неодинакового расположения их частей они при наложении не совпадают. Такие треугольники называются *симметричными*.

Условие равенства сферических треугольников может быть сформулировано так: *если три какие-либо элемента одного сферического треугольника соответственно равны трем элементам другого и расположены у обоих треугольников одинаково, то такие треугольники равны*. Наоборот, *если* три элемента одного сферического треугольника соответственно равны трем элементам другого, но *расположены* у обоих треугольников *неодинаково*, то такие треугольники *симметричны* друг другу.



Черт. 24

Теорема VII. *Симметричные треугольники равновелики*, т. е. занимают одинаковую часть поверхности сферы, на которой они лежат.

Доказательство. Пусть точка O (черт. 24) отстоит от точек A, B и C на одинаковом, сферическом расстоянии, а точка O' так же расположена относительно точек A', B' и C'. Иначе сказать, точки O и O' являются сферическими центрами окружностей, описанных около соответствующих сферических треугольников. Так как сферический центр окружности малого круга, описанного около сферического треугольника, лежит на сферическом перпендикуляре, восстановленном в середине каждой из его сторон, то двухкратным наложением убеждаемся, что сферические радиусы окружностей, вписанных в два симметричных треугольника, равны между собой. В самом деле, наложим сперва сторону $B'A'$ на сторону AB, совместив точку B' с точкой A; точка A' совместится тогда с точкой B вследствие равенства сторон AB и $A'B'$, а точки O и O' обе расположатся где-нибудь на сферическом перпендикуляре, восстановленном к совпавшим сторонам AB и $A'B'$. Наложим теперь сторону $B'C'$ на сторону BC, совместив при этом точку C' с точкой B, тогда, вследили, наконец, по умножении на 2 и упрощении,

$$\sin 2B \sec b = \sin 2C \sec c, \tag{23}$$

то-есть произведение синуса двойного косвенного угла на секанс противолежащего этому углу катета есть для данного прямоугольного сферического треугольника величина постоянная.

Это и является вторым инвариантом рассматриваемого вида треугольников.

Оба инварианта могут быть истолкованы с геометрической точки зрения. Первый инвариант равняется синусу сферического перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Если мы обозначим этот перпендикуляр буквою h, то формулу (21) можем переписать так:

$$\operatorname{tg} b \cos B = \operatorname{tg} c \cos C = \sin h. \tag{21'}$$

Чтобы доказать это, напишем по правилу Непера-Модюи:

$$\operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b = \sin c \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c = \sin b.$$

Умножая первое равенство на $\sin B$, а второе — на $\sin C$, получим:

$$\cos B \operatorname{tg} b = \sin c \sin B \quad \text{и} \quad \cos C \operatorname{tg} c = \sin b \sin C. \tag{а}$$

Далее, определяя дважды $\sin h$ из тех двух сферических треугольников, на которые сферический перпендикуляр h разбивает данный треугольник, по правилу Непера-Модюи будем иметь:

$$\sin h = \sin b \sin C = \sin c \sin B. \tag{б}$$

Сопоставляя равенства (а) и (б), получаем формулу (21′).

Второй инвариант равняется удвоенному произведению синусов косвенных углов прямоугольного сферического треугольника, т. е.

$$\sin 2B \sec b = \sin 2C \sec c = 2 \sin B \sin C. \tag{23'}$$

Из данного треугольника по правилу Непера-Модюи имеем:

$$\cos B = \sin C \cos b \quad \text{и} \quad \cos C = \sin B \cos c,$$

откуда

$$\frac{\cos B}{\cos b} = \sin C \quad \text{и} \quad \frac{\cos C}{\cos c} = \sin B.$$

Умножая первое равенство на $2 \sin B$, а второе — на $2 \sin C$, получим:

$$\frac{2 \sin B \cos B}{\cos b} = \frac{2 \sin C \cos C}{\cos c} = 2 \sin B \sin C,$$

откуда и следует равенство (23′).

Чтобы не возвращаться более к этому вопросу в дальнейшем изложении, отметим, что оба инварианта могут быть использованы в качестве контрольных формул при решении прямоугольных сферических треугольников (§ 22), а также при вычислении сферического избытка прямоугольного сферического треугольника с малыми сторонами (§ 33).

§ 21. Соотношение между катетом и противолежащим ему углом

Теорема. *Катет и противолежащий ему острый угол суть величины одного и того же порядка.*

Доказательство. Для прямоугольного сферического треугольника на основании формул (18) и (19) всегда имеют место следующие соотношения между одинаковыми функциями катета и противолежащего ему угла:

$$\sin b = \sin B \sin a,$$
$$\cos B = \cos b \sin C,$$
$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} B \sin c.$$

В правых частях этих формул вторыми множителями везде стоят синусы тех или других элементов треугольника. Так как элементы сферического треугольника — как стороны, так и углы — должны быть меньше 180°, то синусы их всегда положительны. Поэтому синусы, косинусы и тангенсы катета и противолежащего ему угла всегда имеют соответственно одни и те же знаки. Следовательно, катет и противолежащий ему угол всегда либо оба больше, либо оба меньше 90°.

Так как эти вторые множители, как синусы, всегда меньше единицы, то, если a, c и C не бесконечно малы, синусы, косинусы и тангенсы катета и противолежащего ему угла, очевидно, будут величинами одного и того же порядка. Следовательно, катет и противолежащий ему угол, при этих условиях, также будут величинами одного и того же порядка, что и требовалось доказать.

Случай, когда какая-либо или какие-либо из величин a, c и C бесконечно малы, требует более подробного исследования, которое выходит за рамки настоящего курса. Здесь возможен, например, случай, когда все стороны сферического треугольника будут бесконечно малы, а углы будут иметь конечную величину. Это будут так называемые треугольники, „с малым изгибом" сторон. Такие треугольники можно рассматривать и решать как плоские. Возможен также случай, когда треугольник будет бесконечно мало отличаться от сферического двуугольника, т. е. одна его сторона бесконечно мала, а две другие близки к 180°.

§ 22. Решение прямоугольных сферических треугольников

Если три элемента сферического треугольника даны, то можно найти три остальных его элемента, т. е. решить треугольник. При этом в теории принято искомые элементы выражать непосредственно через данные, на практике же часто для удобства уже найденный элемент рассматривают в дальнейшем как данный и выражают через него искомые.

Так как в прямоугольном треугольнике один элемент, т. е. прямой угол, всегда известен, то для решения прямоугольного сферического треугольника достаточно знать какие-либо два из его остальных пяти элементов. Это подтверждают и формулы (18) и (19), ибо в каждую из этих формул входят только три элемента, так что, зная какие-либо два из них, можно определить третий. Вместе с тем, как это явствует из следствия, сформулированного в § 11, этими двумя элементами могут быть и оба косвенных угла треугольника, так как сферический треугольник вполне определяется тремя своими углами. Общий план решения прямоугольного сферического треугольника таков: каждый из трех искомых его элементов, пользуясь правилом Непера-Модюи, выражают через данные, составляя одну из формул (18) или (19), смотря по взаимному расположению искомого и данных элементов. При этом вовсе не обязательно, чтобы искомый элемент с самого начала находился в левой части формулы, так как потом формулу можно алгебраически решить относительно этого искомого элемента.

После того как для каждого из искомых элементов получена рабочая формула, необходимо составить контрольную формулу, которая получается, если все три найденных элемента соединить одной формулой, составленной согласно правилу Непера-Модюи.

В подробных курсах сферической тригонометрии разбираются следующие шесть случаев решения прямоугольных сферических треугольников: 1) по гипотенузе и катету, 2) по двум катетам, 3) по гипотенузе и одному из косвенных углов, 4) по катету и прилежащему углу, 5) по катету и противолежащему углу, 6) по двум углам.

Из них только пятый случай дает два решения, так как все три искомых элемента находятся по синусам. Хотя в первом и третьем случаях тоже один из элементов вычисляется по синусу, но в этих случаях выбор между двумя возможными решениями (меньше 90° или больше 90°) можно сделать, руководствуясь 7-м или 8-м свойствами сферического треугольника (см. § 8), а также соображениями, изложенными в § 21.

Следует, кроме того, иметь в виду, что иногда по синусам и косинусам искомые элементы получаются с недостаточной точностью. Это, как известно, для синуса бывает тогда, когда искомый угол или дуга близки к 90°, а для косинуса — к 0° или к 180°. Тогда стараются перейти к тангенсу, либо используя для получения подходящей формулы уже найденные элементы, либо преобразуя первоначальную формулу на основании известного соотношения

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Далее мы рассмотрим для примера четыре первых случая, как более часто встречающиеся.

I случай. Дана гипотенуза a и катет b. Найти углы B и C и катет c (см. черт. 38, где данные элементы отмечены кружком).

По правилу Непера-Модюи, для угла C сразу напишем:

$$\cos C=\operatorname{ctg} a\operatorname{tg} b. \tag{I}$$

Далее, таким же образом будем иметь:

$$\sin b=\sin a\sin B,$$

откуда

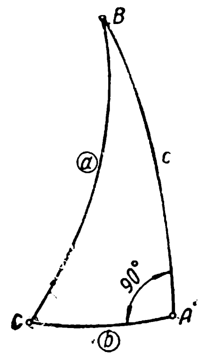
$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a} \tag{II}$$

и, наконец,

$$\cos a=\cos b\cos c$$

или

$$\cos c=\frac{\cos a}{\cos b}. \tag{III}$$



Черт. 38

Формулы (I), (II) и (III) решают задачу. Чтобы получить контрольную формулу, соединим C, B и c по правилу Непера-Модюи:

$$\cos C=\sin B\cos c. \tag{IV}$$

Заметим, что контроль здесь получается двоякий. Формально элементы треугольника в контрольную формулу должны входить под знаками тех же самых функций, по которым они определялись в формулах (I) — (III). При подстановке же числовых значений контрольная формула должна обращаться в тождество.

Пример. Решить прямоугольный сферический треугольник, если гипотенуза $a=83°4'25''$ и катет $b=142°17'10''$.

Решение

Вычисление угла C

lg ctg a	9.08 451
lg tg b	9.88 834 n
lg cos C	8.97 285 n
C	95°23′25″

Вычисление угла B

lg sin b	9.78 655
lg cosec a	0.00 318
lg sin B	9.78 973
B	141°57′38″

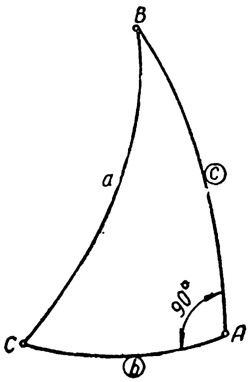
Вычисление катета c

lg cos a	9.08 133
lg sec b	0.10 178 n
lg cos c	9.18 311 n
c	98°46′7″

Контроль

lg sin B	9.78 973
lg cos c	9.18 311 n
Сумма	8.97 284 n
lg cos C	8.97 285 n

Как только вычислены все три логарифма функций искомых элементов, прежде всего делаем контрольные вычисления. „Контроль“ в нашем примере, как обычно говорят, „сошелся“. Расхождение на одну единицу последнего знака допустимо и объясняется неизбежными ошибками округлений. После этого подыскиваем по логарифмам искомые элементы в таком порядке: сперва C и c, а затем уж B. Так как B находится по синусу, а синус в I и во II четвертях положителен, то вычисленному значению $\lg \sin B$ соответствуют два значения угла B: $38°2'22''$ и $141°57'38''$. Однако, на основании свойств сферических треугольников вообще и прямоугольных в частности (см. §§ 8 и 21), заключаем: так как $b > 90°$ и $b > c$, то должно быть $B > 90°$ и $B > C$. Следовательно, в нашем примере годится только второе значение, т. е. $B = 141°57'38''$.



Черт. 39

II случай. Даны два катета b и c. Найти углы треугольника B и C и гипотенузу a (черт. 39).

По правилу Непера-Модюи, для гипотенузы a непосредственно имеем;

$$\cos a = \cos b \cos c. \qquad (\mathrm{I})$$

Затем, по тому же правилу, напишем:

$$\sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\sin c}{\operatorname{tg} b}. \qquad (\mathrm{II})$$

Точно так же получим сначала выражение

$$\sin b = \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c$$

и затем отсюда найдем:

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\sin b}{\operatorname{tg} c}. \qquad (\mathrm{III})$$

Формулы (I), (II) и (III) и будут рабочими формулами для второго случая. Контрольная же формула здесь будет иметь такой вид:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C. \qquad (\mathrm{IV})$$

Пример. Решить прямоугольный сферический треугольник, если его катеты

$$b = 124°18'17'',$$
$$c = \;\;73\;\;34\;39.$$

Решение

Вычисление a

$\lg \cos b$	9.75 096 n
$\lg \cos c$	9.45 135
$\lg \cos a$	9.20 231 n
a	99°10′6″

Вычисление B

$\lg \sin c$	9.98 191
$\lg \operatorname{ctg} b$	9.83 396 n
$\lg \operatorname{ctg} B$	9.81 587 n
B	123°12′9″

Вычисление C

$\lg \sin b$	9.91 701
$\lg \operatorname{ctg} c$	9.46 944
$\lg \operatorname{ctg} C$	9.38 645
C	76°18′59″

Контроль

$\lg \operatorname{ctg} B$	9.81 587 n
$\lg \operatorname{ctg} C$	9.38 645
Сумма	9.20 232 n
$\lg \cos a$	9.20 231 n

Контроль „сходится“ (см. пояснения к предыдущему примеру). Если стороны треугольника малы, то формула (I) не пригодна. Тогда сначала вычисляют углы B и C, а затем гипотенузу a, дважды по формулам:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos B},$$

которые легко получаются из формул (19). Совпадение результатов, полученных при вычислении по обеим формулам, служит контролем.

III случай. Дана гипотенуза a и косвенный угол B. Найти катеты b и c и угол C (черт. 40).

Непосредственно по правилу Непера-Модюи для катета b получим:

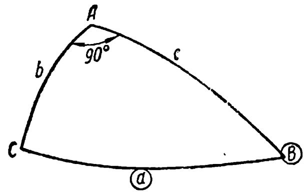
$$\sin b = \sin a \sin B. \qquad \text{(I)}$$

Для получения другого катета c, сперва запишем:

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c,$$

а затем найдем:

$$\operatorname{tg} c = \frac{\cos B}{\operatorname{ctg} a}. \qquad \text{(II)}$$



Черт. 40

Для угла C, подобным же образом будем иметь:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\cos a}{\operatorname{ctg} B}. \qquad \text{(III)}$$

Получив рабочие формулы (I), (II) и (III), контрольную формулу составим обычным путем, т. е.

$$\sin b = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C. \qquad \text{(IV)}$$

Пример. Решить прямоугольный сферический треугольник по гипотенузе a и косвенному углу B, если $a = 37°48'5''$ и $B = 123°17'14''$.

Решение

Вычисление b

lg sin a	9.78 740
lg sin B	9.92 217
lg sin b	9.70 957
b	149°10′46″

Вычисление c

lg cos B	9.73 944 n
lg tg a	9.88 970
lg tg c	9.62 914 n
c	156°56′20″

Вычисление C

lg cos a	9.39 770
lg tg B	0.18 273 n
lg ctg C	0.08 043 n
C	140°16′32″

Контроль

lg tg c	9.62 914 n
lg ctg C	0.08 043 n
Сумма	9.70 957
lg sin b	9.70 957

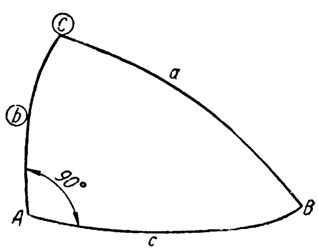
Контроль сошелся в точности. Катет b должен быть больше 90°, так как данный угол B больше 90° (§ 21). Условие, что $b < c$, т. к. $B < C$, не противоречит предыдущему. Если катет b близок к 90°, то его точнее можно получить вычислением по формуле:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C,$$

или по формуле:

$$\cos b = \frac{\cos a}{\cos c}$$

после того, как c и C уже вычислены.



Черт. 41

IV случай. Даны катет b и прилежащий к нему косвенный угол C. Найти гипотенузу a, катет c и другой косвенный угол B (черт. 41).

Формулу для вычисления угла B составим по правилу Непера-Модюи непосредственно:

$$\cos B = \cos b \sin C. \qquad \text{(I)}$$

Гипотенуза a может быть найдена из соотношения:

$$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b,$$

из которого имеем:

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\cos C}{\operatorname{tg} b}. \tag{II}$$

Точно таким же образом для катета c запишем сначала:

$$\sin b = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C,$$

откуда

$$\operatorname{tg} c = \frac{\sin b}{\operatorname{ctg} C}. \tag{III}$$

Эти три формулы (I), (II) и (III) будут рабочими формулами для рассматриваемого случая. В качестве контрольной послужит формула:

$$\cos B = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c. \tag{IV}$$

Пример. Решить прямоугольный сферический треугольник по катету b и прилежащему косвенному углу C, если дано:

$$b = 44°26'21''$$
$$C = 50 \quad 0 \quad 0.$$

Решение

Вычисление B

lg cos b	9.85 370
lg sin C	9.88 425
lg cos B	9.73 795
B	56°50′30″

Вычисление a

lg cos C	9.80 807
lg ctg b	0.00 850
lg ctg a	9.81 657
a	56°45′19″

Вычисление c

lg sin b	9.84 519
lg tg C	0.07 619
lg tg c	9.92 138
c	39°50′31″

Контроль

lg ctg a	9.81 657
lg tg c	9.92 138
Сумма	9.73 795
lg cos B	9.73 795

Контроль сходится точно. Если угол B близок к 0°, то точнее вычислять его по формуле:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a},$$

для чего нужно предварительно вычислить гипотенузу a.

Глава IV

КОСОУГОЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 23. Формулы полупериметра

Так как почти все основные формулы, выведенные нами в главе II, неудобны для логарифмического вычисления, то для косоугольных треугольников выводятся еще несколько групп формул, свободных от этого недостатка.

Прежде всего получим формулы для синуса и косинуса половины угла сферического треугольника в функции его сторон. С этой целью возьмем первую из формул (11) (§ 10)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

и определим отсюда косинус входящего в нее угла A:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}. \tag{a}$$

Далее, возьмем тождество $1=1$ и вычтем из него почленно предыдущее равенство:

$$1-\cos A=\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

или

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}.$$

При этом в числителе дроби в правой части мы сделали замену на основании известной формулы гониометрии:

$$\cos b\cos c+\sin b\sin c=\cos(b-c).$$

Получившуюся в числителе той же дроби разность косинусов заменим произведением, также на основании известной формулы тригонометрии, т. е. напишем:

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c},$$

откуда

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c}}. \qquad \text{(I)}$$

Теперь сложим почленно тождество $1=1$ и равенство (а):

$$1+\cos A=\frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

или

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c}.$$

При этом мы числитель предыдущей дроби (в правой части) сначала переписали так:

$$\cos a-(\cos b\cos c-\sin b\sin c),$$

а потом выражение в скобках заменили косинусом суммы двух углов b и c, основываясь на известной формуле гониометрии.

Заменяя, аналогично предыдущему, разность косинусов в числителе произведением, получим:

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c},$$

откуда

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}}. \qquad \text{(II)}$$

Выражения для $\sin\frac{A}{2}$ и $\cos\frac{A}{2}$ можно еще несколько упростить, если ввести обозначение

$$a+b+c=2p,$$

где p — полупериметр рассматриваемого сферического треугольника. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{2}(a+b+c)=p.$$

Далее, отнимая от обеих частей этого равенства по стороне c, можем записать:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)-c=p-c$$

или

$$\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c.$$

Аналогично найдем

$$\frac{1}{2}(a-b+c)=p-b$$

и

$$\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a.$$

Вносся полученные выражения в формулы (I) и (II), окончательно получим:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.$$

Таким образом, синус половины угла сферического треугольника равняется корню квадратному из дроби, в числителе которой стоит произведение синусов разностей полупериметра и прилежащих к углу сторон, а в знаменателе — произведение синусов этих сторон.

Косинус половины угла сферического треугольника равняется корню квадратному из дроби, в числителе которой стоит произведение синуса полупериметра на синус разности полупериметра и противолежащей углу стороны, а в знаменателе — произведение синусов прилежащих сторон.

Так как угол сферического треугольника всегда меньше 180°, а половина его всегда меньше 90°, то перед квадратным корнем в обоих случаях подразумевается знак плюс.

Применяя выведенные формулы к каждому из углов треугольника, получим:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\};\tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\}.\tag{25}$$

Это и есть формулы полупериметра для синусов и косинусов половинных углов треугольника.

Чтобы получить формулы полупериметра для тангенса, достаточно разделить выражение для синуса половинного угла на выражение для косинуса половины того же угла.

Производя это действие последовательно для каждого из углов сферического треугольника на основании формул (24) и (25), после соответствующих сокращений будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin p\sin(p-b)}}\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}\end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Эти формулы можно представить в еще более простом виде путем следующих несложных преобразований.

Умножим числителя и знаменателя подкоренных дробей на синус разности, стоящий в знаменателе, т. е. соответственно на $\sin(p-a)$, $\sin(p-b)$ и $\sin(p-c)$, и, вынеся из-под корня получившийся в знаменателе квадратический множитель, получим:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\frac{1}{\sin(p-a)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\frac{1}{\sin(p-b)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\frac{1}{\sin(p-c)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}\end{aligned}\right\}.$$

Введя обозначение

$$M=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}, \tag{27}$$

окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{A}{2}&=\frac{M}{\sin(p-a)}\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}&=\frac{M}{\sin(p-b)}\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}&=\frac{M}{\sin(p-c)}\end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Формулы (28) и являются формулами полупериметра для тангенсов половинных углов сферического треугольника в наиболее удобном для практического применения виде.

Итак, тангенс половины угла сферического треугольника равняется вспомогательной величине M, деленной на синус разности полупериметра и противолежащей углу стороны. Вспомогательная величина M равняется корню квадратному из дроби, числитель которой — произведение синусов разностей полупериметра и каждой из сторон треугольника, а знаменатель — синус полупериметра.

§ 24. Формулы синуса и косинуса полусуммы и полуразности углов сферического треугольника

Эти формулы дают выражение для синуса и косинуса полусуммы и полуразности двух каких-либо углов сферического треугольника в функции противолежащих им сторон и третьего угла.

Выведем сначала формулы для синуса полусуммы и полуразности. Для этого возьмем $\sin\frac{A\pm B}{2}$ и подвергнем его ряду преобразований: во-первых,

$$\sin\frac{A\pm B}{2}=\sin\left(\frac{A}{2}\pm\frac{B}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\pm\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Затем подставим сюда, вместо синусов и косинусов половинных углов, их выражения из формул (24) и (25):

$$\sin\frac{A\pm B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}}\pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}};$$

далее, перемножая и вынося из-под знака корня квадратические множители,

$$\sin\frac{A\pm B}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\pm$$
$$\pm\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}},$$

или, вынося общие множители за скобки,

$$\sin\frac{A\pm B}{2}=\frac{\sin(p-b)\pm\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}.$$

Корень в правой части на основании последней из формул (25) есть не что иное, как $\cos\frac{C}{2}$, так что предыдущее выражение можно переписать так:

$$\sin\frac{A\pm B}{2}=\frac{\sin(p-b)\pm\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{C}{2}.$$

Дальнейшие преобразования поведем раздельно для синуса полусуммы и для синуса полуразности. Для синуса полусуммы будем, следовательно, иметь:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c}\cdot\cos\frac{C}{2},$$

или, заменяя сумму синусов в числителе произведением и рассматривая $\sin c$ в знаменателе как синус двойного угла, легко получим:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(2p-a-b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{C}{2}.$$

Но

$$2p-a-b=a+b+c-a-b=c;$$

следовательно,

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cdot\cos\frac{C}{2},$$

или, наконец,

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cdot\cos\frac{1}{2}C. \tag{29}$$

Для синуса полуразности можем подобным же образом записать:

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin(p-b)-\sin(p-a)}{\sin c}\cdot\cos\frac{1}{2}C,$$

и далее, после аналогичных преобразований,

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(2p-a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cdot\cos\frac{1}{2}C,$$

или

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C,$$

или, наконец,

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C. \tag{30}$$

Теперь перейдем к выводу формул для косинуса полусуммы и полуразности углов.

Прежде всего имеем:

$$\cos\frac{A\pm B}{2}=\cos\left(\frac{A}{2}\pm\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\mp\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

Затем, на основании (24) и (25),

$$\cos\frac{A\pm B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}}\mp$$
$$\mp\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin(p-a)}{\sin c\sin a}},$$

или

$$\cos\frac{A\pm B}{2}=\frac{\sin p}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}\mp$$
$$\mp\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}},$$

или

$$\cos\frac{A\pm B}{2}=\frac{\sin p\mp\sin(p-c)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Так как корень в правой части, на основании последней из формул (24), равен $\sin\frac{C}{2}$, то

$$\cos\frac{A\pm B}{2}=\frac{\sin p\mp\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{C}{2}.$$

Продолжая далее преобразования раздельно, запишем:

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\sin p-\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{C}{2}$$

или, заменяя разность синусов произведением,

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(2p-c)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{C}{2}.$$

Но так как

$$2p-c=a+b+c-c=a+b,$$

то

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C. \tag{31}$$

Точно так же, для косинуса полуразности:

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin p+\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{C}{2},$$

или

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(2p-c)\cos\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{C}{2},$$

или, наконец,

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C. \qquad (32)$$

Формулы (29) — (32) часто называют формулами Делямбра-Гаусса. Для наглядности сопоставим их вместе:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{A+B}{2}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C\\
\sin\frac{A-B}{2}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}C\\
\cos\frac{A+B}{2}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C\\
\cos\frac{A-B}{2}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{1}{2}C
\end{aligned}\right\}. \qquad (33)$$

Теперь нетрудно подметить мнемонический закон составления этих формул. Если в левой части с и н у с, то в правой должен быть обязательно м и н у с, т. е. полуразность сторон; если же в левой части к о с и н у с, то в правой будет п л ю с, т. е. полусумма сторон. И наоборот, если в левой части п л ю с, т. е. полусумма углов, то в правой будет к о с и н у с, а если в левой части будет м и н у с, т. е. полуразность углов, то в правой будет стоять с и н у с. Кроме того, функция, под которой стоит в правой части половина третьего угла, не совпадает с той функцией, которая берется для полусуммы или полуразности углов в левой части.

§ 25. Аналогии Непера. Теорема тангенсов

Формулы, известные под названием аналогий Непера, дают выражения для тангенсов полусуммы и полуразности углов сферического треугольника через синусы и косинусы полусумм и полуразностей противолежащих им сторон, и наоборот, тангенсы полусуммы и полуразности сторон они выражают через синусы и косинусы полусумм и полуразностей противолежащих им углов.

Для получения первых двух аналогий Непера*) воспользуемся выведенными нами в предыдущем параграфе формулами Делямбра-Гаусса, а именно, разделим почленно формулу (29) на (31) и формулу (30) на (32); тогда, по

---

*) Непер (Neper, 1550 — 1617 гг.) выводил свои формулы непосредственно из теоремы синусов и формулы 5 элементов. Формулы Делямбра-Гаусса были опубликованы Делямбром (Delambre) в 1808 г. и Гауссом (Gauss) в 1809 г.

сокращении на $\cos\frac{1}{2}c$ и на $\sin\frac{1}{2}c$ соответственно, получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C \\ \text{и} \\ \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C \end{aligned}\right\}. \qquad (34)$$

Для вывода двух других аналогий сначала из формулы (32) определим $\sin\frac{1}{2}(a+b)$, из формулы (31) $\cos\frac{1}{2}(a+b)$, из формулы (30) $\sin\frac{1}{2}(a-b)$ и из формулы (29) $\cos\frac{1}{2}(a-b)$, т. е. перепишем эти формулы в следующем виде:

$$\sin\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}\sin\frac{1}{2}c, \qquad (32')$$

$$\cos\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C}\cos\frac{1}{2}c, \qquad (31')$$

$$\sin\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}\sin\frac{1}{2}c, \qquad (30')$$

$$\cos\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}\cos\frac{1}{2}c. \qquad (29')$$

Разделив затем (32′) на (31′), а (30′) на (29′), получим третью и четвертую аналогии Непера:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c \\ \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c \end{aligned}\right\}. \qquad (35)$$

Мнемоническое правило „плюс — косинус, синус — минус“, приведенное в конце предыдущего параграфа, помогает также и при запоминании формул (34) и (35). Функция, под знаком которой стоит в формулах (34) половина третьего угла, не совпадает с функцией в левой части, а для третьей стороны, т. е. в формулах (35), соответственно совпадает.

Термин „аналогия“ в прежнее время был равнозначен слову „пропорция“ (ἀναλογία по-гречески — пропорциональность).

Формулы (34) и (35) получили это название потому, что они писались в виде равенства двух отношений. Например, для первой аналогии можно написать:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}:\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \cos\frac{a-b}{2}:\cos\frac{a+b}{2}.$$

Словами это можно выразить так: тангенс полусуммы двух углов сферического треугольника так относится к котангенсу половины третьего угла, как косинус полуразности противолежащих им сторон относится к косинусу полусуммы тех же сторон. Подобные формулировки могут быть даны и для остальных трех аналогий.

Из аналогий Непера легко выводится так называемая теорема тангенсов для сферического треугольника. В самом деле, разделив четвертую аналогию на третью (или вторую на первую), непосредственно получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)},$$

или словами: тангенс полуразности сторон сферического треугольника относится к тангенсу их полусуммы, как тангенс полуразности противолежащих им углов этого треугольника к тангенсу их полусуммы.

§ 26. Формулы синуса половины сферического избытка

Иногда бывает необходимо вычислить сферический избыток треугольника, не зная всех трех его углов. Для этого можно воспользоваться так называемыми формулами Каньоли (Cagnoli), которые дают выражение для синуса половины сферического избытка треугольника в функции его сторон и одного из углов или в функции полупериметра. Эти формулы применяются также и в том случае, если углы известны недостаточно точно для непосредственного вычисления избытка по формуле

$$\varepsilon=(A+B+C)-180^\circ.$$

Для вывода первой из формул прежде всего найдем выражение для $\sin p$, для чего выпишем первые две из формул полупериметра для косинуса половинного угла [формулы (25) § 23], т. е.

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin c\sin a}}.$$

Перемножая эти выражения почленно и вынося из-под знака корня в правой части квадратичные множители, получим:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin p}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}.$$

На основании третьей из формул (24) корень в правой части можно заменить через $\sin\frac{C}{2}$; таким образом, наша формула перепишется:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin p}{\sin c}\sin\frac{C}{2},$$

откуда находим:

$$\sin p=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\sin c.$$

Применим полученную формулу к треугольнику, полярному с данным, т. е. напишем:

$$\sin p'=\frac{\cos\frac{A'}{2}\cos\frac{B'}{2}}{\sin\frac{C'}{2}}\sin c'.$$

По свойству взаимно полярных треугольников:

$$a' = 180^\circ - A;$$
$$b' = 180^\circ - B;$$
$$c' = 180^\circ - C.$$

Следовательно,

$$2p' = 540^\circ - (A + B + C),$$

или

$$2p' = 540^\circ - (180^\circ + \varepsilon),$$

т. е.

$$2p' = 360^\circ - \varepsilon;$$

отсюда:

$$p' = 180^\circ - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, так как

$$A' = 180^\circ - a,$$
$$B' = 180^\circ - b,$$
$$C' = 180^\circ - c,$$

то

$$\frac{A'}{2} = 90^\circ - \frac{a}{2};$$
$$\frac{B'}{2} = 90^\circ - \frac{b}{2};$$
$$\frac{C'}{2} = 90^\circ - \frac{c}{2}.$$

Учитывая все эти соотношения, формулу для $\sin p'$ перепишем так:

$$\sin\left(180^\circ - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\cos\left(90^\circ - \frac{a}{2}\right)\cos\left(90^\circ - \frac{b}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{c}{2}\right)} \sin(180^\circ - C),$$

или

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \sin C. \tag{36}$$

Это и есть первая формула для синуса половины сферического избытка.

Итак, синус половины сферического избытка треугольника равняется произведению синусов половин двух сторон сферического треугольника на синус угла между ними, деленному на косинус половины третьей стороны.

Пользуясь этой словесной формулировкой или просто выполняя круговую перестановку сторон и углов, можно получить для $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ еще два выражения, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} \sin A; \\ \sin\frac{\varepsilon}{2} &= \frac{\sin\frac{c}{2}\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}} \sin B. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Вторую формулу можно получить из формулы (36), только что выведенной нами, с помощью следующих простых преобразований. Заменим $\sin C$ по формуле двойного угла произведением:

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} ;$$

синус и косинус половины угла C выразим по формулам полупериметра (24) и (25), полученные радикалы перемножим; вынесем квадратические множители из-под знака корня; заменим получившиеся в знаменателе $\sin a$ и $\sin b$ соответствующими произведениями, подобно предыдущему, и сделаем возможные сокращения.

Это запишется так:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin C,$$

или

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2},$$

или

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}} \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-c)}{\sin a \sin b}},$$

или

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2} \sin a \sin b} \sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)},$$

или

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} \sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)},$$

и, наконец, по сокращении,

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin (p-a) \sin (p-b) \sin (p-c)}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}. \qquad (38)$$

Это и есть вторая искомая формула. Таким образом, синус половины сферического избытка треугольника равняется корню квадратному из произведения синуса полупериметра на синусы разностей полупериметра и каждой из его сторон, деленному на удвоенное произведение косинусов половин всех трех сторон треугольника.

Круговая перестановка никаких результатов не дает, так как формула симметрична относительно всех трех сторон треугольника.

§ 27. Решение косоугольных треугольников

Для решения косоугольного сферического треугольника необходимо знать три какие-либо его элемента. При этом можно применять три различных приема решения.

1. Треугольник можно решать по соответствующим основным формулам. Это часто бывает удобно, если отыскивается какой-нибудь один элемент треугольника, а не все три, и в особенности тогда, когда вычисления выполняются на арифмометре. При вычислении по таблицам логарифмов приходится

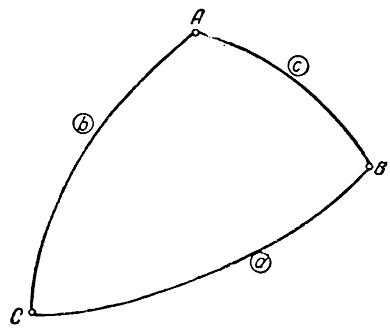
большую часть основных формул сначала тем или иным путем приводить к виду, удобному для логарифмирования.

2. Часто косоугольный треугольник предварительно разбивают на два прямоугольных, опуская сферический перпендикуляр из какой-либо вершины треугольника на противоположную ей сторону. Затем последовательно решают получившиеся таким образом прямоугольные сферические треугольники.

3. Применяют формулы, специально выведенные для косоугольных треугольников, как, например, формулы полупериметра, аналогии Непера и другие, подобные им.

Решение треугольника всегда стараются проконтролировать, для чего либо выводят специальные контрольные формулы, либо выполняют решение того же треугольника по иным формулам, либо еще каким-нибудь другим путем.

В подробных курсах сферической тригонометрии разбираются следующие шесть случаев решения косоугольных сферических треугольников: 1) по трем сторонам — a, b и c (см. черт. 42); 2) по двум сторонам и углу между ними, например, a, b и C; 3) по двум углам и стороне между ними, например, A, B и c; 4) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, например a, b и A; 5) по двум углам и стороне, противолежащей одному из них, например, A, B и a; 6) по трем углам — A, B и C.



Черт. 42

Из этих случаев 4-й и 5-й дают, вообще говоря, по два решения, так как здесь угол, противолежащий второй данной стороне, или, соответственно, сторона, противолежащая второму из данных углов, всегда определяется по синусу. В некоторых из остальных случаев также приходится тот или иной элемент определять по синусу, но тут двойственности не получается, так как, руководствуясь тем, что против бóльшего угла лежит бóльшая сторона и, наоборот, против бóльшей стороны — бóльший угол (см. § 8, свойства 7 и 8), всегда бывает возможно решить, какое из двух значений искомого элемента следует взять для данного конкретного треугольника.

При решении косоугольных сферических треугольников так же, как и прямоугольных, часто предпочитают, для бóльшей точности, находить стороны или углы по их тангенсам (или котангенсам); если оказывается возможным, подбирают для этого соответствующие формулы, если нет, преобразуют в этом смысле выбранные основные формулы. Иногда с этой же целью переходят к функциям половинных углов или сторон, а также из двух возможных функций, синуса или косинуса, выбирают ту, по которой искомый элемент может быть найден более точно. Как известно, малые углы находятся точнее по синусу, а углы, близкие к 90°, — по косинусу.

Для примера рассмотрим первые три случая:

I случай. Даны три стороны сферического треугольника a, b и c; найти его углы (см. черт. 42, где данные элементы отмечены кружками).

1. Решение по основным формулам

Решение по основным формулам целесообразно проводить, если предполагается численно выполнять его на арифмометре, в особенности, если необходимо вычислить один или два угла, например, A и B.

Допустим, имеем последний случай. Применим формулы косинусов сторон к сторонам a и b [см. § 10, форм. (11)]:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B.$$

Отсюда определим косинусы искомых углов A и B:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$

что иначе можно переписать так:

$$\cos A = \cos a \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c - \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c, \tag{I}$$

$$\cos B = \cos b \operatorname{cosec} c \operatorname{cosec} a - \operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} a. \tag{II}$$

Обе эти формулы удобны для вычисления на арифмометре.

В качестве контрольной формулы применяется соотношение между синусами найденных углов и противолежащих им сторон, получаемое на основании теоремы синусов [см. § 12, форм. (14)]:

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A. \tag{III}$$

Пример. Стороны сферического треугольника равны:

$$a = 43^\circ\ 4'\ 30'',$$
$$b = 68\ \ 17\ \ 20,$$
$$c = 75\ \ 48\ \ 10.$$

Найти его углы A и B.

Решение

Вычисление угла A

$\cos a$	0,73 0460
$\operatorname{cosec} b$	1,07 6356
$\operatorname{cosec} c$	1,03 1505
$\cos a \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c$	0,81 1006
— $\operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$	0,10 0733
$\cos A$	1,71 0273
A	44°44′34″,4

Вспомогательная схема

$\operatorname{ctg} a$	1,06 9558
$\operatorname{ctg} b$	0,39 8173
$\operatorname{ctg} c$	0,25 2987

Вычисление угла B

$\cos b$	0,36 9927
$\operatorname{cosec} c$	1,03 1505
$\operatorname{cosec} a$	1,46 4225
$\cos b \operatorname{cosec} c \operatorname{cosec} a$	0,55 8721
— $\operatorname{ctg} c \operatorname{ctg} a$	0,27 0584
$\cos B$	0,28 8137
B	73°15′12″,8

Контроль

$\sin a$	0,68 2955
$\sin B$	0,95 7589
$\sin a \sin B$	0,65 6990
$\sin b$	0,92 9061
$\sin A$	0,70 3927
$\sin b \sin A$	0,65 6992

Решение выполнено на арифмометре по „Шестизначным таблицам тригонометрических функций“ Петерса (Москва — Ленинград, 1932). Контроль сошелся удовлетворительно. Расхождение на две единицы шестого знака допустимо и объясняется накоплением ошибок округлений.

2) Решение по формулам полупериметра

По формулам полупериметра (28) для тангенсов половинных углов сферического треугольника (см. § 23) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \frac{M}{\sin(p-a)} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \frac{M}{\sin(p-b)} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \frac{M}{\sin(p-c)} \end{aligned}\right\}, \tag{I}$$

где, на основании формулы (27),

$$M=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}, \tag{II}$$

и, как известно,

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c). \tag{III}$$

Выведем контрольную формулу. Для этого перемножим почленно все три равенства (I):

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{M^3}{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}.$$

Но, очевидно,

$$M^3=M\cdot M^2=\frac{M\cdot\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}.$$

Внося это выражение, вместо M^3, в числитель дроби в правой части полученного равенства, после сокращения получим контрольную формулу:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{M}{\sin p}. \tag{IV}$$

Пример. Решить сферический треугольник, стороны которого равны:

$$a=43^\circ 4'30'',$$
$$b=68\ 17\ 20\ ,$$
$$c=75\ 48\ 10$$

(тот же треугольник, что и в предыдущем примере).

Решение

Схема вычислений		Примечания
a	43° 4′30″	
b	68 17 20	
c	75 48 10	
$2p$	187 10 0	
p	93 35 0	p выписывается на полоску бумаги
$p-a$	50 30 30	Сумма этих трех строк равняется p, что служит контролем
$p-b$	25 17 40	
$p-c$	17 46 50	
$\lg\sin(p-a)$	9.88 746	
$\lg\sin(p-b)$	9.63 070	
$\lg\sin(p-c)$	9.48 483	
доп. $\lg\sin p$	0.00 085	
$\lg M$	9.50 192	$\lg M$ выписывается на полоску бумаги
$\lg M^2$	9.00 384	
$\lg\frac{M}{p}$	9.50 277	1-я контрольная строка
$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}$	9.61 446	
$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2}$	9.87 122	
$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}$	0.01 709	
Сумма	9.50 277	2-я контрольная строка
$\frac{A}{2}$	22°22′17″	
$\frac{B}{2}$	36 37 37	
$\frac{C}{2}$	46 7 37	
A	44°44′34″	
B	73 15 14	
C	92 15 14	

Вычисления выполнены как здесь, так и в дальнейших примерах, по „Пятизначным полным логарифмическим и тригонометрическим таблицам“ Ф. Г. Гаусса.

Контроль сошелся полностью (сравни 1-ю и 2-ю контрольные строки). Результаты вычислений совпадают с полученными в прошлом примере в пределах точности вычислений.

Когда требуется вычислить только один угол, например угол A, то часто предпочитают воспользоваться одной из формул (24), в нашем примере первой из них (см. § 23), которую обычно пишут тогда в виде:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}, \tag{V}$$

а иногда даже в виде:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b\sin c}, \tag{VI}$$

т. е. отыскивают половину угла A по его синусу, а не по тангенсу. Формула (V) удобнее для вычисления, т. к. для получения углов, стоящих под знаками синусов в числителе, необходимо сделать только 4 действия (1 сложение, 1 деление и 2 вычитания), тогда как в формуле (VI) для этой же цели требуется 6 действий (2 сложения, 2 вычитания и 2 деления). Заметим, что при вычислении одного только угла не представляется возможным проконтролировать полученный результат с таким удобством и уверенностью, как в предыдущих случаях. Удобство вычислений по формулам (V) или (VI) еще усугубляется, если пользоваться при этом такими сборниками таблиц, как, например: „Мореходные таблицы“ изд. 1905 г. (шестизначные), А. В. Граур, „Таблицы для вычисления азимута“ (Москва, 1939 г.), „Таблицы для астрономических вычислений“ (Труды ЦНИИГАиК, вып. 30, Москва, 1939 г.) и др. Дело в том, что в этих сборниках помещаются специальные таблицы, дающие $\lg\sin^2\frac{1}{2}$ угла по аргументу „угол“, так что, войдя в них обратным входом, можно по $\lg\sin^2\frac{A}{2}$ найти сразу угол A. Для предыдущего примера все вычисление по формуле (V) представится нижеследующей схемой:

a	43° 4′ 30″
b	68 17 20
c	75 48 10
$2p$	187 10 0
p	93 35 0
$p-b$	25 17 40
$p-c$	17 46 50
$\lg\sin(p-b)$	9.63 070
$\lg\sin(p-c)$	9.48 483
доп. $\lg\sin b$	0.03 195
доп. $\lg\sin c$	0.01 347
$\lg\sin^2\frac{A}{2}$	9.16 095
$\lg\sin\frac{A}{2}$	9.58 048
$\frac{A}{2}$	22°22′17″
A	44°44′34″

Как видим, результат получился такой же, как и по тангенсу. Если мы непосредственно по $\lg\sin^2\frac{A}{2}$ по указанным выше таблицам найдем угол, то будем иметь $A=44°44'33''$.

II случай. Даны две стороны сферического треугольника a и b и угол между ними C.

Найти сторону c и углы A и B (см. черт. 43).

1) Решение по основным формулам

а) Для вычисления на арифмометре

Для стороны c по формулам (11) имеем:

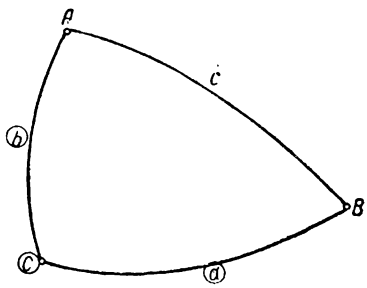
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \qquad \text{(I)}$$

Для углов A и B по формулам котангенса (17) можем написать:

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A$$

и

$$\operatorname{ctg} b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \operatorname{ctg} B.$$



Черт. 43

Отсюда определим $\operatorname{ctg} A$ и $\operatorname{ctg} B$:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{ctg} a \sin b}{\sin C} - \cos b \operatorname{ctg} C \qquad \text{(II')}$$

и

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\operatorname{ctg} b \sin a}{\sin C} - \cos a \operatorname{ctg} C \qquad \text{(III')}$$

или же

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} a \sin b \operatorname{cosec} C - \cos b \operatorname{ctg} C \qquad \text{(II)}$$

и

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \sin a \operatorname{cosec} C - \cos a \operatorname{ctg} C. \qquad \text{(III)}$$

Формулы (I) — (III) удобны для вычисления на арифмометре.

Для контроля можно применить формулу (13):

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}, \qquad \text{(IV)}$$

которую можно переписать также в виде трех следующих равенств:

$$\left.\begin{aligned} \sin a \sin B &= \sin A \sin b; \\ \sin a \sin C &= \sin A \sin c; \\ \sin b \sin C &= \sin B \sin c. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV')}$$

Пример. Решить сферический треугольник, у которого даны две стороны:

$$a = 120°31'20''$$
$$b = \ \ 76\ 43\ 43$$

и угол между ними:

$$C = 108°12'27''.$$

Решение

Вычисление стороны c

$\cos a$	$-0{,}50\ 787$
$\cos b$	$+0{,}22\ 955$
$\cos a \cos b$	$-0{,}11\ 658$
$+\ \sin a \sin b \cos C$	$-0{,}26\ 197$
$\cos c$	$-0{,}37\ 855$
c	$112°14'38''$

$\sin a$	$+0{,}86\ 143$
$\sin b$	$+0{,}97\ 329$
$\cos C$	$-0{,}31\ 246$

Вычисление угла A

$\operatorname{ctg} a$	$-0,58\ 957$
$\sin b$	$+0,97\ 329$
$\sin C$	$+0,94\ 993$
$\dfrac{\operatorname{ctg} a \sin b}{\sin C}$	$-0,60\ 407$
$-\cos b \operatorname{ctg} C$	$-0,07\ 550$
$\operatorname{ctg} A$	$-0,52\ 857$
A	$117°51'34''$

$\cos a$	$-0,50\ 787$
$\operatorname{ctg} C$	$-0,32\ 891$
$\cos b$	$+0,22\ 955$

Вычисление угла B

$\operatorname{ctg} b$	$+0,23\ 586$
$\sin a$	$+0,86\ 143$
$\sin C$	$+0,94\ 993$
$\dfrac{\operatorname{ctg} b \sin a}{\sin C}$	$+0,21\ 389$
$-\cos a \operatorname{ctg} C$	$+0,16\ 704$
$\operatorname{ctg} B$	$+0,04\ 685$
B	$87°19'4''$

Контроль

$\sin a$	0,86 143
$\sin b$	0,97 329
$\sin c$	0,92 558
$\sin A$	0,88 410
$\sin B$	0,99 890
$\sin C$	0,94 993
$\sin a \sin B$	$0,86\ 048_2$
$\sin A \sin b$	$0,86\ 048_6$
$\sin a \sin C$	$0,81\ 829_8$
$\sin A \sin c$	$0,81\ 830_5$
$\sin b \sin C$	$0,92\ 455_7$
$\sin B \sin c$	$0,92\ 456_2$

Решение выполнено по формулам (I), (II′), (III′) на арифмометре и по „Пятизначным полным тригонометрическим и полигонометрическим таблицам для вычислений на арифмометре“ Ф. Г. Гаусса. Контроль выполнен по формулам (IV′). Контроль сошелся хорошо; сохраненный нами при этом шестой десятичный знак имеет условное значение и обнаруживает, как округление влияет на степень сходимости контроля. Формулы (II′) и (III′) выбраны для вычислений потому, что в таблицы Гаусса не включены натуральные значения секансов и косекансов — там помещены только синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

б) Для вычисления по таблицам логарифмов

Если требуется вычислить сторону c и только один из углов, например, угол A, и притом вычисление предполагается выполнить с помощью логарифмов, то оно выполняется следующим порядком. Выпишем для искомой стороны c и искомого угла A три из основных формул, а именно „косинус стороны“, т. е. форм. (11), „синус стороны на синус прилежащего угла“, т. е. форм. (14), и „синус стороны на косинус прилежащего угла“, т. е. форм. (15). Таким образом будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \\ \sin c \sin A &= \sin C \sin a, \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Мы получили так называемую „астрономическую систему формул“, которая очень часто применяется при решении различных задач сферической и практической астрономии. Формулы (A) решают задачу. В самом деле, по первой из формул (A) можно вычислить сторону c, а затем, считая ее известной, по одной из остальных формул — угол A; тогда третья формула может быть использована для контроля. Однако, при этом возникают два затруднения. Во-первых, искомые элементы отыскиваются здесь по их синусам или косинусам, а не по тангенсам или котангенсам, а во-вторых, первая и третья из формул (A) неудобны для логарифмического вычисления. Поэтому формулы (A) подвергаются ряду следующих преобразований.

Разделим вторую из этих формул на третью:

$$\frac{\sin c \sin A}{\sin c \cos A}=\frac{\sin C \sin a}{\cos a \sin b-\sin a \cos b \cos C}.$$

Упрощая левую часть и деля числитель и знаменатель правой на $\sin a \cos C$, перепишем:

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{tg} C}{\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C}\cdot \sin b-\cos b}$$

Введём вспомогательный угол M по уравнению:

$$\operatorname{ctg} M=\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C}. \qquad (I)$$

Подставляя в предыдущую формулу, получим:

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{tg} C}{\sin b \operatorname{ctg} M-\cos b},$$

или, умножая числитель и знаменатель дроби в правой части на $\sin M$,

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{tg} C \sin M}{\sin b \cos M-\cos b \sin M},$$

или, наконец,

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{tg} C \sin M}{\sin (b-M)}. \qquad (II)$$

Разделим теперь третью из формул (A) на первую:

$$\frac{\sin c \cos A}{\cos c}=\frac{\cos a \sin b-\sin a \cos b \cos C}{\cos a \cos b+\sin a \sin b \cos C}.$$

Упростим левую часть и разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой, на то же выражение, как и в первом случае, т. е. на $\sin a \cos C$:

$$\operatorname{tg} c \cos A=\frac{\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C}\cdot \sin b-\cos b}{\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos C}\cdot \cos b+\sin b}.$$

Как видим, и здесь можно использовать тот же самый вспомогательный угол M, определяемый уравнением (I). Выполняя подстановку, получим:

$$\operatorname{tg} c \cos A=\frac{\sin b \operatorname{ctg} M-\cos b}{\cos b \operatorname{ctg} M+\sin b},$$

или, умножая числитель и знаменатель дроби в правой части на $\sin M$,

$$\operatorname{tg} c \cos A=\frac{\sin b \cos M-\cos b \sin M}{\cos b \cos M+\sin b \sin M},$$

или

$$\operatorname{tg} c \cos A=\frac{\sin (b-M)}{\cos (b-M)},$$

или, наконец,

$$\operatorname{tg} c \cos A=\operatorname{tg}(b-M),$$

откуда

$$\operatorname{tg} c=\frac{\operatorname{tg}(b-M)}{\cos A}. \qquad (III)$$

Формулы (I), (II) и (III) решают задачу, устраняя в то же время указанные выше затруднения. По данным a и c по формуле (I) вычисляем вспомогательный угол M. Так как он в уравнении (I) стоит под знаком котангенса, то всегда может быть найден угол, удовлетворяющий этому уравнению; по этой же причине он всегда найдется с достаточной точностью. Так как это угол вспомогательный, то мы сами имеем право поставить добавочные условия для определения четверти окружности, в которой его следует взять. По практическим соображениям оказывается наиболее удобным брать угол M в пределах

$$-90^\circ \leqslant M \leqslant 90^\circ,$$

в зависимости от знака его котангенса.

Когда угол M вычислен, по формуле (II) находят угол A, а затем, считая этот угол уже известным, и сторону c, по формуле (III). Все три формулы удобны для логарифмического вычисления; искомые величины находятся по их тангенсам. Для контроля можно воспользоваться „теоремой синусов“:

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}. \qquad \text{(IV)}$$

Пример. В сферическом треугольнике даны две стороны a и b:

$$a = 120^\circ\, 31'\, 20'',$$
$$b = 76\ \ 43\ \ 43$$

и угол C, заключенный между ними

$$C = 108^\circ\, 12'\, 27''.$$

Найти угол A и сторону c (тот же треугольник, что и в предыдущем примере)

Решение

Схема вычислений

$\lg \operatorname{ctg} a$	9.77 054n
$\lg \cos C$	9.49 479n
$\lg \operatorname{ctg} M$	0.27 575
M	27°55′20″
b	76 43 43
$b - M$	48 48 23
$\lg \operatorname{tg} C$	0·48 290n
$\lg \sin M$	9.67 050
доп. $\lg \sin (b - M)$	0.12 350
$\lg \operatorname{tg} A$	0·27 690n
A	117°51′34″
$\lg \operatorname{tg} (b - M)$	0.05 788
$\lg \cos A$	9.66 960n
$\lg \operatorname{tg} c$	0.38 828n
c	112°14′40″

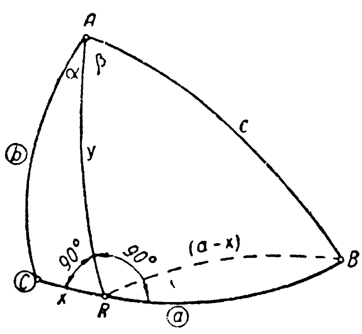
Контроль

$\lg \sin c$	9.96 642
$\lg \sin C$	9.97 769
$\lg \dfrac{\sin c}{\sin C}$	9.98 873
$\lg \sin a$	9.93 522
$\lg \sin A$	9.94 650
$\lg \dfrac{\sin a}{\sin A}$	9.98 872

Контроль сошелся хорошо.

2) Решение с помощью разбивки на два прямоугольных треугольника

Опустим сферический перпендикуляр AR из вершины A на противоположную сторону BC (черт. 44). Получим два прямоугольных сферических треугольника ARC и ARB. Обозначим длину сферического перпендикуляра AR буквой y, длину отрезка стороны a от вершины угла C до основания перпендикуляра R — буквой x, а два угла, на которые перпендикуляр AR делит угол A, — α и β соответственно.



Черт. 44

Таким образом:

$$x = CR;\ y = AR;\ \alpha = \angle CAR;\ \beta = \angle RAB.$$

Тогда из прямоугольного сферического треугольника ARC, в котором известна гипотенуза b и косвенный угол C, находим по правилу Непера-Модюи:

$$\cos C = \operatorname{ctg} b \operatorname{tg} x,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} b \cos C. \tag{I}$$

Далее

$$\sin y = \sin b \sin C. \tag{II}$$

Затем

$$\cos b = \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} \alpha,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos b \operatorname{tg} C. \tag{III}$$

Теперь переходим к треугольнику ARB. В нем нам теперь известны катеты AR и RB, так как, на основании чертежа,

$$AR = y,$$
$$RB = a - x,$$

а x и y нами уже определены.

Решая этот треугольник по правилу Непера-Модюи, получаем:

$$\cos c = \cos y \cos (a - x). \tag{IV}$$

Далее,

$$\sin (a - x) = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} y,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} y \sin (a - x), \tag{V}$$

а также

$$\sin y = \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} (a - x),$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} (a - x) \sin y. \tag{VI}$$

Зная теперь на основании (III) и (VI) углы α и β, легко найдем и угол A, так как на основании черт. 44:

$$A = \alpha + \beta. \tag{VII}$$

Формулы (I) — (VII) и решают задачу.

В качестве контрольной может быть использована та же формула, что и при решении по основным формулам, т. е.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \tag{VIII}$$

Пример. Решить сферический треугольник по двум сторонам и углу между ними по следующим данным:

$$a = 120^\circ 31' 20'',$$
$$b = \ \ 76\ \ 43\ \ 43,$$
$$C = 108\ \ 12\ \ 27$$

(тот же треугольник, что и в двух предшествующих примерах).

Решение

а) Вычисление x

$\lg \operatorname{tg} b$	0.62 734
$\lg \cos C$	9.49 479n
$\lg \operatorname{tg} x$	0.12 213n
x	— 52°57′7″

б) Вычисление y

$\lg \sin b$	9.98 824
$\lg \sin C$	9.97 769
$\lg \sin y$	9.96 593
y	67°36′0″

в) Вычисление угла α

$\lg\cos b$	9.36 090
$\lg\operatorname{tg} C$	0.48 290n
$\lg\operatorname{ctg}\alpha$	9.84 380n
α	$-55°5'18''$

г) Вычисление стороны c

a	120°31'20"
—	
x	— 52 57 7
$a-x$	173 28 27
$\lg\cos y$	9.58 107
$\lg\cos(a-x)$	9.99 717n
$\lg\cos c$	9.57 824n
c	112°15'0"

д) Вычисление угла B

$\lg\operatorname{ctg} y$	9.61 515
$\lg\sin(a-x)$	9.05 558
$\lg\operatorname{ctg} B$	8.67 073
B	87°19'3"

е) Вычисление угла β

$\lg\operatorname{ctg}(a-x)$	0.94 160n
$\lg\sin y$	9.96 593
$\lg\operatorname{ctg}\beta$	0.90 753n
β	172°56'48"

ж) Вычисление угла A

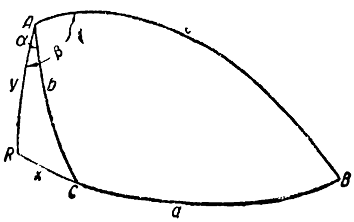
α	— 55°5' 18"
β	172 56 48
A	117 51 30

Контроль

$\lg\sin a$	9.93 522
$\lg\sin A$	9.94 650
$\lg\frac{\sin a}{\sin A}$	9.98 872
$\lg\sin b$	9.98 824
$\lg\sin B$	9.99 952
$\lg\frac{\sin b}{\sin B}$	9.98 872
$\lg\sin c$	9.96 640
$\lg\sin C$	9.97 769
$\lg\frac{\sin}{\sin C}$	9.98 871

Контроль сошелся хорошо.

При вычислении вспомогательных геометрических величин x и α $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ получились отрицательными. Это произошло потому, что угол C — тупой. Если мы составим чертеж применительно к размерам сторон и углов нашего треугольника (черт. 45), то увидим, что по той же самой причине отрезок дуги большого круга CR, т. е. x, и угол CAR, т. е. α, откладываются в противоположном направлении от точки C и от стороны AC соответственно, по сравнению с построениями черт. 44. Поэтому необходимо одно из двух: или составить специальные формулы для треугольника, изображенного на черт. 45, или воспользоваться формулами, выведенными выше, но приписать величинам x и α, в согласии со знаком их тангенса и котангенса соответственно, знак минус. Окончательные результаты в обоих случаях получатся совершенно одинаковые. Однако второй путь, по которому мы и следовали выше при решении примера, предпочтительнее.



Черт. 45

3) Решение по аналогиям Непера с вычислением третьей стороны по теореме синусов (см. черт. 43)

По формулам (34)

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C, \tag{I}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C \qquad \text{(II)}$$

можем найти полусумму и полуразность искомых углов; а так как

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\\ B&=\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\end{aligned}\right\}, \qquad \text{(III)}$$

то тем самым найдем углы A и B.

После этого сторона c может быть найдена по теореме синусов из соотношений:

$$\sin c=\frac{\sin a\sin C}{\sin A}, \qquad \text{(IV)}$$

$$\sin c=\frac{\sin b\sin C}{\sin B}. \qquad \text{(V)}$$

Тождественность результатов, найденных по формулам (IV) и (V), служит контролем решения.

Пример. Решить сферический треугольник, если дано

$$a=120°31'20'',$$
$$b=\ \ 76\ 43\ 43,$$
$$C=108\ 12\ 27$$

(тот же треугольник, что и в предыдущих примерах).

Решение

а) Вычисление углов A и B

a	120°31′20″
b	76 43 43
$a+b$	197 15 3
$\frac{1}{2}(a+b)$	98 37 31,5
$\frac{1}{2}(a-b)$	21 53 48,5
$\frac{1}{2}C$	54 6 13,5

$\lg\cos\frac{1}{2}(a-b)$	9.96 748
$\lg\sec\frac{1}{2}(a+b)$	0.82 398n
$\lg\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$	0.85 961
$\lg\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$	0.65 107n

$\lg\sin\frac{1}{2}(a-b)$	9.57 163
$\lg\operatorname{cosec}\frac{1}{2}(a+b)$	0.00 494
$\lg\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$	9.85 961
$\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$	9.43 618

$\frac{A+B}{2}$	102°35′19″,4
$\frac{A-B}{2}$	15 16 12, 5
A	117 51 32
B	87 19 7

б) Вычисление стороны c и контроль

c	112°14′48″
$\lg\sin c$	9.96 641
$\lg\sin a$	9.93 522
$\lg\operatorname{cosec} A$	0.05 350
$\lg\sin C$	9.97 769
$\lg\sin b$	9.98 824
$\lg\operatorname{cosec} B$	0.00 048
$\lg\sin c$	9.96 641
c	112°14′48″

Контроль сошелся полностью. Так как сторона c отыскивается по синусу, то необходимо установить, какое из двух возможных значений следует взять для данного конкретного треугольника. Так как против большего угла должна лежать бо́льшая сторона и так как у нас

$$A > C > B,$$

то должно быть

$$a > c > b,$$

т. е. сторона c должна быть взята во второй четверти.

Обращаем внимание также на то, что полуразность $\frac{1}{2}(a-b)$ вычислена по тождеству:

$$\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(a+b)-b.$$

Кроме того, вычисление обеих этих величин, полусуммы $\frac{1}{2}(a+b)$ и полуразности $\frac{1}{2}(a-b)$, может быть проконтролировано по тождествам:

$$\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)=a,$$

$$\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)=b.$$

4) Решение по аналогиям Непера с вычислением третьей стороны по формулам Делямбра-Гаусса

Для удобства вычисления сделаем в формулах (34) (см. § 25) некоторые небольшие преобразования. Прежде всего заменим $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}C$ отношением косинуса к синусу, т. е. перепишем эти формулы в таком виде:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Теперь введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
N&=\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b),\\
D&=\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a+b),\\
N'&=\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a-b),\\
D'&=\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a+b).
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(I)}$$

С обозначениями (I) первую и вторую аналогии Непера можно переписать короче так:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}&=\frac{N}{D},\\
\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}&=\frac{N'}{D'}.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(II)}$$

Далее воспользуемся формулами Делямбра-Гаусса (33) (см. § 24); каждую из них разрешим относительно $\cos\frac{1}{2}c$ или $\sin\frac{1}{2}c$ соответственно и получим, таким образом, следующие четыре формулы:

$$\cos\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\cos\frac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\sin\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\sin\frac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

Вводя в эти формулы обозначения (I), будем иметь окончательно:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}c&=\frac{N}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},\\ \cos\frac{1}{2}c&=\frac{D}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},\\ \sin\frac{1}{2}c&=\frac{N'}{\sin\frac{1}{2}(A-B)},\\ \sin\frac{1}{2}c&=\frac{D'}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(III)}$$

Формулы (I), (II) и (III) и являются рабочими формулами. Углы A и B по отдельности определяются так же, как и в предыдущем решении, т. е. по равенствам:

$$A=\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B),$$

$$B=\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B).$$

По формулам (III) $\cos\frac{1}{2}c$ и $\sin\frac{1}{2}c$ не вычисляют дважды, а проводят вычисления согласно так называемому правилу Лаланда (об этом правиле см. § 39), т. е. следующим образом.

Когда логарифмы величин N, D, N' и D' найдены, и по таблицам подыскиваются $\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$ и $\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)$, то из столбца, подписанного сверху tg или ctg, из которого только что выбирались эти логарифмы, непосредственно переходят в последний, крайний правый столбец, подписанный сверху cos, и выписывают оттуда д о п о л н е н и е стоящего там логарифма, не обращая внимания на то, будет ли это доп. $\lg\sin\frac{1}{2}(A+B)$ или доп. $\lg\cos\frac{1}{2}(A+B)$ (или соответственно $A-B$); найденное таким образом дополнение логарифма прибавляют к б о́ л ь ш е м у из двух логарифмов, N или D, или соответственно N' или D'. Полученная сумма и будет $\lg\cos\frac{1}{2}c$ или соответственно $\lg\sin\frac{1}{2}c$. Дополнению приписывают такой же знак, как и у величины, к которой его прибавляют. Иначе говоря, $\sin\frac{1}{2}c$ и $\cos\frac{1}{2}c$ всегда должны быть положительны. Смотря по значению $\frac{1}{2}c$, величина эта найдется более точно или по $\sin\frac{1}{2}c$ или по $\cos\frac{1}{2}c$; очевидно, для получения бóльшей точности следует брать ту из этих величин, которая меньше. Если разность между логарифмами этих величин не слишком велика, то значение $\frac{1}{2}c$, найденное во второй из них, может служить контролем.

Пример. Для примера возьмем тот же самый сферический треугольник, как и выше, со сторонами:

$$a = 120°31'20'',$$
$$b = \ \ 76\ \ 43\ 43$$

и углом между ними

$$C = 108°12'27''.$$

Решение

Схема вычислений

a	120°31′20″
b	76 43 43
C	108 12 27
$a-b$	43 47 37
$a+b$	197 15 3
$\frac{1}{2}C$	54 6 13,5
$\frac{1}{2}(a-b)$	21 53 48,5
$\frac{1}{2}(a+b)$	98 37 31,5

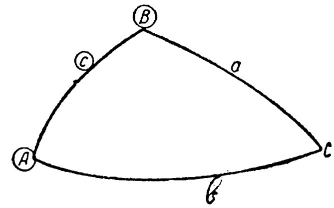
$\lg\cos\frac{1}{2}C$	9.76 813
$\lg\cos\frac{1}{2}(a-b)$	9.96 748
$\lg N$	9.73 561
доп. $\left\{\begin{array}{l}\lg\sin\\ \lg\cos\end{array}\right.\frac{1}{2}(A+B)$	0.01 057
$\lg D$	9.08 455n
$\lg\cos\frac{1}{2}(a+b)$	9.17 602n
$\lg\sin\frac{1}{2}C$	9.90 853
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$	0.65 106n
$\lg\cos\frac{1}{2}c$	9.74 618

$\lg\cos\frac{1}{2}C$	9.76 813
$\lg\sin\frac{1}{2}(a-b)$	9.57 163
$\lg N'$	9.33 976
доп. $\left\{\begin{array}{l}\lg\sin\\ \lg\cos\end{array}\right.\frac{1}{2}(A-B)$	0.01 561
$\lg D'$	9.90 359
$\lg\sin\frac{1}{2}(a+b)$	9.99 506
$\lg\sin\frac{1}{2}C$	9.90 853
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)$	9.43 617
$\lg\sin\frac{1}{2}c$	9.91 920

$\frac{1}{2}(A+B)$	102°35′20″
$\frac{1}{2}(A-B)$	15 16 12
A	117°51′32″
B	87 19 8
$\frac{1}{2}c$	56° 7′22″
c	112 14 44

Здесь $\frac{1}{2}c$ мы подыскивали по $\lg\cos\frac{1}{2}c$, но и по $\lg\sin\frac{1}{2}c$ получается тот же результат. Так что можно сказать, что контроль вполне сходится. Последний путь решения самый изящный и самый удобный для вычисления по таблицам логарифмов.

III случай. Даны два угла сферического треугольника A и B и сторона между ними c. Найти стороны a и b и угол C (черт. 46).



Черт. 46

1) Решение по основным формулам.

По формулам котангенсов (17) (см. § 15) имеем для данных элементов A, B и c и искомой стороны a:

$$\operatorname{ctg} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{ctg} A,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} c \cos B + \frac{\sin B \operatorname{ctg} A}{\sin c}. \qquad \text{(I)}$$

Точно таким образом для стороны b напишем:

$$\operatorname{ctg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{ctg} B,$$

откуда, в свою очередь,

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} c \cos A + \frac{\sin A \operatorname{ctg} B}{\sin c}. \qquad \text{(II)}$$

Наконец, для угла C непосредственно по формулам косинуса угла (12) (см. § 11) будем иметь:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \qquad \text{(III)}$$

Формулы (I), (II), (III) и решают задачу; они удобны для вычисления на арифмометре. В качестве контрольной формулы можно взять теорему синусов:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \qquad \text{(IV)}$$

Пример. Решить сферический треугольник по двум углам A и B, которые равняются соответственно:

$$A = 126°18'\ 4'',$$
$$B = \ 63\ 42\ 14$$

и стороне c, которая равняется:

$$c = 106°43'37''.$$

Решение

а) Вычисление стороны a

$\sin B$	+0,89 652
$\operatorname{ctg} A$	—0,73 460
$\sin c$	+0,95 769
$\frac{\sin B \operatorname{ctg} A}{\sin c}$	—0,68 768
$\operatorname{ctg} c \cos B$	—0,13 314
$\operatorname{ctg} a$	—0,82 082
a	129°22'48"

б) Вспомогательная схема

$\cos A$	—0,59 203
$\operatorname{ctg} c$	—0,30 053
$\cos B$	+0,44 301

в) Вычисление стороны b

$\sin A$	$+0{,}80\ 592$
$\operatorname{ctg} B$	$+0{,}49\ 415$
$\sin c$	$+0{,}95\ 769$
$\dfrac{\sin A \operatorname{ctg} B}{\sin c}$	$+0{,}41\ 584$
$\operatorname{ctg} c \cos A$	$+0{,}17\ 762$
$\operatorname{ctg} b$	$+0{,}59\ 376$
b	$50°18'\ 0''$

г) Вычисление угла C

$\sin A$	$+0{,}80\ 592$
$\sin B$	$+0{,}89\ 652$
$\cos c$	$-0{,}28\ 781$
$\sin A \sin B \cos c$	$-0{,}20\ 795$
$-\cos A \cos B$	$+0{,}26\ 228$
$\cos C$	$+0{,}05\ 433$
C	$86°53'\ 8''$

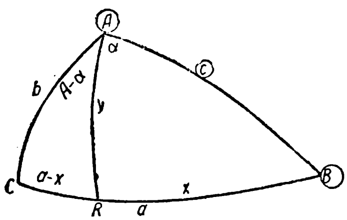
д) Контроль

$\sin a$	$0{,}77\ 296$
$\sin A$	$0{,}80\ 592$
$\dfrac{\sin a}{\sin A}$	$0{,}95\ 910_3$
$\sin b$	$0{,}85\ 985$
$\sin B$	$0{,}89\ 652$
$\dfrac{\sin b}{\sin B}$	$0{,}95\ 909_7$
$\sin c$	$0{,}95\ 769$
$\sin C$	$0{,}99\ 852$
$\dfrac{\sin c}{\sin C}$	$0{,}95\ 910_9$

Контроль сошелся удовлетворительно.

2) Решение с помощью разбивки на два прямоугольных сферических треугольника.

Опустим сферический перпендикуляр AR из вершины A на противоположную сторону CB (черт. 47). Получим два сферических прямоугольных треугольника ABR и CAR. Обозначим длину сферического перпендикуляра AR буквой y, длину отрезка RB стороны a от точки R до вершины B — буквой x, а угол между перпендикуляром AR и стороною c — буквой α.



Черт. 47

Таким образом,

$$y = AR, \quad x = RB, \quad a - x = CR$$
$$\text{и} \quad \angle BAR = \alpha.$$

Тогда из прямоугольного сферического треугольника ABR, в котором известны гипотенуза c и косвенный угол B, находим по правилу Непера-Модюи:

$$\sin y = \sin c \sin B. \qquad \text{(I)}$$

Далее,

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} B,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos c \operatorname{tg} B. \qquad \text{(II)}$$

Затем,

$$\cos B = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} c,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \cos B \operatorname{tg} c. \qquad \text{(III)}$$

Теперь переходим к треугольнику CAR, в котором нам теперь известны катет AR и угол CAR, так как (см. черт. 47)

$$AR = y,$$
$$\angle CAR = A - \alpha.$$

Решая этот треугольник по правилу Непера-Модюи, получим:

$$\cos C = \cos y \sin (A - \alpha). \qquad \text{(IV)}$$

Далее,

$$\cos (A - \alpha) = \operatorname{ctg} b \operatorname{tg} y,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} y \cos (A - \alpha). \qquad \text{(V)}$$

Затем,

$$\sin y = \operatorname{tg} (a - x) \operatorname{ctg} (A - \alpha),$$

откуда

$$\operatorname{tg} (a - x) = \sin y \operatorname{tg} (A - \alpha). \qquad \text{(VI)}$$

Теперь, зная на основании формул (III) и (VI) отрезки x и $(a - x)$, на основании черт. 47 можем найти сторону a, так как

$$a = x + (a - x). \qquad \text{(VII)}$$

В качестве контрольной может быть взята та же формула, что и в предыдущем способе решения, т. е.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \qquad \text{(VIII)}$$

Пример. Решить сферический треугольник, если даны два его угла и сторона между ними, а именно:

$$A = 126°18'\,4'',$$
$$B = 63\;42\;14,$$
$$c = 106\;43\;37$$

(тот же треугольник, что и в предыдущем примере).

Решение

а) Вычисление y

$\lg \sin c$	9.98 122
$\lg \sin B$	9.95 256
$\lg \sin y$	9.93 378
y	59°9′34″

б) Вычисление угла α

$\lg \cos c$	9.45 911n
$\lg \operatorname{tg} B$	0.30 614
$\lg \operatorname{ctg} \alpha$	9.76 525n
α	120°13′6″

в) Вычисление x

$\lg \cos B$	9.64 641
$\lg \operatorname{tg} c$	0.52 212n
$\lg \operatorname{tg} x$	0.16 853n
x	124°9′7″

г) Вычисление угла C

A	126°18′ 4″
α	120 13 6
$A - \alpha$	6 4 58
$\lg \sin (A - \alpha)$	9.02 516
$\lg \cos y$	9.70 982
$\lg \cos C$	8.73 498
C	86°53′10″

д) Вычисление стороны b

$\lg \operatorname{ctg} y$	9.77 601
$\lg \cos (A - \alpha)$	9.99 755
$\lg \operatorname{ctg} b$	9.77 356
b	59°18′10″

е) Вычисление стороны a

$\lg \sin y$	9.93 378
$\lg \operatorname{tg} (A - \alpha)$	9.02 762
$\lg \operatorname{tg} (a - x)$	8.96 140
$a - x$	5°13′40″
x	124 9 7
a	129°22′47″

ж) Контроль

$\lg \sin a$	9.88 815
$\lg \sin A$	9.90 629
$\lg \frac{\sin a}{\sin A}$	9.98 186
$\lg \sin b$	9.93 443
$\lg \sin B$	9.95 256
$\lg \frac{\sin b}{\sin B}$	9.98 187
$\lg \sin c$	9.98 122
$\lg \sin C$	9.99 936
$\lg \frac{\sin c}{\sin C}$	9.98 186

Контроль сошелся хорошо. Катет треугольника ABR, обозначенный буквою y, находится по синусу. Так как катет и противолежащий угол должны лежать в одной и той же четверти, мы взяли $y < 90°$.

3) Решение по аналогиям Непера с вычислением третьего угла по теореме синусов.

По третьей и четвертой аналогиям Непера [см. (35) § 25]:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c \\ \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}c \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

можем найти полусумму и полуразность искомых сторон, а затем по тождествам:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \\ b &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

и самые стороны a и b.

Искомый угол C можно определить по теореме синусов из соотношений:

$$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a} = \frac{\sin c \sin B}{\sin b}. \tag{III}$$

Из этих соотношений угол C определяют дважды; совпадение двух полученных таким образом значений служит контролем.

Пример: Решить сферический треугольник, если даны:

$$A = 126°18'4'',$$
$$B = 63\ 42\ 14,$$
$$c = 106\ 43\ 37$$

(тот же треугольник, что и в двух предыдущих примерах).

Решение

а) Вычисление сторон a и b

A	126°18' 4"
B	63 42 14
$A+B$	190 0 18
$\frac{1}{2}(A+B)$	95 0 9
$\frac{1}{2}(A-B)$	31 17 55
c	106 43 37
$\frac{1}{2}c$	53 21 48
$\lg\sin\frac{1}{2}(A-B)$	9.71 558
доп. $\lg\sin\frac{1}{2}(A+B)$	0.00 166
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$	0.12 863
$\lg\cos\frac{1}{2}(A-B)$	9.93 170
доп. $\lg\cos\frac{1}{2}(A+B)$	1.05 948 n
$\lg\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$	9.84 587
$\lg\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$	1.11 981 n
$\frac{1}{2}(a-b)$	35° 2'24"
$\frac{1}{2}(a+b)$	94 20 24
a	129 22 48
b	59 18 0

б) Вычисление угла C и контроль

C	86°53'0"
$\lg\sin C$	9.99 936
доп. $\lg\sin a$	0.11 185
$\lg\sin A$	9.90 629
$\lg\sin c$	9.98 122
$\lg\sin B$	9.95 256
доп. $\lg\sin b$	0.06 558
$\lg\sin C$	9.99 936
C	86°53' 0"

Контроль сошелся полностью.

Так как $c<a$, то должно быть также

$$C<A.$$

Поэтому для C выбрано значение, меньшее 90°.

4) Решение по аналогиям Непера с вычислением третьего угла по формулам Делямбра-Гаусса.

Перепишем третью и четвертую аналогии Непера [см. (35) § 25] в несколько измененном виде, а именно:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
N&=\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B),\\
D&=\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A+B),\\
N'&=\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A-B),\\
D'&=\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B).
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I})$$

Тогда наши аналогии можно представить так:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)&=\frac{N}{D},\\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)&=\frac{N'}{D'}.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{II})$$

Возьмем формулы Деламбра-Гаусса [см. форм. (33) § 24] и разрешим их относительно $\sin\frac{1}{2}C$ и $\cos\frac{1}{2}C$ соответственно:

$$\sin\frac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\sin\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\cos\frac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)},$$

$$\cos\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}.$$

Вносят в эти формулы обозначения (I), получим:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}C&=\frac{N}{\sin\frac{1}{2}(a+b)};\\
\sin\frac{1}{2}C&=\frac{D}{\cos\frac{1}{2}(a+b)};\\
\cos\frac{1}{2}C&=\frac{N'}{\sin\frac{1}{2}(a-b)};\\
\cos\frac{1}{2}C&=\frac{D'}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{III})$$

Присоединим сюда тождества:

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b), \\ b&=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Формулы (I), (II), (III) и (IV) и решают задачу. В самом деле, по (I), (II) и (IV) формулам находим стороны a и b, а по формулам (III) находим искомый угол C. При этом $\sin\frac{1}{2}C$ и $\cos\frac{1}{2}C$ не вычисляют по два раза, а проводят вычисления по так называемому правилу Лаланда, а именно: когда подыскивают по таблицам логарифмов по $\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$ или по $\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$ угол $\frac{1}{2}(a+b)$ или соответственно $\frac{1}{2}(a-b)$, то из столбца, подписанного сверху tg или ctg, переходят непосредственно в крайний правый столбец, подписанный сверху cos, и выписывают, интерполируя в том же направлении, как и при приискании самого угла, дополнение стоящего в этом столбце логарифма, не устанавливая, будет ли это доп. $\lg\sin\frac{1}{2}(a+b)$ или доп. $\lg\cos\frac{1}{2}(a+b)$, или соответственно то же для угла $\frac{1}{2}(a-b)$. Полученное таким образом дополнение прибавляют к большему из двух логарифмов $\lg N$ и $\lg D$, или соответственно $\lg N'$ и $\lg D'$. Полученный в сумме логарифм и будет $\lg\sin\frac{1}{2}C$, или соответственно $\lg\cos\frac{1}{2}C$. Совпадение результатов, полученных по синусу и по косинусу, служит контролем. В случае большого расхождения при отсутствии погрешностей в вычислениях следует отдать предпочтение значению угла $\frac{1}{2}C$, полученному по меньшему из обоих логарифмов. Если логарифмы отличаются между собой мало, и разность полученных значений угла $\frac{1}{2}$ невелика, допустимо взять, как окончательное, среднее из обоих значений.

Пример. Решить сферический треугольник, если дано:

$$A=126°18'\ \ 4'',$$

$$B=\ \ 63\ 42\ \ 14,$$

$$c=106\ 43\ 37$$

(тот же треугольник, что и в трех предыдущих примерах).

Решение

A	126°18′ 4″
B	63 42 14
$A-B$	62 35 50
$A+B$	190 0 18
c	106 43 37
$\frac{1}{2}(A-B)$	31 17 55
$\frac{1}{2}(A+B)$	95 0 9
$\frac{1}{2}c$	53 21 48,5

$\lg\sin\frac{1}{2}c$	9.90 441
$\lg\cos\frac{1}{2}(A-B)$	9.93 170
N	9.83 611
доп. $\left\{\begin{matrix}\lg\sin\\ \lg\cos\end{matrix}\right.\frac{1}{2}(a+b)$	0.00 124
D	8.71 630 n
$\lg\cos\frac{1}{2}(A+B)$	8.94 052 n
$\lg\cos\frac{1}{2}c$	9.77 578
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$	1.11 981 n
$\lg\sin\frac{1}{2}C$	9.83 735

$\lg\sin\frac{1}{2}c$	9.90 441
$\lg\sin\frac{1}{2}(A-B)$	9.71 558
N'	9.61 999
доп. $\left\{\begin{matrix}\lg\sin\\ \lg\cos\end{matrix}\right.\frac{1}{2}(a-b)$	0.08 685
D'	9.77 412
$\lg\sin\frac{1}{2}(A+B)$	9.99 834
$\lg\cos\frac{1}{2}c$	9.77 578
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)$	9.84 587
$\lg\cos\frac{1}{2}C$	9.86 097

$\frac{1}{2}(a+b)$	94°20′23″,7
$\frac{1}{2}(a-b)$	35 2 24 ,5
a	129 22 48
b	59 17 59
$\frac{1}{2}C$	43 26 $\left.\begin{matrix}32\\35\end{matrix}\right\}33''$
C	86 53 6

Так как искомый угол C близок к 90°, то $\frac{1}{2}C$ близко к 45°; поэтому $\sin\frac{1}{2}C$ и $\cos\frac{1}{2}C$ мало различаются между собою и практически дают одинаковую точность. Разность в 3″, полученная при приискании угла по синусу и по косинусу, носит, таким образом, случайный характер. Ввиду этого за окончательное значение угла $\frac{1}{2}C$ принято среднее арифметическое из обоих полученных значений, с некоторым предпочтением при округлении в сторону значения, полученного по синусу, как меньшему из двух.

Глава V

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 28. Решение элементарных треугольников

При рассмотрении многих вопросов сферической и практической астрономии и высшей геодезии приходится иметь дело с треугольниками, некоторые элементы которых бесконечно малы.

Такие треугольники называются элементарными (см. черт. 48).

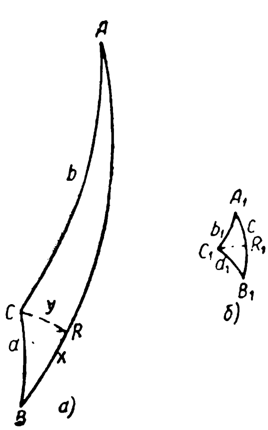
Возможны элементарные треугольники двух типов:

Первый тип. Одна из сторон треугольника, например, a (черт. 48а) бесконечно мала по сравнению с радиусом сферы, а следовательно, бесконечно мал противолежащий ей угол A. Другие же стороны b и c и противолежащие им углы B и C суть величины конечные.

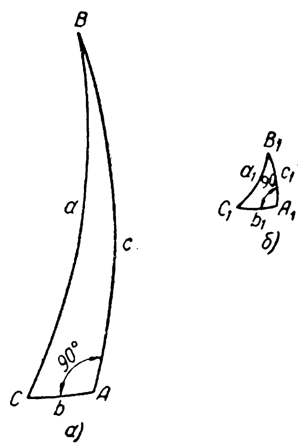
Второй тип. Все три стороны a_1, b_1 и c_1 бесконечно малы (черт. 48 б). Если все три стороны одного и того же порядка малости по сравнению с радиусом сферы, то и все углы A, B, C будут величинами конечными. Если же одна из сторон есть величина высшего порядка малости по сравнению с двумя другими сторонами, то противолежащий ей угол будет бесконечно мал. Такие треугольники встречаются гораздо реже, и мы их рассматривать здесь не станем.

Опустив сферический перпендикуляр CR (черт. 48 а) из вершины одного из углов, прилегающих к бесконечно малой стороне a, например, из вершины C, на противолежащую сторону, мы разобьем элементарный треугольник первого типа ABC на два элементарных треугольника — на прямоугольный элементарный треугольник ACR — первого типа и на прямоугольный элементарный треугольник CRB — второго типа. Подобным же образом и элементарный треугольник второго типа $A_1B_1C_1$ (черт. 48 б) мы можем разбить на два прямоугольных элементарных треугольника того же, т. е. второго, типа $A_1C_1R_1$ и $R_1C_1B_1$, если опустим перпендикуляр из вершины любого угла на противоположную сторону, например, перпендикуляр C_1R_1 из вершины угла C_1 на сторону A_1B_1.

Таким образом, достаточно рассмотреть решение прямоугольного элементарного треугольника первого типа ABC (черт. 49 а), у которого катет b и противолежащий ему острый угол B бесконечно малы, а остальные элементы конечны, и решение элементарного прямоугольного треугольника второго типа $A_1B_1C_1$ (черт. 49 б), у которого все стороны бесконечно малы, а углы конечны. Это, так сказать, два основных типичных случая.



Черт. 48



Черт. 49

Для элементарного сферического прямоугольного треугольника первого типа решение проводится, как обычно, с помощью правила Непера-Модюи. Только функции малых элементов, катета b и угла B, по их малости, в зависимости от требуемой точности, могут заменяться теми или другими приближенными их выражениями, о чем ниже будет сказано несколько подробнее.

Например, если даны малый угол B и гипотенуза a, для малого катета b, по правилу Непера-Модюи, сперва напишем:

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

а затем, по малости b и B, можем заменить синусы этих величин первыми членами разложений в ряд и для вычисления b получим формулу:

$$b = B \sin a.$$

Элементарные сферические треугольники второго типа суть так называемые треугольники „с малым изгибом сторон“. Их, как уже сказано в § 21, можно решать как плоские. Так, например, если в треугольнике $A_1B_1C_1$ (черт. 49 б) даны гипотенуза a_1 и острый угол C_1, то, решая его, будем иметь:

$$b_1 = a_1 \cos C_1,$$
$$c_1 = a_1 \sin C_1.$$

§ 29. Вычисление малых углов по таблицам натуральных значений тригонометрических функций

При решении элементарных треугольников, а также и в других случаях приходится находить тригонометрические функции малых углов и, наоборот, находить малые углы по их тригонометрическим функциям. В таких случаях целесообразно применить некоторые приемы, облегчающие и упрощающие эту работу, без ущерба для точности вычисления.

Основным приемом здесь является разложение функций в ряды.

Как известно, в анализе даются разложения в ряды тригонометрических функций, а именно:

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots, \\
\operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \ldots, \\
\operatorname{ctg} x &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \ldots\right), \\
\sec x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + \ldots, \\
\operatorname{cosec} x &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360} x^4 + \ldots\right).
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

В отношении обратных круговых функций для нас имеют наибольшее значение ряды для арксинуса и арктангенса:

$$\left.\begin{aligned}
\arcsin y &= y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{3}{40} y^5 + \ldots, \\
\operatorname{arc\,tg} y &= y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

В простейших случаях можно довольствоваться первыми членами этих разложений. Тогда для малых углов можно принять:

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= x \\
\operatorname{tg} x &= x \\
\cos x &= 1 \\
\sec x &= 1
\end{aligned}\right\}. \tag{41}$$

Однако в рядах (39) и (40) и в выражениях (41), как и вообще в анализе, угол x выражен в отвлеченных мерах (в радианах). На практике же углы принято выражать в градусах, минутах и секундах градусных или (в астрономии) в часах, минутах и секундах часовых. Для практического применения выражения (41), следовательно, нужно переписать таким образом:

$$\left.\begin{aligned}
\sin x'' &= x'' \cdot \sin 1'' \\
\operatorname{tg} x'' &= x'' \cdot \sin 1''
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
\sin x^s &= x^s \sin 1^s \\
\operatorname{tg} x^s &= x^s \sin 1^s
\end{aligned}\right\}. \tag{43}$$

Последние же два из равенств (41) остаются без изменения.

Пределы, в которых допустимо пользоваться этими формулами, зависят от требуемой точности вычислений.

Некоторую ориентировку в этом вопросе дают приведенные ниже таблички.

При вычислении в градусных мерах		
Предел допускаемой погрешности в угле x''	Предел угла x	
	при вычислении по синусу	при вычислении по тангенсу
$0'',01$	$0^\circ,4$	$0^\circ,3$
$0'',1$	$0^\circ,8$	$0^\circ,6$
$1''$	$1^\circ,7$	$1^\circ,4$
$1'$	$6^\circ,9$	$5^\circ,5$

Таблица 2

При вычислении в часовых мерах		
Предел допускаемой погрешности в угле x^s	Предел угла x	
	при вычислении по синусу	при вычислении по тангенсу
$0^s,001$	$1^m,7$	$1^m,4$
$0^s,01$	$3^m,7$	$3^m,0$
$0^s,1$	$8^m,1$	$6^m,4$
1^s	$17^m,4$	$13^m,8$
1^m	$68^m,1$	$54^m,0$

В некоторых случаях при очень приближенных расчетах применяют формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sin x' &= x' \sin 1' \\ \operatorname{tg} x' &= x' \sin 1' \end{aligned}\right\} \qquad (42')$$

или

$$\left.\begin{aligned} \sin x^m &= x^m \sin 1^m \\ \operatorname{tg} x^m &= x^m \sin 1^m \end{aligned}\right\} \qquad (43')$$

и даже

$$\sin x^\circ = x^\circ \sin 1^\circ.$$

Конечно, при вычислениях по формулам (42), (43), (42′) и (43′) не нужно никаких таблиц. Нужно только знать несколько натуральных значений синусов, а именно:

$$\begin{aligned} \sin 1'' &= 0{,}0000048\bar{5}, \\ \sin 1^s &= 0{,}00007272, \\ \sin 1' &= 0{,}00029089, \\ \sin 1^m &= 0{,}00436331, \\ \sin 1^\circ &= 0{,}0174\dot{5}. \end{aligned}$$

Для котангенса и косеканса предыдущий прием оказывается неприменимым. Благодаря наличию в разложении этих функций (39) множителя $\frac{1}{x}$ они очень быстро возрастают при уменьшении аргумента, так что какая-либо интерполяция и вообще расчеты, основанные на допущении пропорциональности изменения аргумента и функции, оказываются здесь совершенно неприемлемыми. Поэтому для котангенса и косеканса часто прибегают к уменьшению табличного интервала, что естественно ведет к увеличению объема таблиц.

Здесь, однако, можно применить и другой прием. Введем функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$, по уравнениям

и

$$\left.\begin{aligned} p_1(x) &= x \operatorname{ctg} x \\ p_2(x) &= x \operatorname{cosec} x \end{aligned}\right\}. \qquad (44)$$

В силу разложений $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ по соответствующим формулам (39), эти функции можно представить следующими рядами:

$$p_1(x) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \ldots,$$

$$p_2(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \ldots$$

При очень малом x они близки к 1 и изменяются очень медленно. Ввиду такого свойства эти функции иногда называются выравнивающими в том смысле, что они на некотором интервале имеют по сравнению с первоначальной функцией более медленное и более равномерное изменение. Поэтому они очень легко могут быть табулированы с большим табличным интервалом (см., например, Петерс, „Шестизначные таблицы тригонометрических функций").

Ограничиваясь двумя первыми членами разложений, что для практических целей и в пределах для x от $0°$ до $1\frac{1°}{3}$ (или от 0^m до $5\frac{1^m}{3}$) вполне достаточно, и выражая наши выравнивающие функции в градусных или часовых секундах, предыдущие формулы можем переписать так:

$$p_1(x) = 206265'' - \frac{x''^2}{3} \cdot \sin 1'',$$

$$p_2(x) = 206265'' + \frac{x''^2}{6} \cdot \sin 1'',$$

где x и $p(x)$ выражены в градусных секундах, или

$$p_1(x) = 13751^s{,}0 - \frac{(x^s)^2}{3} \cdot \sin 1^s,$$

$$p_2(x) = 13751^s{,}0 + \frac{(x^s)^2}{6} \cdot \sin 1^s,$$

где x и $p(x)$ выражены в часовых секундах.

Имея таблички функций $p(x)$, из которых они без всякой интерполяции могут быть выбраны по аргументам x, $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ соответственно, легко с требуемой точностью по данному x найти $\operatorname{ctg} x$ или $\operatorname{cosec} x$ и, наоборот, найти по заданным $\operatorname{ctg} x$ или $\operatorname{cosec} x$ соответствующие этим функциям значения x из соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \frac{p_1(x)}{x} \\ \text{и} \quad \operatorname{cosec} x &= \frac{p_2(x)}{x} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{p_1(x)}{\operatorname{ctg} x} \\ \text{и} \quad x &= \frac{p_2(x)}{\operatorname{cosec} x} \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

которые непосредственно вытекают из формул (44).

Если приходится вести вычисления с синусами и тангенсами малых углов, выходящих, однако, за пределы, указанные в табличках 1 и 2, то уже приходится, до известных пределов, конечно, брать два первых члена ряда разложений (39) и (40).

В этом случае интересующие нас разложения перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} \end{aligned}\right\}, \tag{39'}$$

$$\left.\begin{aligned} \arcsin y &= y + \frac{y^3}{6} \\ \operatorname{arctg} y &= y - \frac{y^3}{3} \end{aligned}\right\}. \tag{40'}$$

Введем обозначение:

$$w(x)=\frac{x^3}{6}. \tag{47}$$

Тогда предыдущие равенства примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= x - w(x) \\ \operatorname{tg} x &= x + 2w(x) \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \arcsin y &= y + w(y) \\ \operatorname{arc\,tg} y &= y - 2w(y) \end{aligned}\right\}. \tag{49}$$

Для какого-нибудь x будем иметь:

$$y=\sin x,$$

и наоборот,

$$x=\arcsin y.$$

Отсюда, на основании (48) и (49), для взятого значения x и соответствующего ему значения y можем записать:

$$y=x-w(x)$$

и

$$x=y+w(y).$$

Складывая эти два выражения, с точностью до малых 4-го порядка включительно, получаем равенство:

$$w(x)=w(y),$$

из которого видно, что функции $w(x)$ и $w(y)$ равны между собой с точностью до малых 4-го порядка. Следовательно, в известных пределах с весьма большой точностью мы получаем один и тот же результат, независимо от того, находим ли мы функцию $w(x)$ по углу, т. е. по x, или по синусу этого угла, т. е. по y. То же самое может быть доказано аналогичным путем и для тангенса.

Таким образом, мы функцию $w(x)$ можем табулировать так, чтобы или по углу, или по его синусу или тангенсу можно было подыскивать ее значение. Тогда с помощью этих значений $w(x)$ можно будет по данному малому углу x находить по формулам (48) синус и тангенс этого угла, или, наоборот, по синусу или тангенсу малого угла по формулам (49) находить самый угол x.

При этом нужно иметь в виду, что для вычисления по формулам (48) значения x и $w(x)$ в правых частях должны быть выражены в отвлеченных мерах; при вычислении же по формулам (49), величины y и $w(y)$ должны быть выражены в секундах градусных или часовых. Условившись для последнего случая обозначать нашу функцию через $v(y^s)$, формулы (47) и (49) можем переписать таким образом:

для вычисления в градусных секундах —

$$w(y'')=\frac{1}{6}\sin^2 1''\,(y'')^3 \tag{47'}$$

и

$$\left.\begin{aligned} x'' &= y'' + w(y''), \\ &\qquad \text{если } x=\arcsin y \\ x'' &= y'' - 2w(y''), \\ &\qquad \text{если } x=\operatorname{arc\,tg} y; \end{aligned}\right\} \tag{49'}$$

для вычисления в часовых секундах —

$$v(y^s)=\frac{1}{6}\sin^2 1^s (y^s)^3 \tag{47''}$$

$$\left.\begin{aligned}
&x^s=y^s+v(y^s),\\
&\qquad\text{если } x=\arcsin y\\
&x^s=y^s-2v(y^s),\\
&\qquad\text{если } x=\operatorname{arc\,tg} y.
\end{aligned}\right\} \tag{49''}$$

Напомним, что если x, x'' и x^s обозначают соответственно отвлеченное выражение угла x, его выражение в градусных секундах и в секундах часовых, то между этими величинами существуют следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
x&=x''\sin 1''=x^s\sin 1^s\\
x''&=15x^s=\frac{x}{\sin 1''}\\
x^s&=\frac{x}{\sin 1^s}=\frac{1}{15}x''
\end{aligned}\right\}, \tag{50}$$

где $\sin 1''=\frac{1}{\rho''}=\frac{1}{206265}$, а $\sin 1^s=15\sin 1''=\frac{1}{13751{,}0}$.

Исследование величин остаточных членов разложений (40′), которые в данном случае с достаточной точностью можно принять равными соответственно первым из отброшенных членов разложений (40), показывает, что поправками $w(y)$ и $v(y)$ можно пользоваться в следующих пределах.

Если при вычислении в градусных секундах требуется обеспечить точность до $0'',01$, то формулы (47′) и (49′) можно применять при вычислении по синусам для углов от $0°,4$ до $3°,3$, а при вычислении по тангенсам — для углов от $0°,3$ до $2°,7$.

Если при вычислении в часовых секундах требуется обеспечить точность до $0^s,001$, то формулы (47″) и (49″) можно применять при вычислении по синусам для углов от $1^m,7$ до $14^m,4$, а при вычислении по тангенсам — для углов от $1^m,4$ до $11^m,8$. С округлением можно для обоих случаев в среднем считать допустимым применение рассмотренного приема для углов до $3°$ или 12^m.

В качестве образца может служить приведенная на стр. 151—152 в Приложениях таблица поправок $v(y^s)$, составленная автором для значений y от 1^m до 7^m для каждой секунды времени, причем за единицу принята $0^s,001$.

Пример 1. Дано $y=\sin x=0{,}02115$; найти угол x.

По какой-либо специальной таблице или на арифмометре по формулам (50) получаем: $y^s=290^s,834=4^m50^s,834$; по только что упомянутой таблице находим $v(y)=22$.

Следовательно,

$$x^s=4^m50^s,834+0^s,022=4^m50^s,856.$$

Пример 2. Дано $y=\operatorname{tg} x=0{,}01868$; найти x, т. е. угол.

По формуле (50) вычисляем

$$y^s=256^s,869=4^m16^s,869,$$

а по упомянутой таблице находим $v(y)=15$.

Следовательно, $x^s=4^m16^s,869-0^s,030=4^m16^s,839$.

Пример 3. Дан угол $4^m50^s,856$; найти его синус.

$$x=290^s,856;$$

по таблице находим $v(x)=22$; следовательно,

$$y^s=290^s,856-0^s,022=290^s,834.$$

Переводим по формуле (50) и находим

$$\sin 4^m50^s,856=0{,}02115.$$

Пример 4. Дан угол $4^m16^s,839$; найти его тангенс.

$$x^s = 256^s,839;$$

по таблице находим $v(x) = 15$; следовательно,

$$y^s = 256^s,839 + 0^s,030 = 256^s,869;$$

переводя y^s в отвлеченные меры по формуле (50), получаем

$$\operatorname{tg} x = 0,01868.$$

Поправки $w(x)$ и $v(x)$ могут быть названы ***нелогарифмическими*** или ***натуральными*** поправками малых углов.

§ 30. Вычисление малых углов по таблицам логарифмов

При вычислении малых углов и их функций по логарифмам можно также очень часто пользоваться формулами (42) и (49), т. е. принимать приближенно

$$\left.\begin{aligned} \lg \sin x'' &= \lg x'' + \lg \sin 1'' \\ \lg \operatorname{tg} x'' &= \lg x'' + \lg \sin 1'' \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \lg \sin x^s &= \lg x^s + \lg \sin 1^s \\ \lg \operatorname{tg} x^s &= \lg x^s + \lg \sin 1^s \end{aligned}\right\},$$

а иногда еще грубее

$$\left.\begin{aligned} \lg \sin x' &= \lg x' + \lg \sin 1' \\ \lg \operatorname{tg} x' &= \lg x' + \lg \sin 1' \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \lg \sin x^m &= \lg x^m + \lg \sin 1^m \\ \lg \operatorname{tg} x^m &= \lg x^m + \lg \sin 1^m \end{aligned}\right\}$$

и даже

$$\lg \sin x^\circ = \lg x^\circ + \lg \sin 1^\circ.$$

При этом $\lg x$ берется от x, как от числа, выражающего данный угол в градусных единицах или в единицах часовых, а $\lg \sin 1''$, $\lg \sin 1^s$ и т. д. берутся с округлением до положенного числа знаков из каких-либо таблиц логарифмов. Приведем для справок эти последние логарифмы:

$$\begin{aligned} \lg \sin 1'' &= 4.68557487 - 10, \\ \lg \sin 1^s &= 5.86166613 - 10, \\ \lg \sin 1' &= 6.463726 \quad - 10, \\ \lg \sin 1^m &= 7.639816 \quad - 10, \\ \lg \sin 1^\circ &= 8.24186 \quad\;\; - 10. \end{aligned}$$

Пределы, в которых можно пользоваться только что приведенными формулами при вычислениях с той или с другой точностью, примерно совпадают с указанными в табличках 1 и 2.

Так как $\lg \sin x$ и $\lg \operatorname{tg} x$ для малых углов очень быстро возрастают, так что интерполяция становится очень затруднительна или даже невозможна, то для этих функций прибегают часто к сокращению табличного интервала.

Другой прием состоит в разложении функций в ряды и вычислении с их помощью так называемых логарифмических поправок.

Возьмем из формул (39) разложения $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и $\cos x$. Сохраняя всюду два первых члена и вынося, где возможно, x за скобку, можно переписать их в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= x\left(1-\frac{x^2}{6}\right) \\ \operatorname{tg} x &= x\left(1+\frac{x^2}{3}\right) \\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Здесь x выражено в отвлеченных мерах. Выражая x в градусных секундах и беря натуральные логарифмы от выражений (I), получим:

$$\left.\begin{aligned} \ln\sin x &= \ln x'' + \ln\sin 1'' + \ln\left(1-\frac{x''^2\cdot\sin^2 1''}{6}\right) \\ \ln\operatorname{tg} x &= \ln x'' + \ln\sin 1'' + \ln\left(1+\frac{x''^2\cdot\sin^2 1''}{3}\right) \\ \ln\cos x &= \ln\left(1-\frac{x''^2\cdot\sin^2 1''}{2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{II}$$

Как известно, в анализе даются следующие разложения для натурального логарифма:

$$\left.\begin{aligned} \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \\ &\text{и} \\ \ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots \end{aligned}\right\}. \tag{a}$$

Разложим последние члены выражений (II) по этим формулам, ограничиваясь только первыми членами разложений (a). Таким образом, выражения (II) можем переписать:

$$\left.\begin{aligned} \ln\sin x &= \ln x'' + \ln\sin 1'' - \frac{x''^2\cdot\sin^2 1''}{6} \\ \ln\operatorname{tg} x &= \ln x'' + \ln\sin 1'' + \frac{x''^2\cdot\sin^2 1''}{3} \\ \ln\cos x &= -\frac{x''^2\cdot\sin^2 1''}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{III}$$

Если M — модуль десятичных логарифмов, то, как известно из анализа,

$$\lg_{10} x = M\cdot\ln x.$$

Таким образом, умножив левые и правые части равенств (III) почленно на M, получим:

$$\left.\begin{aligned} \lg\sin x &= \lg x'' + \lg\sin 1'' - \frac{x''^2\cdot\sin^2 1''\cdot M}{6}, \\ \lg\operatorname{tg} x &= \lg x'' + \lg\sin 1'' + \frac{x''^2\cdot\sin^2 1''\cdot M}{3}, \\ \lg\cos x &= -\frac{x''^2\cdot\sin^2 1''\cdot M}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

Обозначим

$$\sigma(x) = \frac{x''^2\cdot\sin^2 1''\cdot M}{6}.$$

Тогда, замечая, что

$$\frac{x''^2\cdot\sin^2 1''\cdot M}{3} = 2\sigma(x),$$

а

$$\frac{x''^2\cdot\sin^2 1''\cdot M}{2} = 3\sigma(x),$$

равенства (IV) окончательно перепишем:

$$\left.\begin{aligned} \lg\sin x &= \lg x'' + \lg\sin 1'' - \sigma(x) \\ \lg\operatorname{tg} x &= \lg x'' + \lg\sin 1'' + 2\sigma(x) \\ \lg\cos(x) &= -3\sigma(x) \end{aligned}\right\}. \tag{51}$$

Формулы (51) и суть так называемые формулы логарифмических поправок. Логарифмические поправки $\sigma(x)$ обыкновенно даются в единицах последнего логарифмического знака либо по аргументу x, либо по аргументу $\lg x''$; иногда же оба аргумента даются одновременно.

В таблицах логарифмов часто вместо $\sigma(x)$ даются величины S и T. Эти величины определяются формулами:

$$\begin{aligned} S &= \lg\sin 1'' - \sigma(x), \\ T &= \lg\sin 1'' + 2\sigma(x). \end{aligned}$$

С применением этих величин формулы (51) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \lg\sin x &= \lg x'' + S, \\ \lg\operatorname{tg} x &= \lg x'' + T, \\ \lg\cos x &= S - T. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

В астрономии, где часто встречаются углы, выраженные в часовых единицах, применяются формулы

$$\left.\begin{aligned} \lg\sin x^s &= \lg x^s + \lg\sin 1^s - \sigma(x^s), \\ \lg\operatorname{tg} x^s &= \lg x^s + \lg\sin 1^s + 2\sigma(x^s), \\ \lg\cos x^s &= -3\sigma(x^s), \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

где

$$\sigma(x^s) = \frac{x^{s2}\cdot\sin^2 1^s\cdot M}{6}.$$

Вывод этих формул совершенно аналогичен выводу формул (51).

По формулам (51) и (53) находятся логарифмы функций по заданному углу. Для нахождения же угла по заданным функциям эти формулы придется переписать таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \lg x'' &= \lg\sin x - \lg\sin 1'' + \sigma(x''), \\ \lg x'' &= \lg\operatorname{tg} x - \lg\sin 1'' - 2\sigma(x'') \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

и аналогично

$$\left.\begin{aligned} \lg x^s &= \lg\sin x - \lg\sin 1^s + \sigma(x^s), \\ \lg x^s &= \lg\operatorname{tg} x - \lg\sin 1^s - 2\sigma(x^s). \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Пределы пользования логарифмическими поправками легко установить, исследуя величины остаточных членов разложений (IV). Можно считать, что при вычислении с семизначными логарифмами применение этих поправок допустимо для углов до $2^1/_2{}^\circ$, при шестизначном вычислении — до 4° и при пятизначном — до 7°.

Глава VI

ПЛОЩАДЬ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. СФЕРИЧЕСКИЙ ИЗБЫТОК

§ 31. Площадь поверхности сферического треугольника

Лемма. *Площадь поверхности сферического двуугольника $AMA'N$* (черт. 50) *равняется удвоенной площади большого круга, умноженной на отношение угла этого двуугольника A к двум прямым углам.*

Обозначим через S_A площадь поверхности сферического двуугольника, через R — радиус данной сферы. Тогда лемму можно записать следующей формулой:

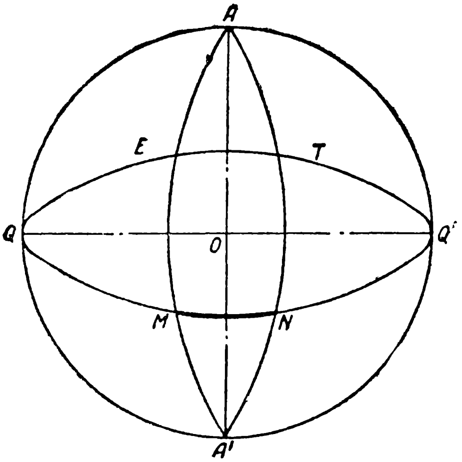
$$S_A = 2\pi R^2 \cdot \frac{A}{180^\circ}.$$

Доказательство. Очевидно, площадь поверхности сферического двуугольника $AMA'N$ так относится к площади всего шара, как дуга MN, для которой вершина A является полюсом и которая заключена между сторонами двуугольника, к длине окружности большого круга $QMNQ'TE$, т. е.

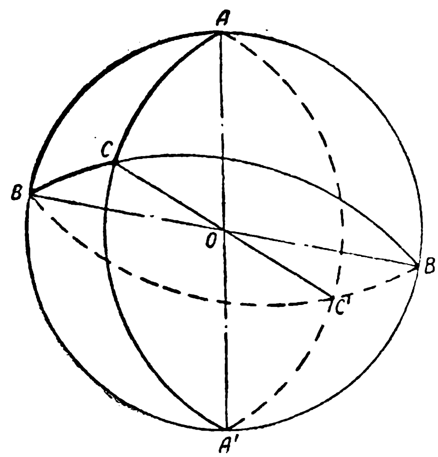
$$S_A : 4\pi R^2 = \smile MN : 2\pi R;$$

или, выражая дугу MN и окружность $QMNQ'TE$ в градусах и помня, что дуга MN является мерой угла A, т. е. что $\smile MN = A$,

$$S_A : 4\pi R^2 = A : 360^\circ.$$



Черт. 50



Черт. 51

Отсюда, решая пропорцию, находим:

$$S_A = \frac{4\pi R^2 \cdot A}{360^\circ}$$

или

$$S_A = 2\pi R^2 \cdot \frac{A}{180^\circ}. \qquad (56)$$

Следует помнить, что в этой формуле угол A выражен в градусах (°).

Теорема. *Площадь поверхности сферического треугольника ABC* (черт. 51) *равняется площади большого круга, умноженной на отношение сферического избытка к двум прямым углам.*

Обозначим $\triangle$ площадь треугольника ABC; тогда теорема запишется в виде формулы:

$$\triangle = \pi R^2 \frac{\varepsilon}{180^\circ}.$$

Доказательство. Продолжим каждую из сторон сферического треугольника ABC до полной окружности большого круга и отметим (черт. 51) точки их взаимного пересечения A', B' и C', соответственно диаметрально противоположные его вершинам A, B и C.

Таким образом, мы на сфере получим двуугольники

$$S_A = ABA'C,$$
$$S_B = BCB'A,$$
$$S_C = CA'C'B',$$

а также сферический треугольник $A'C'B'$, симметричный с данным треугольником ABC. Симметричность этих треугольников вытекает из равенства и неодинакового расположения их сторон, так как на основании чертежа легко доказать, что

$$A'B' = AB,$$
$$B'C' = BC,$$
$$C'A' = CA.$$

Так как симметричные треугольники равновелики, то, употребляя для обозначения равновеликости знак равенства, можем записать:

$$A'B'C' = ABC. \tag{а}$$

Представим каждый из двуугольников S_A, S_B и S_C, как сумму двух треугольников:

$$\left.\begin{aligned} S_A &= ABA'C = ABC + BCA' = 2\pi R^2 \frac{A}{180^\circ} \\ S_B &= BCB'A = ABC + CAB' = 2\pi R^2 \frac{B}{180^\circ} \end{aligned}\right\}, \tag{б}$$

$$S_C = CA'C'B' = A'B'C' + B'A'C = 2\pi R^2 \frac{C}{180^\circ}.$$

Последнее равенство, в силу соотношения (а), можно переписать так:

$$S_C = CA'C'B' = ABC + B'A'C = 2\pi R^2 \frac{C}{180^\circ}. \tag{в}$$

Складывая теперь почленно равенства (б) и (в), имеем:

$$S_A + S_B + S_C = 3ABC + BCA' + CAB' + B'A'C = 2\pi R^2 \frac{A+B+C}{180^\circ}; \tag{г}$$

но

$$ABC + BCA' + CAB' + B'A'C = 2\pi R^2,$$

так как эти треугольники своей площадью заполняют половину сферы. С другой стороны, как известно,

$$A + B + C = 180^\circ + \varepsilon,$$

где ε — сферический избыток треугольника ABC [см. § 8, форм. (10)]. Таким образом, равенство (г) можно переписать так:

$$2\,ABC + 2\pi R^2 = 2\pi R^2 \cdot \frac{180^\circ + \varepsilon}{180^\circ},$$

или

$$2\,ABC + 2\pi R^2 = 2\pi R^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{180^\circ}\right),$$

откуда, обозначая площадь треугольника ABC через $\triangle$, получаем:

$$\triangle = \pi R^2 \cdot \frac{\varepsilon}{180^\circ}, \tag{57}$$

что и требовалось доказать. При этом сферический избыток ε должен быть выражен, очевидно, в градусах.

Следствие. *Сферический избыток пропорционален площади сферического треугольника.*

Доказательство. Из формулы (57) имеем

$$\varepsilon = \frac{180^\circ}{\pi R^2} \cdot \triangle. \tag{58}$$

Написанное равенство доказывает предыдущее положение, так как дробь $\frac{180^\circ}{\pi R^2}$, являющаяся в формуле (58) коэфициентом пропорциональности, есть для данной сферы величина постоянная.

У треугольника с малыми сторонами, площадь которого весьма мала по сравнению с поверхностью сферы, сферический избыток также есть величина малая. Тогда его удобнее выражать не в градусах (°), а в секундах (″), т. е. дробь $\frac{180°}{\pi R^2}$ следует заменить выражением $\frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi R^2}$.

Таким образом формула (58) для треугольника с малыми сторонами перепишется:

$$\varepsilon'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi R^2} \cdot \triangle.$$

Однако выражение $\frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi}$ есть не что иное, как число секунд в радиане, т. е. ρ''.

Следовательно, формулу (58) можно переписать так:

$$\varepsilon'' = \frac{\rho''}{R^2} \triangle. \qquad (58')$$

Обозначая $\frac{\rho''}{2R^2}$ через f, т. е. полагая

$$f = \frac{\rho''}{2R^2}, \qquad (59)$$

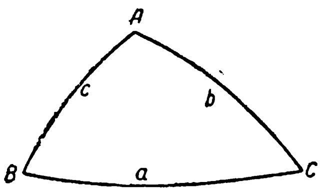
для треугольника с малыми сторонами будем окончательно иметь:

$$\varepsilon'' = 2f \triangle, \qquad (60)$$

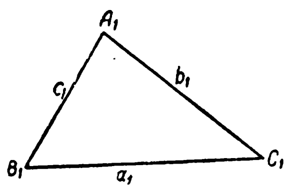
где ε'' и f выражены в градусных секундах (″).

§ 32. Теорема о сферическом треугольнике с малыми сторонами

Пусть дан сферический треугольник ABC, стороны которого весьма малы по сравнению с радиусом сферы R (черт. 52). Для такого треугольника справедлива следующая ***теорема Лежандра.***



Черт. 52



Черт. 53

Если построить плоский треугольник $A_1B_1C_1$ (черт. 53), *у которого все три стороны соответственно равны трем выпрямленным сторонам сферического, то углы его с весьма малой погрешностью, порядка* $\left(\frac{1}{R}\right)^4$, *можно принять соответственно равными углам сферического треугольника* ABC, *уменьшенным на одну треть сферического избытка.*

Обозначим стороны треугольника $A_1B_1C_1$ буквами a_1, b_1 и c_1 соответственно. По условию теоремы

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{a_1}{R} \\ b &= \frac{b_1}{R} \\ c &= \frac{c_1}{R} \end{aligned}\right\}, \qquad (a)$$

где a, b и c — стороны сферического треугольника ABC в отвлеченной мере (в радианах).

Принимая, как обычно,

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

и

$$p_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1+c_1),$$

на основании равенств (а) будем, очевидно, иметь

$$p=\frac{p_1}{R}. \tag{б}$$

Обозначая, по предыдущему, площадь треугольника ABC через $\triangle$ и аналогично площадь треугольника $A_1B_1C_1$ через $\triangle_1$, по известной формуле, можем записать:

$$\triangle_1=\sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}. \tag{в}$$

Для *доказательства* теоремы найдем с точностью до малых третьего порядка включительно относительно $\frac{1}{R}$ разность каких-либо соответствующих углов плоского и сферического треугольников, например A_1 и A. Для этого сначала найдем с указанной выше точностью выражение для $\sin\frac{A_1-A}{2}$.

Очевидно, имеем

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=\sin\frac{A_1}{2}\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{A_1}{2}\sin\frac{A}{2}.$$

Входящие в эту формулу синусы и косинусы половинных углов треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC выразим по известным формулам полупериметра плоской и сферической тригонометрии [см. § 23, форм. (24) и (25)], а именно:

$$\sin\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{(p_1-b_1)(p_1-c_1)}{b_1c_1}},$$

$$\cos\frac{A_1}{2}=\sqrt{\frac{p_1(p_1-a_1)}{b_1c_1}},$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p_1-b_1}{R}\sin\frac{p_1-c_1}{R}}{\sin\frac{b_1}{R}\sin\frac{c_1}{R}}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p_1}{R}\sin\frac{p_1-a_1}{R}}{\sin\frac{b_1}{R}\sin\frac{c_1}{R}}}.$$

Таким образом получим:

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=\sqrt{\frac{(p_1-b_1)(p_1-c_1)}{b_1c_1}}\cdot\sqrt{\frac{\sin\frac{p_1}{R}\sin\frac{p_1-a_1}{R}}{\sin\frac{b_1}{R}\sin\frac{c_1}{R}}}-$$

$$-\sqrt{\frac{p_1(p_1-a_1)}{b_1c_1}}\cdot\sqrt{\frac{\sin\frac{p_1-b_1}{R}\sin\frac{p_1-c_1}{R}}{\sin\frac{b_1}{R}\sin\frac{c_1}{R}}};$$

или, перемножая радикалы и вынося общие множители за скобку,

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=\frac{1}{\sqrt{b_1c_1\sin\frac{b_1}{R}\sin\frac{c_1}{R}}}\left[\sqrt{(p_1-b_1)(p_1-c_1)\sin\frac{p_1}{R}\sin\frac{p_1-a_1}{R}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{p_1(p_1-a_1)\sin\frac{p_1-b_1}{R}\sin\frac{p_1-c_1}{R}}\right].$$

Синусы малых дуг $\frac{b_1}{R}$, $\frac{c_1}{R}$, $\frac{p_1}{R}$, $\frac{p_1-a_1}{R}$, $\frac{p_1-b_1}{R}$, $\frac{p_1-c_1}{R}$ разложим в ряд [см. § 29, первую из формул (39)]. При этом мы, согласно условию, будем сохранять только члены третьего порядка относительно $\frac{1}{R}$.

Таким образом, мы будем иметь:

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=\frac{1}{\sqrt{b_1c_1\left(\frac{b_1}{R}-\frac{b_1^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c_1}{R}-\frac{c_1^3}{6R^3}\right)}}\times$$
$$\times\left\{\sqrt{(p_1-b_1)(p_1-c_1)\left(\frac{p_1}{R}-\frac{p_1^3}{6R^3}\right)\left[\frac{p_1-a_1}{R}-\frac{(p_1-a_1)^3}{6R^3}\right]}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{p_1(p_1-a_1)\left[\frac{p_1-b_1}{R}-\frac{(p_1-b_1)^3}{6R^3}\right]\left[\frac{p_1-c_1}{R}-\frac{(p_1-c_1)^3}{6R^3}\right]}\right\}.$$

Вынесем общих множителей за скобки и из-под знака радикала, а также сократим числителя и знаменателя дроби перед фигурной скобкой на $\frac{1}{R}$:

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt{p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)}}{b_1c_1\sqrt{\left(1-\frac{b_1^2}{6R^2}\right)\left(1-\frac{c_1^2}{6R^2}\right)}}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{p_1^2}{6R^2}\right)\left[1-\frac{(p_1-a_1)^2}{6R^2}\right]}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\left[1-\frac{(p_1-b_1)^2}{6R^2}\right]\left[1-\frac{(p_1-c_1)^2}{6R^2}\right]}\right\}.$$

Заменим радикал в числителе дроби перед фигурной скобкой на основании формулы (в) и перемножим двучлены в скобках, стоящие под остальными радикалами. При умножении в произведении будем сохранять только члены до 3-го порядка малости включительно.

После этих преобразований у нас получится:

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=\frac{\Delta_1}{b_1c_1\sqrt{1-\frac{b_1^2+c_1^2}{6R^2}}}\left\{\sqrt{1-\frac{p_1^2+(p_1-a_1)^2}{6R^2}}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{1-\frac{(p_1-b_1)^2+(p_1-c_1)^2}{6R^2}}\right\}.$$

Представляя корни как степени $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\text{ и }\frac{1}{2}\right)$ и разлагая их по биному Ньютона в ряд, сохраняя при этом, как и раньше, только члены до 3-го порядка включительно, после небольших упрощений найдём:

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=\frac{\Delta_1}{b_1c_1}\left(1+\frac{b_1^2+c_1^2}{12R^2}\right)\frac{(p_1-b_1)^2+(p_1-c_1)^2-p_1^2-(p_1-a_1)^2}{12R^2}.$$

Числитель последней дроби преобразуем отдельно:

$$(p_1-b_1)^2+(p_1-c_1)^2-p_1^2-(p_1-a_1)^2=$$
$$=-(2p_1-b_1)b_1+(2p_1-a_1-c_1)(a_1-c_1)=-(a_1+c_1)b_1+b_1(a_1-c_1)=$$
$$=-a_1b_1-b_1c_1+a_1b_1-b_1c_1=-2b_1c_1.$$

Следовательно, можем переписать:

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=\frac{\Delta_1}{b_1c_1}\left(1+\frac{b_1^2+c_1^2}{12R^2}\right)\cdot\frac{-2b_1c_1}{12R^2},$$

или после сокращения:

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=-\Delta_1\left(1+\frac{b_1^2+c_1^2}{12R^2}\right)\cdot\frac{1}{6R^2},$$

или, с положенной точностью,

$$\sin\frac{A_1-A}{2}=-\frac{\Delta_1}{6R^2}.$$

Так как угол $\frac{A_1-A}{2}$ есть величина малая, то, разлагая $\sin\frac{A_1-A}{2}$ в ряд с прежней точностью, будем иметь

$$\frac{A_1-A}{2}=-\frac{\Delta_1}{6R^2}$$

или

$$A_1-A=-\frac{\Delta_1}{3R^2},$$

откуда

и аналогично

$$\left.\begin{aligned} A_1&=A-\frac{\Delta_1}{3R^2}\\ B_1&=B-\frac{\Delta_1}{3R^2}\\ C_1&=C-\frac{\Delta_1}{3R^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (г)$$

Складывая почленно эти три равенства, получаем:

$$A_1+B_1+C_1=A+B+C-\frac{\Delta_1}{R^2}. \qquad (д)$$

Но $A_1+B_1+C_1=180°$, как сумма углов плоского треугольника, а $A+B+C=180°+\varepsilon$, как сумма углов сферического треугольника. Следовательно, равенство (д) перепишется:

$$180°=180°+\varepsilon-\frac{\Delta_1}{R^2},$$

т. е.

$$\frac{\Delta_1}{R^2}=\varepsilon. \qquad (е)$$

Внося выражение (е) в формулы (г), можем последние переписать окончательно так:

$$\left.\begin{aligned} A_1&=A-\frac{1}{3}\varepsilon\\ B_1&=B-\frac{1}{3}\varepsilon\\ C_1&=C-\frac{1}{3}\varepsilon \end{aligned}\right\}, \qquad (61)$$

чем и доказывается теорема.

Следствие 1. *Сферический треугольник с малыми сторонами можно с весьма большой точностью при решении заменить, не изменяя длины его сторон, плоским с углами, уменьшенными на одну треть сферического избытка.*

Следствие 2. *Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с той же самой степенью точности можно рассматривать как равновеликие, т. е. полагать*

$$\Delta=\Delta_1.$$

Доказательство. На основании формулы (е) имеем

$$\varepsilon=\frac{\Delta_1}{R^2}. \qquad (е')$$

В этой формуле сферический избыток выражен в отвлеченной мере. Чтобы выразить его в градусных секундах, достаточно правую и левую части равенства (е') умножить на число секунд в радиане, т. е. на $\rho''=206265''$.

Тогда формула (е') примет вид:

$$\varepsilon'' = \frac{\Delta_1 \rho''}{R^2}.$$

Но по формуле (58') предыдущего параграфа мы имели

$$\varepsilon'' = \frac{\rho''}{R^2} \cdot \Delta.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta_1 \rho''}{R^2} = \frac{\rho''}{R^2} \cdot \Delta,$$

т. е.

$$\Delta_1 = \Delta. \tag{ж}$$

§ 33. Вычисление сферического избытка треугольника с малыми сторонами

В высшей геодезии при вычислении сетей триангуляции I класса для решения треугольников на земной поверхности прибегают к следующему приему.

Малую часть поверхности земного сфероида, занимаемую данным треугольником ABC, принимают за часть сферы с радиусом R, где $R = \frac{1}{3}(R_a + R_b + R_c)$, а R_a, R_b и R_c — средние значения радиуса кривизны поверхности земного сфероида в каждой из вершин треугольника ABC. Эти величины, в свою очередь, как это излагается в курсе высшей геодезии, вычисляются по формуле

$$R = \sqrt{MN},$$

где M и N — главные радиусы кривизны сфероида в данной точке.

При решении треугольников в сетях низших классов часто R принимают постоянным для целой зоны.

Таким образом, треугольник на земной поверхности рассматривается как сферический. Так как стороны его весьма малы по сравнению с радиусом Земли, то к нему может быть применена теорема Лежандра, т. е. этот треугольник после уменьшения каждого из его углов на $^1/_3\,\varepsilon$ можно решать как плоский *).

Хотя все углы треугольника ABC известны из геодезических измерений, однако, вычислять сферический избыток по формуле $\varepsilon = (A + B + C) - 180°$ не представляется возможным, так как сумма непосредственно измеренных углов отличается от $(180° + \varepsilon)$ вследствие неизбежных погрешностей измерения этих углов.

Поэтому для вычисления пользуются формулой (60), которую на основании следствия 2 теоремы Лежандра (см. § 32) можно переписать в виде:

$$\varepsilon'' = 2f\Delta_1, \tag{60'}$$

т. е. заменив по равенству (ж) предыдущего параграфа Δ на Δ_1.

Так как ε'' есть величина малая, то при вычислении площади треугольника ABC, принимаемого за плоский, стороны и углы этого треугольника нужно знать лишь приближенно. Для этого могут быть взяты значения их, получаемые из предварительной обработки триангуляции, т. е. до введения поправок за редукции, за приведения и пр., так как это вычисление достаточно вести с 4 десятичными знаками.

Здесь могут быть два случая:

I. В треугольнике ABC известны две стороны a_1 и b_1 и угол между ними C_1 или C (что в пределах точности вычисления безразлично). Тогда имеем для площади треугольника

$$\Delta_1 = \frac{a_1 b_1 \sin C}{2},$$

*) Треугольники с малыми сторонами можно решать также по способу аддитаментов, Об этом см. § 41.

и следовательно, формула (60′) перепишется:

$$\varepsilon'' = f \cdot a_1 b_1 \sin C. \tag{62}$$

Тот же самый результат может быть получен непосредственно с помощью первой формулы Каньоли [см. § 26 форм. (36)], т. е. формулы

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin C.$$

Так как ε, a, b и c суть величины малые, то с достаточной точностью мы можем синусы и косинусы этих малых дуг заменить первыми членами разложений в ряды; положив также

$$a = \frac{a_1}{R} \text{ и } b = \frac{b_1}{R},$$

представим нашу формулу в виде:

$$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{a_1}{2R} \cdot \frac{b_1}{2R} \cdot \sin C$$

или, после сокращения,

$$\varepsilon = \frac{a_1 b_1 \sin C}{2R^2}.$$

Здесь ε получилось в радианах; чтобы получить его в секундах, умножим правую и левую часть равенства на ρ''. Тогда, пользуясь обозначением формулы (59), опять придем к формуле (62), т. е. снова получим:

$$\varepsilon'' = f \cdot a_1 b_1 \sin C.$$

II. В треугольнике ABC известна сторона a_1 и прилежащие к ней углы B и C. Тогда

$$\triangle_1 = \frac{a_1^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}$$

и

$$\varepsilon'' = f\,\frac{a_1^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin(B+C)}. \tag{63}$$

Во всех случаях f выражается здесь формулой (59), т. е.

$$f = \frac{\rho''}{2R^2}.$$

В зависимости от географического положения треугольника на земной поверхности величина R, а следовательно, и f меняются. Для облегчения вычисления f имеются специально составленные таблицы, из которых эта величина выбирается по аргументу средней широты треугольника ABC.

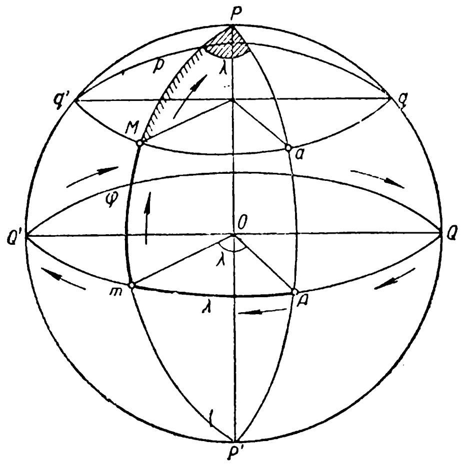
Глава VII

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ

§ 34. Первая система сферических координат (полярная)

Пусть нам необходимо определить положение точки M на поверхности сферы (черт. 54).

Решая такую же задачу на плоскости, мы проводим две взаимно перпендикулярные прямые, называемые осями координат, и относительно этих осей определяем положение точки. На сфере мы можем взять для этой цели две окружности больших кругов, взаимно перпендикулярные друг другу. Проведем на нашей сфере (черт. 54) прежде всего большой круг QAQ', который будет играть на сфере роль, аналогичную роли оси X на плоскости, и условимся называть его основным кругом системы. Отметим геометрический полюс круга QAQ', т. е. точку P, и будем называть его полюсом системы. Чтобы определить положение точки M относительно основного круга системы QAQ', опустим сферический перпендикуляр из точки M на этот большой круг. Для этой цели соединим полюс системы — точку P — с точкой M дугою большого круга и продолжим эту дугу до противоположного полюса (см. § 5, задача 4). Полученная полуокружность PMP' называется меридианом или кругом широты. Сферическое расстояние точки M от большого круга QAQ', измеренное по кругу широты, т. е. дуга mM, и будет первою сферическою координатой точки M. Будем называть ее широтой и обозначать буквою φ. Широты отсчитываются от круга QAQ' от 0° до 90°, считаются по направлению к полюсу P положительными, а в противоположном направлении — отрицательными. Вместо широты φ можно, в качестве первой координаты, взять также дугу $PM = p$, которую называют полярным расстоянием точки M. Широта и полярное расстояние связаны между собой простым соотношением:



Черт. 54

$$\varphi + p = 90°.$$

Полярные расстояния отсчитываются от полюса системы P по направлению к точке P' от 0° до 180°.

Так же, как и на плоскости, для определения положения точки на сфере одной координаты недостаточно. На плоскости одна координата определяет геометрическое место точек, а именно, прямую, параллельную одной из осей координат. Посмотрим, что мы имеем в случае сферы. Проведем через точку M плоскость, параллельную плоскости большого круга QAQ'; в сечении со сферой эта плоскость даст малый круг qMq', параллельный большому кругу QAQ'. Таким образом, по самому построению все точки малого круга qMq' будут лежать на одном и том же сферическом расстоянии от большого круга QAQ', т. е. мы будем иметь:

$$Mm = \smile Aa = \smile Qq = \smile Q'q' = \text{и т. д.} = \varphi,$$

и, следовательно, все точки малого круга qMq' имеют одну и ту же широту φ. Иначе говоря, одна координата на сфере, так же как и на плоскости, определяет не одну точку, а геометрическое место точек, а именно, в случае широты, малый круг на сфере, параллельный основному кругу QAQ'.

Чтобы получить вторую координату, поступаем следующим образом. Проведем прежде всего половину окружности большого круга $PaAP'$, которая будет сферическим перпендикуляром к большому кругу QAQ', так как проходит через полюс этого круга, точку P (см. § 5, следствие 2). Эта полуокружность играет в нашей системе координат роль, аналогичную роли оси Y в декартовой системе координат на плоскости. Мы будем условно называть ее главным кругом системы. Точка пересечения обоих кругов, основного и главного, точка A, соответствует началу координат, точке O на плоскости; мы назовем ее главной или начальной точкой системы.

Вторую координату можно геометрически выразить несколькими различными способами. Дадим ей такое определение, из которого вытекали бы все остальные. Вторая координата называется долготой и обозначается буквою λ.

Долгота есть двугранный угол между плоскостью главного круга системы и плоскостью круга широты определяемой точки M, т. е. двугранный угол $APP'M$. Так как двугранный угол измеряется своим линейным углом, то также

$$\angle AOm = \lambda.$$

Той же величине равняется и дуга Am, на которую этот центральный угол опирается, т. е.

$$\smile Am = \lambda.$$

Исходя из этого геометрического образа, можно определить долготу как сферическое расстояние от главной точки A до круга широты PMP', измеренное по основному кругу. Далее той же величине λ равняется еще сферический угол между главным кругом и кругом широты с вершиной в полюсе системы, т. е.

$$\text{сф. } \angle APM = \lambda.$$

С точки зрения аналитической геометрии на сфере подходящими будут два последние способа выражения долготы, т. е. с помощью дуги основного круга QAQ' и с помощью сферического угла при полюсе системы. Имея в виду первый из них, скажем, что долготы отсчитываются от главной точки системы A в одних случаях по ходу часовой стрелки, как на черт. 54, в других случаях — наоборот, против хода часовой стрелки, по усмотрению исследователя, в обоих случаях от $0°$ до $360°$. Иногда также счет ведется в обе стороны от точки A, от $0°$ до $180°$, причем в одну какую-либо сторону они считаются положительными, а в противоположную — отрицательными. Системы, в которых долготы возрастают, глядя из полюса системы, по ходу часовой стрелки, называются правыми, в обратном случае — левыми.

Итак, если взять, в качестве сферических координат, дуги mM и Am, т. е. φ и λ, выражая обе величины д у г а м и, то выявляется некоторое внешнее сходство между рассматриваемой сферической системой координат и прямоугольной декартовой системой координат на плоскости. Однако если вместо широты φ взять полярное расстояние p, т. е. дугу PM, а долготу λ выразить сферическим у г л о м APM, то обнаруживается большое внутреннее сродство этой сферической системы координат с полярною системою координат на плоскости. При этом полюс сферической системы P соответствует полюсу полярной системы координат, главный круг сферической системы PAP' играет роль, аналогичную полярной оси, дуга круга широты $PM = p$ может быть названа сферическим радиусом-вектором точки M, долгота λ соответствует полярному углу или амплитуде.

Отметим также, что описанная нами система сферических координат может быть получена из системы полярных координат в пространстве *), если положить $\rho = \text{const}$ или, в частном случае, $\rho = 1$.

Очевидно, ее можно с полным правом назвать п о л я р н о й системой сферических координат.

Кроме этой системы координат, на сфере, так же, как и на плоскости, может быть построено множество других систем, одну из которых мы рассмотрим ниже в § 37.

§ 35. Преобразование полярных сферических координат

Система полярных сферических координат будет геометрически вполне определена, если даны полюс системы и главный круг и указано направление возрастания долгот. Полюс системы P определяет основной круг. Чтобы определить главный круг системы, необходимо и достаточно указать какие-либо две точки, не лежащие на одном и том же диаметре, через которые он про-

---

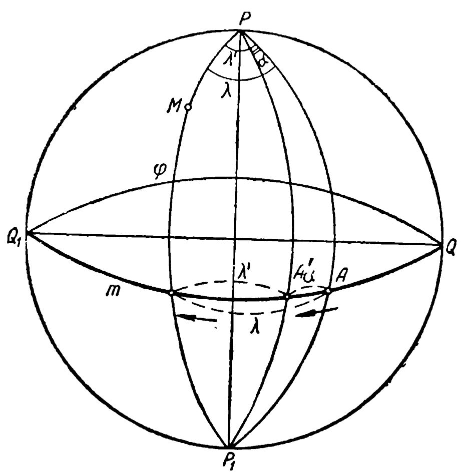
*) О полярных координатах в пространстве см., например, Б. К. Млодзеевский' Основы аналитической геометрии в пространстве, изд. 2-е, Москва, 1911 г., стр. 12 и след.

ходит. Одной из этих точек, естественно, является полюс системы P. Другую точку можно выбрать произвольно, однако выгоднее всего для этой цели брать главную точку системы A. Ввиду этих соображений мы будем в дальнейшем определять такую систему координат точками P и A и будем это обозначать сокращенно символом $[PA]$.

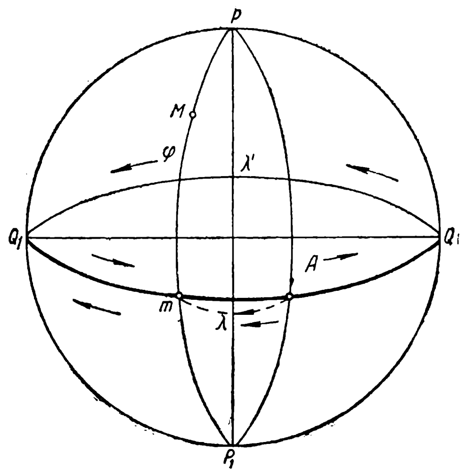
Мы рассмотрим сперва по отдельности преобразование главного круга, преобразование направления счета долгот и преобразование полюса, а затем общие преобразования в разных комбинациях.

1. Преобразование главного круга

Пусть полюс системы P и направление возрастания долгот остаются без изменения, а главная точка A (черт. 55) перемещается, передвигаясь на дугу $AA' = \alpha$ в точку A'. Вместе с этим главный круг переходит в положение $PA'P_1$, поворачиваясь в направлении возрастания долгот на угол $APA' = \alpha$. Будем здесь и в дальнейшем обозначать координаты в системе, полученной после преобразования, буквами φ' и λ'.



Черт. 55



Черт. 56

Тогда для всякой точки M, как это непосредственно ясно из чертежа 55, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= \varphi, \\ \lambda' &= \lambda - \alpha. \end{aligned}\right\}$$

И наоборот, старые координаты через новые выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi', \\ \lambda &= \lambda' + \alpha. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом в данном случае широта φ любой точки M остается без изменения, а долгота уменьшается на дугу (или угол) α.

2. Преобразование направления счета долгот

Пусть полюс системы P и главная точка A остаются без изменения, а направление возрастания долгот меняется на обратное (черт. 56).

Тогда будем иметь:

$$\lambda = \smile Am, \text{ а } \lambda' = \smile AQQ_1m,$$

широта же φ остается без изменения. Формулами это можно записать:

$$\varphi' = \varphi, \text{ а } \lambda' = 360° - \lambda,$$

или, иначе, применяя отрицательные долготы,

$$\lambda' = -\lambda.$$

И наоборот

$$\varphi = \varphi' \text{ и } \lambda = -\lambda'.$$

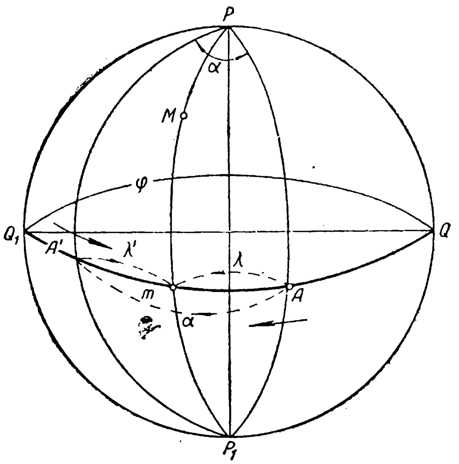
Итак, при преобразовании направления счета долгот долгота меняет свой знак на обратный.

3. Преобразование главного круга и направления счета долгот

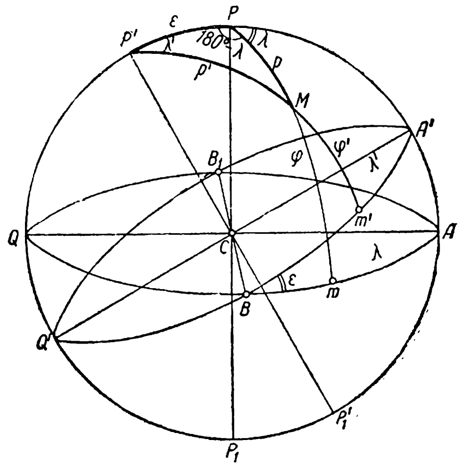
Пусть теперь точка A переходит в точку A', и направление возрастания долгот в новой системе координат $[PA']$ противоположно направлению возрастания долгот в старой системе $[PA]$, а полюс системы остается неподвижным в точке P. Взяв какую-нибудь точку M и построив ее координаты в старой и в новой системах координат (черт. 57), находим

$$\begin{aligned} \varphi &= \smile mM = \varphi', \\ \lambda &= \smile Am, \\ \lambda' &= \smile A'm = \smile AA' - \smile Am = \alpha - \lambda, \end{aligned}$$

причем буквою α обозначена дуга AA', измеряющая перемещение главной точки системы из точки A в новое положение, т. е. в точку A'. Можно ска-



Черт. 57



Черт. 58

зать также, что на угол $\alpha = APA'$ мы поворачиваем систему $[PA]$ вокруг оси PP_1. Вообще, преобразование главного круга есть, собственно говоря, не что иное, как поворот системы около прямой PP_1, которую можно назвать поэтому геометрической (пространственной) осью системы (сравни § 4).

Итак, в этом случае

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi, \\ \lambda' &= \alpha - \lambda, \end{aligned}$$

и наоборот,

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi', \\ \lambda &= \alpha - \lambda'. \end{aligned}$$

4. Преобразование полюса

Дана система координат $[PA]$ (черт. 58). Не поворачивая систему около ее геометрической оси, т. е. прямой PP_1, и не изменяя направления возрастания долгот, т. е. положительного направления на основном круге AQ, перенесем полюс из точки P в точку P', переместив его по большому кругу $APQP_1$ на дугу $PP' = \varepsilon$. Тогда ось системы займет положение $P'P'_1$, а основной круг системы AQ займет положение $A'Q'$, и мы будем иметь новую систему $[P'A']$. Построив для какой-нибудь точки M ее координаты в старой и в новой системах, найдем:

$$\varphi = \smile mM, \quad p = \smile PM, \quad \lambda = \smile AM = \text{сф.}\angle APM;$$
$$\varphi' = \smile m'M, \quad p' = \smile P'M, \lambda' = \smile A'M' = \text{сф.}\angle A'P'M.$$

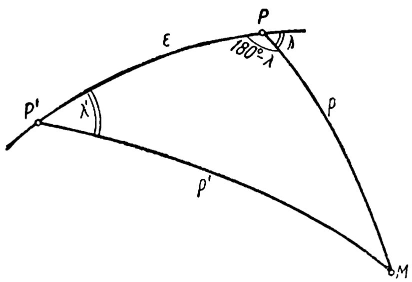
При этом мы получили сферический треугольник MPP', вершинами которого служат данная точка M и полюсы P и P' старой и новой систем координат. Этот треугольник, который называется полярным треугольником точки M, изображен отдельно в более крупном масштабе на черт. 59. Из чертежей 58 и 59 мы видим, что стороны этого треугольника соответственно равны:

$$PM = p, \; P'M = p' \text{ и } PP' = \varepsilon,$$

а два его угла

$$\angle PP'M = \lambda' \text{ и } P'PM = 180° - \lambda.$$

Если нам даны p, λ и ε, то в полярном треугольнике нам известны две стороны и угол между ними (2-й случай решения косоугольных сферических треугольников, см. § 27). Решая его одним из указанных в § 27 способов, мы можем найти искомые координаты точки M в новой системе координат, т. е. p' и λ'. Так как здесь требуется определить только сторону и один из углов, то решение удобнее всего вести по основным формулам [§ 27, 2-й случай, решение 1)]. При вычислении на арифмометре рабочими будут формулы (см. там же, 2-й случай, решение 1а):



Черт. 59

$$\left.\begin{aligned} \cos p' &= \cos p \cos\varepsilon - \sin p \sin\varepsilon \cos\lambda \\ \operatorname{ctg}\lambda' &= \frac{\operatorname{ctg} p \sin\varepsilon}{\sin\lambda} + \cos\varepsilon \operatorname{ctg}\lambda \end{aligned}\right\}.$$

При вычислении по таблицам логарифмов удобнее всего воспользоваться так называемой астрономической системой формул (там же, 2-й случай, решение 1б), а именно:

$$\left.\begin{aligned} \cos p' &= \cos p \cos\varepsilon - \sin p \sin\varepsilon \cos\lambda \\ \sin p' \sin\lambda' &= \sin p \sin\lambda \\ \sin p' \cos\lambda' &= \cos p \sin\varepsilon + \sin p \cos\varepsilon \cos\lambda \end{aligned}\right\}.$$

Проделывая с этими формулами все те преобразования, которые были указаны выше, т. е. деля вторую формулу на третью, а третью на первую, и вводя вспомогательный угол по формуле

$$\operatorname{ctg} M = \frac{\operatorname{ctg} p}{\cos\lambda}, \tag{I}$$

после аналогичных упрощений получим рабочие формулы в таком виде:

$$\operatorname{tg}\lambda' = \frac{\operatorname{tg}\lambda \sin M}{\sin(\varepsilon + M)}, \tag{II}$$

$$\operatorname{tg} p' = \frac{\operatorname{tg}(\varepsilon + M)}{\cos\lambda'}. \tag{III}$$

По формулам (I), (II) и (III) и можно вычислить новые координаты точки M по данным координатам ее в старой системе.

Для обратного перехода из того же треугольника для вычисления на арифмометре напишем формулы:

$$\left.\begin{aligned} \cos p &= \cos p' \cos\varepsilon + \sin p' \sin\varepsilon \cos\lambda', \\ \operatorname{ctg}\lambda &= \operatorname{ctg}\lambda' \cos\varepsilon - \frac{\operatorname{ctg} p' \sin\varepsilon}{\sin\lambda'} \end{aligned}\right\}$$

Для вычисления же по таблицам логарифмов („астрономическая" система формул) —

$$\left.\begin{aligned}\cos p &= \cos p' \cos \varepsilon + \sin p' \sin \varepsilon \cos \lambda',\\ \sin p \sin \lambda &= \sin p' \sin \lambda',\\ -\sin p \cos \lambda &= \cos p' \sin \varepsilon - \sin p' \cos \varepsilon \cos \lambda'.\end{aligned}\right\}$$

Преобразуя эти формулы по тому же плану с введением вспомогательного угла M' по соотношению

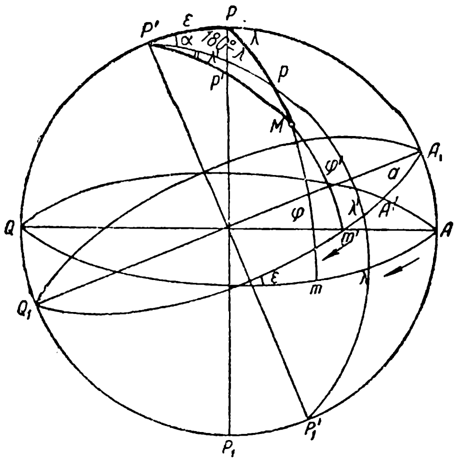
$$\operatorname{ctg} M' = \frac{\operatorname{ctg} p'}{\cos \lambda'}, \qquad (\mathrm{I}')$$

получим такие рабочие формулы:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \lambda' \sin M'}{\sin (M' - \varepsilon)} \qquad (\mathrm{II}')$$

и

$$\operatorname{tg} p = \frac{\operatorname{tg} (M' - \varepsilon)}{\cos \lambda} \qquad (\mathrm{III}')$$



Черт. 60

5. Одновременное преобразование полюса и главного круга без изменения направления счета долгот

Пусть дана система координат $[PA]$ (черт. 60). Перенесем полюс из точки P в точку P' по дуге $PP' = \varepsilon$, являющейся продолжением дуги AP главного круга системы $[PA]$. Тогда главная точка системы A перейдет в точку A_1, а основной круг системы AQ займет положение A_1Q_1. Теперь повернем систему $[P'A_1]$ вокруг ее геометрической оси $P'P_1'$ на угол α, т. е. переместим точку A_1 в точку A'. Требуется выразить координаты какой-нибудь точки M в этой новой системе $[P'A']$ через координаты ее в старой системе $[PA]$.

Построив координаты точки M в старой и в новой системах координат, будем иметь (черт. 60):

$$\varphi = \smile mM,\ p = \smile PM,\ \lambda = \smile Am = \text{сф.} \angle APM;$$
$$\varphi' = \smile m'M,\ p' = \smile P'M,\ \lambda' = \smile A'm' = \text{сф.} \angle A'P'M;$$
$$\alpha = \smile A_1A' = \text{сф.} \angle A_1P'A'.$$

При этих построениях у нас получился сферический треугольник $PP'M$, уже знакомый нам полярный треугольник точки M, вполне аналогичный треугольнику, изображенному на черт. 59. Стороны и углы полярного треугольника в данном случае имеют те же значения, как и в предыдущем, за исключением угла при точке P', который равняется сумме углов α и λ'. Таким образом можем записать для сторон:

$$PM = p,\ P'M = p' \text{ и } PP' = \varepsilon, \text{ а для углов:}$$
$$\angle P'PM = 180° - \lambda \text{ и } \angle PP'M = \alpha + \lambda'.$$

Очевидно, и в данном случае можно полярный треугольник $PP'M$ решать по только что рассмотренным формулам (см. предыдущий случай), подставляя только вместо угла λ' сумму $(\alpha + \lambda')$.

6. Одновременное преобразование полюса, главного круга и направления счета долгот

Данный случай отличается от предыдущего только тем, что в новой системе координат $[P'A']$ направление возрастания долгот противоположно направлению возрастания в старой системе $[PA]$. Поэтому, выполняя все те же построения, мы опять получим полярный треугольник $PP'M$ (см. черт. 61), у которого стороны и углы будут иметь прежние значения, кроме угла при точке P', который будет равен разности углов α и λ'. Итак, запишем:

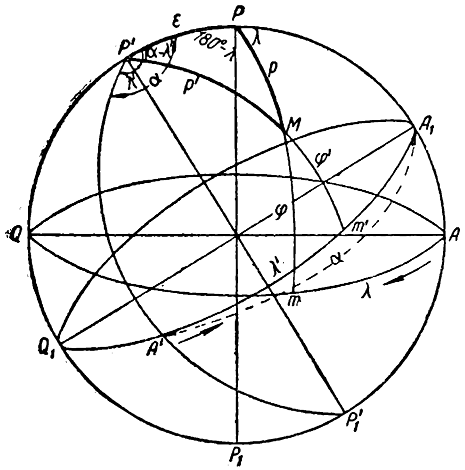
для сторон: $PM = p$, $P'M = p'$, $PP' = \varepsilon$,

а для углов: $\angle P'PM = 180° - \lambda$ и $\angle PP'M = \alpha - \lambda'$.

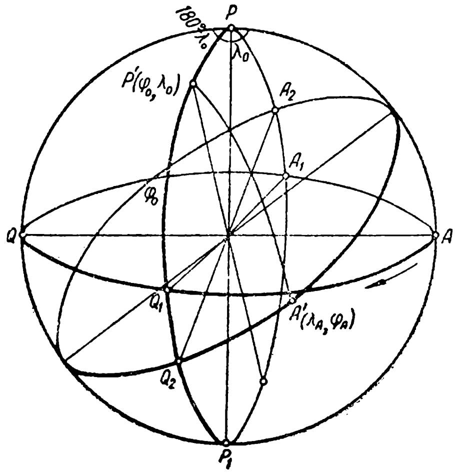
Ясно, что и в данном случае можно треугольник $PP'M$ решать по формулам, указанным для двух предыдущих случаев, только заменяя везде угол λ' разностью $(\alpha - \lambda')$.

7. Общий случай преобразования сферических координат

В общем случае положение новой системы сферических координат $[P'A']$ может быть определено координатами нового полюса P' и новой главной точки A' по отношению к старой системе координат $[PA]$. Обозначим координаты нового полюса P' в системе $[PA]$ φ_0 и λ_0, а координаты новой главной точки A' в той же системе — φ_A и λ_A. Координаты нового полюса могут иметь какие угодно значения; координаты точки A' связаны только



Черт. 61



Черт. 62

условием, что расстояние ее от точки P' равно 90°. Это условие, как будет показано в следующем параграфе, аналитически выражается уравнением:

$$\cos(\lambda_0 - \lambda_A) = -\operatorname{tg}\varphi_0 \operatorname{tg}\varphi_A,$$

где φ_0, λ_0, φ_A и λ_A имеют указанные значения.

Геометрически переход от системы $[PA]$ к системе $[P'A']$ может быть осуществлен следующим образом (черт. 62).

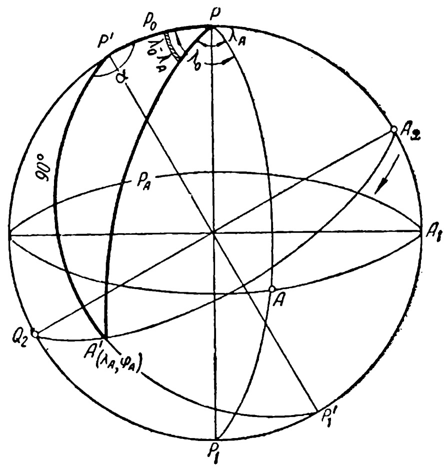
1. Повернем систему $[PA]$ около геометрической оси этой системы PP_1 в направлении, обратном направлению возрастания долгот в системе $[PA]$, т. е. для случая, изображенного на черт. 62, против хода часовой стрелки, до совпадения круга PAP_1 с продолжением дуги большого круга PP', т. е. на угол $180° - \lambda_0$. Тогда точка A переместится в точку A_1, и большой круг PAP_1 займет положение PA_1P_1, а полюс P останется на прежнем месте.

2. Перенесем теперь полюс P в точку P'. Тогда точка A_1 перейдет в точку A_2, а основной круг AA_1QQ_1 займет положение A_2Q_2. Перемещение полюса, т. е. дуга PP', равняется, очевидно, полярному расстоянию полюса P', иначе $\smile PP' = p_0$, где $p_0 = 90° - \varphi_0$.

3. Повернем, наконец, получившуюся после описанных преобразований переходную систему $[P'A_2]$ (см. также черт. 63) вокруг оси $P'P_1'$ на некоторый угол α, по часовой стрелке, до совпадения точки A_2 с точкой A' и большого круга $P'A_2$ с большим кругом $P'A'$. Тогда полученная система и

будет новой системой $[P'A']$. Она будет вполне определена, если будет найден угол последнего поворота α и если будет дано направление возрастания долгот в этой системе. Для определения угла α соединим дугами больших кругов точку A' с полюсами P и P' и рассмотрим получившийся таким образом треугольник $PP'A'$ (см. черт. 63). В этом треугольнике сторона $PP' = p_0$, как это было уже указано выше, сторона $P'A' = 90°$, так как A' лежит на большом круге A_2Q_2, для которого точка P' является полюсом, а сторона $PA' = p_A = 90° - \varphi_{A'}$, т. е. полярному расстоянию точки A' в системе $[PA]$; так как $\angle APA' = \lambda_A$ и $\angle APP' = \lambda_0$, то угол $A'PP' = \angle APP' - \angle APA' = \lambda_0 - \lambda_A$. Тогда из треугольника $PP'A'$ по теореме синусов найдем:

$$\sin \alpha = \sin p_A \sin (\lambda_0 - \lambda_A),$$



Черт. 63

и, следовательно, угол α выражается очень просто через данные координаты точек P' и A' в старой системе. Таким образом, задача приводится к одному из двух предыдущих случаев, а именно, к 5-му, если направление возрастания долгот в системе $[P'A']$ совпадает с таким же направлением в системе $[PA]$, и к 6-му, если оно ему противоположно. В самом деле, построив полярный треугольник какой-нибудь точки M, подобно изображенному на черт. 59, в первом случае найдем, что угол при точке P' будет равен $\alpha - \lambda'$, а во втором $\alpha + \lambda'$, где λ'—долгота точки M в системе $[P'A']$. Остальные элементы полученного полярного треугольника будут иметь те же значения, что и на черт. 59.

§ 36. Некоторые задачи аналитической геометрии на сфере

Задача 1. Дана точка $M(\varphi, \lambda)$; найти координаты φ', λ' точки M', диаметрально противоположной точке M.

Построив точки M и M', лежащие на концах одного и того же диаметра MM', и проведя большой круг $MPm'M'P_1m$, из черт. 64 усматриваем:

$$\varphi = \smile mM, \quad \lambda = \smile Am;$$
$$\varphi' = \smile m'M', \quad \lambda' = \smile AmQm' = \smile Am + \smile mQm' = 180° + \lambda.$$

Так как дуги mM и $m'M'$ равны по величине, но противоположны по направлению, то

$$\left.\begin{aligned} \varphi' &= -\varphi, \\ \lambda' &= \lambda \pm 180° \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Задача 2. Даны точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$; найти кратчайшее сферическое расстояние*) между ними s.

Построив координаты точек M_1 и M_2 (черт. 65) и проведя дугу большого круга M_1M_2, замечаем, что задача сводится к вычислению стороны $M_1M_2 = s$ треугольника M_1M_2P, у которого:

$$\text{сторона } PM_1 = p_1 = 90° - \varphi_1,$$
$$\text{сторона } PM_2 = p_2 = 90° - \varphi_2,$$

*) Напомним, что сферическим расстоянием между двумя точками называется расстояние между ними, измеренное по поверхности сферы, по дуге большого круга (см. также § 1).

а противолежащий искомой стороне угол:

$$\angle M_1PM_2 = \angle APM_2 - \angle APM_1 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

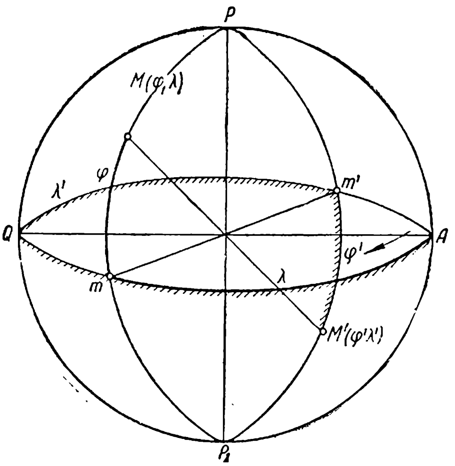
По формуле косинуса стороны [§ 10, форм. (11)] получаем:

$$\cos s = \cos p_1 \cos p_2 + \sin p_1 \sin p_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1), \tag{II'}$$

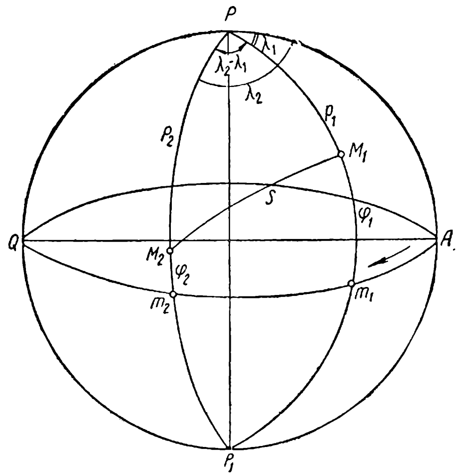
или

$$\cos s = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1). \tag{II}$$

Если, кроме расстояния s, необходимо найти еще и углы, которые дуга M_1M_2 образует с меридианами PM_1P_1 и PM_2P_1, т. е. внутренние углы сферического треугольника M_1M_2P, так называемые прямой и обратный азимуты, то такая задача называется в геодезии обратной геодезической задачей на сфере. В этом случае приходится проводить полное решение сферического треугольника M_1M_2P по двум его сторонам и углу между



Черт. 64



Черт. 65

ними. В геодезии обычно при этом пользуются аналогиями Непера. Таким образом решение выполняется так, как это указано в § 27, II случай, пункты 3 и 4.

Задача 3. Найти условие того, что две точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$ лежат на сферическом расстоянии 90°. Если $s = 90°$, то $\cos s = 0$; значит [см. (II')]

$$\cos p_1 \cos p_2 + \sin p_1 \sin p_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

или

$$\cos(\lambda_2 - \lambda_1) = -\operatorname{ctg} p_1 \operatorname{ctg} p_2, \tag{III'}$$

или иначе

$$\cos(\lambda_2 - \lambda_1) = -\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2. \tag{III}$$

Это и будет искомое условие.

Задача 4. Написать уравнение окружности малого круга, если его сферический радиус ρ и сферический центр лежат в точке $C(\varphi_0, \lambda_0)$.

Обозначая буквами φ и λ текущие координаты точек окружности данного малого круга, запишем, что любая из этих точек лежит, согласно свойству окружности, на сферическом расстоянии ρ от сферического центра $C(\varphi_0, \lambda_0)$ этого круга, воспользовавшись для этой цели формулой (II) данного параграфа:

$$\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) = \cos \rho. \tag{IV}$$

Формула (IV) и будет искомым уравнением окружности малого круга. Здесь уместно отметить, что применение метода координат на сфере позволяет рассматривать не только большие круги и составленные из них фигуры, но и малые круги, а также, как увидим дальше, сферические эллипсы и гиперболы.

Задача 5. Найти уравнение окружности большого круга, полюс которого лежит в точке $C(\varphi_0, \lambda_0)$.

Любая точка окружности большого круга от полюса этой окружности, согласно определению (см. § 4, теорема I), находится на сферическом расстоянии, равном 90°. Следовательно, на основании формулы (II) этого параграфа, будем иметь:

$$\sin\varphi\sin\varphi_0+\cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)=\cos 90^\circ,$$

где буквами φ и λ обозначены текущие координаты точек окружности данного большого круга. Так как $\cos 90^\circ=0$, то после небольших преобразований получим:

$$\cos(\lambda-\lambda_0)=-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_0. \tag{V}$$

Это и будет уравнение окружности большого круга с полюсом в точке $C(\varphi_0, \lambda_0)$.

Задача 6. Вывести уравнение окружности большого круга, проходящего через две данные точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$.

Обозначим буквами φ и λ текущие координаты точек окружности данного большого круга, а буквами φ_0 и λ_0 — координаты его полюса. Тогда уравнение этого круга можно, согласно формуле (V), написать в виде:

$$\cos(\lambda-\lambda_0)=-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_0. \tag{а}$$

Так как точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$, по данному, лежат на этой окружности, то их координаты должны удовлетворять написанному уравнению, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\cos(\lambda_1-\lambda_0)&=-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_0\\ \cos(\lambda_2-\lambda_0)&=-\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_0\end{aligned}\right\}. \tag{б}$$

Исключив из соотношений (а) и (б) координаты полюса φ_0 и λ_0, получим искомое уравнение окружности большого круга. Исключим сначала $\operatorname{tg}\varphi_0$; для этого разделим почленно уравнение (а) на каждое из соотношений (б); соответственно получим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos(\lambda-\lambda_0)}{\cos(\lambda_1-\lambda_0)}&=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_1}\\ \frac{\cos(\lambda-\lambda_0)}{\cos(\lambda_2-\lambda_0)}&=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_2}\end{aligned}\right\}. \tag{в}$$

Теперь раскроем косинусы разностей, стоящих в числителях и знаменателях дробей в левых частях равенств (в), и разделим числителя и знаменателя каждой из этих дробей на $\cos\lambda_0$; в результате получим:

$$\frac{\cos\lambda+\sin\lambda\operatorname{tg}\lambda_0}{\cos\lambda_1+\sin\lambda_1\operatorname{tg}\lambda_0}=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_1},$$

$$\frac{\cos\lambda+\sin\lambda\operatorname{tg}\lambda_0}{\cos\lambda_2+\sin\lambda_2\operatorname{tg}\lambda_0}=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Отсюда дважды определим $\operatorname{tg}\lambda_0$:

$$\operatorname{tg}\lambda_0=-\frac{\cos\lambda\operatorname{tg}\varphi_1-\cos\lambda_1\operatorname{tg}\varphi}{\sin\lambda\operatorname{tg}\varphi_1-\sin\lambda_1\operatorname{tg}\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\lambda_0=-\frac{\cos\lambda\operatorname{tg}\varphi_2-\cos\lambda_2\operatorname{tg}\varphi}{\sin\lambda\operatorname{tg}\varphi_2-\sin\lambda_2\operatorname{tg}\varphi}.$$

Иначе, с помощью детерминантов, это можно переписать так:

$$\operatorname{tg}\lambda_0=-\frac{\begin{vmatrix}\cos\lambda & \cos\lambda_1\\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin\lambda & \sin\lambda_1\\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_1\end{vmatrix}},$$

$$\operatorname{tg}\lambda_0 = -\frac{\begin{vmatrix}\cos\lambda & \cos\lambda_2 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin\lambda & \sin\lambda_2 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix}}.$$

Приравнивая друг к другу оба найденных выражения для $\operatorname{tg}\lambda_0$, получим уравнение большого круга, проходящего через две данные точки, в виде:

$$\frac{\begin{vmatrix}\cos\lambda & \cos\lambda_1 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin\lambda & \sin\lambda_1 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_1\end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix}\cos\lambda & \cos\lambda_2 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin\lambda & \sin\lambda_2 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix}}, \qquad \text{(VI)}$$

или иначе:

$$\begin{vmatrix}\cos\lambda & \cos\lambda_1 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_1\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}\sin\lambda & \sin\lambda_2 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\cos\lambda & \cos\lambda_2 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}\sin\lambda & \sin\lambda_1 \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi_1\end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(VI')}$$

Наконец, раскрывая детерминанты, выполняя умножение и делая различные несложные упрощения и преобразования, можем получить то же уравнение в следующей симметричной форме:

$$\operatorname{tg}\varphi\sin(\lambda_2 - \lambda_1) + \operatorname{tg}\varphi_1\sin(\lambda - \lambda_2) + \operatorname{tg}\varphi_2\sin(\lambda_1 - \lambda) = 0. \qquad \text{(VII)}$$

Разрешив относительно $\operatorname{tg}\varphi$, можно также представить его в виде:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1\sin(\lambda - \lambda_2) - \operatorname{tg}\varphi_2\sin(\lambda - \lambda_1)}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)}. \qquad \text{(VIII)}$$

Задача 7. Дан большой круг, проходящий через две данные точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$; найти координаты его полюса.

Обозначим текущие координаты точек окружности данного большого круга буквами φ и λ, а координаты его полюса φ_0 и λ_0.

Тогда, по предыдущему, уравнение этого круга можно написать в виде:

$$\cos(\lambda - \lambda_0) = -\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi_0. \qquad \text{(a)}$$

Подставляя в него координаты данных точек M_1 и M_2, получим:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\lambda_1 - \lambda_0) &= -\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_0 \\ \cos(\lambda_2 - \lambda_0) &= -\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_0\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(б)}$$

Равенства (б) можно, очевидно, рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными φ_0 и λ_0. Чтобы решить эту систему, разделим прежде всего первое из уравнений (б) на второе:

$$\frac{\cos(\lambda_1 - \lambda_0)}{\cos(\lambda_2 - \lambda_0)} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Далее, раскроем косинусы разностей в левой части и разделим числитель и знаменатель полученной таким образом дроби на $\cos\lambda_0$:

$$\frac{\cos\lambda_1 + \sin\lambda_1\operatorname{tg}\lambda_0}{\cos\lambda_2 + \sin\lambda_2\operatorname{tg}\lambda_0} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Из этого уравнения найдем $\operatorname{tg}\lambda_0$:

$$\operatorname{tg}\lambda_0 = -\frac{\cos\lambda_1\operatorname{tg}\varphi_2 - \cos\lambda_2\operatorname{tg}\varphi_1}{\sin\lambda_1\operatorname{tg}\varphi_2 - \sin\lambda_2\operatorname{tg}\varphi_1}, \qquad \text{(IX)}$$

что с помощью детерминантов можно переписать еще так:

$$\operatorname{tg}\lambda_0 = -\frac{\begin{vmatrix}\cos\lambda_1 & \cos\lambda_2 \\ \operatorname{tg}\varphi_1 & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin\lambda_1 & \sin\lambda_2 \\ \operatorname{tg}\varphi_1 & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix}}. \qquad \text{(IX')}$$

Уравнения (IX) и (IX') выражают $\operatorname{tg}\lambda_0$ через тригонометрические функции координат данных точек. После того как λ_0 определено, можно по уравнениям (б) вычислить $\operatorname{tg}\varphi_0$ и притом дважды. Совпадение полученных для φ_0

значений послужит контролем вычислений. Уравнения (б) для этой цели перепишем так:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{\cos(\lambda_1-\lambda_0)}{\operatorname{tg}\varphi_1} = -\frac{\cos(\lambda_2-\lambda_0)}{\operatorname{tg}\varphi_2}. \qquad (X)$$

Задача 8. Найти условие, при котором три данные точки $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$, $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$ и $M_3(\varphi_3, \lambda_3)$ лежат на окружности одного и того же большого круга.

На основании формулы (VII) уравнение окружности большого круга, определяемого точками $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$, напишется:

$$\operatorname{tg}\varphi\sin(\lambda_2-\lambda_1)+\operatorname{tg}\varphi_1\sin(\lambda-\lambda_2)+\operatorname{tg}\varphi_2\sin(\lambda_1-\lambda)=0.$$

Если точка $M_3(\varphi_3, \lambda_3)$ лежит на той же окружности, то, подставив в это уравнение вместо текущих координат координаты точки M_3, мы получим тождество, а именно:

$$\operatorname{tg}\varphi_1\sin(\lambda_3-\lambda_2)+\operatorname{tg}\varphi_2\sin(\lambda_1-\lambda_3)+\operatorname{tg}\varphi_3\sin(\lambda_2-\lambda_1)=0. \qquad (XI)$$

Выражение (XI) и есть искомое условие того, что все три данные точки лежат на окружности одного и того же большого круга.

Задача 9. Найти координаты точек пересечения двух больших кругов, заданных своими уравнениями.

Если уравнения больших кругов заданы в виде, определяемом формулой (V), то тем самым даны координаты полюсов этих кругов. Если же эти уравнения представлены в виде, определяемом формулами (VII) или (VIII), то мы можем по задаче 7-й, по формулам (IX) и (X), найти координаты полюсов этих кругов. Таким образом, координаты полюсов наших окружностей можно считать известными.

Пусть полюсами этих больших кругов являются соответственно для одного из них точка C_1 (φ_1, λ_1) и для другого — точка $C_2(\varphi_2, \lambda_2)$, а одной из точек пересечения этих кругов — точка $B(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$. Так как точка $B(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$, как точка пересечения, одновременно лежит на окружности и того и другого больших кругов, то она от каждой из точек C_1 и C_2 (§ 4, теорема I) отстоит на сферическом расстоянии, равном 90°. Это на основании формулы (III) можно записать так:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\bar{\lambda}-\lambda_1) &= -\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\bar{\varphi},\\ \cos(\bar{\lambda}-\lambda_2) &= -\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\bar{\varphi}.\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Равенства (a) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными $\bar{\varphi}$ и $\bar{\lambda}$, вполне аналогичную системе уравнений (б) в задаче 7. Решая ее по тому же плану, найдем для $\bar{\lambda}$:

$$\operatorname{tg}\bar{\lambda} = -\frac{\cos\lambda_1\operatorname{tg}\varphi_2-\cos\lambda_2\operatorname{tg}\varphi_1}{\sin\lambda_1\operatorname{tg}\varphi_2-\sin\lambda_2\operatorname{tg}\varphi_1}, \qquad (XII)$$

или

$$\operatorname{tg}\bar{\lambda} = -\frac{\begin{vmatrix}\cos\lambda_1 & \cos\lambda_2\\ \operatorname{tg}\varphi_1 & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin\lambda_1 & \sin\lambda_2\\ \operatorname{tg}\varphi_1 & \operatorname{tg}\varphi_2\end{vmatrix}}. \qquad (XIII)$$

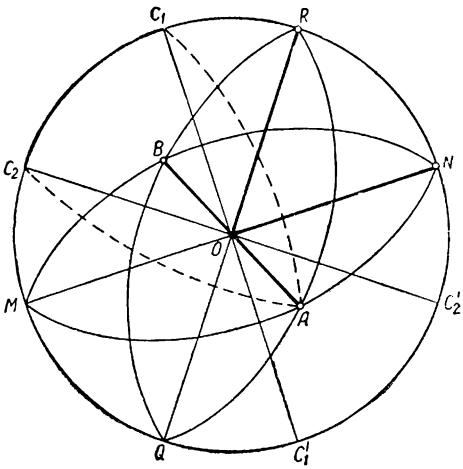
После того как $\bar{\lambda}$ по формуле (XII) или (XIII) найдено, можно по каждому из уравнений (a) найти $\bar{\varphi}$. С этой целью уравнения (a) лучше переписать так:

$$\operatorname{tg}\bar{\varphi} = -\frac{\cos(\bar{\lambda}-\lambda_1)}{\operatorname{tg}\varphi_1} = -\frac{\cos(\bar{\lambda}-\lambda_2)}{\operatorname{tg}\varphi_2}. \qquad (XIV)$$

Таким образом $\bar{\varphi}$ может быть вычислено дважды; схождение результатов служит контролем вычислений.

Так как долготы λ могут принимать всевозможные значения от 0° до 360°, то по тангенсу мы получим два значения для $\overline{\lambda}$, отличающиеся на 180°. Это находится в полном соответствии с тем, что два больших круга пересекаются в двух диаметрально противоположных точках [см. форм. (I)]. С каждым из этих значений по форм. (XIV) вычислим свое значение для $\overline{\varphi}$. Так как широта может принимать значения от $-90°$ до $+90°$ и так как в форм. (XIV) $\overline{\lambda}$ входит под знаком косинуса, то оба найденные значения будут отличаться только знаками, что также находится в полном согласии с формулами (I) настоящего параграфа.

Только что изложенные рассуждения целиком и полностью относятся также к формулам (IX) и (X) задачи 7 этого же параграфа. Там также координаты полюса большого круга λ_0 и φ_0 отыскиваются по тангенсам по формулам, совершенно сходным с формулами (XIII) и (XIV). Следовательно, и там найдутся две точки, а не одна, что согласуется с тем, что у каждого большого круга есть два диаметрально противоположных полюса. Сходство же формул объясняется тем, что задачу 9-ю можно свести к задаче 7-й, если принять во внимание, что точка пересечения двух больших кругов является полюсом большого круга, проходящего через оба полюса этих двух кругов. Последнее утверждение будет доказано ниже, при решении задачи 10-й.



Черт. 66

Задача 10. Найти угол, образуемый двумя пересекающимися кругами, заданными своими уравнениями.

На основании рассуждений, изложенных выше (см. задачу 9), будем считать известными координаты полюсов этих больших кругов, т. е. точек $C_1(\varphi_1, \lambda_1)$ и $C_2(\varphi_2, \lambda_2)$.

Прежде чем решать настоящую задачу, докажем следующую лемму.

Лемма. *Сферическое расстояние между полюсами двух пересекающихся больших кругов есть мера сферического угла между ними,* т. е. сф. $\angle NAR = \smile C_1C_2$ (черт. 66).

Доказательство. Соединим точку A пересечения двух больших кругов $ANBM$ и $ARBQ$ (см. черт. 66) с полюсами этих кругов, т. е. с точками C_1 и C_2, дугами больших кругов AC_1 и AC_2. Так как точка C_1 есть полюс дуги $ANBM$, то $\smile AC_1 = 90°$, а так как точка C_2 есть полюс дуги $ARBQ$, то и $\smile AC_2 = 90°$. Следовательно, точка A, отстоящая от двух точек большого круга $C_1RNC_2'C_1'QMC_2$, проходящего через полюсы больших кругов $ARBQ$ и $ANBM$, т. е. через точки C_2 и C_1, есть полюс этого большого круга. В силу этого,

$$\smile AN = \smile AR = 90°,$$

а потому

$$OR \perp AB \text{ и } ON \perp AB.$$

Значит, угол NOR есть линейный угол двугранного угла $NABR$, и (см. § 5)

$$\text{сф.} \angle NAR = \angle NOR. \qquad \text{(a)}$$

С другой стороны, так как C_1 есть полюс дуги MAN, а C_2 — полюс дуги QAR, то

$$C_1N = C_2R = 90°,$$

и следовательно,

$$C_1O \perp ON \text{ и } C_2O \perp OR,$$

а потому

$$\angle NOR = \angle C_1OC_2, \tag{б}$$

как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Угол же C_1OC_2 измеряется дугой C_1C_2, как центральный, т. е.

$$\angle C_1OC_2 = \smile C_1C_2. \tag{в}$$

Сопоставляя равенства (а), (б) и (в), заключаем, что

$$\text{сф.} \angle NAR = \smile C_1C_2,$$

что и требовалось доказать.

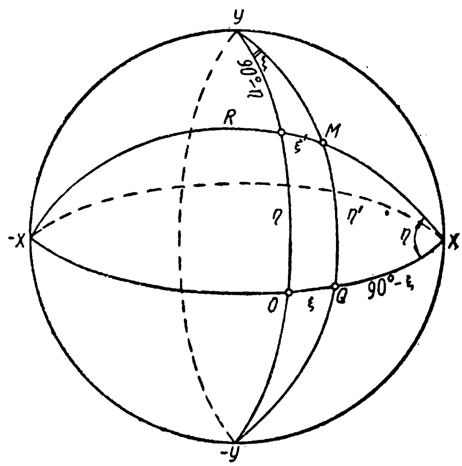
Возвращаясь к решению предложенной задачи, на основании леммы заключаем [по формуле (II)], что

$$\cos NAR = \cos C_1C_2 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1), \tag{XV}$$

где φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2 — известные координаты точек C_1 и C_2 полюсов пересекающихся двух больших кругов.

§ 37. Вторая система сферических координат (тангенциальная)

До сих пор для изучения геометрических свойств фигур, расположенных на сфере, мы пользовались построениями, выполняемыми на самой этой изучаемой нами поверхности. Однако часто при изучении геометрии на какой-либо поверхности прибегают к такому приему. Выбирают какую-нибудь вспомогательную поверхность, более простую, чем изучаемая, и проектируют на нее тем или иным способом рассматриваемые геометрические фигуры. Для сферы в таких случаях берется плоскость и применяется стереографическая, гномоническая и некоторые другие проекции.



Черт. 67

Как читатель убедится из дальнейшего изложения, тангенциальная система координат, речь о которой идет в настоящем параграфе, и основывается на таком приеме.

Будем, как это иногда принимается в высшей математике, считать радиус сферы равным единице. Так как окружность большого круга является на сфере аналогом прямой на плоскости, будем называть ее в дальнейшем „сферической прямой“. В качестве „осей координат“ возьмем две взаимно перпендикулярные сферические прямые, одну из точек пересечения которых — точку O (черт. 67) будем называть „начальной точкой“ системы; она будет аналогична началу координат в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости. Определим на чертеже положительные и отрицательные направления на осях OX и OY и отметим точки X, Y, $-X$ и $-Y$, из которых каждая отстоит от точки O (черт. 67) на сферическом расстоянии 90°.

Пусть M есть произвольная точка на поверхности шара, сферические координаты которой в рассматриваемой системе мы должны построить. С этой целью опустим сферические перпендикуляры MQ и MR из точки M на „оси координат“. Обозначим:

$$MQ = \eta' \text{ и } MR = \xi',$$

а отрезки на осях —

$$OQ = \xi \text{ и } OR = \eta.$$

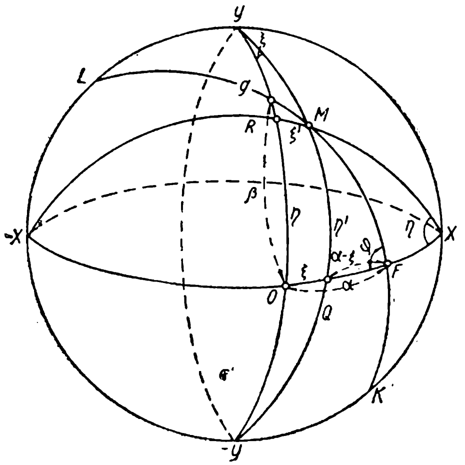
Из чертежа 67 видно, что так же

$$\xi = \text{сф.} \angle OYQ \text{ и } \eta = \text{сф.} \angle OXR.$$

„Сферическими координатами“ x и y в нашей системе будем считать тангенсы дуг ξ и η, т. е. положим:

$$x = \operatorname{tg} \xi \text{ и } y = \operatorname{tg} \eta.$$

Принимая за сферические координаты точки M тангенсы дуг $OQ = \xi$ и $OR = \eta$, мы, очевидно, проектируем эту точку на плоскость, касающуюся сферы в точке O, с помощью луча, проведенного из центра сферы. Для достижения однозначного соответствия между точками и координатами ограничимся рассмотрением одного только полушария нашей сферы (именно переднего), т. е. положим:



Черт. 68

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \xi, \quad \eta \leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

Тогда каждой паре значений x и y будет соответствовать одна и только одна точка полушария, и наоборот.

Можно сказать также, что окружность большого круга $XY\,(-X)\,(-Y)$ является границей рассматриваемой области. Установим очень важную для дальнейшего связь между величинами ξ', η', ξ, η. Из сферического треугольника MRY, прямоугольного по построению при точке R, у которого катет $RY = 90° - \eta$ (черт. 67), имеем:

$$\cos \eta = \operatorname{ctg} \xi \operatorname{tg} \xi',$$

а из сферического треугольника MQX аналогично:

$$\cos \xi = \operatorname{ctg} \eta \operatorname{tg} \eta',$$

откуда легко находим:

$$\operatorname{tg} \xi' = \cos \eta \operatorname{tg} \xi \text{ и } \operatorname{tg} \eta' = \cos \xi \operatorname{tg} \eta. \qquad \text{(I)}$$

С помощью установленной системы координат решим еще несколько задач аналитической геометрии на сфере.

Задача 1. Вывести уравнение сферической прямой, отсекающей на „осях координат“ отрезки α и β (черт. 68).

Пусть сферическая прямая KL образует с осью X угол φ, а точка $M(x, y)$ есть одна из точек этой „прямой“. Тогда из сферического треугольника FGO имеем:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \varphi,$$

а из сферического треугольника FMQ:

$$\sin(\alpha - \xi) = \operatorname{tg} \eta' \operatorname{ctg} \varphi.$$

Определяя из этих выражений $\operatorname{tg} \varphi$, найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \eta'}{\sin(\alpha - \xi)}.$$

Отсюда, раскрывая синус разности двух углов, получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\eta'}{\sin\alpha\cos\xi-\cos\alpha\sin\xi}.$$

Заменим $\operatorname{tg}\eta'$ на основании (I) и поменяем места числителей и знаменателей соответственно в написанных дробных выражениях:

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\xi-\cos\alpha\sin\xi}{\cos\xi\operatorname{tg}\eta},$$

или, разделив числителя дроби в правой части почленно на знаменателя,

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\eta}-\frac{\cos\alpha\operatorname{tg}\xi}{\operatorname{tg}\eta},$$

или, наконец, разделив обе части на $\sin\alpha$ и умножив на $\operatorname{tg}\eta$, после перестановки членов,

$$\frac{\operatorname{tg}\xi}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\eta}{\operatorname{tg}\beta}=1.$$

Обозначим $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ буквами a и b соответственно, т. е. положим

$$\operatorname{tg}\alpha=a \text{ и } \operatorname{tg}\beta=b,$$

и заменим $\operatorname{tg}\xi$ и $\operatorname{tg}\eta$ согласно условию соответственно через x и y; тогда получим окончательно уравнение сферической прямой в виде, сходном с уравнением прямой „в отрезках" на плоскости, а именно:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{II}$$

Задача 2. Вывести уравнение сферической прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$.

Если точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на данной сферической прямой, то координаты ее x_1 и y_1 удовлетворяют уравнению (II), т. е.

$$\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}=1.$$

Вычитая это равенство почленно из уравнения (II), получим:

$$\frac{x-x_1}{a}+\frac{y-y_1}{b}=0. \tag{III}$$

Это и будет искомое уравнение сферической прямой, проходящей через точку с координатами x_1 и y_1.

Задача 3. Вывести уравнение сферической прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Уравнение сферической прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, согласно (III) можно написать так:

$$\frac{y-y_1}{b}=-\frac{x-x_1}{a}.$$

Координаты точки $M_2(x_2, y_2)$, лежащей на этой сферической прямой, должны удовлетворять написанному уравнению, т. е.

$$\frac{y_2-y_1}{b}=-\frac{x_2-x_1}{a}.$$

Разделив одно выражение на другое, получим уравнение сферической прямой, проходящей через две данные точки, в виде:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{IV}$$

Задача 4. Показать, что уравнение $Ax+By+C=0$, линейное относительно x и y, есть общее уравнение сферической прямой.

Перенеся C в правую часть и разделив все уравнение почленно на $-C$, можно переписать его в виде:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1.$$

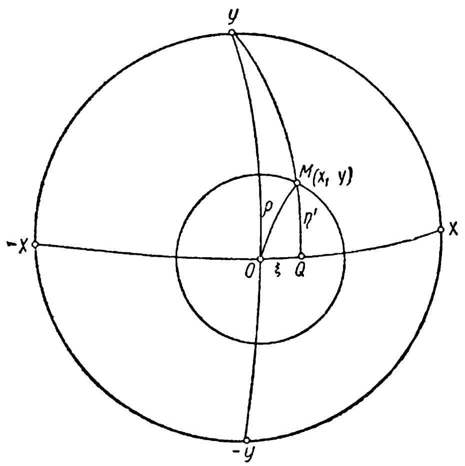
Положив теперь

$$-\frac{C}{A}=a \text{ и } -\frac{C}{B}=b,$$

получим окончательно:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Это и доказывает, что уравнение вида $Ax+By+C=0$, линейное относительно x и y, где x и y суть текущие тангенциальные сферические координаты, есть общее уравнение сферической прямой.



Черт. 69

Задача 5. Вывести уравнение окружности малого круга со сферическим центром в точке O и с сферическим радиусом ρ.

Так как все точки окружности малого круга лежат от сферического центра этой окружности O на одном и том же сферическом расстоянии ρ, то для какой-нибудь точки этой окружности $M(x, y)$ (черт. 69) из сферического треугольника OMQ непосредственно имеем:

$$\cos\rho=\cos\eta'\cos\xi$$

или, возводя в квадрат,

$$\cos^2\rho=\cos^2\eta'\cos^2\xi,$$

или

$$\cos^2\rho=\frac{\cos^2\xi}{1+\operatorname{tg}^2\eta'}.$$

Заменяя $\operatorname{tg}\eta'$ по формуле (I), получим:

$$\cos^2\rho=\frac{\cos^2\xi}{1+\cos^2\xi\operatorname{tg}^2\eta}$$

или

$$\frac{1}{\cos^2\rho}=\frac{1+\cos^2\xi\operatorname{tg}^2\eta}{\cos^2\xi}.$$

Разделив числитель дроби в правой части на знаменатель и воспользовавшись известной формулой гониометрии, найдем:

$$1+\operatorname{tg}^2\rho=1+\operatorname{tg}^2\xi+\operatorname{tg}^2\eta,$$

или

$$\operatorname{tg}^2\xi+\operatorname{tg}^2\eta=\operatorname{tg}^2\rho.$$

Положим $\operatorname{tg}\rho=r$, тогда, по условию, окончательно будем иметь уравнение окружности малого круга в виде:

$$x^2+y^2=r^2. \qquad \text{(V)}$$

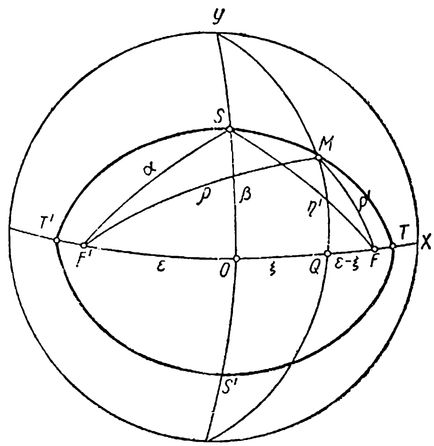
Задача 6. Вывести уравнение сферического эллипса.

Сферическим коническим сечением*) называется кривая пересечения эллиптического конуса со сферой, описанной вокруг вершины конуса как

*) О сферическом коническом сечении и его геометрических свойствах см., например, О. Дзиобек. Курс аналитической геометрии. Часть II. Аналитическая геометрия в пространстве. Одесса. 1912, стр. 276—279.

центра. Так как конус имеет две полости, то кривая имеет две ветви. Если мы примем за центр кривой точку пересечения оси конуса со сферой и ограничимся, как было выше условлено, рассмотрением только одной половины сферы, то получится фигура $STS'T'$, изображенная на черт. 70, которая называется сферическим эллипсом. Внутри сферического эллипса на поверхности сферы есть две точки F и F', которые называются его фокусами и обладают свойствами, аналогичными свойствам фокусов плоского эллипса.

Отрезок сферической прямой TT', проходящей через точки F и F', называется большой осью сферического эллипса, а отрезок сферической прямой SS' — его малой осью. Обе оси взаимно перпендикулярны, пересекаются в центре кривой, точке O, и делят друг друга пополам. Точки T, T' и S, S' называются вершинами эллипса.



Черт. 70

Если мы начало координат, т. е. точку O, переместим по одной из осей на 90° в ту или другую сторону, то на рассматриваемой половине сферы будут лежать две ветви кривой, симметричные относительно нового начала и новых осей координат. В таком случае сферическое коническое сечение называется сферической гиперболой, и мы видим, что в сущности на сфере нет различия между сферическим эллипсом и сферической гиперболой.

Сферический эллипс может быть определен, как геометрическое место точек, сумма сферических расстояний которых ρ и ρ' от двух данных точек F и F', фокусов эллипса, есть величина постоянная, равная большой оси эллипса.

Обозначим $OF = OF' = \varepsilon$, $TT' = 2\alpha$ и $SS' = 2\beta$. Пусть S — одна из вершин эллипса, лежащая на оси Y, а M — одна из точек эллипса (см. черт. 70). Тогда из сферического треугольника OSF' имеем:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\varepsilon,$$

откуда

$$\cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos\varepsilon}, \tag{а}$$

или

$$\cos^2\beta = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\varepsilon}.$$

Выразив косинусы через тангенсы по известной формуле гониометрии, найдем:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varepsilon}},$$

или

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\varepsilon}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

или

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = (1+\operatorname{tg}^2\varepsilon)(1+\operatorname{tg}^2\beta),$$

или, наконец,

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\varepsilon(1+\operatorname{tg}^2\beta),$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}. \tag{б}$$

Из сферических треугольников MQF и MQF' соответственно получаем:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\rho'=\cos\eta'\cos(\varepsilon-\xi)\\ \cos\rho=\cos\eta'\cos(\varepsilon+\xi)\end{array}\right\}. \tag{в}$$

Помня, что $\rho+\rho'=2\alpha$ и обозначив $\rho-\rho'=2\delta$, можем полусумму косинусов представить в виде:

$$\frac{1}{2}(\cos\rho+\cos\rho')=\cos\alpha\cos\delta.$$

С другой стороны, на основании (в) имеем:

$$\frac{1}{2}(\cos\rho+\cos\rho')=\cos\eta'\cos\varepsilon\cos\xi=\frac{\cos\varepsilon\cos\xi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\eta'}},$$

откуда следует:

$$\cos\alpha\cos\delta=\frac{\cos\varepsilon\cos\xi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\eta'}}.$$

Возьмем выражение $\cos\beta\cos\delta$ и, выражая β через α на основании равенства (а), можем записать:

$$\cos\beta\cos\delta=\frac{\cos\alpha\cos\delta}{\cos\varepsilon}.$$

Подставляя сюда только что найденное выражение для произведения $\cos\alpha\cos\delta$, перепишем последнее равенство так:

$$\cos\beta\cos\delta=\frac{\cos\varepsilon\cos\xi}{\cos\varepsilon\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\eta'}},$$

или, сокращая и заменяя $\operatorname{tg}\eta'$ по формуле (I),

$$\cos\beta\cos\delta=\frac{\cos\xi}{\sqrt{1+\cos^2\xi\operatorname{tg}^2\eta}}.$$

Беря обратные величины и возводя в квадрат, получим:

$$\frac{1}{\cos^2\beta\cos^2\delta}=\frac{1+\cos^2\xi\operatorname{tg}^2\eta}{\cos^2\xi},$$

или

$$\frac{1}{\cos^2\beta\cos^2\delta}=\frac{1}{\cos^2\xi}+\operatorname{tg}^2\eta,$$

или, наконец,

$$(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1+\operatorname{tg}^2\delta)=1+\operatorname{tg}^2\xi+\operatorname{tg}^2\eta. \tag{г}$$

На основании равенств (в) и принятых обозначений можем сумму и разность косинусов ρ и ρ' преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}\cos\rho-\cos\rho'&=-2\sin\alpha\sin\delta=-2\cos\eta'\sin\varepsilon\sin\xi,\\ \cos\rho+\cos\rho'&=2\cos\alpha\cos\delta=2\cos\eta'\cos\varepsilon\cos\xi.\end{aligned}$$

Деля первое из этих выражений на второе, найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\xi,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\xi}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{д}$$

Возводя равенство (д) в квадрат и подставляя вместо $\operatorname{tg}^2\varepsilon$ правую часть равенства (б), получим:

$$\operatorname{tg}^2\delta=\frac{\operatorname{tg}^2\xi}{\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}.$$

Теперь преобразуем левую часть равенства (г), используя только что найденное выражение для $\operatorname{tg}^2\delta$:

$$(1+\operatorname{tg}^2\beta)(1+\operatorname{tg}^2\delta)=(1+\operatorname{tg}^2\beta)\left(1+\frac{\operatorname{tg}^2\xi}{\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}\right)=$$

$$=1+\operatorname{tg}^2\beta+\frac{\operatorname{tg}^2\xi}{\operatorname{tg}^2\alpha}(\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta)=1+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\xi-\frac{\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\xi}{\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

После этих преобразований равенство (г) примет вид:

$$1+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\xi-\frac{\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\xi}{\operatorname{tg}^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\xi+\operatorname{tg}^2\eta,$$

или, по приведении подобных членов,

$$\operatorname{tg}^2\eta=\operatorname{tg}^2\beta-\frac{\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}^2\xi}{\operatorname{tg}^2\alpha},$$

или, наконец, по разделении на $\operatorname{tg}^2\beta$,

$$\frac{\operatorname{tg}^2\xi}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\operatorname{tg}^2\eta}{\operatorname{tg}^2\beta}=1.$$

Обозначая $\operatorname{tg}\alpha=a$ и $\operatorname{tg}\beta=b$ и заменяя $\operatorname{tg}\xi$ и $\operatorname{tg}\eta$ согласно условию, получим окончательно уравнение сферического эллипса в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{(VI)}$$

где x и y — текущие тангенциальные сферические координаты точек этой кривой.

Если мы определим сферическую *гиперболу*, как геометрическое место точек, разность сферических расстояний которых от двух данных точек F и F', фокусов гиперболы, есть величина постоянная, равная 2α, то, проделав аналогичные выкладки, получим уравнение сферической гиперболы в виде:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad \text{(VII)}$$

Здесь также x и y — текущие тангенциальные сферические координаты точек кривой; точно так же

$$a=\operatorname{tg}\alpha \text{ и } b=\operatorname{tg}\beta,$$

где 2α — действительная, а 2β — мнимая ось гиперболы.

Задача 7. Вывести уравнение касательной к сферическому эллипсу и сферической гиперболе.

Касательной к сферической кривой называется сферическая прямая, имеющая с кривой две совпадающие общие точки.

Выведем сначала уравнение секущей, имеющей с кривой две раздельные общие точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Уравнение сферической прямой, проходящей через две данные точки, можно, на основании формулы (IV), написать так:

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1). \qquad \text{(a)}$$

Пусть рассматриваемая кривая есть сферический эллипс, определяемый уравнением (VI). Так как точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат на этом эллипсе, то их координаты должны удовлетворять этому уравнению, т. е.

$$y_1^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2,$$

$$y_2^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_2^2.$$

Вычитая почленно, получим:

$$y_1^2-y_2^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-x_2^2),$$

или

$$(y_1+y_2)(y_1-y_2)=-\frac{b^2}{a^2}(x_1+x_2)(x_1-x_2),$$

или, наконец,

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\,.$$

Внося полученное значение отношения $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ в выражение (а), будем иметь уравнение секущей или хорды эллипса в виде:

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1).$$

Чтобы получить уравнение сферической касательной к эллипсу, достаточно положить $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$, т. е.

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

или

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\,.$$

Правая часть этого выражения на основании уравнения сферического эллипса (VI) равна единице, так что уравнение касательной к эллипсу окончательно напишется в виде:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1. \qquad \text{(VIII)}$$

Аналогично уравнение касательной к сферической гиперболе будет иметь вид:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1. \qquad \text{(IX)}$$

Мы видим, что во всех рассмотренных в этом параграфе случаях получается совпадение формул аналитической геометрии на сфере с соответствующими формулами аналитической геометрии на плоскости. Геометрически это объясняется тем, что сферические координаты x, y точек сферы можно, очевидно, рассматривать так же, как прямолинейные декартовы координаты проекций этих точек на плоскость, касающуюся сферы в начальной точке системы O. Так как центр проекции совпадает при этом с центром сферы, то мы на касательной плоскости получаем гномоническую проекцию фигур, расположенных на сфере. Формулы настоящего параграфа подтверждают известное свойство гномонической проекции, что все большие круги на сфере изображаются в этой проекции прямыми линиями. Они обнаруживают также и другое свойство этой проекции, а именно: все окружности малого круга, сферические эллипсы и сферические гиперболы, центры которых совпадают на сфере с начальной точкой системы, изображаются на касательной плоскости окружностями, эллипсами и гиперболами соответственно с центрами в той же точке, т. е. в точке касания O.

Мы ограничиваемся здесь этими краткими указаниями, так как более подробное рассмотрение вопроса выходит за рамки настоящего учебника.

Глава VIII

ДОПОЛНЕНИЯ

§ 38. Об измерении углов

Измерить какую-либо величину — это значит сравнить ее с однородной ей величиной, принятой за единицу, иначе сказать, найти отношение измеряемой величины к величине того же рода, принятой за единицу измерения. Непосредственное сравнение, однако, большею частью на практике бывает затруднительно. Поэтому прибегают к косвенному или посредственному измерению. Все сказанное относится полностью и к измерению углов.

Косвенное измерение углов в первую очередь основывается на известных теоремах планиметрии о взаимной пропорциональности дуг окружности и опирающихся на них центральных углов. Такая пропорциональность приводит прежде всего к тому, что соответствующие единицы для углов и для дуг, за малыми исключениями, имеют одинаковые наименования. Далее, определение основных единиц углов почти всегда опирается на определение соответствующих единиц для дуг.

Пожалуй, единственной основной единицей для измерения углов, определяемой независимо от стягивающей дуги, является прямой угол d, т. е. один из двух равных смежных углов. В „Началах“ Евклида — это единственная единица для измерения углов. Угол, равный двум прямым углам (2d), называется „развернутым“ или „выпрямленным“; угол, равный четырем прямым (4d), который получается, как сумма всех углов, расположенных вокруг одной точки, не имеет особого названия. Впрочем, иногда такой угол называют „полным“ углом. Дуга, стягивающая прямой угол, называется квадрантом; развернутому углу соответствует полуокружность, а полному углу — полная окружность. Прямой угол неудобен для измерения всяких углов, в особенности углов, меньших прямого.

В анализе принято пользоваться радианной мерой. За единицу измерения угла принимается радиан, т. е. центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равняется радиусу. Если известна длина дуги l, соответствующей данному углу α, то в радианной мере будем иметь

$$\alpha = \frac{l}{R},$$

где R — радиус окружности. Часто такой способ выражения углов называют отвлеченным, что, однако, не совсем правильно, так как при этом углы получаются выраженными в радианах. Развернутый угол равняется π радианам, а прямой — $\frac{\pi}{2}$ и т. д. Этот способ, имеющий весьма важное теоретическое значение, неудобен, однако, на практике, т. к. большею частью приходится иметь дело с бесконечными дробями.

Близкую связь с радианным методом имеет способ измерения углов, который применяется в артиллерийских дальномерах. Способ этот, наоборот, имеет чисто практическое значение. Окружность делится на 6000 частей. Таким образом за единицу измерения, называемую артиллерийским делением, принимается угол, соответствующий дуге в $\frac{1}{6000}$ долю окружности. Прямой угол равняется 1500 артиллерийских делений. Так как при дальномерных измерениях приходится иметь дело с малыми углами, то можно приближенно принять радиан равным не $\frac{6000}{2\pi} = 955$ артиллерийским делениям, а, приняв π грубо приближенно равным 3, считать радиан за 1000 артиллерийских делений. Поэтому артиллерийское деление угломера обычно называют „тысячной“ или „тысячной радиуса“. Такое деление шкалы прибора очень удобно для быстрых приближенных определений линейной величины предмета h или расстояния до него d, если угловая величина предмета α измерена угломером в артиллерийских делениях. Очевидно эти три величины связаны приближенной формулой:

$$h = \frac{\alpha \cdot d}{1000},$$

где h и d выражены в одинаковых линейных единицах.

Градусное деление применялось уже в глубокой древности. Изобретение его приписывают халдеям. Деление окружности на 360 частей стоит в несомненной связи с видимым годичным движением солнца по эклиптике и с продолжительностью тропического года. Трудно, однако, сказать, имело ли здесь место сознательное округление (360 вместо $365^1/_4$) или деление окружности на 360 частей укоренилось еще тогда, когда продолжительность года была установлена очень приближенно и округленно. Последнее предположение подтверждается самым названием „градус“ (gradus — ступень, шаг), которое как бы выражает, что за одни сутки солнце в своем видимом годичном движении продвигается каждый раз на один „шаг“, а всего за год делает 360 „шагов“. Итак, дуговым градусом называется $\frac{1}{360}$ часть окружности, а угловой градус есть центральный угол, соответствующий дуге в 1 дуговой градус. Градусное деление самое распространенное и общеупотребительное. Некоторое затруднение представляет унаследованное также от халдеев сексагезимальное подразделение градуса ($1° = 60'$, $1' = 60''$), осложняющее в известной степени действия превращения и раздробления.

Поэтому при введении десятичной системы мер и весов возникла мысль установить *десятичную систему* и для измерения углов. В этой системе прямой угол подразделяется на 100 частей, называемых *градами* (обозначение ^{g}). Каждый град делится на 100 десятичных или градовых минут (обозначение), и каждая градовая минута в свою очередь делится на 100 градовых или десятичных секунд (обозначение ``). Впрочем, в последних подразделениях особой надобности не представляется, так как их легко заменить соответствующими десятичными долями града. Несмотря на эти преимущества, *градовое* деление окружности прививается на практике очень медленно. Одна из причин та, что такие углы, как 30° и 60°, имеющие особое значение, выражаются в градах не целыми числами $\left(60° = 66\frac{2^g}{3}\right)$. Другая причина: все точные инструменты имеют круги, разделенные на градусы, в таблицах для вычисления, логарифмических и других, аргумент обычно выражается также в градусах и т. д. В последнее время, впрочем, стали появляться и инструменты и таблицы, приспособленные для градового деления, так что в геодезии оно начинает находить себе некоторое применение.

В астрономии применяется часто *часовое деление* окружности. Это стоит в связи с тем обстоятельством, что Солнце и другие светила завершают полный видимый суточный оборот на 360° в 24 часа. Таким образом, окружность делится на 24 части, и дуга, равная $\frac{1}{24}$ части окружности, называется дуговым часом, а центральный угол, ей соответствующий, называется угловым часом или просто часом (обозначение ^{h}). Один час делится на 60 частей, называемых минутами (обозначение ^{m}), и минута делится на 60 секунд (обозначение ^{s}). Минуты и секунды, как доли часа, называются часовыми в отличие от градусных минут и секунд ($'$ и $''$). Очевидно $1^h = 15°$, $1^m = 15'$ и $1^s = 15''$.

Для наглядности сопоставим в табл. 3 выражения некоторых основных углов в различных, только что рассмотренных угловых мерах.

Иногда приходится угол, данный в каких-либо из этих мер, выражать в других угловых мерах. Для этой цели в сборниках таблиц и других справочных изданиях помещаются специальные вспомогательные таблицы различного устройства, облегчающие такой переход от одних угловых мер к другим. В простейших случаях можно пользоваться табл. 4, дающей сравнение между собою различных угловых мер.

До сих пор мы говорили об измерении угла между двумя прямыми. То же самое относится и к измерению угла между двумя плоскостями, так как двугранные углы, как известно из геометрии, относятся между собой, как их линейные углы. Другими словами, если мы за единицу измерения примем двугранный угол, линейный угол которого равен единице, взятой для измерения линейных углов, то оба угла, и двугранный и линейный, будут измеряться одинаковым числом соответствующих единиц. Поэтому единицы измерения двугранных углов получают те же самые наименования, как и для углов линейных.

Таблица 3

Меры \ Углы	Полный угол (окружность)	Развернутый угол (полуокружность)	Прямой угол (квадрант)	Треть развернутого угла	Половина прямого угла	Треть прямого угла
В прямых углах	4d	2d	d	$\frac{2}{3}$ d	$\frac{1}{2}$d	$\frac{1}{3}$ d
В радианах	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
В артиллерийских делениях	6000	3000	1500	1000	750	500
В градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
В градах	400^g	200^g	100^g	$66\frac{2}{3}^g$	50^g	$33\frac{1}{3}^g$
В часах	24^h	12^h	6^h	4^h	3^h	2^h

Таблица 4

	В радианах	В арт. делениях	В градусах	В градах	В часах
Радиан	1	$955 \approx 1000$	57°,3	$63^g,9$	$3^h,82$
Артиллерийское деление	$\frac{\pi}{3000}$	1	$0°,06 = 3',6$	$\frac{1^g}{15}$	$0^h,004 = 14^s,4$
Градус	$\frac{\pi}{180}$	$16^2/_3$	1°	$1\frac{1}{9}^g$	$\frac{1}{15}^h = 4^m$
Град	$\frac{\pi}{200}$	15	0°,9	1^g	$0^h,06 = 3^m,6$
Час	$\frac{\pi}{12}$	250	15°	$16\frac{2}{3}^g$	1^h

Так как угол между двумя кривыми измеряется углом между касательными, то и здесь могут быть применены те же приемы косвенного измерения.

Сферический угол, как мы знаем (см. § 5), может быть связан либо с линейным, либо с двугранным углом, либо непосредственно с дугой окружности, т. к. он измеряется заключенной между его сторонами дугой большого круга, для которой вершина угла служит полюсом. Если мы примем за единицу измерения сферический угол, для которого соответствующая дуга равняется какой-либо единице измерения дуг, то и сферический угол и соответствующая ему дуга будут измеряться одинаковым числом тех и других единиц соответственно. Таким образом, единицы измерения сферических углов имеют те же наименования, как и в остальных случаях.

§ 39. Практическое замечание о решении треугольников

В § 27 мы упоминали о так называемом правиле Лаланда. Это правило непосредственно относится к решению плоских прямоугольных треугольников, а именно к случаю, когда треугольник нужно решить по двум данным катетам.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC (черт. 71) даны катеты b и c. Требуется вычислить его острые углы B и C и гипотенузу a.

Из чертежа 71 будем иметь следующие очевидные формулы:

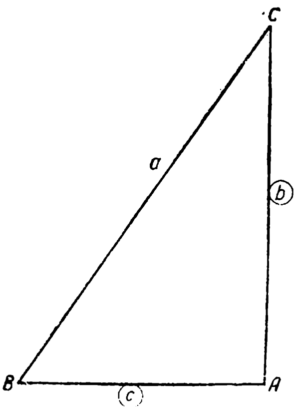
$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c},$$

$$C = 90^\circ - B,$$

$$a = \frac{b}{\sin B} \quad \text{или} \quad a = \frac{c}{\cos B}.$$

Можно предложить удобный способ для вычислений по этим формулам, который и формулируется следующим правилом.

Правило. Чтобы решить прямоугольный треугольник по двум катетам, нужно вычесть из логарифма одного катета, безразлично какого, логарифм другого; разность эта есть lg tg одного из углов; какого именно, для дальнейшего применения не имеет никакого значения. Далее нужно выбрать из ***крайнего правого столбца*** таблицы, имеющего ***сверху*** надпись **cos**, ***дополнение логарифма,*** который соответствует только что найденному тангенсу, и ***прибавить это дополнение к логарифму большего катета;*** тогда полученная сумма будет логарифмом гипотенузы.



Черт. 71

Доказательство.

Имеем

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}.$$

Пусть

$$b > c.$$

Тогда будет и $B > C$. Но так как $B + C = 90^\circ$, то будем иметь $B > 45^\circ$. В таком случае логарифм в последнем правом столбце таблицы будет $\lg \sin B$, и так как $a = \frac{b}{\sin B}$, то, прибавляя дополнение этого логарифма к $\lg b$, т. е. к большему логарифму, действительно получим логарифм гипотенузы.

Пусть, наоборот, $b < c$, тогда и $B < C$; и, следовательно, $B < 45^\circ$, т. е. логарифм в последнем правом столбце таблиц будет $\lg \cos B$. Так как $a = \frac{c}{\cos B}$, то опять, прибавляя дополнение нашего логарифма к большему логарифму, т. е. в этом случае к $\lg c$, мы получим логарифм гипотенузы.

Таким образом, применимость так называемого правила Лаланда во всех могущих встретиться случаях доказана.

Вычисления рекомендуется вести в таком порядке. Выписывают $\lg b$ и $\lg c$, с помощью которых вычисляется $\lg \operatorname{tg} B$, по формуле

$$\lg \operatorname{tg} B = \lg b - \lg c$$

и вписывают их в схему на таком расстоянии один от другого, чтобы между ними можно было вписать доп. $\left\{ \begin{matrix} \lg \sin \\ \lg \cos \end{matrix} \right.$ B, что читается дополнение $\lg \sin B$ или $\lg \cos B$. При этом нет никакой необходимости задумываться над вопросом, представляет ли взятый из последнего правого столбца логарифм дополнение логарифма синуса или логарифма косинуса угла B. Нужно только помнить, что это дополнение всегда нужно прибавлять к большему из логарифмов, между которыми оно стоит, т. е. к логарифму большего катета.

Пример. Решить прямоугольный треугольник, если даны его катеты:

$$b=32{,}17,$$
$$c=19{,}35.$$

Решение

$\lg b$	1.50 745	К большему!	B	58°58′25″
доп. $\left\{\begin{matrix}\lg\sin\\ \lg\cos\end{matrix}\right. B$	0.06 706		C	31 1 35
$\lg c$	1.28 668		a	37,542
$\lg \operatorname{tg} B$	0.22 077			
$\lg a$	1.57 451			

Когда требуется вычислить только гипотенузу, то следует вычислять по той же схеме, с тем только различием, что угла B находить не надо, а от $\lg \operatorname{tg} B$ прямо перейти к доп. $\left\{\begin{matrix}\lg\sin\\ \lg\cos\end{matrix}\right. B$, интерполируя с помощью специальных табличек, помещаемых во многих таблицах логарифмов на каждой странице ниже так называемых Partes proportionales.

Пример. Катеты прямоугольного треугольника суть 324,37 и 742,73; вычислить гипотенузу.

Решение

Катеты 324,37	2.51 104		
	0.03 791	доп. $\left\{\begin{matrix}\lg\sin\\ \lg\cos\end{matrix}\right.$	К большему!
Катеты 742,73	2.87 083		
	9.64 021	tg	
Гипотенуза $=810{,}48$	2.90 874		

Переходя от $\lg \operatorname{tg}\ldots$ 9.64 021 к доп. $\left\{\begin{matrix}\lg\sin\\ \lg\cos\end{matrix}\right.\ldots$0.03 791, приходится или непосредственно решать пропорцию $x:5=18:34$, откуда $x=\frac{5}{34}\times 18=$ $=3$, или воспользоваться вспомогательной табличкой, помещенной на той же странице справа внизу и надписанной сверху $\frac{5}{34}$, где 5 и 34 — табличные разности $\lg\cos$ и $\lg \operatorname{tg}$ соответственно.

Изложенное правило может найти применение и при решении других тригонометрических задач. Если тангенс какого-нибудь искомого угла x можно представить как отношение двух данных величин N и D, т. е. если дано

$$\operatorname{tg} x=\frac{N}{D},$$

то можно считать N и D катетами некоторого прямоугольного (плоского) треугольника, один из острых углов которого есть x. Если при этом другая искомая величина y связана с x соотношением $y=\frac{N}{\sin x}$ или $y=\frac{D}{\cos x}$, то y можно рассматривать как гипотенузу этого треугольника и вычислять по этому же правилу. Заметим, между прочим, что оба эти соотношения вытекают одно из другого. В самом деле, пусть дано $\operatorname{tg} x=\frac{N}{D}$ (а) и $y=\frac{N}{\sin x}$ (б). Тогда из (а) имеем $N=D\cdot\operatorname{tg} x$; подставляя вместо N это соотношение в выражение (б), получим:

$$y=\frac{D\cdot\operatorname{tg} x}{\sin x},$$

или

$$y=\frac{D\cdot\sin x}{\sin x\cos x},$$

или, по сокращении,

$$y=\frac{D}{\cos x}.$$

Точно так же можно, и наоборот, показать, что если дано $\operatorname{tg} x=\frac{N}{D}$ и $y=\frac{D}{\cos x}$, то отсюда следует, что $y=\frac{N}{\sin x}$.

В сферической тригонометрии мы встретились с применением этого правила при решении косоугольных треугольников, а именно во II и III случаях решения косоугольных треугольников по аналогиям Непера и формулам Делямбра-Гаусса.

Во II случае у нас оказалось (см. § 27, II случай, решение 4):

$$x=\frac{A+B}{2} \text{ и } x'=\frac{A-B}{2},$$

$$N=\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a-b),\quad N'=\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a-b),$$

$$D=\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a+b),\quad D'=\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(a+b),$$

и, наконец, $y=\cos\frac{1}{2}c$ и $y'=\sin\frac{1}{2}c$.

В III же случае наши фиктивные треугольники характеризовались следующими значениями сторон и углов (см. § 27, III случай, решение 4):

$$x=\frac{a+b}{2},\quad x'=\frac{a-b}{2},$$

$$N=\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A-B),\quad N'=\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A-B),$$

$$D=\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(A+B),\quad D'=\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}(A+B),$$

и, наконец, $y=\sin\frac{1}{2}C$ и $y'=\cos\frac{1}{2}C$.

Эти соображения поясняют ход решения и построение схем в приведенных в § 27 численных примерах на указанные выше случаи.

§ 40. Диференциальные соотношения сферического треугольника

Если в данном сферическом треугольнике изменятся три каких-либо его элемента, то изменятся и три его остальных элемента и мы получим новый сферический треугольник. Если изменения данных трех элементов бесконечно малы, то изменения других трех элементов также будут бесконечно малы. В этом случае, вместо того, чтобы решать новый, измененный треугольник непосредственно, вычисление проводят по так называемым диференциальным формулам.

Пусть три стороны треугольника a, b и c получили бесконечно малые приращения da, db и dc соответственно. По формулам (11) (см. § 10) имеем:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

Диференцируя по всем переменным, получим:

$$\begin{aligned}+\sin a\,da = &+(\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A)\,db+\\ &+(\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A)\,dc+\\ &+\sin b\sin c\sin A\,dA.\end{aligned}$$

Заменяя выражения в скобках по формулам (15), а произведение $\sin c\sin A$ по теореме синусов и сокращая на $\sin a$, найдем:

$$da=\cos C\,db+\cos B\,dc+\sin b\sin C\,dA,$$

причем, используя еще раз теорему синусов, последний член можно написать также в виде

$$+\sin B\sin c\,dA.$$

Это соотношение словами можно формулировать так:

Диференциал стороны сферического треугольника равняется сумме диференциалов двух других сторон, умноженных соответственно на косинусы углов, заключенных между каждой из этих сторон и первой стороной, плюс диференциал угла, противолежащего первой стороне, умноженный на синусы угла и стороны, лежащих между первой стороной и противолежащим ей углом.

Применяя эту словесную формулировку для всех возможных случаев или делая круговую перестановку сторон и углов соответственно, можем получить:

$$\left.\begin{array}{c} da = \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin B \sin c\,dA \\ (\text{или } + \sin b \sin C\,dA) \\ db = \cos A\,dc + \cos C\,da + \sin C \sin a\,dB \\ (\text{или } + \sin c \sin A\,dB) \\ dc = \cos B\,da + \cos A\,db + \sin A \sin b\,dC \\ (\text{или } + \sin a \sin B\,dC) \end{array}\right\}. \qquad (\text{а})$$

Пусть далее три угла сферического треугольника A, B и C получили бесконечно малые приращения dA, dB и dC соответственно. Тогда, диференцируя выражение для косинуса стороны [см. § 11, форм. (12)]

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

будем иметь:

$$-\sin A\,dA = (\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a)\,dB +$$
$$+ (\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a)\,dC - \sin B \sin C \sin a\,da.$$

Заменяя выражения в скобках по формулам (16) (см. § 14), а произведение $\sin C \sin a$ — по теореме синусов (см. § 12) и сокращая на $-\sin A$, получим:

$$dA = -\cos c\,dB - \cos b\,dC + \sin B \sin c\,da,$$

причем, используя еще раз теорему синусов, последний член можно представить также в виде

$$+ \sin b \sin C\,da.$$

Словесная формулировка для этого соотношения будет:

Диференциал угла сферического треугольника равняется сумме диференциалов двух других углов со знаками минус, умноженных соответственно на косинусы сторон, заключенных между каждым из этих углов и первым углом, плюс диференциал противолежащей первому углу стороны, умноженный на синусы стороны и угла, лежащих между первым углом и противолежащей ему стороной.

По этой формулировке или путем круговой перестановки букв так же, как и в первом случае, получаем:

$$\left.\begin{array}{c} dA = -\cos c\,dB - \cos b\,dC + \sin b \sin C\,da \\ (\text{или } + \sin B \sin c\,da) \\ dB = -\cos a\,dC - \cos c\,dA + \sin c \sin A\,db \\ (\text{или } + \sin C \sin a\,db) \\ dC = -\cos b\,dA - \cos a\,dB + \sin a \sin B\,dc \\ (\text{или } + \sin A \sin b\,dc) \end{array}\right\}. \qquad (\text{б})$$

Запишем теперь на основании теоремы синусов [см. § 12, форм. (14)]:

$$\sin a \sin B = \sin A \sin b.$$

Взяв от обоих частей этого равенства логарифмические диференциалы, сразу же найдем

$$\operatorname{ctg} a\, da + \operatorname{ctg} B\, dB = \operatorname{ctg} A\, dA + \operatorname{ctg} b\, db,$$

а по аналогии:

$$\operatorname{ctg} a\, da + \operatorname{ctg} C\, dC = \operatorname{ctg} A\, dA + \operatorname{ctg} c\, dc \qquad \text{(в)}$$

и

$$\operatorname{ctg} b\, db + \operatorname{ctg} C\, dC = \operatorname{ctg} B\, dB + \operatorname{ctg} c\, dc$$

Словами это можно выразить так:

Сумма диференциалов стороны сферического треугольника и прилежащего к ней угла, умноженных на котангенсы тех же элементов соответственно, равняется такой же сумме, составленной для диференциалов соответственно противолежащих им элементов.

Если же мы возьмем выражение теоремы синусов в виде равенства трех отношений [см. § 12, форм. (13)], т. е.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C},$$

и выполним логарифмическое диференцирование каждого отношения, то непосредственно получим:

$$\operatorname{ctg} a\, da - \operatorname{ctg} A\, dA = \operatorname{ctg} b\, db - \operatorname{ctg} B\, dB = \operatorname{ctg} c\, dc - \operatorname{ctg} C\, dC. \qquad \text{(г)}$$

Следовательно, *разность диференциала стороны сферического треугольника и диференциала противолежащего ей угла, умноженных соответственно на котангенсы этих же элементов, сохраняют для данного сферического треугольника свою величину для любой пары противолежащих элементов.*

Наконец, воспользуемся формулой котангенсов или, иначе говоря, формулой четырех элементов (17) (см. § 15):

$$\operatorname{ctg} a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \operatorname{ctg} A.$$

Диференцируя и меняя знаки на обратные, получаем:

$$\frac{\sin b}{\sin^2 a}\, da = (\operatorname{ctg} a \cos b + \sin b \cos C)\, db + (\cos b \sin C - \cos C \operatorname{ctg} A)\, dC + \frac{\sin C}{\sin^2 A}\, dA.$$

Это выражение можно переписать так:

$$\frac{\sin b}{\sin^2 a}\, da = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C}{\sin a}\, db + \frac{-\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b}{\sin A}\, dC + \frac{\sin C}{\sin^2 A}\, dA.$$

Заменяя числители дробей в правой части по формулам (11) и (12) [см. §§ 10 и 11], будем иметь:

$$\frac{\sin b}{\sin^2 a}\, da = \frac{\cos c}{\sin a}\, db + \frac{\cos B}{\sin A}\, dC + \frac{\sin C}{\sin^2 A}\, dA.$$

Так как по теореме синусов

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \text{а} \quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin a},$$

то, делая соответствующие замены в левой части формулы и в последнем члене правой части, напишем:

$$\frac{\sin B}{\sin a \sin A}\, da = \frac{\cos c}{\sin a}\, db + \frac{\cos B}{\sin A}\, dC + \frac{\sin c}{\sin a \sin A}\, dA.$$

Наконец, умножая левую и правую часть равенства на $\sin a \sin A$, найдем окончательно:

$$\sin B\, da = \sin A \cos c\, db + \sin a \cos B\, dC + \sin c\, dA.$$

Применяя термины „крайний“ и „внутренний“ в том же самом смысле, как и в § 15, условимся называть угол и сторону, не входящие в соответствующую формулу четырех элементов, „третьими“. Тогда полученная нами формула будет читаться так:

Произведение синуса третьего угла на диференциал крайней стороны равняется произведению синуса крайнего угла на косинус третьей стороны и на диференциал внутренней стороны плюс произведение синуса крайней стороны на косинус третьего угла и на диференциал внутреннего угла и плюс произведение синуса третьей стороны на диференциал крайнего угла.

Применяя эту формулировку ко всем возможным в треугольнике случаям, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\sin B\,da &= \sin A\cos c\,db + \sin a\cos B\,dC + \sin c\,dA\\
\sin C\,da &= \sin A\cos b\,dc + \sin a\cos C\,dB + \sin b\,dA\\
\sin C\,db &= \sin B\cos a\,dc + \sin b\cos C\,dA + \sin a\,dB\\
\sin A\,db &= \sin B\cos c\,da + \sin b\cos A\,dC + \sin c\,dB\\
\sin A\,dc &= \sin C\cos b\,da + \sin c\cos A\,dB + \sin b\,dC\\
\sin B\,dc &= \sin C\cos a\,db + \sin c\cos B\,dA + \sin a\,dC
\end{aligned}\right\}. \qquad (д)$$

Заметим, что 1-я, 3-я и 5-я из формул (д) могут быть получены одна из другой путем круговой перестановки букв; то же относится и к 2-й, 4-й и 6-й формулам. Для того же, чтобы перейти от 1-й формулы ко 2-й, от 3-й к 4-й или от 5-й к 6-й, нужно, вместо внутренней стороны и внутреннего угла, поставить третью сторону и третий угол и, соответственно, — наоборот.

Формулы (а), (б), (в) или (г) и (д) исчерпывают все возможные комбинации из 6 диференциалов элементов сферического треугольника по 4. Поэтому они достаточны для решения всех случаев, могущих когда-либо представиться. Так же, как и при решении косоугольных сферических треугольников, здесь может быть 6 случаев, в зависимости от того, диференциалы каких элементов треугольника будут даны, а именно: 1-й случай: даны da, db, dc; 2-й случай: даны da, db и dC; 3-й случай: даны dA, dB и dc; 4-й случай: даны da, db и dA; 5-й случай: даны dA, dB и da; 6-й случай: даны dA, dB и dC.

Если мы имеем 1-й случай, т. е. нам даны диференциалы сторон da, db и dc, то мы можем, используя все три из формул (а), рассматривать их как систему трех уравнений с тремя неизвестными dA, dB и dC, решая которую, найдем искомые диференциалы углов. Аналогично в 6-м случае, при данных dA, dB и dC, по формулам (б) могут быть найдены диференциалы сторон da, db и dc.

Во втором случае данными будут диференциалы da, db и dC, а искомыми dA, dB и dc. Следовательно, нужно взять одну из формул (а) и две из формул (д), а именно:

$$\left.\begin{aligned}
dc &= \cos B\,da + \cos A\,db + \sin A\sin b\,dC,\\
\sin B\,da &= \sin A\cos c\,db + \sin a\cos B\,dC + \sin c\,dA,\\
\sin A\,db &= \sin B\cos c\,da + \sin b\cos A\,dC + \sin c\,dB.
\end{aligned}\right\}$$

Во всех этих случаях каждая из диференциальных формул позволяет вычислить один из искомых диференциалов непосредственно. Подобным же образом можно поступать и в остальных трех случаях. Следует иметь в виду, что в частности некоторые из данных диференциалов могут оказаться равными нулю. Это будет означать, что соответствующие элементы треугольника остаются без изменения. В таком случае, очевидно, формулы для вычислений несколько упростятся.

Диференциальные формулы для прямоугольного сферического треугольника можно получить, либо подставляя в формулы (а), (б), (в), (г) и (д) значения $A = 90°$, либо логарифмируя и затем диференцируя формулы (18) и (19) параграфа 18-го. В обоих случаях получатся одинаковые результаты, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} a\, da &= \operatorname{tg} b\, db + \operatorname{tg} c\, dc, \\ \operatorname{tg} B\, dB &= \operatorname{tg} b\, db - \operatorname{ctg} C\, dC, \\ \operatorname{tg} C\, dC &= \operatorname{tg} c\, dc - \operatorname{ctg} B\, dB, \\ \operatorname{ctg} b\, db &= \operatorname{ctg} a\, da + \operatorname{ctg} B\, dB, \\ \operatorname{ctg} c\, dc &= \operatorname{ctg} a\, da + \operatorname{ctg} C\, dC; \end{aligned}\right\} \quad (\text{е})$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} a\, da &= \frac{2dB}{\sin 2B} + \frac{2dC}{\sin 2C}, \\ \operatorname{tg} B\, dB &= \frac{2da}{\sin 2a} - \frac{2dc}{\sin 2c}, \\ \operatorname{tg} C\, dC &= \frac{2da}{\sin 2a} - \frac{2db}{\sin 2b}, \\ \operatorname{ctg} b\, db &= \frac{2dc}{\sin 2c} - \frac{2dC}{\sin 2C}, \\ \operatorname{ctg} c\, dc &= \frac{2db}{\sin 2b} - \frac{2dB}{\sin 2B}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{ж})$$

Подставляя всюду вместо катетов b и c их дополнения $(90^\circ - b)$ и $(90^\circ - c)$, предыдущие равенства можем переписать в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} a\, da &= -[\operatorname{ctg}(90^\circ - b)\, d(90^\circ - b) + \operatorname{ctg}(90^\circ - c)\, d(90^\circ - c)], \\ \operatorname{tg} B\, dB &= -[\operatorname{ctg}(90^\circ - b)\, d(90^\circ - b) + \operatorname{ctg} C\, dC], \\ \operatorname{tg} C\, dC &= -[\operatorname{ctg}(90^\circ - c)\, d(90^\circ - c) + \operatorname{ctg} B\, dB], \\ \operatorname{tg}(90^\circ - b)\, d(90^\circ - b) &= -[\operatorname{ctg} a\, da + \operatorname{ctg} B\, dB], \\ \operatorname{tg}(90^\circ - c)\, d(90^\circ - c) &= -[\operatorname{ctg} a\, da + \operatorname{ctg} C\, dC]; \end{aligned}\right\} \quad (\text{з})$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} a\, da &= 2\left[\frac{dB}{\sin 2B} + \frac{dC}{\sin 2C}\right], \\ \operatorname{tg} B\, dB &= 2\left[\frac{da}{\sin 2a} + \frac{d(90^\circ - c)}{\sin 2(90^\circ - c)}\right], \\ \operatorname{tg} C\, dC &= 2\left[\frac{da}{\sin 2a} + \frac{d(90^\circ - b)}{\sin 2(90^\circ - b)}\right], \\ \operatorname{tg}(90^\circ - b)\, d(90^\circ - b) &= 2\left[\frac{d(90^\circ - c)}{\sin 2(90^\circ - c)} + \frac{dC}{\sin 2C}\right], \\ \operatorname{tg}(90^\circ - c)\, d(90^\circ - c) &= 2\left[\frac{d(90^\circ - b)}{\sin 2(90^\circ - b)} + \frac{dB}{\sin 2B}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (\text{и})$$

Отсюда вытекает правило, аналогичное правилу Непера-Модюи:

Диференциал элемента прямоугольного сферического треугольника, умноженный на тангенс этого элемента, равняется:

либо отрицательной сумме диференциалов ***несмежных*** *с ним элементов, умноженных каждый на котангенс этого же элемента соответственно,*

либо удвоенной сумме диференциалов ***прилежащих*** *элементов, деленных каждый на синус соответствующего удвоенного элемента.*

При этом под знаками диференциала, тангенса, котангенса и синуса нужно, вместо катетов, брать их дополнения до 90°.

Если даны диференциалы каких-либо двух элементов прямоугольного сферического треугольника, то, пользуясь вышеприведенным правилом, можно написать формулу для определения любого из диференциалов трех остальных элементов треугольника, подобному тому, как мы это делаем по правилу Непера-Модюи для искомых элементов треугольника при его решении. При нахождении диференциалов можно различать 6 случаев, вполне аналогичных случаям решения прямоугольных сферических треугольников, указанным в § 22, а именно: 1-й сл чай: даны da и db; 2-й случай: даны db и dc; 3-й случай: даны da и dB; 4-й случай: даны db и dC; 5-й случай: даны db и dB; 6-й случай: даны dB и dC. Если нам даны, например (1-й случай), диференциалы гипотенузы и одного из катетов da и db, то по формулам (е) и (ж) или по нашему правилу для вычисления искомых диференциалов dC, dB и dc будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} C\, dC &= \frac{2da}{\sin 2a} - \frac{2db}{\sin 2b}, \\ \operatorname{ctg} b\, db &= \operatorname{ctg} a\, da + \operatorname{ctg} B\, dB, \\ \operatorname{tg} a\, da &= \operatorname{tg} b\, db + \operatorname{tg} c\, dc. \end{aligned}\right\}$$

Таким же образом могут быть получены рабочие формулы и в остальных случаях.

На практике диференциальными формулами пользуются для вычисления малых конечных изменений элементов сферического треугольника, если даны малые конечные изменения нескольких (от 1 до 3) его элементов. Однако не следует упускать из виду, что, заменяя в выведенных нами формулах диференциалы (d) конечными изменениями (Δ), мы будем получать только приближенные формулы, точные только до малых первого порядка включительно.

§ 41. Решение сферических треугольников с малыми сторонами по способу аддитаментов

Как известно, в анализе для $\sin x$ дается нижеследующее разложение в ряд [см. § 29, форм. (39)]:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{180} - \ldots$$

Если x мало, то, ограничиваясь двумя первыми членами этого ряда и вынося x за скобку, будем иметь с точностью до малых четвертого порядка относительно x:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right).$$

Возьмем натуральные логарифмы правой и левой части этого выражения:

$$\ln \sin x = \ln x + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6}\right).$$

Из анализа известно, что

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Следовательно, ограничиваясь первым членом разложения, можем написать:

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = -\frac{x^2}{6}.$$

Тогда, очевидно, будем иметь:

$$\ln \sin x = \ln x - \frac{x^2}{6}.$$

Перейдем теперь к десятичным логарифмам, пользуясь соотношением

$$\lg_{10} x = M \ln x,$$

где M — модуль десятичных логарифмов:

$$\lg \sin x = \lg x - \frac{Mx^2}{6}.$$

Величина $\frac{Mx^2}{6}$ называется *аддитаментом* x и обозначается A_x. Следовательно, пользуясь этим обозначением, можем записать:

$$\lg \sin x = \lg x - A_x, \tag{a}$$

где

$$A_x = \frac{Mx^2}{6}. \qquad (б)$$

Сравнивая предыдущий вывод с изложенным в § 30, легко убеждаемся, что аддитамент A_x — это то же самое, что логарифмическая поправка $\sigma(x)$; только в формуле (б) для A_x аргумент x выражен в радианной мере (в так называемой отвлеченной), а в формулах для $\sigma(x)$ в § 30 аргумент x выражен в градусных секундах ($''$) или в секундах часовых (^{s}).

Пусть нам дан сферический треугольник ABC, стороны которого a, b, c, выраженные в радианной мере, малы по сравнению с радианом (см. черт. 52) (не более, скажем, 0,03 — 0,04 радиана). Обозначим, как и ранее, линейную длину сторон треугольника ABC буквами a_1, b_1, c_1. Тогда будем иметь:

$$a = \frac{a_1}{R}, \quad b = \frac{b_1}{R} \text{ и } c = \frac{c_1}{R}, \qquad (в)$$

где R — радиус сферы. Согласно предположению, a_1, b_1 и c_1 малы по сравнению с радиусом сферы R. С такими треугольниками, как это изложено в § 33, мы обычно встречаемся в высшей геодезии. Как правило, при этом бывает известна линейная длина одной из его сторон, скажем, a_1 и два или все три его **сферических** угла A, B и C, а требуется найти длины двух других его сторон b_1 и c_1. Вместо того, чтобы решать его по теореме Лежандра (см. § 32, следствие 1), можно это решение провести с помощью аддитаментов. Для этой цели на основании теоремы синусов напишем:

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A},$$

откуда

$$\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Логарифмируя это равенство, воспользуемся формулой (а):

$$\lg b - A_b = \lg a - A_a + \lg \frac{\sin B}{\sin A}.$$

По формулам (в) имеем:

$$\lg b = \lg b_1 - \lg R \quad \text{и} \quad \lg a = \lg a_1 - \lg R.$$

Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, найдем:

$$\lg b_1 - \lg R - A_b = \lg a_1 - \lg R - A_a + \lg \frac{\sin B}{\sin A},$$

или

$$\lg b_1 - A_b = \lg a_1 - A_a + \lg \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Введем обозначение

$$\lg b' = \lg a_1 - A_a + \lg \frac{\sin B}{\sin A},$$

где b' часто называют **нередуцированным** значением длины стороны b_1. Тогда получим:

$$\lg b_1 - A_b = \lg b',$$

или окончательно

$$\lg b_1 = \lg b' + A_b. \qquad (г)$$

Подобным же образом найдем:

$$\lg c_1 = \lg c' + A_c, \qquad (д)$$

где

$$\lg c' = \lg a_1 - A_a + \lg \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Из формул (г) и (д) вытекает следующее правило: чтобы получить логарифм линейной длины стороны малого сферического треугольника ABC, нужно прибавить к логарифму нередуцированного значения длины этой стороны ее аддитамент. Отсюда и происходит самое название „аддитамент“, т. к. по-английски слово additament значит прибавка.

§ 42. Сферические треугольники с сверхтупыми углами

Сверхтупыми углами называются углы, большие 180°, но меньшие 360°. С такими углами мы встречаемся в главе VII, в §§ 34—36: а именно, одна из сферических координат, долгота λ, как там указано, может принимать всевозможные значения от 0° до 360°. Таким образом, при решении различных задач аналитической геометрии на сфере чисто геометрического характера или с содержанием, взятым из астрономии или геодезии, приходится иногда иметь дело с треугольниками, стороны которых меньше 180°, а углы — больше 180°, но меньше 360°. Это будут уже треугольники Мёбиуса второго типа (всех типов 16) или, по обозначению Мёбиуса, треугольники типа $T_{01}^{(0)}$. То обстоятельство, что треугольники такого типа могут иногда встретиться на практике, заставляет нас несколько более подробно остановиться на этом вопросе.

Если рассматриваются треугольники, у которых стороны и углы могут иметь значения, большие 180°, то для того, чтобы однозначно определять дуги и углы, необходимо установить следующие добавочные соглашения:

1. На каждой дуге большого круга должно быть установлено определенное направление, которое считается положительным. Противоположное направление будет считаться отрицательным.

2. Стороны a, b и c сферического треугольника ABC определены тем, что, переходя непременно от A к B, от B к C и от C к A, мы должны всегда двигаться по данной окружности большого круга в положительном направлении.

3. Если требуется определить угол (ab) между двумя дугами больших кругов a и b, то прежде всего надо установить, какая из двух точек их пересечения принимается за вершину угла. Вторая точка пересечения иногда называется „противоположной вершиной“.

4. На сфере должно быть установлено направление вращения, которое считается положительным: по часовой стрелке или против часовой стрелки, т. е. правостороннее или левостороннее. Противоположное вращение будет считаться тогда отрицательным.

5. Под углом (ab) разумеется тот угол, на который нужно, стоя на сфере в вершине угла, повернуть вокруг нее положительное направление окружности a в сторону положительного вращения до совмещения с положительным направлением окружности b.

Если мы изменим положительное направление на одной из сторон угла на противоположное, то угол (ab) переходит в $180° + (ab)$. Одновременное изменение положительного направления на обеих сторонах угла оставляет угол без изменения.

Если же мы меняем направление положительного вращения на сфере или заменяем вершину угла противоположной, то угол (ab) переходит в $360° - (ab)$.

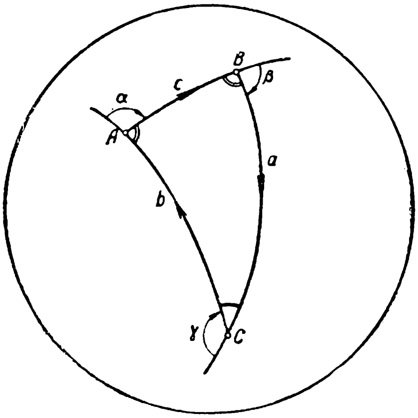
Если на сфере даны три точки A, B и C, то, обозначая по Мёбиусу углы сферического треугольника ABC соответственно буквами α, β и γ, можно сказать, что углы треугольника определяются вершинами A, B и C и равенствами:

$$\alpha = (bc),$$

$$\beta = (ca),$$

$$\gamma = (ab).$$

В § 3 было сказано, что три точки на сфере определяют 16 треугольников Мёбиуса. Это объясняется тем, что на каждой из трех дуг, образующих его стороны, может быть выбрано двумя способами положительное направление, и, кроме того, положительное направление вращения на сфере также может быть выбрано двумя способами, так что получается $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ комбинаций.



Черт. 72

Заметим, что если мы возьмем эйлеров треугольник, то в обозначениях Мёбиуса углы его будут отличаться от углов, принимаемых обычно (их мы попрежнему будем обозначать буквами A, B и C). Эйлеров треугольник в эйлеровых обозначениях называется обыкновенным треугольником. В обозначениях Мёбиуса это будет мёбиусов треугольник первого типа или типа $T_{00}^{(0)}$. Из черт. 72 видно, что между мёбиусовыми и обыкновенными углами существуют следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - A \\ \beta &= 180^\circ - B \\ \gamma &= 180^\circ - C \end{aligned}\right\}. \tag{I}$$

Вследствие этого формулы, выведенные нами в предыдущем изложении для обыкновенных треугольников, для треугольников Мёбиуса будут иметь следующий вид:

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \alpha; \tag{11'}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a; \tag{12'}$$

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}; \tag{13'}$$

$$\sin a \cos \beta + \cos b \sin c + \sin b \cos c \cos \alpha = 0; \tag{15'}$$

$$\sin \alpha \cos b + \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \cos a = 0; \tag{16'}$$

$$\operatorname{ctg} a \sin b + \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \alpha = 0; \tag{17'}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}}; \tag{24'}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \sin c}}; \tag{25'}$$

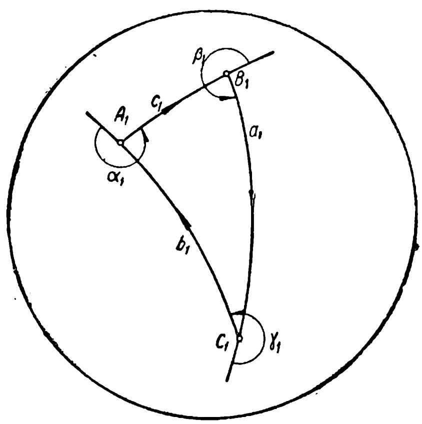
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin (p-b) \sin (p-c)}}; \tag{26'}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) &= - \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) &= - \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \end{aligned}\right\}; \tag{34'}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)&=-\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)&=-\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\end{aligned}\right\};\qquad(35')$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)&=\pm\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\frac{\gamma}{2}\\ \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)&=\mp\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}\sin\frac{\gamma}{2}\\ \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)&=\mp\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{\gamma}{2}\\ \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)&=\pm\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}\cos\frac{\gamma}{2}\end{aligned}\right\}.\qquad(33')$$

Формулы, для удобства сравнения, отмечены теми же номерами, как и соответствующие им формулы для обыкновенного треугольника в предыдущем изложении, только со значками $'$ вверху. В формулах (24′), (25′), (26′) и (33′) выбор верхнего или нижнего знака зависит от типа треугольника. Так, например, для первого типа нужно взять верхний знак, а для второго типа — нижний.



Черт. 73

Возможны два, и только два, типа треугольников, у которых все стороны меньше 180°. Это, во-первых, треугольники, подобные изображенному на черт. 72, т. е. треугольники первого типа, у которых все углы также меньше 180°. Если, не изменяя длины сторон такого треугольника, мы изменим направление положительного вращения на сфере, то получим треугольник второго типа (черт. 73), у которого все стороны меньше 180°, а все углы больше 180°. У остальных типов треугольников по крайней мере одна сторона и один угол должны быть больше 180°.

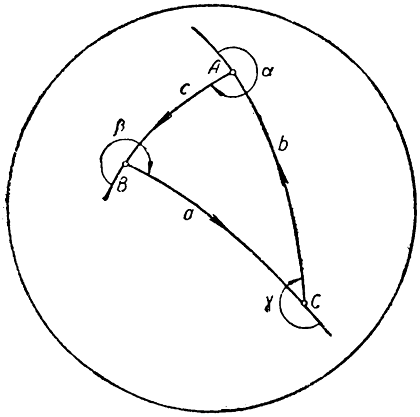
Из сравнения чертежей 72 и 73 видно, что углы этих треугольников взаимно дополняют друг друга до 360°, т. е.

$$\alpha_1=360^\circ-\alpha,$$
$$\beta_1=360^\circ-\beta,$$
$$\gamma_1=360^\circ-\gamma.$$

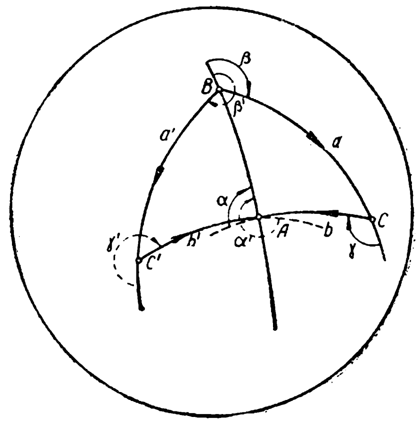
Треугольник второго типа может быть также получен, если мы, не изменяя направления положительного вращения на сфере и длины сторон треугольника первого типа, расположим буквы при его вершинах в обратном порядке и одновременно изменим положительное направление на каждой из сторон на обратное, как это изображено на черт. 74.

Принимая во внимание условие 2 (см. выше стр. 123), можно сказать, что мы меняем при этом направление обхода треугольника. Таким образом, если направление обхода треугольника и направление положительного вращения на сфере совпадают, то получается треугольник первого типа, если же эти направления противоположны, то — второго типа, при условии, конечно, что все три стороны меньше 180°.

Особый интерес в практическом отношении представляет случай, когда оба рассматриваемые треугольника симметричны и имеют одну общую сторону, каковы, например, сферические треугольники ABC и ABC' на черт. 75. Так как в треугольнике ABC направление обхода совпадает с направлением вращения на сфере, то это будет треугольник первого типа, и наоборот, треугольник ABC', симметричный с ним, будет треугольником второго типа, так как для него обход и вращение на сфере имеют противоположные направления. Так как в симметричных треугольниках эйлеровы углы попарно соответственно равны („против равных сторон лежат и равные углы"), то равны между собою попарно и смежные с ними углы (обыкновенные, не мёбиусовы), а следовательно, как это легко усмотреть из чертежа, мёбиусовы углы одного треугольника дополняют до 360° мёбиусовы углы другого. Обозначая для отличия мёбиусовы углы треугольника ABC' буквами α', β' и γ' и помня, что по данному



Черт. 74



Черт. 75

$$a' = a,$$
$$b' = b$$

и c — общая сторона, можем предыдущее заключение записать так:

$$\alpha' = 360° - \alpha,$$
$$\beta' = 360° - \beta,$$
$$\gamma' = 360° - \gamma.$$

На практике такой случай может представиться, например, при решении следующей задачи.

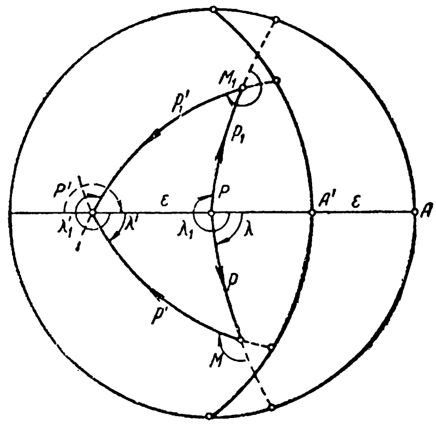
Задача. Даны две системы сферических координат $[PA]$ и $[P'A']$, из которых вторая получена из первой перемещением полюса P в точку P' по окружности большого круга $AA'PP'$ на дугу $PP' = \varepsilon$ („преобразование полюса", см. § 35). Даны, кроме того, точка $M(\varphi, \lambda)$ и точка M_1, симметричная с точкой M относительно большого круга $AA'PP'$. Требуется найти координаты φ_1, λ_1 точки M_1 в системе $[PA]$ и координаты той и другой точки в системе $[P'A']$ (см. черт. 76).

Так как точки M_1 и M симметричны относительно большого круга $AA'PP'$, т. е. они лежат на одном большом круге (этот круг не показан на черт. 76), перпендикулярном к кругу $AA'PP'$ и на равных сферических расстояниях от него, то треугольники $P'PM$ и $P'PM_1$ будут симметричны. Отсюда непосредственно заключаем с помощью чертежа 76, что

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p, \\ \varphi_1 &= \varphi, \\ \lambda_1 &= 360^\circ - \lambda. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

Точно так же

$$\left.\begin{aligned} p_1' &= p', \\ \varphi_1' &= \varphi', \\ \lambda_1' &= 360^\circ - \lambda'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(б)}$$



Черт. 76

Чтобы выразить искомые величины через данные, надо прибегнуть к решению сферических треугольников $P'PM$ и $P'PM_1$, в каждом из которых нам известны по две стороны и углу между ними: в треугольнике $P'PM$ — ε, p и угол (εp), а в треугольнике $P'PM_1$ — ε и p_1 и угол (εp_1). Для треугольника $P'PM$ можно либо воспользоваться обычной астрономической системой формул, либо решать его по совокупности формул (11'), (13') и (15') настоящего параграфа. В обоих случаях в согласии с результатами пункта 4 параграфа 35 получим:

$$\left.\begin{aligned} \cos p' &= \cos\varepsilon\cos p - \sin\varepsilon\sin p\cos\lambda, \\ \sin p'\sin\lambda' &= \sin\lambda\sin p, \\ \sin p'\cos\lambda' &= \cos p\sin\varepsilon + \sin p\cos\varepsilon\cos\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(в)}$$

Для треугольника $P'PM_1$ при решении его по формулам (11'), (13') и (15') ввиду того, что

$$\text{угол } (\varepsilon p_1) = \lambda_1,$$
$$\text{а угол } (p_1'\varepsilon) = 180^\circ + (360^\circ - \lambda_1') = 540^\circ - \lambda_1',$$

аналогично найдем:

$$\left.\begin{aligned} \cos p_1' &= \cos p_1\cos\varepsilon - \sin p_1\sin\varepsilon\cos\lambda_1, \\ \sin\lambda_1'\sin p_1' &= \sin\lambda_1\sin p_1, \\ \sin p_1'\cos\lambda_1' &= \cos p_1\sin\varepsilon + \sin p_1\cos\varepsilon\cos\lambda_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(г)}$$

Но ввиду равенств (а) и (б) формулы (г) тождественны с формулами (в) и задача может быть решена либо по совокупности формул (в), либо по совокупности формул (г). Обычно она и решается по формулам (в), а когда λ' найдено, λ_1' вычисляют по последней из формул (б). Обращаем внимание на то, что и третий угол треугольника $P'PM_1$, т. е. угол (p_1p_1'), больше 180°.

Можно привести и другие практические задачи, в которых приходится иметь дело с мёбиусовыми треугольниками второго типа.

Приложение 1

ЗАДАЧИ ПО СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ

Настоящее собрание задач, примеров и вопросов по сферической геометрии и, главным образом, тригонометрии составлено в помощь изучающим и преподающим этот предмет и дает достаточный материал для текущих упражнений и для самостоятельных занятий учащихся. Часть задач составлена автором, а часть заимствована из различных учебников и руководств. Большинство задач снабжено ответами, а многие — также указаниями или примечаниями. Это, главным образом, имеет место для более трудных задач. Такие задачи отмечены знаком * после номера.

91. $$\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

или

$$R = \operatorname{tg}\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}.$$

92. $$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}},$$

или

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin(p-a) = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin(p-b) =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin(p-c).$$

98. $$\operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin p,$$

$$\operatorname{tg} r_b = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin p,$$

$$\operatorname{tg} r_c = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin p.$$

Приложение 2

Таблица логарифмических поправок для малых углов, выраженных в градусных мерах, в единицах пятого десятичного знака

x	$\lg x''$	$\sigma(x)$	x	$\lg x''$	$\sigma(x)$	x	$\lg x''$	$\sigma(x)$
0°12′,8	3.885	0.1	1°43′,1	3.791	6.5	3° 9′,5	4.0558	22
18 ,1	3.035	0.2	46 ,9	3.807	7.0	13 ,8	4.0655	23
22 ,1	3.123	0.3	50 ,7	3.822	7.5	18 ,0	4.0747	24
25 ,6	3.186	0.4	54 ,3	3.8362	8.0	22 ,0	4.0836	25
28 ,6	3.234	0.5	57 ,8	3.8493	8.5	26 ,0	4.0921	26
31 ,3	3.274	0.6	2 1 ,2	3.8617	9.0	30 ,0	4.1003	27
33 ,8	3.307	0.7	4 ,5	3.8735	9.5	33 ,8	4.1082	28
36 ,1	3.336	0.8	7 ,8	3.8846	10	37 ,6	4.1158	29
38 ,3	3.362	0.9	14 ,0	3.9053	11	41 ,3	4.1232	30
40 ,4	3.385	1.0	19 ,9	3.9242	12	45 ,0	4.1303	31
49 ,5	3.473	1.5	25 ,7	3.9416	13	48 ,6	4.1372	32
57 ,2	3.535	2.0	31 ,2	3.9577	14	52 ,1	4.1439	33
13 ,9	3.584	2.5	36 ,5	3.9727	15	55 ,6	4.1504	34
10 ,0	3.623	3.0	41 ,6	3.9867	16	59 ,0	4.1567	35
15 ,6	3.657	3.5	46 ,6	3.9998	17	4 2 ,4	4.1628	36
20 ,8	3.686	4.0	51 ,4	4.0123	18	5 ,8	4.1687	37
25 ,8	3.711	4.5	56 ,1	4.0240	19	9 ,1	4.1745	38
30 ,5	3.734	5.0	3 0 ,7	4.0351	20	12 ,3	4.1801	39
34 ,8	3.755	5.5	5 ,2	4.0457	21	4°15 ,5	4.1856	40
1°39′,0	3.774	6.0	3° 9′,5	4.0558	22			

Приложение 3

Таблица натуральных поправок малых углов, выраженных в часовых единицах (0^s,001)

	1^m		2^m		3^m		4^m		5^m		6^m		
0^s	0,2	0	1,5	1	5,1	1	12,2	1	23,8	2	41,1	4	0^s
1	0,2	0	1,6	0	5,2	1	12,3	2	24,0	3	41,5	3	1
2	0,2	0	1,6	0	5,3	1	12,5	1	24,3	2	41,8	4	2
3	0,2	0	1,6	1	5,4	1	12,6	2	24,5	3	42,2	3	3
4	0,2	0	1,7	0	5,5	1	12,8	2	24,8	2	42,5	4	4
5	0,2	1	1,7	1	5,6	1	13,0	1	25,0	3	42,9	3	5
6	0,3	0	1,8	0	5,7	1	13,1	2	25,3	2	43.2	4	6
7	0,3	0	1,8	0	5,8	1	13,3	1	25,5	3	43,6	3	7
8	0,3	0	1,8	1	5,9	1	13,4	2	25,8	2	43,9	4	8
9	0,3	0	1,9	0	6,0	0	13,6	2	26,0	3	44,3	3	9
10	0,3	0	1,9	1	6,0	1	13,8	1	26,3	2	44,6	4	10
11	0,3	0	2,0	0	6,1	1	13,9	2	26,5	3	45,0	4	11
12	0,3	0	2,0	1	6,2	1	14,1	2	26,8	2	45,4	3	12
13	0,3	1	2,1	0	6,3	1	14,3	1	27,0	3	45,7	4	13
14	0,4	0	2,1	1	6,4	1	14,4	2	27,3	2	46,1	4	14
15	0,4	0	2,2	0	6,5	1	14,6	2	27,5	3	46,5	4	15
16	0,4	0	2,2	1	6,6	1	14,8	2	27,8	3	46,9	3	16
17	0,4	0	2,3	0	6,7	1	15,0	1	28,1	2	47,2	4	17
18	0,4	0	2,3	1	6,8	1	15,1	2	28,3	3	47,6	4	18
19	0,4	1	2,4	0	6,9	2	15,3	2	28,6	3	48,0	4	19
20	0,5	0	2,4	1	7,1	1	15,5	2	28,9	3	48,4	3	20
21	0,5	0	2,5	0	7,2	1	15,7	2	29,2	2	48,7	4	21
22	0,5	0	2,5	1	7,3	1	15,9	1	29,4	3	49,1	4	22
23	0,5	0	2,6	0	7,4	1	16,0	2	29,7	3	49,5	4	23
24	0,5	0	2,6	1	7,5	1	16,2	2	30,0	3	49,9	4	24
25	0,5	1	2,7	0	7,6	1	16,4	2	30,3	2	50,3	4	25
26	0,6	0	2,7	1	7,7	1	16,6	2	30,5	3	50,7	4	26
27	0,6	0	2,8	1	7,8	1	16,8	2	30,8	3	51,1	4	27
28	0,6	0	2,9	0	7,9	1	17,0	2	31,1	3	51,5	4	28
29	0,6	0	2,9	1	8,0	2	17,2	1	31,4	3	51,9	4	29
30	0,6		3,0		8,2		17,3		31,7		52,3		30

(Продолжение таблицы на стр. 151)

30	0,6	1	3,0	0	8,2	1	17,3	2	31,7	3	52,3	4	30
31	0,7	0	3,0	1	8,3	1	17,5	2	32,0	3	52,7	4	31
32	0,7	0	3,1	1	8,4	1	17,7	2	32,3	2	53,1	4	32
33	0,7	0	3,2	0	8,5	1	17,9	2	32,5	3	53,5	4	33
34	0,7	1	3,2	1	8,6	2	18,1	2	32,8	3	53,9	4	34
35	0,8	0	3,3	0	8,8	1	18,3	2	33,1	3	54,3	4	35
36	0,8	0	3,3	1	8,9	1	18,5	2	33,4	3	54,7	5	36
37	0,8	0	3,4	1	9,0	1	18,7	2	33,7	3	55,2	4	37
38	0,8	1	3,5	0	9,1	2	18,9	2	34,0	3	55,6	4	38
39	0,9	0	3,5	1	9,3	1	19,1	2	34,3	3	56,0	4	39
40	0,9	0	3,6	1	9,4	1	19,3	3	34,6	3	56,4	4	40
41	0.9	0	3,7	0	9,5	1	19,6	2	34,9	4	56,8	5	41
42	0.9	1	3,7	1	9,6	2	19,8	2	35,3	3	57,3	4	42
43	1,0	0	3,8	1	9,8	1	20,0	2	35,6	3	57,7	4	43
44	1,0	0	3,9	1	9,9	1	20,2	2	35,9	3	58,1	5	44
45	1,0	0	4,0	0	10,0	2	20,4	2	36,2	3	58,6	4	45
46	1,0	1	4,0	1	10,2	1	20,6	2	36,5	3	59,0	4	46
47	1,1	0	4,1	1	10,3	1	20,8	3	36,8	3	59,4	5	47
48	1,1	0	4,2	1	10,4	2	21,1	2	37,1	4	59,9	4	48
49	1,1	1	4,3	0	10,6	1	21,3	2	37,5	3	60,3	4	49
50	1,2	0	4,3	1	10,7	2	21,5	2	37,8	3	60,7	5	50
51	1,2	0	4,4	1	10,9	1	21,7	2	38,1	3	61,2	4	51
52	1,2	1	4,5	1	11,0	1	21,9	3	38,4	4	61,6	5	52
53	1,3	0	4,6	0	11,1	2	22,2	2	38,8	3	62,1	4	53
54	1,3	0	4,6	1	11,3	1	22,4	2	39,1	3	62,5	5	54
55	1,3	1	4,7	1	11,4	2	22,6	3	39,4	4	63,0	5	55
56	1,4	0	4,8	1	11,6	1	22,9	2	39,8	3	63,5	4	56
57	1,4	0	4,9	1	11,7	2	23,1	2	40,1	3	63,9	5	57
58	1,4	1	5,0	1	11,9	1	23,3	3	40,4	4	64,4	4	58
59	1,5	0	5,1	0	12,0	2	23,6	2	40.8	3	64,8	5	59
60^s	1,5		5,1		12,2		23,8		41,1		65,3		60^s
	1^m		2^m		3^m		4^m		5^m		6^m		

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VI

Площадь сферического треугольника. Сферический избыток

Глава VII

Аналитическая геометрия на сфере

Глава VIII

Дополнения

ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор А. И. Витман Техн. редактор И. А. Шленский

А09819. Сдано в набор 23/VII 1948 г. Подписано к печати 16/X 1948 г. Объем 9,75 п. л. Количество знаков в печ. л. 70 000. Уч.-изд. листов 17. Формат бумаги $70 \times 108^1/_{16}$. Тираж 5 000 экз. Цена 9 руб.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова треста «Полиграфкнига» Огиза при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц в тип. Упр. Дел. Сов. Министров СССР Зак. № 2744.