

С. П. ТИМОШЕНКО и С. ВОЙНОВСКИЙ-КРИГЕР

ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
В. И. КОНТОВТА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Г. С. ШАПИРО

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

6-05

T 41

УДК 624.073

THEORY OF PLATES AND SHELLS

S. TIMOSHENKO

Professor Emeritus of Engineering Mechanics
Stanford University

S. WOINOWSKY-KRIEGER

Professor of Engineering Mechanics
Laval University

Second Edition

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC
New York Toronto London
1959

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	8
Предисловие авторов	10
Введение	11
Глава I. Изгиб длинной прямоугольной пластинки по цилиндрической поверхности	14
1. Дифференциальное уравнение цилиндрического изгиба пластинки	14
2. Цилиндрический изгиб равномерно нагруженной прямоугольной свободно опертой по краям пластинки	16
3. Цилиндрический изгиб равномерно нагруженной прямоугольной, защемленной по краям, пластинки	23
4. Цилиндрический изгиб равномерно нагруженной прямоугольной пластинки с упруго защемленными краями	27
5. Влияние малых смещений продольных краев в плоскости пластинки на напряжения и прогибы	31
6. Приближенный метод вычисления параметра μ	35
7. Длинная равномерно нагруженная прямоугольная пластинка, имеющая малую начальную цилиндрическую кривизну	39
8. Цилиндрический изгиб пластинки на упругом основании	41
Глава II. Чистый изгиб пластинки	45
9. Наклон и кривизна слабо изогнутой пластинки	45
10. Соотношения между изгибающими моментами и кривизнами при чистом изгибе пластинки	50
11. Частные случаи чистого изгиба	56
12. Энергия деформации при чистом изгибе пластинки	60
13. Ограничения в применимости выведенных формул	62
14. Температурные напряжения в пластинке, защемленной по краям	64
Глава III. Симметричный изгиб круглой пластинки	66
15. Дифференциальное уравнение симметричного изгиба поперечно нагруженной круглой пластинки	66
16. Равномерно нагруженная круглая пластинка	69
17. Круглая пластинка с круглым отверстием в центре	73
18. Круглая пластинка, нагруженная концентрически	79
19. Круглая пластинка, нагруженная в центре	84
20. Поправки к элементарной теории симметричного изгиба круглой пластинки	88

Глава IV. Малые прогибы поперечно нагруженной пластинки	96
21. Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности	96
22. Граничные условия	100
23. Вариант вывода граничных условий	106
24. Приведение задачи об изгибе пластинки к исследованию перемещений мембраны	110
25. Влияние упругих постоянных на величину изгибающих моментов	115
26. Точная теория пластинки	116
Глава V. Свободно опертая прямоугольная пластинка	124
27. Свободно опертая прямоугольная пластинка под синусоидальной нагрузкой	124
28. Решение Навье для свободно опертой прямоугольной пластинки	128
29. Дальнейшие применения решения Навье	130
30. Другой способ решения задачи для свободно опертой равномерно нагруженной прямоугольной пластинки	133
31. Свободно опертая прямоугольная пластинка под гидростатическим давлением	145
32. Свободно опертая прямоугольная пластинка под нагрузкой в виде треугольной призмы	154
33. Частично загруженная свободно опертая прямоугольная пластинка	158
34. Загружение сосредоточенной силой свободно опертой прямоугольной пластинки	165
35. Изгибающие моменты в свободно опертой прямоугольной пластинке под сосредоточенной нагрузкой	168
36. Прямоугольная пластинка бесконечной длины, свободно опертая по краям	174
37. Изгибающие моменты в свободно опертой прямоугольной пластинке при равномерном нагружении ее по площади прямоугольника	183
38. Температурные напряжения в свободно опертой прямоугольной пластинке	187
39. Влияние деформации поперечного сдвига на изгиб тонкой пластинки	190
40. Прямоугольная пластинка переменной толщины	199
Глава VI. Прямоугольная пластинка при различных условиях опирания по краям	206
41. Изгиб прямоугольной пластинки моментами, распределенными по краям	206
42. Прямоугольная пластинка, два противоположных края которой свободно оперты, два других защемлены	211
43. Прямоугольная пластинка, три края которой свободно оперты и один защемлен	219
44. Прямоугольная пластинка, защемленная по всему контуру	223
45. Прямоугольная пластинка, у которой один или два смежных края свободно оперты, остальные же защемлены	233
46. Прямоугольная пластинка, два противоположных края которой свободно оперты, третий свободен, четвертый же защемлен или свободно оперт	235
47. Прямоугольная пластинка, три края которой защемлены, четвертый свободен	240
48. Прямоугольная пластинка, два противоположных края которой свободно оперты, два других свободны или упруго оперты	243

49. Прямоугольная пластинка, упруго опертая по четырем краям или опертая в вершинах, со свободными краями	246
50. Полубесконечная прямоугольная пластинка под равномерным давлением	249
51. Полубесконечная прямоугольная пластинка под сосредоточенными нагрузками	252
Глава VII. Неразрезная прямоугольная пластинка	257
52. Свободно опертая неразрезная пластинка	257
53. Приближенный расчет неразрезной равнопролетной пластинки	265
54. Изгиб пластинки, опирающейся на несколько рядов равноотстоящих колонн (безбалочное перекрытие)	274
55. Безбалочное перекрытие из девяти панелей и перекрытия с двумя свободными краями	283
56. Влияние жесткого соединения с колонной на моменты в безбалочном перекрытии	287
Глава VIII. Пластинки на упругом основании	290
57. Изгиб, симметричный относительно центра	290
58. Применение функций Бесселя к задаче об изгибе круглой пластинки	296
59. Прямоугольная неразрезная пластинка на упругом основании . .	301
60. Пластинка, несущая несколько рядов равноотстоящих колонн . .	308
61. Изгиб пластинки, покоящейся на полубесконечном упругом основании	310
Глава IX. Пластинки различных очертаний	316
62. Уравнения изгиба пластинки в полярных координатах	316
63. Круглая пластинка под нагрузкой, изменяющейся по линейному закону	319
64. Круглая пластинка под сосредоточенной нагрузкой	324
65. Круглая пластинка, опертая в нескольких точках по контуру . .	328
66. Пластинка, имеющая форму сектора круга	330
67. Круглая пластинка переменной толщины	334
68. Кольцевая пластинка линейно изменяющейся толщины	339
69. Круглая пластинка линейно изменяющейся толщины	341
70. Нелинейные задачи изгиба круглой пластинки	345
71. Эллиптическая пластинка	347
72. Треугольная пластинка	350
73. Косоугольная пластинка	356
74. Распределение напряжений вокруг отверстий	357
Глава X. Специальные и приближенные методы теории пластинок	362
75. Особенности при изгибе пластинки	362
76. Использование поверхностей влияния для расчета пластинок .	365
77. Функции влияния и характеристические функции	372
78. Применение бесконечных интегралов и преобразований	373
79. Метод комплексных переменных	378
80. Применение энергетического метода для вычисления прогибов	380
81. Иной способ применения энергетического метода	385
82. Различные приближенные методы. Комбинированный метод . .	387

83. Применение уравнений в конечных разностях к исследованию изгиба свободно опертой прямоугольной пластинки	391
84. Экспериментальные методы	402
Глава XI. Изгиб анизотропной пластинки	405
85. Дифференциальное уравнение изгиба	405
86. Определение жесткостей в различных частных случаях	407
87. Применение теории к расчету балочных сеток	411
88. Изгиб прямоугольной анизотропной пластинки	413
89. Изгиб круглой и эллиптической пластинок	418
Глава XII. Изгиб пластинки под совместным действием поперечных нагрузок и сил в ее срединной плоскости	421
90. Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности	421
91. Прямоугольная свободно опертая пластинка под совместным действием равномерно распределенной поперечной нагрузки и равномерного растяжения	423
92. Применение энергетического метода	426
93. Свободно опертая прямоугольная пластинка под совместным действием поперечных нагрузок и сил в ее срединной плоскости	430
94. Круглая пластинка при совместном действии поперечной нагрузки и растяжения или сжатия	434
95. Изгиб пластинки, имеющей малую начальную кривизну	437
Глава XIII. Большие прогибы пластинки	440
96. Изгиб круглой пластинки моментами, равномерно распределенными по контуру	440
97. Приближенные формулы для равномерно нагруженной круглой пластинки с большими прогибами	444
98. Точное решение для равномерно нагруженной круглой пластинки, защемленной по контуру	449
99. Круглая свободно опертая пластинка под равномерно распределенной нагрузкой	453
100. Круглая пластинка, нагруженная в центре	456
101. Общие уравнения для больших прогибов пластинки	461
102. Большие прогибы равномерно нагруженной прямоугольной пластинки	466
103. Большие прогибы прямоугольной свободно опертой пластинки	470
Глава XIV. Деформация оболочки без изгиба	474
104. Определение и обозначения	474
105. Оболочка вращения, нагруженная симметрично относительно оси	478
106. Частные случаи оболочки вращения	481
107. Оболочки равного сопротивления	488
108. Смещения в симметрично нагруженной оболочке вращения	491
109. Оболочка вращения под несимметричной нагрузкой	493
110. Напряжения от ветровой нагрузки	495
111. Сферическая оболочка, опертая в отдельных изолированных точках	500
112. Мембранная теория цилиндрической оболочки	503
113. Использование функции напряжений для вычисления мембранных сил оболочки	508

Глава XV. Общая теория цилиндрической оболочки	514
114. Круговая цилиндрическая оболочка под симметричной относительно оси нагрузкой	514
115. Частные случаи симметричной деформации круговой цилиндрической оболочки	521
116. Баллоны и резервуары под давлением	531
117. Цилиндрические резервуары со стенками постоянной толщины	535
118. Цилиндрические резервуары со стенками переменной толщины	538
119. Температурные напряжения в цилиндрической оболочке	547
120. Деформация нерастяжимой круговой цилиндрической оболочки	552
121. Общий случай деформации цилиндрической оболочки	558
122. Цилиндрическая оболочка, свободно опертая по торцам	565
123. Изгиб участка цилиндрической оболочки	568
124. Приближенное исследование изгиба цилиндрической оболочки	572
125. Применение функции деформаций и напряжений	574
126. Исследование напряжений цилиндрической кровли оболочки	577
Глава XVI. Оболочка вращения под нагрузкой, симметричной относительно оси	587
127. Уравнения равновесия	587
128. Приведение системы уравнений равновесия к двум дифференциальным уравнениям второго порядка	591
129. Сферическая оболочка постоянной толщины	595
130. Приближенные методы вычисления напряжений в сферических оболочках	602
131. Сферическая оболочка с опорным кольцом	610
132. Симметричный изгиб пологой сферической оболочки	614
133. Коническая оболочка	618
134. Общий случай оболочки вращения	622
Обозначения	626
Именной указатель	628
Предметный указатель	632

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Первое издание предлагаемой книги вышло в свет в США в 1940 г. и переведено у нас в 1948 г. (С. П. Тимошенко, Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948). Настоящий перевод выполнен со второго издания, значительно переработанного при участии С. Войновского-Кригера и опубликованного в США в 1959 г. Переработка коснулась преимущественно раздела, относящегося к теории пластинок. Что касается теории оболочек, то здесь дело свелось лишь к второстепенным улучшениям, и в ряде случаев — к ссылкам на новую литературу. Этот раздел, где в последние десятилетия советские исследования являются ведущими, будет полезен для начального ознакомления с предметом. Более подробные сведения читатель почерпнет из вышедших у нас монографий¹⁾. Представление о новых направлениях исследований можно получить из публикуемых в последнее время ежегодно Трудов конференций по пластинкам и оболочкам²⁾, а также недавнего обзора А. Л. Гольденвейзера³⁾.

Несмотря на значительное число опубликованных монографий по теории пластинок и оболочек, данная книга не потеряла своего зна-

¹⁾ См., например, С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, Физматгиз, 1961; В. З. Власов, Общая теория оболочек, Гостехиздат, 1949; А. С. Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956; А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, 1953; А. И. Лурье, Статика упругих оболочек, Гостехиздат, 1947; Х. М. Муштари и К. З. Галинов, Нелинейная теория оболочек, Татаркнигоиздат, 1957; В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, Судпромгиз, 1962 и др.

²⁾ Теория пластинок и оболочек, Труды I Всесоюзной конференции, Казань, 1961; Труды II Всесоюзной конференции, Киев, 1962; Труды III Всесоюзной конференции, Ереван (в печати).

³⁾ А. Л. Гольденвейзер, Развитие теории упругих тонких оболочек, Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Изд. АН СССР, 1961.

чения. Основное внимание в ней уделяется решению конкретных задач об упругих деформациях пластинок и оболочек. Особое значение придается трактовке практических приемов исследований и механической интерпретации результатов. Во многих случаях (что очень важно для приложений), решения иллюстрируются графиками и таблицами. Большой исследовательский и педагогический талант, огромная эрудиция и опыт С. П. Тимошенко делают книгу весьма ценной как для учащихся, так и для инженеров и научных работников.

При редактировании в отдельных местах обновлена библиография.

Г. С. Шапиро

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

С момента выхода в свет первого издания этой книги применения теории пластинок и оболочек в практике значительно расширились, теория же пополнилась некоторыми новыми методами. С тем, чтобы оказать этим фактам должное внимание, мы постарались внести в книгу по возможности достаточное количество необходимых изменений и дополнений. Важнейшими дополнениями являются: 1) параграф о прогибах пластинки, вызванных поперечными деформациями сдвига; 2) параграф о концентрации напряжений вокруг круглого отверстия в изогнутой пластинке; 3) глава об изгибе пластинки, покоящейся на упругом основании; 4) глава об изгибе анизотропной пластинки и 5) глава, посвященная обзору специальных и приближенных методов, используемых при исследовании пластинок. Мы развили также главу о больших прогибах пластинки, добавив в нее несколько новых случаев для пластинок переменной толщины и ряд таблиц, облегчающих расчеты.

В части книги, излагающей теорию оболочек, мы ограничились добавлением метода функции напряжений в мембранную теорию оболочек и некоторыми незначительными добавлениями в теорию изгиба оболочек вращения.

Теория оболочек обнаружила за последние годы быстрое развитие, и в этой области появился ряд новых книг. Поскольку не представляется возможным останавливаться подробно на этих новых результатах, мы ссылаемся здесь лишь на новые литературные источники, в которых лица, специально интересующиеся этой областью, найдут необходимые сведения.

ВВЕДЕНИЕ

Толщина пластинки оказывает на ее свойства при изгибе значительно большее влияние, чем другие ее размеры. В этой книге мы различаем три типа пластинок: 1) тонкие пластинки, подвергающиеся малым прогибам; 2) тонкие пластинки, подвергающиеся большим прогибам; 3) толстые пластинки.

Тонкие пластинки с малыми прогибами. В тех случаях, когда прогибы w пластинки малы в сравнении с ее толщиной h , имеется возможность построить вполне удовлетворительную приближенную теорию изгиба пластинки под поперечными нагрузками, основываясь на следующих допущениях:

1. В срединной плоскости пластинка не испытывает никаких деформаций. При изгибе эта плоскость остается нейтральной.

2. Точки пластинки, лежащие до загрузки на нормали к срединной плоскости, остаются в процессе изгиба на нормали к ее срединной поверхности.

3. Нормальными напряжениями в направлении, поперечном к срединной плоскости пластинки, допустимо пренебрегать.

Основываясь на этих допущениях мы сможем все компоненты напряжений выразить через прогиб w пластинки, являющийся функцией двух координат в плоскости пластинки. Эта функция должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению в частных производных, которое, вместе с граничными условиями, полностью определяет w . Таким образом, решение этого уравнения дает все необходимые исходные данные, чтобы вычислить напряжения для любой точки пластинки.

Второе допущение эквивалентно пренебрежению влиянием перерезывающих сил на прогиб пластинок. Допущение это обычно удовлетворяется, но в некоторых случаях (например, при наличии в пластинке отверстий) перерезывающие силы приобретают большое значение, и тогда в теорию тонкой пластинки приходится вводить некоторые коррективы (см. § 39).

Если в дополнение к поперечным нагрузкам на пластинку действуют еще и внешние силы в ее срединной плоскости, то первое допущение не выполняется, и тогда возникает необходимость принять

во внимание и то влияние, которое оказывают на изгиб пластинки напряжения, действующие в ее срединной плоскости. Это достигается введением некоторых добавочных членов в вышеупомянутое дифференциальное уравнение пластинки (см. § 90).

Тонкие пластинки с большими прогибами. Первое допущение выполняется полностью лишь в том случае, если пластинка изгибается по развертывающей поверхности. В иных условиях изгиб пластинки сопровождается деформированием срединной плоскости, но вычисления показывают, что соответствующими напряжениями в срединной поверхности можно пренебречь, если прогибы пластинки малы в сравнении с ее толщиной. Если же прогибы не малы, при выводе дифференциального уравнения изгиба пластинки эти дополнительные напряжения надлежит учитывать. При этом мы приходим к нелинейным уравнениям, и решение задачи значительно усложняется (см. § 96). При больших прогибах нам следует также различать случай неподвижных краев и случай, когда края пластинки предоставлена возможность свободно перемещаться в ее плоскости — это заметно отражается на величине прогибов и напряжений пластинки (см. §§ 99, 100). Благодаря кривизне деформированной срединной поверхности, дополнительные (имеющие преобладающее значение) растягивающие напряжения противодействуют приложенной поперечной нагрузке; таким образом, действующая нагрузка воспринимается при этом частично изгибной жесткостью, а частично мембранным действием пластинки. В силу этого весьма тонкие пластинки, обладающие пренебрежимо малым сопротивлением изгибу, ведут себя как мембраны, за исключением, возможно, узких краевых зон, где изгиб может быть вызван наложенными на пластинку граничными условиями.

Случай пластинки, изогнутой в развертывающуюся, в частности, в цилиндрическую поверхность, следует рассматривать как исключение. Прогибы такой пластинки могут достигнуть величины того же порядка, что и толщина пластинки, не приводя непременно к возникновению мембранных напряжений и не нарушая линейного характера теории изгиба. Возникновение мембранных напряжений становится, однако, возможным в такой пластинке, если края ее закреплены неподвижно в плоскости пластинки, а прогибы достаточно велики (см. § 2). Поэтому в пластинках с малыми прогибами, мембранными силами, возникающими из-за неподвижности в плоскости пластинки ее краев, можно на практике пренебрегать.

Толстые пластинки. Перечисленные выше приближенные теории тонких пластинок непригодны для пластинок значительной толщины, в особенности, когда последние подвергаются действию резко сосредоточенных нагрузок. В таких случаях следует пользоваться теорией толстых пластинок, рассматривающей задачу о пластинках как трехмерную задачу теории упругости. Исследование напряжений поэтому приобретает более сложный характер и к настоящему вре-

мени приведено к полному решению лишь для немногих частных случаев. При решении такого рода задач средствами теории тонких пластинок в последнюю следует вводить надлежащие поправки для точек приложения сосредоточенных нагрузок.

Важнейшие предпосылки теории тонких пластинок составляют также и базис для обычной (элементарной) теории тонких оболочек. Следует, однако, обратить внимание на существенное различие в поведении пластинок и оболочек под воздействием внешней нагрузки. Статическое равновесие элемента пластинки под поперечной нагрузкой возможно лишь в результате действия изгибающих и крутящих моментов, обычно сопровождающегося действием перерезывающих сил, тогда как оболочка в общем случае способна передавать распределенную по поверхности нагрузку через «мембранные» напряжения, которые действуют параллельно касательной плоскости в заданной точке срединной поверхности и распределены равномерно по толщине оболочки. Это свойство оболочки сообщает ей, как правило, значительно большую жесткость и большую экономичность в сравнении с пластинкой в тех же условиях.

В принципе мембранные усилия не зависят от изгиба и полностью определены условиями статического равновесия. Методы определения этих усилий составляют содержание так называемой «мембранной теории оболочек». Однако реактивные силы и деформации, находящиеся по этой теории у границ оболочки, оказываются обычно несовместимыми с реальными граничными условиями. Для того чтобы устранить это несоответствие, следует учесть эффект изгиба оболочки в ее краевой зоне, способный оказать некоторое влияние на величину начально вычисленных мембранных усилий. Этот изгиб, однако, носит обычно лишь локальный характер¹⁾ и поддается анализу на основе тех же допущений, что принимаются в случае малых прогибов тонкой пластинки. Приходится, однако, встречаться с задачами, в особенности относящимися к упругой устойчивости оболочек, для которых гипотеза малых прогибов перестает быть допустимой и где следует опираться на теорию больших прогибов.

Если толщина оболочки сравнима с радиусами кривизны или если мы рассматриваем напряжения близ точек приложения сосредоточенных сил, следует исходить из более строгой теории, сходной с теорией толстой пластинки.

¹⁾ Существуют некоторые типы оболочек (в частности, оболочки отрицательной гауссовой кривизны), представляющие ряд исключений. В случае развертывающихся поверхностей, например цилиндрических или конических, возможны большие прогибы без деформирования срединной поверхности, и в некоторых случаях бывает допустимо пренебречь мембранными напряжениями, так как при этом может быть достаточным учет одних лишь напряжений изгиба.

ГЛАВА I

ИЗГИБ ДЛИННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. Дифференциальное уравнение цилиндрического изгиба пластинки. К изложению теории изгиба пластинок мы приступим с решения простой задачи об изгибе длинной прямоугольной пластинки, несущей поперечную, не изменяющуюся по длине пластинки нагрузку. Изогнутую поверхность участка такой пластинки, достаточно удаленного от ее концов¹⁾, можно при этом считать цилиндрической, с осью цилиндра, параллельной длине пластинки. Мы будем вправе в этих условиях ограничить исследование одной лишь элементарной полоски, вырезанной из пластинки двумя плоскостями, перпендикулярными к длине пластинки и отстоящими одна от другой на единицу длины (положим, на 1 см). Прогиб такой полоски выразится

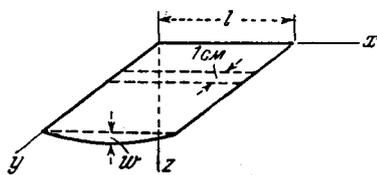


Рис. 1.

дифференциальным уравнением, аналогичным уравнению прогиба изогнутой балки.

Чтобы получить это уравнение прогиба выделенной нами полоски, выберем в качестве объекта нашего рассмотрения пластинку постоянной толщиной h , а в качестве координатной плоскости xu примем сре-

динную плоскость пластинки, т. е. плоскость, лежащую до нагружения пластинки посередине между ее верхней и нижней поверхностями. Пусть ось y совмещается при этом с одним из продольных краев пластинки, положительным же направлением оси z будем считать, как показано на рис. 1, направление вниз. Тогда, обозначив ширину пластинки через l , мы вправе будем рассматривать выделенную нами элементарную полоску как стержень прямоугольного поперечного се-

¹⁾ Вопрос о том, каким должно быть отношение между длиной и шириной пластинки для того, чтобы у нас было право считать максимальное напряжение в ней приблизительно равным соответствующей величине для бесконечно длинной пластинки, обсуждается ниже; см. стр. 136, 141.

чения пролетом l , толщиной h . При вычислении обусловленных изгибом напряжений в таком стержне мы предполагаем, как и обычно в расчетах балок, что поперечные сечения стержня остаются при изгибании плоскими, испытывая лишь повороты относительно своих нейтральных осей. Если в концевых сечениях стержня не приложено никаких нормальных сил, то нейтральная поверхность стержня совпадает со срединной поверхностью пластинки, и относительное удлинение волокна, параллельного оси x , окажется пропорциональным его расстоянию от срединной поверхности. Кривизну изогнутой оси стержня можно будет при этом принять равной d^2w/dx^2 , где w — прогиб стержня в направлении z — предполагается малым в сравнении с длиной стержня l . Относительное удлинение ϵ_x волокна, отстоящего на расстоянии z от срединной поверхности (рис. 2), будет тогда равно $-z d^2w/dx^2$.

Пользуясь законом Гука, выразим теперь относительные удлинения ϵ_x и ϵ_y заштрихованного на рис. 2, а элемента в функции действующих на него нормальных напряжений

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}, \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь E — модуль упругости материала, а ν — коэффициент Пуассона. Для того чтобы пластинка сохранила при деформации непрерывность, необходимо, чтобы поперечная линейная деформация ее в направлении y была равна нулю. На этом основании второе из уравнений (1) даст нам $\sigma_y = \nu\sigma_x$. Подставив это значение σ_y в первое из уравнений (1), получим

$$\epsilon_x = \frac{(1-\nu^2)\sigma_x}{E}$$

и

$$\sigma_x = \frac{E\epsilon_x}{1-\nu^2} = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (2)$$

Если пластинка подвергается, кроме того, еще и действию равномерно распределенных по ее продольным краям растягивающих или сжимающих сил в направлении x , то соответствующее нормальное напряжение нужно будет прибавить к напряжению (2), обусловленному изгибом.

Располагая теперь выражением для напряжения изгиба σ_x , находим посредством интегрирования изгибающий момент в элементарной полоске

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} dz = - \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}.$$

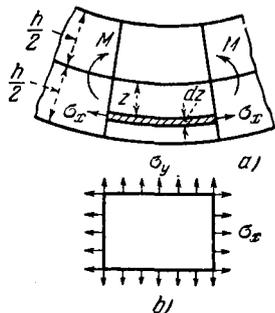


Рис. 2.

Вводя обозначение

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D, \quad (3)$$

представим уравнение изогнутой кривой, т. е. кривой прогибов, для элементарной полоски в следующем виде:

$$D \frac{d^2w}{dx^2} = -M. \quad (4)$$

где величина D , которая играет здесь ту же роль, что и произведение EI , входящее в формулы изгиба балки, называется *жесткостью пластинки при изгибе*. Мы видим, что вычисление прогибов пластинки сводится к интегрированию уравнения (4), имеющего тот же вид, что и дифференциальное уравнение изгиба балки. Если пластинка несет только поперечную нагрузку, причем края ее могут при изгибании свободно сближаться, вывод выражения для изгибающего момента не представит никаких затруднений, и кривая прогибов будет найдена в результате интегрирования уравнения (4). На практике задача усложняется, так как по краям пластинка бывает обычно укреплена неподвижно, вследствие чего возможность беспрепятственного их смещения исключается. При таком способе опирания изгиб пластинки сопровождается появлением на ее краях растягивающих реактивных усилий. Эти реактивные силы зависят от величины прогиба и в свою очередь оказывают влияние на величину входящего в уравнение (4) изгибающего момента. Возникающая при этом задача заключается в исследовании изгиба элементарной полоски, подвергнутой совместному действию поперечной нагрузки и осевой силы, зависящей от прогиба полоски¹⁾. Ниже мы разберем эту задачу в применении к частному случаю пластинки, несущей равномерно распределенную нагрузку при различных условиях по краям.

2. Цилиндрический изгиб равномерно нагруженной прямоугольной свободно опертой по краям пластинки. Рассмотрим длинную прямоугольную равномерно нагруженную пластинку, продольные края которой при изгибе могут беспрепятственно поворачиваться, но лишены возможности сближаться. Вырезанная из такой пластинки элементарная полоска находится, как показано на рис. 1, в условиях равномерно нагруженного стержня, подвергающегося действию осевой силы S (рис. 3), величина которой такова, что она препятствует

¹⁾ В таком виде задача была рассмотрена впервые И. Г. Бубновым; см. английский перевод его труда в Trans. Inst. of Naval Arch., т. 44, стр. 15, 1902, и его книгу «Строительная механика корабля», т. 2, стр. 545, СПб., 1914. См. также доклад Стюарта Уэя (Stewart Way), представленный на Федеральном конгрессе прикладной механики Американского общества инженеров-механиков (ASME) в Нью-Хевене в июне 1932 г. Из этой работы заимствованы кривые, приводимые ниже, в §§ 2 и 3,

концам стержня смещаться вдоль оси x . Если интенсивность равномерной нагрузки обозначить через q , то изгибающий момент в некотором поперечном сечении полоски будет равен

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} - S\omega.$$

Подставив это в уравнение (4), получим

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{S\omega}{D} = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D}. \quad (a)$$

Если ввести обозначение

$$\frac{S}{D} \frac{l^2}{4} = u^2, \quad (5)$$

то общее решение уравнения (a) может быть написано в следующем виде:

$$\omega = C_1 \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^4D}. \quad (b)$$

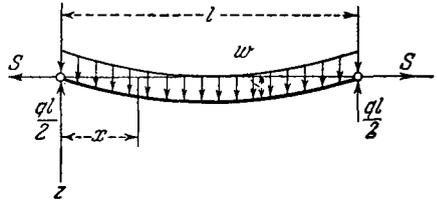


Рис. 3.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условий на концах полоски.

Так как прогибы полоски на ее концах равны нулю, то мы имеем

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad \text{при} \quad x = l. \quad (c)$$

Подставив сюда вместо ω его выражение (b), получаем из этих двух условий

$$C_1 = \frac{ql^4}{16u^4D} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} 2u}{\operatorname{sh} 2u}, \quad C_2 = \frac{ql^4}{16u^4D},$$

и выражение (b) для прогиба примет вид

$$\omega = \frac{ql^4}{16u^4D} \left(\frac{1 - \operatorname{ch} 2u}{\operatorname{sh} 2u} \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} - 1 \right) + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D}.$$

Произведя подстановки

$$\operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u, \quad \operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u, \\ \operatorname{ch}^2 u = 1 + \operatorname{sh}^2 u,$$

получаем возможность представить это выражение в более простой форме:

$$\omega = \frac{ql^4}{16u^4D} \left(\frac{-\operatorname{sh} u \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + \operatorname{ch} u \operatorname{ch} \frac{2ux}{l}}{\operatorname{ch} u} - 1 \right) + \frac{ql^3x}{8u^2D} (l - x)$$

$$w = \frac{ql^4}{16u^4D} \left[\frac{\operatorname{ch} u \left(1 - \frac{2x}{l}\right)}{\operatorname{ch} u} - 1 \right] + \frac{ql^2x}{8u^2D} (l - x). \quad (6)$$

Таким образом, прогибы элементарной полоски зависят от величины u , которая, как мы видим из уравнения (5), представляет собой функцию осевой силы S . Эту силу, пока еще нам неизвестную, можно найти из того условия, что концы полоски (рис. 3) не перемещаются по оси x , вследствие чего произведенное силами S удлинение полоски должно быть равно разности между длиной дуги изогнутой ее оси и длиной хорды l . Эту разность для малых прогибов можно представить формулой¹⁾

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (7)$$

Вычисляя вызванное силами S удлинение полоски, мы предполагаем, что возможность поперечной деформации полоски в направлении y исключена; у нас есть поэтому право воспользоваться здесь уравнением (2). Тогда

$$\lambda = \frac{S(1 - \nu^2)l}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (d)$$

Подставляя сюда вместо w выражение (6) и произведя интегрирование, получим для вычисления S следующее выражение:

$$\frac{S(1 - \nu^2)l}{hE} = \frac{q^2l^7}{D^2} \left(\frac{5}{256} \frac{\operatorname{th} u}{u^7} + \frac{1}{256} \frac{\operatorname{th}^2 u}{u^6} - \frac{5}{256u^6} + \frac{1}{384u^4} \right).$$

Подставив сюда $S = 4u^2D/l^2$ из уравнения (5) и выражение D из уравнения (3), получаем окончательное уравнение:

$$\frac{E^2h^8}{(1 - \nu^2)^2 q^2l^6} = \frac{135}{16} \frac{\operatorname{th} u}{u^9} + \frac{27}{16} \frac{\operatorname{th}^2 u}{u^8} - \frac{135}{16u^8} + \frac{9}{8u^6}. \quad (8)$$

Для данного материала, данного отношения h/l и данной нагрузки левая часть этого уравнения легко может быть вычислена, и удовлетворяющее уравнению значение u может быть найдено методом пробных подстановок. Для упрощения решения можно воспользоваться представленными на рис. 4 кривыми. Абсциссы этих кривых представляют собой значения u , ординаты же значения $\lg(10^4 \sqrt{U_0})$, где U_0 обозначает численную величину правой части уравнения (8).

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, ч. 1, стр. 157, 1945.

При построении кривых здесь берется квадратный корень из U_0 по тем соображениям, что его легче вычислить из констант пластинки и нагрузки; множитель же 10^4 вводится для того, чтобы логарифм

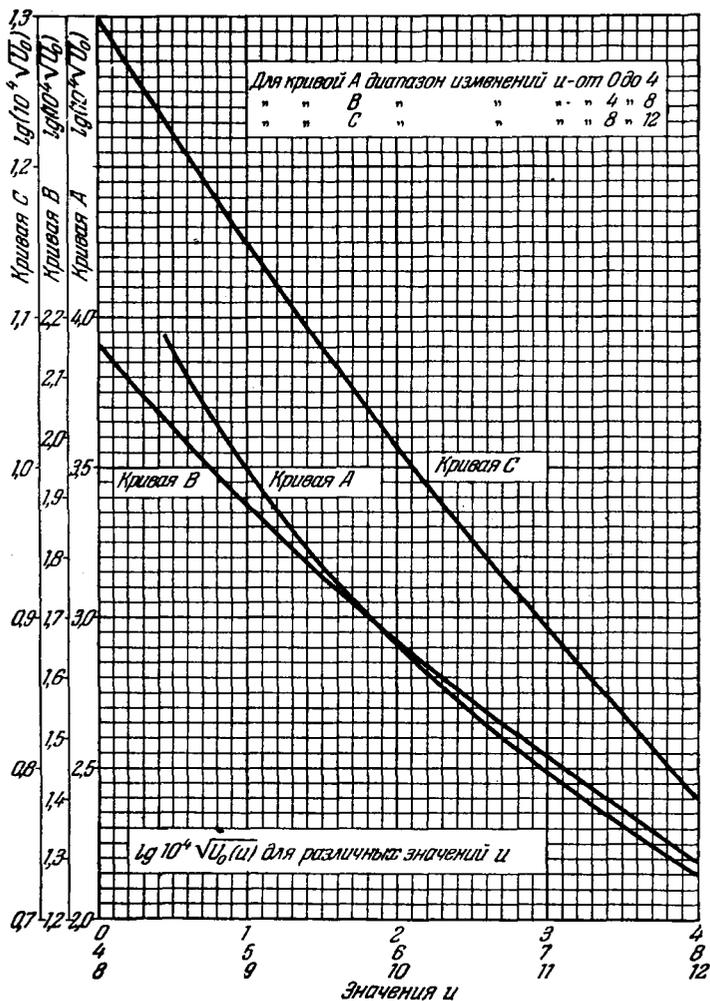


Рис. 4

приняв положительное значение. В каждом частном случае мы начинаем расчет с вычисления квадратного корня из левой части уравнения (8), равного $\frac{Eh^4}{(1-\nu^2)l^4}$; это нам дает $\sqrt{U_0}$. Величина

$\lg(10^4 \sqrt{U_0})$ даст нам тогда ординату, которую мы отмечаем на рис. 4. Соответствующие значения u непосредственно прочтываются по кривой. Зная u , мы получим из уравнения (5) и величину осевой силы S .

При вычислении напряжений заметим, что полное напряжение в любом поперечном сечении полоски составляется из напряжения от изгиба, пропорционального изгибающему моменту, и из растягивающего напряжения, величина которого S/h остается постоянной по длине полоски. Максимальное напряжение получается посредине длины полоски, где изгибающий момент принимает наибольшее значение. Из дифференциального уравнения (4) максимальный изгибающий момент получается равным

$$M_{\max} = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=l/2}.$$

Подставляя сюда вместо w его выражение из (6), получим

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8} \psi_0(u), \quad (9)$$

где

$$\psi_0 = \frac{1 - \operatorname{sech} u}{\frac{u^2}{2}}. \quad (e)$$

Значения ψ_0 даны графически кривыми рис. 5. Мы видим, что с увеличением u эти значения быстро уменьшаются и при сравнительно больших значениях u максимальный изгибающий момент получается в несколько раз меньшим, чем момент $q l^2/8$, получаемый в том случае, когда на концах полоски нет растягивающих реакций.

Теперь как напряжение σ_1 от осевой растягивающей силы, так и максимальное напряжение σ_2 от изгиба легко могут быть выражены в функциях от u , q и констант пластинки, а именно:

$$\sigma_1 = \frac{S}{h} = \frac{4u^2 D}{h l^2} = \frac{E u^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{l} \right)^2, \quad (10)$$

$$\sigma_2 = \frac{6}{h^2} M_{\max} = \frac{3}{4} q \left(\frac{l}{h} \right)^2 \psi_0. \quad (11)$$

Полное максимальное напряжение в пластинке будет равно

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Чтобы показать, как именно следует пользоваться кривыми рис. 4 и 5 при вычислении максимальных напряжений, разберем численный

пример. Положим, что длинная прямоугольная пластинка шириной 130 см и толщиной 13 мм несет равномерно распределенную

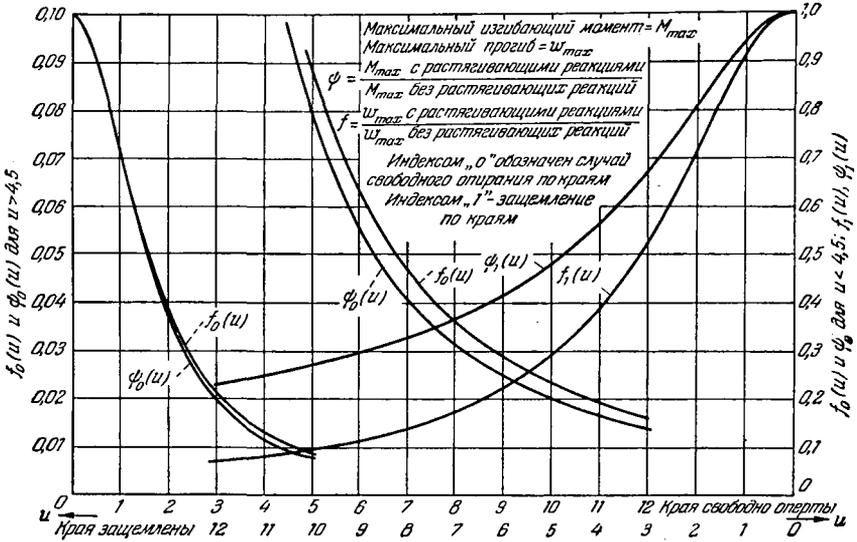


Рис. 5.

нагрузку $q = 1,4 \text{ кг/см}^2$ ($E = 2\,100\,000 \text{ кг/см}^2$). Начнем с вычисления $\sqrt{U_0}$

$$\sqrt{U_0} = \frac{E}{(1-\nu^2)q} \left(\frac{h}{l}\right)^4 = \frac{2,1 \cdot 10^6}{(1-0,3^2)1,4} \frac{1}{10^8} = 0,01648.$$

Тогда из таблиц

$$\lg(10^4 \sqrt{U_0}) = 2,217.$$

По кривой А на рис. 4 находим $u = 3,795$, а из рис. 5 получаем $\psi_0 = 0,1329$. Вычисляя теперь с помощью уравнений (10) и (11) напряжения, находим

$$\sigma_1 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 3,795^2}{3(1-0,3^2)} \cdot \frac{1}{10^4} = 1108 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{3}{4} \cdot 1,4 \cdot 10^4 \cdot 0,1329 = 1395 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2503 \text{ кг/см}^2.$$

Чтобы вычислить максимальный прогиб, подставим $x = l/2$ в уравнение (6) изогнутой оси; при этом получим

$$w_{max} = \frac{5ql^4}{384D} f_0(u), \quad (12)$$

где

$$f_0(u) = \frac{\operatorname{sech} u - 1 + \frac{u^2}{2}}{\frac{5u^4}{24}}$$

Для упрощения расчетов значения $f_0(u)$ даны на рис. 5 в виде кривых. Если бы на концах полоски не было растягивающих реакций, то максимальный прогиб был бы равен $5ql^4/384D$. Эффект растягивающих реакций отражен здесь множителем $f_0(u)$, который быстро уменьшается с увеличением u .

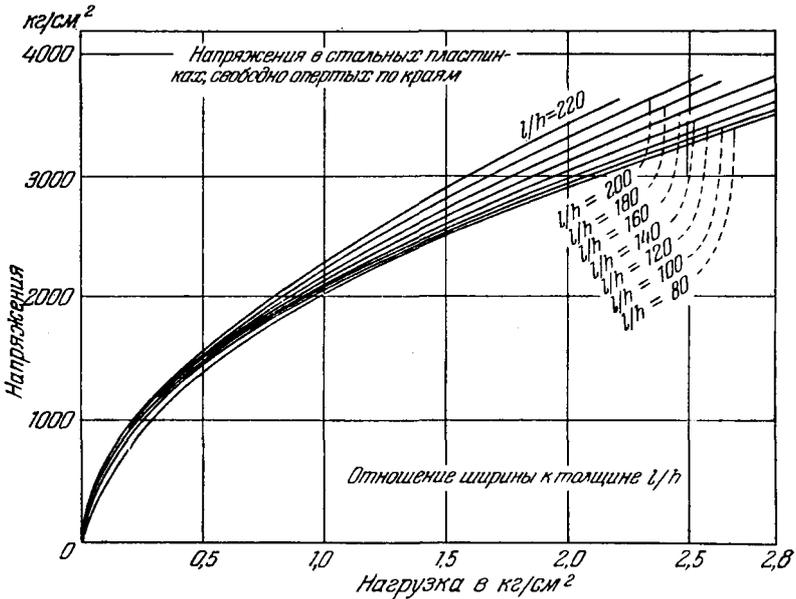


Рис. 6.

Воспользовавшись рис. 5 для только что разобранный численного примера, найдем, что при $u = 3,795$ значение $f_0(u)$ будет равно 0,145. Подставив это значение в уравнение (12), получим

$$\omega_{\max} = 12 \cdot 0,145 = 1,74 \text{ см.}$$

Из уравнения (8) видно, что параметр растяжения u зависит для данного материала пластинки, от интенсивности нагрузки q и от отношения l/h ширины пластинки к ее толщине. Из уравнений же (10) и (11) видим, что напряжения σ_1 и σ_2 точно так же являются функциями от u , q и l/h . Следовательно, максимальное на-

пряжение пластинки зависит лишь от нагрузки q и отношения l/h . Это значит, что мы можем нанести сетку кривых, показывающих максимальное напряжение в зависимости от q , так, что каждая кривая в этой сетке будет соответствовать некоторому частному значению l/h . Такие кривые даны на рис. 6. Мы видим, что при наличии растягивающих сил S , которые возрастают с нагрузкой, максимальное напряжение не будет пропорционально нагрузке q и что при больших значениях q это напряжение с изменением толщины пластинки изменится незначительно. Взяв кривую, отмеченную отношением $l/h = 100$, и приняв $q = 1,4 \text{ кг/см}^2$, найдем по этой кривой то самое значение σ_{\max} , которое было вычислено нами выше в разобранным примере.

3. Цилиндрический изгиб равномерно нагруженной прямоугольной, заземленной по краям пластинки. Допустим, что продольные края пластинки закреплены таким образом, что они лишены возможности поворачиваться. Выделив, как и раньше (рис. 1), элементарную полоску шириной в единицу длины и обозначив приложенный по продольным краям пластинки и отнесенный к единице длины изгибающий момент через M_0 , мы сможем изобразить действующие на полоску силы схемой по рис. 7.

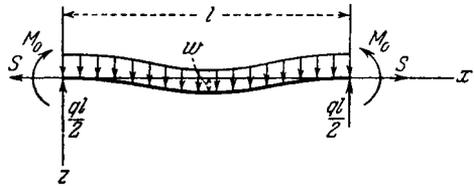


Рис. 7.

Изгибающий момент в некотором поперечном сечении полоски равен

$$M = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} - Sw + M_0.$$

Подставив это выражение в уравнение (4), получим

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{D} w = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D} - \frac{M_0}{D}. \quad (a)$$

Общее решение этого уравнения при пользовании обозначением (5) представится в следующем виде:

$$w = C_1 \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^4D} + \frac{M_0l^2}{4u^2D}. \quad (b)$$

Заметив, что кривая прогибов полоски симметрична относительно ее середины, определим постоянные интегрирования C_1 , C_2 и момент M_0

24 ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬН. ПЛАСТИНКИ ПО ЦИЛИНДРИЧ. ПОВЕРХНОСТИ [ГЛ. I
из следующих трех условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dx} &= 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и при } x=l/2, \\ \omega &= 0 \quad \text{при } x=0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Подставив сюда вместо ω его выражение (b), получим из этих условий

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{ql^4}{16u^3D}, \quad C_2 = \frac{ql^4}{16u^3D} \operatorname{cth} u, \\ M_0 &= \frac{ql^2}{4u^2} - \frac{ql^2}{4u} \operatorname{cth} u = -\frac{ql^2}{12} \psi_1(u), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\psi_1(u) = \frac{3(u - \operatorname{th} u)}{u^2 \operatorname{th} u}.$$

Прогиб ω будет, следовательно, определен выражением

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{ql^4}{16u^3D} \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + \frac{ql^4}{16u^3D} \operatorname{cth} u \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} + \\ & + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^3D} \operatorname{cth} u. \end{aligned}$$

Это выражение можно упростить и представить окончательно в следующем виде:

$$\omega = \frac{ql^4}{16u^3D \operatorname{th} u} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \left[u \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right]}{\operatorname{ch} u} - 1 \right\} + \frac{ql^2(l-x)x}{8u^2D}. \quad (14)$$

Для вычисления параметра u будем поступать как в предыдущем параграфе и воспользуемся выведенным там уравнением (d). Подставив в него значение ω из (14) и выполнив интегрирование, найдем

$$\frac{S(1-\nu^2)l}{hE} = \frac{q^2l^7}{D^2} \left(-\frac{3}{256u^5 \operatorname{th} u} - \frac{1}{256u^4 \operatorname{sh}^2 u} + \frac{1}{64u^6} + \frac{1}{384u^4} \right).$$

Внеся сюда выражение S из (5) и выражение D из (3), напомним уравнение для вычисления u в окончательном виде:

$$\frac{E^2h^8}{(1-\nu^2)^2q^2l^8} = \left(-\frac{81}{16u^7 \operatorname{th} u} - \frac{27}{16u^6 \operatorname{sh}^2 u} + \frac{27}{4u^8} + \frac{9}{8u^6} \right). \quad (15)$$

Чтобы упростить его решение, воспользуемся кривой рис. 8, где параметр u принят в качестве абсциссы, ординаты же равны $\lg(10^4 \sqrt{U_1})$, причем U_1 обозначает здесь правую часть уравнения (15). К расчету любой данной нам пластинки мы приступаем с вычисления квадратного корня из левой части уравнения (15), равного $Eh^4/(1-\nu^2)ql^4$, что дает нам $\sqrt{U_1}$. Тогда $\lg(10^4 \sqrt{U_1})$ определит ординату кривой на рис. 8; соответствующая же абсцисса даст искомое значение u ,

Зная u , мы можем приступить к вычислению максимального напряжения в пластинке. Полное напряжение в некоторой точке поперечного сечения полоски составляется из постоянного по длине

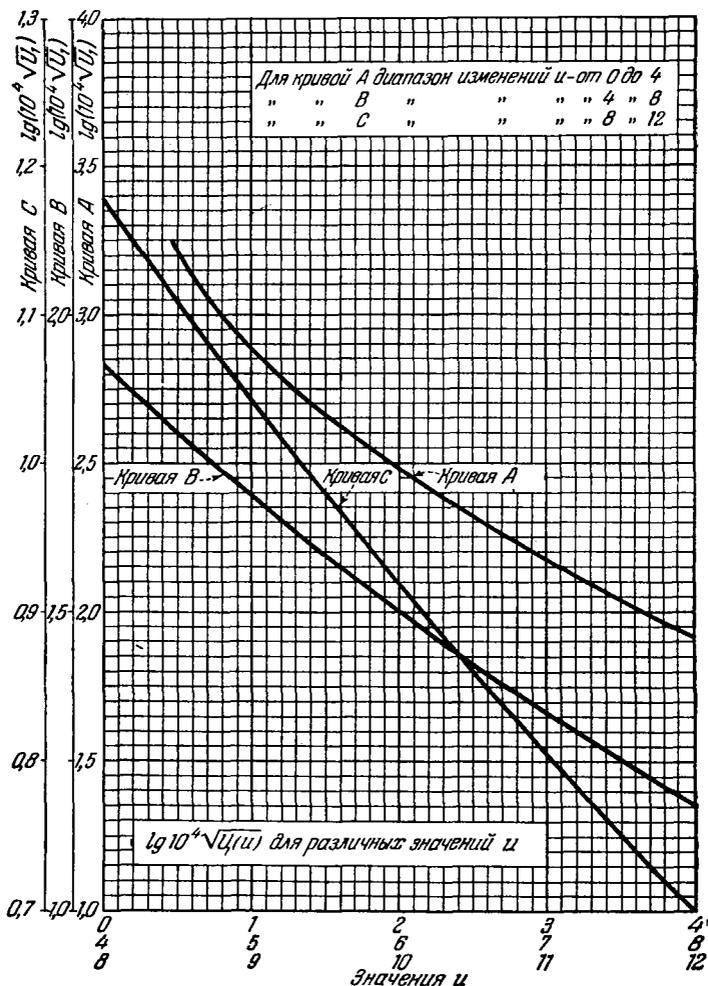


Рис. 8.

полоски растягивающего напряжения σ_1 и напряжения изгиба. Максимальные напряжения изгиба σ_2 будут иметь место у защемленных краев, где изгибающие моменты принимают наибольшие значения. Пользуясь уравнением (10) для определения σ_1 и уравнением (13)

26 ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬН. ПЛАСТИНКИ ПО ЦИЛИНДРИЧ. ПОВЕРХНОСТИ [ГЛ. I
 для вычисления изгибающего момента M_0 , получим

$$\sigma_1 = \frac{Eu^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{l}\right)^2, \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{6M_0}{h^2} = \frac{q}{2} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \psi_1(u), \\ \sigma_{\max} &= \sigma_1 + \sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Чтобы упростить вычисление напряжений изгиба σ_2 , значения функции $\psi_1(u)$ нанесены в виде кривой на рис. 5.

Наибольший прогиб получается в середине полоски и определяется путем подстановки $x=l/2$ в уравнение (14), которое дает

$$w_{\max} = \frac{q l^4}{384D} f_1(u), \quad (18)$$

где

$$f_1(u) = \frac{24}{u^4} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\operatorname{sh} u} - \frac{u}{\operatorname{th} u} \right).$$

Функция $f_1(u)$ точно так же задана на рис. 5 в виде кривой.

Иллюстрируем пользование кривыми рис. 5 и 8 на одном численном примере. Длинная прямоугольная стальная пластинка имеет следующие размеры: $l=130$ см, $h=1,3$ см, $q=0,7$ кг/см². По этим данным

$$\begin{aligned} \sqrt{U_1} &= \frac{E}{(1-\nu^2)q} \left(\frac{h}{l}\right)^4 = \frac{2,1 \cdot 10^6}{(1-0,3^2) \cdot 0,7} \frac{1}{10^4}, \\ \lg 10^4 \sqrt{U_1} &= 2,5181. \end{aligned}$$

На рис. 8 находим теперь $u=1,894$, а из рис. 5 $\psi_1=0,8212$. Подставив эти значения в уравнение (16) и (17), найдем

$$\sigma_1 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,894^2}{3(1-0,3^2) 10^4} = 276 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 10^4 \cdot 0,8212 = 2874 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 276 + 2874 = 3150 \text{ кг/см}^2. \quad \text{¶}$$

Сравнивая эти значения напряжений с максимальным напряжением, полученным для пластинки того же самого размера, но под удвоенной нагрузкой и при свободном опирании ее по краям (см. стр. 21), приходим к выводу, что в результате защемления краев растягивающее напряжение в несколько раз уменьшается, максимальное же напряжение изгиба значительно возрастает, так что в конечном итоге полное максимальное напряжение в случае защемления превышает величину, соответствующую простому опиранию краев.

Поступая по примеру предыдущего параграфа, мы можем показать, что максимальное напряжение в пластинке зависит лишь от

нагрузки q и отношения l/h , так что и здесь имеется возможность нанести сетку кривых, дающих максимальное напряжение в зависимости от q , причем каждая кривая в сетке будет соответствовать некоторому частному значению l/h . Такая сетка кривых нанесена на рис. 9. Мы видим отсюда, что при малых значениях интенсивности нагрузки q , когда влияние осевой силы на прогибы полоски незначительно, максимальное напряжение возрастает приблизительно

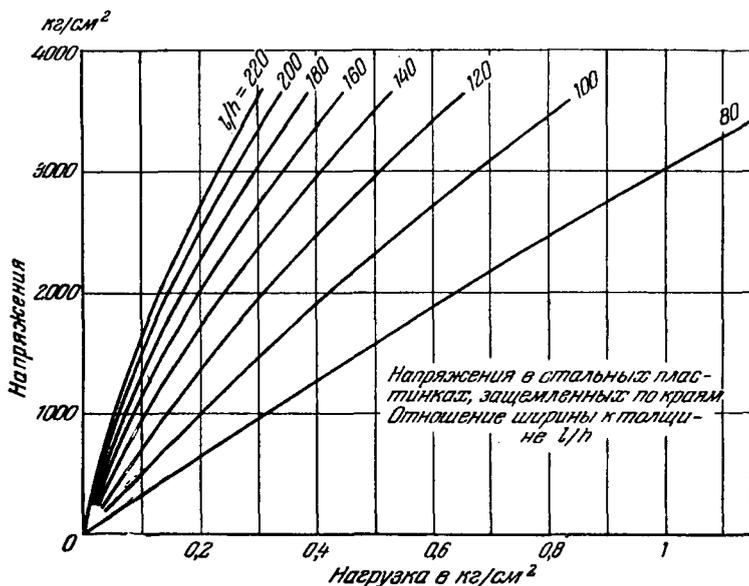


Рис. 9.

в том же отношении, что и q . При больших же значениях q отношение между нагрузкой и максимальным напряжением перестает быть линейным.

В заключение в таблице 1 приводим численные значения всех функций, представленных графически на рис. 4, 5 и 8. Этой таблицей можно пользоваться вместо кривых при подсчете максимальных напряжений и максимальных прогибов в длинных равномерно нагруженных прямоугольных пластинках.

4. Цилиндрический изгиб равномерно нагруженной прямоугольной пластинки с упруго защемленными краями. Предположим, что при изгибе пластинки продольные края ее поворачиваются на угол, пропорциональный значению изгибающего момента на этих краях. В таком случае действующие на элементарную

Таблица 1

u	$\lg 10^4 \sqrt{U_0}$	$\lg 10^4 \sqrt{U_1}$	$\lg 10^4 \sqrt{U_2}$	$f_0(u)$	$f_1(u)$	$\phi_0(u)$	$\phi_1(u)$	u
0	∞	∞	∞	1,000	1,000	1,000	1,000	0
0,5	3,889	3,217	3,801	0,908	0,976	0,905	0,984	0,5
1,0	406 3,483	331 2,886	425 3,376	0,711	0,909	0,704	0,939	1,0
1,5	310 3,173	223 2,663	336 3,040	0,532	0,817	0,511	0,876	1,5
2,0	262 2,911	182 2,481	292 2,748	0,380	0,715	0,367	0,806	2,0
2,5	227 2,684	161 2,320	257 2,491	0,281	0,617	0,268	0,736	2,5
3,0	198 2,486	146 2,174	228 2,263	0,213	0,529	0,200	0,672	3,0
3,5	175 2,311	134 2,040	202 2,061	0,166	0,453	0,153	0,614	3,5
4,0	156 2,155	124 1,916	180 1,881	0,132	0,388	0,120	0,563	4,0
4,5	141 2,014	115 1,801	163 1,718	0,107	0,335	0,097	0,519	4,5
5,0	128 1,886	107 1,694	148 1,570	0,088	0,291	0,079	0,480	5,0
5,5	118 1,768	100 1,594	135 1,435	0,074	0,254	0,066	0,446	5,5
6,0	108 1,660	93 1,501	124 1,311	0,063	0,223	0,055	0,417	6,0
6,5	100 1,560	88 1,413	115 1,196	0,054	0,197	0,047	0,391	6,5
7,0	93 1,467	82 1,331	107 1,089	0,047	0,175	0,041	0,367	7,0
7,5	87 1,380	78 1,253	100 0,989	0,041	0,156	0,036	0,347	7,5
8,0	82 1,298	74 1,179	94 0,895	0,036	0,141	0,031	0,328	8,0
8,5	77 1,221	70 1,109	89 0,806	0,032	0,127	0,028	0,311	8,5
9,0	73 1,148	67 1,042	83 0,723	0,029	0,115	0,025	0,296	9,0
9,5	69 1,079	63 0,979	80 0,643	0,026	0,105	0,022	0,283	9,5
10,0	65 1,014	61 0,918	75 0,568	0,024	0,096	0,020	0,270	10,0
10,5	63 0,951	58 0,860	72 0,496	0,021	0,088	0,018	0,259	10,5
11,0	59 0,892	55 0,805	69 0,427	0,020	0,081	0,017	0,248	11,0
11,5	57 0,835	54 0,751	65 0,362	0,018	0,075	0,015	0,238	11,5
12,0	55 0,780	51 0,700	63 0,299	0,016	0,069	0,014	0,229	12,0

полоску силы будут опять того же типа, что и изображенные на рис. 7, и для прогибов w мы получим прежнее, выведенное в предыдущем параграфе выражение (б). Однако условия на краях, из которых определяются постоянные интегрирования, и момент M_0 будут здесь уже иными, а именно угол наклона изогнутой кривой на концах полоски уже не будет теперь равен нулю, а станет пропорциональным величине момента M_0 , так что у нас получится

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = -\beta M_0, \quad (а)$$

где β — коэффициент, зависящий от жесткости защемления, т. е. степени стеснения на краях. Если это защемление весьма податливо, коэффициент β становится большим, и условия на краях приближаются к тем, которые имеют место при свободном опирании. Если защемление весьма жесткое, величина β уменьшается и условия на краях приближаются к условиям абсолютно жесткой заделки. Остальные два граничных условия остаются теми же, что и в предыдущем параграфе. Таким образом, мы будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} &= -\beta M_0, & \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=\frac{1}{2}} &= 0, \\ (w)_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (б)$$

Исходя из этих условий, мы найдем как постоянные интегрирования, так и величину M_0 , входящую в выражение (б) предыдущего параграфа. Вследствие упругого защемления по краям концевые моменты M_0 получатся меньшими сравнительно с определяемыми из уравнения (13) для абсолютно жестко защемленных краев, и конечный результат можно будет представить в следующем виде:

$$M_0 = -\gamma \frac{q l^2}{12} \psi_1(u), \quad (19)$$

где γ — численный коэффициент, меньший единицы и определяемый из формулы

$$\gamma = \frac{\text{th } u}{2\beta l Du + \text{th } u}.$$

Мы видим, что величина моментов M_0 на краях зависит от величины коэффициента β , характеризующего степень жесткости защемления. Если β весьма мал, коэффициент γ приближается к единице и момент M_0 будет близок к значению (13), вычисленному для абсолютно жесткого защемления. Если β весьма велик, коэффициент γ и момент M_0 становятся малыми и условия на краях приближаются к условиям свободного опирания.

Кривую прогибов в рассматриваемом случае можно представить в следующем виде:

$$\omega = \frac{ql^4}{16\mu^4 D} \frac{\text{th } u - \gamma(\text{th } u - u)}{\text{th } u} \left\{ \frac{\text{ch} \left[u \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right]}{\text{ch } u} - 1 \right\} + \frac{ql^2}{8\mu^2 D} x(l-x). \quad (20)$$

При $\gamma = 1$ это выражение сводится к выражению (14) для прогибов пластинки с абсолютно жестко защемленными краями. При $\gamma = 0$ получаем выражение (6) для пластинки со свободно опертыми краями.

При вычислении параметра растяжения u поступаем, как и в ранее рассмотренных случаях, определяя растягивающую силу S из того условия, что удлинение элементарной полоски должно быть равно разности между длиной дуги изогнутой оси и хордой, имеющей длину l . На этом основании

$$\frac{S(1-\nu^2)l}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 dx.$$

Подставив в это уравнение выражение (20) и выполнив интегрирование, найдем

$$\frac{E^2 h^8}{(1-\nu^2)^2 q^2 l^8} = (1-\gamma) U_0 + \gamma U_1 + \gamma(1-\gamma) U_2, \quad (21)$$

где U_0 и U_1 означают соответственно правые части уравнений (8) и (15), а

$$U_2 = \frac{27}{16} \frac{(u - \text{th } u)^2}{u^9 \text{th}^2 u} (u \text{th}^2 u - u + \text{th } u).$$

Значения $\lg(10^4 \sqrt{U_2})$ приводятся в таблице 1. Пользуясь этой таблицей, мы легко можем решить уравнение (21) методом пробных подстановок. Для заданной нам пластинки мы вычисляем прежде всего левую часть уравнения и, пользуясь кривыми рис. 4 и 8, определяем значения параметра u : 1) сначала для свободно опертых краев и затем 2) для абсолютно жестко защемленных краев. Естественно, что для упруго защемленных краев u должно иметь значение, промежуточное между этими двумя. Приняв для u некоторое такое промежуточное значение, вычисляем с помощью таблицы 1 значения U_0 , U_1 и U_2 и таким образом находим величину правой части уравнения (21). В общем случае она получится несколько отличной от ранее вычисленного значения левой части, и потому нам придется произвести повторный пробный подсчет с новым принятым для u значением. Обычно двух таких пробных подсчетов и применения интерполяции бывает достаточно для определения значения u , удовлетворяющего уравнению (21). Как только параметр u будет найден,

из уравнения (19) определяем изгибающие моменты M_0 на концах. Кроме того, мы можем теперь вычислить также момент в середине полоски и найти максимальное напряжение. Оно получится либо на концах, либо в середине пролета, в зависимости от жесткости заземления по краям.

5. Влияние малых смещений продольных краев в плоскости пластинки на напряжения и прогибы. В предыдущих выкладках предполагалось, что продольные края пластинки при ее изгибании не испытывают никаких смещений в плоскости пластинки. На основе этого допущения в каждом частном случае вычислялась растягивающая сила S . Положим теперь, что края пластинки испытывают при изгибе некоторое смещение по направлению друг к другу; обозначим величину этого смещения через Δ . Благодаря ему удлинение элементарной полоски уменьшится на величину этого смещения, и уравнение для вычисления растягивающей силы S примет вид

$$\frac{Sl(1-\nu^2)}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \Delta. \quad (a)$$

Уравнения (6), (14) и (20) для кривой прогибов останутся при этом в силе независимо от величины растягивающей силы S . Их можно будет дифференцировать и ввести под знак интеграла в уравнение (a). По вычислении этого интеграла, произведя подстановку $S = 4u^2 D/l^2$, получим для свободно опертых концов

$$\frac{E^2 h^8}{q^2 (1-\nu^2)^2 l^8} \frac{u^2 + \frac{3l\Delta}{h^2}}{u^2} = U_0 \quad (22)$$

и для заземленных концов

$$\frac{E^2 h^8}{q^2 (1-\nu^2)^2 l^8} \frac{u^2 + \frac{3l\Delta}{h^2}}{u^2} = U_1. \quad (23)$$

Если Δ обращается в нуль, то уравнения (22) и (23) приводятся к уравнениям (8) и (15), полученным нами ранее для неподвижных краев.

Простейший вывод можно получить, разместив между продольными краями пластинки способные сопротивляться сжатию стержни (распорки); они воспрепятствуют при изгибе пластинки свободному сближению краев. Растягивающие пластинку силы S произведут при этом сжатие распорок, которое повлечет за собой их смещение Δ , пропорциональное S^1). Если k — коэффициент пропорциональности,

¹⁾ Мы предполагаем, что пластинка опирается по краю таким образом, что Δ остается постоянным по всей длине края.

зависящий от упругости и площади поперечного сечения стержней, то

$$S = k\Delta,$$

откуда, после подстановки $S = 4u^2 D/l$,

$$\Delta = \frac{1}{k} \frac{Eu^2 h^3}{3l^2 (1 - \nu^2)}$$

и

$$\frac{u^2 + \frac{3\Delta}{h^2}}{u^2} = 1 + \frac{Eh}{kl(1 - \nu^2)}.$$

Таким образом, второй множитель в левой части уравнений (22) и (23) оказывается постоянной величиной, которую легко вычислить, если известны размеры и упругие свойства конструкции. Зная этот множитель, мы можем получить решение уравнений (22) и (23) тем же способом, какой мы применили для случая неподвижных краев.

В общем случае второй множитель в левых частях уравнений (22) и (23) может зависеть от величины действующей на конструкцию нагрузки, и определение параметра u осуществимо в таких условиях лишь методом проб. Иллюстрируем этот прием на примере,

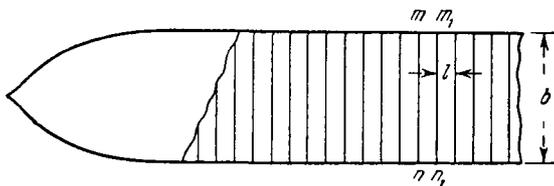


Рис. 10.

с которым приходится встречаться при расчете напряжений в корпусе корабля на волнении. Обшивка подводной части корпуса судна подвергнется при этом равномерно распределенному гидростатическому давлению, а также с изгибом корпуса судна, как балки, действию сил в плоскости обшивки. Пусть b — ширина судна в сечении mn (рис. 10), а l — расстояние между переборками. Когда самая низкая точка волны приходится на мидель судна (рис. 11, b), подъемная сила здесь несколько уменьшается, увеличиваясь одновременно у носа и у кормы. Результатом этого будет возникновение изгибающих моментов, вызывающих направленные вниз прогибы средней части корпуса судна (в противоположность случаю совпадения миделя с гребнем волны — рис. 11, a), и тогда нормальное расстояние l между переборками несколько увеличится. Для того чтобы подсчитать точное значение этого смещения, нам нужно будет учесть

не только действие на корпус судна изгибающего момента M , но также и влияние на этот изгиб некоторого изменения в значении

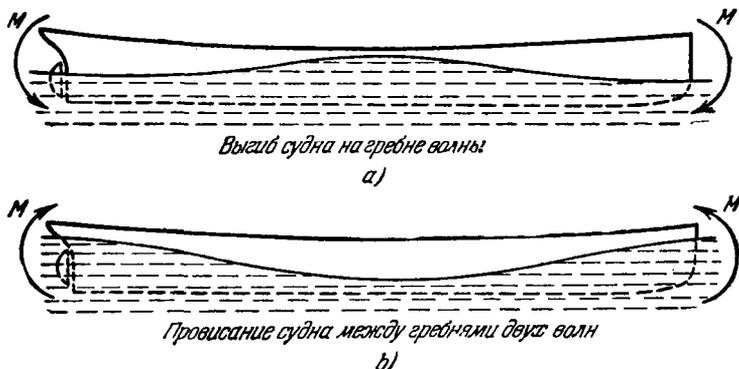


Рис. 11.

растягивающих сил S , распределенных по краям tn и t_1n_1 донной планки mnt_1n_1 (рис. 10). Эту последнюю мы будем рассматривать как длинную прямоугольную пластинку, равномерно нагруженную гидростатическим давлением. Благодаря тому обстоятельству, что расположенные между смежными флорами планки нагружены одинаково, продольные их края не будут подвергаться повороту, и их поэтому можно будет считать абсолютно жестко зашпеленными по этим краям.

Пусть, как и прежде, Δ обозначает на рис. 10 смещение края tn в направлении края t_1n_1 , производимое моментом M , изгибающим корпус, и приложенными по краям tn и t_1n_1 донной планки растягивающими реакциями, величина которых на единицу длины равна S . Чтобы определить величину Δ , представим себе, что планка mnt_1n_1 удалена и заменена равномерно распределенными силами S , так что

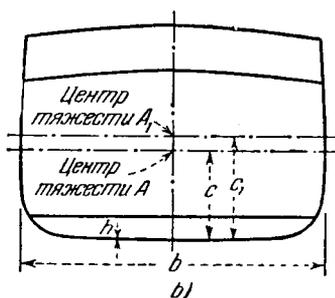
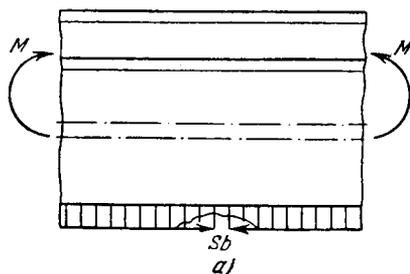


Рис. 12.

полная равнодействующая сила по краю tn и t_1n_1 будет равна Sb (рис. 12). Мы сможем тогда сказать, что смещение Δ одной переборки

относительно другой будет определяться изгибающим моментом M и внецентренной нагрузкой Sb , приложенной к обшивке, на которой удалена донная планка. Если A , I и c (рис. 12, *b*) соответственно площадь поперечного сечения, центральный момент инерции и расстояние донной планки от нейтральной оси полного сечения корпуса, если, далее, A_1 , I_1 и c_1 — соответствующие величины для сечения корпуса без донной планки, то последнюю группу величин можно будет вывести из первой посредством соотношений

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A - bh, \\ c_1 &= \frac{Ac}{A_1}, \\ I_1 &= I - bhc^2 - A_1(c_1 - c)^2. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Относительное смещение Δ_1 , произведенное внецентренно приложенными силами Sb , равно

$$\Delta_1 = \frac{l(1 - \nu^2)}{E} \left(\frac{Sb}{A_1} + \frac{Sbc_1^2}{I_1} \right).$$

Сюда введен множитель $(1 - \nu^2)$, поскольку поперечной деформацией пренебрегают. Смещение, вызванное изгибающим моментом M , составит

$$\Delta_2 = - \frac{Mc_1 l}{EI_1}.$$

Отсюда полное смещение

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{l(1 - \nu^2)}{E} \left[\frac{Sb}{A_1} + \frac{(Sbc_1 - M)c_1}{I_1(1 - \nu^2)} \right]. \quad (c)$$

Подставляя в это выражение

$$S = \frac{4u^2 D}{l^2} = \frac{Eu^2 h^3}{3l^2(1 - \nu^2)},$$

получаем окончательно

$$\Delta = \frac{u^2 h^3}{3l} \left(\frac{b}{A_1} + \frac{bc_1^2}{I_1} \right) - \frac{Mc_1}{EI_1}. \quad (d)$$

Остается ввести эту величину в уравнение (23), чтобы получить, наконец, параметр растяжения u .

Применим эту теорию к численному примеру. Положим,

$$\begin{aligned} b &= 16,2 \text{ м}, & I &= 14,35 \text{ м}^2, & A &= 1,22 \text{ м}^2, & c &= 3,86 \text{ м}, \\ h &= 19 \text{ мм}, & l &= 1144 \text{ мм}, & q &= 0,7 \text{ кг/см}^2, & M &= 36\,050 \text{ т.м.} \end{aligned}$$

Из уравнений (b) получаем

$$A_1 = A - bh = 1,22 - 0,019 \cdot 16,2 = 0,91125 \text{ м}^2,$$

$$c_1 = \frac{Ac}{A_1} = \frac{1,22 \cdot 3,86}{0,91125} = 5,145 \text{ м}^2,$$

$$I_1 = I - bhc^2 - A_1(c_1 - c)^2 = \\ = 14,35 - 16,2 \cdot 0,019 \cdot 3,86^2 - 0,91125(5,145 - 3,86)^2 = 7,9387 \text{ м}^4.$$

Подставив эти значения в выражение (d), вычисляем Δ и получаем окончательно

$$\frac{3\Delta l}{h^2} = 1,549u^2 - 11,49.$$

Уравнение (23) в таком случае принимает вид

$$\frac{E^2 h^8}{q^2 (1 - \nu^2)^2 l^8} \frac{u^2 + 1,549u^2 - 11,45}{u^2} = U_1$$

или

$$\frac{1,596Eh^4}{q(1 - \nu^2)l^4} \sqrt{\frac{u^2 - 4,508}{u^2}} = \sqrt{U_1}.$$

Подставив сюда численные значения и взяв от обеих частей логарифмы, получаем

$$3,609 + \lg \sqrt{\frac{u^2 - 4,508}{u^2}} = \lg(10^4 \sqrt{U_1}).$$

При помощи кривых рис. 8 это уравнение легко может быть решено методом проб, причем в результате мы получаем $u = 2,128$, а из рис. 5 $\psi_1(u) = 0,788$. Максимальное напряжение находится после этого из уравнений (16) и (17), которые дают нам

$$\sigma_1 = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,258}{3 \cdot 0,91 \cdot 60^2} = 969 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 60^2 \cdot 0,788 = 993 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 1962 \text{ кг/см}^2.$$

Если бы мы пренебрегли напряжением изгиба, возникающим вследствие действия на пластинку гидростатического давления, и напряжение в донной планке вычислили бы по формуле $\sigma = Mc/I$, то пришли бы к значительно меньшему окончательному значению, именно к 947 кг/см^2 .

6. Приближенный метод вычисления параметра u . При вычислении параметра u для пластинки, продольные края которой не смещаются в плоскости пластинки, мы пользовались уравнением

$$\frac{Sl(1 - \nu^2)}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \quad (a)$$

которое устанавливает, что удлинение элементарной полоски, вызванное силами S , равно разности между длиной дуги изогнутой оси полоски и хордой длиной l . Для рассмотренных в предыдущих параграфах частных случаев мы вывели точные выражения прогибов w , а также дали числовые таблицы и графики для правой части уравнения (а). При отсутствии подобных таблиц решение затрудняется, и тогда выходом из положения может быть обращение к приближенному методу. Из теории изгиба балок известно¹⁾, что в случае свободного опирания по концам и при условии, что все поперечные нагрузки действуют в одном и том же направлении, кривая прогибов элементарной полоски, находящейся под совместным действием поперечной нагрузки и осевой растягивающей силы S (рис. 3), может быть представлена с достаточной точностью уравнением

$$w = \frac{w_0}{1 + \alpha} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (b)$$

где w_0 обозначает прогиб в середине полоски, произведенный одной лишь поперечной нагрузкой, а величина α определяется уравнением

$$\alpha = \frac{S}{S_{кр}} = \frac{Sl^2}{\pi^2 D}. \quad (c)$$

Таким образом, α представляет собой отношение осевой силы S к эйлерову критическому значению этой силы для элементарной полоски.

Подставив выражение (b) в уравнение (а) и интегрируя, получим

$$\frac{Sl(1 - \nu^2)}{hE} = \frac{\pi^2 w_0^2}{4l(1 + \alpha)^2}.$$

Введя теперь обозначение (c) и вместо D подставив его выражение (3), получим окончательно

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = \frac{3w_0^2}{h^2}. \quad (24)$$

Величина α вычисляется из этого уравнения в каждом частном случае, и тогда параметр u определится из уравнения

$$u^2 = \frac{Sl^2}{4D} = \frac{\pi^2 \alpha}{4}. \quad (d)$$

Чтобы показать способ применения приближенного уравнения (24), разберем численный пример. Длинная прямоугольная стальная пластинка со свободно опертыми краями и размерами: $l = 130$ см, $h = 13$ мм, нагружена равномерно распределенной нагрузкой,

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Соппротивление материалов, т. 2, стр. 51, 1946.

$q = 1,4 \text{ кг/см}^2$. В таком случае

$$\omega_0 = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{D};$$

после подстановки численных значений уравнение (24) даст

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 269,56.$$

Решение можно упростить, положив

$$1 + \alpha = x; \quad (e)$$

тогда

$$x^3 - x^2 = 269,56,$$

т. е. величина x такова, что разность между ее кубом и ее квадратом равна данному нам числу. Ее можно найти либо с помощью логарифмической линейки, либо из соответствующих таблиц. В нашем случае находим

$$x = 6,8109 \quad \text{и} \quad \alpha = 5,8109.$$

Тогда из уравнения (d)

$$u = 3,7865$$

и из формулы (e) (см. стр. 20)

$$\phi_0 = 0,13316.$$

Для вычисления растягивающего напряжения и максимального напряжения изгиба пользуемся уравнениями (10) и (11). Находим

$$\sigma_1 = 1103 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_2 = 1398 \text{ кг/см}^2,$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2501 \text{ кг/см}^2.$$

Вычисления, проделанные в § 2 (стр. 21), дали нам для этого примера $\sigma_{\max} = 2503 \text{ кг/см}^2$. Таким образом, точность приближенного уравнения (24) в этом случае весьма высока. Вообще эта точность зависит от величины i . Погрешность возрастает с увеличением u . Подсчеты показывают, что для $u = 1,44$ погрешность в определении максимального напряжения составляет всего лишь 0,065%, а для $u = 12,29$, что соответствует весьма гибким пластинкам, она составит около 0,30%. Приведенные значения u охватывают весь диапазон встречающихся на практике значений этого параметра, и это дает нам право утверждать, что уравнением (24) допустимо пользоваться во всех случаях практики, когда мы имеем дело с равномерно нагруженными пластинками, свободно опертыми по краям.

Ими можно пользоваться также и при неравномерно распределенной нагрузке, например, в случае неравномерно распределенного по элементарной полоске гидростатического давления. Если продольную

силу мы нашли из приближенного уравнения (24), то прогиб можно найти из уравнения (б), а изгибающий момент в любом поперечном сечении определится как алгебраическая сумма момента, обусловленного поперечной нагрузкой, и момента от продольной силы¹⁾.

В случае защемления по краям приближенное выражение для изогнутой кривой элементарной полоски можно принять в виде

$$w = \frac{w_0}{1 + \frac{\alpha}{4}} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right), \quad (f)$$

где w_0 и α имеют те же самые значения, что и прежде. Подставив это выражение в (а) и проинтегрировав, получим для определения α уравнение

$$\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2 = \frac{3w_0^2}{h^2}, \quad (25)$$

разрешаемое в каждом частном случае методом, указанным при решении уравнения (24).

После того как α найдено, из уравнения (д) определяется параметр u . Максимальное напряжение можно будет тогда вычислить из уравнений (16) и (17), максимальный прогиб — из уравнения (18).

Если один край пластинки смещается при ее изгибе по направлению к другому на величину Δ , то вместо уравнения (а) надлежит прибегнуть к уравнению

$$\frac{Sl(1 - \nu^2)}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx - \Delta. \quad (g)$$

Подставив в это уравнение выражение (б), получим для определения α в случае свободного опирания по краям уравнение

$$\alpha(1 + \alpha)^2 \frac{\alpha + 12 \frac{\Delta l}{\pi^2 h^2}}{\alpha} = \frac{3w_0^2}{h^2}. \quad (26)$$

В случае защемления краев пользуемся выражением (f). Тогда для определения α будем иметь

$$\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right)^2 \frac{\alpha + 12 \frac{\Delta l}{\pi^2 h^2}}{\alpha} = \frac{3w_0^2}{h^2}. \quad (27)$$

Если размеры пластинки и нагрузка q нам даны и смещение Δ известно, то оба уравнения — (26) и (27) — легко могут быть решены,

¹⁾ Более точные значения прогибов и изгибающих моментов можно получить, подставляя приближенное значение продольной силы в уравнение (4) и интегрируя это уравнение, что приведет нас к уравнениям (12) и (9).

как и раньше. Если смещение Δ пропорционально растягивающей силе S , то второй множитель в левых частях уравнений (26) и (27) будет величиной постоянной и его можно будет определить, как это было разъяснено в предыдущем параграфе (см. стр. 35). Таким образом, и в последнем случае эти уравнения точно так же поддаются простому решению.

7. Длинная равномерно нагруженная прямоугольная пластинка, имеющая малую начальную цилиндрическую кривизну. По соображениям, приведенным в §§ 2 и 3, ясно, что растягивающие силы S повышают сопротивление пластинки, противодействуя изгибу, производимому поперечной нагрузкой. Это их влияние сказывается в том большей мере, чем больше прогиб. Дальнейшее уменьшение максимального напряжения может быть осуществлено приданием пластинке надлежащей начальной кривизны. Влияние такой начальной кривизны на напряжения и прогибы легко может быть учтено с помощью изложенного в предыдущем параграфе приближенного метода ¹⁾.

Разберем случай длинной прямоугольной пластинки, свободно опертой по краям (рис. 13), начальная кривизна которой задана уравнением

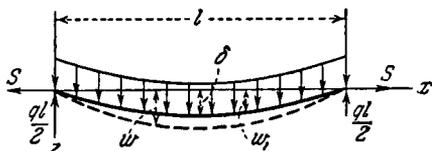


Рис. 13.

$$w_1 = \delta \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (a)$$

Если по краям пластинки приложены растягивающие силы S , начальные прогибы (а) сократятся в отношении $1/(1+\alpha)$, где α сохраняет тот самый смысл, который был ему приписан в предыдущем параграфе (см. стр. 36) ²⁾. Поперечные нагрузки совместно с силами S вызовут прогибы, которые можно будет выразить приближенным уравнением (b) предыдущего параграфа. Таким образом, уравнение полного прогиба пластинки, показанного на рис. 13 штриховой линией, будет

$$w = \frac{\delta}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{w_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{\delta + w_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (b)$$

Если потребовать, чтобы продольные края пластинки не смещались в ее плоскости, то растягивающие силы S определяются из того условия, что произведенное силами S удлинение элементарной

¹⁾ См. работу С. П. Тимошенко в Festschrift zum siebzigsten Geburtstage August Föppl's, стр. 74, Берлин, 1923.

²⁾ См. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. 2, стр. 101, 1946.

40 ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬН. ПЛАСТИНКИ ПО ЦИЛИНДРИЧ. ПОВЕРХНОСТИ [гл. I
 полоски должно быть равно разности между длиной дуги изогнутой
 оси полоски и ее начальной длиной. Эта разность в случае малых
 прогибов дается уравнением

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx. \quad (с)$$

Подставив сюда вместо w и w_1 их выражения (а) и (б) и интегри-
 рую, получим

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \left[\left(\frac{\delta + w_0}{1 + \alpha} \right)^2 - \delta^2 \right].$$

Положив λ равным удлинению полоски $Sl(1 - \nu^2)/hE$, найдем окон-
 чательно

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = \frac{3(\delta + w_0)^2}{h^2} - \frac{3\delta^2(1 + \alpha)^2}{h^2}. \quad (28)$$

Если принять $\delta = 0$, то это уравнение совпадает с уравнением (24)
 для пластинки без начальной кривизны.

Чтобы показать влияние начальной кривизны пластинки на величину
 максимального напряжения в ней, применим уравнение (28) к числен-
 ному примеру. Положим, что нам дана стальная пластинка размерами
 $l = 1144$ мм, $h = 9,5$ мм, несущая равномерно распределенную на-
 грузку $q = 0,7$ кг/см². Если начального прогиба нет, т. е. если $\delta = 0$,
 то уравнение (28) приводится к

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 290,$$

откуда

$$\alpha = 5,97 \text{ и } u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha} = 3,83.$$

Далее, из уравнения (10) получаем

$$\sigma_1 = 791 \text{ кг/см}^2,$$

а из уравнения (11)

$$\sigma_2 = 994 \text{ кг/см}^2.$$

Максимальное напряжение в пластинке будет

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 1785 \text{ кг/см}^2.$$

Допустим теперь, что пластинка имеет некоторый начальный прогиб,
 например, такой, что $\delta = h = 9,5$ мм. Тогда уравнение (28) даст

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 351,6 - 3(1 + \alpha)^2.$$

Положив

$$1 + \alpha = x,$$

получим

$$x^3 + 2x^2 = 351,6,$$

откуда

$$x = 6,45, \quad \alpha = 5,45, \quad u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha} = 3,67.$$

Растягивающее напряжение найдем из уравнения (10)

$$\sigma_1 = 714 \text{ кг/см}^2.$$

Чтобы вычислить напряжение изгиба, нам нужно будет принять в расчет лишь изменение прогиба, т. е.

$$w - w_1 = \frac{w_0}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{\alpha \delta}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (d)$$

Максимальное напряжение изгиба, соответствующее первому члену правой части уравнения (d), будет тем же, что и для плоской пластинки с $u = 3,67$. Из таблицы 1 находим $\psi_0 = 0,142$, а из уравнения (11)

$$\sigma'_2 = 1071 \text{ кг/см}^2.$$

Изгибающий момент, отвечающий второму числу уравнения (d), будет

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \left(-\frac{\alpha \delta}{1+\alpha} \sin \frac{\pi x}{l} \right) = -\frac{\alpha \pi^2 \delta D}{(1+\alpha) l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Этот момент отрицательный и соответствующее ему максимальное напряжение

$$\sigma''_2 = \frac{6}{h^2} \frac{\alpha \pi^2 \delta D}{(1+\alpha) l^2} = 665 \text{ кг/см}^2$$

нужно будет вычесть из вычисленного выше напряжения изгиба σ'_2 . Таким образом, максимальное напряжение в пластинке с начальным прогибом будет равно

$$\sigma_{\max} = 714 + 1071 - 665 = 1120 \text{ кг/см}^2.$$

Сравнение этого результата с полученными выше для плоской пластинки показывает, что влияние начальной кривизны сказалось здесь в снижении максимального напряжения с 1785 кг/см^2 до 1120 кг/см^2 . Этот результат получен в том предположении, что начальный прогиб равен толщине пластинки. Увеличивая начальный прогиб, мы сможем снизить максимальное напряжение в еще большей степени.

8. Цилиндрический изгиб пластинки на упругом основании. Рассмотрим задачу об изгибе длинной равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, опирающейся всей своей поверхностью на упругое основание и

жестко опертой по краям (рис. 14). Вырезав из пластинки, как и раньше, элементарную полоску, мы сможем рассматривать последнюю как балку на упругом основании. Положив, что реакция основания в некоторой произвольной точке пластинки пропорциональна ее прогибу w в этой точке и воспользовавшись уравнением (4), получаем после двукратного его дифференцирования ¹⁾

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q - kw, \quad (29)$$

где q — интенсивность действующей на пластинку нагрузки, а k — реакция основания на единицу площади при прогибе, равном единице. Введя обозначение

$$\beta = \frac{l}{2} \sqrt[4]{\frac{k}{4D}}, \quad (30)$$

мы можем написать общее решение уравнения (29) в следующем виде:

$$w = \frac{q}{k} + C_1 \sin \frac{2\beta x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\beta x}{l} + C_2 \sin \frac{2\beta x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\beta x}{l} + \\ + C_3 \cos \frac{2\beta x}{l} \sin \frac{2\beta x}{l} + C_4 \cos \frac{2\beta x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\beta x}{l}. \quad (a)$$

Теперь из условий на концах полоски нам надлежит определить четыре постоянных интегрирования. В рассматриваемом случае прогиб симметричен относительно середины полоски. Расположив поэтому оси координат, как показано на рис. 14, заключаем ²⁾, что $C_2 = C_3 = 0$. Постоянные C_1 и C_4 находятся из того условия, что на конце ($x = l/2$) как прогиб, так и изгибающий момент полоски равны нулю. Поэтому

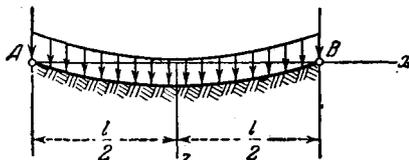


Рис. 14.

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=l/2} &= 0, \\ \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)_{x=l/2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Подставив сюда вместо w его выражение (a) и заметив, что $C_2 = C_3 = 0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{k} + C_1 \sin \beta \operatorname{sh} \beta + C_4 \cos \beta \operatorname{ch} \beta &= 0, \\ C_1 \cos \beta \operatorname{ch} \beta - C_4 \sin \beta \operatorname{sh} \beta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

откуда находим

$$C_1 = -\frac{q}{k} \frac{\sin \beta \operatorname{sh} \beta}{\sin^2 \beta \operatorname{sh}^2 \beta + \cos^2 \beta \operatorname{ch}^2 \beta} = -\frac{q}{k} \frac{2 \sin \beta \operatorname{sh} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}, \\ C_4 = -\frac{q}{k} \frac{\cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\sin^2 \beta \operatorname{sh}^2 \beta + \cos^2 \beta \operatorname{ch}^2 \beta} = -\frac{q}{k} \frac{2 \cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}.$$

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. 2, стр. 10, 1946.

²⁾ Легко видеть, что члены с коэффициентами C_2 и C_3 меняют знак при замене x на $-x$.

Подставив эти значения постоянных в выражение (а) и воспользовавшись уравнением (30), представляем прогиб полоски окончательно следующим уравнением:

$$w = \frac{q l^4}{64 D \beta^4} \left(1 - \frac{2 \sin \beta \operatorname{sh} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} \sin \frac{2\beta x}{l} \operatorname{sh} \frac{2\beta x}{l} - \frac{2 \cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta} \cos \frac{2\beta x}{l} \operatorname{ch} \frac{2\beta x}{l} \right). \quad (d)$$

Прогиб в середине ее получится после подстановки $x = 0$, что дает

$$(w)_{x=0} = \frac{q l^4}{64 D \beta^4} [1 - \varphi_0(\beta)], \quad (31)$$

где

$$\varphi_0(\beta) = \frac{2 \cos \beta \operatorname{ch} \beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}.$$

Чтобы получить углы поворота краев пластинки, дифференцируем выражения (d) по x и полагаем $x = -l/2$. Таким путем получаем

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=-\frac{l}{2}} = \frac{q l^3}{24 D} \varphi_1(\beta), \quad (32)$$

где

$$\varphi_1(\beta) = \frac{3}{4\beta^3} \frac{\operatorname{sh} 2\beta - \sin 2\beta}{\operatorname{ch} 2\beta + \cos 2\beta}.$$

Изгибающий момент в некотором поперечном сечении полоски получается из уравнения

$$M = -D \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Подставив вместо w его выражение (d), находим для середины полоски

$$(M)_{x=0} = \frac{q l^2}{8} \varphi_2(\beta), \quad (33)$$

где

$$\varphi_2(\beta) = \frac{2}{\beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta \sin \beta}{\operatorname{ch} 2\beta + \cos 2\beta}.$$

Чтобы упростить вычисление прогибов и напряжений, мы приводим здесь таблицу 2 численных значений функций φ_0 , φ_1 и φ_2 для различных значений аргумента β . При малых значениях β , т. е. для весьма податливого основания, функции $(1 - \varphi_0)/\beta^4$ и φ_2 почти не отличаются от единицы, и потому как максимальный прогиб, так и напряжение изгиба получаются в этом случае близкими к соответствующим значениям для свободно опертой полоски без упругого основания. С увеличением β влияние упругости основания сказывается все заметнее и заметнее.

Условия, подобные изображенным на рис. 14, получатся, если длинная прямоугольная пластинка шириной l вдавливаются в упругое основание равномерно распределенными по ее краям нагрузками величиной P на единицу длины (рис. 15). Пластинка будет вдавливаться в упругое основание

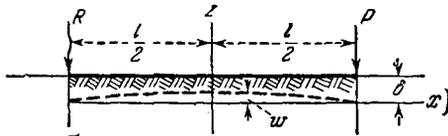


Рис. 15.

β	φ_0	φ_1	φ_2	β	φ_0	φ_1	φ_2
0,1	1,000	1,000	1,000	1,6	-0,013	0,200	0,164
0,2	0,999	0,999	0,999	1,7	-0,052	0,166	0,129
0,3	0,993	0,995	0,995	1,8	-0,081	0,138	0,101
0,4	0,979	0,983	0,983	1,9	-0,102	0,116	0,079
0,5	0,950	0,961	0,959	2,0	-0,117	0,099	0,062
0,6	0,901	0,923	0,919	2,2	-0,133	0,072	0,037
0,7	0,827	0,866	0,859	2,4	-0,135	0,055	0,021
0,8	0,731	0,791	0,781	2,6	-0,127	0,043	0,011
0,9	0,619	0,702	0,689	2,8	-0,114	0,034	0,005
1,0	0,498	0,609	0,591	3,0	-0,098	0,028	0,002
1,1	0,380	0,517	0,494	3,2	-0,081	0,023	0,000
1,2	0,272	0,431	0,405	3,4	-0,064	0,019	-0,001
1,3	0,178	0,357	0,327	3,6	-0,049	0,016	-0,002
1,4	0,100	0,294	0,262	3,8	-0,035	0,014	-0,002
1,5	0,037	0,242	0,208	4,0	-0,024	0,012	-0,002

и изогнется, как показано пунктиром. Если δ обозначает прогиб пластинки на краях, то реакция основания в некоторой точке будет равна

$$k(\delta - w) = k\delta - kw,$$

где w дается уравнением (d) при $q = k\delta$. Величина δ находится тогда из того условия, что нагрузка уравновешивается реакцией основания. Отсюда

$$P = \frac{k\delta l}{2} - k \int_0^{l/2} w dx.$$

Подобным же образом можно исследовать и пластинки на упругом основании с иными условиями на продольных краях.

ГЛАВА II

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНКИ

9. Наклон и кривизна слабо изогнутой пластинки. При исследовании малых прогибов пластинки примем в качестве плоскости xu *срединную плоскость* пластинки в том ее положении, какое она занимает, прежде чем произойдет изгиб. Частицы, лежащие в плоскости xu , подвергнутся при изгибе малым смещениям w , перпендикулярным к плоскости xu , и в новых своих положениях образуют *срединную поверхность* пластинки. Эти смещения срединной плоскости пластинки в дальнейшем нашем изложении будут называться *прогибами*. Взяв нормальное сечение пластинки, параллельное плоскости xz (рис. 16, *a*), найдем, что наклон срединной поверхности в направлении x^1 будет равен $i_x = \partial w / \partial x$. Точно таким же образом наклон в направлении y выразится производной $i_y = \partial w / \partial y$. Выбрав теперь в плоскости xu какое-либо произвольное направление an (рис. 16, *b*), образующее угол α с осью x , мы найдем, что разность между прогибами двух смежных точек a и a_1 в направлении an будет равна

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy,$$

и в таком случае соответствующий наклон выразится производной

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha. \quad (a)$$

Для того чтобы найти направление α_1 , в котором наклон принимает максимальное значение, приравняем нулю производную по α

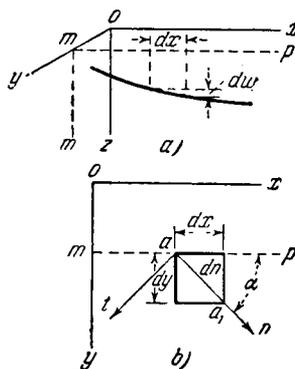


Рис. 16.

¹⁾ То есть тангенс угла наклона касательной к изогнутой поверхности.

от выражения (а). Таким путем получаем

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}. \quad (b)$$

Подставив в (а) отвечающие этому значения $\sin \alpha_1$ и $\cos \alpha_1$, находим для максимального наклона выражение

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}. \quad (c)$$

Приравняв нулю выражение (а), получим направление, в котором исследуемая нами поверхность имеет нулевой наклон. Соответствующий этому направлению угол α_2 определяется из условия

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)}. \quad (d)$$

Уравнения (b) и (d) приводят к заключению, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1,$$

т. е. что направления нулевого и максимального наклонов взаимно-перпендикулярны.

Чтобы определить кривизну срединной поверхности пластинки, примем во внимание, что прогибы пластинки весьма малы. При этом условии наклон поверхности в каком-либо произвольном направлении можно принять равным углу, образуемому касательной к поверхности в этом направлении с плоскостью xu ; квадратом же наклона, как величиной малой в сравнении с единицей, можно пренебречь. Тогда кривизна поверхности в плоскости, параллельной плоскости xz (рис. 16), будет равна

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (e)$$

Условимся считать кривизну положительной в том случае, если поверхность обращена выпуклостью вниз. Знак минус в выражении (e) введен потому, что при показанном на чертеже изгибе выпуклостью вниз вторая производная $\partial^2 w / \partial x^2$ получается отрицательной.

Точно таким же образом для кривизны в плоскости, параллельной плоскости yz , получаем

$$\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (f)$$

Эти выражения аналогичны известным формулам, к которым приводит исследование кривизны изогнутой балки.

Переходя к определению кривизны срединной поверхности в произвольном направлении an (рис. 16), получаем

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right).$$

Вставив сюда вместо $\partial w / \partial n$ выражение (а) и заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha,$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_n} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha \right) = \\ &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha - \frac{1}{r_{xy}} \sin 2\alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (g)$$

Мы видим, таким образом, что кривизну в произвольном направлении n можно вычислить для любой точки срединной поверхности, если только нам известны для этой точки значения кривизн

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

и величина

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (h)$$

называемая *относительным кручением поверхности*, или *кручением поверхности относительно осей x и y* .

Если вместо направления an (рис. 16, b) мы выберем направление at , перпендикулярное к an , то кривизну в этом новом направлении можно будет получить из выражения (g), подставив в него $\frac{\pi}{2} + \alpha$ вместо α . Тогда

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} \sin^2 \alpha + \frac{1}{r_{xy}} \sin 2\alpha + \frac{1}{r_y} \cos^2 \alpha. \quad (i)$$

Сложив выражения (g) и (i), найдем

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}, \quad (34)$$

откуда видно, что в любой точке срединной поверхности сумма кривизн в двух каких-либо взаимно-перпендикулярных направлениях n и t не зависит от угла α . Эту сумму принято называть *средней кривизной* поверхности в точке.

Относительное кручение поверхности в точке a относительно направлений an и at равно

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dw}{dn} \right).$$

При вычислении производной по t заметим, что направление at перпендикулярно к an . Искомую производную получим, если в уравнении (а) подставим $\pi/2 + \alpha$ вместо α . Таким образом, найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{nt}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \sin \alpha \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) + \cos 2\alpha \frac{1}{r_{xy}}. \quad (j)$$

В дальнейшем изложении нам потребуется определять такие направления α , в которых кривизна поверхности приобретает максимальное или минимальное значения, а также находить самые значения этой кривизны. Необходимое для отыскания таких критических значений α уравнение мы получим, приравняв нулю производную от выражения (g) по α . Это нам дает

$$\frac{1}{r_x} \sin 2\alpha + \frac{2}{r_{xy}} \cos 2\alpha - \frac{1}{r_y} \sin 2\alpha = 0, \quad (k)$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\frac{2}{r_{xy}}}{\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}}. \quad (35)$$

Из этого уравнения находим два значения α , отличающихся друг от друга на $\pi/2$. Подставляя их в уравнение (g), найдем два значения $1/r_n$; одно из них представляет собой максимальное значение, другое — минимальное значение кривизны в точке a поверхности. Эти значения называются *главными кривизнами* поверхности; соответствующие же плоскости nax и taz — *главными плоскостями кривизны*.

Обратив внимание на то, что левая часть уравнения (k) представляет собой удвоенное выражение (j), заключаем, что если направления an и at (рис. 16) лежат в главных плоскостях, то соответствующее относительное кручение $1/r_{nt}$ равно нулю.

Для того чтобы показать наглядно, каким образом изменяются кривизна и относительное кручение поверхности в зависимости от

изменения угла α , мы можем воспользоваться кругом, аналогичным кругу Мора, разрешающему задачу о сложном напряженном состоянии¹⁾. Для упрощения выкладок допустим, что координатные плоскости XZ и YZ расположены параллельно главным плоскостям кривизны в точке a . Тогда

$$\frac{1}{r_{xy}} = 0,$$

а из уравнений (g) и (j) получим для любого угла α

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_n} &= \frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha, \\ \frac{1}{r_{nt}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} (36)$$

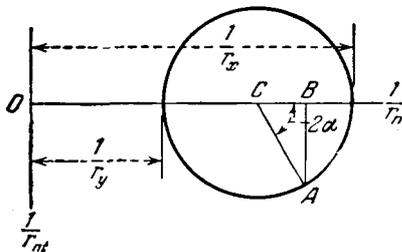


Рис. 17.

Откладывая, как показано на рис. 17, значения кривизны по оси абсцисс, а значения относительного кручения по оси ординат и построив на диаметре, равном разности $1/r_x - 1/r_y$, круг, мы увидим, что точка A , определяемая на нем углом 2α , будет иметь абсциссу

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \overline{OC} + \overline{CB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \cos 2\alpha = \\ &= \frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

и ординату

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right) \sin 2\alpha.$$

Сравнив эти результаты с формулами (36), заключаем, что координаты точки A определяют кривизну и относительное кручение поверхности для некоторого значения угла α . Очевидно, максимальное значение относительного кручения, отображаемое радиусом круга, имеет место в том случае, когда $\alpha = \pi/4$, т. е. для той пары взаимноперпендикулярных направлений, которые делят пополам углы между главными плоскостями.

В нашем примере кривизна в любом направлении положительна, т. е. поверхность обращена выпуклостью вниз. Если обе кривизны $1/r_x$ и $1/r_y$ отрицательны, то и кривизна во всяком ином направлении

¹⁾ См. книгу: Тимошенко С. П., Сопrotивление материалов, т. 1, стр. 43, 1945.

также будет отрицательной, и мы в таком случае будем иметь изгиб пластинки выпуклостью вверх. Поверхности, кривизна которых во всех плоскостях имеет один и тот же знак, называются *синкластическими*. Иногда мы будем иметь дело с поверхностями, в которых обе главные кривизны имеют противоположные знаки. Обычным примером такой поверхности является седлообразная поверхность. Подобные поверхности называются *антикластическими*.

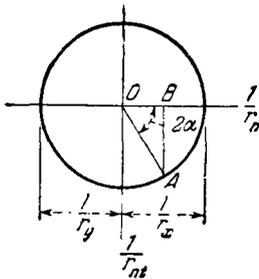


Рис. 18.

Круг на рис. 18 представляет частный случай такой поверхности, когда $1/r_y = -1/r_x$. Легко видеть, что кривизна в этом случае обращается в нуль для $\alpha = \pi/4$ и для $\alpha = 3\pi/4$, причем относительное кручение становится равным $\pm 1/r_x$.

10. Соотношения между изгибающими моментами и кривизнами при чистом изгибе пластинки. Точное решение задачи о распределении напряжений в случае чистого изгиба призматического стержня получается на основе той гипотезы, что поперечные сечения стержня остаются во время изгиба плоскими и лишь поворачиваются

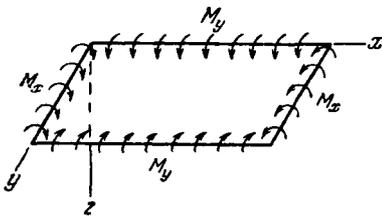


Рис. 19.

относительно своих нейтральных осей таким образом, что всегда при этом остаются нормальными к упругой кривой. Сочетание таких изгибов в двух взаимно-перпендикулярных направлениях дает нам чистый изгиб пластинки. Начнем с исследования чистого изгиба прямоугольной пластинки моментами, равномерно распределенными

вдоль ее краев, как это показано на рис. 19. Пусть плоскость xu будет у нас совмещена со срединной плоскостью пластинки до ее изгиба, оси же x и y направим, как показано, вдоль ее краев. Положительным направлением оси z , которая в этом случае будет перпендикулярной к срединной плоскости, условимся считать направление вниз. Через M_x обозначим отнесенный к единице длины изгибающий момент, действующий по краям, параллельным оси y , через M_y — также приходящийся на единицу длины момент, приложенный по краям, параллельным оси x . Будем считать эти моменты положительными, если они направлены так, как показано на чертеже, т. е. если они производят сжатие на верхней поверхности пластинки и растяжение на нижней. Толщину пластинки, как и раньше, обозначим через h , причем будем считать ее малой в сравнении с другими размерами.

Рассмотрим элемент, выделенный из пластинки, как показано на рис. 20, двумя парами плоскостей, параллельных плоскостям xz и yz . Так как изображенный на рис. 19 случай представляет собой сочетание действия равномерно распределенных моментов, то условия распределения напряжений получаются при этом тождественными для всех элементов, подобных показанному на рис. 20, и мы приходим здесь к случаю чистого изгиба пластинки.

Если мы сделаем допущение, что при изгибании пластинки боковые грани элемента остаются плоскими и поворачиваются лишь относительно нейтральных осей таким образом, что остаются при этом нормальными к изогнутой срединной поверхности пластинки, то мы должны будем заключить, что срединная поверхность пластинки не будет подвергаться во время этого изгиба никакому растяжению и что, следовательно, срединная поверхность будет вместе с тем и *нейтральной поверхностью*¹⁾. Пусть $1/r_x$ и $1/r_y$ обозначают, как и раньше, кривизны этой нейтральной поверхности в сечениях, параллельных соответственно плоскостям xz и yz . В таком случае, как и для балки, мы можем найти относительные удлинения в направлениях x и y для элементарного слоя $abcd$ (рис. 20), отстоящего от нейтрального слоя на расстояние z ; они будут равны

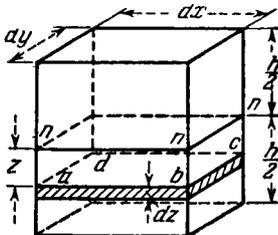


Рис. 20.

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_x}, \quad \epsilon_y = \frac{z}{r_y}. \quad (a)$$

Воспользовавшись теперь законом Гука [уравнение (1), стр. 15], находим соответствующие напряжения в слое $abcd$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right), \\ \sigma_y &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Эти напряжения пропорциональны расстоянию z слоя $abcd$ от нейтральной поверхности и зависят от величины кривизны изогнутой пластинки.

Так как эти нормальные растяжения распределены по боковым граням показанного на рис. 20 элемента, то их можно привести к парам, величины которых, приходящиеся на единицу длины, должны быть, очевидно, равны внешним моментам M_x и M_y . Таким

¹⁾ В § 13 будет показано, что этот вывод достаточно точен, если прогибы пластинки малы в сравнении с толщиной h .

путем получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dy \, dz &= M_x \, dy, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dx \, dz &= M_y \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Подставив в них вместо σ_x и σ_y выражения (b), получим

$$M_x = D \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (37)$$

$$M_y = D \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (38)$$

где D —жесткость пластинки при изгибе, определяемая уравнением (3), а w —малые прогибы пластинки в направлении z .

Рассмотрим теперь напряжения, действующие в уровне слоя $abcd$, по сечению, параллельному оси z , но наклоненному к осям x и y .

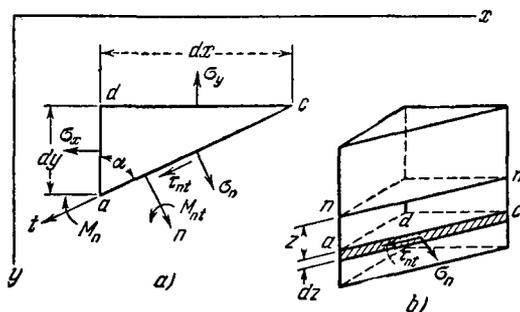


Рис. 21.

Если acd (рис. 21) представляет собой часть слоя, вырезанную таким сечением, то напряжение, действующее на грани ac , может быть найдено с помощью уравнений статики. Если это напряжение разложить на нормальный компонент σ_n и касательный компонент τ_{nt} , то значения этих компонент можно найти, спроектировав приложенные к элементу acd силы на направления n и t ; это приводит нас к известным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha, \\ \tau_{nt} &= \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

где α — угол между нормалью n и осью x или же между направлением t и осью y (рис. 21, *a*). Этому углу приписывается положительный знак при отсчете по направлению вращения часовой стрелки.

Если принять в расчет все слои, подобные изображенному на рис. 21, *b* слою acd , то нормальные напряжения σ_n по всей толщине пластинки дадут нам изгибающий момент, действующий в сечении ac пластинки, и величина его, отнесенная к единице длины вдоль ac , выразится интегралом

$$M_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_n z dz = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha. \quad (39)$$

Касательные напряжения τ_{nt} дадут нам действующий в сечении ac крутящий момент, величина которого на единицу длины ac будет равна

$$M_{nt} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nt} z dz = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (M_x - M_y). \quad (40)$$

Знаки M_n и M_{nt} выбраны таким образом, что если пользоваться правосторонней координатной системой, то положительные значения этих моментов изобразятся векторами в положительных направлениях n и t (рис. 21, *a*). Если α равно нулю или π , то уравнение (39) даст $M_n = M_x$. Для $\alpha = \pi/2$ или $3\pi/2$ получаем $M_n = M_y$. Моменты M_{nt} для этих значений α обращаются в нули. При этом мы получаем условия, представленные на рис. 19.

Уравнения (39) и (40) сходны по форме с уравнениями (36); пользуясь ими, мы легко можем определить изгибающий и крутящий моменты

для любого значения α . Той же цели мы можем достигнуть и графическим методом, т. е. найти значения M_n и M_{nt} из круга Мора, построив его, как указано в предыдущем параграфе, по абсциссе M_n и ординате M_{nt} . Диаметр круга, как показано на рис. 22, должен быть равен $M_x - M_y$. Тогда координаты \overline{OB} и \overline{AB} точки A , определенной углом 2α , дадут нам соответственно моменты M_n и M_{nt} .

Представим теперь M_n и M_{nt} в виде функций от кривизны и от относительного кручения срединной поверхности пластинки.

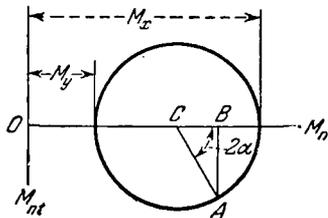


Рис. 22.

Подставив в уравнение (39) вместо M_x и M_y их выражения (37) и (38), найдем

$$M_n = D \left(\frac{1}{r_x} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \sin^2 \alpha \right) + \nu D \left(\frac{1}{r_x} \sin^2 \alpha + \frac{1}{r_y} \cos^2 \alpha \right).$$

Обратившись к первому из уравнений (36) предыдущего параграфа, мы замечаем, что только что полученные нами выражения в скобках представляют собой кривизны срединной поверхности соответственно в направлениях h и t , поэтому

$$M_n = D \left(\frac{1}{r_n} + \nu \frac{1}{r_t} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \quad (41)$$

Чтобы получить соответствующее выражение для крутящего момента M_{nt} , рассмотрим перекош (искажение) тонкого слоя $abcd$ со сторонами ab и ad , параллельными направлениям n и t , расположенного на расстоянии z от срединной плоскости (рис. 23). При

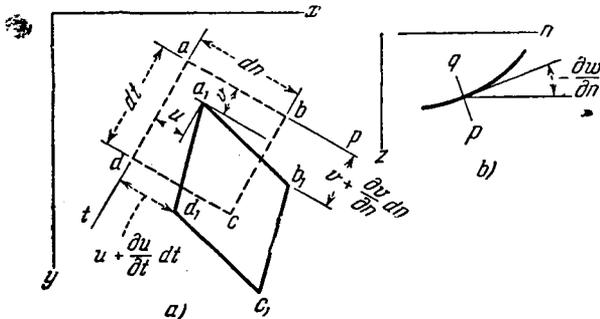


Рис. 23.

изгибе пластинки точки a , b , c и d претерпевают малые смещения. Обозначим компоненты смещения точки a в направлениях n и t соответственно через u и v . Тогда смещение смежной точки d в направлении n будет равно

$$u + \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

а смещение точки b в направлении t

$$v + \frac{\partial v}{\partial n} dn.$$

В результате этих смещений произойдет сдвиг

$$\gamma_{nt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (e)$$

Соответствующее ему касательное напряжение будет равно

$$\tau_{nt} = G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \right). \quad (f)$$

Из рис. 23, *b*, изображающего сечение срединной поверхности нормальной плоскостью, проходящей через ось *n*, можно заметить, что элемент *pq*, первоначально перпендикулярный к плоскости *xu*, повернется относительно оси, перпендикулярной к плоскости *nz*, в направлении против вращения часовой стрелки на угол, равный $-\partial w/\partial n$. Вследствие этого поворота точка элемента, расположенная на расстоянии *z* от нейтральной поверхности, подвергнется смещению в направлении *n*, равному

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial n}.$$

При рассмотрении нормального сечения, проходящего через ось *t*, можно показать, что та же самая точка испытывает смещение в направлении *t*, равное

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Подставив эти значения смещений *u* и *v* в выражение (f), найдем

$$\tau_{nt} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}; \quad (42)$$

при этом выражение (40) для крутящего момента примет вид

$$M_{nt} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{nt} z dz = \frac{Gh^3}{6} \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}. \quad (43)$$

Мы видим, что крутящий момент для данных взаимно-перпендикулярных направлений *n* и *t* пропорционален относительному кручению срединной поверхности относительно этих направлений. Если направления *n* и *t* совпадают с осями *x* и *y*, то у нас останутся лишь изгибающие моменты M_x и M_y , действующие в сечениях, перпендикулярных к этим осям (рис. 19). Относительное кручение при этом обращается в нуль, а кривизны $1/r_x$ и $1/r_y$ оказываются главными кривизнами срединной поверхности пластинки. Их легко можно вычислить из уравнений (37) и (38), если нам даны изгибающие моменты M_x и M_y . Кривизну во всяком ином направлении, заданном посредством угла α , можно вычислить из уравнений (36) или же найти с помощью круга Мора (рис. 17).

Что касается распределения напряжений в пластинке, подвергающейся чистому изгибу, то первое из уравнений (d) позволяет

заключить, что максимальное нормальное напряжение получится в сечениях, параллельных плоскостям xz или yz . Величины этих напряжений мы найдем из уравнений (b) при подстановке в них $z = h/2$ и из уравнений (37) и (38). Таким путем получим

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6M_x}{h^2}, \quad (\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_y}{h^2}. \quad (44)$$

Если эти напряжения разных знаков, то максимальное касательное напряжение действует в плоскости, делящей пополам угол между плоскостями xz и yz , и равно

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \frac{3(M_x - M_y)}{h^2}. \quad (45)$$

Если напряжения (44) одного и того же знака, то максимальное касательное напряжение действует в плоскости, делящей пополам угол между плоскостями xu и uz , и равно $\frac{1}{2}(\sigma_y)_{\max}$ или $\frac{1}{2}(\sigma_x)_{\max}$ в зависимости от того, какое из двух главных напряжений $(\sigma_y)_{\max}$ или $(\sigma_x)_{\max}$ больше.

11. Частные случаи чистого изгиба. Мы приступили к теме нашего предыдущего параграфа, начав с исследования прямоугольной пластинки, по краям которой приложены равномерно распределенные изгибающие моменты. Чтобы перейти к общему случаю чистого изгиба пластинки, представим себе, что из рассмотренной нами выше пластинки (рис. 19) перпендикулярной к ней цилиндрической или призматической поверхностью выделена некоторая часть произвольного очертания. Условия изгиба этой изолированной части останутся после выделения ее без изменений, если только по ограничивающей ее боковой поверхности будут распределены изгибающие и крутящие моменты, удовлетворяющие уравнениям (39) и (40). Таким путем мы приходим к случаю чистого изгиба пластинки произвольного очертания, причем устанавливаем, что изгиб пластинки получается чистым во всех тех случаях, когда изгибающие моменты M_n и крутящие моменты M_{nt} распределены по краям пластинки таким именно образом, как это задается соотношениями (39) и (40).

В качестве первого примера рассмотрим частный случай, когда

$$M_x = M_y = M.$$

Из уравнений (39) и (40) можно для этого случая сделать тот вывод, что изгибающие моменты будут равномерно распределены по всему контуру пластинки произвольного очертания, крутящие же моменты исчезнут. Из уравнений (37) и (38) получаем

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_y} = \frac{M}{D(1 + \nu)}, \quad (46)$$

т. е. пластинка в этом случае изгибается по сферической поверхности, кривизна которой определяется уравнением (46).

В общем случае, когда M_x отличается от M_y , полагаем

$$M_x = M_1 \quad \text{и} \quad M_y = M_2.$$

Тогда из уравнений (37) и (38) находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{M_1 - \nu M_2}{D(1 - \nu^2)}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M_2 - \nu M_1}{D(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (b)$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$w = -\frac{M_1 - \nu M_2}{2D(1 - \nu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \nu M_1}{2D(1 - \nu^2)} y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3, \quad (c)$$

где C_1 , C_2 и C_3 — постоянные интегрирования. Эти постоянные определяют плоскость, от которой отсчитываются прогибы w . Если эта плоскость касательна к срединной поверхности пластинки в начале координат, то постоянные интегрирования должны обратиться в нули, и поверхность прогибов определится уравнением

$$w = -\frac{M_1 - \nu M_2}{2D(1 - \nu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \nu M_1}{2D(1 - \nu^2)} y^2. \quad (d)$$

В частном случае, когда $M_1 = M_2 = M$, находим из уравнения (d)

$$w = -\frac{M(x^2 + y^2)}{2D(1 + \nu)}, \quad (e)$$

т. е. имеем параболоид вращения вместо сферической поверхности, представленной уравнением (46). Несовпадение результатов возникает здесь лишь как следствие использования приближенных выражений $\partial^2 w / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$ для кривизн $1/r_x$ и кривизны $1/r_y$ при выводе уравнения (e). Эти вторые производные прогибов не дают, как правило, точных значений кривизны. Мы будем, однако, оперировать ими и во всех последующих расчетах, основываясь на допущениях § 9. Такая приближенная постановка вносит значительные упрощения в уравнения теории пластинок.

Возвращаясь к уравнению (d), положим теперь $M_2 = -M_1$. Главные кривизны в этом случае на основании уравнений (a) будут

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_1}{D(1 - \nu)}; \quad (f)$$

при этом мы получим антикластическую поверхность, уравнение которой примет вид

$$w = -\frac{M_1}{2D(1-\nu)}(x^2 - y^2). \quad (g)$$

Прямые линии, параллельные оси x , искривляются в результате изгиба в параболы, обращенные выпуклостью вниз (рис. 24), пря-

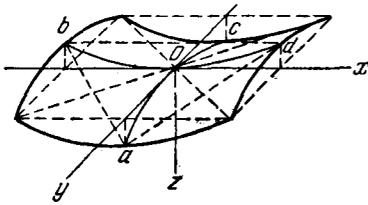


Рис. 24.

мые же, параллельные оси y , деформируются в параболы, обращенные выпуклостью вверх. Для прямых, делящих пополам углы между осями x и y , мы имеем $x = y$ или $x = -y$; поэтому прогибы по этим направлениям, как это видно из уравнения (f), равны нулю. Все прямые, бывшие до изгиба параллельными этим биссектрисам, остаются прямыми и после изгиба, повернувшись лишь на некоторый угол. Ограниченный такими прямыми прямоугольник $abcd$ подвергнется перекосу (скручиванию), как показано на рис. 24. Представим себе, что через прямые ab , bc , cd , ad проведены нормальные сечения пластинки. Из уравнений (39) и (40) мы заключаем, что изгибающие моменты в этих сечениях равны нулю, крутящие моменты в сечениях ad и bc равны M_1 , в сечениях же ab и cd — M_1 . Таким образом, часть $abcd$ пластинки будет находиться в условиях пластинки, подвергающейся чистому изгибу крутящими моментами, равномерно распределенными по краям (рис. 25, а).

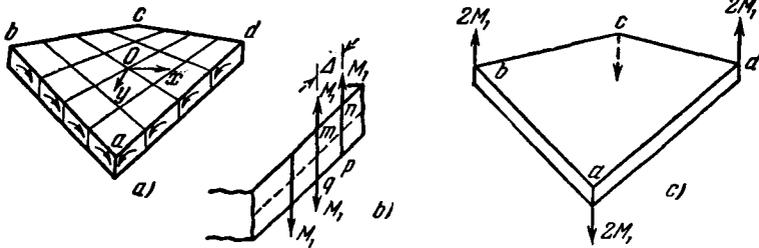


Рис. 25.

Эти крутящие моменты образуются непрерывно распределенными по краю горизонтальными касательными напряжениями (уравнение (40)), которые мы можем заменить вертикальными касательными силами, вызывающими тот же самый эффект, что и фактически действующие горизонтальные напряжения. Для того чтобы это доказать, разобьем

край ad на бесконечно узкие прямоугольники, подобные прямоугольнику $mnpq$ на рис. 25, b . Если Δ — бесконечно малая ширина такого прямоугольника, то приходющаяся на него крутящая пара будет равна $M_1\Delta$, причем ее можно будет считать образованной двумя вертикальными силами, равными M_1 , действующими вдоль вертикальных сторон прямоугольника. Такая замена сплошных горизонтальных сил статически эквивалентной системой двух вертикальных сосредоточенных сил может повести к какому-либо ощутительному перераспределению напряжений в пластинке лишь в пределах расстояния, сравнимого с толщиной пластинки ¹⁾, которую мы считаем малой. Поступив точно таким же образом со всеми остальными прямоугольниками, найдем, что все силы M_1 , действующие вдоль вертикальных сторон прямоугольников, взаимно уравновесятся, за исключением лишь двух сил M_1 , остающихся в вершинах углов a и d . Выполнив подобное же преобразование по остальным краям пластинки, мы приходим к выводу, что изгиб пластинки в изображенную на рис. 25, a антикластическую поверхность может быть произведен силами, сосредоточенными в вершинах углов ²⁾ (рис. 25, b). Осуществить подобный эксперимент сравнительно легко, и он был использован для опытного подтверждения вышеизложенной теории изгиба пластинки ³⁾. В этих экспериментах были измерены прогибы пластинки вдоль линии bod (рис. 24), причем они оказались во вполне удовлетворительном согласии с теоретическими результатами, полученными из уравнения (f). Некоторые расхождения обнаружались лишь близ краев, причем в более толстых пластинках они выражались резче, как это и следовало ожидать из вышеприведенных соображений о преобразовании приложенных по краям крутящих пар.

В качестве последнего примера рассмотрим изгиб пластинки (рис. 19) по цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси y . В этом случае $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, а из уравнений (37) и (38) мы найдем

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad M_y = -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (h)$$

Из этих соотношений видно, что для изгиба пластинки по цилиндрической поверхности мы должны приложить не только моменты M_x , но также и моменты M_y . Без этих последних пластинка изогнется

¹⁾ Это следует из так называемого принципа Сен-Венана. См. Тимошенко С. П., Теория упругости, стр. 42, ОНТИ, 1937.

²⁾ Такое преобразование системы сил, приложенных по краям, было указано впервые Кельвином и Тэйтом. См. Lord Kelvin and Tait P. G., Treatise on Natural Philosophy, т. I, ч. 2, стр. 203, 1883.

³⁾ Подобные опыты были проделаны Надаи; см. Nadai A., Forschungsarbeiten, тт. 170, 171, Берлин, 1915, а также его книгу «Elastische Platten», стр. 42, Берлин, 1925.

в антикластическую поверхность¹⁾. Первое из уравнений (h) было уже использовано нами в главе I при исследовании изгиба длинной прямоугольной пластинки в цилиндрическую поверхность. Хотя в этом исследовании мы имели дело с изгибом пластинки поперечными нагрузками, причем, помимо напряжений изгиба, в ее сечениях, перпендикулярных к оси x' , возникали также и вертикальные касательные напряжения, тем не менее из сравнения с обычной теорией балки мы вправе заключить, что в случае тонкой пластинки влиянием касательных напряжений допустимо пренебречь и что уравнение, выведенное для случая чистого изгиба, с достаточной точностью может быть применено также и при действии поперечной нагрузки.

12. Энергия деформации при чистом изгибе пластинки. Если пластинка изогнута равномерно распределенными изгибающими моментами M_x и M_y (рис. 19), так, что плоскости xz и yz оказываются главными плоскостями изогнутой поверхности пластинки, то энергия деформации, накопленная в элементе, подобном изображенному на рис. 20, может быть определена путем вычисления работы, произведенной при изгибании моментами $M_x du$, $M_y dx$ в выделенном нами элементе. Так как грани элемента остаются при этом плоскими, то работу, произведенную моментами $M_x du$, мы получим, взяв половину произведения величин момента на значение угла между соответствующими сторонами элемента до и после изгиба. Так как $-\partial^2 w / \partial x^2$ представляет собой кривизну пластинки в плоскости xz , то угол, соответствующий моментам $M_x du$, будет равен $-(\partial^2 w / \partial x^2) dx$, и работа, произведенная этими моментами, будет равна

$$-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy.$$

Аналогичное выражение получится и для работы, произведенной моментами $M_y dx$. Тогда вся работа, равная энергии деформации элемента, выразится суммой

$$dV = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Если подставить сюда вместо моментов их выражения из формул (37) и (39), то энергию деформации элемента можно будет выразить следующим образом:

$$dV = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy. \quad (a)$$

¹⁾ Как и повсюду, мы постулируем здесь, что прогибы пластинки весьма малы, или, иначе, что пластинка изгибается в развертывающуюся поверхность. Случай изгиба в неразвертывающуюся поверхность, когда прогибы не малы, будет рассмотрен ниже, см. стр. 62.

Поскольку в случае чистого изгиба кривизна представляет собой постоянную величину для всей поверхности пластинки, то общую энергию деформации для всей пластинки мы получим, если в выражении (а) вместо элементарной площадки $dx dy$ подставим площадь A всей пластинки. Тогда будем иметь

$$V = \frac{1}{2} DA \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (47)$$

Если направления x и y не лежат в главных плоскостях кривизны, то на гранях элемента (рис. 20) будут действовать не только изгибающие моменты $M_x dy$ и $M_y dx$, но также и крутящие моменты $M_{xy} dy$ и $M_{yx} dx$. Энергия деформации, зависящая от изгибающих моментов, представлена выражением (а). Чтобы вывести выражение для энергии деформации, обусловленной крутящими моментами $M_{xy} dy$, заметим, что соответствующий угол кручения равен умноженному на dx изменению наклона $\partial w / \partial y$ по оси x ; поэтому энергия деформации, обусловленная $M_{xy} dy$, будет равна

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy,$$

или, если принять во внимание уравнение (43),

$$\frac{1}{2} D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy.$$

То же самое количество энергии будет произведено парами $M_{yx} dx$, так что энергия деформации, обусловленная обеими крутящими парами, окажется равной

$$D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy. \quad (b)$$

Так как кручение не оказывает никакого влияния на работу, произведенную изгибающими моментами, то общая энергия элемента пластинки получится суммированием энергии изгиба (а) и энергии кручения (b). Таким путем получаем

$$dV = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy + \\ + D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy,$$

или

$$dV = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (48)$$

Энергию деформации всей пластинки получим теперь, если в этом выражении вместо элементарной площадки $dx dy$ подставим площадь A пластинки. Ниже мы воспользуемся выражением (48) в более сложных случаях изгиба пластинок.

13. Ограничения в приложимости выведенных формул. При исследовании распределения напряжений для случая чистого изгиба (§ 10) мы сделали допущение, что срединная поверхность пластинки является в то же время и ее нейтральной поверхностью. Это требование может быть строго удовлетворено лишь в том случае, если срединная поверхность изогнутой пластинки представляет собой *развертывающуюся поверхность*. Если, например, мы имеем дело с чистым изгибом пластинки по цилиндрической поверхности, то единственным ограничением в приложимости теории будет требование, чтобы толщина пластинки была мала в сравнении с радиусом кривизны. В разобранных в предыдущей главе задачах об изгибе пластинки по цилиндрической поверхности поперечными силами мы потребовали, чтобы прогибы были малы в сравнении с толщиной пластинки, ибо только при этом условии неиспользованное нами приближенное выражение для кривизны будет достаточно точным.

Если пластинка изгибается в неразвертывающуюся поверхность, то срединная ее поверхность подвергается при изгибе некоторому растяжению, и построенная выше теория чистого изгиба будет достаточно точной лишь в том случае, если соответствующие этому растяжению срединной поверхности напряжения будут малы в сравнении с максимальными напряжениями изгиба, указанными в формулах (44), или, что то же самое, если линейная деформация срединной поверхности будет мала в сравнении с максимальной деформацией изгиба $h/2r_{\text{min}}$. Это требование накладывает дополнительное ограничение на прогибы пластинки, а именно: прогибы δ пластинки должны быть малы в сравнении с ее толщиной h . Чтобы это доказать, рассмотрим изгиб круглой пластинки равномерно распределенными по ее краям изгибающими парами M . При малых прогибах изогнутая поверхность будет сферической радиуса r , величина которого определяется уравнением (46). Пусть AOB (рис. 26) представляет собой диаметральное сечение изогнутой круглой пластинки, a — ее внешний радиус до изгиба, а δ — прогиб в центре. Допустим сначала, что срединная поверхность ее не испытывает растяжения в радиальном направлении. В таком случае дуга OB должна быть равна первоначальному значению внешнего радиуса a пластинки. Угол φ и радиус b пластинки после изгиба будут тогда определяться сле-

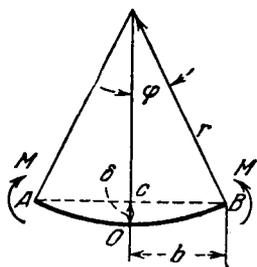


Рис. 26.

дующим образом. Пусть θ — угол между радиусом r и радиусом b . Тогда $b = r \cos \theta$. Угол θ можно выразить через δ и a . Если δ мало по сравнению с a , то θ мало, и $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Тогда $b \approx a - \frac{a^2 \theta^2}{2r}$. С другой стороны, $\delta = r(1 - \cos \theta) \approx r \frac{\theta^2}{2}$. Подставляя это в предыдущее выражение, получим $b \approx a - \frac{a^2}{2r} \cdot \frac{2\delta}{r} = a - \frac{a^2 \delta}{r^2}$. Таким образом, радиус b после изгиба будет меньше внешнего радиуса a на величину $\frac{a^2 \delta}{r^2}$.

дующими уравнениями:

$$\varphi = \frac{a}{r}, \quad b = r \sin \varphi.$$

Мы видим, что при сделанных нами допущениях изгиб пластинки влечет за собой деформацию сжатия ее срединной поверхности в окружном направлении. Величина этого сжатия на краю пластинки равна

$$\epsilon = \frac{a-b}{a} = \frac{r\varphi - r \sin \varphi}{r\varphi}. \quad (a)$$

При малых прогибах мы вправе принять

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6}.$$

После подстановки в уравнение (a) это дает

$$\epsilon = \frac{\varphi^2}{6}. \quad (b)$$

Чтобы представить это сжатие в функции максимального прогиба δ , заметим, что

$$\delta = r(1 - \cos \varphi) \approx \frac{r\varphi^2}{2};$$

отсюда

$$\varphi^2 = \frac{2\delta}{r}.$$

Подставляя в уравнение (b), получим

$$\epsilon = \frac{\delta}{3r}. \quad (49)$$

Эта величина представляет собой верхнюю границу окружного сжатия по краю пластинки. Мы получим ее, потребовав, чтобы радиальная деформация была равна нулю. В действительности некоторая радиальная деформация имеет место, и потому окружное сжатие получается несколько меньшим¹⁾, чем это дается уравнением (49).

Из этих соображений следует, что уравнения, полученные в § 10, в предположении, что срединная поверхность изогнутой пластинки совпадает с ее нейтральной поверхностью, являются точными в том лишь случае, если определенная выражением (49) деформация мала в сравнении с максимальной деформацией изгиба $h/2r$, или, что равносильно, если прогиб δ мал в сравнении с толщиной пластинки h . К подобному заключению можно прийти и в более общем случае чистого изгиба пластинки, когда ее главные кривизны не равны²⁾.

¹⁾ Этот вопрос разбирается ниже; см. § 96.

²⁾ См. Lord Kelvin, Tait P. G., Treatise on Natural Philosophy, т. I, ч. 2, стр. 172, 1883.

Обобщая эти выводы, мы можем утверждать, что уравнениями § 10 можно пользоваться с достаточной точностью во всех тех случаях, когда прогибы пластинки, отсчитываемые от ее недеформированной срединной плоскости или от развертывающейся поверхности, малы в сравнении с толщиной пластинки.

14. Температурные напряжения в пластинке, заземленной по краям. Уравнением (46) для изгиба пластинки по сферической поверхности можно воспользоваться при вычислении температурных напряжений в пластинке в некоторых случаях неравномерного нагревания. Допустим, что изменения температуры по толщине пластинки следуют линейному закону и что в плоскостях, параллельных поверхностям пластинки, эта температура остается постоянной. При этих условиях и если отсчет температур вести от температуры срединной поверхности, мы вправе заключить, что температурные расширения и сжатия будут пропорциональны расстояниям от срединной поверхности. Мы приходим здесь, таким образом, в точности к тому же самому закону, как и в чистом изгибе пластинки по сферической поверхности. Если края неравномерно нагретой пластинки совершенно свободны, пластинка изогнется по сферической поверхности¹⁾.

Пусть α будет коэффициент линейного расширения материала пластинки, а t обозначает разность температур верхней и нижней поверхностей пластинки. Разность между наибольшим значением температурного расширения и расширением срединной поверхности равна $at/2$; обусловленную же неравномерным нагреванием кривизну найдем из уравнения

$$\frac{at}{2} = \frac{h}{2r}, \quad (a)$$

откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{at}{h}. \quad (50)$$

Этот изгиб не вызовет в пластинке никаких напряжений, если только края ее свободны, а прогибы ее в сравнении с толщиной малы.

Предположим теперь, что срединная плоскость пластинки может свободно расширяться, края же ее заделаны так, что они лишены возможности поворачиваться. Тогда, в результате неравномерного нагревания, возникнут изгибающие моменты, равномерно распределенные по краям пластинки. По величине эти моменты таковы, что они компенсируют кривизну, вызванную неравномерным нагреванием (уравнение (50)), ибо только этим путем может быть удовлетворено условие заделки краев. Воспользовавшись выражением (46) для кри-

¹⁾ Предполагается, что прогибы малы в сравнении с толщиной пластинки.

визны, вызванной изгибающими моментами, находим следующее уравнение для определения величины M момента, приходящегося на единицу длины контура ¹⁾

$$\frac{M}{D(1+\nu)} = \frac{\alpha t}{h},$$

откуда

$$M = \frac{\alpha t D (1 + \nu)}{h}. \quad (b)$$

Соответствующее максимальное напряжение может быть найдено из уравнений (44); оно равно

$$\sigma_{\max} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6\alpha t D (1 + \nu)}{h^3}.$$

Подставляя сюда вместо D его выражение (3), получаем окончательно

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha t E}{2(1-\nu)}. \quad (51)$$

Мы видим, что напряжение пропорционально коэффициенту температурного расширения α , разности температур t на обеих поверхностях пластинки и модулю упругости E . Толщина h пластинки не входит в формулу (51); поскольку, однако, разность температур возрастает обычно пропорционально толщине пластинки, у нас есть основание заключить, что относительно большие температурные напряжения следует ожидать скорее в толстых пластинках, чем в тонких.

¹⁾ Влияние чистого изгиба на кривизну пластинки в целом эквивалентно, но противоположно по знаку влиянию температурного градиента. Поэтому если пластинка остается в результате этого воздействия совершенно плоской, то это свидетельствует о том, что по всему контуру удовлетворяются условия для защемленного края. В нашем случае изгибающие моменты всюду и во всех направлениях друг другу равны, поэтому и моменты защемления по заданному контуру выражаются тем же уравнением (b).

ГЛАВА III

СИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

15. Дифференциальное уравнение симметричного изгиба поперечно нагруженной круглой пластинки¹⁾. Если действующая на круглую пластинку нагрузка распределена по ней симметрично относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластинки и проходящей через ее центр, то изогнутая поверхность, в которую обратится срединная плоскость пластинки, также получится симметричной. Во всех точках, равно удаленных от центра пластинки, прогибы будут одинаковы, и потому мы сможем удовлетвориться рассмотрением их лишь в одном-единственном диаметральном сечении, проходящем через ось симметрии (рис. 27). Поместим начало координат O в центре неизгнутой пластинки, через r обозначим радиальные расстояния точек, лежащих в срединной плоскости, а через w — их прогибы вниз.

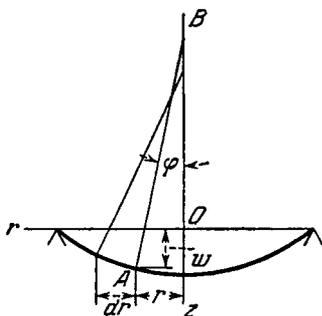


Рис. 27.

Тогда максимальный наклон изогнутой поверхности в некоторой точке A будет равен $-dw/dr$, кривизна же срединной поверхности пластинки в диаметральном сечении rz для малых прогибов выразится производной

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr}, \quad (a)$$

где φ — малый угол между нормалью к изогнутой поверхности в точке A и осью симметрии OB . Из условий симметрии заключаем, что $1/r_n$ представляет собой одну из главных кривизн изогнутой поверхности в точке A . Вторая главная кривизна лежит в сечении,

¹⁾ Решение этих задач об изгибе круглых пластинок было дано Пуассоном; см. *Mémoires de l'Académie*, т. 8, Париж, 1829.

проходящем через нормаль AB и перпендикуляр к плоскости rz . Заметив, что подобные AB нормали для всех остальных точек срединной поверхности с радиальным расстоянием r образуют в своей совокупности коническую поверхность с вершиной в B , заключаем, что расстояние AB представляет собой радиус второй главной кривизны, который мы обозначим через r_t . Тогда из чертежа получим

$$\frac{1}{r_t} = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{\varphi}{r}. \quad (b)$$

Имея выражения (а) и (b) для главных кривизн, мы можем получить и соответствующие значения изгибающих моментов, полагая, что между этими моментами и кривизнами остаются в силе соотношения (37) и (38)¹⁾, выведенные для чистого изгиба. Пользуясь этими соотношениями, получаем

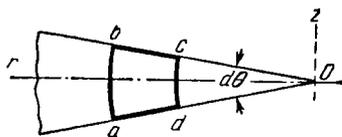
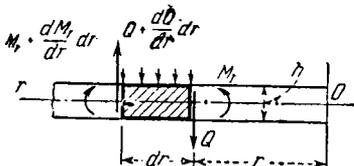


Рис. 28.

$$M_r = -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right), \quad (52)$$

$$M_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right) = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad (53)$$

где, как и раньше, M_r и M_t обозначают отнесенные к единице длины изгибающие моменты: M_r — по окружным (тангенциальным) сечениям пластинки, подобным сечению, образованному конической поверхностью с вершиной в B , M_t — по диаметральному сечению rz .

Уравнения (52) и (53) содержат лишь одну переменную, либо w , либо φ , которая может быть определена из условий равновесия элемента пластинки, аналогичного, например, элементу $abcd$ на рис. 28, вырезанному из пластинки двумя цилиндрическими сечениями ab и cd и двумя диаметральными ad и bc . Пара, действующая по грани cd элемента, равна

$$M_r r d\theta. \quad (c)$$

¹⁾ Здесь мы пренебрегаем влиянием на прогибы касательных напряжений, действующих в нормальных сечениях пластинки, перпендикулярных к меридианам, подобных, например, сечению, вырезанному конической поверхностью с вершиной в B . Для пластинок, толщина которых мала в сравнении с диаметром, это влияние незначительно. Дальнейшие соображения по этому вопросу будут приведены в § 20. Напряжениями, перпендикулярными к поверхности пластинки, мы также пренебрегаем, и это находит свое оправдание во всех тех случаях, когда нагрузка не является резко сосредоточенной (см. стр. 85).

Соответствующая пара по грани ab выразится произведением

$$\left(M_r + \frac{dM}{dr} dr\right)(r + dr)d\theta. \quad (d)$$

Каждая из пар, приложенных по граням ad и bc элемента, равна $M_t dr$, обе же вместе они дадут равнодействующую пару в плоскости rOz , равную

$$M_t dr d\theta. \quad (e)$$

Из симметрии мы вправе заключить, что если на элемент действуют перерезывающие силы, то в диаметральных сечениях пластинки они должны обращаться в нуль. Зато в ее цилиндрических сечениях, каковыми являются, например, грани cd и ab элемента, они обычно сохраняют конечное значение. Если перерезывающую силу, приходящуюся на единицу длины цилиндрического сечения радиуса r , обозначить через Q , то полная перерезывающая сила, действующая по грани cd элемента, будет $Qr d\varphi$; соответствующая же сила по грани ab равна

$$\left[Q + \frac{dQ}{dr} dr\right](r + dr)d\theta.$$

Пренебрегая малой разностью между перерезывающими силами по двум противоположным граням элемента, мы вправе утверждать, что эти силы дают пару в плоскости rz , равную

$$Qr d\theta dr. \quad (f)$$

Складывая с надлежащими знаками моменты (с), (d), (e) и (f) и пренебрегая моментом от приходящейся на элемент внешней нагрузки, как малой величиной более высокого порядка, получим для элемента $abcd$ следующее уравнение равновесия:

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr\right)(r + dr)d\theta - M_r r d\theta - M_t dr d\theta + Qr d\theta dr = 0,$$

из которого, пренебрегая малой величиной более высокого порядка, находим

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Qr = 0. \quad (g)$$

Если вместо M_r и M_t подставить сюда их выражения (52) и (53), то уравнение (g) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{Q}{D} \quad (54)$$

или в другом виде

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D}. \quad (55)$$

В любом частном случае симметрично нагруженной круглой пластинки перерезывающая сила легко может быть вычислена путем деления распределенной по окружности радиуса r нагрузки на $2\pi r$. Тогда уравнениями (54) или (55) можно будет воспользоваться для определения наклона φ и прогиба w пластинки. Интегрирование этих уравнений упрощается, если мы заметим, что их можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{Q}{D}, \quad (56)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Q}{D}. \quad (57)$$

Если Q представлена в функции r , то эти уравнения без всяких затруднений можно будет проинтегрировать в любом частном случае.

Иногда бывает выгодно представить правую часть уравнения (57) как функцию интенсивности q , распределенной по пластинке сплошной нагрузки. С этой целью умножим обе части уравнения на $2\pi r$. Заметив, что

$$Q \cdot 2\pi r = \int_0^r q \cdot 2\pi r \, dr,$$

получим

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{D} \int_0^r q r \, dr.$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по r и разделив на r , найдем окончательно

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}. \quad (58)$$

Это уравнение легко интегрируется, если интенсивность нагрузки q задана в функции r .

16. Равномерно нагруженная круглая пластинка. Если круглая пластинка радиуса a несет нагрузку интенсивностью q , равномерно распределенную по всей поверхности пластинки, то величина перерезывающей силы Q на расстоянии r от центра пластинки определяется из уравнения

$$2\pi r Q = \pi r^2 q,$$

откуда

$$Q = \frac{qr}{2}. \quad (a)$$

Подставив это в уравнение (57), получаем

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{qr}{2D}. \quad (b)$$

После первого интегрирования находим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{qr^2}{4D} + C_1, \quad (c)$$

где C_1 — постоянная интегрирования, которую мы определим в дальнейшем из условий в центре и на краю пластинки. Умножая обе части уравнения (c) на r и производя вторичное интегрирование, находим

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{qr^4}{16D} + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2$$

и

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (59)$$

Следующее интегрирование дает тогда

$$w = \frac{qr^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3. \quad (60)$$

Вычислим теперь постоянные интегрирования для различных частных случаев.

Круглая пластинка закреплена по контуру. В этом случае наклон изогнутой поверхности в радиальном направлении должен обратиться в 0 при $r=0$ и $r=a$. Поэтому из уравнения (59)

$$\left(\frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \right)_{r=0} = 0,$$

$$\left(\frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \right)_{r=a} = 0.$$

Первое из этих уравнений дает нам $C_2 = 0$. Подставив это значение во второе уравнение, получаем

$$C_1 = -\frac{qa^2}{8D}.$$

При этих значениях постоянных уравнение (59) дает нам следующее выражение для наклона:

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = \frac{qr}{16D} (a^2 - r^2). \quad (61)$$

Из уравнения же (60) найдем

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qa^2 r^2}{32D} + C_3. \quad (d)$$

На краю пластинки прогиб равен нулю. Поэтому

$$\frac{qa^4}{64D} - \frac{qa^4}{32D} + C_3 = 0,$$

и мы получим

$$C_3 = \frac{qa^4}{64D}.$$

Подставив это в уравнение (d), найдем

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2. \quad (62)$$

Наибольший прогиб наблюдается в центре пластинки, причем величина его из уравнения (62) оказывается равной

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64D}. \quad (e)$$

Этот прогиб составляет $\frac{3}{8}$ от прогиба равномерно нагруженной полоски, защемленной по концам, жесткость которой при изгибе равна D , ширина — единице, а длина — диаметру пластинки.

Имея выражение (61) для наклона, получаем и изгибающие моменты M_r и M_t , воспользовавшись для этого выражениями (52) и (53). Из них находим

$$M_r = \frac{q}{16} [a^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)], \quad (63)$$

$$M_t = \frac{q}{16} [a^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \quad (64)$$

Подставив в этом выражении $r = a$, найдем значения изгибающих моментов на контуре пластинки:

$$(M_r)_{r=a} = -\frac{qa^2}{8}, \quad (M_t)_{r=a} = -\frac{\nu qa^2}{8}. \quad (65)$$

В центре пластинки, где $r = 0$,

$$M_r = M_t = \frac{qa^2}{16} (1 + \nu). \quad (66)$$

Из выражений (65) и (66) видно, что максимальное напряжение получается на контуре пластинки, где оно равно

$$(\sigma_r)_{\max} = -\frac{6M_r}{h^2} = \frac{3}{4} \frac{qa^2}{h^2}. \quad (f)$$

Изменение напряжений σ_r и σ_t для нижней поверхности пластинки вдоль ее радиуса показано на рис. 29.

Круглая пластинка, свободно опертая по контуру. Применим для вычисления прогибов в этом случае метод наложения. При защемлении, как мы видели, по ее контуру возникают

отрицательные моменты $M_r = -qa^2/8$ (рис. 30, а). Если этот случай сочетать со случаем чистого изгиба, представленным на

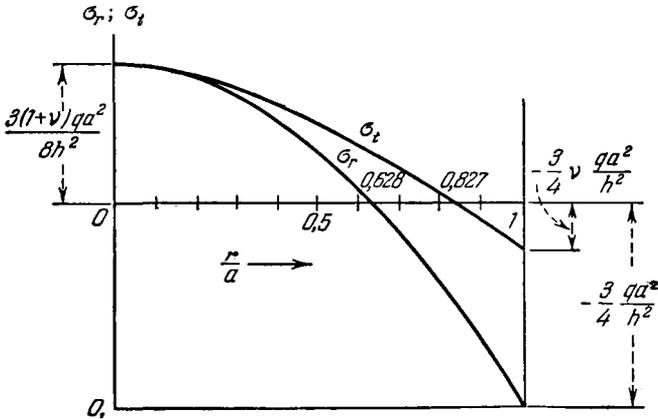


Рис. 29.

рис. 30, б, то изгибающие моменты M_r на контуре будут компенсированы и мы получим изгиб свободно опертой пластинки.

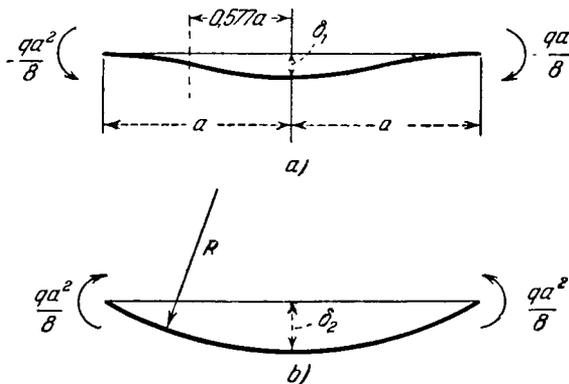


Рис. 30.

Изогнутая поверхность пластинки в условиях чистого изгиба моментами $qa^2/8$ на основании соотношения (46) или уравнения (е) (стр. 57) описывается уравнением

$$w = \frac{qa^2}{16D(1+\nu)}(a^2 - r^2).$$

Сложив его с прогибом (62) защемленной пластинки, найдем, что при условии свободного опирания

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right). \quad (67)$$

Подставив в это выражение $r = 0$, получим прогиб пластинки в центре

$$w_{\max} = \frac{(5 + \nu) qa^4}{64(1 + \nu) D}. \quad (68)$$

При $\nu = 0,3$ этот прогиб приблизительно в четыре раза больше, чем для пластинки, защемленной по контуру.

Чтобы получить для этого случая изгибающий момент, нам следует сложить постоянный изгибающий момент $qa^2/8$ с моментами (63) и (64), найденными нами выше для случая защемления. Поэтому для случая свободного опирания

$$M_r = \frac{q}{16} (3 + \nu)(a^2 - r^2), \quad (69)$$

$$M_t = \frac{q}{16} [a^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)]. \quad (70)$$

Максимальный изгибающий момент получается в центре пластинки

$$M_r = M_t = \frac{3 + \nu}{16} qa^2.$$

Соответствующее максимальное напряжение

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_t)_{\max} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{3(3 + \nu) qa^2}{8h^2}. \quad (71)$$

Чтобы получить наибольшее напряжение на некотором расстоянии r от центра, мы должны к напряжению, вычисленному для защемленной пластинки, прибавить постоянную величину

$$\frac{6}{h^2} \cdot \frac{qa^2}{8},$$

соответствующую чистому изгибу, представленному на рис. 30, *b*. Иным способом это же напряжение можно получить и из рис. 29, именно путем измерения ординат от горизонтальной оси, проходящей через O_1 . Мы видим, что защемление приводит к более выгодному распределению напряжений в пластинке.

17. Круглая пластинка с круглым отверстием в центре. Начнем с исследования изгиба пластинки моментами M_1 и M_2 , равномерно распределенными по внутреннему и соответственно по внешнему

ее контурам (рис. 31). Перерезывающая сила Q в этом случае исчезает, и уравнение (57) принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varpi}{dr} \right) \right] = 0.$$

Интегрируя его дважды, получаем

$$-\frac{d\varpi}{dr} = \varphi = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (a)$$

Интегрируя еще раз, находим прогиб

$$\varpi = -\frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3. \quad (b)$$

Теперь остается из условий на контуре определить постоянные интегрирования. Подставив в уравнение (52) выражение (a), найдем



$$M_r = D \left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \nu \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \right) \right]. \quad (c)$$

Рис. 31.

Этот момент должен оказаться равным M_1 при $r = b$

и равным M_2 при $r = a$. Поэтому уравнения для определения постоянных C_1 и C_2 будут

$$D \left[\frac{C_1}{2} (1 + \nu) - \frac{C_2}{b^2} (1 - \nu) \right] = M_1,$$

$$D \left[\frac{C_1}{2} (1 + \nu) - \frac{C_2}{a^2} (1 - \nu) \right] = M_2,$$

из которых

$$C_1 = \frac{2(a^2 M_2 - b^2 M_1)}{(1 + \nu) D (a^2 - b^2)}, \quad C_2 = \frac{a^2 b^2 (M_2 - M_1)}{(1 - \nu) D (a^2 - b^2)}. \quad (d)$$

Чтобы определить входящую в уравнение (b) постоянную C_3 , следует рассмотреть прогибы на краях пластинки. Предположим, например, что изображенная на рис. 31 пластинка свободно опирается по внешнему контуру. Тогда при $r = a$ прогиб $\varpi = 0$ и из (b) находим

$$C_3 = \frac{C_1 a^2}{4} = \frac{a^2 (a^2 M_2 - b^2 M_1)}{2(1 + \nu) D (a^2 - b^2)}.$$

В частном случае, если $M_2 = 0$, получаем

$$C_1 = -\frac{2b^2 M_1}{(1 + \nu) D (a^2 - b^2)}, \quad C_2 = -\frac{a^2 b^2 M_1}{(1 - \nu) D (a^2 - b^2)},$$

$$C_3 = -\frac{a^2 b^2 M_1}{2(1 + \nu) D (a^2 - b^2)}.$$

и выражения (а) и (b) для наклона и прогиба примут вид

$$\frac{dw}{dr} = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\nu)(a^2 - b^2)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{r}{a^2} \right), \quad (72)$$

$$w = -\frac{b^2 M_1}{2(1+\nu)D(a^2 - b^2)} (a^2 - r^2) + \frac{a^2 b^2 M_1}{(1-\nu)D(a^2 - b^2)} \ln \frac{r}{a}. \quad (73)$$

В качестве второго примера рассмотрим случай изгиба пластинки перерезывающими силами Q_0 , равномерно распределенными по внутреннему контуру (рис. 32). Перерезывающая сила, приходящаяся на единицу длины окружности радиуса r равна

$$Q = \frac{Q_0 b}{r} = \frac{P}{2\pi r},$$

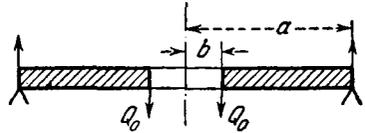


Рис. 32.

где $P = 2\pi b Q_0$ означает всю нагрузку, приложенную к внутреннему краю пластинки. Подставляя это в уравнение (57) и интегрируя, получаем

$$\frac{dw}{dr} = \frac{Pr}{8\pi D} \left(2 \ln \frac{r}{a} - 1 \right) - \frac{C_1 r}{2} - \frac{C_2}{r} \quad (e)$$

и

$$w = \frac{Pr^2}{8\pi D} \left(\ln \frac{r}{a} - 1 \right) - \frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3. \quad (f)$$

Постоянные интегрирования определяются теперь из граничных условий. Полагая, что пластинка свободно опирается по наружному контуру, получим

$$(w)_{r=a} = 0, \quad -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0. \quad (g)$$

Для внутреннего контура пластинки имеем

$$-D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = 0. \quad (h)$$

Подставляя выражения (e) и (f) в уравнения (g) и (h), находим

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{P}{4\pi D} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right), \\ C_2 &= -\frac{(1+\nu)P}{(1-\nu)4\pi D} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \cdot \ln \frac{b}{a}, \\ C_3 &= \frac{Pa^2}{8\pi D} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

При этих значениях постоянных, по подстановке их в выражения (e) и (f) мы найдем наклон и прогиб для любой точки пластинки,

изображенной на рис. 32. Для наклона у внутреннего края, который нам понадобится в дальнейшем изложении, найдем выражение

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{Pb}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{b}{a} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \right]. \quad (j)$$

В предельном случае, когда b становится бесконечно малым и $b^2 \ln(b/a)$ приближается к нулю, постоянные интегрирования принимают следующие значения:

$$C_1 = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{P}{4\pi D}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{Pa^2}{8\pi D} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu}\right).$$

Подставляя эти значения в выражение (f), получаем

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right]. \quad (k)$$

Это значение совпадает с прогибом нагруженной в центре пластинки без отверстия [см. уравнение (89), стр. 84]. Таким образом, очень малое отверстие в центре пластинки не оказывает на ее прогиб никакого влияния.

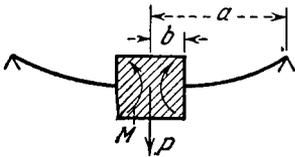


Рис. 33.

Сочетая нагрузки, представленные на рис. 31 и 32, мы можем получить решение для случая пластинки, защемленной по внутреннему и равномерно нагруженной по внешнему контуру (рис. 33).

Так как наклон у защемленного края равен нулю, то, воспользовавшись выражениями (72) и (j), получим для определения изгибающего момента M_1 у защемленного контура следующее уравнение:

$$\begin{aligned} -\frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)} \left(\frac{1}{b} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{b}{a^2} \right) &= \\ &= \frac{Pb}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{b}{a} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \right], \end{aligned}$$

откуда

$$M_1 = \frac{P}{4\pi \left[(1+\nu) \frac{a^2}{b^2} + 1-\nu \right]} \left[(1-\nu) \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 2(1+\nu) \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{a}{b} \right]. \quad (74)$$

Имея выражение для момента M_1 , мы сможем получить действительный прогиб пластинки, налагая одно на другое оба его значения,

определенные из выражений (73) и (f), причем постоянные интегрирования для последнего даны выражениями (i).

Пользуясь тем же методом наложения, мы можем получить и решение для случая, показанного на рис. 34, где пластинка опирается по внешнему контуру и несет равномерно распределенную нагрузку. Воспользуемся для этого случая решением, полученным нами в предыдущем параграфе для пластинки без отверстия в центре. Если рассмотреть сечение этой пластинки, вырезанное перпендикулярно к пластинке цилиндрической поверхностью радиуса b , то мы найдем, что в этом сечении будут действовать перерезывающая сила $Q = \pi q b^2 / 2\pi b = qb/2$ и изгибающий момент [см. уравнение (69)] интенсивности

$$M_r = \frac{q}{16} (3 + \nu) (a^2 - b^2).$$

Таким образом, для того чтобы получить напряжения и прогибы для случая, представленного на рис. 34, нам нужно будет на напряжения и прогибы, полученные для пластинки без отверстия, наложить

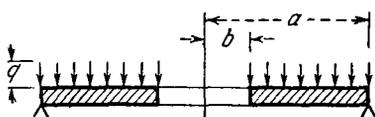


Рис. 34.

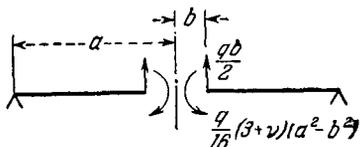


Рис. 35.

напряжения и прогибы, вызываемые изгибающими моментами и перерезывающими силами, показанными на рис. 35. Эти последние получаются из выражений (72), (73), (e) и (f), если при этом обратить надлежащее внимание на знаки приложенных перерезывающих сил и моментов.

Некоторые важные для практики случаи изображены на рис. 36. Во всех этих случаях максимальное напряжение определяется одной из формул типа

$$\sigma_{\max} = k \frac{qa^2}{h^2} \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = \frac{kP}{h^2}, \quad (75)$$

в зависимости от того, распределена ли приложенная нагрузка по всей поверхности пластинки или только по ее контуру. Численные значения коэффициента k , подсчитанные¹⁾ для некоторых значений

¹⁾ Эти подсчеты для случаев 1—8 были произведены Валем и Лобо (Wahl A. M., Lobo G., Trans. Am. Soc. Mech. Eng., т. 52, 1930). С другими вариантами решений для круглых симметрично нагруженных пластинок с отверстием или без него можно познакомиться в работе Байера (Beuer K., Die Statik im Stahlbetonbau, 2-е изд., стр. 652, Берлин, 1948).

отношения a/b и для коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$, приведены в таблице 3.

Максимальные прогибы для тех же случаев даются формулами типа

$$\omega_{\max} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad \text{или} \quad \omega_{\max} = k_1 \frac{Pa^2}{Eh^3}. \quad (76)$$

Коэффициенты k_1 также приводятся в таблице 3.

Если отношение a/b приближается к единице, то значения коэффициентов k и k_1 в уравнениях (75) и (76) можно будет получить

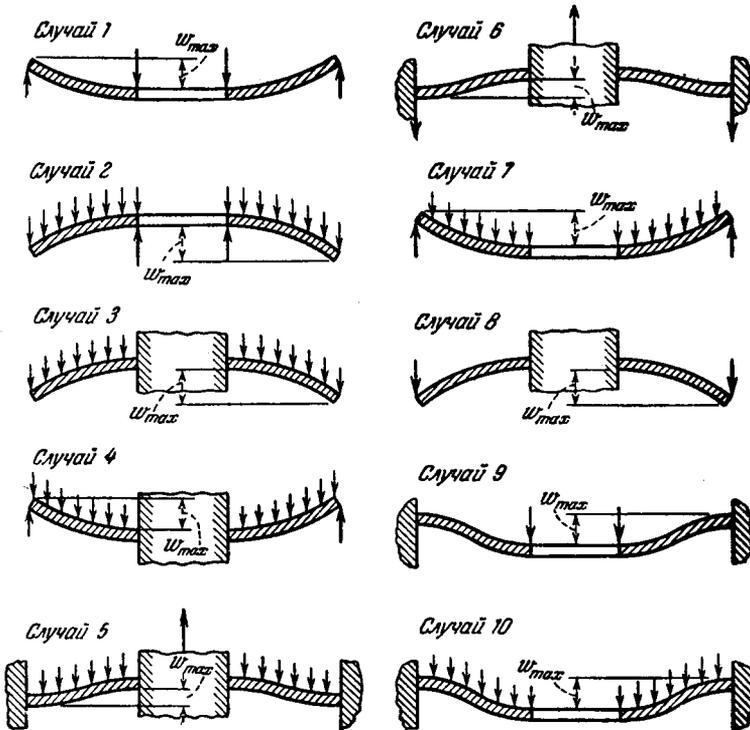


Рис. 36.

с достаточной точностью, рассматривая радиальную полосу как балку, условия опирания и загрузки которой те же, что и в данной нам пластинке. При этом влиянием моментов M_1 на изгиб совершенно пренебрегают.

Таблица 3

Коэффициенты k и k_1 , входящие в уравнения (75) и (76) для десяти случаев, представленных на рис. 36

$a/b =$	1,25		1,5		2	
	случай №	k	k_1	k	k_1	k
1	1,10	0,341	1,26	0,519	1,48	0,672
2	0,66	0,202	1,19	0,491	2,04	0,902
3	0,135	0,00231	0,410	0,0183	1,04	0,0938
4	0,122	0,00343	0,336	0,0313	0,74	0,1250
5	0,090	0,00077	0,273	0,0062	0,71	0,0329
6	0,115	0,00129	0,220	0,0064	0,405	0,0237
7	0,592	0,184	0,976	0,414	1,440	0,664
8	0,227	0,00510	0,428	0,0249	0,753	0,0877
9	0,194	0,00504	0,320	0,0242	0,454	0,0810
10	0,105	0,00199	0,259	0,0139	0,480	0,0575

$a/b =$	3		4		5	
	случай №	k	k_1	k	k_1	k
1	1,88	0,734	2,17	0,724	2,34	0,704
2	3,34	1,220	4,30	1,300	5,10	1,310
3	2,15	0,293	2,99	0,448	3,69	0,564
4	1,21	0,291	1,45	0,417	1,59	0,492
5	1,54	0,110	2,23	0,179	2,80	0,234
6	0,703	0,062	0,933	0,092	1,13	0,114
7	1,880	0,824	2,08	0,830	2,19	0,813
8	1,205	0,209	1,514	0,293	1,745	0,350
9	0,673	0,172	1,021	0,217	1,305	0,238
10	0,657	0,130	0,710	0,162	0,730	0,175

18. Круглая пластинка, нагруженная концентрически. Начнем со случая свободно опертой пластинки, в которой нагрузка распределена равномерно по окружности радиуса b (рис. 37, *a*). Разбив пластинку, как показано на рис. 37, *b* и 37, *c*, на две части, мы увидим, что внутренняя часть пластинки будет находиться в условиях чистого изгиба, вызванного равномерно распределенными моментами M_1 и перерезывающими силами Q_1 . Обозначив через P всю приложенную нагрузку, мы найдем, что

$$Q_1 = \frac{P}{2\pi b}. \quad (a)$$

Величина момента M_1 определится из условия непрерывности на окружности радиуса $r = b$, из которого следует, что обе части

пластинки должны иметь на этой окружности один и тот же наклон. Пользуясь уравнениями (72) и (j) предыдущего параграфа, находим, что наклон для внутренней границы наружной части пластинки равен

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)} \left(\frac{1}{b} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{b}{a^2}\right) + \frac{Pb}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{b}{a} \cdot \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\right]. \quad (b)$$

Внутренняя часть пластинки изогнута по сферической поверхности, кривизна которой дается выражением (46). Поэтому искомым наклоном на границе равен

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = -\frac{M_1 b}{D(1+\nu)}. \quad (c)$$

Приравняв выражения (b) и (c), получим

$$M_1 = \frac{(1-\nu)P(a^2-b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)P \ln \frac{b}{a}}{4\pi}. \quad (d)$$

Подставляя это выражение для M_1 в уравнение (73), получим прогибы наружной части пластинки, вызванные моментами M_1 ;

прогибы же, вызванные силами Q_1 , получаются из уравнения (f) предыдущего параграфа. Складывая оба эти прогиба вместе, получим для наружной части пластинки

$$\omega = \frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - r^2) \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + (b^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} \right]. \quad (77)$$

Подставив в это выражение $r=b$, получим прогиб под нагрузкой

$$(\omega)_{r=b} = \frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - b^2) \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + 2b^2 \ln \frac{b}{a} \right]. \quad (e)$$

Чтобы найти прогибы внутренней части пластинки, прибавим к прогибу (e) прогибы, вызванные чистым изгибом этой части пластинки. Таким путем получим

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - b^2) \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + 2b^2 \ln \frac{b}{a} \right] + \\ &\quad + \frac{b^2 - r^2}{2D(1+\nu)} \left[\frac{(1-\nu) \cdot P(a^2 - b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)P \ln \frac{b}{a}}{4\pi} \right] = \\ &= \frac{P}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + r^2 - b^2 + (a^2 - r^2) \frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)b^2}{2(1+\nu)a^2} \right] = \\ &= \frac{P}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + (a^2 - b^2) \frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)r^2}{2(1+\nu)a^2} \right]. \quad (78) \end{aligned}$$

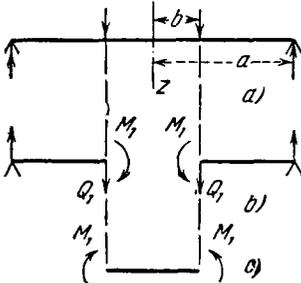


Рис. 37.

Если контур пластинки защемлен, то прогибы ее получатся путем наложения на прогибы (77) и (78) прогибов, вызванных изгибающими моментами M_2 , равномерно распределенными по контуру пластинки (рис. 38) и такой величины, что наклон изогнутой поверхности

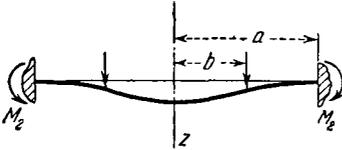


Рис. 38.

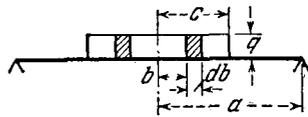


Рис. 39.

у контура обращается в нуль. Согласно выражению (77) наклон на контуре свободно опертой пластинки равен

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{P}{4\pi D} \cdot \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a}. \quad (f)$$

Наклон, вызванный моментами M_2 , равен

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{M_2 a}{D(1+\nu)}. \quad (g)$$

Приравнивая сумму выражений (f) и (g) нулю, получим

$$M_2 = \frac{P}{4\pi} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Прогибы, вызванные этим моментом, равны

$$\omega = \frac{M_2}{D(1+\nu)} \cdot \frac{r^2 - a^2}{2} = \frac{P}{8\pi D(1+\nu)} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} (r^2 - a^2). \quad (h)$$

Складывая эти прогибы с прогибами (77) и (78), получим для внешнего кольца защемленной по контуру пластинки

$$\omega = \frac{P}{8\pi D} \left[(a^2 - r^2) \frac{a^2 + b^2}{2a^2} + (b^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} \right] \quad (79)$$

и для ее внутренней части

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{P}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + r^2 - b^2 + \frac{(a^2 - r^2)(a^2 + b^2)}{2a^2} \right] = \\ &= \frac{P}{8\pi D} \left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - b^2)}{2a^2} \right]. \quad (80) \end{aligned}$$

Зная прогибы для случая нагрузки, равномерно распределенной по концентрической окружности, мы можем теперь, пользуясь методом наложения, решить любой случай изгиба круглой пластинки, нагруженной симметрично относительно центра. Рассмотрим, например, случай, когда нагрузка равномерно распределена на внутренней части пластинки, ограниченной окружностью радиусом c (рис. 39).

Выражением (77) пользуемся для того, чтобы получить прогиб в любой точке ненагруженной части пластинки ($a > r > c$). Чтобы получить прогиб, вызванный элементарной нагрузкой, распределенной по площади кольца радиуса b и шириной db (рис. 39), нам следует подставить в это выражение $P = 2\pi b q db$, где q — интенсивность равномерно распределенной нагрузки. Интегрируя полученное таким образом выражение по b , получим прогиб

$$\begin{aligned} w &= \frac{q}{4D} \int_0^c \left\{ (a^2 - r^2) \frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} + r^2 \ln \frac{r}{a} + \right. \\ &\quad \left. + b^2 \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{(1 - \nu)(a^2 - r^2)}{2(1 + \nu)a^2} \right] \right\} b db = \\ &= \frac{qc^2}{8D} \left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] + \\ &\quad + \frac{qc^4}{16D} \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right] \end{aligned}$$

или, обозначив полную нагрузку $\pi c^2 q$ через P ,

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left\{ \frac{3 + \nu}{1 + \nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} + c^2 \left[\ln \frac{r}{a} - \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)} \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right] \right\}. \quad (81)$$

Выражением (78) пользуемся для того, чтобы получить прогиб в центре. Подставив в это выражение $r = 0$ и $P = 2\pi b q$ и проинтегрировав, найдем

$$\begin{aligned} (w)_{r=0} &= \frac{q}{4D} \int_0^c \left[b^2 \ln \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{2} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \right) \right] b db = \\ &= \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} a^2 + c^2 \ln \frac{c}{a} - \frac{7 + 3\nu}{4(1 + \nu)} c^2 \right], \quad (82) \end{aligned}$$

где $P = \pi c^2 q$.

Максимальный изгибающий момент получается в центре и находится с помощью выражения (d). Подставив в это выражение $2\pi b q db$ вместо P и проинтегрировав, найдем

$$\begin{aligned} M_{\max} &= q \int_0^c \left(\frac{1 - \nu}{4} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} - \frac{1 + \nu}{2} \ln \frac{b}{a} \right) b db = \\ &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} + 1 - \frac{(1 - \nu)c^2}{4a^2} \right], \quad (83) \end{aligned}$$

где, как и раньше, P обозначает полную нагрузку $\pi c^2 q$ ¹⁾.

¹⁾ Это выражение применимо лишь в тех случаях, когда c по крайней мере в несколько раз больше толщины h . Случай весьма малого c разбирается в § 19.

Выражением (81) пользуемся для того, чтобы найти изгибающие моменты M_r и M_t в любой точке ненагруженной наружной части пластинки. Подставив это выражение в общие формулы (52) и (53), найдем

$$M_r = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \ln \frac{a}{r} + \frac{(1-\nu)Pc^2}{16\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right), \quad (84)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu \right] - \frac{(1-\nu)Pc^2}{16\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} \right). \quad (85)$$

Максимальные значения этих моментов получаются на окружности радиуса $r = c$, где

$$M_r = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \ln \frac{a}{c} + \frac{(1-\nu)P(a^2 - c^2)}{16\pi a^2}, \quad (86)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} + 1 - \nu \right] - \frac{(1-\nu)P(a^2 + c^2)}{16\pi a^2}. \quad (87)$$

Тот же самый метод вычисления прогибов и моментов может быть использован для любого случая симметричного нагружения круглой пластинки.

Прогиб в центре пластинки может быть легко вычислен также и для любого вида несимметричной нагрузки на основе следующего соображения.

Вследствие полной симметрии как самой пластинки, так и граничных условий, прогиб, вызванный в ее центре сосредоточенной нагрузкой P , зависит лишь от величины нагрузки и от ее радиального расстояния от центра. Этот прогиб не изменится, если нагрузку P переместить в любое иное положение, лишь бы радиальное расстояние ее от центра осталось при этом прежним. Прогиб, следовательно, не изменится, если нагрузку P заменить несколькими нагрузками, сумма которых равна P , а радиальные расстояния которых те же самые, что и для нагрузки P . Из этого следует, что при вычислении прогиба пластинки в центре мы вправе заменить сосредоточенную нагрузку P нагрузкой P , равномерно распределенной по окружности радиуса, равного радиальному расстоянию данной нам сосредоточенной нагрузки. Для нагрузки, равномерно распределенной по окружности радиусом b , прогиб в центре пластинки, опертой по краям, дается уравнением (78) и равен

$$(\omega)_{r=0} = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (a^2 - b^2) - b^2 \ln \frac{a}{b} \right]. \quad (I)$$

Эта формула указывает значение прогиба пластинки в ее центре, вызванного сосредоточенной нагрузкой P , приложенной на расстоянии b от центра пластинки. Располагая этой формулой, мы получаем

возможность, пользуясь методом наложения¹⁾, определять прогиб в центре для любого иного вида загрузки. Следует заметить, что прогибы и напряжения в круглой пластинке с отверстием или без него могут быть значительно снижены путем армирования пластинки концентрическими²⁾ или радиальными ребрами. В последнем случае, однако, распределение напряжений уже перестает быть симметричным относительно центра пластинки.

19. Круглая пластинка, нагруженная в центре. Решение для сосредоточенной нагрузки, приложенной в центре пластинки, может быть получено из выкладок предыдущего параграфа, если положить, что радиус круга, внутри которого распределяется нагрузка, становится бесконечно малым, в то время как величина полной нагрузки P сохраняет заданное конечное значение. В соответствии с этим допущением и согласно уравнению (82) максимальный прогиб в центре свободно опертой пластинки будет равен

$$w_{\max} = \frac{(3 + \nu) Pa^2}{16\pi(1 + \nu)D}. \quad (88)$$

Прогиб в некоторой точке пластинки на расстоянии r от центра по уравнению (81) получится

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right]. \quad (89)$$

Изгибающий момент для точек при $r > c$ мы найдем, если пренебрежем членами, содержащими c^2 , в уравнениях (84) и (85). Это нам даст

$$M_r = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r}, \quad (90)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu \right]. \quad (91)$$

Чтобы получить формулы для круглой пластинки, защемленной по контуру, продифференцируем уравнение (89) и найдем для наклона на краю свободно опертой пластинки

$$-\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{Pa}{4(1 + \nu)\pi D}. \quad (a)$$

¹⁾ Этот метод вычисления прогибов в центре пластинки был указан Сен-Венаном в его переводе: «Теория упругости твердых тел» Клебша, стр. 363, Париж, 1883. К результату (i) можно прийти также путем применения для круглой пластинки теоремы взаимности Максвелла.

²⁾ Этот случай был исследован Нешем (Nash W. A., J. Appl. Mech., т. 15, стр. 25, 1948); см. также Biezeno С. В., Grammel R., Technische Dynamik, 2-е изд., т. 1, стр. 497, 1953 (имеется русский перевод с 1-го издания: Бицено К. Б., Граммель Р., Техническая динамика, т. 1, стр. 649, Гостехиздат, 1950. — Прим. ред.).

Изгибающие моменты M_2 , равномерно распределенные по защемленному контуру (рис. 40), вызовут изгиб пластинки по сферической поверхности, радиус которой дается уравнением (46), а соответствующий наклон на крае равен

$$-\frac{M_2 a}{(1 + \nu) D}. \quad (b)$$

Пользуясь выражениями (а) и (b), запишем условие, требующее, чтобы на защемленном контуре наклон обращался в нуль; оно даст нам

$$(M_r)_{r=a} = M_2 = -\frac{P}{4\pi}. \quad (c)$$

Прогибы по уравнению (h) предыдущего параграфа, вызванные моментами M_2 , окажутся равными

$$\frac{P (r^2 - a^2)}{8\pi D (1 + \nu)}.$$

Налагая эти прогибы на прогибы свободно опертой пластинки из уравнения (89), получим следующее выражение для прогибов защемленной пластинки при загрузении ее в центре:

$$w = \frac{Pr^2}{8\pi D} \ln \frac{r}{a} + \frac{P}{16\pi D} (a^2 - r^2). \quad (92)$$

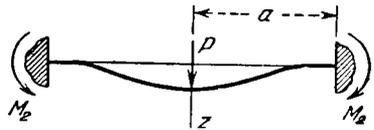


Рис. 40.

Складывая уравнение (c) с уравнениями (90) и (91) для свободно опертой пластинки, получим следующие уравнения для изгибающего момента в любой точке, расположенной не очень близко к точке приложения нагрузки:

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right], \quad (93)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right]. \quad (94)$$

С приближением r к нулю выражения (90), (91), (93) и (94) стремятся к бесконечности и потому становятся непригодными для вычисления изгибающих моментов. Сверх того, допущения, являющиеся основой для элементарной теории изгиба круглой пластинки, теряют силу в непосредственной близости к точке приложения сосредоточенной силы. С уменьшением радиуса c круга, по которому распределена нагрузка P , интенсивность $P/\pi c^2$ давления увеличивается так, что пренебрегать ею в сравнении с напряжениями изгиба, как это делалось в элементарной теории, становится уже недопустимым. Касательные напряжения, которыми упрощенная теория точно так же

пренебрегала, равным образом беспредельно возрастают с приближением c к нулю, поскольку при этом стремится к нулю цилиндрическая поверхность $2\pi ch$, по которой распределена перерезывающая сила P .

Отвлекаясь от допущений, на которых основывается элементарная теория, мы можем получить распределение напряжений близ точки приложения нагрузки, если будем рассматривать эту часть пластинки как тело, все три измерения которого суть величины одного и того же порядка. С этой целью представим себе, что центральная нагруженная часть отделена, как показано на рис. 41,

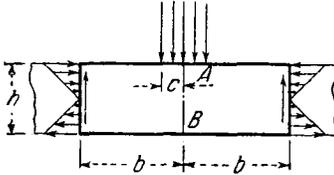


Рис. 41.

от ее ненагруженной части цилиндрической поверхностью, радиус b которой в несколько раз больше толщины h пластинки. Можно принять, что элементарная теория изгиба достаточно точна на расстоянии b от точки приложения нагрузки P и что соответствующие напряжения могут быть вычислены посредством уравнений (90). Таким образом, задача о распределении напряжений около центра пластинки сводится к задаче о симметричном распределении напряжений в круглом цилиндре высотой h , радиуса b , находящемся под действием нагрузки P , распределенной по малому кругу радиуса c , и реакций, приложенных по его боковой поверхности¹⁾. Решение этой задачи показывает, что максимальное сжимающее напряжение в центре A верхней поверхности пластинки может быть выражено следующей приближенной формулой²⁾:

вычислены посредством уравнений (90). Таким образом, задача о распределении напряжений около центра пластинки сводится к задаче о симметричном распределении напряжений в круглом цилиндре высотой h , радиуса b , находящемся под действием нагрузки P , распределенной по малому кругу радиуса c , и реакций, приложенных по его боковой поверхности¹⁾. Решение этой задачи показывает, что максимальное сжимающее напряжение в центре A верхней поверхности пластинки может быть выражено следующей приближенной формулой²⁾:

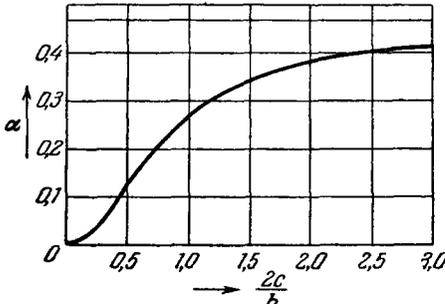


Рис. 42.

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_1 - \frac{P}{\pi c^2} \left[\frac{1 + 2\nu}{2} - (1 + \nu)\alpha \right], \quad (95)$$

где σ_1 — значение сжимающего напряжения при изгибе³⁾, указанное в уравнении (83) для случая свободно опертой пластинки, а α — численный коэффициент, зависящий от $2c/h$, т. е. от отношения диаметра нагруженной площади к толщине пластинки.

¹⁾ Некоторые примеры симметричного распределения напряжений рассматриваются в книге Timoshenko S., Goodier J., Theory of Elasticity, 2-е изд., стр. 384, 1951 (имеется русский перевод с первого издания: Тимошенко С. П., Теория упругости, стр. 339, ОНТИ, 1934. — Прим. ред.), Случай, изображенный на рис. 41, был исследован А. Надаи, см. его книгу «Упругие пластинки» (Elastische Platten, стр. 308), а также Войновским-Кригером (S. Wolnowsky-Krieger). Приведенные здесь результаты заимствованы из статьи С. Войновского-Кригера в Ingenieur-Archiv, т. 4, стр. 305, 1933.

²⁾ Если c весьма мало, то сжимающее напряжение $P/\pi c^2$ становится большим, чем σ_{\max} , даваемое уравнением (95) (см. рис. 43).

³⁾ Эта величина должна быть введена в уравнение (95) с отрицательным знаком.

Несколько значений этого коэффициента приводится в таблице 4. Изменения его в зависимости от отношения $2c/h$ показаны также на рис. 42. Когда c приближается к нулю, вычисленное по уравнению (95) напряжение приближается к бесконечности.

Таблица 4

Значения коэффициента α в уравнении (95)

$2c/h$	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00	2,50
α	0,0106	0,0466	0,1234	0,200	0,263	0,348	0,386	0,398

Максимальное растягивающее напряжение имеет место в B , т. е. в центре нижней поверхности пластинки рис. 41. Когда c весьма мало, т. е. в случае сильной концентрации нагрузки, это растягивающее напряжение практически не зависит от отношения $2c/h$ и для свободной опертой пластинки определяется следующей приближенной формулой¹⁾:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{h^2} \left[(1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{a}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right], \quad (96)$$

где a — внешний радиус.

Чтобы получить сжимающие напряжения σ_r и σ_t в центре верхней поверхности защемленной по контуру пластинки, мы должны учесть действие моментов $M_2 = -P/4\pi$ и для этого уменьшить значение сжимающего напряжения σ_1 в уравнении (95) на величину, равную

$$\frac{P}{4\pi} \cdot \frac{6}{h^2} = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi h^2}. \quad (d)$$

Максимальное растягивающее напряжение в центре нижней поверхности защемленной по контуру пластинки при резкой концентрации нагрузки ($c = 0$) находится путем вычитания уравнения (d) из уравнения (96). Оно равно

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{h^2} (1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{a}{h} + 0,52 \right). \quad (97)$$

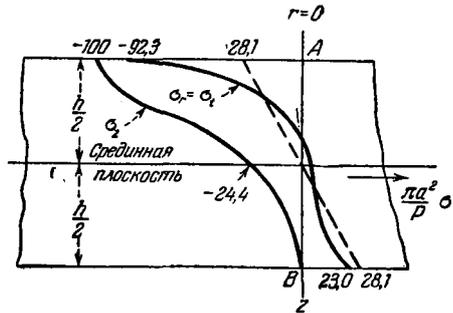


Рис. 43.

Распределение напряжений в толстой защемленной по контуру круглой пластинке ($h/a = 0,4$) с защемленными краями показано на рис. 43. Эти напряжения вычислены для $c = 0,1a$ и $\nu = 0,3$. Максимальное сжимающее напряжение σ_z в направлении, нормальном к горизонтальным поверхностям пластинки, получается в этом случае большим, чем максимальное сжимающее напряжение при изгибе, определенное уравнением (95). Максимальное растягивающее напряжение определяется из уравнения (97). Оно меньше, чем растягивающее напряжение, находимое из элементарной теории изгиба. Изменения последнего по ширине пластинки показаны на чертеже пунктирной

¹⁾ См. статью Войновского-Кригера, цит. на стр. 86.

линей. Вычисляется оно из уравнения для изгибающего момента

$$M_{\max} = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} - \frac{(1 - \nu) c^2}{4a^2} \right], \quad (98)$$

полученного в результате суммирования момента $M_2 = -P/4\pi$ с моментом по уравнению (83).

При определении безопасных размеров круглой пластинки, нагруженной в центре, мы можем обычно ограничить наши исследования вычислением максимального растягивающего напряжения при изгибе на нижней поверхности пластинки с помощью уравнений (96) и (97). Хотя в случае сильной концентрации нагрузки сжимающие напряжения в верхней части пластинки могут оказаться во много раз большими, чем растягивающие напряжения внизу, они, однако, не представляют непосредственной опасности в силу своего в высшей степени локализованного характера. Местная текучесть в случае пластичного материала не окажет никакого влияния на деформации пластинки в целом, если только растягивающие напряжения внизу пластинки останутся в безопасных пределах. Прочность хрупких материалов на сжатие бывает обычно во много раз больше, чем их прочность на растяжение; поэтому в случае, если растягивающее напряжение внизу будет оставаться в безопасных пределах, то и пластинка из такого материала точно так же будет в безопасности.

Если мы хотим дать точное описание явления изгиба пластинки, нам нужно будет учесть также и местное перераспределение напряжений и де-

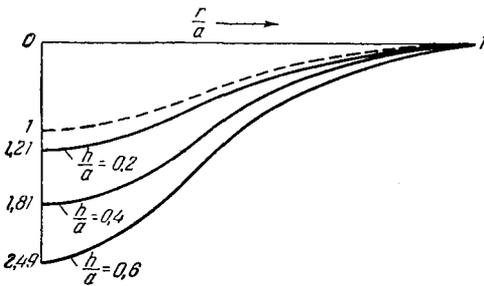


Рис. 44.

формаций, вызываемое сосредоточенной нагрузкой близ точки ее приложения. Это перераспределение распространяется в основном на цилиндрическую область, радиус которой несколько больше h , так что влияние его на общий изгиб приобретает практическую важность лишь в том случае, если толщина пластинки не очень мала в сравнении с ее радиусом. Для примера на рис. 44 показаны прогибы круглой пластинки, защемленной по контуру, под сосредоточенной в центре нагрузкой, при отношении толщины к радиусу h/a , равном 0,2; 0,4 и 0,6¹⁾. Прогиб, получающийся из элементарной теории [уравнение (94)], показан прерывистой линией. Мы видим, что расхождение между элементарной теорией и точным решением быстро уменьшается по мере уменьшения отношения h/a . В следующем параграфе мы покажем, что это расхождение обусловлено главным образом действием перерезывающих сил, совершенно не учитываемых в элементарной теории.

20. Поправки к элементарной теории симметричного изгиба круглой пластинки. Соотношения (37) и (38) между изгибающими моментами и кривизнами, выведенные для случая чистого изгиба, были нами использованы в качестве основы для решения различных задач о симметричном изгибе круглых пластинок. При этом мы не учиты-

¹⁾ Кривые на рис. 44 представляют собой результаты точного решения Войновского-Кригера в статье, цит. на стр. 86.

вали того влияния, которое оказывают на изгиб касательные напряжения, а также нормальное сжатие в плоскостях, параллельных поверхностям пластинки. Поэтому точными наши решения и оказались лишь в двух случаях, а именно: 1) для изгиба пластинки по сферической поверхности и 2) для кольцевой пластинки, загруженной моментами, равномерно распределенными по внутреннему и внешнему контурам (рис. 31). Во всех остальных рассмотренных нами случаях выведенные формулы являются приближенными, и точность их зависит от отношения толщины пластинки к внешнему радиусу. Эти приближенные формулы могут быть, однако, уточнены, если в них ввести поправки с приближенным учетом влияния, оказываемого на прогибы касательными напряжениями и поперечным давлением¹⁾.

Рассмотрим сначала круглую пластинку без отверстия, опертую по контуру и равномерно нагруженную. Перерезывающая сила Q на единицу длины дуги вдоль окружности радиуса r выразится как

$$Q = \frac{1}{2} qr.$$

Из точного решения для пластинок, толщина которых не предполагается малой²⁾, известно, что касательные напряжения τ_{rz} изменяются по толщине пластинки согласно параболическому закону точно так же, как и в балках узкого прямоугольного поперечного сечения. Поэтому максимальное касательное напряжение приходится на срединную поверхность пластинки, и величина его получается равной

$$(\tau_{rz})_{\max} = -\frac{3}{2} \frac{qr}{2h}. \quad (a)$$

Соответствующая деформация сдвига составит

$$\frac{d\omega_1}{dr} = -\frac{3}{2} \frac{qr}{2Gh}, \quad (b)$$

где ω_1 — дополнительный прогиб срединной поверхности пластинки, произведенный касательными напряжениями. Интегрирование даст для

¹⁾ Начало точной теории пластинки было положено Сен-Венаном в его переводе книги Клебша «Теория упругости твердых тел», стр. 337. Ценный критический разбор этой книги приводится у Тодхэнтера и Пирсона в их «Истории теории упругости» (Тодхэнтер I., Pearson K., History of the Theory of Elasticity, т. II, ч. I, стр. 217). Дальнейшим своим развитием теория обязана Мичелу (Мичелл J. H., Proc. London Math. Soc., т. 31, стр. 100, 1900) и Ляву (Лаву A. E. H., Mathematical Theory of Elasticity, 4-е изд., стр. 465), имеется русский перевод: Математическая теория упругости, стр. 474, ОНТИ, 1935. Библиографический указатель новой литературы по этому предмету приводится в статье Войновского-Кригера (Войновский-Кригер, Ingenieur-Archiv, т. 4, стр. 203, 1933). Несколько примеров точной теории дается ниже, в § 26, см. стр. 116.

²⁾ Timoshenko, Goodier, op. cit., стр. 351 (см. Тимошенко С. П., Теория упругости, стр. 345. — Прим. ред.).

прогибов, вызванных касательными напряжениями, следующее значение:

$$w_1 = \frac{3}{2} \frac{q}{4Gh} (a^2 - r^2), \quad (c)$$

а в центре пластинки

$$(w_1)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{qa^2}{4Gh}. \quad (d)$$

Действующее на пластинку поперечное давление вызовет отрицательную кривизну с выпуклостью вверх подобно тому, как это имеет место в равномерно нагруженной балке¹⁾. Давление q на единицу площади вызовет на верхней поверхности пластинки радиальное удлинение $\nu q/E$. В срединной поверхности пластинки это удлинение будет равно $\nu q/2E$, на нижней же оно обращается в нуль. Полагая, что здесь имеет силу линейный закон, мы сможем найти приближенное значение радиуса кривизны R из уравнения

$$\frac{\nu q}{2E} = \frac{h}{2R},$$

откуда

$$\frac{1}{2R} = \frac{\nu q}{2hE}.$$

Отрицательный же прогиб будет равен

$$w_2 = -\frac{1}{2R} (a^2 - r^2) = -\frac{\nu q}{2hE} (a^2 - r^2). \quad (e)$$

Складывая уравнения (c) и (e) с уравнением (67), мы найдем более точное выражение для прогиба

$$w = \frac{q}{64D} (a^2 - r^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right) + \frac{qh^2}{8D} \cdot \frac{3 + \nu}{6(1 - \nu^2)} (a^2 - r^2).$$

В центре пластинки этот прогиб принимает значение

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3 + \nu}{1 - \nu^2} \cdot \frac{h^2}{a^2} \right). \quad (f)$$

Второй член в уравнении (f) представляет собой поправку на касательные напряжения и поперечное давление. Как видно, эти поправки малы, если отношение толщины пластинки к ее радиусу мало. Значение этой поправки, получаемое из точного решения, равно²⁾

$$\frac{qa^4}{64D} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{8 + \nu + \nu^2}{1 - \nu^2} \cdot \frac{h^2}{a^2}. \quad (g)$$

¹⁾ См. там же, стр. 53.

²⁾ См. Ляв А., Математическая теория упругости, стр. 509, ОНТИ, 1935.

Для $\nu = 0,3$ точное значение приблизительно на 20% меньше, чем определенное уравнением (f).

В равномерно нагруженной круглой пластинке, защемленной по контуру, отрицательных прогибов w_2 , производимых давлением, возникнуть не может, и потому здесь нужно принять во внимание лишь прогиб w_1 , обусловленный касательными напряжениями. Прибавляя этот прогиб к правой части уравнения (62), получим более точное значение прогиба

$$w = \frac{q}{64D} \left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4h^2}{1-\nu} (a^2 - r^2) \right]. \quad (h)$$

Интересно отметить, что это значение совпадает с точным решением¹⁾.

Рассмотрим теперь прогибы, производимые касательными напряжениями в кольцевой пластинке, нагруженной перерезывающими силами, равномерно распределенными по внутреннему краю пластинки, как показано на рис. 32. Максимальное касательное напряжение на расстоянии r от центра равно

$$(\tau_{rz})_{\max} = -\frac{3}{2} \frac{P}{2\pi r h},$$

где P обозначает полную перерезывающую нагрузку. Соответственная деформация сдвига²⁾

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{3}{2} \frac{P}{2\pi r h G}. \quad (i)$$

Интегрируя, получим для прогиба, вызванного сдвигом,

$$w_1 = \frac{3}{4} \frac{D}{\pi h G} \ln \frac{a}{r} = \frac{Ph^2}{8\pi(1-\nu)D} \ln \frac{a}{r}. \quad (j)$$

Этот прогиб следует прибавить к правой части уравнения (к) (стр. 76), чтобы получить более точное значение прогиба пластинки, показанной на рис. 32. Если радиус b отверстия весьма мал, выражение полного прогиба примет вид

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] + \frac{Ph^2}{8\pi(1-\nu)D} \ln \frac{a}{r}. \quad (k)$$

Прогиб на контуре отверстия

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{8\pi D} \left(\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} + \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{h^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} \right). \quad (l)$$

Второй член в этом выражении представляет собой поправку на влияние перерезывающей силы. По мере приближения b к нулю она

¹⁾ См. там же.

²⁾ Если пластинка без отверстия, правую часть уравнения (i) следует умножить на $(1-\nu^2)$ в соответствии с приводимым ниже результатом (t).

неограниченно возрастает в силу нашего допущения, что нагрузка P сохраняет всегда конечное значение. Таким образом, когда b приближается к нулю, соответствующее касательное напряжение и деформация сдвига становятся бесконечно большими.

Поправочный член в уравнении (1), отражающий влияние сдвига, неприменим к случаю пластинки без отверстия. Поправка для пластинки без отверстия, как можно ожидать, должна быть несколько меньшей, вследствие расклинивающего действия сосредоточенной нагрузки P , приложенной в центре верхней поверхности пластинки. Представим себе, что центральная часть пластинки, выделенная цилиндрическим сечением

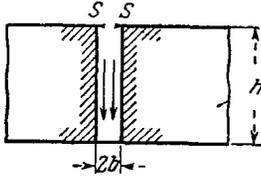


Рис. 45.

малого радиуса b , удалена и что действие ее на остальную часть пластинки заменено вертикальными P , и радиальными силами S , отражающими расклинивающее действие нагрузки, и распределенными по верхнему краю пластинки, как показано на рис. 45. Очевидно, последние силы производят растяжение срединной поверхности пластинки и одновременно с этим некоторый выгиб ее вверх. Это указывает на то, что в применении

к случаю пластинки без отверстия поправочный член в уравнении (к) должен быть уменьшен. Чтобы получить представление о величине радиальных сил S , рассмотрим пластинку в двух условиях загрузки, показанных на рис. 46. В первом случае пластинка сжата двумя равными и противоположно направленными силами P , действующими по оси симметрии z . Во втором случае пластинка подвергнута равномерному сжатию в ее плоскости давлением p ,

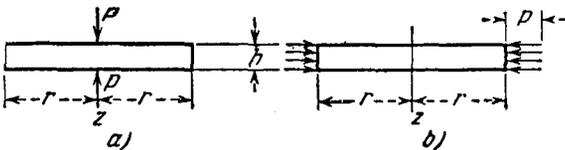


Рис. 46.

равномерно распределенным по ограничивающей пластинку цилиндрической поверхности. Вследствие поперечного расширения это сжатие приведет к увеличению толщины пластинки на величину

$$\Delta h = \frac{2\nu p}{E} h.$$

Из этого выражения мы можем теперь получить приращение Δr радиуса r пластинки под действием сил P (рис. 46, а), применив для этой цели теорему о взаимности к двум условиям нагрузки, показанным на рис. 46. Это дает

$$P \Delta h = 2\pi r h p \Delta r,$$

откуда

$$\Delta r = \frac{P \Delta h}{2\pi r h p} = \frac{2\nu}{E} \cdot \frac{P}{2\pi r}. \quad (m)$$

Сравним это радиальное расширение с радиальным расширением, вызываемым в цилиндре с толстыми стенками внутренним давлением p . Если

внутренний радиус b цилиндра весьма мал в сравнении с его внешним радиусом r , то приращение этого наружного радиуса согласно формуле Ламе будет ¹⁾

$$\Delta r = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{p_1 b^2}{r}. \quad (n)$$

Сравнив выражения (m) и (n), заключаем, что радиальное расширение, вызываемое в пластинке силами P (рис. 46, a), имеет ту же величину, что и радиальное расширение, вызываемое в пластинке с малым цилиндрическим отверстием в центре (рис. 45) внутренним давлением p_1 , величина которого задана уравнением

$$\frac{2\nu P}{E2\pi r} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{p_1 b^2}{r}.$$

Отсюда получаем

$$p_1 = \frac{\nu P}{(1 + \nu) \pi b^2}. \quad (o)$$

Возвращаясь к случаю сосредоточенной силы, приложенной в центре верхней поверхности пластинки, действие которой изображено на рис. 45, заключаем, что сила S на единицу длины окружности отверстия должна быть равна давлению $p_1 h/2$. Воспользовавшись значением p_1 из уравнения (o), получим

$$S = \frac{\nu P h}{2(1 + \nu) \pi b^2}.$$

Эти силы, приложенные к верхней поверхности пластинки, производят прогибы w_1 вверх. Величина последних определится при подстановке

$$M_1 = \frac{S h}{2} = \frac{\nu P h^2}{4(1 + \nu) \pi b^2}$$

в уравнение (73); если мы пренебрежем b^2 , малым в сравнении с a^2 , то найдем

$$w_1 = -\frac{\nu P h^2}{8\pi(1 + \nu)^2 D} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2} - \frac{\nu P h^2}{4(1 - \nu)^2 \pi D} \ln \frac{a}{r}. \quad (p)$$

Прибавляя это к выражению (к), получим следующую, более точную формулу для прогиба пластинки без отверстия, несущей нагрузку P , сосредоточенную в центре верхней поверхности пластинки

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \ln \frac{r}{a} \right] + \frac{P h^2}{8\pi(1 + \nu) D} \ln \frac{a}{r} - \frac{\nu P h^2}{8\pi(1 + \nu)^2 D} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2}. \quad (q)$$

Этим уравнением можно пользоваться для вычисления прогиба во всех точках пластинки, не очень близких к точке приложения нагрузки. Если r — величина того же порядка, что и толщина пластинки, то уравнение (q) теряет силу; для того чтобы получить удовлетворительное решение, здесь потребуется, как было разъяснено в предыдущем параграфе, рассмотреть

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Сопrotивление материалов, ч. II.

центральную часть пластинки. Приближенное значение прогиба центральной части мы можем получить, рассматривая ее как пластинку малого радиуса и прибавляя прогиб, вызванный местным перераспределением напряжений близ точки приложения нагрузки, к прогибу, находимому в элементарной теории¹⁾. Прогиб, вызванный местным перераспределением напряжений близ центра, весьма мало зависит от контурных условий пластинки и потому может быть приближенно оценен с помощью кривых рис. 44. Пунктирная кривая на этом чертеже получена из уравнения (92). Дополнительные прогибы, вызванные местным перераспределением напряжений, равны разностям между ординатами кривых, нанесенных сплошной и пунктирной линиями.

В качестве примера рассмотрим пластинку, у которой радиус внутренней части равен $b = 5h$. Прогиб внутренней части, подсчитанный из уравнения (92) и принятый за единицу на рис. 44, равен

$$\delta_1 = \frac{Pb^2}{16\pi D} = \frac{P}{16\pi D} (5h)^2.$$

Воспользовавшись кривой $h/a = 0,2$ рис. 44, находим дополнительный прогиб, вызванный местным перераспределением напряжений,

$$\delta_2 = 0,21\delta_1 = 0,21 \frac{P}{16\pi D} (5h)^2. \quad (г)$$

Рассматривая пластинку, для которой $b = 2,5h$, и применив кривую $h/a = 0,4$ из рис. 44, получим

$$\delta_2 = 0,81 \frac{P}{16\pi D} (2,5h)^2, \quad (с)$$

значение, которое лишь слегка отличается от найденного в выражении (г) для $b = 5h$. Брать для b значения меньше, чем $2,5h$, будет уже не совсем допустимо, ибо при малых радиусах граничные условия толстой пластинки начинают играть большую роль, и вычисленные для защемленного края кривые рис. 44 могут оказаться для этого случая недостаточно точными.

Таким образом, чтобы получить прогиб пластинки под нагрузкой, мы поступаем следующим образом: вычисляем прогиб из уравнения (q), положив в первом члене $r = 0$, а в двух следующих членах $r = b = 2,5h$; к этому прогибу прибавляем прогиб центральной части пластинки, являющийся результатом влияния перерезывающих сил и определяемый из формулы (с).

В частном случае $\nu = 0,3$ прогибы для свободно опертой круглой пластинки можно определить также простым наложением кривых, нанесенных²⁾ на рис. 44, и значения прогиба

$$\frac{P(a^2 - r^2)}{8\pi D(1 + \nu)},$$

соответствующего чистому изгибу пластинки радиальными моментами $P/4\pi$, приложенными по ее контуру.

Следует заметить также, что при малых значениях отношения r/a влияние перерезывающей силы $P/2\pi r$ на прогиб отражается преимущественно

¹⁾ В рассматриваемом случае этот прогиб можно вычислять, пользуясь первым членом в выражении (q), подставив в него b вместо a .

²⁾ На рис. 44 это сделано для $\nu = 0,3$.

вторым членом правой части уравнения (q). Этому члену соответствует наклон

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{3}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{P}{2\pi zhG}. \quad (i)$$

Сопоставляя этот результат с выражением (i), заключаем, что коэффициент

$$k = \frac{3}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad (ii)$$

вводимый здесь в (i) вместо $k = \frac{3}{2}$, дает более точное значение деформации сдвига для случая пластинки без отверстия.

Все вышеприведенные выкладки применимы лишь к круглым пластинкам, прогибающимся по поверхности вращения. Ниже, в §§ 26 и 39 излагается более общая теория изгиба, учитывающая влияние перерезывающих сил на деформацию пластинки.

ГЛАВА IV

МАЛЫЕ ПРОГИБЫ ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНКИ

21. Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности.

Положим, что действующая на пластинку нагрузка нормальна к ее поверхности и что прогибы пластинки в сравнении с толщиной малы (см. § 13). В качестве граничных условий примем, что края пластинки могут свободно смещаться в плоскости пластинки и что

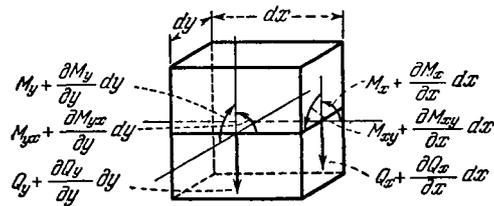


Рис. 47.

в связи с этим опорные реакции на краях должны быть нормальны к пластинке. При этих допущениях мы вправе пренебречь всякой имеющей место при изгибе деформацией в срединной плоскости пластинки. Расположив, как и прежде (см. § 10), координатные оси x

и y в срединной плоскости пластинки, ось же z направив перпендикулярно к этой плоскости, рассмотрим элемент, вырезанный из пластинки, как показано на рис. 47, двумя парами плоскостей, параллельных плоскостям xz и yz . Кроме изгибающих моментов M_x и M_y и крутящих моментов M_{xy} , полученных нами при исследовании чистого изгиба пластинки (см. § 10), в данном случае у нас будут еще вертикальные перерезывающие силы¹⁾, приложенные по боковым граням элемента; значения их на единицу длины в направлениях, параллельных осям y и x , мы обозначим соответственно через Q_x и Q_y , так что

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz. \quad (a)$$

¹⁾ Здесь не будет ни горизонтальных касательных усилий, ни усилий, нормальных к боковым граням элемента, поскольку мы пренебрегаем деформацией срединной плоскости.

Так как моменты и перерезывающие силы являются функциями координат x и y , то при исследовании условий равновесия элемента мы должны будем принять во внимание малые изменения этих величин, обусловленные изменениями координат x и y на малые величины dx и dy . Срединная плоскость элемента представлена на рис. 48, *a* и 48, *b*, где указаны те направления сил и моментов, которые принимаются положительными.

Нам следует рассмотреть действие нагрузки, распределенной по верхней поверхности пластинки. Интенсивность этой нагрузки обозначим через q , так что нагрузка, действующая на элемент поверхности¹⁾, будет равна $q dx dy$.

Проектируя все приложенные к элементу силы на ось z , получим следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0,$$

из которого

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (99)$$

Взяв моменты от всех действующих на элемент сил относительно оси x , получим другое уравнение равновесия

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0. \quad (b)$$

Моментом нагрузки q и моментом, возникающим вследствие изменения силы Q_y , мы в этом уравнении пренебрегаем ввиду того, что они представляют собой величины более высокого порядка малости,

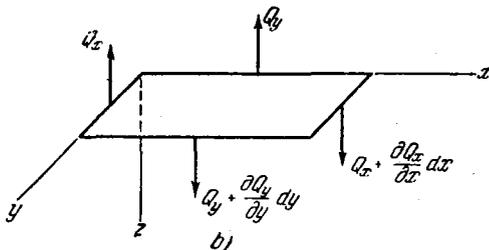
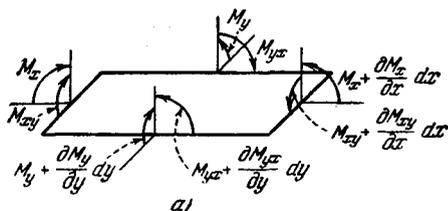


Рис. 48.

¹⁾ Поскольку компонентом напряжения σ_z здесь пренебрегается, мы не можем в действительности прилагать нагрузку ни по верхней, ни по нижней поверхности пластинки. Любая рассматриваемая в теории тонких пластинок поперечная сосредоточенная нагрузка отвечает лишь разрыву в величине перерезывающих сил, изменяющихся по толще пластинки по параболическому закону. Точно так же в величину нагрузки q без ущерба для точности результата можно включить и вес самой пластинки. Если вопросу о влиянии загрузки по поверхности приписывается в задаче специальное значение, необходимо применять теорию толстых пластинок (см. § 19).

чем те, которые мы рассматриваем. По упрощении уравнение (b) принимает вид

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \quad (c)$$

Точно таким же образом, взяв моменты относительно оси y , получим

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (d)$$

Так как в направлениях x и y сил нет, а относительно оси z нет моментов, то три уравнения (99), (c) и (d) полностью определяют равновесие элемента. Исключим из этих уравнений перерезывающие силы Q_x и Q_y , определив их из уравнений (c) и (d) и произведя подстановку их значений в уравнение (99). Таким путем получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (e)$$

Заметив, что $M_{yx} = -M_{xy}$, вследствие того, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, представим уравнение равновесия (e) окончательно в такой форме:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \quad (100)$$

Для того чтобы представить это уравнение как функцию прогибов w пластинки, сделаем допущение, что выражения (41) и (43), выведенные для случая чистого изгиба, сохраняют силу также и в случае поперечно нагруженной пластинки. Сделать такое допущение — значит пренебречь влиянием на изгиб перерезывающих сил Q_x и Q_y и сжимающего напряжения σ_z , вызванного нагрузкой q . Мы уже прибегали к этому приему в предыдущей главе и убедились, что погрешность в полученных таким путем прогибах мала, если только толщина пластинки мала в сравнении с другими ее размерами в ее плоскости. Дальнейшие соображения по этому вопросу будут приведены в § 26 при исследовании нескольких примеров точных решений задач на изгиб пластинок.

Переходя от примененных нами в уравнениях (41) и (43) направлений n и t к направлениям x и y , получим

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (101)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (102)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (100), найдем¹⁾

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (103)$$

Это последнее уравнение можно записать также в символической форме

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D}, \quad (104)$$

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (105)$$

Мы видим, что задача об изгибе пластинки поперечной нагрузкой q сводится к интегрированию уравнения (103). Если для какого-либо частного случая решение этого уравнения найдено и оно удовлетворяет условиям на краях пластинки, то изгибающий и крутящий моменты могут быть вычислены из уравнений (100) и (102). Соответствующие нормальные и касательные напряжения находятся из уравнения (44) и выражения

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2}.$$

Уравнениями (с) и (d) воспользуемся для определения перерезывающих сил Q_x и Q_y ; они дают нам

$$Q_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (106)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (107)$$

или в символической форме

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w). \quad (108)$$

Теперь можно определить и касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} , предположив, что они распределены по толщине пластинки по пара-

¹⁾ Это уравнение было получено Лагранжем в 1811 г., когда он рассматривал доклад, представленный во Французскую Академию наук Софией Жермен. Об обстоятельствах, связанных с выводом этого уравнения, рассказывается в «Истории теории упругости» Тодхэнтера и Пирсона (Todhunter I, Pearson K., History of the Theory of Elasticity, т. I, стр. 147, 247, 348 и т. II, ч. 1, стр. 263). См. также замечание Сен-Венана к § 73 французского перевода «Теория упругости твердых тел» Клебша, Париж, 1883, и в книге Тимошенко С. П., История науки о сопротивлении материалов, Москва, 1959, стр. 147. — Прим. пер.

болическому закону¹⁾. Тогда

$$(\tau_{xz})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h}, \quad (\tau_{yz})_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}.$$

Мы видим, таким образом, что напряжения в пластинке могут быть вычислены, если только для данного распределения нагрузки и данных граничных условий в результате интегрирования уравнения (103) у нас определена изогнутая поверхность ее.

22. Граничные условия. Исследование граничных условий мы начнем со случая прямоугольной пластинки, причем положим, что оси x и y направлены параллельно краям пластинки. *Край пластинки защемлен.* В таком случае прогиб по этому краю равен нулю и плоскость, касательная к изогнутой срединной поверхности, совпадает на нем с начальным положением срединной плоскости пластинки. Если положить, что ось x совпадает с защемленным краем, то граничные условия будут

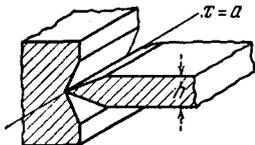


Рис. 49.

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x=a} = 0. \quad (109)$$

Край пластинки свободно оперт. Если край $x = a$ пластинки свободно оперт, то его прогиб должен быть равен нулю. В то же время этот край может свободно поворачиваться относительно оси x ; это значит, что изгибающие моменты M_x обращаются на нем в нуль. Такой способ опирания изображен на рис. 49. Аналитическими выражениями граничных условий для этого случая будут

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0. \quad (110)$$

Заметив, что наряду с w на краю $x = a$ обращается в нуль также и $\partial^2 w / \partial y^2$, заключаем, что второе из условий (110) может быть переписано в виде $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ или $\Delta w = 0$. Поэтому уравнения (110) можно считать эквивалентными уравнениям

$$(w)_{x=a} = 0, \quad (\Delta w)_{x=a} = 0, \quad (111)$$

не содержащим коэффициента Пуассона ν .

Свободный край. Если один край пластинки, положим край $x = a$ (рис. 50), совершенно свободен, то естественно принять, что по

¹⁾ В § 26 будет показано, что в некоторых случаях это допущение находится в согласии с точной теорией изгиба пластинки.

этому краю нет ни изгибающих или крутящих моментов, ни вертикальных перерезывающих сил, иными словами, что

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (M_{xy})_{x=a} = 0, \quad (Q_x)_{x=a} = 0.$$

В этой форме граничные условия для свободного края были выражены Пуассоном ¹⁾. Позднее, однако, Кирхгофф ²⁾ доказал, что трех условий слишком много и что для полного определения удовлетворяющих уравнению (103) прогибов w достаточно двух условий. Он показал при этом, что два требования Пуассона, относящиеся к крутящему моменту M_{xy} и к перерезывающей силе Q_x , должны быть заменены одним-единственным граничным условием. Физический смысл этого уменьшения числа граничных условий был разъяснен Томсоном и Тэтом ³⁾. Эти авторы указали, что изгиб пластинки не изменится, если горизонтальные силы, составляющие крутящую пару M_{xy} , приложенную к элементу длины dy края $x=a$, будут заменены, как показано на рис. 50, двумя вертикальными силами величиной M_{xy} с плечом dy . Такая замена не повлияет на величину крутящих моментов и вызовет лишь местные перераспределения напряжений на краю пластинки, не отражающиеся на распределении напряжений по всей остальной площади пластинки. При исследовании чистого изгиба пластинки в антикластическую поверхность (§ 11) мы уже имели дело с частным случаем такого преобразования системы приложенных по краям сил. Произведя подобное преобразование крутящих пар по краю пластинки и рассмотрев два примыкающих друг к другу элемента края (рис. 50), найдем, что распределение крутящих моментов M_{xy} будет статически эквивалентно распределению перерезывающих сил интенсивности

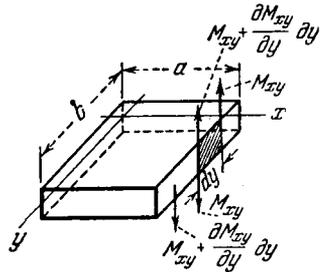


Рис. 50.

$$Q'_x = - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a}.$$

На этом основании объединенное требование относительно крутящего момента M_{xy} и перерезывающей силы Q_x для свободного

¹⁾ См. по этому поводу Todhunter I., Pearson K., History of the Theory of Elasticity, т. 1, стр. 250, и цитированные замечания Сен-Венана к § 73, стр. 685 в переводе книги Клебша.

²⁾ См. Grelle J., т. 40, стр. 51, 1850.

³⁾ См. Thomson, Tait, Natural Philosophy, т. 1, ч. 2, стр. 188, 1883. Тот же вопрос был освещен независимо Буссинеском: J. Math., 2-я серия, т. 16, стр. 125—274, 1871; 3-я серия, т. 5, стр. 329—344, Париж, 1879.

края $x = a$ принимает вид

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0. \quad (a)$$

Подставляя сюда вместо Q_x и M_{xy} их выражения (106) и (102), получаем окончательно для свободного края $x = a$:

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \quad (112)$$

Условие, чтобы изгибающие моменты на свободном крае были равны нулю, требует

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0. \quad (113)$$

Уравнения (112) и (113) представляют собой два необходимых граничных условия для свободного края $x = a$ пластинки.

Преобразуя крутящие пары, как было разъяснено в предыдущих рассуждениях и как показано на рис. 50, мы получаем не только непрерывно распределенные на краю $x = a$ перерезывающие силы Q'_x , но, сверх того, также и две сосредоточенные силы в концах края, как это показано на рис. 51. По величине эти силы равны значению крутящей пары¹⁾ M_{xy} в соответствующих углах пластинки. Произведя подобное же преобразование крутящих пар M_{yx} по краю $y = b$,

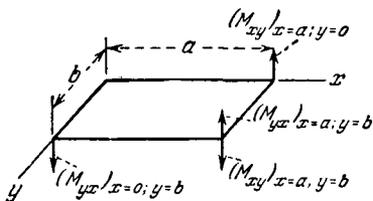


Рис. 51.

мы найдем, что и в этом случае также в дополнение к распределенным перерезывающим силам Q'_y в вершинах углов появятся еще и сосредоточенные силы M_{yx} . Это значит, что прямоугольная пластинка, опертая каким-либо способом по краям, обнаружит при поперечном ее загрузении вообще не только распределенные по краю опорные реакции, но также и сосредоточенные реакции в углах.

Рассматривая направления этих сосредоточенных реакций, мы можем сделать необходимые заключения о них, если только нам известен общий вид поверхности прогибов. Возьмем, например, равномерно нагруженную квадратную пластинку, свободно опертую по краям. Общий вид изогнутой поверхности показан на рис. 52, а. Пунктирными линиями изображено сечение срединной поверхности пластинки плоскостями, параллельными координатным плоскостям xz

¹⁾ Пара M_{xy} есть момент, отнесенный к единице длины, и потому имеет размерность силы.

и уз. При рассмотрении этих линий можно видеть, что близ угла A производная $\partial w/\partial x$, представляющая собой наклон изогнутой поверхности в направлении x , отрицательна и ее абсолютное значение уменьшается с увеличением y . На этом основании производная $\partial^2 w/\partial x \partial y$ в вершине угла A положительна. Из уравнения (102) мы заключаем, что M_{xy} в этом угле положителен и M_{yx} отрицателен.

Отсюда и в соответствии с направлениями M_{xy} и M_{yx} на рис. 48, а следует, что обе действующие в точке $x=a$, $y=b$ на рис. 51 сосредоточенные силы направлены вниз. Из симметрии мы заключаем также, что эти силы имеют одну и ту же величину и одно и то же направление во всех четырех углах пластинки. Поэтому условия, как указано на рис. 52, b , будут

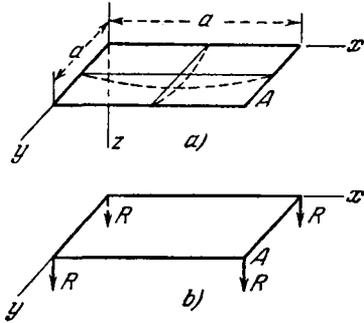


Рис. 52.

$$R = 2(M_{xy})_{x=a; y=a} = 2D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a; y=a}.$$

Мы видим, что при равномерной загрузке квадратной пластинки углы ее в общем случае имеют тенденцию приподниматься, и этот их подъем предотвращается, как указано на чертеже, сосредоточенными реакциями в углах.

Упруго опертый и упруго защемленный край. Если край $x=a$ прямоугольной пластинки жестко соединен с поддерживающей его балкой (рис. 53), то прогиб на этом крае будет равен не нулю,

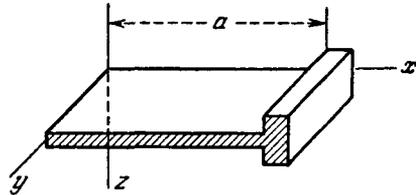


Рис. 53.

а прогибу балки и потому угол поворота края будет равен углу закручивания балки. Положим, что B есть жесткость балки при изгибе и C — жесткость ее при кручении. Давление в направлении z , передаваемое пластинкой на поддерживающую ее балку, будет равно согласно уравнению (а)

$$-V_x = -\left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a},$$

и дифференциальное уравнение изогнутой оси балки примет вид

$$B \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=a} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a}. \quad (114)$$

Это уравнение представляет собой одно из граничных условий пластинки для края $x = a$.

Чтобы получить второе условие, нам следует рассмотреть кручение балки. Угол¹⁾ поворота поперечного сечения балки равен $-(\partial w / \partial x)_{x=a}$, а изменение этого угла вдоль края равно

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{x=a}.$$

Отсюда крутящий момент балки равен

$$-C(\partial^2 w / \partial x \partial y)_{x=a}.$$

Этот момент изменяется вдоль края, так как пластинка, будучи жестко соединенной с балкой, передает ей эти непрерывно распределенные крутящие моменты. Величина этих переданных балке моментов на единицу длины равна, но противоположна по знаку изгибающим моментам M_x пластинки. Рассматривая условия равновесия элемента балки при его повороте, мы получаем поэтому

$$-C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = -(M_x)_{x=a}$$

или, подставляя сюда вместо M_x его выражение (101),

$$-C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a}. \quad (115)$$

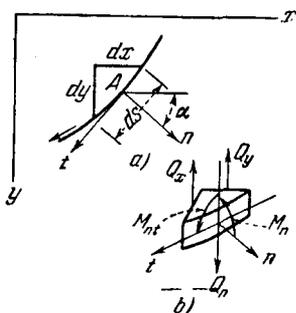


Рис. 54.

Это — второе граничное условие для края $x = a$ пластинки.

В случае пластинки с криволинейным контуром (рис. 54) располагаем начало координат в точке A края, а оси направляем по касательной t и по нормали n , как показано на чертеже. Изгибающий и крутящий моменты в этой точке будут

$$M_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_n dz, \quad M_{nt} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{nt} dz. \quad (b)$$

¹⁾ Для определения знака угла пользуемся правилом винта с правой нарезкой.

Воспользовавшись известными выражениями ¹⁾ для компонентов напряжений σ_n и τ_{nt} :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_{nt} &= \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha,\end{aligned}$$

мы можем представить выражения (b) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned}M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha - 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ M_{nt} &= M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (M_x - M_y) \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Перерезывающая сила Q_n в точке A контура найдется из условия равновесия изображенного на рис. 54 элемента пластинки. Оно дает нам

$$Q_n ds = Q_x dy - Q_y dx$$

или

$$Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha. \quad (d)$$

Имея выражения (c) и (d), мы без затруднений можем написать граничные условия для любого частного случая.

При защемлении криволинейного края пластинки будем иметь для этого края

$$\varpi = 0, \quad \frac{\partial \varpi}{\partial n} = 0; \quad (e)$$

в случае же свободного опирания

$$\varpi = 0, \quad M_n = 0. \quad (f)$$

Подставив вместо M_n его выражение из первого уравнения (c) и воспользовавшись уравнениями (101) и (102), мы можем представить граничные условия (f) в функции от ϖ и его производных.

Если край пластинки свободен, граничные условия будут

$$M_n = 0, \quad V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = 0, \quad (g)$$

где член $-\partial M_{nt}/\partial s$ получается по способу, показанному на рис. 50, и представляет собой ту часть реакции края, которая обусловлена распределенными по краю крутящими моментами M_{nt} . Подставив вместо M_n , M_{nt} и Q_n выражения (c) и (d) и воспользовавшись уравнениями (101), (102), (106) и (107), мы сможем представить

¹⁾ Направления x и y здесь уже не будут главными направлениями, как это мы имели в случае чистого изгиба; поэтому выражения для M_n и M_{nt} будут отличаться от тех, которые даются уравнениями (39) и (40).

граничные условия (g) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta w + (1 - \nu) \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) &= 0, \\ \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + \\ + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Иной способ вывода этих условий будет показан в следующем параграфе.

23. Вариант вывода граничных условий. Дифференциальное уравнение (104) изогнутой поверхности пластинки и граничные условия могут быть получены с помощью принципа виртуальных перемещений и выражения для энергии деформации изогнутой пластинки¹⁾.

Так как при выводе уравнения (104) влиянием касательных напряжений на прогиб мы полностью пренебрегали, то и соответствующее выражение для энергии деформации содержит в себе лишь те члены, которые зависят от изгибающего и крутящего моментов, как и в случае чистого изгиба, рассмотренного в § 12. Пользуясь уравнением (48), получаем для энергии деформации в бесконечно малом элементе

$$dV = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (a)$$

Полная энергия деформации пластинки будет найдена в результате интегрирования

$$V = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (117)$$

где интегрирование распространяется по всей поверхности пластинки.

Применяя принцип виртуальных перемещений, предположим, что прогибы пластинки w получили бесконечно малое приращение δw . Тогда соответствующее изменение энергии деформации пластинки должно быть равно работе, произведенной внешними силами на этих предположенных нами виртуальных перемещениях. При вычислении этой работы нам надлежит учесть не только распределенную по поверхности пластинки поперечную нагрузку q , но также и распределенные по контуру пластинки изгибающие моменты M_n и перерезывающие силы $Q_n = (\partial M_{nt} / \partial s)$. Поэтому принцип виртуальных перемещений даст нам следующее общее уравнение:

$$\delta V = \iint q \delta w dx dy - \int M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int \left(Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \right) \delta w ds. \quad (b)$$

¹⁾ Именно этим методом граничные условия были впервые удовлетворительно установлены Кирхгоффом (Creille J., т. 40, 1850). См. также его Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, стр. 450, 1877 (имеется русский перевод: Кирхгофф Г., Механика (Лекции по математической физике), Изд. АН СССР, Москва, 1962).

Первый интеграл в правой части этого уравнения представляет собой работу поперечной нагрузки на перемещении δw . Второй, распространенный по контуру пластинки, представляет собой работу изгибающих моментов при повороте $\partial \delta w / \partial n$ края пластинки. Знак минус определяется здесь избранным нами направлением M_n и указанным на рис. 54 направлением нормали n . Третий интеграл представляет собой работу приложенных вдоль края пластинки перерезывающих сил.

При подсчете приращения δV энергии деформации пластинки воспользуемся преобразованиями, которые мы воспроизведем здесь во всех подробностях в применении лишь к одному первому члену выражения (117). Малое приращение этого члена будет

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy = \\ &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] dx dy = \\ &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w \right] dx dy. \end{aligned} \quad (c)$$

В первых двух членах, следующих за последним знаком равенства в выражении (с), двойное интегрирование можно заменить простыми интегралами, если мы вспомним, что для всякой функции F двух переменных x и y имеют силу следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \iint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy &= \int F \cos \alpha ds, \\ \iint \frac{\partial F}{\partial y} dx dy &= \int F \sin \alpha ds. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

В этих выражениях простые интегралы распространяются вдоль контура, а α , как видно из рис. 54, есть угол между внешней нормалью и осью x . Применив первую из формул (d), мы можем представить выражение (с) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy + \\ &+ 2 \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) \cos \alpha ds. \end{aligned} \quad (e)$$

Передвигаясь по контуру в направлении, показанном на рис. 54, получаем

$$\frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \frac{dn}{dx} + \frac{\partial \delta w}{\partial s} \frac{ds}{dx} = \frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha.$$

В результате этого преобразования выражение (e) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy + \\ &+ 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial \delta w}{\partial s} \sin \alpha \right) \cos \alpha ds - 2 \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \cos \alpha ds. \end{aligned} \quad (f)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds = \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \delta w \right| - \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta w ds.$$

Первый член в правой части этого выражения равен нулю, поскольку мы производим здесь интегрирование вдоль замкнутого контура пластинки. Поэтому получаем

$$\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds = - \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \delta w ds.$$

Подставляя этот результат в уравнение (f), находим приращение первого члена в выражении для энергии деформации окончательно в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta \int \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \int \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\ &+ 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cos \alpha \right] \delta w ds. \quad (g) \end{aligned}$$

Преобразовывая подобным образом приращения остальных членов выражения (117), получаем

$$\begin{aligned} \delta \int \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy &= 2 \int \int \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dx dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \\ &- 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \alpha \cos \alpha \right) + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \sin \alpha \right] \delta w ds, \quad (h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \int \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy &= 2 \int \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy + \\ &+ \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \alpha \right) \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \int \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin \alpha + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha \right] \right\} \delta w ds, \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \int \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy &= 2 \int \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy + \\ &+ 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \right] - \right. \\ &\left. - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \sin \alpha \right\} \delta w ds. \quad (i) \end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, мы получаем возможность представить приращение потенциальной энергии в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta V = D \left\{ \int \int \Delta \Delta w \cdot \delta w dx dy + \int \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) + \nu \Delta w \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \\ \left. + \int \left\{ (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin \alpha \right\} \delta w ds. \quad (118) \right. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (b) и вспомнив, что δw и $\partial \delta w / \partial n$ представляют собой произвольные малые величины, удовлетворяющие граничным условиям, приходим к выводу, что уравнение (b) может быть удовлетворено лишь в том случае, если удовлетворяются следующие три уравнения:

$$\iint (D \Delta \Delta w - q) \delta w \, dx \, dy = 0, \quad (k)$$

$$\int \left\{ D \left[(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) + \nu \Delta w \right] + M_n \right\} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \, ds = 0, \quad (l)$$

$$\int \left\{ D \left\{ (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin \alpha \right\} - \left(Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \right) \right\} \delta w \, ds = 0. \quad (m)$$

Первое из этих уравнений удовлетворяется лишь при том условии, если в каждой точке срединной поверхности пластинки имеет место соотношение

$$D \Delta \Delta w - q = 0,$$

являющееся не чем иным, как дифференциальным уравнением (104) изогнутой поверхности пластинки. Уравнения (l) и (m) представляют собой граничные условия.

Если пластинка защемлена по краю, то δw и $\partial \delta w / \partial n$ обращаются по краю в нуль и уравнения (l) и (m) удовлетворяются. В случае свободно опертого края $\delta w = 0$ и $M_n = 0$. Поэтому уравнение (m) здесь также удовлетворяется, уравнение же (l) будет удовлетворяться, если

$$(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) + \nu \Delta w = 0. \quad (n)$$

В частном случае прямолинейного края, параллельного оси y , $\alpha = 0$, и из уравнения (n) получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

как и должно быть для свободно опертого края.

Если край пластинки совершенно свободен, величины δw и $\partial \delta w / \partial n$ в уравнениях (l) и (m) произвольны; далее, $M_n = 0$ и $Q_n - (\partial M_{nt} / \partial s) = 0$. Поэтому для свободного края имеем из уравнения (l) и (m)

$$(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) + \nu \Delta w = 0,$$

$$(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \sin \alpha = 0.$$

Эти условия находятся в согласии с выведенными ранее уравнениями (116) (см. стр. 106). В частном случае свободного прямолинейного края, параллельного оси y , $\alpha = 0$, и мы получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Эти уравнения совпадают с ранее полученными уравнениями (112) и (113). В случае, если по краю пластинки приложены распределенные вдоль него моменты M_n и перерезывающие силы $Q_n - (\partial M_n / \partial s)$, то соответствующие граничные условия точно так же легко получаются из уравнений (l) и (m).

24. Приведение задачи об изгибе пластинки к исследованию перемещений мембраны. В некоторых случаях бывает выгодно заменить выведенное нами для пластинки дифференциальное уравнение (103) четвертого порядка двумя уравнениями второго порядка, определяющими собой деформации мембраны¹⁾. Эту замену легко произвести, если уравнение (104) написать в следующей форме:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q}{D}, \quad (a)$$

и заметить, что при сложении двух выражений (101) для изгибающих моментов (см. стр. 98) мы получим

$$M_x + M_y = -D(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (b)$$

Вводя новое обозначение

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} \cong -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (119)$$

представим уравнения (a) и (b) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= -q, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Оба эти уравнения того же типа, что и уравнение, получаемое для равномерно растянутой поперечно нагруженной мембраны²⁾.

Решение этих уравнений чрезвычайно упрощается для случая свободно опертой пластинки многоугольного очертания, где для каждого прямолинейного участка контура мы имеем $\partial^2 w / \partial s^2 = 0$, по-

¹⁾ Этот метод исследования изгиба пластинки был введен Маркусом (Marcus H., Die Theorie elastischer Gewebe, 2-е изд., стр. 12, Berlin, 1932).

²⁾ См. Тимошенко С. П., Теория упругости, стр. 267; Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of elasticity, 2-е изд., стр. 269, 1951.

скольку на контуре $w=0$. Заметив, что при свободном опирании края $M_n=0$, заключаем, что для этого края справедливо равенство $\partial^2 w / \partial n^2 = 0$. Поэтому [см. уравнение (34)] имеем для края

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} = 0 \quad (с)$$

в согласии со вторым из уравнений (111). Следует заметить, что решение задачи о пластинке сводится в этом случае к последовательному интегрированию двух уравнений (120). Начнем с первого из этих уравнений и найдем его решение, удовлетворяющее граничному условию $M=0$ ¹⁾. Подставив это решение во второе уравнение и интегрируя, находим прогибы w . Обе задачи того же самого типа, что и задача о перемещениях равномерно растянутой поперечно нагруженной мембраны, у которой перемещения на контуре равны нулю. Эта последняя задача значительно проще задачи о пластинке и всегда может быть разрешена с достаточной точностью приближенным методом интегрирования, например, методом Ритца или методом конечных разностей. Несколько примеров применения этого последнего будут разобраны ниже (см. §§ 80, 83). Примеры применения метода Ритца приводятся при решении задач на кручение²⁾.

Другим простым случаем применения уравнений (120) является свободно опертая пластинка многоугольного очертания, изогнутая равномерно распределенными по ее контуру моментами M_n . Уравнения (120) в этом случае принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Для прямолинейного края имеем, как и раньше, $\partial^2 w / \partial s^2 = 0$. Отсюда

$$M_n = -D \frac{\partial^2 w}{\partial n^2},$$

и для контура получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\frac{M_n}{D} = -\frac{M}{D}.$$

Это граничное условие и первое из уравнений (121) будут удовлетворяться, если для величины M мы примем постоянное значение $M = M_n$ для всех точек пластинки, что равносильно требованию постоянства суммы изгибающих моментов M_x и M_y для всей поверх-

¹⁾ Следует заметить, что если пластинка не многоугольного очертания, то M вообще не обращается на контуре в нуль при $M_n = 0$.

²⁾ См. Timoshenko, Goodier, стр. 280.

ности пластинки. Прогобы пластинки будут тогда найдены из второго уравнения (121)¹⁾, которое принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_n}{D}. \quad (d)$$

Отсюда можно заключить, что в случае изгиба свободно опертой многоугольной пластинки равномерно распределенными по ее контуру моментами M_n изогнутая поверхность пластинки получается тождественной с поверхностью провисания мембраны, равномерно натянутой действием равномерно распределенной нагрузки. Имеется много случаев, для которых решения задачи о мембране известны. Ими можно непосредственно же воспользоваться и при рассмотрении соответствующих задач, относящихся к пластинке.

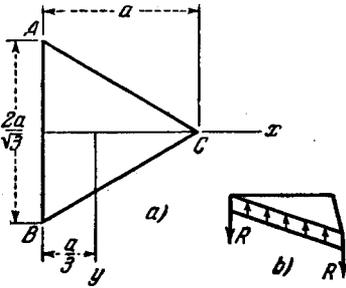


Рис. 55.

Возьмем, например, свободно опертую равносоставленную треугольную пластинку (рис. 55), изогнутую равномерно распределенными по ее контуру моментами M_n . Изогнутая поверхность для этой пластинки получится такой же, как и для равномерно растянутой и равномерно нагруженной мембраны. Последнюю же легко получить экспериментально, натянув мыльную пленку на треугольном контуре и равномерно нагрузив ее давлением воздуха²⁾.

Сравнительно просто получается для этого случая также и аналитическое выражение изогнутой поверхности. Напишем произведения левых частей уравнений для всех трех сторон треугольника

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{a}{3}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + y - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - y - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) &= \\ &= \frac{x^3 - 3y^2x}{3} - \frac{a(x^2 + y^2)}{3} + \frac{4a^3}{3 \cdot 27}. \end{aligned}$$

Это выражение обращается, очевидно, в нуль на контуре. Граничное условие $w=0$ для мембраны будет поэтому удовлетворено, если мы примем для прогибов выражение

$$w = N \left[\frac{x^3 - 3y^2x}{3} - \frac{a(x^2 + y^2)}{3} + \frac{4a^3}{3 \cdot 27} \right], \quad (e)$$

¹⁾ Это было показано впервые Войновским-Кригером; см. Wołnowsky-Krieger S., Ingenieur-Archiv, т. 4, стр. 254, 1933.

²⁾ Подобными экспериментами пользуются при решении задач на кручение; см. Тимошенко С. П., Теория упругости, стр. 271; Timoshenko, Goodier, стр. 289.

где N — постоянный множитель, величину которого мы выбираем таким образом, чтобы удовлетворить уравнению (d). Таким путем приходим к искомому решению

$$w = \frac{M_n}{4aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right]. \quad (f)$$

Подставив в это выражение $x = y = 0$, получаем прогиб в центре тяжести треугольника

$$w_0 = \frac{M_n a^2}{27D}. \quad (g)$$

Выражения для изгибающего и крутящего моментов получаются из уравнений (101) и (102)

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{M_n}{2} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right], \\ M_y &= \frac{M_n}{2} \left[1 + \nu + \frac{(1 - \nu) 3x}{a} \right], \\ M_{xy} &= \frac{3(1 - \nu) M_n y}{2a}. \end{aligned} \right\}$$

Перерезывающие силы из уравнений (106) и (107) таковы:

$$Q_x = Q_y = 0.$$

На контуре согласно уравнению (d) § 22 перерезывающая сила $Q_n = 0$, а изгибающий момент равен M_n . Крутящий момент на стороне BC (рис. 55) согласно уравнению (c) § 22 равен

$$M_{nt} = \frac{3(1 - \nu) M_n}{4a} (y - \sqrt{3x}).$$

Вертикальные реакции пластинки по стороне BC (рис. 55) будут

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = -\frac{3(1 - \nu)}{2a} M_n. \quad (i)$$

Из симметрии заключаем, что такие же равномерно распределенные реакции приложены и по двум другим сторонам пластинки. Эти силы уравновешиваются сосредоточенными реакциями в вершинах треугольной пластинки; величина этих последних может быть найдена по способу, разъясненному на стр. 102, и равна

$$R = 2(M_{nt})_{x=\frac{2}{3}a, y=0} = (1 - \nu) \sqrt{3} M_n. \quad (j)$$

Распределение опорных реакций показано на рис. 55, *b*. Максимальное напряжение изгиба возникает в вершинах и действует в плоскостях, равноделящих углы. Величина соответствующего изгибающего момента получается из уравнений (h)

$$(M_y)_{\max} = (M_y)_{x=\frac{2}{3}a} = \frac{M_n(3 - \nu)}{2}. \quad (k)$$

Этим методом расчета прогибов свободно опертой многоугольной пластинки под равномерно распределенными по ее контуру моментами можно воспользоваться также и для определения температурных напряжений, вызываемых в подобной пластинке неравномерным нагревом. При исследовании температурных напряжений в защемленной по краям пластинке в § 14 было показано [уравнение (б)], что неравномерный нагрев приводит к появлению на контуре пластинки равномерно распределенных изгибающих моментов, препятствующих какому бы то ни было изгибу пластинки. Величина этих моментов¹⁾

$$M_n = \frac{\alpha t D (1 + \nu)}{h}. \quad (1)$$

Чтобы получить температурные напряжения для случая свободно опертой пластинки, нам следует на напряжения, производимые при

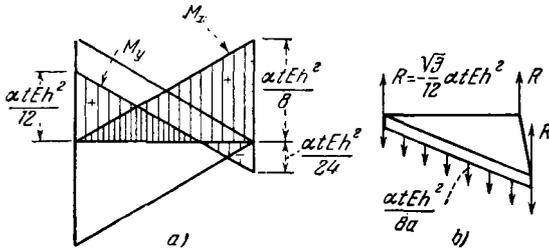


Рис. 56.

чистом изгибе моментами (1), наложить напряжения, вызываемые в пластинке, свободно опертой по краям, равномерно распределенными по контуру изгибающими моментами $-\alpha t D (1 + \nu)/h$. Решение последней задачи, как уже было разъяснено в случае пластинки многоугольного очертания, может быть получено без больших затруднений²⁾.

Возьмем, например, равностороннюю треугольную пластинку. Если края пластинки защемлены, то изгибающие моменты, обусловленные неравномерным нагревом, будут

$$M'_x = M'_y = \frac{\alpha t D (1 + \nu)}{h}. \quad (m)$$

Чтобы получить изгибающие моменты M_x и M_y для свободно опертой пластинки, мы должны на моменты (m) наложить моменты, опре-

¹⁾ Предполагается, что верхняя поверхность пластинки подвергается действию более высокой температуры, чем нижняя, и что пластинка имеет поэтому тенденцию изгибаться выпуклостью вверх.

²⁾ См. диссертацию Маульбеца (Maubetsch J. L., J. Appl. Mech., т. 2, стр. 141, 1935).

деляемые из уравнений (h), подставив в них $M_n = -atD(1 + \nu)/h$. Таким путем получаем окончательно

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{atD(1 + \nu)}{h} - \frac{atD(1 + \nu)}{2h} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right] = \frac{atEh^2}{24} \left(1 + \frac{3x}{a} \right), \\ M_y &= \frac{atD(1 + \nu)}{h} - \frac{atD(1 + \nu)}{2h} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{3x}{a} \right] = \frac{atEh^2}{24} \left(1 - \frac{3x}{a} \right), \\ M_{xy} &= \frac{1}{8} \frac{atEh^2 y}{a}. \end{aligned}$$

Опорные реакции можно будет теперь определить из уравнений (i) и (j) посредством подстановки $M = -atD(1 + \nu)/h$. Мы находим из них

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = \frac{atEh^2}{8a}, \quad R = -\frac{\sqrt{3} atEh^2}{12}.$$

Полученные результаты для обусловленных неравномерным нагревом моментов и опорных реакций представлены на рис. 56, *a* и *b*.

25. Влияние упругих постоянных на величину изгибающих моментов. Вид уравнений (101) и (102) позволяет убедиться в том, что величины изгибающих и крутящих моментов пластинки в заметной степени зависят от численного значения коэффициента Пуассона ν . С другой стороны, легко показать, что в случае загрузки пластинки поперечными силами произведение жесткости на прогиб Dw не зависит ни от одной из двух постоянных — ни от E , ни от ν , оперта ли пластинка свободно или защемлена, безразлично, по прямолинейным или криволинейным краям.

Приняв эти граничные условия в любом их сочетании, рассмотрим следующую задачу. Для определенного численного значения коэффициента Пуассона ν известно несколько значений изгибающих моментов M_x и M_y . От нас требуется, исходя из этих данных, найти значения моментов при ином значении ν , например ν' , но той же упругой постоянной E материала. Пусть M'_x и M'_y будут этими новыми искомыми значениями изгибающих моментов. Напишем уравнения (101), сначала для ν , затем для ν' , исключим из них кривизны $\partial^2 w / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$; решив полученные таким путем уравнения относительно M'_x и M'_y , найдем

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= \frac{1}{1 - \nu^2} [(1 - \nu\nu') M_x + (\nu' - \nu) M_y], \\ M'_y &= \frac{1}{1 - \nu^2} [(1 - \nu\nu') M_y + (\nu' - \nu) M_x]. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Таким образом, вычисление M'_x и M'_y не представляет затруднений, если известны M_x и M_y .

Если постоянная ν входит в одно или в несколько заданных граничных условий, как, например, в случае свободного края [уравнение (112)], то уравнения (122) теряют силу.

Если пластинка упруго оперта или упруго закреплена, моменты также зависят от изгибной жесткости D пластинки в соответствии с жесткостью связей.

Таблица 5

Средние значения коэффициента Пуассона ν

Материал	ν	Материал	ν
Сталь . .	0,30	Стекло .	0,25
Алюминий	0,30	Бетон . .	0,15—0,25

Наконец, температурные напряжения зависят не только от всех вышеперечисленных факторов, но также и от абсолютного значения жесткости D пластинки.

Средние значения ν для некоторых материалов приводятся в таблице 5. Значения ν для бетона колеблются в весьма широких пределах в зависимости от возраста бетона, типа заполнителей и других факторов¹⁾.

26. Точная теория пластинки. Дифференциальное уравнение (103), определяющее вместе с граничными условиями прогибы пластинки, мы вывели (см. § 21), пренебрегая влиянием на изгиб нормальных напряжений σ_z и касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} . Это означает, что каждый тонкий слой

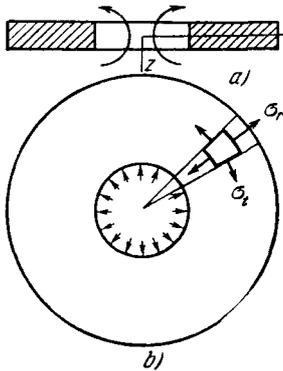


Рис. 57.

пластинки, параллельный ее срединной плоскости, рассматривался нами при выводе этого уравнения как находящийся в плоском напряженном состоянии и что, следовательно, отличными от нуля мы считали при этом лишь три компонента напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} . Одним из простейших случаев этого рода является чистый изгиб. Изогнутая поверхность в этом случае представляет собой функцию второй степени от x и y [см. уравнение (с) § 11], удовлетворяющую уравнению (103). Компоненты напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} пропорциональны z и не зависят от x и y .

Существуют и другие случаи изгиба, в которых имеет место плоское напряженное состояние, и уравнение (103) удовлетворяется в точности. Возьмем, например, круглую пластинку с круглым центральным отверстием, изогнутую моментами M_r , равномерно распределенными по контуру отверстия (рис. 57). Каждый тонкий слой пластинки, вырезанный двумя смежными плоскостями, параллельными срединной плоскости, будет находиться точно в таком же напряженном состоянии, как и толстостенный цилиндр, подвергнутый равномерному внутреннему давлению или растяжению (рис. 57, б). Сумма $\sigma_r + \sigma_t$ обоих главных напряжений будет в этом случае²⁾ величиной постоянной, а отсюда можно будет заключить, что и линейная деформация

¹⁾ Германские технические условия (DIN № 4227) рекомендуют при определении коэффициента Пуассона для бетона пользоваться приближенной зависимостью $\nu = \sqrt{f'_c}/350$, где f'_c — прочность бетона на сжатие в возрасте 28 дней в фунтах на кв. дюйм (так как 1 фунт/дюйм² \approx 0,07 кг/см², то делитель 350 в формуле при переводе ее в метрические меры заменяется на 92. — Прим. пер.). См. также Simmons J. C., Mag. of Concrete Research, т. 8, стр. 39, 1956.

²⁾ См. Тимошенко С. П., Теория упругости, стр. 69; Timoshenko, Goodier, стр. 60.

слоя в направлении z также будет постоянной и независимой от деформации смежных слоев. Таким образом, и здесь мы имеем плоское распределение напряжений, и уравнение (103) останется для него в силе.

Перейдем теперь к общему вопросу о форме изогнутой поверхности пластинки, когда изгиб приводит к плоскому распределению напряжений. Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо рассмотреть три дифференциальных уравнения равновесия с шестью условиями совместности. Если пренебречь объемными силами ¹⁾, то эти уравнения будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 \sigma_x &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \\ \Delta_1 \sigma_y &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \\ \Delta_1 \sigma_z &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 \tau_{xy} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \\ \Delta_1 \tau_{xz} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z}, \\ \Delta_1 \tau_{yz} &= -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

где

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

и

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Складывая уравнения (b), найдем, что

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \Delta_1 \theta = 0, \quad (d)$$

т. е. сумма трех компонентов нормального напряжения представляет собой гармоническую функцию. В случае плоского напряженного состояния $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$, а из двух последних уравнений (c) и последнего уравнения (b) можно заключить, что $\partial \theta / \partial z$ должна быть постоянной величиной, положим β . Отсюда общее выражение для θ в случае плоского напряженного состояния будет

$$\theta = \theta_0 + \beta z, \quad (e)$$

¹⁾ Timoshenko, Goodier, стр. 229, 232.

где θ_0 — плоская гармоническая функция, т. е.

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} = \Delta \theta_0 = 0.$$

Мы видим, что в случае плоского распределения напряжений функция θ состоит из двух частей: θ_0 , независимой от z , и βz , пропорциональной z . Первая часть не изменяется по толщине пластинки. Она зависит от деформации пластинки в ее собственной плоскости и может быть опущена, если мы интересуемся одним лишь изгибом пластинки. Поэтому в нашем дальнейшем изложении мы можем принять

$$\theta = \beta z. \quad (f)$$

Уравнения равновесия (а) будут удовлетворяться в случае плоского распределения напряжений, если мы примем

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (g)$$

где φ — функция напряжений. Рассмотрим теперь общий вид этой функции. Подставив выражения (g) в уравнение (f), получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \beta z. \quad (h)$$

Далее, первое из уравнений (b) позволяет заключить, что

$$\Delta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta_1 \varphi = 0,$$

а это, приняв во внимание уравнение (h), можно написать в такой форме:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (i)$$

Точно таким же образом из второго и третьего уравнений (b) находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (j)$$

Из уравнений (i) и (j) следует, что $\partial^2 \varphi / \partial z^2$ представляет собой линейную функцию от x и y . Эту функцию можно принять равной нулю, не оказывая этим никакого влияния на величины компонентов напряжения, определяемых выражениями (g). В этом случае общее выражение функции напряжений будет

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 z,$$

где φ_0 — плоская гармоническая функция, а φ_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \beta. \quad (k)$$

Поскольку деформации пластинки в ее плоскости нас сейчас не интересуют, мы можем в дальнейшем изложении φ_0 опустить и в качестве общего выражения для функции напряжений принять

$$\varphi = \varphi_1 z. \quad (l)$$

Подставив его в уравнения (г), мы получим теперь возможность вычислить компоненты напряжений и найти перемещения из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} (\sigma - \nu \sigma_y), & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), & \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Для перемещений w , перпендикулярных к пластинке, таким образом получаем¹⁾

$$w = -\frac{\beta}{2E} (x^2 + y^2 + \nu z^2) + \frac{1+\nu}{E} \varphi_1,$$

и прогиб срединной поверхности пластинки будет

$$w = -\frac{\beta}{2E} (x^2 + y^2) + \frac{1+\nu}{E} \varphi_1. \quad (n)$$

Соответствующие компоненты напряжений из уравнений (г) и (1) будут

$$\sigma_x = z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -z \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y},$$

а изгибающие и крутящий моменты составят

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}, & M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}, \\ M_{xy} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \, dz = \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

Из уравнения (п) находим кривизны и относительное кручение пластинки

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

откуда, пользуясь соотношениями (к) и (о), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = -\frac{M_x}{D}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{D}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} = \frac{M_{xy}}{(1-\nu) D}. \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

¹⁾ Несколько примеров вычисления u , v и w из уравнений (м) приводятся С. П. Тимошенко в «Теории упругости».

Из этих выкладок можно заключить, что в случае изгиба пластинки, приводящего к плоскому распределению напряжения, прогибы ее w [см. уравнение (п)] строго удовлетворяют уравнению (103), а также уравнениям (101) и (102), определяющим изгибающие и крутящий моменты. Если решение уравнения (к) принимается в виде функции второй степени от x и y , то изогнутая поверхность (п) получится второго порядка, также в соответствии со случаем чистого изгиба. Вообще мы можем заключить из уравнения (к), что прогиб пластинки в случае плоского напряженного состояния будет тот же, что и для равномерно растянутой, равномерно нагруженной мембраны. Пластика, изображенная на рис. 57, представляет собой частный случай такого изгиба, а именно случай, для которого решение уравнения (к) имеет в полярных координатах следующий вид:

$$\varphi_1 = Ar^2 + B \ln r + C,$$

где A , B и C — постоянные, определяемые из того требования, чтобы удовлетворялись граничные условия.

Пластика многоугольного очертания, свободно опертая и изогнутая равномерно распределенными по контуру моментами (см. § 24), представляет собой другой пример изгиба, в котором изогнутая поверхность имеет вид, удовлетворяющий уравнению (п), и уравнения (101), (102) и (103) выполняются строго. Во всех этих случаях, как можно видеть из уравнений (к) и (о), мы имеем

$$M_x + M_y = \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \right) = \frac{\beta h^3}{12}.$$

т. е. сумма изгибающих моментов в двух перпендикулярных направлениях остается постоянной для всей пластинки.

Рассмотрим теперь случай, когда изгиб пластинки приводит к обобщенному плоскому распределению, т. е. к такому, при котором компонент нормального напряжения σ_z обращается в нуль во всех точках пластинки, а компоненты касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} обращаются в нуль на поверхностях $z = \pm h/2$ пластинки. Прогиб прямоугольной пластинки, защемленной по одному краю и равномерно нагруженной по противоположному краю (рис. 58), представляет собой пример подобного изгиба. Из теории изгиба балки прямоугольного сечения мы знаем, что в этом случае $\sigma_z = 0$ во всех

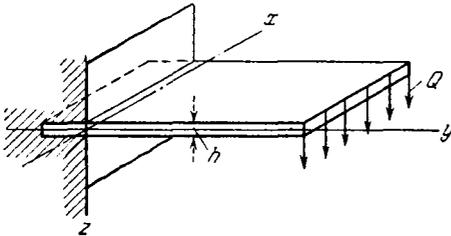


Рис. 58.

точках пластинки и τ_{xz} равно нулю на поверхностях пластинки и изменяется по ее толщине согласно параболическому закону

$$\tau_{xz} = \frac{6Q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Воспользовавшись общими уравнениями (а), (б) и (с) и поступая так же, как и в предыдущем случае плоского распределения напряжений¹⁾, находим,

¹⁾ Точное решение для этого случая было дано Сен-Венаном; см. его перевод книги Клебша «Теория упругости твердых тел», стр. 337. Общее изложение строгой теории изгиба пластинок было дано Мичеллом (J. H. Mi-

что общее выражение для изогнутой поверхности имеет в данном случае вид

$$w = \frac{1}{E} \left[\frac{h^2 \varphi}{4} + (1 + \nu) \varphi_1 \right], \quad (q)$$

где φ есть плоская гармоническая функция от x и y , а φ_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = -\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \varphi.$$

Отсюда можно сделать тот вывод, что и в этом случае дифференциальное уравнение (103) также имеет силу при $q = 0$.

Уравнения для изгибающих и крутящего моментов, а также для перерезывающих сил будут в этом случае

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{8 + \nu}{40} D h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w, \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{8 + \nu}{40} D h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w, \\ M_{xy} &= D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{8 + \nu}{40} D h^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta w, \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Мы видим, что выражения для перерезывающих сил совпадают с выражениями (108), полученными в приближенной теории; выражения же для моментов получаются различными: вторые члены этих выражений отражают влияние перерезывающих сил.

Эти поправочные члены можно получить элементарным путем посредством того же способа рассуждений, что и в случае изгиба балки. Рассматривая кривизну в плоскости xz , мы можем утверждать, что полная кривизна обусловлена двумя факторами: изгибающими моментами M_x , M_y и перерезывающей силой Q_x ; кривизну, вызванную изгибающими моментами, можно получить, вычитая из полной кривизны $-\partial^2 w / \partial x^2$ ту ее часть $-\partial(kQ_x / hG) / \partial x$, которая вызвана перерезывающей силой¹⁾. Подставив в уравнения (101) вместо $-\partial^2 w / \partial x^2$ и $-\partial^2 w / \partial y^2$ соответственно

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \left(\frac{kQ_x}{hG} \right)}{\partial x} \quad \text{и} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \left(\frac{kQ_y}{hG} \right)}{\partial y}$$

и воспользовавшись двумя последними уравнениями системы (123), найдем для изгибающих моментов выражения

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{kDh^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w, \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{kDh^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w. \end{aligned}$$

с he I, Proc. London Math. Soc., т. 31, стр. 100, 1900). См. также книгу Ля в а, «Математическая теория упругости», М., ОНТИ, 1935. Приводимые нами в дальнейшем изложении результаты почерпнуты из последнего сочинения.

¹⁾ k — численный коэффициент, зависящий в случае балки от формы поперечного сечения.

Эти уравнения совпадают с двумя первыми уравнениями системы (123), если мы примем

$$\frac{k}{6} = \frac{8 + \nu}{40}.$$

Для $\nu = 0,3$ это дает $k = 1,245$.

Из теории изгиба балки мы знаем, что поправка на влияние перерезывающей силы мала и ею можно пренебречь, если толщина h балки мала в сравнении с ее пролетом. Это соображение сохраняет силу и в применении к пластинке.

Точные выражения для компонентов напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2-\nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w, \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2-\nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w, \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{2-\nu}{6} z^3 \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta w, \\ \tau_{xz} &= -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w, \quad \tau_{yz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \quad \sigma_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

Вторые члены в правых частях уравнений для σ_x , σ_y и τ_{xy} представляют собой поправки на влияние перерезывающих сил при изгибе. Мы видим, что напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} теперь уже не пропорциональны расстоянию z от срединной плоскости, но содержат член, пропорциональный z^3 . Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} изменяются согласно тому же параболическому закону, что и в балке прямоугольного профиля. В случае плоского распределения напряжений Δw является постоянной величиной, и формулы (r) совпадают с теми, которые выводятся в приближенной теории.

Задача о равномерно нагруженной пластинке также допускает точное решение по тому же способу. Так, например, можно показать, что общее выражение для прогибов получается в этом случае путем добавления к выражению (q) члена

$$\frac{1}{64} \frac{q}{D} (x^2 + y^2) \left(x^2 + y^2 - \frac{2h^2}{1-\nu} \right), \quad (s)$$

который также удовлетворяет уравнению (103) приближенной теории. Уравнения для изгибающих моментов не совпадают с уравнениями (101) приближенной теории, но содержат некоторые дополнительные поправочные члены. Если толщина пластинки мала в сравнении с другими ее измерениями, то эти члены становятся малыми и ими можно пренебречь.

Во всех предыдущих случаях общие решения задач об изгибе пластинки исследовались без учета граничных условий. Для некоторых задач имеются точные решения также и с учетом граничных условий¹⁾. Эти решения указы-

¹⁾ В последнее время строгая теория пластинки привлекла к себе внимание инженеров, причем было опубликовано несколько значительных работ по этому вопросу. Отметим здесь следующие работы: Войновского-Кригера, Галеркина, Биргофа, Гарабедяна, Хигдона и Холла (Wojnowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 4, стр. 203, 305, 1933; Galerkin B., Compt. rend. Acad. sci. Paris, т. 190, стр. 1047; т. 193, стр. 568; т. 194, стр. 1440; Birkhoff G. D., Phil. Mag., т. 43, стр. 953, 1922; Garabedian C. A., Trans. Am. Math. Soc., т. 25, стр. 343, 1923; Compt. rend. Paris, тт. 178 (1924), 180

вают, что если пластинку допустимо рассматривать как «тонкую», то обычная элементарная теория будет обладать достаточной для практических целей точностью, за исключением 1) окрестности интенсивно сосредоточенной поперечной нагрузки и 2) узких краевых зон, в особенности же областей близ углов пластинки и вокруг отверстий, диаметр которых имеет величину порядка толщины пластинки.

В первом из этих двух случаев как компоненты σ_z напряжения, так и поперечные касательные напряжения следует считать в равной степени важными в их влиянии на деформацию пластинки. При вычислении необходимой поправки к напряжениям, указываемым приближенной теорией (см. стр. 86), граничные условия могут быть исключены из рассмотрения. В этом случае задачу значительно удобнее решать на основе теории толстых пластинок.

Во втором случае влияние компоненты напряжения σ_z падает до второстепенного значения в сравнении с эффектом поперечных касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} . С той целью, чтобы учесть в первую очередь именно этот эффект, в последнее время было разработано несколько вариантов теории тонкой пластинки (см. § 39). В сравнении с более точной теорией толстой пластинки эти теории в исследовании распределения напряжений для краевой зоны пластинки приводят к лучшим результатам.

(1925), 186 (1928), 195 (1932); Archie Higdón R., Holl D. L., Duke Math. J., т. 3, стр. 18, 1937). См. также Stevenson A. C., Phil. Mag., 7-я серия, т. 33, стр. 639, 1942; Ohlig R., Ingr.-Arch., т. 13, стр. 155, 1942; Sneddon J. N., Proc. Cambridge Phil. Soc., т. 42, стр. 260, 1946; Лейбензон Л. С., Труды, т. 1, стр. 111, Москва, Изд. АН СССР, 1951; Jung H., Z. angew. Math. Mech., т. 32, стр. 57, 1952; Корре Е., Z. angew. Math. Mech., т. 37, стр. 38, 1957. Температурные напряжения освещены у Маргерра (Marguerre K., Z. angew. Math. Mech., т. 15, стр. 369, 1935) и Sokołnikoff I. S., Sokołnikoff E. S., Trans. Am. Math. Soc., т. 45, стр. 235, 1939.

ГЛАВА V

СВОБОДНО ОПЕРТАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНКА

27. Свободно опертая прямоугольная пластинка под синусоидальной нагрузкой. Расположив оси координат, как показано на рис. 59, допустим, что нагрузка распределена по поверхности пластинки согласно закону

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (a)$$

где q_0 представляет собой интенсивность нагрузки в центре пластинки.

Дифференциальное уравнение (103) изогнутой поверхности принимает в этом случае такой вид:

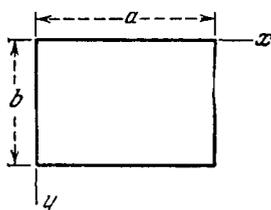


Рис. 59.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ = \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (b)$$

Граничные условия для свободно опертых краев требуют, чтобы

$$w = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{для } x = 0 \quad \text{и } x = a;$$

$$w = 0, \quad M_y = 0 \quad \text{для } y = 0 \quad \text{и } y = b.$$

Пользуясь выражением (101) для изгибающих моментов и заметив, что поскольку по краям $w = 0$ и для краев, параллельных осям x и y , справедливы вместе с тем соотношения $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ и $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$, мы можем представить граничные условия в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad w = 0, \quad (2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для } x = 0 \quad \text{и } x = a, \\ (3) \quad w = 0, \quad (4) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{для } y = 0 \quad \text{и } y = b. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Все эти граничные условия будут удовлетворяться, если мы примем для прогибов выражение

$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (d)$$

где постоянная C должна быть выбрана таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение (b). Подставив выражение (d) в уравнение (b), найдем

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 C = \frac{q_0}{D},$$

откуда заключаем, что искомой изогнутой поверхностью, для которой справедливы уравнение (b) и граничные условия (c), будет

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (e)$$

Имея это выражение и пользуясь уравнениями (101) и (102), находим

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ M_y &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ M_{xy} &= \frac{q_0 (1 - \nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Мы видим, что максимальный прогиб и максимальные изгибающие моменты получаются в центре пластинки. Подставив $x = a/2$ и $y = b/2$ в уравнения (e) и (f), получаем

$$w_{\max} = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}, \quad (124)$$

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{\max} &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right), \\ (M_y)_{\max} &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

В частном случае квадратной пластинки, когда $a = b$, вышенаписанные формулы упрощаются

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D}, \quad (M_x)_{\max} = (M_y)_{\max} = \frac{(1 + \nu) q_0 a^2}{4\pi^2}. \quad (126)$$

Воспользовавшись уравнениями (106) и (107) для вычисления перерезывающих сил, найдем

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ Q_y &= \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Чтобы найти опорные реакции по опертым краям пластинки, поступим, как было разъяснено в § 22. Для края $x = a$ найдем

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = - \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (h)$$

Точно таким же способом для края $y = b$

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y=b} = - \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (i)$$

Таким образом, распределение реакций так же следует закону синусоиды. Знак минус указывает на то, что реакции, действующие на пластинку, направлены вверх. Из симметрии можно заключить, что формулы (h) и (i) представляют собой распределения реакций также и по сторонам $x = 0$ и $y = 0$. Результирующая распределения реакции будет

$$\begin{aligned} & \frac{2q_0}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \times \\ & \times \left[\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2} \right) \int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} dy + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2} \right) \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} dx \right] = \\ & = \frac{4q_0 ab}{\pi^2} + \frac{8q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}. \quad (j) \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\frac{4q_0 ab}{\pi^2} = \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy, \quad (k)$$

можем заключить, что сумма распределенных реакций больше, чем полная нагрузка на пластинку, определяемая интегралом (k). Этот результат легко объясняется, если мы обратим внимание на то обстоятельство, что при рассматриваемом способе опирания в пла-

стинке, как было указано в § 22, возникают не только распределенные реакции по ее краям, но также и сосредоточенные опорные реакции в вершинах пластинки. В силу симметрии эти сосредоточенные реакции равны между собой и, как можно заключить на рис. 51, равны

$$R = 2(M_{xy})_{x=a, y=b} = \frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}. \quad (1)$$

Положительный знак указывает здесь на то, что эти реакции направлены вниз. Их сумма в точности равна второму члену в выражении (j). На рис. 60 дана полная картина всех действующих на пластинку как распределенных, так и сосредоточенных реакций, уравнивающих заданную уравнением (а) нагрузку. Легко заметить, что вершины углов пластинки под действием приложенной нагрузки имеют тенденцию приподниматься и что для предупреждения этого к ним должны быть приложены сосредоточенные силы R .

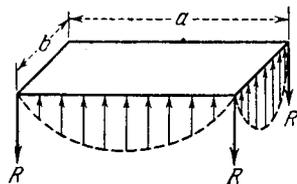


Рис. 60.

Максимальное напряжение изгиба получается в центре пластинки. Если $a > b$, то в центре $M_y > M_x$. Поэтому максимальное напряжение изгиба будет

$$(\sigma_y)_{\max} = \frac{6(M_y)_{\max}}{h^2} = \frac{6q_0}{\pi^2 h^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Максимальные касательные напряжения будут по серединам длинных сторон пластинки. Полагая, что полная перерезывающая сила $V_y = Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$ распределена по толщине пластинки, согласно параболическому закону, получаем с помощью уравнения (i)

$$(\tau_{yz})_{\max} = \frac{3q_0}{2\pi b h \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right).$$

Если закон синусоидального распределения задан уравнением

$$q = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (m)$$

где m и n суть целые числа, то мы, поступая аналогично предыдущему, получаем для изогнутой поверхности следующее выражение:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (127)$$

из которого с помощью дифференцирования легко можно получить выражение для изгибающего и крутящего моментов.

28. Решение Навье для свободно опертой прямоугольной пластинки. Решением предыдущего параграфа можно воспользоваться при вычислении прогибов, вызванных в свободно опертой прямоугольной пластинке любым типом нагрузки, заданной уравнением

$$q = f(x, y). \quad (a)$$

С этой целью представим функцию $f(x, y)$ в виде двойного тригонометрического ряда¹⁾

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (128)$$

Чтобы определить какой-либо определенный коэффициент $a_{m'n'}$ этого ряда, умножаем обе части уравнения (128) на $\sin \frac{n'\pi y}{b} dy$ и интегрируем от 0 до b . Заметив, что

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = 0, \quad \text{если } n \neq n',$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}, \quad \text{если } n = n',$$

находим таким путем

$$\int_0^b f(x, y) \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn'} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (b)$$

Умножая обе части уравнения (c) на $\sin \frac{m'\pi x}{a} dx$ и интегрируя от 0 до a , получим

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} a_{m'n'},$$

¹⁾ Первое решение задачи об изгибе свободно опертой прямоугольной пластинки и применение для этой цели двойного тригонометрического ряда принадлежит Навье, который представил доклад на эту тему во Французскую Академию наук в 1820 г. Краткое содержание этого доклада было опубликовано в *Bull. Soc. phil.-math.*, Париж, 1823. Рукопись его хранится в библиотеке Парижской школы мостов и дорог.

откуда

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy. \quad (129)$$

Произведя предписанное выражением (129) интегрирование для заданного нам распределения нагрузки, т. е. для заданной $f(x, y)$, мы найдем коэффициенты ряда (128) и таким путем представим заданную нам нагрузку как сумму частичных синусоидальных нагрузок. Прогиб, производимый каждой такой частичной нагрузкой, был определен в предыдущем параграфе; полный же прогиб будет получен путем суммирования членов, аналогичных выражению (127). Таким образом, найдем

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (130)$$

Разберем в качестве примера применения общего решения (130) случай нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности пластинки. В этих условиях

$$f(x, y) = q_0,$$

где q_0 — интенсивность равномерно распределенной нагрузки. Формула (129) дает нам для этого случая

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}, \quad (c)$$

где m и n — нечетные целые числа. Если m или n по отдельности или оба вместе числа четные, то a_{mn} обращается в нуль. Подставляя это значение в уравнение (130), находим

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}, \quad (131)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$ и $n = 1, 3, 5, \dots$

Под равномерной нагрузкой поверхность прогибов получится симметричной относительно осей $x = a/2$ и $y = b/2$; при этом все члены с четными значениями m или n в ряде (131) исчезнут, будучи несимметричными относительно указанных осей. Максимальный прогиб пластинки получится в центре и определится подстановкой

$x = a/2$, $y = b/2$ в формулу (131)

$$w_{\max} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (132)$$

Этот ряд быстро сходится, и удовлетворительное приближение достигается уже одним лишь его первым членом, который, например, для случая квадратной пластинки дает

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} = 0,00416 \frac{q_0 a^4}{D},$$

или, подставив сюда вместо D выражение (3) и приняв $\nu = 0,3$,

$$w_{\max} = 0,0454 \frac{q_0 a^4}{Eh^3}.$$

Погрешность этого результата составляет около $2^{1/2}\%$ (см. табл. 8 на стр. 143).

Выражение (132) позволяет нам убедиться в том, что прогибы двух пластинок одинаковой толщины и с одинаковым отношением сторон a/b возрастают пропорционально четвертой степени длины сторон.

Выражения для изгибающего и крутящего моментов могут быть получены из общего решения (131) с помощью уравнений (101) и (102). Полученные при этом ряды сходятся не так быстро, как ряд (131), и потому в дальнейшем изложении (см. § 30) нами будет приведена другая форма решения, более удобная для расчетных операций. Так как моменты выражаются через вторые производные ряда (131), то их максимальные значения при постоянстве q_0 и D будут пропорциональны квадрату линейных размеров. А так как полная нагрузка пластинки, равная $q_0 ab$, также пропорциональна квадрату линейных размеров, то мы приходим к выводу, что в двух пластинках одинаковой толщины и с одинаковым отношением сторон a/b максимальные изгибающие моменты, а следовательно и максимальные напряжения, при равенстве полных нагрузок на обе пластинки будут также равны¹⁾.

29. Дальнейшие применения решения Навье. Из выкладок предыдущего параграфа очевидно, что прогиб свободно опертой прямоугольной пластинки (рис. 59) всегда может быть представлен

¹⁾ Этот вывод был установлен Мариоттом (Mariotte) в его труде «Traité du mouvement des eaux», изданном в 1686 г.; см. научные труды Мариотта, Новое изд., т. 2, стр. 467, 1740.

в виде двойного тригонометрического ряда (130), коэффициенты a_{mn} которого определяются уравнениями (129).

Применим этот результат к случаю нагрузки, равномерно распределенной по площади прямоугольника, показанного на рис. 61. В силу уравнений (129) имеем

$$a_{mn} = \frac{4P}{abuv} \int_{\xi-u/2}^{\xi+u/2} \int_{\eta-v/2}^{\eta+v/2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

или

$$a_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 m\pi n v} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi v}{2b}. \quad (a)$$

Если, в частности, $\xi = a/2$, $\eta = b/2$, $u = a$ и $v = b$, то уравнение (a) приводит к выражению (e), полученному в § 28 для равномерно нагруженной пластинки. Другой интересный в практических применениях случай относится к загрузке пластинки сосредоточенной силой, приложенной в заданной точке $x = \xi$, $y = \eta$. Положив в уравнении (a), что u и v стремятся к нулю, приходим к выражению

$$a_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}, \quad (b)$$

а из (130) находим прогиб

$$w = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (133)$$

Этот ряд быстро сходится, и мы сможем получить с удовлетворительной точностью прогиб в любой точке пластинки, взяв всего лишь несколько первых членов ряда. Вычислим, например, прогиб в середине, где приложена также и нагрузка. В этом случае $\xi = x = a/2$, $\eta = y = b/2$, и тогда ряд (133) дает

$$w_{\max} = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}, \quad (c)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$, $n = 1, 3, 5, \dots$. Для квадратной пластинки выражение (c) принимает вид

$$w_{\max} = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2}.$$

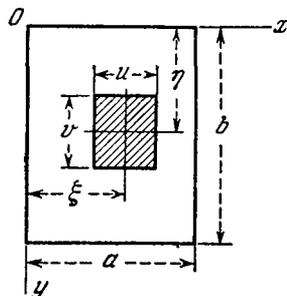


Рис. 61.

Взяв в нем четыре первых члена, находим

$$w_{\max} = \frac{0,01121Pa^2}{D},$$

т. е. значение, приблизительно на $3^{1/2}\%$ меньшее в сравнении с точным определением (см. табл. 23, стр. 167).

Что же касается ряда (128), выражающего величину сосредоточенной нагрузки, то он расходится при $x = \xi$, $y = \eta$; то же, следовательно, относится и к рядам, представляющим изгибающие моменты и перерезывающие силы в точке приложения нагрузки.

Рассмотрим теперь выражение

$$\begin{aligned} w &= K(x, y, \xi, \eta) = \\ &= \frac{4}{\pi^4 abD} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (134)$$

которое согласно уравнению (132) представляет прогиб, производимый единичной нагрузкой $P=1$, и для которого обозначение $K(x, y, \xi, \eta)$ введено ради краткости.

Если x и y рассматривать как переменные, то $w = K(x, y, \xi, \eta)$ будет уравнением упругой поверхности пластинки, нагруженной силой $P=1$ в фиксированной точке $x = \xi$, $y = \eta$. Если же считать переменными координаты ξ , y , то уравнение (134) будет описывать поверхность влияния для прогиба пластинки в фиксированной точке x , y ; при этом положение перемещающейся точки приложения сосредоточенной нагрузки будет указываться координатами ξ , η . Отсюда нетрудно определить прогиб в любой точке пластинки и в том случае, если она подвергается действию нагрузки интенсивностью $f(\xi, \eta)$, распределенной по некоторой площади A . Действительно, приложив элементарную нагрузку $f(\xi, \eta) d\xi d\eta$ в точке $x = \xi$, $y = \eta$ и используя принцип наложения, найдем прогиб

$$w = \int_A \int f(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (135)$$

где двукратное интегрирование распространяется по нагруженной площади, а $K(x, y, \xi, \eta)$ подставляется в виде (134).

Функцию $K(x, y, \xi, \eta)$ называют иногда функцией Грина для пластинки. В виде, представленном уравнением (134), эта функция отвечает граничным условиям свободно опертой прямоугольной пластинки. Многие свойства функции Грина не зависят, однако, от этих ограничений. Например, свойство симметрии, выражающееся равенством

$$K(x, y, \xi, \eta) = K(\xi, \eta, x, y)$$

и выводимое из хорошо известной теории взаимности Максвелла¹⁾, легко подтверждается в частном случае функции (134).

Используем теперь решение Навье еще в одном частном случае загрузки пластинки силами P , равномерно распределенными по площади круга радиуса c с центром в точке $x = \xi$, $y = \eta$. Вводя полярные координаты ρ , θ с началом в центре загруженной площади и заменив элементарную площадь $dx dy$ в уравнении (129) площадью $\rho d\rho d\theta$, получим из этого последнего уравнения

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \frac{P}{\pi c^2} \int_0^c \int_0^{2\pi} \sin \frac{m\pi(\xi + \rho \cos \theta)}{a} \sin \frac{n\pi(\eta + \rho \sin \theta)}{b} \rho d\rho d\theta. \quad (d)$$

Если круг $\rho = c$ остается целиком внутри контура пластинки, вычисление интеграла (d) приводит к выражению²⁾

$$a_{mn} = \frac{8P}{abc\gamma_{mn}} J_1(\gamma_{mn}c) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}, \quad (e)$$

в котором $\gamma_{mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$, а $J_1(\gamma_{mn}c)$ — бесселева функция первого порядка от аргумента $\gamma_{mn}c$. Искомый прогиб находим теперь подстановкой выражения (e) в уравнение (130).

Мы убеждаемся, что форма решения Навье остается простой даже в сравнительно сложных случаях распределения нагрузки. С другой стороны, двойные ряды этого решения непригодны для получения численных результатов, в особенности если в них входят производные высших порядков от функции w . Поэтому ниже мы укажем иной путь к решению задачи изгиба для прямоугольной пластинки, более пригодный для этой цели.

30. Другой способ решения задачи для свободно опертой равномерно нагруженной прямоугольной пластинки. Исследуя задачу об изгибе прямоугольной пластинки, два противоположных края которой свободно оперты, М. Леви³⁾ поддал мысль принять решение в виде ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (136)$$

где Y_m есть функция одного лишь y . При этом предполагается, что края $x = 0$ и $x = a$ (рис. 62) свободно оперты. Поэтому каждый

¹⁾ См., например, Timoshenko S., Young D. H., Theory of structures, стр. 250, 1945.

²⁾ См. Wołnowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 3, 240, 1932.

³⁾ См. Compt. rend., т. 129, стр. 535—539, 1899. Это решение было использовано в нескольких частных случаях изгиба прямоугольной пластинки Эстанавом (Estanave E., Thèses, Париж, 1900). В этой работе показано преобразование двойного ряда решения Навье в простой ряд Леви.

член ряда (136) удовлетворяет на этих двух краях граничным условиям $w=0$ и $\partial^2 w/\partial x^2=0$. Остается определить Y_m так, чтобы удовлетворялись граничные условия на краях $y=\pm b/2$, а также уравнение изогнутой поверхности

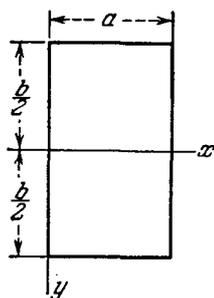
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (a)$$

В приложениях этого метода к равномерно нагруженной и свободно опертой прямоугольной пластинке можно внести дальнейшие упрощения, если принять решение уравнения (a) в виде¹⁾

$$w = w_1 + w_2 \quad (b)$$

и положить

$$w_1 = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x), \quad (c)$$



т. е. приравнять w_1 прогибу равномерно нагруженной полоски, параллельной оси x . Это условие удовлетворяет уравнению (a), а также граничным условиям на краях $x=0$ и $x=a$.

Выражение w_2 должно, очевидно, удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = 0. \quad (137)$$

Кроме того, его следует выбрать таким образом, чтобы сумма (b) удовлетворяла всем граничным условиям пластинки. Взяв w_2 в виде ряда (136), где в силу симметрии $m=1, 3, 5, \dots$, и подставив это в уравнение (e), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0.$$

Это уравнение останется справедливым для всех значений x лишь при том условии, если для Y_m имеет силу соотношение

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0. \quad (d)$$

¹⁾ Эта форма решения была применена Надаи (Nadai A., Forschungsarbeiten, № 170 и 171, Берлин, 1915); см. также его книгу «Упругие пластинки» (Elastische Platten), Берлин, 1925.

Для общего интеграла этого уравнения можно принять вид¹⁾

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ \left. + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (138)$$

Заметив, что изогнутая поверхность пластинки симметрична относительно оси x (рис. 62), удерживаем в выражении (138) лишь четные функции от y и полагаем постоянные интегрирования $C_m = D_m = 0$.

Изогнутая поверхность (b) представится тогда следующим выражением:

$$w = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \\ + \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (e)$$

которое удовлетворяет уравнению (e), а также граничным условиям на краях $x=0$ и $x=a$. Теперь остается лишь определить постоянные интегрирования A_m и B_m с таким расчетом, чтобы выполнялись граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (f)$$

на краях $y = \pm b/2$. Начнем с того, что разложим выражение (c) в тригонометрический ряд, что нам даст²⁾

$$\frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$. Изогнутая поверхность (e) представится теперь в виде

$$w = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^m \left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (g)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$. Подставив это выражение в граничные условия (f) и прибегнув к обозначению

$$\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m, \quad (h)$$

¹⁾ Несколько иную форму для Y_m , более удобную для выполнения некоторых частных видов граничных условий, предложил П а п к о в и ч П. Ф., Прикладн. мат. мех., т. 5, 1941.

²⁾ См. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. 2, стр. 46, М., 1946.

получим следующие уравнения для определения постоянных A_m и B_m :

$$\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m + \alpha_m B_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0,$$

$$(A_m + 2B_m) \operatorname{ch} \alpha_m + \alpha_m B_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0,$$

откуда

$$A_m = -\frac{2(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}, \quad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}. \quad (i)$$

Подставив эти значения постоянных в уравнение (g), получим изогнутую поверхность пластинки, удовлетворяющую уравнению (a) и граничным условиям, в следующем виде:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{2\alpha_m y}{b} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{2y}{b} \operatorname{sh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (139)$$

Прогиб в любой точке можно вычислить из этого уравнения с помощью таблиц гиперболических функций¹⁾. Максимальный прогиб получается в середине пластинки ($x = a/2$, $y = 0$), где он равен

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right). \quad (j)$$

Если здесь пренебречь вторым членом в скобках, то этот ряд представит прогиб в середине равномерно нагруженной полоски. Поэтому выражение (j) мы можем представить в следующем виде:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m}. \quad (140)$$

Ряд в этом выражении сходится очень быстро²⁾, и достаточная точность будет достигнута, если мы ограничимся одним лишь первым членом. Взяв в качестве примера квадратную пластинку, получим из уравнения (h)

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2}, \quad \dots$$

¹⁾ См., например, Tables of circular and hyperbolic sines and cosines, 1939, и Table of circular and hyperbolic tangents and cotangent, 1943, Columbia University press, Нью-Йорк; далее: British Association for the advancement of Science, Mathematical Tables, 3-е изд., т. 1, Cambridge University press, 1951; наконец: Lös ch F., Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen, Берлин, 1954.

²⁾ Мы полагаем, что $b \geq a$, как на рис. 62.

и уравнение (140) даст нам

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} (0,68562 - 0,00025 + \dots) = 0,00406 \frac{qa^4}{D}.$$

Мы видим, что вторым членом ряда в скобках можно пренебречь и что, взяв один лишь первый член, мы получим формулу прогиба, точную до трех значащих цифр.

С помощью формулы (140) мы получаем возможность придать выражению максимального прогиба пластинки следующий вид:

$$w_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{D}, \quad (141)$$

где α — численный коэффициент, зависящий от отношения b/a сторон пластинки. Значения α приводятся в таблице 8 (стр. 143).

Изгибающие моменты M_x и M_y вычисляются с помощью выражения (е). Подставив алгебраическую часть этого выражения в уравнения (101), находим

$$M'_x = \frac{qx(a-x)}{2}, \quad M'_y = \nu \frac{qx(a-x)}{2}. \quad (k)$$

Подстановка же ряда из выражения (е) в те же уравнения даст

$$\left. \begin{aligned} M''_x &= (1-\nu)qa^2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ &\quad \left. + B_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{2\nu}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ M''_y &= -(1-\nu)qa^2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ &\quad \left. + B_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \frac{2}{1-\nu} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Полные значения изгибающих моментов будут получены суммированием выражений (k) и (l). Выражения для изгибающих моментов по оси x принимают вид

$$(M_x)_{y=0} = \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} m^2 [2\nu B_m - (1-\nu) A_m] \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$(M_y)_{y=0} = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} m^2 [2B_m + (1-\nu) A_m] \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Оба ряда быстро сходятся, и моменты легко из них вычисляются по формулам

$$(M_x)_{y=0} = \beta' qa^2, \quad (M_y)_{y=0} = \beta_1' qa^2. \quad (m)$$

Численные значения коэффициентов β' и β_1' приводятся в таблице 6.

Подобным же образом можно вычислить и изгибающие моменты, действующие по средней линии $x = a/2$, причем выражения для них

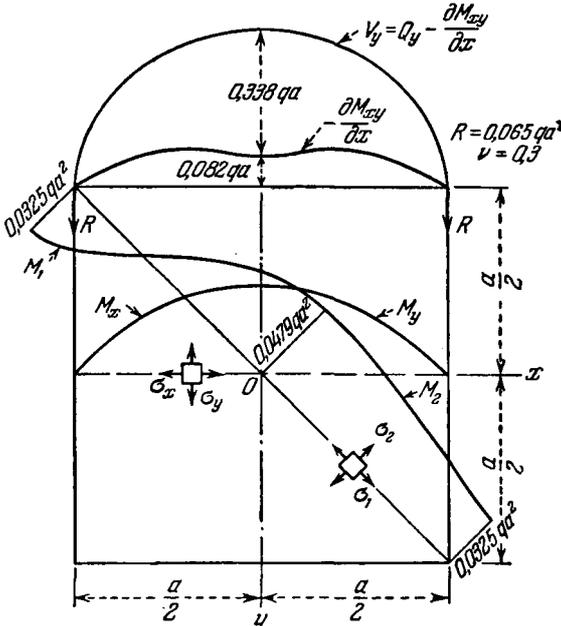


Рис. 63.

отличаются от только что полученных лишь значениями коэффициентов:

$$(M_x)_{x=a/2} = \beta'' qa^2, \quad (M_y)_{x=a/2} = \beta_1'' qa^2. \quad (n)$$

Значения β'' и β_1'' приводятся в таблице 7.

Наибольшие значения этих моментов

$$(M_x)_{\max} = \beta qa^2, \quad (M_y)_{\max} = \beta_1 qa^2 \quad (o)$$

приходятся на центр пластинки ($x = a/2$, $y = 0$), и соответствующие коэффициенты берутся из таблицы 8. Распределение моментов в частном случае квадратной пластинки показано на рис. 63. Из таблицы 8 видно, что по мере возрастания отношения a/b

Таблица 6

Коэффициенты β и β_1 для изгибающих моментов свободно опертой прямоугольной пластинки под равномерным давлением q ($\nu = 0,3, b \geq a$)

b/a	$M_x = \beta_1 q a^2, y=0$					$M_y = \beta_1 q a^2, y=0$				
	$x=0,1a$	$x=0,2a$	$x=0,3a$	$x=0,4a$	$x=0,5a$	$x=0,1a$	$x=0,2a$	$x=0,3a$	$x=0,4a$	$x=0,5a$
1,0	0,0209	0,0343	0,0424	0,0466	0,0479	0,0168	0,0303	0,0400	0,0459	0,0479
1,1	0,0234	0,0389	0,0486	0,0541	0,0554	0,0172	0,0311	0,0412	0,0475	0,0493
1,2	0,0256	0,0432	0,0545	0,0607	0,0627	0,0174	0,0315	0,0417	0,0480	0,0501
1,3	0,0277	0,0472	0,0599	0,0671	0,0694	0,0175	0,0316	0,0419	0,0482	0,0503
1,4	0,0297	0,0509	0,0649	0,0730	0,0755	0,0175	0,0315	0,0418	0,0481	0,0502
1,5	0,0314	0,0544	0,0695	0,0783	0,0812	0,0173	0,0312	0,0415	0,0478	0,0498
1,6	0,0330	0,0572	0,0736	0,0831	0,0862	0,0171	0,0309	0,0411	0,0472	0,0492
1,7	0,0344	0,0599	0,0773	0,0874	0,0908	0,0169	0,0306	0,0405	0,0466	0,0486
1,8	0,0357	0,0623	0,0806	0,0913	0,0948	0,0167	0,0301	0,0399	0,0459	0,0479
1,9	0,0368	0,0644	0,0835	0,0948	0,0985	0,0165	0,0297	0,0393	0,0451	0,0471
2,0	0,0378	0,0663	0,0861	0,0978	0,1017	0,0162	0,0292	0,0387	0,0444	0,0464
2,5	0,0413	0,0729	0,0952	0,1085	0,1129	0,0152	0,0272	0,0359	0,0412	0,0430
3,0	0,0431	0,0763	0,1000	0,1142	0,1189	0,0145	0,0258	0,0340	0,0390	0,0406
4,0	0,0445	0,0791	0,1038	0,1185	0,1235	0,0138	0,0246	0,0322	0,0369	0,0384
∞	0,0450	0,0800	0,1050	0,1200	0,1250	0,0135	0,0240	0,0315	0,0360	0,0375

Таблица 7

Коэффициенты β'' и β' для изгибающих моментов свободно опертой прямоугольной пластинки под равномерным давлением q ($\nu = 0,3, b \geq a$)

b/a	$M_x = \beta'' qa^2, x = a/2$					$M_y = \beta' qa^2, x = a/2$				
	$y = 0,4a$	$y = 0,3a$	$y = 0,2a$	$y = 0,1a$	$y = 0$	$y = 0,4a$	$y = 0,3a$	$y = 0,2a$	$y = 0,1a$	$y = 0$
1,0	0,0168	0,0303	0,0400	0,0459	0,0479	0,0209	0,0343	0,0424	0,0466	0,0479
1,1	0,0197	0,0353	0,0465	0,0532	0,0554	0,0225	0,0363	0,0442	0,0481	0,0493
1,2	0,0225	0,0401	0,0526	0,0600	0,0627	0,0239	0,0379	0,0454	0,0490	0,0501
1,3	0,0252	0,0447	0,0585	0,0667	0,0694	0,0252	0,0391	0,0462	0,0494	0,0503
1,4	0,0275	0,0491	0,0639	0,0727	0,0755	0,0263	0,0402	0,0470	0,0495	0,0502
1,5	0,0302	0,0532	0,0690	0,0781	0,0812	0,0275	0,0410	0,0470	0,0493	0,0498
1,6	0,0324	0,0571	0,0737	0,0832	0,0862	0,0288	0,0417	0,0471	0,0489	0,0492
1,7	0,0348	0,0607	0,0780	0,0877	0,0908	0,0295	0,0423	0,0470	0,0484	0,0486
1,8	0,0371	0,0641	0,0819	0,0917	0,0948	0,0304	0,0428	0,0469	0,0478	0,0479
1,9	0,0392	0,0673	0,0854	0,0953	0,0985	0,0314	0,0433	0,0467	0,0472	0,0471
2,0	0,0413	0,0703	0,0887	0,0986	0,1017	0,0322	0,0436	0,0464	0,0465	0,0464
2,5	0,0505	0,0828	0,1012	0,1102	0,1129	0,0360	0,0446	0,0447	0,0435	0,0430
3	0,0586	0,0923	0,1092	0,0068	0,1189	0,0389	0,0447	0,0431	0,0413	0,0406
4	0,0723	0,1054	0,1180	0,1224	0,1235	0,0426	0,0436	0,0406	0,0389	0,0384
	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375

максимальный прогиб и максимальные моменты пластинки быстро приближаются к значениям, вычисленным для равномерно нагруженной полоски или для пластинки, изогнутой по цилиндрической поверхности при наложении условия $b/a = \infty$. Для $b/a = 3$ разница между прогибами полоски и пластинки составляет около $6\frac{1}{2}\%$. Для $b/a = 5$ эта разница меньше $1\frac{1}{2}\%$. Разницы между максимальными изгибающими моментами при тех же самых значениях отношения b/a равны соответственно 5% и $1\frac{1}{3}\%$. Из этого сопоставления можно прийти к тому выводу, что при $b/a > 3$ вычисления для пластинки могут быть заменены без существенной погрешности вычислениями для полоски.

Выражением (е) можно воспользоваться также и для нахождения перерезывающих сил и реакций по краям. Образова от этого выражения вторые производные, находим

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{qx(a-x)}{2D} + \frac{2\pi^2 qa^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Подставляя их в уравнения (106) и (107), получим

$$Q_x = \frac{q(a-2x)}{2} - 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a},$$

$$Q_y = -2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Для сторон $x=0$ и $y=-b/2$ находим

$$\begin{aligned} (Q_x)_{x=0} &= \frac{qa}{2} - 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} = \\ &= \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Q_y)_{y=-b/2} &= 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{sh} \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{a} = \\ &= \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \alpha_m}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Абсолютные значения этих перерезывающих сил достигают своего максимума по серединам сторон, где

$$\left. \begin{aligned} (Q_x)_{x=0, y=0} &= \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} = \gamma qa, \\ (Q_y)_{x=\frac{a}{2}, y=-\frac{b}{2}} &= \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \operatorname{th} \alpha_m = \gamma_1 qa. \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

Численные коэффициенты γ и γ_1 также приводятся в таблице 8.

Опорные реакции по стороне $x = a$ определяются выражением

$$\begin{aligned} V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=0} &= \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} + \\ &+ \frac{2(1-\nu)qa}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_m} \times \\ &\times \left(\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right). \end{aligned}$$

Максимальное абсолютное значение этого давления имеет место в середине стороны $y = 0$, где оно равно

$$\begin{aligned} (V_x)_{x=0, y=0} &= qa \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} + \right. \\ &\left. + \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m}{m^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] = \delta qa, \quad (q) \end{aligned}$$

причем δ здесь численный коэффициент, зависящий от ν и от отношения a/b и легко получаемый путем суммирования быстро сходящегося ряда из выражения (q). Численные значения δ и δ_1 для середин сторон, параллельных оси x , приведены в таблице 8. Распределение давления (q) по сторонам квадратной пластинки показано на рис. 63. Здесь показана также и та часть давлений, которая обусловлена крутящими моментами M_{xy} . Эти последние давления уравновешиваются опорными реакциями, сосредоточенными в вершинах пластинки. Величина этих сил дается выражением

$$\begin{aligned} R &= 2(M_{xy})_{x=a, y=\frac{b}{2}} = 2D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=\frac{b}{2}} = \\ &= \frac{4(1-\nu)qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} [(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) \operatorname{sh} \alpha_m - \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m] = nqa^2. \end{aligned} \quad (i)$$

Т а б л и ц а 8

Коэффициенты α , β , γ , δ , ϵ , ζ , η для равномерно нагруженной свободно опертой прямоугольной пластинки

b/a	$\frac{D}{ab} v = \max_m$	$(M)_{\max}^{ab} = \beta q a^2$	$(M)_{\max}^{ya} = \beta_1 q a^2$	$vbl = \max(x_D)$	$(Q)_{\max}^{ya} = \gamma_1 q a$	$v b_2 = \max(x_A)$	$v b^1_2 = \max(y_A)$	$R = \eta q a^2$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	η
1,0	0,00406	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,00485	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,00564	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,00638	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,00705	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,00772	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,00830	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,00883	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,00931	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,00974	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,01013	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,01223	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,01282	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,01297	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,01302	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

Эти силы направлены вниз и противодействуют вершинам пластинки приподниматься при ее изгибании. Значения коэффициента n даны в последнем столбце таблицы 8.

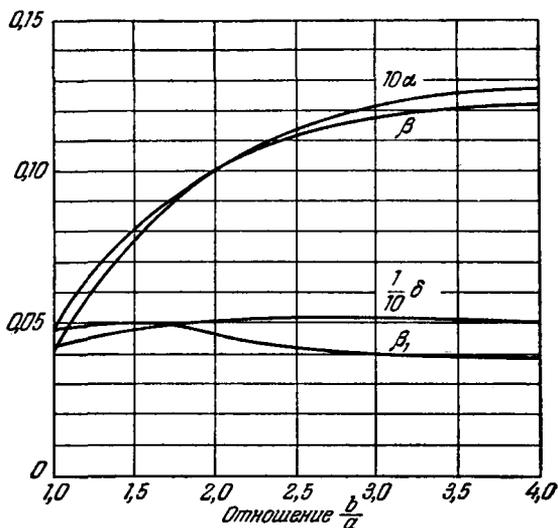


Рис. 64.

Значения коэффициентов α , β , β_1 и δ в функциях отношения b/a представлены кривыми на рис. 64.

При наличии сил R , направленных вниз и не являющихся пренебрежимо малыми, в вершинах пластинки должна быть предусмотрена анкеровка, если пластинка не соединена жестко с опорными балками.

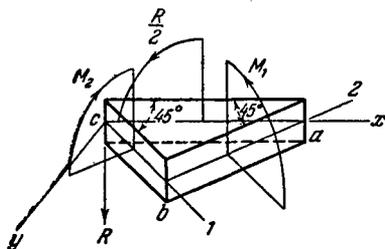


Рис. 65.

Для определения возникающих в вершине моментов исследуем равновесие треугольного элемента abc пластинки у вершины (рис. 65), введя с этой целью новые координаты $1, 2$, образующие углы в 45° с координатами x, y (рис. 59). Непосредственно убеждаемся в том, что изгибающие моменты, действующие по краям ab и cb элемента, равны соответственно $M_1 = -R/2$ и $M_2 = +R/2$, моменты же кручения равны нулю. Действительно, пользуясь

уравнением (39) для стороны ac , т. е. для элемента края, заданного углом $\alpha = -45^\circ$, в соответствии с граничными условиями свободно опертой пластинки, находим изгибающий момент

$$M_n = M_1 \cos^2 \alpha + M_2 \sin^2 \alpha = 0,$$

Величина крутящего момента, приложенного к этому же элементу края, определяется аналогично из уравнения (40). Положив в нем $\alpha = -45^\circ$, находим

$$M_{nt} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (M_1 - M_2) = \frac{R}{2},$$

как это видно из уравнения (г). Таким образом, участок пластинки, примыкающий к вершине, изгибается в антикластическую поверхность, поскольку моменты $\pm R/2$ в самой вершине имеют тот же порядок величины, что и изгибающие моменты в середине пластинки (см. табл. 8).

Эффект защемления вершины свободно опертой пластинки без труда уясняется из распределения изгибающих моментов M_1 и M_2 квадратной пластинки (рис. 63). Если против приподнятия этих вершин в прямоугольной пластинке не принято надлежащих мер, защемление становится неэффективным, и в связи с этим изгибающие моменты в центральном участке пластинки возрастают. Поэтому приводимые в таблице 8 значения $(M_x)_{\max}$ и $(M_y)_{\max}$ следует умножать на некоторый коэффициент $k > 1$. Его приближенное значение может быть определено из формулы¹⁾:

$$k = \frac{a^4 - \frac{5}{12} a^2 b^2 + b^4}{a^4 - \frac{5}{6} a^2 b^2 + b^4}.$$

Следует заметить, что в свободно опертой по краям многоугольной пластинке никаких реактивных сил в ее вершинах не возникает, если края ее пересекаются под углами, отличающимися от прямого²⁾.

Но даже и в прямоугольных пластинках мы не получим реакций в вершинах, если учтем поперечную деформацию сдвига. В связи со значительной концентрацией реактивных сил этой деформацией сдвига, очевидно, нельзя уже пренебречь, и тогда полностью игнорирующая их обычная теория тонких пластинок должна быть заменена более точной теорией. Ею мы займемся в § 39, она действительно приводит к такому распределению реактивных давлений, в котором сосредоточенные силы в вершинах пластинки отсутствуют (см. рис. 81).

31. Свободно опертая прямоугольная пластинка под гидростатическим давлением. Положим, что свободно опертая прямоугольная пластинка нагружена, как показано на рис. 66. Поступая как и в случае равномерно распределенной нагрузки, примем прогиб пластинки в виде³⁾

$$w = w_1 + w_2, \quad (a)$$

¹⁾ Эта формула, рекомендованная германскими техническими условиями по железобетону (1943), основана на теории гибких пластинок Маркуса; см. его книгу: *Ma g s u z H., Die Vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, 2-е изд., Берлин, 1925.

²⁾ С простым доказательством этого можно ознакомиться, например, у Маркуса; см. *Die Theorie elastischer Gewebe*, 2-е изд., стр. 46, Берлин, 1932.

³⁾ Эта задача была исследована Э. Эстанавом, цит. на стр. 133. Таблицы численных значений моментов и прогибов были составлены Б. Г. Галеркиным (*Бюллетень Подитехнического института*, СПб., тт. 26 и 27, 1918).

где

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{q_0}{360D} \left(\frac{5x^5}{a} - 10ax^3 + 7a^3x \right) = \\ &= \frac{2q_0a^4}{D\pi^5} \sum_{m=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \quad (b)$$

представляет собой прогиб полоски под нагрузкой, распределенной по закону треугольника. Это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} = \frac{q_0 x}{aD} \quad (c)$$

и граничным условиям

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для } x = 0 \quad \text{и } x = a.$$

Часть w_2 принимается в виде ряда

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (d)$$

где функции Y_m имеют тот же самый вид, что и в предыдущем параграфе, а $m = 1, 2, 3, \dots$. Подставляя выражение (b) и (d) в уравнение (a), получаем

$$w = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (e)$$

где постоянные интегрирования A_m и B_m подлежат определению из условий

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{для } y = \pm \frac{b}{2}.$$

Из этих условий находим

$$\begin{aligned} \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m &= 0, \\ (2B_m + A_m) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m &= 0. \end{aligned}$$

В последних уравнениях по примеру прежнего пользуемся обозначением

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}.$$

Решая уравнения, находим

$$A_m = - \frac{(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) (-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}, \quad B_m = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}. \quad (f)$$

Прогиб пластинки по оси x равен

$$(\omega)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Для квадратной пластинки, т. е. для $a = b$, имеем

$$(\omega)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \left(0,002055 \sin \frac{\pi x}{a} - 0,000177 \sin \frac{2\pi x}{a} + \right. \\ \left. + 0,000025 \sin \frac{3\pi x}{a} - \dots \right). \quad (g)$$

Прогиб в центре пластинки

$$(\omega)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = 0,00203 \frac{q_0 a^4}{D}. \quad (h)$$

Как и должно быть, это составляет половину прогиба равномерно нагруженной пластинки (см. стр. 130). Приравнявая производную выражения (g) нулю, находим, что максимальный прогиб имеет место в точке $x = 0,557a$. Этот максимальный прогиб, равный $0,00206q_0 a^4/D$, отличается лишь весьма незначительно от прогиба в середине, определяемого формулой (h). Точка максимального прогиба по мере возрастания отношения b/a приближается к центру пластинки. При $b/a = \infty$, как и для полоски (см. выражение (b)), максимальный прогиб получается в точке $x = 0,5193a$. Если $b/a < 1$, точка максимального прогиба с уменьшением отношения b/a удаляется от центра. В таблице 9 приведены значения коэффициента для прогиба ряда точек по оси x (рис. 66).

Мы видим, что по мере возрастания отношения b/a прогибы приближаются к значениям, вычисленным для полоски. При $b/a = 4$ разница между этими значениями составляет около $1\frac{1}{2}\%$. Для вычисления с удовлетворительной точностью прогиба пластинки при отношении ее сторон $b/a > 4$ мы всегда вправе воспользоваться формулой (b) для прогиба полоски под нагрузкой, изменяющейся по закону треугольника. Изгибающие моменты M_x и M_y находятся путем подстановки выражения (e) для прогибов в уравнения (101). Для оси x , т. е. для $y = 0$, выражение M_x примет вид

$$(M_x)_{y=0} = q_0 a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} + \\ + q_0 a^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 [(1 - \nu) A_m - 2\nu B_m] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (i)$$

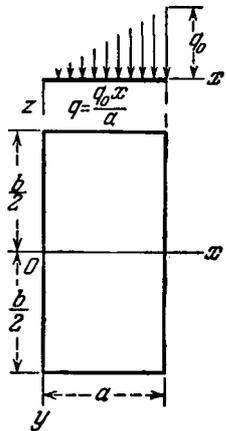


Рис. 66.

Таблица 9

Коэффициент α для прогибов свободно опертой прямоугольной пластинки под гидростатическим давлением $q = q_0 x/a$, $w = \alpha q_0 a^4/D$ ($y = 0$, $b > a$)

b/a	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$
1	0,00131	0,00203	0,00201	0,00162
1,1	0,00158	0,00243	0,00242	0,00192
1,2	0,00186	0,00282	0,00279	0,00221
1,3	0,00212	0,00319	0,00315	0,00248
1,4	0,00235	0,00353	0,00348	0,00273
1,5	0,00257	0,00386	0,00379	0,00296
1,6	0,00277	0,00415	0,00407	0,00317
1,7	0,00296	0,00441	0,00432	0,00335
1,8	0,00313	0,00465	0,00455	0,00353
1,9	0,00328	0,00487	0,00475	0,00368
2,0	0,00342	0,00506	0,00494	0,00382
3,0	0,00416	0,00612	0,00592	0,00456
4,0	0,00437	0,00641	0,00622	0,00477
5,0	0,00441	0,00648	0,00629	0,00483
∞	0,00443	0,00651	0,00632	0,00484

Первая сумма в правой части этого выражения представляет собой изгибающий момент в полоске от нагрузки, распределенной по закону треугольника, равной $\frac{q_0}{6} \left(ax - \frac{x^3}{a} \right)$. Введя выражения (f) для постоянных A_m и B_m во вторую сумму, получим

$$(M_x)_{y=0} = \frac{q_0 (a^2 x - x^3)}{6a} - \frac{q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} [2 + (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (j)$$

Полученный таким путем ряд быстро сходится, и несколько первых его членов дают уже достаточно точное значение M_x . Таким образом, изгибающий момент в любой точке оси x может быть представлен уравнением

$$(M_x)_{y=0} = \beta q_0 a^2, \quad (k)$$

где β — численный коэффициент, зависящий от абсциссы x точки. Подобным же образом получаем

$$(M_y)_{y=0} = \beta_1 q_0 a^2. \quad (l)$$

Численные значения коэффициентов β и β_1 , входящих в формулы (k) и (l), приводятся в таблице 10. Из нее видно, что при $b \cong 4a$ мо-

менты весьма близки к значениям их в полоске, находящейся под действием нагрузки, распределенной по закону треугольника.

Таблица 10

Коэффициенты β и β_1 для изгибающих моментов свободной опорной прямоугольной пластинки под гидростатическим давлением $q = q_0 x/a$ ($\nu = 0,3$, $b > a$)

b/a	$M_x = \beta a^2 q_0, y=0$				$M_y = \beta_1 a^2 q_0, y=0$			
	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207
1,1	0,0156	0,0276	0,0302	0,0289	0,0155	0,0247	0,0251	0,0211
1,2	0,0179	0,0313	0,0338	0,0318	0,0158	0,0250	0,0254	0,0213
1,3	0,0200	0,0346	0,0371	0,0344	0,0160	0,0252	0,0255	0,0213
1,4	0,0221	0,0376	0,0402	0,0367	0,0160	0,0253	0,0254	0,0212
1,5	0,0239	0,0406	0,0429	0,0388	0,0159	0,0249	0,0252	0,0210
1,6	0,0256	0,0431	0,0454	0,0407	0,0158	0,0246	0,0249	0,0207
1,7	0,0272	0,0454	0,0476	0,0424	0,0155	0,0243	0,0246	0,0205
1,8	0,0286	0,0474	0,0496	0,0439	0,0153	0,0239	0,0242	0,0202
1,9	0,0298	0,0492	0,0513	0,0452	0,0150	0,0235	0,0238	0,0199
2,0	0,0309	0,0508	0,0529	0,0463	0,0148	0,0232	0,0234	0,0197
3,0	0,0369	0,0594	0,0611	0,0525	0,0128	0,0202	0,0207	0,0176
4,0	0,0385	0,0617	0,0632	0,0541	0,0120	0,0192	0,0196	0,0168
5,0	0,0389	0,0623	0,0638	0,0546	0,0118	0,0187	0,0193	0,0166
∞	0,0391	0,0625	0,0640	0,0547	0,0117	0,0187	0,0192	0,0165

Уравнения (106) и (107) используются также для вычисления перерезывающих сил. Первое из этих уравнений с помощью выражения (j) дает нам эти силы для точек оси x

$$\begin{aligned} (Q_x)_{y=0} &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \\ &= \frac{q_0 (a^2 - 3x^2)}{6a} - \frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Общие выражения перерезывающих сил Q_x и Q_y суть:

$$Q_x = \frac{q_0 (a^2 - 3x^2)}{6a} - \frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (\text{м})$$

$$Q_y = -\frac{2q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (\text{н})$$

Величина вертикальных опорных реакций V_x и V_y по краям получается путем алгебраического суммирования перерезывающих сил с производными от крутящих моментов. Для сторон $x=0$ и $x=a$ эти реакции можно представить в виде

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=0, x=a} = \pm \delta q_0 a, \quad (o)$$

а для сторон $y = \pm b/2$ в виде

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{y = \pm \frac{b}{2}} = \mp \delta_1 q_0 b, \quad (p)$$

где δ и δ_1 — численные коэффициенты, зависящие от отношения b/a сторон и от координат взятой на краю точки. Ряд значений коэффициентов дан в таблице 11.

Таблица 11

Коэффициенты δ и δ_1 для опорных реакций свободно опертой прямоугольной пластинки, находящейся под действием гидростатического давления $q = q_0 x/a$ ($\nu = 0,3$, $b > a$)

b/a	Реакции $\delta q_0 a$				Реакции $\delta_1 q_0 b$			
	$x=0$		$x=a$		$y = \pm b/2$			
	$y=0$	$y=0,25b$	$y=0$	$y=0,25b$	$x=0,25a$	$x=0,50a$	$x=0,60a$	$x=0,75a$
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239
1,1	0,136	0,107	0,304	0,267	0,110	0,199	0,221	0,224
1,2	0,144	0,114	0,312	0,276	0,105	0,189	0,208	0,209
1,3	0,150	0,121	0,318	0,284	0,100	0,178	0,196	0,196
1,4	0,155	0,126	0,323	0,292	0,095	0,169	0,185	1,184
1,5	0,159	0,132	0,327	0,297	0,090	0,160	0,175	0,174
1,6	0,162	0,136	0,330	0,302	0,086	0,151	0,166	0,164
1,7	0,164	0,140	0,332	0,306	0,082	0,144	0,157	0,155
1,8	0,166	0,143	0,333	0,310	0,078	0,136	0,149	0,147
1,9	0,167	0,146	0,334	0,313	0,074	0,130	0,142	0,140
2,0	0,168	0,149	0,335	0,316	0,071	0,124	0,135	0,134
3,0	0,169	0,163	0,336	0,331	0,048	0,083	0,091	0,089
4,0	0,168	0,167	0,334	0,334	0,036	0,063	0,068	0,067
5,0	0,167	0,167	0,334	0,335	0,029	0,050	0,055	0,054
∞	0,167	0,167	0,333	0,333	—	—	—	—

Величина сосредоточенных сил, которые необходимо приложить, чтобы предупредить приподняtie вершин пластинки при ее изгибе,

может быть найдена по значениям крутящих моментов M_{xy} в вершинах пластинки. Так как нагрузка несимметрична, то реакции R_1 при $x=0$ и $y=\pm b/2$ отличаются от реакций R_2 на краях $x=a$ и $y=\pm b/2$. Эти реакции можно представить в следующем виде:

$$R_1 = n_1 q_0 a b, \quad R_2 = n_2 q_0 a b. \quad (q)$$

Численные значения коэффициентов n_1 и n_2 приведены в таблице 12.

Таблица 12

Коэффициенты n_1 и n_2 , входящие в уравнения (q), для определения опорных реакций R_1 и R_2 в вершинах углов свободно опертой прямоугольной пластинки, находящейся под давлением гидростатического давления $q = q_0 x/a$ ($\nu = 0,3, b > a$)

b/a	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
n_1	0,026	0,026	0,026	0,026	0,025	0,024	0,023
n_2	0,039	0,038	0,037	0,036	0,035	0,033	0,032
b/a	1,7	1,8	1,9	2,0	3,0	4,0	5,0
n_1	0,022	0,021	0,021	0,020	0,014	0,010	0,008
n_2	0,030	0,029	0,028	0,026	0,018	0,014	0,011

Поскольку равномерная нагрузка q_0 получается в результате наложения двух нагрузок, распределенных по закону треугольника, $q = q_0 x/a$ и $q_0(a-x)/a$, то легко заключить, что сумма $n_1 + n_2$ коэффициентов, приведенных в таблице 12, по умножении ее на b/a должна дать в результате соответствующее тому же отношению b/a значение n из последнего столбца таблицы 8.

Если относительные размеры пластинки таковы, что a на рис. 66 больше, чем b , то мы сможем получить ряд, который будет сходиться еще быстрее, представив w_1 и w_2 следующими выражениями:

$$w_1 = \frac{q_0 x}{a} \frac{1}{384D} (16y^4 - 24b^2 y^2 + 5b^4), \quad (r)$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} X_{2m-1} \cos \frac{(2m-1)\pi y}{b}. \quad (s)$$

Первое из этих выражений есть прогиб узкой полоски, параллельной оси y , опертой по краям $y \pm b/2$ и несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $q_0 x/a$. Это выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению (с), а также граничным

Таблица 13

Коэффициент α для прогибов свободно опертой прямоугольной пластинки, находящейся под действием гидростатического давления $q = q_0 x/a$ ($\nu = 0,3$, $b > a$)

$w = \alpha \frac{q_0 b^4}{D}, \quad y = 0$				
a/b	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
5	0,00325	0,00651	0,00781	0,00976
	0,00325	0,00648	0,00778	0,00965
4	0,00325	0,00641	0,00751	0,00832
3	0,00321	0,00630	0,00692	0,00707
2	0,00288	0,00506	0,00542	0,00492
1,9	0,00281	0,00487	0,00518	0,00465
1,8	0,00270	0,00465	0,00491	0,00434
1,7	0,00261	0,00441	0,00463	0,00404
1,6	0,00249	0,00415	0,00432	0,00372
1,5	0,00234	0,00386	0,00399	0,00339
1,4	0,00218	0,00353	0,00363	0,00304
1,3	0,00199	0,00319	0,00325	0,00269
1,2	0,00179	0,00282	0,00286	0,00234
1,1	0,00153	0,00243	0,00245	0,00199
1,0	0,00131	0,00202	0,00201	0,00162

Таблица 14

Коэффициенты β и β_1 для изгибающих моментов в свободно опертой прямоугольной пластинке, находящейся под действием гидростатического давления $q = q_0 x/a$ ($\nu = 0,3$, $b < a$)

a/b	$M_x = \beta b^2 q_0, \quad y = 0$				$M_y = \beta_1 b^2 q_0, \quad y = 0$			
	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$	$x = 0,25a$	$x = 0,50a$	$x = 0,60a$	$x = 0,75a$
∞	0,0094	0,0187	0,0225	0,0281	0,0312	0,0625	0,0750	0,0937
5,0	0,0094	0,0187	0,0230	0,0309	0,0312	0,0623	0,0742	0,0877
4,0	0,0094	0,0192	0,0237	0,0326	0,0312	0,0617	0,0727	0,0820
3,0	0,0096	0,0202	0,0256	0,0345	0,0309	0,0594	0,0678	0,0715
2,0	0,0108	0,0232	0,0285	0,0348	0,0284	0,0508	0,0554	0,0523
1,9	0,0111	0,0235	0,0288	0,0345	0,0278	0,0492	0,0533	0,0498
1,8	0,0115	0,0239	0,0291	0,0341	0,0269	0,0474	0,0509	0,0470
1,7	0,0117	0,0243	0,0293	0,0377	0,0261	0,0454	0,0485	0,0442
1,6	0,0120	0,0246	0,0294	0,0331	0,0251	0,0431	0,0457	0,0412
1,5	0,0123	0,0249	0,0294	0,0324	0,0239	0,0406	0,0428	0,0381
1,4	0,0126	0,0253	0,0292	0,0315	0,0225	0,0376	0,0396	0,0348
1,3	0,0129	0,0252	0,0290	0,0304	0,0209	0,0346	0,0360	0,0314
1,2	0,0131	0,0250	0,0284	0,0291	0,0192	0,0313	0,0323	0,0279
1,1	0,0134	0,0247	0,0276	0,0276	0,0169	0,0276	0,0285	0,0245
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207

31] ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНКА ПОД ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ 153

условиям $w = 0$ и $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ при $y = \pm b/2$. Выражение (s) представляет собой бесконечный ряд, каждый член которого так же удовлетворяет условиям на краях $y = \pm b/2$. Функции X_{2m-1} от x выбраны таким образом, что каждая из них удовлетворяет однородному

Таблица 15

Коэффициенты δ и δ_1 для опорных реакций в свободно опертой прямоугольной пластинке, находящейся под действием гидростатического давления $q = q_0 x/a$ ($\nu = 0,3$, $b < a$)

a/b	Реакции $\delta q_0 a$				Реакции $\delta_1 q_0 b$			
	x=0		x=a		y = ± b/2			
	y=0	y=b/4	y=0	y=b/4	x=0,25a	x=0,50a	x=0,60a	x=0,75a
∞	0,125	0,250	0,300	0,375
5,0	0,008	0,006	0,092	0,076	0,125	0,250	0,301	0,379
4,0	0,013	0,010	0,112	0,093	0,125	0,251	0,301	0,377
3,0	0,023	0,018	0,143	0,119	0,125	0,252	0,304	0,368
2,0	0,050	0,038	0,197	0,166	0,127	0,251	0,296	0,337
1,9	0,055	0,041	0,205	0,172	0,127	0,251	0,294	0,331
1,8	0,060	0,045	0,213	0,179	0,128	0,249	0,291	0,325
1,7	0,066	0,050	0,221	0,187	0,127	0,248	0,288	0,318
1,6	0,073	0,055	0,230	0,195	0,127	0,245	0,284	0,311
1,5	0,080	0,060	0,240	0,204	0,127	0,243	0,279	0,302
1,4	0,088	0,067	0,250	0,213	0,126	0,239	0,273	0,292
1,3	0,097	0,074	0,260	0,223	0,124	0,234	0,266	0,281
1,2	0,106	0,081	0,271	0,233	0,122	0,227	0,257	0,269
1,1	0,116	0,090	0,282	0,244	0,120	0,220	0,247	0,255
1,0	0,126	0,090	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239

Таблица 16

Коэффициенты n_1 и n_2 , входящие в уравнения (q) § 31, для определения опорных реакций R_1 и R_2 в вершинах углов свободно опертой прямоугольной пластинки, находящейся под действием гидростатического давления $q = q_0 x/a$ ($\nu = 0,3$, $b < a$)

a/b	5	4	3	2	1,9	1,8	1,7
n_1	0,002	0,004	0,006	0,013	0,014	0,016	0,017
n_2	0,017	0,020	0,025	0,033	0,034	0,035	0,036
a/b	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
n_1	0,018	0,020	0,021	0,023	0,024	0,025	0,026
n_2	0,037	0,037	0,038	0,039	0,039	0,039	0,039

уравнению (137) предыдущего параграфа (см. стр. 134), выражение же (а) удовлетворяет граничным условиям на краях $x=0$ и $x=a$. Поскольку метод определения функций X_{2m-1} сходен с тем, который был уже использован нами выше для определения функций Y_m , ограничимся здесь лишь приведением окончательных численных результатов в таблицах 13, 14, 15 и 16. Обозначения в этих таблицах те же, что и в ранее помещенных таблицах для гидростатического давления.

32. Свободно опертая прямоугольная пластинка под нагрузкой в виде треугольной призмы. Положим, что интенсивность нагрузки представлена, как показано на рис. 67, а, равнобедренным треугольником. Уравнение изогнутой поверхности можно будет в этом случае, как и раньше, выразить суммой

$$w = w_1 + w_2, \quad (a)$$

где w_1 представляет собой прогиб свободно опертой полоски, параллельной оси x , а w_2 имеет тот же вид, что и в предыдущем параграфе (уравнение (d)). Чтобы представить прогиб w_1 в виде тригонометрического ряда, заметим, что прогиб, произведенный сосредоточенной силой P , приложенной на расстоянии ξ от левого конца полоски¹⁾, равен

$$\frac{2Pa^3}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (b)$$

Подставив сюда $q d\xi$ вместо P и заметив, что $q = 2q_0\xi/a$ при $\xi < a/2$ и $q = 2q_0(a-\xi)/a$ при $\xi > a/2$, получим прогиб полоски от элементарной нагрузки; тогда прогиб, произведенный всей распределенной по полоске нагрузкой, определится интегрированием

$$w_1 = \frac{4q_0a^2}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[\int_0^{\frac{a}{2}} \xi \sin \frac{m\pi\xi}{a} d\xi + \int_{\frac{a}{2}}^a (a-\xi) \sin \frac{m\pi\xi}{a} d\xi \right] = \frac{8q_0a^4}{D\pi^6} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^6} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (c)$$

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Сопротивление материалов, т. 2, стр. 48.

Подставив это в уравнение (а) и воспользовавшись уравнением (d) предыдущего параграфа, получим

$$w = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^6 m^6} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \right. \\ \left. + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (d)$$

Это выражение удовлетворяет уравнению (113), а также граничным условиям на краях $x=0$ и $x=a$; постоянные A_m и B_m можно найти из условий на краях $y = \pm b/2$, тех же самых, что и в предыдущем параграфе. Они дают нам

$$\left. \begin{aligned} \frac{8(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^6 m^6} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m &= 0, \\ (2B_m + A_m) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

где, как и ранее, мы пользуемся обозначением

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}.$$

Решая уравнения (e), находим

$$A_m = -\frac{4(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^6 m^6 \operatorname{ch} \alpha_m}, \quad B_m = \frac{4(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^6 m^6 \operatorname{ch} \alpha_m}. \quad (f)$$

Чтобы получить прогиб пластинки по оси x , положим $y=0$ в выражении (d). Тогда

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^6 m^6} + A_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Максимальный прогиб будет в центре пластинки, где он равен

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi^6 m^6} + A_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \right).$$

Его можно представить в виде

$$w_{\max} = \alpha \frac{q_0 a^4}{D},$$

где α — численный коэффициент, зависящий от отношения b/a сторон. Ряд значений этого коэффициента приведен в таблице 17¹⁾.

¹⁾ Таблицы заимствованы из труда Б. Г. Галеркина, цит. на стр. 145.

Коэффициенты α , β , γ , δ , n для свободно опертой прямоугольной пластинки под нагрузкой, распределенной по закону треугольника ($\nu = 0,3$, $b > a$)

b/a	$w_{\max} = \alpha \frac{q_0 a^4}{D}$	$(M_x)_{\max} = \beta q_0 a^2$	$(M_y)_{\max} = \beta_1 q_0 a^2$	$(Q_x)_{\max} = \gamma q_0 a$	$(Q_y)_{\max} = \gamma_1 q_0 b$	$(V_x)_{\max} = \delta q_0 a$	$(V_y)_{\max} = \delta_1 q_0 b$	$R = n q_0 a b$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	n
1,0	0,00263	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250	0,038
1,1	0,00314	0,0390	0,0326	0,212	0,297	0,161	0,232	0,038
1,2	0,00364	0,0436	0,0330	0,222	0,280	0,173	0,216	0,037
1,3	0,00411	0,0479	0,0332	0,230	0,265	0,184	0,202	0,036
1,4	0,00455	0,0518	0,0331	0,236	0,250	0,193	0,189	0,035
1,5	0,00496	0,0554	0,0329	0,241	0,236	0,202	0,178	0,034
1,6	0,00533	0,0586	0,0325	0,246	0,224	0,208	0,168	0,033
1,7	0,00567	0,0615	0,0321	0,247	0,212	0,214	0,158	0,031
1,8	0,00597	0,0641	0,0316	0,249	0,201	0,220	0,150	0,030
1,9	0,00625	0,0664	0,0311	0,251	0,191	0,224	0,142	0,029
2,0	0,00649	0,0685	0,0306	0,252	0,183	0,228	0,135	0,028
3,0	0,00783	0,0794	0,0270	0,253	0,122	0,245	0,090	0,019
∞	0,00833	0,0833	0,0250	0,250	—	0,250	—	—

Таблица 18

Коэффициенты α , β , γ , δ , η для свободно опертой прямоугольной пластинки под нагрузкой, распределенной по закону треугольника ($\nu = 0,3$, $b < a$)

a/b	$w_{\max} = \frac{D}{q_0 b^4}$	α	β	ρ_1	γ	γ_1	δ	δ_1	$R = \nu q_0 b$
∞	0,01302	0,0375	0,1250	—	—	0,500	—	0,500	—
3,0	0,00868	0,0387	0,0922	0,045	0,442	0,442	0,027	0,410	0,010
2,0	0,00686	0,0392	0,0707	0,091	0,412	0,412	0,057	0,365	0,023
1,9	0,00656	0,0392	0,0681	0,098	0,407	0,407	0,062	0,358	0,024
1,8	0,00624	0,0391	0,0651	0,106	0,402	0,402	0,098	0,350	0,026
1,7	0,00588	0,0390	0,0609	0,115	0,396	0,396	0,074	0,342	0,028
1,6	0,00549	0,0388	0,0585	0,124	0,389	0,389	0,081	0,332	0,029
1,5	0,00508	0,0386	0,0548	0,135	0,381	0,381	0,090	0,322	0,031
1,4	0,00464	0,0382	0,0508	0,146	0,371	0,371	0,099	0,311	0,033
1,3	0,00418	0,0376	0,0464	0,158	0,360	0,360	0,109	0,298	0,035
1,2	0,00367	0,0368	0,0418	0,171	0,347	0,347	0,120	0,284	0,036
1,1	0,00316	0,0356	0,0369	0,185	0,332	0,332	0,133	0,268	0,037
1,0	0,00263	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,315	0,147	0,250	0,038

Воспользовавшись выражением (d) и поступая, как в предыдущем параграфе, мы без затруднений можем получить выражения для изгибающих моментов M_x и M_y . Максимальные значения этих моментов в рассматриваемом случае имеют место, очевидно, в центре пластинки и могут быть представлены в таком виде:

$$(M_x)_{\max} = \beta q_0 a^2,$$

$$(M_y)_{\max} = \beta_1 q_0 a^2.$$

Значения численных коэффициентов β и β_1 также приведены в таблице 17. В той же таблице даны, сверх того, и численные коэффициенты γ , γ_1 , δ , δ_1 и n для вычисления:

1) перерезывающих сил

$$(Q_x)_{\max} = \gamma q a \quad \text{и} \quad (Q_y)_{\max} = \gamma_1 q_0 b$$

в серединах сторон $x = 0$ и $y = -b/2$ пластинки,

2) опорных реакций

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{\max} = \delta q_0 a$$

и

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_{\max} = \delta_1 q_0 b$$

в тех же точках и

3) сосредоточенных реакций $R = n q_0 a b$ в вершинах углов пластинки, направленных вниз и препятствующих углам пластинки приподниматься при изгибе.

Все эти величины даны для $b > a$. Если $b < a$, то можно достигнуть и лучшей сходимости, приняв долю ω_1 полного прогиба пластинки равной прогибу полосы, параллельной оси y . Опускаем выкладки и приводим в таблице 18 лишь численные результаты.

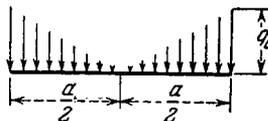


Рис. 68.

Сочетая нагрузку, изображенную на рис. 67, а, с равномерной нагрузкой интенсивностью q_0 , получаем нагрузку, показанную на рис. 68.

Все сведения относительно прогибов и напряжений для этого последнего случая могут быть получены путем сочетания данных таблицы 8 с соответствующими значениями таблиц 17 или 18.

33. Частично загруженная свободно опертая прямоугольная пластинка. Рассмотрим симметричный случай изгиба, имеющий место, когда сплошная нагрузка интенсивностью q равномерно распределена по заштрихованному прямоугольнику со сторонами u и v (рис. 69).

Начнем с того, что представим заданную нагрузку рядом

$$\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \int_{\frac{1}{2}(a-u)}^{\frac{1}{2}(a+u)} q \sin \frac{m\pi \xi}{a} d\xi =$$

$$= \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (a)$$

отвечающим загрузению участка $prst$ пластинки. Прогиб при таком загрузении, как мы уже знаем, определяется уравнением (103), в правую часть которого здесь вводится выражение (a):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} =$$

$$= \frac{4q}{\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (b)$$

Примем, как и прежде, прогибы в виде

$$w = w_1 + w_2, \quad (c)$$

где w_1 — частное решение уравнения (b), не зависящее от переменной y , т. е. удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = \frac{4q}{\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Интегрируя последнее уравнение по x , получаем

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (d)$$

Величина w_2 должна быть решением уравнения (137) (стр. 134). Принимая это решение в виде (136) и сохраняя в выражении (138) для Y_m лишь четные функции y , на что мы имеем право в силу симметрии изогнутой поверхности относительно оси x , находим

$$w = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(a_m + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (e)$$

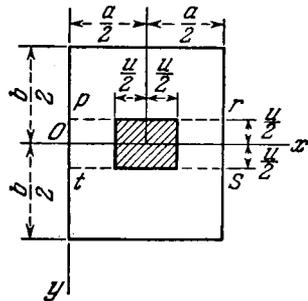


Рис. 69.

где в нашем случае

$$a_m = \frac{4qa^4}{\pi^5 m^5 D} (-1)^{(m-1)/2} \sin \frac{m\pi u}{2a}. \quad (f)$$

Уравнение (e) представляет прогибы на участке $prst$ пластинки.

Рассмотрим теперь незагруженный участок пластинки, расположенный ниже линии ts ; для него уравнение изогнутой поверхности принимает вид

$$\omega' = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B'_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D'_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (g)$$

Теперь нам следует выбрать постоянные A_m, B_m, \dots, D'_m , входящие в ряды (e) и (g) таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия при $y = b/2$ и условия непрерывности по линии ts . В целях упрощения формулировки этих условий введем обозначения:

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}, \quad \gamma_m = \frac{m\pi y}{4a}. \quad (h)$$

Геометрические условия по линии ts требуют, чтобы

$$\omega = \omega' \quad \text{и} \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega'}{\partial y} \quad \text{для} \quad y = \frac{v}{2}. \quad (i)$$

Далее, поскольку по линии ts не приложено сосредоточенных сил, значения изгибающих моментов M_y и перерезывающих сил Q_y не должны испытывать разрыва непрерывности при переходе через эту линию. Учитывая уравнения (i), мы можем записать эти последние уравнения в виде

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \omega'}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 \omega'}{\partial y^3} \quad \text{для} \quad y = \frac{v}{2}. \quad (j)$$

Подставляя выражения (e) и (g) в уравнения (i) и (j) и введя обозначения (h), мы сможем представить эти уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} (A_m - A'_m) \operatorname{ch} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - \\ - C'_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - D'_m 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m + a_m = 0, \\ (A_m - A'_m) \operatorname{sh} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) (\operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) - \\ - C'_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - D'_m (\operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) = 0, \\ (A_m - A'_m) \operatorname{ch} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) (2 \operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) - \\ - C'_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - D'_m (2 \operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) = 0, \\ (A_m - A'_m) \operatorname{sh} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) (3 \operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) - \\ - C'_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - D'_m (3 \operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Из этих уравнений находим

$$\left. \begin{aligned} A_m - A'_m &= a_m (\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - \operatorname{ch} 2\gamma_m), \\ B_m - B'_m &= \frac{a_m}{2} \operatorname{ch} 2\gamma_m, \\ C'_m &= a_m (\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - \operatorname{sh} 2\gamma_m), \\ D'_m &= \frac{a_m}{2} \operatorname{sh} 2\gamma_m. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

К этим четырем уравнениям, содержащим шесть постоянных A_m, \dots, D'_m , присоединяем два уравнения, представляющих граничные условия по краю $y = b/2$. Вводя выражение (g) в условия $\omega' = 0, \partial^2 \omega / \partial y^2 = 0$ для $y = b/2$, получаем

$$\left. \begin{aligned} A'_m \operatorname{ch} \alpha_m + B'_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m + C'_m \operatorname{sh} \alpha_m + D'_m \alpha \operatorname{ch} \alpha_m &= 0, \\ B'_m \operatorname{ch} \alpha_m + D'_m \operatorname{sh} \alpha_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Уравнения (m) совместно с уравнениями (1) позволяют найти постоянные

$$\left. \begin{aligned} A_m &= -\frac{a_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left[\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right], \\ B_m &= \frac{a_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m). \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Подставляя эти значения и выражение (f) в уравнение (e), находим

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \sin \frac{m\pi u}{2a} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \alpha_m} \times \right. \\ &\quad \times \left[\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right] + \\ &\quad \left. + \frac{\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m)}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (142) \end{aligned}$$

Это уравнение позволяет определить прогибы в любой точке нагруженного участка пластинки.

Для частного случая, когда $u = a, v = b$, из уравнений (h) найдем $\gamma_m = \alpha_m/2$. Выражения (n) при этом упрощаются:

$$A_m = -\frac{a_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left(1 + \frac{\alpha_m}{2} \operatorname{th} \alpha_m \right), \quad B_m = \frac{a_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m},$$

и уравнение (142) совпадает с уравнением (139) (стр. 136), выведенным для равномерно нагруженной прямоугольной пластинки.

Наибольший прогиб получается в центре пластинки и определяется путем подстановки $y=0$, $x=a/2$ в формулу (142), дающую

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi u}{2a} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \times \right. \\ \left. \times \left[\operatorname{ch}(\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh}(\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right] \right\}. \quad (143)$$

В качестве частного примера рассмотрим случай, в котором $u=a$, а v представляет собой весьма малую величину. Это — случай равномерного распределения нагрузки по оси x . Принимая величину γ_m в уравнении (143) малой и удерживая в нем лишь малые члены первого порядка, получаем, пользуясь обозначением $qv = q_0$:

$$w_{\max} = \frac{q_0 a^3}{D\pi^4} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right). \quad (144)$$

Для квадратной пластинки это уравнение дает

$$w_{\max} = 0,00674 \frac{q_0 a^3}{D}.$$

В общем случае максимальный прогиб можно представить в виде

$$w_{\max} = \alpha \frac{q_0 a^3}{D} \quad \text{для } a < b, \\ = \alpha \frac{q_0 b^3}{D} \quad \text{для } a > b.$$

Ряд значений коэффициента α приводится в таблице 19.

Таблица 19

Прогибы свободно опертой прямоугольной пластинки, равномерно загруженной по оси симметрии, параллельной измерению a
($w_{\max} = \alpha q_0 a^3 / D$)

b/a	2	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
α	0,00987	0,00911	0,00882	0,00844	0,00799	0,00742	0,00674
a/b	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0	∞
α	0,00802	0,00926	0,01042	0,01151	0,0125	0,01629	0,02083

Возвращаясь к общему случаю, когда v — не обязательно малая величина и u может принять любое значение, выведем выражения для изгибающих моментов M_x и M_y из уравнения (142). Максимальных своих значений эти моменты достигают в центре пластинки, причем эти максимальные значения могут быть представлены формулами

$$(M_x)_{\max} = \beta uvq = \beta P, \quad (M_y)_{\max} = \beta_1 uv = \beta_1 P,$$

Т а б л и ц а 20

Коэффициенты β для $(M_x)_{\max}$ в свободно опертой, частично загруженной квадратной пластинке ($\nu = 0,3$)

$u/a =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
β/a	Коэффициенты β в уравнении $(M_x)_{\max} = \beta P$											
0	∞	0,321	0,251	0,209	0,180	0,158	0,141	0,125	0,112	0,102	0,092	
0,1	0,378	0,284	0,232	0,197	0,170	0,150	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088	
0,2	0,308	0,254	0,214	0,184	0,161	0,142	0,127	0,114	0,103	0,093	0,084	
0,3	0,262	0,225	0,195	0,168	0,151	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088	0,080	
0,4	0,232	0,203	0,179	0,158	0,141	0,126	0,113	0,102	0,092	0,084	0,076	
0,5	0,208	0,185	0,164	0,146	0,131	0,116	0,106	0,096	0,087	0,079	0,071	
0,6	0,188	0,168	0,150	0,135	0,121	0,109	0,099	0,090	0,081	0,074	0,067	
0,7	0,170	0,153	0,137	0,124	0,112	0,101	0,091	0,083	0,076	0,069	0,062	
0,8	0,155	0,140	0,126	0,114	0,103	0,094	0,085	0,077	0,070	0,063	0,057	
0,9	0,141	0,127	0,115	0,104	0,094	0,086	0,078	0,070	0,064	0,058	0,053	
1,0	0,127	0,115	0,105	0,095	0,086	0,078	0,071	0,064	0,058	0,053	0,048	

Т а б л и ц а 21

Коэффициенты β и β_1 для $(M_x)_{\max}$ и $(M_y)_{\max}$ в частично загруженной прямоугольной пластинке при $\nu = 1,4a$ ($\nu = 0,3$)

$u/a =$	2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
β/a	Коэффициент β в уравнении $(M_x)_{\max} = \beta P$					
0	∞	0,276	0,208	0,163	0,134	0,110
0,2	0,332	0,239	0,186	0,152	0,125	0,103
0,4	0,261	0,207	0,168	0,138	0,115	0,095
0,6	0,219	0,181	0,151	0,126	0,105	0,086
0,8	0,187	0,158	0,134	0,112	0,094	0,078
1,0	0,162	0,139	0,118	0,100	0,084	0,070
1,2	0,141	0,122	0,104	0,089	0,075	0,062
1,4	0,123	0,106	0,091	0,077	0,065	0,054
$u/a =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
β_1/a	Коэффициент β_1 в уравнении $(M_y)_{\max} = \beta_1 P$					
0	∞	0,299	0,230	0,183	0,151	0,125
0,2	0,246	0,208	0,175	0,147	0,124	0,102
0,4	0,177	0,157	0,138	0,119	0,101	0,083
0,6	0,138	0,125	0,111	0,097	0,083	0,069
0,8	0,112	0,102	0,091	0,080	0,069	0,058
1,0	0,093	0,085	0,077	0,068	0,058	0,049
1,2	0,079	0,072	0,065	0,058	0,050	0,042
1,4	0,068	0,062	0,056	0,050	0,043	0,036

где $P = uvq$ — полная нагрузка на пластинку. Значения численных коэффициентов β для квадратной пластинки и для различных размеров загруженного прямоугольного участка приведены в таблице 20. Коэффициенты β_1 находятся из этой же таблицы путем перестановки букв u и v .

Численные коэффициенты ¹⁾ β и β_1 для пластинки с отношениями сторон $b = 1,4a$ и $b = 2a$ приведены соответственно в таблицах 21 и 22.

Таблица 22

Коэффициент β и β_1 для $(M_x)_{\max}$, $(M_y)_{\max}$ в частично загруженной прямоугольной пластинке при $b = 2a$ ($\nu = 0,3$)

$u/a =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
v/a	Коэффициент β в уравнении $(M_x)_{\max} = \beta P$					
0	∞	0,289	0,220	0,175	0,144	0,118
0,2	0,347	0,252	0,199	0,163	0,135	0,111
0,4	0,275	0,221	0,181	0,150	0,125	0,103
0,6	0,233	0,195	0,164	0,138	0,115	0,095
0,8	0,203	0,174	0,148	0,126	0,106	0,088
1,0	0,179	0,155	0,134	0,115	0,097	0,080
1,2	0,161	0,141	0,122	0,105	0,089	0,074
1,4	0,144	0,127	0,111	0,096	0,081	0,068
1,6	0,130	0,115	0,101	0,087	0,074	0,062
1,8	0,118	0,104	0,091	0,079	0,067	0,056
2,0	0,107	0,094	0,083	0,072	0,061	0,051
$u/a =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
v/a	Коэффициент β_1 в уравнении $(M_y)_{\max} = \beta_1 P$					
0	∞	0,294	0,225	0,179	0,148	0,122
0,2	0,242	0,203	0,170	0,143	0,120	0,099
0,4	0,172	0,152	0,133	0,114	0,097	0,081
0,6	0,133	0,120	0,106	0,093	0,079	0,066
0,8	0,107	0,097	0,087	0,076	0,065	0,054
1,0	0,089	0,081	0,073	0,064	0,055	0,046
1,2	0,074	0,068	0,061	0,054	0,046	0,039
1,4	0,064	0,058	0,052	0,046	0,040	0,033
1,6	0,056	0,051	0,046	0,040	0,035	0,029
1,8	0,049	0,045	0,041	0,036	0,031	0,026
2,0	0,044	0,041	0,037	0,032	0,028	0,023

¹⁾ Значения M_x и M_y для различных отношений a/b , u/a и v/b приводятся в графиках у Пижо (Pigeand G., Ann. ponts, chaussées, 1929), а также ниже, в § 37.

34. Загружение сосредоточенной силой свободно опертой прямоугольной пластинки. Пользуясь методом Навье, мы получили (в § 29) выражение в виде двойного тригонометрического ряда для прогиба пластинки, несущей сосредоточенный груз P в некоторой точке $x = \xi$, $y = \eta$ (рис. 70). Для того чтобы найти эквивалентное ему решение в виде ординарного ряда, начнем с того, что представим решение Навье следующим образом:

$$w = \frac{4Pb^3}{\pi^4 a} \sum_{m=1}^{\infty} S_m \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (a)$$

где коэффициент S_m определяется из

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2}. \quad (b)$$

Вводя обозначения

$$S'_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi(y-\eta)}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2}, \quad S''_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi(\eta+y)}{b}}{\left(\frac{m^2 b^2}{a^2} + n^2\right)^2}, \quad (c)$$

приводим выражение (b) к виду

$$S_m = \frac{1}{2} (S'_m - S''_m). \quad (d)$$

При вычислении сумм (c) пользуемся известным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{\alpha^2 + n^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\operatorname{ch} \alpha (\pi - z)}{\operatorname{sh} \pi \alpha}, \quad (e)$$

который имеет силу для $0 \leq z < 2\pi$ и рассматривается нами здесь прежде всего как функция $S(\alpha)$ от 2 . Дифференцируем левую часть уравнения (e) по α :

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{(\alpha^2 + n^2)^2}. \quad (f)$$

Продифференцировав также правую часть уравнения (e) и подставив результат в уравнение (f), заключаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{(\alpha^2 + n^2)^2} &= -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi}{4\alpha^3} \frac{\operatorname{ch} \alpha (\pi - z)}{\operatorname{sh} \pi \alpha} - \\ &- \frac{\pi(\pi - z)}{4\alpha^2} - \frac{\operatorname{sh} \alpha (\pi - z)}{\operatorname{sh} \pi \alpha} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \frac{\operatorname{ch} \alpha (\pi - z) \operatorname{ch} \pi \alpha}{\operatorname{sh}^2 \pi \alpha}. \end{aligned} \quad (g)$$

Теперь, чтобы вычислить значения сумм (с), нам остается положить в уравнение (g) сначала $z = (\pi/b)(y - \eta)$, далее $z = (\pi/b)(y + \eta)$ и, сверх того, $\alpha = mb/a$. Подставив эти значения в уравнения (d) и (а), мы приходим наконец к следующему выражению для прогиба пластинки:

$$w = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \beta_m \operatorname{cth} \beta_m - \frac{\beta_m y_1}{b} \operatorname{cth} \frac{\beta_m y_1}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \operatorname{cth} \frac{\beta_m \eta}{b} \right) \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta_m \eta}{b} \operatorname{sh} \frac{\beta_m y_1}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{sh} \beta_m}, \quad (145)$$

где

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a}, \quad y_1 = b - y \quad \text{и} \quad y \geq \eta.$$

Если $y < \eta$, то в уравнении (145) вместо величины y_1 следует подставить y , а вместо η соответственно $\eta_1 = b - \eta$.

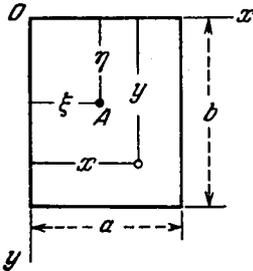


Рис. 70.

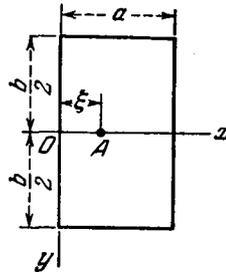


Рис. 71.

Остановимся подробнее на частном случае, когда нагрузка P сосредоточена в точке A на оси симметрии пластинки, которую можно принять и за координатную ось x (рис. 71). Если принять $\eta = b/2$ и ввести обозначение

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{\beta_m}{2}, \quad (h)$$

то общее выражение (145) для прогиба приводится к виду

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \right) \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \right] \frac{\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m}, \quad (146)$$

имеющему силу для $y \geq 0$, т. е. для области пластинки, лежащей ниже оси x (рис. 71). Положив, в частности, $y=0$, мы найдем прогиб пластинки по оси x в виде

$$(w)_{y=0} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\text{th } \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \right) \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}}{m^3}. \quad (i)$$

Этот ряд быстро сходится, и несколько первых членов его дадут нам прогибы с достаточной точностью. В частном случае нагрузки P , приложенной в центре пластинки, максимальный прогиб, имеющий место также в центре, получится посредством подстановки $x = c = a/2$ в выражение (i), что дает

$$w_{\max} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\text{th } \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \right) = \alpha \frac{Pa^2}{D}. \quad (147)$$

Значения численного коэффициента α для различных значений отношения b/a даны в таблице 23.

Таблица 23

Коэффициенты α для прогиба (147) центрально нагруженной прямоугольной пластинки ($\nu = 0,3$)

$b/a=1,0$	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
$\alpha=0,01160$	0,01265	0,01353	0,01484	0,01570	0,01620	0,01651	0,01690	0,01695

Мы видим, что по мере того, как длина пластинки возрастает, максимальный прогиб быстро приближается к значению, соответствующему максимальному прогибу бесконечно длинной пластинки¹⁾. Сопоставление максимальных прогибов квадратной пластинки и центрально нагруженной круглой пластинки, вписанной в квадрат (см. стр. 84), показывает, что прогиб круглой пластинки получается большим, чем для соответствующей квадратной пластинки. Этот результат нужно приписать эффекту опорных реакций, сосредоточенных в вершинах квадратной пластинки и стремящихся произвести изгиб пластинки выпуклостью вверх. Определению изгибающих моментов в пластинках посвящены также §§ 35 и 37.

¹⁾ Прогиб пластинки под сосредоточенной нагрузкой был исследован экспериментально Бергштрессером (Bergsträsser M., Forschungsarbeiten, т. 302, Берлин, 1928); см. также работу Ньюмарка и Леппера (Newmark N. M., Lepper H. A., Univ. Illinois Bull., т. 36, № 84, 1939).

35. Изгибающие моменты в свободно опертой прямоугольной пластинке под сосредоточенной нагрузкой. Чтобы определить изгибающие моменты на центральной оси $y=0$ пластинки, загруженной по схеме рис. 71, вычислим вторые производные выражения (146)

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left(\text{th } \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m}\right) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left(\text{th } \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m}\right) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Подставив эти производные в выражения (101) для изгибающих моментов, получим

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{y=0} &= \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left[(1+\nu) \text{th } \alpha_m - \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ (M_y)_{y=0} &= \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a}}{m} \left[(1+\nu) \text{th } \alpha_m + \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

Если b весьма велико в сравнении с a , мы вправе положить

$$\text{th } \alpha_m \approx 1, \quad \frac{\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \approx 0.$$

Тогда

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (\text{b})$$

Этот ряд сходится недостаточно быстро для удовлетворительного вычисления моментов в непосредственной близости к точке приложения нагрузки P . Поэтому возникает необходимость в выводе еще иного выражения для моментов в окрестности этой точки. Из исследования изгиба круглой пластинки силой, приложенной в ее центре (см. § 19), мы знаем, что перерезывающие силы и изгибающие моменты становятся в точке приложения нагрузки бесконечно большими. С подобными же условиями мы сталкиваемся также и в случае прямоугольной пластинки. Распределение напряжений внутри круга малого радиуса с центром в точке приложения нагрузки, по существу, то же, что и близ центра центрально нагруженной круглой пластинки. Напряжения изгиба в любой точке внутри этого круга можно рассматривать состоящим из двух частей, причем одна из них тождественна той, которая соответствует случаю центрально нагруженной круглой пластинки радиуса a , другая же представляет

собой разность между напряжениями в круглой и в прямоугольной пластинках. По мере того как расстояние r между точкой приложения нагрузки и рассматриваемой точкой становится все меньше и меньше, первая составная часть напряжения, изменяясь пропорционально $\ln(a/r)$, принимает в центре бесконечно большое значение, между тем как вторая составная часть, выражающая собой влияние разницы между граничными условиями для той и другой пластинок, остается конечной.

Чтобы получить выражения изгибающих моментов близ точки приложения нагрузки, начнем с более простого случая бесконечно длинной пластинки (рис. 72). Прогиб такой пластинки легко получить из выражения (146), положив, что входящая в него длина стороны b неопределенно возрастает, в связи с чем безгранично увеличится и величина $\alpha_m = m\pi b/2a$, иными словами, допустив, что

$$\operatorname{th} \alpha_m \approx 1, \quad \operatorname{ch} \alpha_m \approx \frac{1}{2} e^{\alpha_m},$$

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \approx \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \approx \frac{1}{2} e^{(\alpha_m/b)(b-2y)}.$$

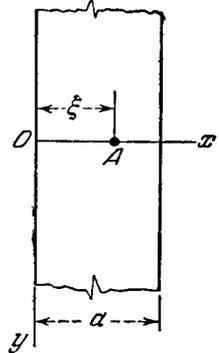


Рис. 72.

Подставив это в уравнение (146), найдем требуемый прогиб ¹⁾ свободно опертой полосы, несущей сосредоточенный груз P в точке $x = \xi$, $y = 0$:

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-\frac{m\pi y}{a}}; \quad (148)$$

выражение это сохраняет силу для $y \geq 0$, т. е. для области, лежащей ниже оси x (рис. 72).

Соответствующие выражения для изгибающих моментов и крутящего момента могут быть получены непосредственно из уравнений (101) и (102):

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a}\right] e^{-m\pi y/a}, \\ M_y &= \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a}\right] e^{-m\pi y/a}, \\ M_{xy} &= \frac{P}{2a} y (1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-m\pi y/a}. \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

¹⁾ Этот важный случай изгиба пластинок был исследован подробно Надаи; см. N a d a i A., *Elastische Platten*, стр. 78—109, Берлин, 1925.

Воспользовавшись еще раз величиной $M = (M_x + M_y)/(1 + \nu)$, введенной на стр. 110, находим

$$M = -D \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi}{\partial y^2} \right) = \frac{P}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} e^{-m\pi y/a}. \quad (150)$$

Моменты (149) можно теперь выразить в зависимости от функции M :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \left[(1 + \nu) M - (1 - \nu) y \frac{\partial M}{\partial y} \right], \\ M_y &= \frac{1}{2} \left[(1 + \nu) M + (1 - \nu) y \frac{\partial M}{\partial y} \right], \\ M_{xy} &= -\frac{1}{2} (1 - \nu) y \frac{\partial M}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Суммируя ряд (150), найдем ¹⁾

$$M = \frac{P}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x + \xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x - \xi)}{a}}. \quad (152)$$

Теперь, пользуясь этим выражением и уравнением (151), мы в силах представить моменты бесконечно длинной пластинки в замкнутой форме. Заметив, далее, что $\Delta \Delta \varpi = 0$ всюду, за исключением точки $(x = \xi, y = 0)$ приложения нагрузки, мы заключаем, что функция $M = -D \Delta \varpi$ удовлетворяет (всюду, за исключением упомянутой точки) уравнению $\Delta M = 0$. В силу второго уравнения из группы (111) граничное условие $M = 0$ для краев $x = 0$ и $x = a$ также удовлетворяется функцией M .

Для точек оси x уравнения (151) дают $M_x = M_y$ и, следовательно,

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = (M)_{y=0} \frac{1 + \nu}{2}. \quad (c)$$

Применив уравнения (c) и (152) к частному случаю нагрузки, приложенной на центральной оси полосы $\xi = a/2$, получим

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{P(1 + \nu)}{8\pi} \ln \frac{1 + \sin \frac{\pi x}{a}}{1 - \sin \frac{\pi x}{a}} \quad (d)$$

— результат, к которому можно прийти также суммированием ряда (b).

¹⁾ См., например, Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2-е изд., стр. 214, Берлин, 1948.

Вернемся теперь к вычислению изгибающих моментов для точек, близких к точке приложения нагрузки, но не лежащих непременно на оси x . В этом случае величины $(x - \xi)$ и y малы, и в выражении (152) мы вправе положить

$$\cos \frac{\pi(x - \xi)}{a} \approx 1 - \frac{\pi^2(x - \xi)^2}{2a^2}, \quad \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \approx 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2}.$$

Таким образом, мы приходим к результату

$$M = \frac{P}{4\pi} \ln \frac{1 - \cos \frac{2\pi\xi}{a}}{1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} - 1 + \frac{\pi^2(x - \xi)^2}{2a^2}} = \frac{P}{4\pi} \ln \left(\frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} \right)^2 = \frac{P}{2\pi} \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r}, \quad (153)$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$$

представляет собой расстояние рассматриваемой точки от точки приложения нагрузки P . Подставив теперь выражение (153) в уравнение (151), находим следующие выражения, применимые для точек, близких к точке приложения сосредоточенной нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \left[(1 + \nu) \frac{P}{2\pi} \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \frac{(1 - \nu) P y^2}{2\pi r^2} \right], \\ M_y &= \frac{1}{2} \left[(1 + \nu) \frac{P}{2\pi} \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} - \frac{(1 - \nu) P y^2}{2\pi r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Интересно сравнить этот результат с полученным ранее для центрально нагруженной свободно опертой круглой пластинки (см. § 19). Взяв радиус r под углом α к оси x из уравнений (90) и (91) для круглой пластинки, найдем

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_n \cos^2 \alpha + M_t \sin^2 \alpha = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + (1 - \nu) \frac{P}{4\pi} \frac{y^2}{r^2}, \\ M_y &= M_n \sin^2 \alpha + M_t \cos^2 \alpha = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \ln \frac{a}{r} + (1 - \nu) \frac{P}{4\pi} \frac{x^2}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Если мы примем внешний радиус круглой пластинки равным

$$\frac{2a}{\pi} \sin \frac{\pi\xi}{a},$$

то первые члены выражений (154) и (e) совпадут. В этих условиях моменты M_x получатся в обоих случаях одинаковыми. Момент M_y для длинной прямоугольной пластинки получится из момента для круглой пластинки в результате вычитания постоянной величины¹⁾ $(1 - \nu)P/4\pi$. Отсюда можно заключить, что в длинной прямоугольной пластинке распределение напряжений вокруг точки приложения нагрузки получается путем наложения на напряжения для центрально нагруженной круглой пластинки радиуса $(2a/\pi) \sin(\pi\xi/a)$ напряжений простого изгиба, произведенного моментами $M_y = -(1 - \nu)P/4\pi$.

Можно допустить, что то же соотношение между моментами для круглой и длинной прямоугольной пластинок имеет место и в случае нагрузки P , равномерно распределенной по круглой площадке малого радиуса e . В этом случае из уравнения (83), пренебрегая членом, содержащим c^2 , мы получаем для центра круглой пластинки

$$M_{\max} = \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{e} + 1 \right].$$

Отсюда на основании уравнений (154) для точек близ центра загруженной круглой площадки длинной прямоугольной пластинки имеем

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right], \\ M_y &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] - \frac{(1 - \nu)P}{4\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

Из этого сравнения длинной прямоугольной пластинки с круглой пластинкой можно заключить, что все сведения, выведенные для последней с помощью теории толстой пластинки (см. § 19) и относящиеся к местным напряжениям близ точки приложения нагрузки P , могут быть применены также и к случаю длинной прямоугольной пластинки.

Если пластинка не очень длинная, то для вычисления моментов M_x и M_y по оси x , вместо уравнения (b), следует пользоваться уравнениями (a). В силу того, что с возрастанием m величина $\text{th } \alpha_m$ быстро приближается к единице, а $\text{ch } \alpha_m$ становится большим числом, разность между суммами ряда (a) и суммой ряда (b) легко может быть вычислена, причем моменты M_x и M_y для точек оси x , близких к точке приложения нагрузки, могут быть представлены

¹⁾ Заметим, что $x^2 = r^2 - y^2$.

в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi} = \\
 &= \frac{P(1+\nu)}{4\pi} \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \gamma_1 \frac{P}{4\pi}, \\
 M_y &= \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} + \gamma_2 \frac{P}{4\pi} = \\
 &= \frac{P(1+\nu)}{4\pi} \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \gamma_2 \frac{P}{4\pi},
 \end{aligned} \right\} (156)$$

где γ_1 и γ_2 — численные коэффициенты, величины которых зависят от отношения b/a . Несколько значений этих коэффициентов для случая приложения нагрузки в центре приводятся в таблице 24.

Таблица 24

Коэффициенты γ_1 и γ_2 для уравнения (141)

b/a	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	∞
γ_1	-0,565	-0,350	-0,211	-0,125	-0,073	-0,042	0
γ_2	+0,135	+0,115	+0,085	+0,057	+0,037	+0,023	0

Распределение напряжений около точки приложения нагрузки точно так же почти не отличается от имеющего место в центрально нагруженной круглой пластинке радиусом $(2a/\pi) \sin(\pi\xi/a)$. Чтобы получить изгибающие моменты M_x и M_y около точки приложения нагрузки, нам нужно лишь на моменты для круглой пластинки наложить равномерно распределенные моменты $M'_x = \gamma_1 P/4\pi$ и $M'_y = -(1-\nu-\gamma_2)P/4\pi$. Допустив, что этот вывод остается в силе также и для того случая, когда нагрузка P равномерно распределена по кругу малого радиуса c , мы получаем для центра круга

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] + \frac{\gamma_1 P}{4\pi}, \\
 M_y &= \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1 \right] - (1-\nu-\gamma_2) \frac{P}{4\pi}.
 \end{aligned} \right\} (157)$$

Сосредоточенные силы точно так же, как и распределенная нагрузка, приводят к возникновению в вершинах прямоугольной пластинки направленных вниз реактивных сил и значительных моментов защемления. Величины этих реакций в углах

$$R = nP, \quad (f)$$

обусловленных действием приложенной в центре пластинки силы, указываются в таблице 25 численными значениями коэффициента n , моменты же защемления равны $-R/2$ (см. стр. 103). Вычисление значений R выполнено здесь простым способом, с которым мы познакомимся в § 36.

Распределение изгибающих моментов и реактивных давлений для частных случаев квадратной пластинки, загруженной в центре, показано на рис. 73. Штриховой

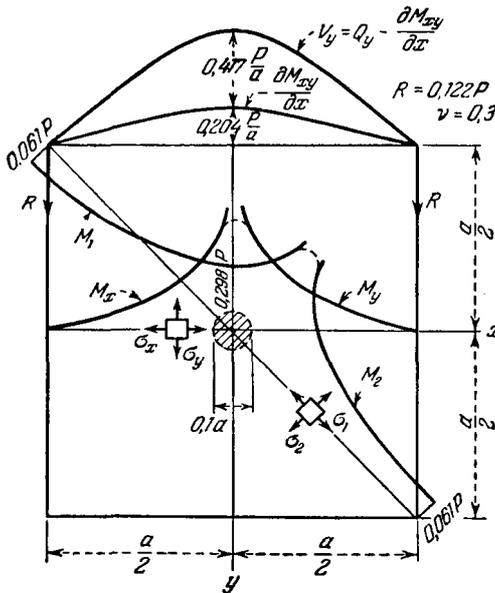


Рис. 73.

участок кривых отвечает условию равномерного распределения нагрузки P по площади заштрихованного круга радиуса $c = 0,05a$.

Таблица 25

Значения коэффициента n для определения реакций R в вершинах свободно опертой прямоугольной пластинки, несущей в центре сосредоточенный груз P ($\nu = 0,3$)

$b/a = 1,0$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
$n = 0,1219$	0,1162	0,1034	0,0884	0,0735	0,0600	0,0180	0

36. Прямоугольная пластинка бесконечной длины, свободно опертая по краям. В нашем изложении мы уже не раз имели дело с бесконечно длинной пластинкой. Мы получали прогибы и моменты для такой пластинки обычно из соответствующих решений для пластинки конечной длины, позволяя этой последней неограниченно уве-

личиваться в длину. В некоторых случаях представляется более выгодным идти в обратном направлении, т. е. находить сначала решения для бесконечно длинной пластинки, а затем комбинировать их так, чтобы получалось решение для пластинки конечной длины. В настоящем параграфе мы дадим несколько примеров такого метода решения. Начнем со случая бесконечно длинной пластинки шириной a , нагруженной по оси x , как показано на рис. 74. Так как изогнутая поверхность такой пластинки будет симметрична относительно оси x , то для дальнейших рассуждений достаточно рассмотреть одну лишь часть пластинки, которая соответствует положительным значениям y . Поскольку нагрузка распределена лишь по оси x , прогиб w пластинки удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (a)$$

Примем решение этого уравнения в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (b)$$

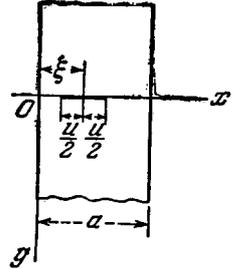


Рис. 74.

удовлетворяющем граничным условиям на свободно опертых продольных краях пластинки. Уравнение (a) удовлетворяется при том условии, если функции Y_m подобраны так, что

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0.$$

Взяв решение этого уравнения в виде

$$Y_m = A_m e^{\frac{m\pi y}{a}} + B_m \frac{m\pi y}{a} e^{\frac{m\pi y}{a}} + C_m e^{-\frac{m\pi y}{a}} + D_m \frac{m\pi y}{a} e^{-\frac{m\pi y}{a}} \quad (c)$$

и заметив, что как прогибы, так и их производные на значительном удалении от оси x приближаются к нулю, мы можем заключить, что постоянные A_m и B_m также должны быть приняты равными нулю. На этом основании решение (b) можно представить таким образом:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m + D_m \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (d)$$

Из условия симметрии имеем

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.$$

Это условие удовлетворяется, если в выражении (d) взять $C_m = D_m$. Тогда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (e)$$

Постоянные C_m без затруднений вычисляются в каждом частном случае, если только нам дано распределение нагрузки по оси x .

Предположим, например, что нагрузка распределена равномерно по всей ширине полоски. Интенсивность ее можно представить следующим тригонометрическим рядом:

$$q = \frac{4}{\pi} q_0 \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

где q_0 есть нагрузка на единицу длины. Так как нагрузка поделена поровну между обеими половинами пластинки, мы видим, что

$$(Q_y)_{y=0} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{2}{\pi} q_0 \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (f)$$

Подставляя сюда вместо w выражение (e), получаем

$$\frac{2D\pi^3}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} C_m m^3 \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{2}{\pi} q_0 \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

откуда

$$C_m = \frac{q_0 a^3}{D\pi^4 m^4}, \quad \text{где } m = 1, 3, 5, \dots;$$

поэтому

$$w = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (g)$$

Своего максимального значения прогиб достигает в центре пластинки ($x = a/2$, $y = 0$), где он равен

$$(w)_{\max} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} = \frac{5\pi q_0 a^3}{24 \cdot 64 D} = \frac{5\pi q_0 a^3}{1536 D}. \quad (h)$$

К тому же результату можно прийти, положив $\alpha_m = 1$ и $\alpha_m = \infty$ в уравнении (144) (см. стр. 162).

В качестве второго примера применения решения (e) рассмотрим нагрузку, равномерно распределенную по участку оси x длиной u

(рис. 74). Представим это распределение нагрузки тригонометрическим рядом

$$q = \frac{4q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

где q_0 — интенсивность нагрузки на загруженном участке оси x . Уравнением, соответствующим уравнению (f), для определения постоянных C_m будет

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

После подстановки сюда (e) вместо w получим

$$\frac{2D\pi^3}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} C_m m^3 \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

откуда

$$C_m = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D m^4} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a}.$$

Тогда уравнение (e) для прогибов принимает вид

$$w = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (i)$$

Частный случай сосредоточенной нагрузки, приложенной на расстоянии ξ от начала координат, получится из разобранных примера, если длину u загруженного участка оси x мы сделаем в нем бесконечно малой. Подставив в уравнение (i)

$$q_0 u = P$$

и

$$\sin \frac{m\pi u}{a} \approx \frac{m\pi u}{a},$$

получим

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (158)$$

т. е. выражение, совпадающее с формулой (148) предыдущего параграфа. Интегрируя выражение (i) для прогиба длинной пластинки, находящейся под нагрузкой, распределенной по участку u и оси x , мы можем прийти и к различным иным случаям нагрузки. Разберем, например, случай нагрузки интенсивности q , равномерно распределенной

по заштрихованному на рис. 75 прямоугольнику со сторонами, равными u и v . Взяв бесконечно малый элемент нагрузки величиной q и $d\eta$ на расстоянии η от оси x , мы получим вызванный этой нагрузкой прогиб в точках с $y > \eta$, если в выражении (i) произведем подстановки: $q d\eta$ вместо q_0 и $y - \eta$ вместо y . Прогиб, произведенный полной нагрузкой, для точек, у которых $y \geq \frac{v}{2}$, получится интегрированием

$$\begin{aligned} w &= \frac{qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \int_{-\frac{v}{2}}^{\frac{v}{2}} \left[1 + \frac{m\pi(y-\eta)}{a} \right] e^{-\frac{m\pi(y-\eta)}{a}} d\eta = \\ &= \frac{qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \left[\left(\frac{2a}{m\pi} + y - \frac{v}{2} \right) e^{-\frac{m\pi(2y-v)}{2a}} - \left(\frac{2a}{m\pi} + y + \frac{v}{2} \right) e^{-\frac{m\pi(2y+v)}{2a}} \right]. \quad (j) \end{aligned}$$

Путем надлежащего изменения пределов интегрирования мы можем получить также и прогиб в точках, для которых $y < v/2$. Рассмотрим прогиб по оси x (рис. 75). Прогиб, произведенный верхней половиной нагрузки, получится из выражения (j) посредством подстановки величины $v/4$ вместо y и $v/2$. Удваивая полученный таким образом результат, мы примем при этом в расчет также и эффект нижней половины нагрузки и в окончательном итоге найдем

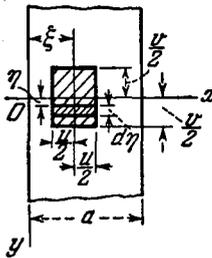


Рис. 75.

$$\begin{aligned} (w)_{y=0} &= \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \left[1 - \left(1 + \frac{m\pi v}{4a} \right) e^{-\frac{m\pi v}{2a}} \right]. \quad (k) \end{aligned}$$

Если $v = \infty$, то изображенная на рис. 75 нагрузка распределяется по всей длине пластинки и изогнутая поверхность ее становится цилиндрической. Соответствующий прогиб согласно выражению (k) будет

$$(w)_{y=0} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (l)$$

Положив в этом выражении $\xi = u/2 = a/2$, получим

$$(\omega)_{y=0} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

что представляет собой изогнутую ось равномерно нагруженной полосы.

Из выражения (i) для прогиба ω легко получаем следующие значения изгибающих моментов от нагрузки, равномерно распределенной по участку u оси x ,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \right] e^{-\frac{m\pi y}{a}}, \\ M_y &= \frac{q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \right] e^{-\frac{m\pi y}{a}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{m})$$

Своих максимальных значений эти моменты достигают на оси x , где

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{q_0 a (1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (\text{n})$$

В частном случае, когда $\xi = u/2 = a/2$, т. е. если нагрузка распределена по всей ширине пластинки,

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{q_0 a (1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Максимальный момент получается в центре пластинки

$$(M_x)_{\max} = (M_y)_{\max} = \frac{q_0 a (1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} = 0,0928 q_0 a (1 + \nu).$$

Если u весьма мало, т. е. если нагрузка сосредоточена в точке, то полагаем

$$\sin \frac{m\pi u}{2a} \approx \frac{m\pi u}{2a} \quad \text{и} \quad q_0 u = P.$$

Тогда из выражения (п) следует

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{P(1+\nu)}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (o)$$

что совпадает с выражением (б) предыдущего параграфа и допускает также представление в замкнутой форме (см. стр. 168).

В случае, если нагрузка q равномерно распределена по площади прямоугольника (рис. 75), то изгибающие моменты для участка пластинки, где $y \geq v/2$, получаются интегрированием выражений (м):

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \int_{-\frac{v}{2}}^{+\frac{v}{2}} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{m\pi(y - \eta)}{a} \right] e^{-\frac{m\pi(y - \eta)}{a}} d\eta = \\ &= \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{2a}{m\pi} + (1 - \nu) \left(y - \frac{v}{2} \right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y - v)}{2a}} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2a}{m\pi} + (1 - \nu) \left(y + \frac{v}{2} \right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y + v)}{2a}} \right\}, \\ M_y &= \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{2va}{m\pi} - (1 - \nu) \left(y - \frac{v}{2} \right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y - v)}{2a}} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2va}{m\pi} - (1 - \nu) \left(y + \frac{v}{2} \right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y + v)}{2a}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

Подобным же образом можно вычислить и моменты для участка пластинки, где $y < v/2$. Для получения моментов по оси x нам остается лишь в формулы (159) подставить $v/2$ вместо v и $v/4$ вместо u ,

удвоив затем полученный при этом результат. Тогда

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{y=0} &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \left[1 + (1 - \nu) \frac{m\pi\nu}{4a} \right] e^{-\frac{m\pi\nu}{2a}} \right\}, \\ (M_y)_{y=0} &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ &\quad \times \left\{ \nu - \left[\nu - (1 - \nu) \frac{m\pi\nu}{4a} \right] e^{-\frac{m\pi\nu}{2a}} \right\}. \end{aligned} \right\} (160)$$

Вычисление моментов для центра загруженной прямоугольной площади можно провести также и с помощью выражений (167), приводимых ниже в § 37. При ν весьма малом уравнения (160) совпадут с уравнениями (п), если мы заметим, что $q\nu$ в этом случае нужно будет заменить на q_0 . При ν весьма большом пластинка изгибается по цилиндрической поверхности и уравнения (160) преобразуются в аналогичные:

$$\begin{aligned} (M_x)_{y=0} &= \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ (M_y)_{y=0} &= \frac{4\nu qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Выражения для прогибов и изгибающих моментов в пластинке конечной длины могут быть получены из соответствующих величин в бесконечно длинной пластинке также и *методом отображений*¹⁾ (method of images). Начнем со случая сосредоточенной силы P , приложенной на оси симметрии x прямоугольной пластинки со сторонами a и b (рис. 76, а). Если мы теперь представим себе пластинку продолженной как в положительном, так и в отрицательном направлениях оси y и нагруженной рядом сил P , приложенных по линии mn на расстоянии b одна от другой и направленных, как показано на рис. 76, б, поочередно то в сторону $+z$, то в сторону $-z$, то прогибы такой бесконечно длинной пластинки по линиям A_1B_1 , AB , CD , C_1D_1 , ... будут, очевидно, равны нулю. Изгибающие моменты по тем же линиям будут также равны нулю, и данную нам пластинку $ABCD$ мы вправе будем рассматривать как часть бесконечно длинной пластинки, загру-

¹⁾ Этот метод был применен Надан (Nadai A., Z. Angew. Math. Mech., т. 2, стр. 1, 1922) и Губером (Huber M. T., Z. Angew. Math. Mech., т. 6, стр. 228, 1926).

женной по способу, показанному на рис. 76, *b*. На этом основании прогибы и напряжения, произведенные в данной пластинке в точке приложения *O* сосредоточенной силы, могут быть вычислены с помощью формул, выведенных для бесконечно длинной пластинки. Из уравнения (158) находим, что прогиб по оси *x* бесконечно длинной пластинки от силы *P* в точке *O* равен

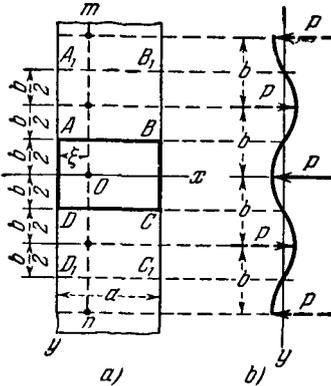


Рис. 76.

$$w_1 = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Две смежные, приложенные на расстояниях *b* от точки *O*, силы *P* (рис. 76, *b*) произведут на оси *x* прогиб

$$w_2 = -\frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \times \\ \times (1 + 2\alpha_m) e^{-2\alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

где, как и раньше,

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}.$$

Силы *P*, удаленные от точки *O* на расстояние *2b*, произведут на оси *x* прогиб

$$w_3 = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi\xi}{a} (1 + 4\alpha_m) e^{-4\alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

и т. д. Полный прогиб по оси *x* будет дан суммой

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \dots \quad (p)$$

Заметив, что

$$\operatorname{th} \alpha_m = \frac{1 - e^{-2\alpha_m}}{1 + e^{-2\alpha_m}} = 1 - 2e^{-2\alpha_m} + 2e^{-4\alpha_m} \dots,$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} = \frac{4}{(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})^2} = \frac{4e^{-2\alpha_m}}{(1 + e^{-2\alpha_m})^2} = \\ = 4e^{-2\alpha_m} (1 - 2e^{-2\alpha_m} + 3e^{-4\alpha_m} - 4e^{-6\alpha_m} + \dots),$$

мы можем привести выражение (p) к совпадению с выражением (146) § 34.

Применим метод отображений к вычислению реактивной силы

$$R = -2M_{xy},$$

возникающей в вершине *D* прямоугольной пластинки *ABCD* (рис. 76) при загрузке ее в центре силой *P*. Из уравнений (151) и (152) находим, что

общее выражение крутящего момента для бесконечно длинной пластинки в случае загрузки ее лишь одной-единственной внешней силой принимает вид

$$M_{xy} = -\frac{1}{2}(1-\nu)y \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{P(1-\nu)y}{8a} \left[\frac{\sin \frac{\pi(x-\xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x-\xi)}{a}} - \frac{\sin \frac{\pi(x+\xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x+\xi)}{a}} \right]. \quad (q)$$

Отсюда нагрузка P , приложенная в точке $x = \xi = a/2, y = 0$, повлечет за собой появление в точке $x = 0$ крутящего момента

$$M_{xy} = -\frac{P(1-\nu)}{4a} \frac{y}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a}}. \quad (r)$$

Полагая теперь последовательно $y = b/2, 3b/2, 5b/2, \dots$, мы найдем крутящие моменты, являющиеся результатом загрузки пластинки силами $\pm P$, приложенными выше линии DC . Взяв сумму этих моментов, получим

$$M_{xy} = -\frac{Pb(1-\nu)}{8a} \times \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a}} - \frac{3}{\operatorname{ch} \frac{3\pi b}{2a}} + \frac{5}{\operatorname{ch} \frac{5\pi b}{2a}} \right). \quad (s)$$

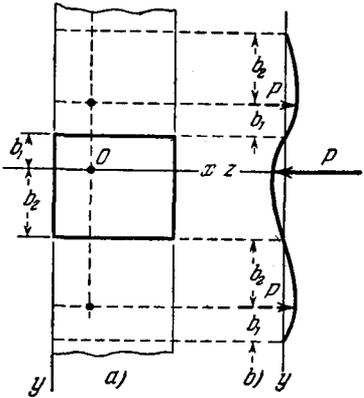


Рис. 77.

Удвоив влияние (s) нагрузок, приложенных выше линии DC , мы тем самым учтем и влияние нагрузок, размещенных симметрично ниже DC , и таким образом определим момент, обусловленный полной величиной заданной нагрузки:

$$M_{xy} = -\frac{Pb(1-\nu)}{4a} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \frac{m}{\operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a}}. \quad (t)$$

Что касается реактивной, направленной вниз силы в точке D , а также и реактивных сил в других вершинах, то их величина равна $R = -2M_{xy}$, где M_{xy} определяется из уравнения (t).

К методу отображений можно прибегнуть и в том случае, когда точка приложения нагрузки не лежит на оси симметрии (рис. 77, а). Прогобы и моменты можно при этом вычислить, вводя систему вспомогательных сил, как это показано на рисунке, и воспользовавшись формулой для бесконечно длинной пластинки. Если нагрузка распределена по площади прямоугольника, то определение изгибающих моментов для заданных и фиктивных нагрузок можно выполнить по формулам (167) — см. ниже § 37.

37. Изгибающие моменты в свободно опертой прямоугольной пластинке при равномерном нагружении ее по площади прямоугольника. Остановимся еще раз на одном важном для практики случае загрузки,

представленном на рис. 78. Поступая по способу, описанному в § 33, мы убедимся, что при малых значениях u/a и v/b ряд, представляющий изгибающие моменты в центре загруженной площади, сходится медленно и потому становится непригодным для получения численных значений.

Для вывода более удобных, отвечающих указанному случаю, формул¹⁾ введем в дополнение к (119) два новых обозначения:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ N &= \frac{M_x - M_y}{1 - \nu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} (1 + \nu) M + \frac{1}{2} (1 - \nu) N, \\ M_y &= \frac{1}{2} (1 + \nu) M - \frac{1}{2} (1 - \nu) N. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Рассмотрим сначала *защемленную круглую пластинку* радиусом a_0 , загруженную центральной нагрузкой, распределенной как это показано на рис. 78. Определение изгибающих моментов в центре такой пластинки выполнено с помощью решения Мичелла для внецентренно приложенной сосредоточенной силы. Если u и v малы в сравнении с a_0 , то результату интегрирования выражения (157) (стр. 173) может быть придан вид

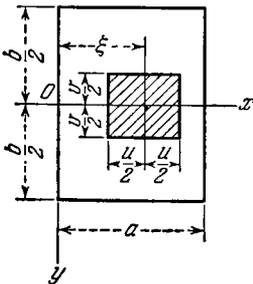


Рис. 78.

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 + 2 \ln \frac{2a_0}{d} - \varphi \right), \\ N &= \frac{P}{4\pi} \psi, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= k \operatorname{arctg} \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \operatorname{arctg} k, \\ \psi &= k \operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \operatorname{arctg} k, \\ k &= \frac{v}{u}, \quad d = \sqrt{u^2 + v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Для *свободно опертой круглой пластинки* того же радиуса a_0 нам следует добавить к выражениям для M_x и M_y член $P/4\pi$ (см. стр. 172) и, следовательно, член $P/2\pi(1 + \nu)$ к M , сохранив неизменным значение N , тогда для этих величин мы получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 + 2 \ln \frac{2a_0}{d} - \varphi \right) + \frac{P}{2\pi(1 + \nu)}, \\ N &= \frac{P}{4\pi} \psi. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Для того чтобы, наконец, получить соответствующие выражения для *бесконечной полосы* (рис. 75), мы должны принять $a_0 = 2a/\pi \sin(\pi\xi/a)$ и ввести дополнительный момент $M_y = -(1 - \nu)P/4\pi$ (см. стр. 172). Эта

¹⁾ См. Wołnowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 21, стр. 331, 1953.

последняя операция изменяет величину M на $-(1-\nu)P/4\pi(1+\nu)$ и величину N на $+P/4\pi$. Вводя это в уравнения (b), приходим к результату:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 \ln \frac{4a \sin \frac{\pi \xi}{a}}{\pi d} + 3 - \varphi \right), \\ N &= \frac{P}{4\pi} (1 + \psi). \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

Значения коэффициентов φ и ψ , зависящих лишь от отношения ν/u , приводим в таблице 26.

Таблица 26

Коэффициенты φ и ψ уравнений (163) ($k = \nu/u$)

k	φ	ψ	k	φ	ψ	k	φ	ψ
0	1,000	-1,000	1,0	1,571	0,000	2,5	1,427	0,475
0,05	1,075	-0,923	1,1	1,569	0,054	3,0	1,382	0,549
0,1	1,144	-0,850	1,2	1,564	0,104	4,0	1,311	0,648
0,2	1,262	-0,712	1,3	1,556	0,148	5,0	1,262	0,712
0,3	1,355	-0,588	1,4	1,547	0,189	6,0	1,225	0,757
0,4	1,427	-0,475	1,5	1,537	0,227	7,0	1,197	0,789
0,5	1,481	-0,374	1,6	1,526	0,261	8,0	1,176	0,814
0,6	1,519	-0,282	1,7	1,515	0,293	9,0	1,158	0,834
0,7	1,545	-0,200	1,8	1,504	0,322	10	1,144	0,850
0,8	1,560	-0,127	1,9	1,492	0,349	20	1,075	0,923
0,9	1,568	-0,060	2,0	1,481	0,374	∞	1,000	1,000

Переходя теперь к случаю прямоугольной пластинки (рис. 78), нам остается лишь добавить влияние вспомогательных нагрузок $^1) \pm P$ (рис. 77) на значения (164) M и N . Окончательному результату для случая, представленного на рис. 78, можно поэтому придать форму:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 \ln \frac{4a \sin \frac{\pi \xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi \right), \\ N &= \frac{P}{4\pi} (\mu + \psi), \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

где φ , ψ , d даются выражениями (163) и таблицей 26, а

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 3 - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_m}}{\operatorname{ch} \alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi \xi}{a}, \\ \mu &= 1 - \frac{2\pi b}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \sin^2 \frac{m\pi \xi}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

¹⁾ Их позволительно считать сосредоточенными, если u и ν малы.

где $\alpha_m = m\pi b/2a$. Члены λ и μ , определяемые быстро сходящимися рядами, совершенно не зависят от размеров u и v (и даже от формы) загруженной площадки; их числовые значения приводятся в таблице 27.

Таблица 27

Коэффициенты λ и μ уравнений (166) для свободно опертой прямоугольной пластинки

b/a	λ для $\xi/a =$					μ для $\xi/a =$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,5	2,792	2,352	1,945	1,686	1,599	0,557	-0,179	-0,647	-0,852	-0,906
0,6	2,861	2,545	2,227	2,011	1,936	0,677	0,053	-0,439	-0,701	-0,779
0,7	2,904	2,677	2,433	2,259	2,198	0,758	0,240	-0,229	-0,514	-0,605
0,8	2,933	2,768	2,584	2,448	2,399	0,814	0,391	-0,031	-0,310	-0,404
0,9	2,952	2,832	2,694	2,591	2,553	0,856	0,456	0,148	-0,108	-0,198
1,0	2,966	2,879	2,776	2,698	2,669	0,887	0,611	0,304	0,080	0,000
1,2	2,982	2,936	2,880	2,836	2,820	0,931	0,756	0,551	0,393	0,335
1,4	2,990	2,966	2,936	2,912	2,903	0,958	0,849	0,719	0,616	0,578
1,6	2,995	2,982	2,966	2,953	2,948	0,975	0,908	0,828	0,764	0,740
1,8	2,997	2,990	2,982	2,975	2,972	0,985	0,945	0,897	0,858	0,843
2,0	2,999	2,995	2,990	2,987	2,985	0,991	0,968	0,939	0,915	0,906
3,0	3,000	3,000	3,000	2,999	2,999	0,999	0,998	0,996	0,995	0,994
∞	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Из уравнений (162) получаем выражения для изгибающих моментов

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{P}{8\pi} \left[\left(2 \ln \frac{4a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi \right) (1 + \nu) + (\mu + \psi) (1 - \nu) \right], \\ M_y &= \frac{P}{8\pi} \left[\left(2 \ln \frac{4a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi \right) (1 + \nu) - (\mu + \psi) (1 - \nu) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

действующих в центре загруженной площадки (рис. 78). Выражениями (165) и (167) можно воспользоваться, как в частном случае, также и при вычислении моментов для свободно опертой бесконечной полосы.

Если распространить интегрирование по круговой, эллиптической или по областям другой формы, то легко получить выражения M и N для соответствующих площадок загрузки. Например, при загрузении по площади круга (рис. 79), найдем для центра круга выражения

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\pi} \left(2 \ln \frac{2a \sin \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + \lambda - 2 \right), \\ N &= \frac{P}{4\pi} \mu, \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

эквивалентные результату (157). Сопоставляя (168) с выражением (165) для $k=1$, приходим к выводу, что загрузки по кругу и по квадрату эквивалентны в отношении изгибающих моментов, возникающих при этом в центре соответствующих площадок, если

$$c = \frac{u}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4}-1} = 0,57u \text{ или } u = 0,88 \times 2c. \quad (c)$$

Следует обратить внимание на то, что по мере того как нагрузка сосредоточивается на все меньшей и меньшей площади, точность приближенных логарифмических формул для изгибающих моментов, подобных, например, уравнениям (157) и (167), возрастает, между тем как сходимость обычных рядов, представляющих эти моменты, замедляется. Вычисления¹⁾ подтверждают, таким образом, что точность этих приближенных формул вполне достаточна для практических целей.

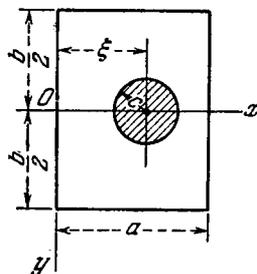


Рис. 79.

38. Температурные напряжения в свободно опертой прямоугольной пластинке. Предположим, что верхняя поверхность прямоугольной пластинки подвергается действию более высокой температуры, чем нижняя, так что, вследствие неравномерного нагрева, пластинка испытывает стремление изгибаться выпуклостью вверх. В связи с наличием на свободно опертых краях пластинки закрепления, препятствующего им выступать из плоскости опор, неравномерный нагрев пластинки приведет к появлению некоторых опорных реакций по ее краям и некоторых напряжений на известном расстоянии от краев. Для вычисления этих напряжений воспользуемся методом, изложенным в § 24²⁾. Предположим сначала, что края пластинки защемлены. В таком случае неравномерный нагрев приведет к возникновению равномерно распределенных по контуру изгибающих моментов, величина которых определится формулой (см. стр. 65)

$$M_n = \frac{atD(1+\nu)}{h}, \quad (a)$$

где t — разность температур на верхней и нижней поверхностях

¹⁾ См. Woinowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 3, стр. 340, 1932, и Ingr.-Arch., т. 21, стр. 336, 337, 1953.

²⁾ См. работу Маульбеца (Maulbetsch I. L., J. Appl. Mech, т. 2, стр. 141, 1935); см. также Melan E., Parkus H., Wärmespannungen infolge stationären Temperaturfelder, Вена, 1953, куда включена и библиография по температурным напряжениям (имеется русский перевод: Мелан Э., Паркус Г., Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями, Физматгиз, 1958. — Прим. пер.). Относительно напряжений, возникающих в результате неточностей сборки, см. Nowacki W., Bull. Acad. polon Sci., т. 4, стр. 79, 1956.

пластинки, а α — коэффициент температурного линейного расширения. Чтобы получить изгибающие моменты M_x и M_y для свободно опертой пластинки (рис. 62), мы должны на равномерно распределенные моменты, данные уравнением (а), наложить моменты, возникающие в свободно опертой прямоугольной пластинке под действием равномерно распределенных по краям моментов

$$M'_n = - \frac{atD(1+\nu)}{h}.$$

Для решения этой последней задачи воспользуемся уравнениями (120) (см. стр. 120). Так как кривизна в направлении края в случае свободного опирания равна нулю, то мы имеем $M'_t = \nu M'_n$. Поэтому на контуре

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = \frac{M'_n + M'_t}{1+\nu} = - \frac{atD(1+\nu)}{h}. \quad (b)$$

Таким образом, первое из уравнений (120) удовлетворяется, если M принять постоянным по всей пластинке и равным его значению (b) на контуре. Тогда второе из уравнений (120) дает

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{at(1+\nu)}{h}. \quad (c)$$

Иначе говоря, изогнутая поверхность пластинки, подвергнутой неравномерному нагреву, будет такой же, как и для равномерно растянутой и равномерно нагруженной мембраны, и определится решением уравнения (с), удовлетворяющим тому условию, что прогиб на контуре должен быть равен нулю: $w = 0$.

Поступая подобно прежнему, возьмем изогнутую поверхность пластинки в виде

$$w = w_1 + w_2, \quad (d)$$

где w_1 — прогиб абсолютно гибкой нити, равномерно нагруженной и натянутой вдоль оси таким образом, что отношение интенсивности нагрузки к осевой силе равно $-at(1+\nu)/h$. При этом упругая кривая будет параболой, которую мы сможем представить тригонометрическим рядом

$$w_1 = - \frac{at(1+\nu)}{h} \frac{x(a-x)}{2} = - \frac{at(1+\nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3}. \quad (e)$$

Это выражение удовлетворяет уравнению (с). Прогиб w_2 , который должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0, \quad (f)$$

может быть взят в виде

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (g)$$

где Y_m — функция одного лишь y . Подставив (g) в уравнение (f), находим

$$Y_m'' - \frac{m^2\pi^2}{a^2} Y_m = 0.$$

Отсюда

$$Y_m = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}. \quad (h)$$

Из симметрии изогнутой поверхности относительно оси x можно заключить, что Y_m должна быть четной функцией от y . Поэтому постоянная A_m в выражении (h) должна быть принята равной нулю, и тогда окончательно мы получим

$$w = w_1 + w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[-\frac{at(1+\nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3 m^3} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right]. \quad (i)$$

Это выражение удовлетворяет граничным условиям $w=0$ на краях $x=0$ и $x=a$. Чтобы это же самое условие удовлетворялось и на краях $y=\pm b/2$, должно быть справедливо соотношение

$$B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a} - \frac{at(1+\nu)}{h} \frac{4a^2}{\pi^3 m^3} = 0.$$

Подставив полученное из этого уравнения значение B_m в уравнение (i), находим, что

$$w = -\frac{at(1+\nu)4a^2}{\pi^3 h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \alpha_m} \right), \quad (j)$$

где, как и раньше, $\alpha_m = m\pi b/2a$.

Имея это выражение для прогибов w , мы можем найти и соответствующие значения изгибающих моментов, а складывая их алгебраически с моментами (a), получаем окончательно

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{atD(1+\nu)}{h} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{4Dat(1-\nu^2)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m \operatorname{ch} \alpha_m}, \\ M_y &= \frac{atD(1+\nu)}{h} - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{at(1-\nu^2)D}{h} - \frac{4Dat(1-\nu^2)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m \operatorname{ch} \alpha_m}. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Сумма входящего в эти выражения ряда будет легко найдена, если мы напишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m \operatorname{ch} \alpha_m} = \\ & = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m \operatorname{ch} \alpha_m} - \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m e^{\alpha_m}} \right) + \\ & \quad + \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m e^{\alpha_m}}. \quad (1) \end{aligned}$$

Первый ряд в правой части этого уравнения быстро сходится, поскольку $\operatorname{ch}(m\pi y/a)$ и $\operatorname{ch} \alpha_m$ с возрастанием m быстро приближаются к $e^{\frac{m\pi y}{a}}$ и соответственно к e^{α_m} . Второй ряд можно представить таким образом¹⁾:

$$\sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{e^{\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m e^{\alpha_m}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi b}{2a} - \frac{\pi y}{a} \right)} \right]. \quad (m)$$

Изгибающие моменты M_x и M_y принимают максимальные значения на краях. Эти значения

$$(M_x)_{y=\pm \frac{b}{2}} = (M_y)_{x=0, x=a} = \frac{\alpha t (1-\nu^2) D}{h} = E h^2 \frac{\alpha t}{12}. \quad (n)$$

Мы видим, что эти значения получены путем умножения M_n из формулы (a) на $(1-\nu)$. К этому же самому выводу мы придем, если заметим, что приложенные к контуру моменты M'_n вызывают появление в перпендикулярном направлении моментов

$$M'_t = \nu M'_n = -\nu \frac{\alpha t D (1+\nu)}{h},$$

которые, будучи наложенными на моменты (g), дают значение (n).

39. Влияние деформации поперечного сдвига на изгиб тонкой пластинки. Мы видели, что обычная (элементарная) теория тонкой пластинки дает для прогиба дифференциальное уравнение (103) чет-

¹⁾ См. Byerly W. E., Elementary treatise on Fourier series and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics, стр. 100, Бостон, 1893. Результат легко получается с помощью известного ряда

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \varphi}{1-x^2} = x \sin \varphi + \frac{x^3}{3} \sin 3\varphi + \frac{x^5}{5} \sin 5\varphi + \dots$$

вертого порядка с двумя граничными условиями, которые могут и должны удовлетворяться по каждому краю. Для пластинки конечной толщины естественнее, однако, потребовать выполнения трех граничных условий вместо двух. Формально основанием невозможности удовлетворения более чем двум условиям в обычной теории можно объяснить соответствующим порядком основного уравнения этой теории; с физической точки зрения причина этого заложена в том обстоятельстве, что при выводе соотношений между напряжениями и прогибом игнорируется искажение элементов пластинки, производимое перерезывающими силами, такими, как Q (стр. 68), Q_x и Q_y (стр. 89). Пренебрежение деформацией, вызванной поперечным компонентом напряжения, равносильно, очевидно, допущению, что модуль сдвига $G_z = \infty$. Поступая таким образом, мы как бы заменяем реальный материал пластинки, согласно нашему предположению изотропной, некоторым гипотетическим материалом, не обладающим идеальной изотропией. В силу допущения $G_z = \infty$ пластинка не реагирует на кручение, производимое некоторой парой, приложенной к цилиндрической поверхности пластинки, если вектор пары совпадает с нормалью к этой поверхности. Это позволяет отождествить приращение $\partial M_{xy}/\partial u$ крутящих пар, обусловленных горизонтальными касательными напряжениями и действующих по краю $x = a$, с результатом воздействия вертикальных сил Q_x , приложенных по тому же краю, и тем самым снизить число граничных условий с трех до двух (стр. 101). Такое уменьшение числа граничных условий внесло значительные упрощения в исследование напряженного состояния упругой пластинки. С другой стороны, приписав некоторые чисто гипотетические свойства материалу пластинки, мы потеряли право на уверенность в том, что распределение напряжений, предсказанное нашей теорией, вполне совпадает с фактическим. Неточность обычной теории тонкой пластинки приобретает практическую важность в областях пластинки, примыкающих к контуру или к отверстиям, диаметр которых нельзя считать большим в сравнении с толщиной пластинки.

Обобщение обычной теории, учитывающее влияние, которое оказывает на прогиб деформация сдвига, было дано по существу Э. Рейсснером¹⁾.

Пусть элемент пластинки (рис. 80) подвергается действию внешней поперечной нагрузки $q dx dy$ и системы компонентов напряжения. Следуя Рейсснеру, примем для распределения компонентов напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} по толщине пластинки линейный закон. В силу

¹⁾ См. Reissner E., J. Math. and Phys., т. 23, стр. 184, 1944; J. Appl. Mech., т. 12, стр. A-68, 1945; Quart. Appl. Math., т. 5, стр. 55, 1947. История вопроса, восходящая к спору между Леви и Буссинеском, излагается Боллем (Bolle L., Bull. tech. Suisse romande, октябрь, 1947).

уравнений равновесия (а) (на стр. 88) распределение компонентов τ_{xz} и τ_{yz} подчиняется параболическому закону. Что касается компонента напряжения σ_z , то его распределение устанавливается без труда третьим из уравнений равновесия (а), если учесть условия

$$(\sigma_z)_{z=-h/2} = -q, \quad (\sigma_z)_{z=h/2} = 0$$

для верхней и нижней поверхностей пластинки. Таким путем мы приходим к следующим выражениям для компонентов напряжения в функциях от их равнодействующих и координаты z :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x z}{h^3}, & \sigma_y &= \frac{12M_y z}{h^3}, & \tau_{xy} &= -\frac{12M_{xy} z}{h^3}, \\ \tau_{xz} &= \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], & \tau_{yz} &= \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\sigma_z = \frac{-3q}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right]. \quad (b)$$

Полученная система уравнений, с исключением из нее уравнения (b) совпадает с аналогичными соотношениями обычной теории. Равным

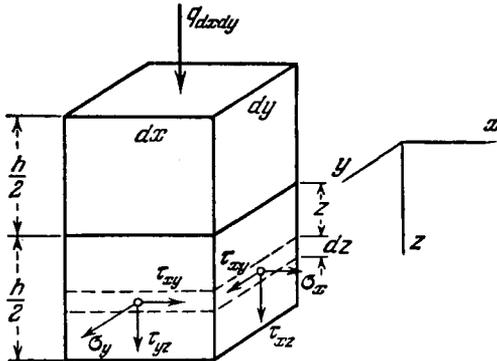


Рис. 80.

образом, можно переписать и соответствующие условия равновесия для равнодействующих напряжений (см. стр. 97, 98):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (d)$$

Предполагая, что материал пластинки изотропен и что перемещения u_0 , v_0 , w_0 произвольной точки пластинки малы в сравнении с ее толщиной h , используем общие соотношения закона Гука

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}, \\ \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

где $G = E/2(1 + \nu)$. Мы, однако, не вводим сюда шестое соотношение

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)],$$

поскольку оно стоит в противоречии с принятым нами линейным законом распределения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Далее¹⁾, введем некоторое среднее для всей толщины пластинки значение w поперечного перемещения, равно как и некоторые средние значения φ_x и φ_y для угловых деформаций (поворотов) сечений соответственно $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Определим эти величины, приравняв работу результирующих пар на средних углах поворота и работу равнодействующих сил на среднем перемещении работе соответствующих напряжений на фактических перемещениях u_0 , v_0 и w_0 в том же сечении, т. е. положим

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x u_0 dz &= M_x \varphi_x, & - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} v_0 dz &= M_{xy} \varphi_y, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y v_0 dz &= M_y \varphi_y, & - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} u_0 dz &= M_{xy} \varphi_x, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} w_0 dz &= Q_x w, & \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} w_0 dz &= Q_y w. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

¹⁾ Рейснер при исследовании этого вопроса вводит условия совместности, воспользовавшись принципом наименьшей работы Кастильяно. Метод, излагаемый здесь и приводящий по существу к тем же результатам, предложен Гринном (Green A. E., *Quart Appl. Math.*, т. 7, стр. 223, 1949); см. также Schäfer M., *Z. angew. Math. Mech.*, т. 32, стр. 161, 1952.

Подставляя теперь выражения (а) для напряжений в уравнения (f), приходим к следующим соотношениям между средними и фактическими перемещениями:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{3}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \omega_0 \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] dz, \\ \varphi_x &= \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{u_0 z}{h} dz, \\ \varphi_y &= \frac{12}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{v_0 z}{h} dz. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Исходя из уравнений (с) и учитывая (b), мы получаем возможность выразить компоненты σ_x , σ_y , τ_{xy} напряжений в зависимости от фактических перемещений¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \frac{3q\nu}{4(1-\nu)} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{3q\nu}{4(1-\nu)} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Подставляя это в уравнения (а), умножая полученные уравнения на $12z dz/h^3$, интегрируя в пределах $z = -h/2$ и $z = h/2$, приняв, наконец, во внимание соотношения (g), приходим к выражениям

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D \left[\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} q \right], \\ M_y &= D \left[\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh} q \right], \\ M_{xy} &= -\frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

где D определяется, как и ранее, уравнением (3). Совершенно так же, подставляя выражения (а) для компонентов напряжения τ_{xz} и τ_{yz} в последние два уравнения (е), умножая результаты на $3/2 [1 - (2z/h)^2] dz/h$

¹⁾ Члены с z^3 не входят в эти выражения для σ_x и σ_y , поскольку они погашаются тождественными членами противоположного знака, содержащимися в $\partial u_0/\partial x$ и $\partial v_0/\partial y$.

и интегрируя в пределах $z = \pm h/2$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_x, \\ \varphi_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{12}{5} \frac{1+\nu}{Eh} Q_y. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Таким образом, восемь неизвестных величин, а именно M_x , M_y , M_{xy} , Q_x , Q_y , w , φ_x и φ_y , связаны между собой двумя уравнениями (j), тремя уравнениями (i) и, наконец, тремя уравнениями равновесия (c) и (d).

Чтобы преобразовать эту систему уравнений к более удобному для исследования виду, исключим величины φ_x и φ_y из уравнений (j) и (i). Приняв во внимание уравнение (c), получим

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}, \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{5} \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{qh^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu}, \\ M_{xy} &= (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Подстановка этих выражений в уравнения (d) приводит, если учесть уравнение (c), к результату:

$$\left. \begin{aligned} Q_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q_x &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ Q_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q_y &= -D \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

где, как и раньше, обозначение Δ имеет смысл (105). В частном случае $h=0$, т. е. в случае бесконечно тонкой пластинки только что полученная система пяти уравнений, выражений (k) и (l) соответствует уравнениям (101) и (102) для моментов и уравнений (108) для перерезывающих сил обычной теории тонкой пластинки.

Чтобы получить более полное дифференциальное уравнение изгиба пластинки, нам останется лишь подставить выражения (l) в уравнения (c):

$$D\Delta\Delta w = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q. \quad (169)$$

Мы можем удовлетворить этому уравнению, если представим «средний прогиб» w в (x, y) в виде суммы

$$w = w' + w'', \quad (m)$$

где w' — частное решение уравнения

$$D\Delta\Delta w' = q - \frac{h^2}{10} \frac{2-\nu}{1-\nu} \Delta q, \quad (n)$$

а w'' — общее решение уравнения

$$\Delta \Delta w'' = 0. \quad (o)$$

Пользуясь, таким образом, уравнением (169), мы получаем возможность, как и в обычной теории пластинок, удовлетворить всем четырем граничным условиям. Но мы можем получить и дополнительное дифференциальное уравнение, вводя в рассмотрение перерезывающие силы Q_x и Q_y . Действительно, уравнение равновесия (с) удовлетворяется, если мы выразим эти силы в форме, подсказанной видом уравнений (1), т. е.

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ Q_y &= -D \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

или

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= Q'_x - D \frac{\partial (\Delta w'')}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ Q_y &= Q'_y - D \frac{\partial (\Delta w'')}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

В этих выражениях ψ обозначает некоторую новую функцию напряжений, силы же Q'_x и Q'_y должны удовлетворять зависимостям

$$\left. \begin{aligned} Q'_x - \frac{h^2}{10} \Delta Q'_x &= -D \frac{\partial (\Delta w')}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ Q'_y - \frac{h^2}{10} \Delta Q'_y &= -D \frac{\partial (\Delta w')}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)} \frac{\partial q}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

как мы можем заключить из уравнений (1) и (п). Дифференцируя эти уравнения соответственно по x и y и суммируя результаты, приходим к условию равновесия

$$\frac{\partial Q'_x}{\partial x} + \frac{\partial Q'_y}{\partial y} + q = 0. \quad (s)$$

Чтобы сформулировать дифференциальное уравнение для функции напряжений ψ , подставляем выражения (q) в уравнения (1) и находим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\psi - \frac{h^2}{10} \Delta \psi \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi - \frac{h^2}{10} \Delta \psi \right) = 0, \quad (t)$$

откуда заключаем, что выражения в скобках суть постоянные величины. Приравнявая их нулю, получаем зависимость

$$\Delta \psi - \frac{10}{h^2} \psi = 0, \quad (170)$$

представляющую собой при сохранении прежней предпосылки, что $h \neq 0$ — второе фундаментальное уравнение обобщенной теории изгиба, в дополнение к уравнению (169).

Установив таким образом два дифференциальных уравнения, одно из которых четвертого, другое второго порядка, мы приобретаем возможность удовлетворить трем вместо двух граничным условиям для контура пластинки. Имея в виду общий случай элемента цилиндрической боковой поверхности пластинки, заданного направлениями нормали n и касательной t (рис. 54), мы можем фиксировать положение элемента, например, уравнениями

$$\omega = \bar{\omega}, \quad \varphi_n = \bar{\varphi}_n, \quad \varphi_t = \bar{\varphi}_t. \quad (u)$$

Здесь $\bar{\omega}$ — данный средний прогиб, а $\bar{\varphi}_n$ и $\bar{\varphi}_t$ — данные средние углы поворота элемента относительно осей t и n . В частном случае защемленного края эти условия принимают вид

$$\omega = 0, \quad \varphi_n = 0, \quad \varphi_t = 0.$$

Вместо перемещений можно задать на границе некоторые значения результирующих \bar{Q}_n , \bar{M}_n , \bar{M}_{nt} , тогда соответствующие граничные условия будут

$$Q_n = \bar{Q}_n, \quad M_n = \bar{M}_n, \quad M_{nt} = \bar{M}_{nt}. \quad (v)$$

Для свободных краев эти условия принимают вид $Q_n = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$, а для свободно опертого края $\omega = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$. В последнем случае исчезают сосредоточенные реакции в вершинах пластинки, которые там действуют согласно обычной теории, что находится в очевидном противоречии с пренебрежением деформацией сдвига, которое постулируется этой теорией.

Для иллюстрации применения этой уточненной теории рассмотрим пластинку, имеющую форму полубесконечного прямоугольника, ограниченного двумя параллельными краями $y = 0$, $y = a$ и краем $x = 0$. Положим, что пластинка не несет никакой нагрузки, что прогибы w и изгибающие моменты M_y отсутствуют по краям $y = 0$, $y = a$, по краю же $x = 0$ пластинка подвергается воздействию изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_x &= M_0 \sin \frac{n\pi y}{a}, \\ \bar{M}_{xy} &= H_0 \cos \frac{n\pi y}{a}, \\ \bar{Q}_x &= Q_0 \sin \frac{n\pi y}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (w)$$

где M_0 , H_0 , Q_0 — постоянные, а n — целое число. Тогда, учитывая, что $q = 0$, из уравнения (п) получаем $w' = 0$, а из уравнения (м): $w = w''$. Мы

можем удовлетворить уравнению (о) и условию отсутствия прогибов на $x = \infty$, положив

$$w = w'' = \sin \frac{n\pi y}{a} \left(A + \frac{n\pi x}{a} B \right) \frac{e^{-n\pi x/a}}{D},$$

где A и B постоянные. Приняв, далее, для ψ решение в виде

$$\psi = X \cos \frac{n\pi y}{a},$$

где X — функция одного лишь x , и подставив его в уравнение (170), находим

$$\psi = C e^{-x\beta} \cos \frac{n\pi y}{a}.$$

В этом последнем выражении

$$\beta = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{10}{h^2}},$$

а C — постоянная величина. Из уравнений (г) имеем $Q'_x = Q'_y = 0$. Уравнения же (q) дают

$$Q_x = - \left[2B \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 e^{-n\pi x/a} + C \frac{n\pi}{a} e^{-x\beta} \right] \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$Q_y = \left[2B \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 e^{-n\pi x/a} + C\beta e^{-x\beta} \right] \cos \frac{n\pi y}{a}.$$

Наконец уравнения (к) приводят к следующим выражениям для моментов, действующих по краям $x = 0$:

$$(M_x)_{x=0} = \left[-A(1-\nu) + 2B \left(1 + \frac{n^2\pi^2 h^2}{5a^2} \right) + C \frac{\beta a h^2}{5n\pi} \right] \frac{n^2\pi^2}{a^2} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$(M_{xy})_{x=0} = \left[-A(1-\nu) + B \left(1 - \nu + \frac{2}{5} \frac{n^2\pi^2 h^2}{a^2} \right) + C \left(\frac{a^2}{n^2\pi^2} + \frac{h^2}{5} \right) \right] \frac{n^2\pi^2}{a^2} \cos \frac{n\pi y}{a}.$$

Приравнявая эти выражения, а одновременно и выражение для перерезывающей силы

$$(Q_x)_{x=0} = - \left[2B \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 + C \frac{n\pi}{a} \right] \sin \frac{n\pi y}{a},$$

соответственно выражениям (w), получаем систему трех уравнений, достаточных для вычисления неизвестных постоянных A , B и C . Таким образом, уточненная теория пластинки позволяет удовлетворить всем трем условиям по краю $x = 0$.

Обращаясь теперь к краю $y = 0$, видим, что w обращается здесь в нуль точно так же, как и M_y , в чем можно убедиться подстановкой выражения для Q_y во второе из уравнений (к).

Другая теория пластинки, учитывающая поперечную деформацию сдвига, была выдвинута А. Кроммом¹⁾. Эта теория пренебрегает поперечным уко-

¹⁾ Kromm A., Ingr.-Arch., т. 21, стр. 266, 1953; Z. angew. Math. Mech., т. 35, стр. 231, 1955.

рочением ε_z , но зато не налагает ограничений на закон распределения напряжений изгиба по толщине пластинки требованием линейности. Применяя эту теорию к случаю равномерно нагруженной свободно опертой квадратной пластинки $a/h = 20$, Кромм нашел распределение действующих по краю перерезывающих сил в виде кривой, представленной на рис. 81. Для сравнения штриховой линией здесь показаны также и соответствующая кривая

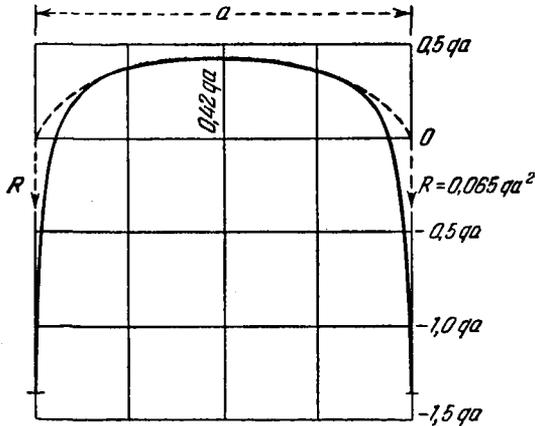


Рис. 81.

по обычной теории (рис. 63) и силы R . Мы видим, что коль скоро мы принимаем в расчет деформацию поперечного сдвига, появление сосредоточенных реакций в вершинах пластинки исключается. Соответствующие отрицательные силы распределяются вместо этого по малому участку контура, примыкающему к вершине, и дают в самой вершине давление конечной величины, направленное вниз. Моменты M_{xy} по всем четырем краям пластинки обращаются в этом решении в нуль.

С еще одним подходом к теории деформации сдвига можно познакомиться по статье Генки¹⁾.

40. Прямоугольная пластинка переменной толщины²⁾. При выводе дифференциального уравнения равновесия пластинки переменной толщины мы полагаем, что эта толщина изменяется всюду постепенно, без резких скачков, так что выражения для изгибающих и крутящего моментов, выведенные для пластинки постоянной толщины, остаются применимыми с достаточной точностью также и в этом случае. Тогда

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

¹⁾ Генски Н., Ingr.-Arch., т. 16, стр. 72, 1947.

²⁾ Эта задача была рассмотрена Гран Ольссоном (Gran Olsson R., Ingenieur-Archiv, т. 5, стр. 363, 1934); см. также Reissner E., J. Math. Phys., т. 16, стр. 43, 1937.

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение равновесия элемента [уравнение (100), стр. 98]

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (b)$$

и учтя, что жесткость пластинки при изгибе D является уже не постоянной величиной, но функцией координат x и y , получим

$$D \Delta \Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + \Delta D \Delta w - (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q, \quad (171)$$

где, как и прежде, мы пользуемся обозначением

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В качестве частного примера применения уравнения (149) рассмотрим случай, когда жесткость пластинки при изгибе D есть линейная функция от y , выраженная в виде

$$D = D_0 + D_1 y, \quad (c)$$

где D_0 и D_1 постоянные.

В таком случае уравнение (171) принимает вид

$$(D_0 + D_1 y) \Delta \Delta w + 2D_1 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w = q$$

или

$$\Delta [(D_0 + D_1 y) \Delta w] = q. \quad (172)$$

Рассмотрим случай, когда интенсивность нагрузки q пропорциональна жесткости при изгибе D . Пусть прогиб пластинки (рис. 82) имеет вид

$$w = w_1 + w_2,$$

где w_1 равен прогибу вырезанной из пластинки полоски, параллельной оси x и нагруженной сплошной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью

$$q = q_0 \left(1 + \frac{D_1}{D_0} y \right). \quad (d)$$

Этот прогиб, как и раньше, можно представить тригонометрическим рядом

$$w_1 = \frac{4q_0 \left(1 + \frac{D_1}{D_0} y \right) a^4}{(D_0 + D_1 y) \pi^5} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D_0} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (e)$$

С помощью подстановки легко показать, что это выражение для w_1 удовлетворяет уравнению (172). Оно удовлетворяет также граничным условиям $w = 0$ и $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ на опертых краях $x = 0$ и $x = a$.

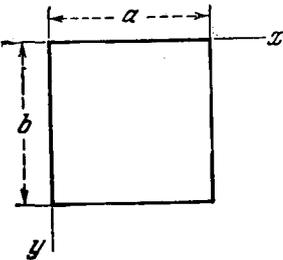


Рис. 82.

С другой стороны, прогиб w_2 должен удовлетворять однородному уравнению

$$\Delta [(D_0 + D_1 y) \Delta w] = 0. \quad (f)$$

Напишем его в виде ряда

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (g)$$

Подставив этот ряд в уравнение (f), найдем, что функции Y_m удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) [(D_0 + D_1 y) (Y_m'' - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m)] = 0. \quad (h)$$

Применив обозначения

$$f_m = (D_0 + D_1 y) \left(Y_m'' - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m \right), \quad \frac{m\pi}{a} = \alpha_m, \quad (i)$$

из уравнения (h) найдем

$$f_m = A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}.$$

Далее, уравнение (i) нам дает

$$Y_m'' - \alpha_m^2 Y_m = \frac{A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}}{D_0 + D_1 y}. \quad (j)$$

Общее решение этого уравнения

$$Y_m = C_m e^{\alpha_m y} + D_m e^{-\alpha_m y} + g_m, \quad (k)$$

где g_m — частный интеграл уравнения (j). Для нахождения этого частного интеграла пользуемся принадлежащим Лагранжу методом вариации параметров, иными словами, допустим, что g_m имеет вид

$$g_m = E_m e^{\alpha_m y} + F_m e^{-\alpha_m y}, \quad (l)$$

где E_m и F_m — функции y . Остается определить эти функции из следующих уравнений¹⁾:

$$E_m' e^{\alpha_m y} + F_m' e^{-\alpha_m y} = 0,$$

$$E_m' e^{\alpha_m y} - F_m' e^{-\alpha_m y} = \frac{A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}}{\alpha_m (D_0 + D_1 y)},$$

откуда

$$E_m' = \frac{A_m + B_m e^{-2\alpha_m y}}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)},$$

$$F_m' = -\frac{A_m e^{2\alpha_m y} + B_m}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}.$$

¹⁾ E_m' и F_m' в этих уравнениях — производные по y от E_m и F_m .

Интегрируя эти уравнения, находим

$$E_m = \int \frac{A_m + B_m e^{-2\alpha_m y}}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)} dy = \frac{A_m}{2\alpha_m D_1} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) + \\ + \frac{B_m}{2\alpha_m D_1} e^{-\frac{2\alpha_m D_0}{D_1}} \int \frac{e^{-\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1}} d[2\alpha_m (D_0 + D_1 y)]}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)},$$

$$F_m = - \int \frac{A_m e^{2\alpha_m y} + B_m}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)} dy = - \frac{B_m}{2\alpha_m D_1} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - \\ - \frac{A_m}{2\alpha_m D_1} e^{-\frac{2\alpha_m D_0}{D_1}} \int \frac{e^{-\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1}} d[2\alpha_m (D_0 + D_1 y)]}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}.$$

Подставив эти выражения в уравнения (l) и (к), введя обозначения ¹⁾

$$E_i(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^u}{u} du, \quad E_i(-u) = \int_{\infty}^u \frac{e^{-u}}{u} du,$$

представим функции Y_m в следующем виде:

$$Y_m = A'_m \left\{ \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - e^{-\frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y)} E_i \left[\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1} \right] \right\} e^{\alpha_m y} - \\ - B'_m \left\{ e^{-\frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y)} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - E_i \left[\frac{-2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1} \right] \right\} e^{\alpha_m y} + \\ + C_m e^{\alpha_m y} + D_m e^{-\alpha_m y}. \quad (m)$$

Четыре постоянные интегрирования A'_m, B'_m, C_m, D_m определяются из граничных условий на сторонах $y=0$ и $y=b$. В случае свободно опертых краев они будут

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0, \\ (w)_{y=b} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0.$$

Численные результаты для свободно опертой квадратной пластинки, полученные путем суммирования лишь первых двух членов ряда (g), показаны на рис. 83²⁾. Прогобы и моменты M_x и M_y по линии $x=a/2$ для пластинки переменной толщины нанесены здесь сплошными линиями, штриховыми же линиями показаны те же величины, вычисленные для пластинки с постоян-

¹⁾ Интеграл $E_i(u)$ —так называемый *интеграл-логарифм*—представляет собой табулированную функцию. См., например, Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959, или Tables of sine, cosine and exponential integrals, Nat. Bureau of standards, Нью-Йорк, 1940.

²⁾ Эти результаты заимствованы из работы Гран Ольссона, цит. на стр. 199.

ной жесткостью при изгибе $D = \frac{1}{2}(D_0 + D_1b)$. При вычислении в основу расчета было положено, что $D_1b = 7D_0$ и $\nu = 0,16$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда толщина пластинки является линейной функцией одной лишь координаты y , интенсивность же нагрузки также

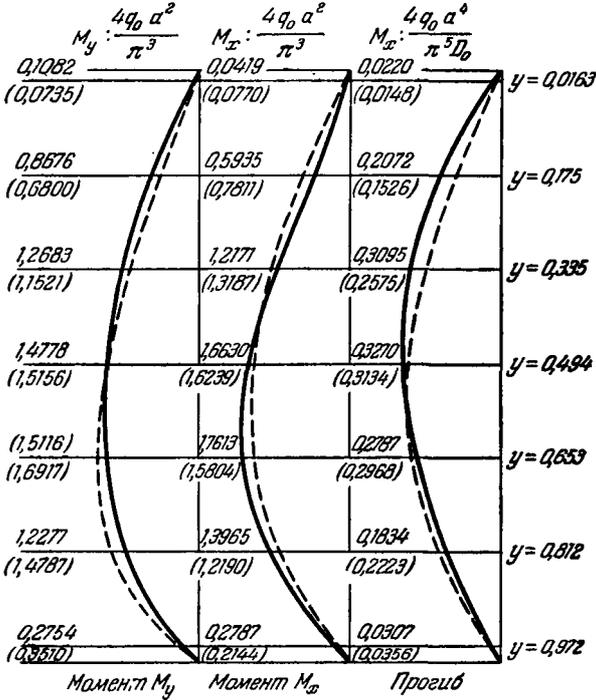


Рис. 83.

задана, как некоторая функция y (рис. 82). Обозначая толщину пластинки по линии $y = b/2$ через h_0 , а соответствующую жесткость изгиба через

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (\text{п})$$

получаем для произвольной точки пластинки

$$D = D_0 \frac{h^3}{h_0^3} \quad \text{и} \quad h = \left[1 + \lambda \left(\frac{2y}{6} - 1 \right) \right] h_0, \quad (\text{о})$$

где λ некоторая постоянная. Отсюда находим $h = (1 - \lambda) h_0$ при $y = 0$ и $h = (1 + \lambda) h_0$ при $y = b$.

Нижеследующий метод ¹⁾, вводящий величину λ в качестве параметра, подтверждает свою особую эффективность в решении поставленной задачи.

¹⁾ См. Favre H., Gilg B., Z. angew. Math. Phys., т. 3, стр. 354, 1952.

Рассматривая прогиб как функцию переменных x, y, λ , представим $w(x, y, \lambda)$ рядом

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \lambda^m, \tag{p}$$

в котором m — целое число, коэффициенты же w_m — функции лишь x и y . Подставляя выражения (o) и (p) в уравнение (171) и приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях λ , получим последовательность дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta w_0 &= \frac{q}{D_0}, \\ \Delta \Delta w_1 &= -3 \left[\frac{4}{b} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta w_0 \right], \\ \Delta \Delta w_2 &= -3 \left[\frac{4}{b} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_1 + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \Delta \Delta w_1 \right] - \\ &\quad - 3 \left\{ \frac{8}{b^2} \left[\Delta w_0 - (1 - \nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{b} \left(\frac{2y}{b} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \Delta w_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1 \right)^2 \Delta \Delta w_0 \right\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{q}$$

Положим, что края $x = 0, x = a$ свободно оперты, и ограничим задачу случаем гидростатической нагрузки

$$q = \frac{q_0 y}{b}. \tag{r}$$

Следуя М. Леви, примем решение уравнений (q) в виде

$$w_0 = \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} Y_{0n} \sin \frac{n\pi x}{a}, \tag{s}$$

$$w_1 = \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} Y_{1n} \sin \frac{n\pi x}{a}, \tag{t}$$

$$w_m = \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} Y_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a}, \tag{u}$$

где коэффициенты Y_{mn} ($m = 0, 1, 2, \dots$) — функции y . Наконец, нагрузку (r) мы можем представить также аналогичным рядом

$$q = \frac{4q_0 y}{\pi b} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a}. \tag{v}$$

Подстановка выражений (s) и (v) в первое из уравнений (q) позволит нам найти функции Y_{0n} при граничных условиях $Y_{0n} = 0, Y''_{0n} = 0$ для $y = 0$ и $y = b$, если эти края свободно оперты. Подстановка выражений (s) и (t) во

второе уравнение системы (q) дает функцию Y_{1n} . Аналогично каждая из функций w_m находится подстановкой w_0, w_1, \dots, w_{m-1} в дифференциальное уравнение системы (q), содержащее w_m в левой части. Процедура остается по существу одинаковой и в том случае, если края $y=0, b$ не свободно оперты, а защемлены или свободны.

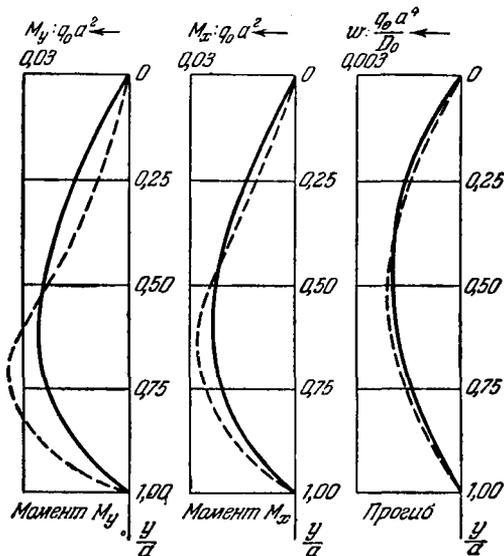


Рис. 84.

Приводим на рис. 84 численные результаты, полученные Н. Фавром и В. Гильгом для прогибов и изгибающих моментов по оси симметрии $x = a/2$ свободно опертой пластинки, для которой $\lambda = 0,2$, $\nu = 0,25$ в случае гидростатического давления (τ). Сплошными линиями здесь нанесены результаты вычисления трех членов ряда (p), штриховыми линиями — результаты первого приближения.

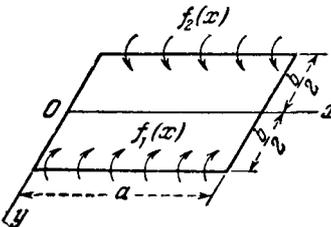
ГЛАВА VI

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПИРАНИЯ ПО КРАЯМ

41. Изгиб прямоугольной пластинки моментами, распределенными по краям. Рассмотрим прямоугольную пластинку, опертую по краям и изогнутую моментами, распределенными по краям $\pm b/2$ (рис. 85). Прогибы w должны удовлетворять однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0, \quad (a)$$

причем должны соблюдаться следующие граничные условия:



$$\left. \begin{aligned} w &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ для } x = 0 \text{ и } x = a, \quad (b)$$

$$w = 0 \quad \text{для } y = \pm b/2, \quad (c)$$

$$\left. \begin{aligned} -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y = -\frac{b}{2}} &= f_1(x), \\ -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y = -\frac{b}{2}} &= f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Рис. 85.

где f_1 и f_2 представляют собой законы распределения изгибающих моментов по краям $y = \pm b/2$.

Положим, что решение уравнения (a) имеет вид ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (e)$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям (b). Относительно функций Y_m мы предположим, как и раньше, что они

имеют вид

$$Y_m = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}, \quad (f)$$

удовлетворяющий уравнению (а).

Чтобы упростить исследования, начнем с двух частных случаев:

1) симметричный случай, когда $(M_y)_{y=\frac{b}{2}} = (M_y)_{y=-\frac{b}{2}}$;

2) антисимметричный случай, когда $(M_y)_{y=\frac{b}{2}} = -(M_y)_{y=-\frac{b}{2}}$.

Общий случай осуществляется комбинированием этих двух частных случаев.

В случае симметрии Y_m должна быть четной функцией от y , и тогда в выражении (f) необходимо положить $A_m = D_m = 0$. После этого из уравнения (e) получаем

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (g)$$

Для выполнения граничного условия (с) мы должны потребовать, чтобы

$$B_m \operatorname{ch} \alpha_m + C_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0,$$

где по-прежнему

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}.$$

Отсюда

$$B_m = -C_m \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m,$$

и прогиб в симметричном случае будет

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (h)$$

Для определения постоянных C_m исходим из граничных условий (d). Представив распределение изгибающих моментов по краям $y = \pm b/2$ тригонометрическим рядом, будем иметь в случае симметрии

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (i)$$

где коэффициент E_m вычисляется обычным путем для каждого частного случая. Например, в случае равномерного распределения

208 ПРЯМОУГ. ПЛАСТИНКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПИРАНИЯ [гл. VI
 изгибающих моментов будем иметь (см. стр. 184)

$$(M_y)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{4M_0}{\pi} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (j)$$

Подставив выражения (h) и (i) в условия (d), получим

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} C_m \operatorname{ch} \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a},$$

откуда

$$C_m = -\frac{a^2 E_m}{2D m^2 \pi^2 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

и

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (173)$$

В частном случае равномерного распределения моментов интенсивностью M_0 получаем из выражения (j)

$$w = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Прогиб на оси симметрии ($y=0$) равен

$$(w)_{y=0} = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (k)$$

Если сторона a весьма велика в сравнении с b , мы можем положить $\operatorname{th} \alpha_m \approx \alpha_m$ и $\operatorname{ch} \alpha_m \approx 1$.

Пользуясь тогда рядом (j), получим

$$(w)_{y=0} = \frac{M_0 b^2}{2\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{8} \frac{M_0 b^2}{D}.$$

Это — прогиб в середине полоски длиной b , изогнутой двумя равными противоположно направленными парами, приложенными на концах.

Если a мало в сравнении с b , то $\operatorname{ch} \alpha_m$ будет большим числом, и прогиб пластинки по оси x получится весьма малым.

Прогиб в центре пластинки для произвольного отношения между длинами сторон прямоугольника получается из выражения (k)

$$(w)_{y=0, x=\frac{a}{2}} = \frac{M_0 a b}{\pi^2 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m^2} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m}.$$

Исходя из выражения (173) для прогибов, можно, путем дифференцирования, получить наклон изогнутой поверхности на контуре, а взяв от w вторые производные, вычислить изгибающие моменты.

Ряд значений прогибов и изгибающих моментов, вычисленных этим способом, приводится в таблице 28. Мы видим из нее, например, что прогиб весьма узкой полоски шириной a приблизительно в $3^{1/2}$ раза больше, чем прогиб квадратной пластинки с такой же стороной a . В то время как поперечное сечение в середине той же полоски воспринимает полностью момент M_0 , приложенный по ее концам, изгибающий момент M_y в центре пластинки по мере возрастания отношения b/a быстро уменьшается в сравнении с M_0 . Это следует приписать компенсирующему влиянию краев $x=0$ и $x=a$, не подвергающихся действию пар.

Таблица 28

Прогибы и изгибающие моменты в центре прямоугольной свободно опертой пластинки, нагруженной парами, равномерно распределенными по краям $\pm b/2$ (рис. 85) ($\nu = 0,3$)

b/a	w	M_x	M_y
0	$0,1250 M_0 b^2/D$	$0,300 M_0$	$1,000 M_0$
0,50	$0,0964 M_0 b^2/D$	$0,387 M_0$	$0,770 M_0$
0,75	$0,0620 M_0 b^2/D$	$0,424 M_0$	$0,476 M_0$
1,00	$0,368 M_0 a^2/D$	$0,394 M_0$	$0,256 M_0$
1,50	$0,280 M_0 a^2/D$	$0,264 M_0$	$0,046 M_0$
2,00	$0,0174 M_0 a^2/D$	$0,153 M_0$	$-0,010 M_0$

Рассмотрим теперь антисимметричный случай, когда

$$f_1(x) = -f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

В этом случае изогнутая поверхность будет нечетной функцией y , и в выражении (f) мы должны положить $B_m = C_m = 0$. Тогда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Из граничных условий (с) следует, что

$$A_m \operatorname{sh} \alpha_m + D_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m = 0,$$

откуда

$$D_m = -\frac{1}{\alpha_m} \operatorname{th} \alpha_m A_m$$

и

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{\alpha_m} \operatorname{th} \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Постоянные A_m определяются из условий (d)

$$\frac{2\pi^2 D}{\alpha^2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{m^2}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a};$$

откуда

$$A_m = \frac{a^2}{2\pi^2 D} E_m \frac{\alpha_m}{m^2 \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}$$

и

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{m^2 \operatorname{sh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (174)$$

Решения (173) и (174) для симметричного и антисимметричного случаев позволяют нам получить поверхность прогибов также и для общего случая, представляемого граничными условиями (d). С этой целью разобьем данное нам распределение моментов на два составляющих — симметричное M'_y и антисимметричное M''_y :

$$(M'_y)_{y=\frac{b}{2}} = (M'_y)_{y=-\frac{b}{2}} = \frac{1}{2} [f_1(x) + f_2(x)],$$

$$(M''_y)_{y=\frac{b}{2}} = -(M''_y)_{y=-\frac{b}{2}} = \frac{1}{2} [f_1(x) - f_2(x)].$$

Эти моменты по-прежнему можно представить тригонометрическими рядами

$$\left. \begin{aligned} (M'_y)_{y=\frac{b}{2}} &= \sum_{m=1}^{\infty} E'_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \\ (M''_y)_{y=\frac{b}{2}} &= \sum_{m=1}^{\infty} E''_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и полный прогиб получится из выражений (173) и (174) в результате наложения прогибов, вызванных каждым из обоих вышеуказан-

ных распределенных моментов (1) в отдельности. Поэтому здесь

$$\omega = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{E'_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \right. \\ \left. + \frac{E''_m}{\operatorname{sh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right]. \quad (175)$$

Если изгибающие моменты $M_y = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{l}$ распределены по одному лишь краю $y = b/2$, мы будем иметь $f_2(x) = 0$, $E'_m = E''_m = = \frac{1}{2} E_m$, и прогиб в этом случае получится равным

$$\omega = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right]. \quad (176)$$

Решения (173) — (176) настоящего параграфа найдут применение в исследовании пластинки при различных условиях опирания по краям.

Моменты M_0 , распределенные только по одному краю, например $y = b/2$, повлекли бы за собой возникновение прогибов и изгибающих моментов вдвое меньшей величины в сравнении с приведенными в таблице 28. Совместное воздействие пар по всему контуру пластинки потребовало бы при вычислении прогибов и моментов прибегнуть к наложению результатов, полученных выше для различных видов частичного загрузения¹⁾.

42. Прямоугольная пластинка, два противоположных края которой свободно оперты, два других защемлены. Положим, что края $x = 0$ и $x = a$ прямоугольной пластинки, изображенной на рис. 86, свободно оперты, а два других защемлены. Прогиб пластинки под любой поперечной нагрузкой можно получить, решая сначала задачу в том предположении, что все ее края свободно оперты, а затем прилагая по краям $y = \pm b/2$ изгибающие моменты такой величины, чтобы устранить повороты, производимые на этих краях действием поперечной нагрузки. Комбинируя таким способом решения главы V с решениями предыдущего параграфа, можно решать и многие иные задачи.

¹⁾ Изгиб парами, приложенными по краям, обсуждался также Баем (B a u H., Ingr.-Arch., т. 8, стр. 4, 1937), и Вегнером (W e g n e r U., Z angew. Math. Mech., т. 36, стр. 340, 1956).

Равномерно нагруженная пластинка¹⁾. В предположении, что края пластинки свободно оперты, прогиб [см. уравнение (139), стр. 136] получается равным

$$\omega = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right), \quad (a)$$

наклон же изогнутой поверхности по краю $y = b/2$:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y = \frac{b}{2}} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi x}{a} [\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)]. \quad (b)$$

Чтобы устранить этот наклон и удовлетворить таким путем заданным граничным условиям по краю, распределим по краям $y = \pm b/2$ изгибающие моменты M_y , определяемые рядом

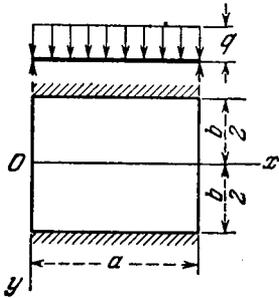


Рис. 86.

$$(M_y)_{y = \pm \frac{b}{2}} = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (c)$$

и припишем коэффициентам E_m такие значения, чтобы произведенный этими моментами наклон был равен по величине наклону, заданному выражением (b), но имел противоположный по отношению к нему знак. Пользуясь выражением (173)²⁾ для прогиба, вызванного моментами, найдем, что соответствующий наклон на краю $y = b/2$ равен

$$\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m} E_m [\operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1) - \alpha_m]. \quad (d)$$

Приравняв эту величину, взятую с обратным знаком, выражению (b) найдем

$$E_m = \frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)}. \quad (e)$$

¹⁾ Обширный материал численных данных, относящихся к равномерно нагруженным прямоугольным пластинкам при свободном опирании или защемлении по краям, в различных сочетаниях, можно найти в работе Черни (Czerny F., Bautech-Arch., т. 11, стр. 33, Берлин, 1955).

²⁾ Из симметрии поверхности прогибов под равномерно распределенной нагрузкой следует, что m в выражении (173) может принимать лишь нечетные значения 1, 3, 5, ...

Отсюда изгибающие моменты по защемленным краям равны

$$(M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)}. \quad (f)$$

Максимум абсолютной величины этого момента имеет место в серединах сторон, где $x = a/2$. Ряд (f) быстро сходится, и максимальный момент легко может быть вычислен в каждом частном случае. Например, для максимального момента квадратной пластинки первые три члена ряда (f) дают $M_{\max} = -0,070qa^2$. В общем случае этот момент может быть представлен формулой $M_y = \gamma qa^2$, где γ — численный коэффициент, величина которого зависит от отношения a/b сторон пластинки. Ряд значений этого коэффициента приведен в таблице 29.

Подставляя значения (e) коэффициентов E_m в выражение (173), получим поверхность прогибов, отвечающую распределенным по краям моментам M_y :

$$\begin{aligned} w_1 = & -\frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^5 \operatorname{ch} \alpha_m} \times \\ & \times \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (g) \end{aligned}$$

Прогиб в центре получается после подстановки $x = a/2$, $y = 0$ в выражение (g):

$$(w_1)_{\max} = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)}.$$

Это весьма быстро сходящийся ряд, и потому прогиб определяется с высокой степенью точности, даже и небольшим числом его членов. Для квадратной пластинки, например, уже один первый член дает прогиб, верный до трех значащих цифр, а именно при $\nu = 0,3$:

$$w_1 = 0,00214 \frac{qa^2}{D}.$$

Вычитая этот прогиб из прогиба, произведенного в центре равномерно распределенной нагрузкой (табл. 8, стр. 143), мы получим наконец и искомый прогиб для равномерно нагруженной квадратной

214 ПРЯМОУГ. ПЛАСТИНКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПИРАНИЯ [гл. VI
 пластинки, два края которой свободно оперты, а два других защемлены:

$$w = 0,00192 \frac{qa^4}{D}.$$

В общем случае прогиб в центре можно представить формулой

$$w = a \frac{qa^4}{D}.$$

Ряд значений численного коэффициента α дан в таблице 29.

Таблица 29

Постоянные α , β , β_1 , β_2 для прямоугольной пластинки,
 у которой два края свободно оперты, а два других защемлены
 (рис. 86) ($\nu = 0,3$)

$b < a$				
$\frac{a}{b}$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $w_{\max} = \alpha \frac{qb^4}{D}$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_x = \beta_1 qb^2$	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ $M_y = \beta_2 qb^2$	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ $M_y = \gamma qb^2$
	α	β_1	β_2	γ
∞	0,00260	0,0125	0,0417	-0,0833
2	0,00260	0,0142	0,0420	-0,0842
1,5	0,00247	0,0179	0,0406	-0,0822
1,4	0,00240	0,0192	0,0399	-0,0810
1,3	0,00234	0,0203	0,0388	-0,0794
1,2	0,00223	0,0215	0,0375	-0,0771
1,1	0,00209	0,0230	0,0355	-0,0739
$b > a$				
$\frac{b}{a}$	$w_{\max} = \alpha \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$M_y = \beta_2 qa^2$	$M_y = \gamma qa^2$
1	0,00192	0,0244	0,0332	-0,0697
1,1	0,00251	0,0307	0,0371	-0,0787
1,2	0,00319	0,0376	0,0400	-0,0868
1,3	0,00388	0,0446	0,0426	-0,0938
1,4	0,00460	0,0514	0,0448	-0,0998
1,5	0,00531	0,0585	0,0460	-0,1049
1,6	0,00603	0,0650	0,0469	-0,1090
1,7	0,00668	0,0712	0,0475	-0,1122
1,8	0,00732	0,0768	0,0477	-0,1152
1,9	0,00790	0,0821	0,0476	-0,1174
2,0	0,00844	0,0869	0,0474	-0,1191
3,0	0,01168	0,1144	0,0419	-0,1246
∞	0,01302	0,1250	0,0375	-0,1250

Подставляя выражение (г) для прогибов в известные формулы (101) для изгибающих моментов, получим

$$M_x = -\frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \times \\ \times \left\{ (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - [2\nu + (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right\}, \quad (\text{h})$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \times \\ \times \left\{ (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + [2 - (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right\}. \quad (\text{i})$$

В центре пластинки эти моменты принимают следующие значения:

$$M_x = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \times \\ \times [2\nu + (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m], \\ M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \times \\ \times [2 - (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m].$$

Эти ряды быстро сходятся, так что достаточно точное значение моментов определяется уже всего лишь двумя членами этих рядов. Налагая эти моменты на моменты свободно опертой пластинки (табл. 8), получим окончательные общие формулы для моментов в центре пластинки:

$$M_x = \beta_1 qa^2, \quad M_y = \beta_2 qa^2, \quad (\text{j})$$

где β_1 и β_2 — численные коэффициенты, величины которых зависят от отношения b/a . Ряд значений этих коэффициентов приведен в таблице 29.

Взяв случай квадратной пластинки, мы найдем, что в центре ее моменты будут иметь следующие значения:

$$M_x = 0,0244qa^2 \quad \text{и} \quad M_y = 0,0332qa^2.$$

Они будут меньше моментов $M_x = M_y = 0,0479qa^2$ в центре свободно опертой квадратной пластинки. С другой стороны, моменты M_y

в серединах защемленных краев превышают, как мы видели, величину $0,0479qa^2$. Таким образом, защемление двух краев пластинки приводит к увеличению в ней максимальных напряжений. Если защемленными сторонами в прямоугольной пластинке являются более длинные стороны ($b < a$), то изгибающие моменты в серединах этих сторон, а также прогибы в центре пластинки с уменьшением отношения b/a быстро приближаются к соответствующим значениям для защемленной по концам полоски.

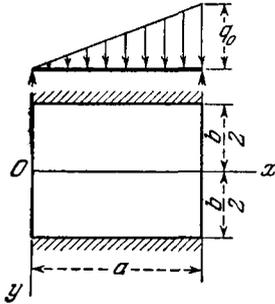


Рис. 87.

Пластинка под гидростатическим давлением (рис. 87). Поверхность прогибов свободно опертой прямоугольной пластинки, подвергнутой, как показано на

рис. 66 (§. 31), действию гидростатического давления, выражается уравнением

$$\omega = \frac{q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^5} \left(2 - \frac{2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (к)$$

Наклон этой поверхности по краю $y = b/2$ равен

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y=b/2} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} [\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (л)$$

Этот наклон можно устранить, распределив данные рядом (с) моменты M_y по краям $y = \pm b/2$ и подобрав коэффициенты E_m этого ряда таким образом, чтобы наклон от этих моментов был равен по величине и противоположен по знаку наклону, данному выражением (к). При этом мы получим

$$E_m = \frac{2q_0 a^2 (-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \cdot \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)}.$$

Подставив это значение в ряд (с), найдем выражение для изгибающих моментов на защемленных краях

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{2q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \sin \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \cdot \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)}. \quad (м)$$

В середине защемленных сторон, где $x = a/2$, члены ряда (м) с четным m исчезают, и сумма ряда, как это и должно быть, становится

равной половине соответствующей суммы для равномерно нагруженной пластинки [см. уравнение (f)]. Ряд быстро сходится, и значение изгибающего момента легко может быть получено для любой точки края. Ряд значений этого момента вместе со значениями изгибающих моментов по средней линии $y=0$ приводится в таблице 30.

Т а б л и ц а 30

Изгибающие моменты в прямоугольной пластинке с двумя свободно опертыми и двумя защемленными краями, нагруженной по гидростатическому закону (рис. 87) ($\nu=0,3$)

b/a	$x=a/2, y=0$		$\lambda=3a/4, y=0$		$x=a/2, y=b/2$	$x=3a/4, y=b/2$
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_y	M_y
0,50	0,007 $q_0 b^2$	0,021 $q_0 b^2$	0,018 $q_0 b^2$	0,029 $q_0 b^2$	-0,042 $q_0 b^2$	-0,062 $q_0 b^2$
0,75	0,011 $q_0 b^2$	0,020 $q_0 b^2$	0,018 $q_0 b^2$	0,021 $q_0 b^2$	-0,040 $q_0 b^2$	-0,045 $q_0 b^2$
1,00	0,013 $q_0 a^2$	0,017 $q_0 a^2$	0,017 $q_0 a^2$	0,015 $q_0 a^2$	-0,035 $q_0 a^2$	-0,035 $q_0 a^2$
1,25	0,021 $q_0 a^2$	0,021 $q_0 a^2$	0,024 $q_0 a^2$	0,019 $q_0 a^2$	-0,045 $q_0 a^2$	-0,043 $q_0 a^2$
1,50	0,030 $q_0 a^2$	0,023 $q_0 a^2$	0,031 $q_0 a^2$	0,020 $q_0 a^2$	-0,051 $q_0 a^2$	-0,048 $q_0 a^2$
2	0,043 $q_0 a^2$	0,024 $q_0 a^2$	0,042 $q_0 a^2$	0,020 $q_0 a^2$	-0,060 $q_0 a^2$	-0,053 $q_0 a^2$
∞	0,063 $q_0 a^2$	0,019 $q_0 a^2$	0,055 $q_0 a^2$	0,017 $q_0 a^2$	-0,063 $q_0 a^2$	-0,055 $q_0 a^2$

Действие на пластинку сосредоточенной силы¹⁾. Прогиб пластинки в этом случае получается точно так же путем наложения на прогиб свободно опертой пластинки (§ 34) прогиба, произведенного моментами, распределенными по защемленным краям. Для центрально нагруженной пластинки и при условии защемления краев $y = \pm b/2$ получим следующее выражение для прогиба под нагрузкой:

$$w_{\max} = \frac{Pb^2}{2\pi^3 D} \left[\frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) - \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\operatorname{th}^2 \alpha_m}{\operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \alpha_m} \right]. \quad (\text{п})$$

Первая сумма в скобках соответствует прогибу свободно опертой пластинки [см. уравнение (147), стр. 167], вторая же представляет собой прогиб, обусловленный действием моментов на защемленных краях. Для отношений $b/a = 2, 1, 1/2$ и $1/3$ значения входящего в уравнение (п) выражения в скобках равны соответственно 0,238; 0,436; 0,448 и 0,449.

¹⁾ См. Timoshenko S., Bauingenier, стр. 51, 1922.

Чтобы получить максимальное напряжение под нагрузкой, нам остается теперь на напряжения, вычисленные для свободно опертой пластинки, наложить напряжения от моментов

$$\left. \begin{aligned} M &= -P \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{b}{4a} \frac{\operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \alpha} [2\nu(1-\nu)\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m], \\ M_y &= -P \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{b}{4a} \frac{\operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m + \alpha_m} [2 - (1-\nu)\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m]. \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

Записав сокращенно значения этих поправочных моментов формулами

$$m_x = \beta_0 P, \quad m_y = \beta_2 P, \quad (p)$$

приводим таблицу 31 ряда значений коэффициентов β_1 и β_2 для заданных отношений b/a . Если центральная нагрузка P распределена на площади малого круга или прямоугольника, то моменты (p) следует присоединить к изгибающим моментам свободно опертой пластинки, представленным логарифмическими формулами (157) и соответственно (167). Момент M_y на серединах защемленных краев квадратной пластинки равен

$$M_y = -0,166P.$$

Вычисления показывают, что с увеличением длины защемленных краев этот момент изменяется весьма слабо. При $b/a = 0,5$ он достигает величины $-0,168P$, падая до $-0,155P$ при $b/a = 1,2$ ¹⁾.

Таблица 31

Поправочные изгибающие моменты на $x = a/2, y = 0$, обусловленные защемлением на $y = \pm b/2$, при центральном нагружении пластинки силой P (рис. 71) ($\nu = 0,3$)

b/a	$m_x = \beta_1 P$	$m_y = \beta_2 P$	b/a	$m_x = \beta_1 P$	$m_y = \beta_2 P$
	β_1	β_2		β_1	β_2
0	-0,0484	-0,0742	1,0	-0,0505	-0,0308
0,5	-0,0504	-0,0708	1,2	-0,0420	-0,0166
0,6	-0,0524	-0,0656	1,4	-0,0319	-0,0075
0,7	-0,0540	-0,0580	1,6	-0,0227	-0,0026
0,8	-0,0544	-0,0480	1,8	-0,0155	-0,0002
0,9	-0,0532	-0,0396	2,0	-0,0101	+0,0007

Следует заметить, что момент защемления наибольшей абсолютной величины, а именно $-P/\pi = -0,3183P$, возникает не при центральном

¹⁾ Дальнейшие данные о пластинке с двумя защемленными противоположными краями см. у Пухера (Pucher A., *Ingr.-Arch.*, т. 14, стр. 246, 1943—1944).

загружении пластинки, а под нагрузкой, сосредоточенной близ заземленного края (см. § 51). При действии на пластинку нескольких подвижных нагрузок достоверное определение максимального значения заземляющего момента осуществляется с помощью поверхности влияния (см. § 76).

43. Прямоугольная пластинка, три края которой свободно оперты и один заземлен. Рассмотрим прямоугольную пластинку, заземленную по краю $y = b/2$ и свободно опертую по остальным краям (рис. 88). Прогиб пластинки под произвольной поперечной нагрузкой может быть получен комбинированием решения для пластинки, у которой все стороны свободно оперты, с решением (176) для случая, когда по одному из краев распределены изгибающие моменты.

Равномерно нагруженная пластинка. Наклон по краю $y = b/2$, вызванный равномерно распределенной нагрузкой, равен

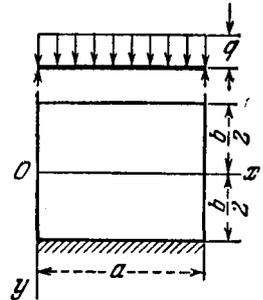


Рис. 88.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times [\alpha_m - \text{th } \alpha_m (1 + \alpha_m \text{th } \alpha_m)]. \quad (\text{a})$$

Моменты $M_y = \sum E_m \sin(m\pi x/a)$, распределенные по краю $y = b/2$, производят наклон¹⁾ [см. уравнение (176)]

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{a}{4\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times E_m (\alpha_m \text{th}^2 \alpha_m - \text{th } \alpha_m + \alpha_m \text{cth}^2 \alpha_m - \text{cth } \alpha_m - 2\alpha_m). \quad (\text{b})$$

Из условия защемления следует, что оба эти наклона равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому

$$E_m = - \frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \text{th } \alpha_m (1 + \alpha_m \text{th } \alpha_m)}{\alpha_m \text{th}^2 \alpha_m - \text{th } \alpha_m + \alpha_m \text{cth}^2 \alpha_m - \text{cth } \alpha_m - 2\alpha_m}, \quad (\text{c})$$

и выражение для изгибающих моментов по стороне $y = b/2$ принимает вид

$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{8qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times \frac{\alpha_m - \text{th } \alpha_m (1 + \alpha_m \text{th } \alpha_m)}{\alpha_m - \text{th } \alpha_m (\alpha_m \text{th } \alpha_m - 1) + \alpha_m - \text{cth } \alpha_m (\alpha_m \text{cth } \alpha_m - 1)}. \quad (\text{d})$$

¹⁾ В этом, т. е. симметричном, случае m может принимать одни лишь нечетные значения.

Например, для квадратной пластинки величина изгибающего момента в середине защемленного края определится через выражения (d) таким образом:

$$(M_y)_{y=\frac{b}{2}, x=\frac{a}{2}} = -0,084 qa^2.$$

По абсолютной величине этот момент больше значения $-0,070 qa^2$, найденного в предыдущем параграфе для квадратной пластинки, у которой два края защемлены. В таблице 32 приводится ряд значений момента в середине защемленной стороны при различных значениях отношения сторон a/b .

Таблица 32

Прогибы и изгибающие моменты прямоугольной пластинки, один край которой защемлен, три другие свободно оперты (рис. 88) ($\nu = 0,3$)

b/a	$(w)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=b/2}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=0}$
∞	$0,0130 qa^4/D$	$-0,125 qa^2$	$0,125 qa^2$	$0,037 qa^2$
2	$0,0093 qa^4/D$	$-0,122 qa^2$	$0,094 qa^2$	$0,047 qa^2$
1,5	$0,0064 qa^4/D$	$-0,112 qa^2$	$0,069 qa^2$	$0,048 qa^2$
1,4	$0,0058 qa^4/D$	$-0,109 qa^2$	$0,063 qa^2$	$0,047 qa^2$
1,3	$0,0050 qa^4/D$	$-0,104 qa^2$	$0,056 qa^2$	$0,045 qa^2$
1,2	$0,0043 qa^4/D$	$-0,098 qa^2$	$0,049 qa^2$	$0,044 qa^2$
1,1	$0,0035 qa^4/D$	$-0,092 qa^2$	$0,041 qa^2$	$0,042 qa^2$
1,0	$0,0028 qa^4/D$	$-0,084 qa^2$	$0,034 qa^2$	$0,039 qa^2$
1/1,0	$0,0032 qb^4/D$	$-0,092 qb^2$	$0,033 qb^2$	$0,043 qb^2$
1/1,2	$0,0035 qb^4/D$	$-0,098 qb^2$	$0,032 qb^2$	$0,047 qb^2$
1/1,3	$0,0038 qb^4/D$	$-0,103 qb^2$	$0,031 qb^2$	$0,050 qb^2$
1/1,4	$0,0040 qb^4/D$	$-0,108 qb^2$	$0,030 qb^2$	$0,052 qb^2$
1/1,5	$0,0042 qb^4/D$	$-0,111 qb^2$	$0,028 qb^2$	$0,054 qb^2$
0,5	$0,0049 qb^4/D$	$-0,122 qb^2$	$0,023 qb^2$	$0,060 qb^2$
0	$0,0052 qb^4/D$	$-0,125 qb^2$	$0,019 qb^2$	$0,062 qb^2$

Подставив значения (с) постоянных E_m в выражение (176), получим изогнутую поверхность, обусловленную моментами защемления, и прогиб в центре пластинки определится как

$$(w_1)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \frac{E_m \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m}. \quad (e)$$

Для квадратной пластинки два первых члена этого ряда дают

$$(w_1)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = 0,00127 \frac{qa^4}{D}.$$

Вычитая этот прогиб из прогиба свободно опертой квадратной пластинки (табл. 8), находим, что прогиб в центре равномерно нагруженной квадратной пластинки с одним защемленным краем равен

$$(w)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = 0,00279 \frac{qa^4}{D}.$$

Значения прогибов и изгибающих моментов, полученные подобным же образом для некоторых иных значений отношения a/b , приводятся в таблице 32.

Пластинка под гидростатическим давлением. Если пластинка подвергается, как показано на рис. 89, гидростатическому давлению, то наклон по краю $y = b/2$ в случае свободного опирания краев равен (см. стр. 147)

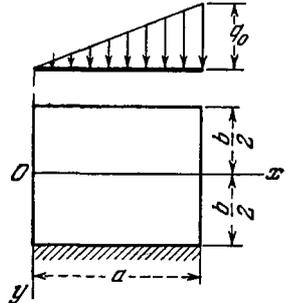


Рис. 89.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} \times \\ \times [\alpha_m - \text{th } \alpha_m (1 + \alpha_m \text{th } \alpha_m)] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (f)$$

Наклон, вызванный изгибающими моментами, распределенными по краю $y = b/2$:

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{a}{4\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times E_m (\alpha_m \text{th}^2 \alpha_m - \text{th } \alpha_m + \alpha_m \text{cth}^2 \alpha_m - \text{cth } \alpha_m - 2\alpha_m). \quad (g)$$

Из условия защемления по этому краю находим, приравнявая выражение (g) выражению (f), взятому с обратным знаком:

$$E_m = -\frac{4q_0 a^2}{\pi^3} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3} \frac{\alpha_m - \text{th } \alpha_m (1 + \alpha_m \text{th } \alpha_m)}{\alpha_m \text{th}^2 \alpha_m - \text{th } \alpha_m + \alpha_m \text{cth}^2 \alpha_m - \text{cth } \alpha_m - 2\alpha_m}.$$

Отсюда выражение для нагибающего момента M_y по краю $y = b/2$ будет

$$(M_y)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{4q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \times \\ \times \frac{\alpha_m - \text{th } \alpha_m (1 + \alpha_m \text{th } \alpha_m)}{2\alpha_m - \text{th } \alpha_m (\alpha_m \text{th } \alpha_m - 1) - \text{cth } \alpha_m (\alpha_m \text{cth } \alpha_m - 1)}. \quad (h)$$

Этот ряд быстро сходится, и мы при его помощи легко можем вычислить значение момента в любой точке защемленного края. Взяв, например, квадратную пластинку и положив $x = a/2$, получим для момента в середине защемленного края значение

$$(M_y)_{y=\frac{b}{2}, x=\frac{a}{2}} = -0,042q_0 a^2.$$

Таблица 33

Значения момента M_y по защемленному краю $y = b/2$ для прямоугольной пластинки, нагруженной гидростатическим давлением $q_0 x/a$ (рис. 89)

b/a	$x = a/4$	$x = a/2$	$x = 3/4a$
∞	$-0,039 q_0 a^2$	$-0,062 q_0 a^2$	$-0,055 q_0 a^2$
2	$-0,038 q_0 a^2$	$-0,061 q_0 a^2$	$-0,053 q_0 a^2$
3/2	$-0,034 q_0 a^2$	$-0,056 q_0 a^2$	$-0,050 q_0 a^2$
1	$-0,025 q_0 a^2$	$-0,042 q_0 a^2$	$-0,040 q_0 a^2$
2/3	$-0,030 q_0 b^2$	$-0,056 q_0 b^2$	$-0,060 q_0 b^2$
1/2	$-0,031 q_0 b^2$	$-0,061 q_0 b^2$	$-0,073 q_0 b^2$
0	$-0,031 q_0 b^2$	$-0,062 q_0 b^2$	$-0,094 q_0 b^2$

Как и должно быть, это составляет половину величины, приведенной в таблице 32 для равномерно нагруженной квадратной пластинки.

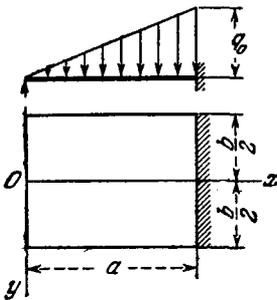


Рис. 90.

Значения момента $(M_y)_{y=b/2}$ для ряда точек защемленного края при различных значениях отношения b/a приведены в таблице 33. Мы видим из нее, что с уменьшением отношения b/a значение M_y по защемленному краю быстро приближается к значению $-q_0 b^2 x/8a$ момента на защемленном конце полосы длиной b под равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q_0 x/a$.

Рассмотрим теперь пластинку, нагруженную гидростатическим давлением, в отличие, однако, от ранее приведенного варианта, защемленную по краю $x = a$ (рис. 90).

Используя метод М. Леви, представим поверхность прогибов ее уравнением

$$w = \frac{q_0 x}{384D} (16y^4 - 24b^2 y^2 + 5b^4) + \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} X_m \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad (i)$$

в котором

$$X_m = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} + B_m \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} + \\ + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b} + D_m \frac{m\pi x}{b} \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b}.$$

Выражение (i) удовлетворяет дифференциальному уравнению изогнутой пластинки и граничным условиям по краям $y = \pm b/2$. Развертывая

заключенное в скобки выражение уравнения (i) в ряд

$$\frac{1536b^4}{\pi_5} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \frac{1}{m^5} \cos \frac{m\pi y}{b},$$

находим коэффициенты A_m, B_m, \dots из условий, относящихся к двум другим краям, т. е.

$$(\varpi)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0 \quad (\varpi)_{x=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (j)$$

Подстановка коэффициентов в выражение (i) завершает решение. Прогибы и изгибающие моменты, вычисленные из последнего уравнения, приведены в таблице 34.

Таблица 34

Прогибы и изгибающие моменты для прямоугольной пластинки, защемленной по краю $x = a$ и несущей гидростатическую нагрузку (рис. 90) ($\nu = 0,3$)

b/a	$(w)_{x=a/2, y=0}$	$(M_x)_{x=a/2, y=0}$	$(M_y)_{x=a/2, y=0}$	$(M_x)_{x=a, y=0}$
∞	$0,0024 q_0 a^4 / D$	$0,029 q_0 a^2$	$0,009 q_0 a^2$	$-0,067 q_0 a^2$
2	$0,0023 q_0 a^4 / D$	$0,029 q_0 a^2$	$0,011 q_0 a^2$	$-0,063 q_0 a^2$
1,5	$0,0019 q_0 a^4 / D$	$0,026 q_0 a^2$	$0,013 q_0 a^2$	$-0,061 q_0 a^2$
1,0	$0,0013 q_0 a^4 / D$	$0,019 q_0 a^2$	$0,016 q_0 a^2$	$-0,048 q_0 a^2$
2/3	$0,0030 q_0 b^4 / D$	$0,028 q_0 b^2$	$0,034 q_0 b^2$	$-0,071 q_0 b^2$
0,5	$0,0045 q_0 b^4 / D$	$0,024 q_0 b^2$	$0,046 q_0 b^2$	$-0,084 q_0 b^2$
0	$0,0065 q_0 b^4 / D$	$0,019 q_0 b^2$	$0,062 q_0 b^2$	$-0,125 q_0 b^2$

44. Прямоугольная пластинка, защемленная по всему контуру¹⁾. При исследовании этой задачи будем пользоваться прежним методом. Отправным пунктом будет для нас решение задачи о свободно

¹⁾ Перечень математической литературы на эту тему см. в Encyclopédie der mathematischen Wissenschaften, т. 4, статья 25 (Tedone-Timpe), стр. 165 и 186. Новейшие библиографические сведения по этому же вопросу приводятся в работе Лява (Love A. E. H., Proc. London Math. Soc., т. 29, стр. 189). Первые численные результаты по расчету напряжений и прогибов в защемленных прямоугольных пластинках были получены Б. М. Кояловичем в его докторской диссертации, СПб., 1902. Дальнейшие успехи были достигнуты И. Г. Бубновым, составившим таблицы для прогибов и моментов в равномерно нагруженной прямоугольной пластинке с защемленными краями. См. Бубнов И. Г., Строительная механика корабля, т. 2, стр. 465, СПб., 1914. Ту же самую задачу разобрал в своей диссертации также и Генки (Heucke N., Der Spannungszustand in rechteckigen Platten, Мюнхен, 1913). Метод Генки был использован недавно Войташаком (Wojtaszak I. A., J. Appl. Mech., т. 4, стр. 173, 1937). Полученные таким путем Войташаком численные результаты для равномерно нагруженной пластинки совпадают со значениями, приводимыми в таблице Бубнова. Дальнейшие исследования этого вида пла-

опертой прямоугольной пластинке, на прогибы которой мы наложим прогибы пластинки, подвергнутой действию распределенных по ее краям моментов (см. § 41). Эти моменты мы подберем таким образом, чтобы удовлетворить условию $\frac{d\omega}{dn} = 0$ на контуре защемленной пластинки. Подобный метод применим к любому типу поперечной нагрузки.

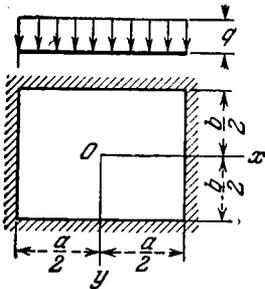


Рис. 91.

Равномерно распределенная нагрузка. Чтобы упростить изложение, начнем со случая равномерно распределенной нагрузки. Прогибы и моменты в этом случае будут симметричны относительно координатных осей, показанных на рис. 91. Прогиб свободно опертой пластинки, выраженный урав-

нением (139) (стр. 136), в новой системе координат получает вид

$$\omega = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right), \quad (a)$$

где $\alpha_m = m\pi b/2a$. Поворот плоскости пластинки, т. е. наклон у края $y = b/2$, равен

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dy} \right)_{y=b/2} &= \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} [\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)] = \\ &= \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} - \operatorname{th} \alpha_m \right). \quad (b) \end{aligned}$$

стинки при различных условиях загрузения содержатся в работах: Leitz H., Math. Phys., т. 64, стр. 262, 1917; Nadai A., Z. angew. Math. Mech., т. 2, стр. 14, 1922; Weinstein A., Rock D. H., Quart Appl. Math., т. 2, стр. 262, 1944; Funk P., Berger E., Federhofer-Girkmann-Festschrift, стр. 199, Вена 1950; Гринберг Г. А., Доклады АН СССР, т. 76, стр. 661, 1951; Girkmann K., Tungl E., Österr Bauztschr., т. 8, стр. 47, 1953. Экспериментальное исследование выполнено Лоусом (Laws B. C., Phil. Mag., т. 24, стр. 1072, 1937). В нашем дальнейшем изложении мы пользуемся методом, развитым С. П. Тимошенко в докладе на V Международном конгрессе по прикладной механике в Кембридже (США) (Proc. 5th. Inter Cong. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938). Этот метод отличается большей общностью по сравнению с ранее упомянутыми, и его можно применять к любому типу нагрузки, включая сюда и случай сосредоточенной силы.

Рассмотрим теперь изгиб пластинки моментами, распределенными по краям $y = \pm b/2$. По соображениям симметрии приходим к выводу, что эти моменты могут быть представлены следующим рядом:

$$(M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (c)$$

Соответствующий прогиб w_1 получим из выражения (173) при подстановке $x + a/2$ вместо x и полагая $m = 1, 3, 5, \dots$ Тогда

$$w_1 = -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (d)$$

Соответствующий этому прогибу наклон по краю $y = b/2$ равен

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\operatorname{th} \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right). \quad (e)$$

В нашем дальнейшем изложении нам потребуется также и наклон по краям, параллельным оси y . Образуя производную по x от выражения (d) и полагая $x = a/2$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)_{x=\frac{a}{2}} &= \frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m \frac{1}{m \operatorname{ch} \alpha_m} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) = \\ &= -\frac{1}{4D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \left(b \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - 2y \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (f) \end{aligned}$$

Выражение в скобках представляет собой четную функцию от y , обращаящуюся в нуль на краях $y = \pm b/2$. Эту функцию можно представить рядом

$$\sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} A_l \cos \frac{l\pi y}{b}, \quad (g)$$

коэффициенты которого A_l вычисляются по формуле

$$A_l = \frac{2}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(b \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - 2y \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{l\pi y}{b} dy,$$

из которой следует, что

$$A_i = \frac{16ia (-1)^{\frac{i-1}{2}}}{m^3 \pi^2} \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \operatorname{ch}^2 \alpha_m.$$

Подставляя это в выражения (g) и (f), получим

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = -\frac{4b^2}{\pi^2 D a} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{i (-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi y}{b}. \quad (h)$$

Подобным же образом можно получить выражения для прогибов w_2 и для наклона на краях также и для того случая, когда моменты M_x распределены по краям $x = \pm a/2$. Предполагая симметричное распределение и положив

$$(M_x)_{x=\pm \frac{a}{2}} = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} F_m \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad (i)$$

находим для этого случая по формулам (e) и (h)

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} F_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\operatorname{th} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m}\right), \quad (j)$$

где $\beta_m = m\pi a/2b$, и

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{4a^2}{\pi^2 D b} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{i (-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a}. \quad (k)$$

Если моменты (c) и (i) действуют совместно, то наклон на краях пластинки получится методом наложения. Взяв, например, край $y = b/2$, найдем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \\ &= -\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\operatorname{th} \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m}\right) - \\ &- \frac{4a^2}{\pi^2 D b} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{i (-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a}. \quad (l) \end{aligned}$$

Располагая выражениями (b) и (1), мы в силах теперь вывести уравнения для вычисления постоянных E_m и F_m из рядов (c) и (1), которыми и определяются моменты, приложенные по краям защемленной пластинки. В случае защемления пластинка по этим краям не испытывает поворотов. Поэтому для края $y = \pm b/2$ должно соблюдаться условие

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = 0. \quad (m)$$

Равным образом для краев $x = \pm a/2$:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}} = 0. \quad (n)$$

Если мы теперь подставим выражения (b) и (1) в уравнение (m) и сгруппируем¹⁾ вместе члены с $\cos(l\pi x/a)$, а затем заметим, что уравнение (m) сохраняет силу при любом значении x , то мы сможем установить, что коэффициент при $\cos(l\pi x/a)$ должен обращаться в нуль для любого значения l . Таким путем мы приходим к системе, состоящей из бесконечно большого числа линейных уравнений, позволяющей вычислить коэффициенты E_l и F_l :

$$\frac{4qa^2}{\pi^3} \frac{1}{i^4} \left(\frac{\alpha_l}{\operatorname{ch}^2 \alpha_l} - \operatorname{th} \alpha_l \right) - \frac{E_l}{i} \left(\operatorname{th} \alpha_l + \frac{\alpha_l}{\operatorname{ch}^2 \alpha_l} \right) - \frac{8ia}{\pi b} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{F_m}{m^3} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} = 0. \quad (o)$$

Аналогичная система уравнений получается также из уравнения (n). Постоянные $E_1, E_3, \dots, F_1, F_3, \dots$ определяются в каждом частном случае из этих двух систем уравнений методом последовательных приближений.

Для иллюстрации этого метода рассмотрим случай квадратной пластинки. Распределение изгибающих моментов в ней будет одинаковым по всем ее краям. Поэтому $E_l = F_l$ и обе вышеупомянутые системы уравнений станут тождественными, причем общий вид их будет

$$\begin{aligned} \frac{E_l}{i} \left(\operatorname{th} \alpha_l + \frac{\alpha_l}{\operatorname{ch}^2 \alpha_l} \right) + \frac{8l}{\pi} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{E_m}{m^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} = \\ = \frac{4qa^2}{\pi^3} \frac{1}{i^4} \left(\frac{\alpha_l}{\operatorname{ch}^2 \alpha_l} - \operatorname{th} \alpha_l \right). \end{aligned}$$

¹⁾ Предполагается, что порядок суммирования в выражении (l) можно изменять.

Подставляя в эти уравнения численные значения коэффициентов и ограничившись лишь четырьмя первыми из них, получаем следующую систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными E_1, E_3, E_5 и E_7 :

$$\left. \begin{aligned} 1,8033E_1 + 0,0764E_3 + 0,0188E_5 + 0,0071E_7 &= 0,6677K, \\ 0,0764E_1 + 0,4045E_3 + 0,0330E_5 + 0,0159E_7 &= 0,01232K, \\ 0,0188E_1 + 0,0330E_3 + 0,2255E_5 + 0,0163E_7 &= 0,00160K, \\ 0,0071E_1 + 0,0159E_3 + 0,0163E_5 + 0,1558E_7 &= 0,00042K, \end{aligned} \right\} (p)$$

где $K = -4qa^2/\pi^3$. Мы видим, что наибольшими коэффициентами сопровождаются те члены, которые расположены по диагонали. Пользуясь этим, находим первые приближения для постоянных E_1, \dots, E_7 , принимая в расчет в левых частях уравнений (p) лишь те члены, которые располагаются слева от жирной ступенчатой линии. Таким путем получаем из первого уравнения системы $E_1 = 0,3700K$. Подставив это значение во второе уравнение, получаем $E_3 = -0,0395K$. Подстановка значений E_1 и E_3 в третье уравнение дает $E_5 = -0,0180K$. Из последнего уравнения узнаем $E_7 = -0,0083K$. Подставляя эти первые приближения в члены, стоящие в уравнениях (p) справа от жирной линии, вычисляем вторые приближения, а именно: $E_1 = -0,3722K$, $E_3 = -0,380K$, $E_5 = -0,0178K$, $E_7 = -0,0085K$. Повторяя расчет еще раз, получим третье приближение и т. д.

Подстановка вычисленных значений коэффициентов E_1, E_3, \dots в ряд (c) дает нам изгибающие моменты по защемленным краям пластинки. Своего максимума абсолютные значения этих моментов достигают в серединах сторон квадрата. При четырех взятых в расчет уравнениях (p) это значение получится равным

$$|M_y|_{y=\frac{b}{2}, x=0} = |E_1 - E_3 + E_5 - E_7| = 0,0517qa^2.$$

Сравнение этого результата с данными таблицы И. Г. Бубнова, вычисленной на основе значительно большего числа уравнений, подобных уравнениям (p), показывает, что погрешность в определении максимального изгибающего момента с помощью одних лишь четырех уравнений (p) не достигает и 1%. Мы видим, что полученный нами здесь для выражения моментов ряд знакопеременный и величина погрешности в расчетах с ним зависит от величины последнего из вычисленных коэффициентов E_1, E_3, \dots

Подставив значения E_1, E_3, \dots в выражение (d), получим прогиб пластинки, нагруженной моментами, распределенными по краям $y = \pm b/2$. Для центра пластинки ($x = y = 0$) этот прогиб равен

$$(\omega_1)_{x=y=0} = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} E_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} = -0,00140 \frac{qa^4}{D}.$$

Удваивая этот результат, чтобы учесть влияние моментов, распределенных по краям $x = \pm a/2$, и складывая с прогибом свободно опертой прямоугольной пластинки (табл. 8), находим прогиб в центре равномерно нагруженной квадратной пластинки с защемленными краями

$$\begin{aligned} (w_{\max}) &= (0,00406 - 0,00280) \frac{qa^4}{D} = \\ &= 0,00126 \frac{qa^4}{D}. \end{aligned} \quad (q)$$

Аналогичные подсчеты можно воспроизвести и для любого иного отношения сторон прямоугольной пластинки. Результаты этих подсчетов приведены в таблице 35¹⁾.

Пластика под гидростатическим давлением. Положив, что интенсивность его (рис. 92) распределяется по закону

$$q_0 = \frac{q_0}{2} + \frac{q_0}{2} \frac{x}{a},$$

заметим, что влияние первого члена $q_0/2$ этого выражения на прогиб пластинки учитывается уже ранее полученным решением. Остается теперь учесть давление $q_0 x/2a$. Изогнутую поверхность свободно опертой пластинки, несущей такую нагрузку, нетрудно получить,

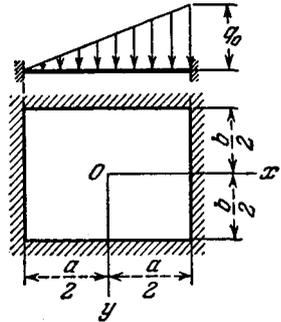


Рис. 92.

Таблица 35

Прогибы и изгибающие моменты равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, защемленной по контуру (рис. 91) ($\nu = 0,3$)

b/a	$(w)_{x=0, y=0}$	$(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=0}$	$(M_y)_{x=0, y=\frac{b}{2}}$	$(M_x)_{x=0, y=0}$	$(M_y)_{x=0, y=0}$
1,0	0,00126 qa^4/D	-0,0513 qa^2	-0,0513 qa^2	0,0231 qa^2	0,0231 qa^2
1,1	0,00150 qa^4/D	-0,0581 qa^2	-0,0538 qa^2	0,0264 qa^2	0,0231 qa^2
1,2	0,00172 qa^4/D	-0,0639 qa^2	-0,0554 qa^2	0,0299 qa^2	0,0228 qa^2
1,3	0,00191 qa^4/D	-0,0687 qa^2	-0,0563 qa^2	0,0327 qa^2	0,0222 qa^2
1,4	0,00207 qa^4/D	-0,0726 qa^2	-0,0568 qa^2	0,0349 qa^2	0,0212 qa^2
1,5	0,00220 qa^4/D	-0,0757 qa^2	-0,0570 qa^2	0,0368 qa^2	0,0203 qa^2
1,6	0,00230 qa^4/D	-0,0780 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0381 qa^2	0,0193 qa^2
1,7	0,00238 qa^4/D	-0,0799 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0392 qa^2	0,0182 qa^2
1,8	0,00245 qa^4/D	-0,0812 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0401 qa^2	0,0174 qa^2
1,9	0,00249 qa^4/D	-0,0822 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0407 qa^2	0,0165 qa^2
2,0	0,00254 qa^4/D	-0,0829 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0412 qa^2	0,0158 qa^2
∞	0,00260 qa^4/D	-0,0833 qa^2	-0,0571 qa^2	0,0417 qa^2	0,0125 qa^2

¹⁾ Эта таблица составлена Ивэнсом (Evans T. H., J. Appl. Mech., т. 6, стр. A-7, 1939).

сочетая выражения (k) со стр. 216 и (a) со стр. 212. Положив в последнем выражении $q = -q_0/2$ и заменив в обоих выражениях x на $x + a/2$ в связи с переходом к новой системе координат, находим изогнутую поверхность

$$w = \frac{2q_0a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=2, 4, 6, \dots} \frac{(-1)^{m/2+1}}{m^5} \left(2 - \frac{2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \alpha_m} + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (r)$$

симметричную относительно оси x и антисимметричную относительно оси y . Поэтому чтобы уничтожить наклон вдоль контура пластинки, нам нужно лишь приложить краевые моменты следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{x=\pm \frac{a}{2}} &= \pm \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ (M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} &= \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}-1} F_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

Поступая, как и в случае равномерно распределенной нагрузки, вычисляем коэффициенты E_m и F_m из системы линейных уравнений. В заключение необходимо сложить прогибы, возникающие в результате одновременного действия нагрузки $q_0 x/2a$ и моментов (s) с прогибами защемленной пластинки под равномерно распределенной нагрузкой $q_0/2$. Численные результаты этой процедуры приводятся в таблице 36¹⁾.

Таблица 36

Прогибы и изгибающие моменты в прямоугольной пластинке, защемленной по контуру под гидростатической нагрузкой (рис. 92) ($\nu = 0,3$)

$\frac{b}{a}$	$x=0, y=0$			$x=\frac{a}{2}, y=0$	$x=-\frac{a}{2}, y=0$	$x=0, y=\pm \frac{b}{2}$
	$w = \alpha \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x = \beta_1 q_0 a^2$	$M_y = \beta_2 q_0 a^2$	$M_x = \gamma_1 q_0 a^2$	$M_x = \gamma_2 q_0 a^2$	$M_y = \delta q_0 a^2$
	α	β_1	β_2	γ_1	γ_2	δ
0,5	0,000080	0,00198	0,00515	-0,0115	-0,0028	-0,0104
2/3	0,000217	0,00451	0,00817	-0,0187	-0,0066	-0,0168
1,0	0,00063	0,0115	0,0115	-0,0334	-0,0179	-0,0257
1,5	0,00110	0,0184	0,0102	-0,0462	-0,0295	-0,0285
∞	0,00130	0,0208	0,0063	-0,0500	-0,0333	

¹⁾ См. Dana Young, J. Appl. Mech., т. 7, стр. A-139, 1940. Более обширные таблицы методом конечных разностей были вычислены Одли (Odliey E. G., J. Appl. Mech., т. 14, стр. A-289, 1947).

Загружение пластинки в центре. В качестве третьего примера прямоугольной защемленной по контуру пластинки рассмотрим изгиб ее нагрузкой P , сосредоточенной в центре (рис. 93). Приступим к задаче и на этот раз, исходя из случая свободного опирания прямоугольной пластинки. Подставим в выражение (146) $a/2$ вместо ξ и $x + a/2$ вместо x , получим (при $y > 0$) изогнутую поверхность

$$\omega = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \cos \frac{m\pi x}{a} \left[\left(\text{th } \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\text{ch}^2 \alpha_m} \right) \text{ch } \frac{m\pi y}{a} - \text{sh } \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \text{th } \alpha_m \text{ sh } \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \right].$$

Угол поворота по краю $y = b/2$ равен

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{y = \frac{b}{2}} = -\frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \frac{\alpha_m \text{th } \alpha_m}{\text{ch } \alpha_m}. \quad (t)$$

Процедура вычисления изгибающих моментов по защемленным краям ничем не отличается от ранее разобранных случаев равномерного нагружения, причем мы и здесь получаем те же две системы уравнений (м) и (п). Прежними останутся и выражения для ω_1 и ω_2 , с той лишь разницей, что в этих уравнениях потребуются изменить первые члены, а именно в уравнении (м) вместо $(\partial \omega / \partial y)_{y = b/2}$ подставить выражение (t), а в уравнении (п) соответствующее выражение вместо $(\partial \omega / \partial x)_{x = a/2}$.

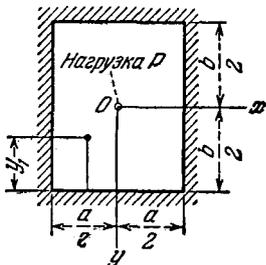


Рис. 93.

В частном случае квадратной пластинки, ограничившись четырьмя уравнениями, найдем, что левые части уравнений получаются такими же, как и в системе (р). Правые части найдутся из выражения (t):

$$\begin{aligned} 1,8033E_1 + 0,0764E_3 + 0,0188E_5 + 0,0071E_7 &= -0,1828P, \\ 0,0764E_1 + 0,4045E_3 + 0,0330E_5 + 0,0159E_7 &= +0,00299P, \\ 0,0188E_1 + 0,0330E_3 + 0,2255E_5 + 0,0163E_7 &= -0,000081P, \\ 0,0071E_1 + 0,0159E_3 + 0,0163E_5 + 0,1558E_7 &= +0,000005P. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, как и раньше, последовательными приближениями, находим

$$\begin{aligned} E_1 &= -0,1025P, & E_3 &= 0,0263P, \\ E_5 &= 0,0042P, & E_7 &= 0,0015P. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в выражение (с), получим изгибающий момент в середине стороны $y = b/2$. Более точное вычисление¹⁾ дает

$$(M_y)_{y = \frac{b}{2}, x=0} = -0,1257P.$$

Сравнивая этот результат с полученным ранее для равномерно нагруженной квадратной пластинки, мы констатируем, что равномерно распределенная нагрузка вызывает на серединах сторон моменты, не достигающие и половины тех значений, которые получаются, если та же самая нагрузка сосредоточена в центре.

Т а б л и ц а 37

Изгибающие моменты в серединах длинных сторон, прогибы и поправочные моменты в центре прямоугольной пластинки, нагруженной в центре (рис. 93) ($\nu = 0,3$)

$\frac{b}{a}$	$(w)_{x=y=0} = \alpha \frac{Pa^2}{D}$	$(M_y)_{x=0, y=\frac{b}{2}} = \gamma P$	Поправочные моменты	
			$(m_x)_{x=y=0} = \beta_1 P$	$(m_y)_{x=y=0} = \beta_2 P$
	α	γ	β_1	β_2
1,0	0,00560	-0,1257	-0,0536	-0,0536
1,2	0,00647	-0,1490	-0,0579	-0,0526
1,4	0,00691	-0,1604	-0,0618	-0,0517
1,6	0,00712	-0,1651	-0,0653	-0,0510
1,8	0,00720	-0,1667	-0,0683	-0,0504
2,0	0,00722	-0,1674	-0,0710	-0,0500
∞	0,00725	-0,168	-0,0742	-0,0484

Зная моменты по защемленным краям, мы можем из уравнения (d) вычислить и соответствующие им прогибы. Накладывая прогибы, вызванные этими моментами, на прогибы свободно опертой пластинки, получим прогибы пластинки, защемленной по краям. Тот же самый метод наложения доставит нам и все остальные сведения, касающиеся изгиба пластинок с защемленными краями под сосредоточенной в центре нагрузкой²⁾. Если же нагрузка P распределена равномерно по площади малого круга или прямоугольника, то изгибающие моменты

¹⁾ В этом вычислении вместо четырех было взято семь уравнений.

²⁾ Таблица составлена Дана Юнгом (Dana Young, J. Appl. Mech., т. 6, стр. А-114, 1939). Для получения значений моментов с четырьмя верными знаками в этих вычислениях потребовалось использовать семь коэффициентов E и семь коэффициентов F в уравнениях (m) и (n). Дальнейшие решения этой задачи были получены Маркусом (Marcus H., Die Theorie elastischer Gewebe, 2-е изд., стр. 155, Берлин, 1932; Barta J., Z. angew. Math. Mech., т. 17; стр. 184, 1937; Pickett G., J. Appl. Mech., т. 6, стр. 168, 1939; Thorne C. J., Atanasoff J. V., Iowa State Coll. J. Sci., т. 14, стр. 333, 1940). Экспериментальное исследование этого случая описывается в работе: Sturm R. G., Moore R. L., J. Appl. Mech., т. 4, стр. А-75, 1937.

в центре загруженной площади $x = y = 0$ вычисляются суммированием результатов, найденных для свободно опертой пластинки [уравнения (157) и (167)] с некоторыми поправочными дополнительными моментами

$$m_x = \beta_1 P, \quad m_y = \beta_2 P,$$

приводимыми в таблице 37, где наряду с ними указаны, сверх того, наибольшие прогибы и наибольшие абсолютные значения момента защемления. Этот последний может достигнуть величины $M = -P/\pi = -0,3183P$, как упомянуто на стр. 218, для подвижной нагрузки.

45. Прямоугольная пластинка, у которой один или два смежных края свободно оперты, остальные же защемлены. Начнем со случая пластинки, свободно опертой по краю $y = 0$ и защемленной по трем остальным краям (рис. 94). Независимо от того, как распределена

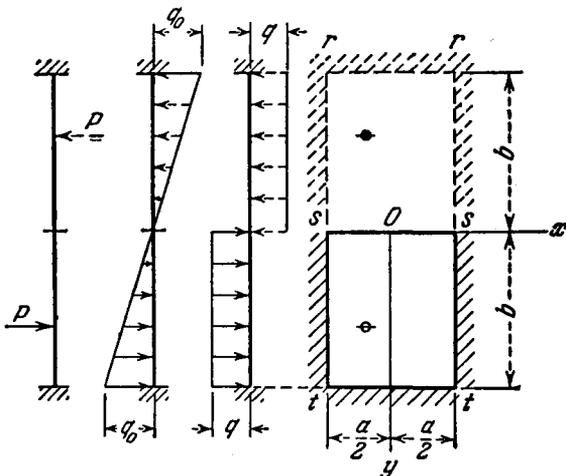


Рис. 94.

нагрузка по данной пластинке ss , последнюю допустимо рассматривать как половину пластинки rr , защемленной по всему контуру и несущей нагрузку, антисимметричную относительно оси ss . Поэтому как прогибы, так и изгибающие моменты по этой оси обращаются в нуль. Задача приводится к случаю, уже решенному нами в § 44. Некоторые численные результаты для двух вариантов распределения нагрузки читатель найдет в таблице 38¹⁾. Более подробную таблицу

¹⁾ Табличными данными мы обязаны Дана Юнгу (Dana Young, J. Appl. Mech., т. 7, стр. А-139, 1940, а также: Siess C. P., Newark N. M., Univ. Illinois Bull., т. 47, стр. 98, 1950). Я. С. Уфлянд применил совершенно иной подход к этой задаче; см. Доклады АН СССР, т. 72, стр. 655, 1950.

изгибающих моментов мы помещаем ниже (стр. 271) в связи с вопросом о проектировании балочных перекрытий.

Таблица 38

Прогибы и изгибающие моменты в прямоугольной пластинке, один край которой свободно оперт, а три защемлены (рис. 94)

Нагрузка	$\frac{b}{a}$	(w) $x=0, y=\frac{b}{2}$	(M_x) $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$	$(M_y)_{x=0, y=b}$
Равномерное давление q	0,5	$0,00449 qb^4/D$	$-0,0786 qb^2$	$-0,1148 qb^2$
	0,75	$0,00286 qb^4/D$	$-0,0730 qb^2$	$-0,0838 qb^2$
	1,0	$0,00157 qb^4/D$	$-0,0601 qb^2$	$-0,0551 qb^2$
	4/3	$0,00215 qa^4/D$	$-0,0750 qa^2$	$-0,0571 qa^2$
Гидростатическое давление $q_0 y/b$	2	$0,00257 qa^4/D$	$-0,0837 qa^2$	$-0,0571 qa^2$
	0,5	$0,00202 q_0 b^4/D$	$-0,0368 q_0 b^2$	$-0,0623 q_0 b^2$
	0,75	$0,00132 q_0 b^4/D$	$-0,0344 q_0 b^2$	$-0,0484 q_0 b^2$
	1,0	$0,00074 q_0 b^4/D$	$-0,0287 q_0 b^2$	$-0,0347 q_0 b^2$

Прямоугольную пластинку $rsut$ (рис. 95), у которой два смежных края $x=0, y=0$ свободно оперты, другие же два защемлены, точно так же можно рассматривать как составную часть пластинки, защемленной по всему контуру $x = \pm a, y = \pm b$.

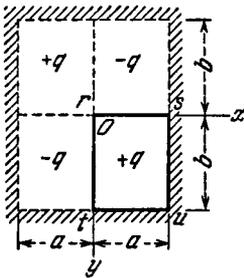


Рис. 95.

Пусть нагрузка распределена равномерно по площади $rsut$ данной пластинки¹⁾. Тогда указанное на рис. 95 шахматное распределение по площади $2a \times 2b$ определяет условия свободного опирания по $x=0, y=0$. Таким образом, задача об изгибе пластинки с двумя смежными свободно опертыми и двумя другими защемленными краями опять приводится к уже решенной в § 44 задаче о пластинке, защемленной по контуру. Вычисления показывают,

что наибольший по абсолютной величине момент возникает близ середины более длинной стороны пластинки. Значения этого момента защемления таковы: при $b/a = 0,5$ он равен $-0,1180 qb^2$, при $b/a = 1,0$ он падает до $-0,0694 qb^2$. Наибольший изгибающий момент близ центра квадратной пластинки равен $0,034 qa^2$ (для $\nu = 0,3$),

¹⁾ В видоизмененной форме метод Тимошенко был применен к этому случаю Сайссом (Siess) и Ньюмарком (Newmark) (цит. на стр. 233). О применении энергетического метода см. Stiles W. B., J. Appl. Mech., т. 14, стр. А-55, 1947; см. также Huang M. K., Conway H. D., J. Appl. Mech., т. 19, стр. 451, 1952.

а соответствующий ему прогиб $w = 0,0023 qa^4/D$. Другие численные значения изгибающих моментов для этого случая указываются на стр. 270.

46. Прямоугольная пластинка, два противоположных края которой свободно оперты, третий свободен, четвертый же зашпелен или свободно оперт¹⁾ (рис. 96). Положим, что края $x = 0$ и $x = a$ свободно оперты (рис. 96), край $y = b$ свободен, край $y = 0$ зашпелен. Граничные условия в этом случае будут

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{для } x = 0 \text{ и } x = a, \quad (a)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{для } y = 0, \quad (b)$$

а для свободного края [см. уравнения (112), (113), стр. 102]

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} &= 0, \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

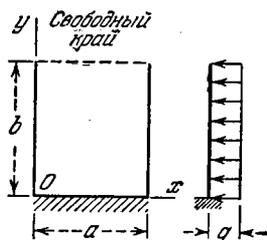


Рис. 96.

Рассмотрим частный случай равномерно распределенной нагрузки. Будем поступать в этом случае, как в § 30, и положим, что полный прогиб складывается из двух частей

$$w = w_1 + w_2,$$

где w_1 представляет собой прогиб равномерно нагруженной свободно опертой полоски длиной a , выражаемой рядом

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (d)$$

а w_2 может быть определен рядом

$$w_2 = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (e)$$

где

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (f)$$

¹⁾ Этот случай был исследован И. Г. Бубновым; см. английский перевод его труда в Trans. Inst. Naval Arch., т. 44, стр. 15, 1902, и его книгу «Строительная механика корабля», т. 2, стр. 545, СПб., 1914. Задачей занимались также Goriup K., Ingr.-Arch., т. 16, стр. 77, 1947, и Bogunovic V., On the bending of rectangular plate with one edge free, Белград, 1953.

Ряды (d) и (e) удовлетворяют граничным условиям (d), четыре же входящих в выражение (f) постоянных подбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия (b) и (c). Исходя из условий (b), получаем

$$A_m = \frac{4}{\pi^5 m^5}, \quad C_m = -D_m. \quad (g)$$

Из двух остальных условий находим

$$\left. \begin{aligned} B_m &= \frac{4}{\pi^5 m^5} \left[\frac{(3+\nu)(1+\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m + 2\nu \operatorname{ch} \beta_m}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m (1-\nu)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\nu(1-\nu) \beta_m \operatorname{sh} \beta_m - (1-\nu^2)}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m + (1-\nu)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2} \right], \\ C_m &= \frac{4}{\pi^5 m^5} \left[\frac{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \beta_m \operatorname{ch} \beta_m + \nu(1+\nu) \operatorname{sh} \beta_m}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m + (1-\nu)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\nu(1-\nu) \beta_m \operatorname{ch} \beta_m - (1-\nu)^2 \beta_m}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{ch}^2 \beta_m + (1-\nu)^2 \beta_m^2 + (1+\nu)^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

где $\beta_m = \frac{m\pi b}{a}$.

Выражение для изогнутой поверхности получим после подстановки постоянных (g) и (h) в уравнение (f) с использованием рядов (e) и (d). Максимальный прогиб будет иметь место в данном случае в середине неопертого края. Если длина b весьма велика сравнительно с a , т. е. если свободный край удален на значительное расстояние от заземленного края, то прогиб на свободном крае будет равен умноженному на постоянный множитель $(3-\nu)(1+\nu)/(3+\nu)$ прогибу свободно опертой полоски длиной a под равномерно распределенной нагрузкой. Благодаря наличию этого множителя максимальный прогиб получится в данном случае на 6,4% больше, чем для полоски, если для ν в обоих случаях принято одно и то же значение 0,3. Этот факт легко объясняется, если мы заметим, что изогнутая поверхность пластинки близ свободного края получается антиклатической.

Взяв другой крайний случай, когда сторона a весьма велика в сравнении с b , мы найдем, что для него максимальный прогиб, очевидно, такой же, как и для равномерно загруженной полоски длиной b , заземленной на одном конце и свободной на другом. Ряд значений максимального прогиба, вычисленных¹⁾ для различных значений отношения b/a , приведен в таблице 39. В той же таблице даны также максимальные значения изгибающих моментов, получаемые непосредственно из выражения для изогнутой поверхности. Вычисления показывают, что $(M_x)_{\max}$ имеют место в середине неопертого

¹⁾ Эта таблица составлена И. Г. Бубновым, цит. выше.

края. Абсолютное значение максимума момента M_y получается в середине защемленного края.

Т а б л и ц а 39

Прогибы и изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки, у которой два противоположных края свободно оперты, третий край свободен, четвертый же защемлен (рис. 96) ($\nu = 0,3$)

$\frac{b}{a}$	w_{\max}	$x = \frac{a}{2}, y = b$ M_x	$x = \frac{a}{2}, y = 0$ M_y
0	$0,125 qb^4/D$	0	$-0,500 qb^2$
1/3	$0,094 qb^4/D$	$0,0078 qa^2$	$-0,428 qb^2$
1/2	$0,0582 qb^4/D$	$0,0293 qa^2$	$-0,319 qb^2$
2/3	$0,0335 qb^4/D$	$0,0558 qa^2$	$-0,227 qb^2$
1	$0,0113 qb^4/D$	$0,0972 qa^2$	$-0,119 qb^2$
3/2	$0,0141 qa^4/D$	$0,123 qa^2$	$-0,124 qa^2$
2	$0,0150 qa^4/D$	$0,131 qa^2$	$-0,125 qa^2$
3	$0,0152 qa^4/D$	$0,133 qa^2$	$-0,125 qa^2$
∞	$0,0152 qa^4/D$	$0,133 qa^2$	$-0,125 qa^2$

Случай гидростатической нагрузки, распределенной по закону $q_0(1 - y/b)$, решается аналогично предыдущему. Пусть прогиб представлен рядом

$$w = \frac{4q_0(1 - y/b)a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (1)$$

где Y_m того же вида, что и (f), с той лишь разницей, что постоянная здесь q_0 вместо q . Поступая по-прежнему, из граничных условий (a), (b) и (c) находим четыре постоянные A_m, B_m, \dots, D_m .

Если пластинка изгибается нагрузкой, распределенной лишь по ее свободному краю, а не по всей поверхности, то второе из граничных условий (c) должно быть изменено, а именно: в правой части уравнения вместо нуля должна стоять интенсивность нагрузки, распределенной по свободному краю. Был исследован также и частный случай сосредоточенной силы, приложенной на свободном крае весьма длинной пластинки (рис. 97)¹⁾. При этом было найдено, что прогиб

¹⁾ См. MacGregor C. W., Mech. Engineering, т. 57, стр. 225, 1935, а также Holl D. L., J. Appl. Mech., т. 4, стр. 8, 1937; Jaramillo T. J., J. Appl. Mech., т. 17, стр. 67, 1950; Girkmann K., Flächen-tragwerke, 4-е изд., стр. 233, Вена, 1956. Случай консольной пластинки, свободной по трем краям и несущей равномерно распределенную нагрузку, рассматривается в работе Nash W. A., J. Appl. Mech., т. 19, стр. 33, 1952. См. также исследование такой пластинки: Koiter W. T., Alblas J. B., Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Амстердам, т. 60, стр. 173, 1957, где приводятся численные результаты.

238 ПРЯМОУГ. ПЛАСТИНКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОПИРАНИЯ [Гл. VI
на свободном крае может быть представлен формулой

$$(\omega)_{y=b} = \alpha \frac{Pb^2}{\pi D}.$$

Коэффициент α быстро уменьшается с увеличением расстояния от точки A приложения нагрузки. Несколько значений этого коэффициента приведено в таблице 40. Абсолютные максимумы момента защемления

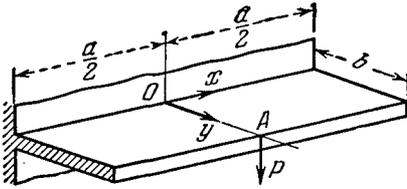


Рис. 97.

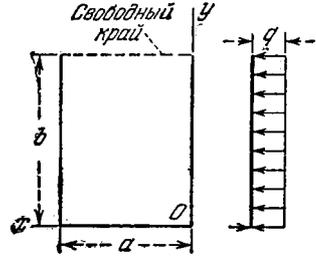


Рис. 98.

при загрузке середины свободного края пластинки конечной длины a указываются в таблице 41¹⁾.

Таблица 40

x	0	$b/4$	$b/2$	b	$2b$
α	0,168	0,150	0,121	0,068	0,016

Таблица 41

Изгибающие моменты $M = \beta P$ на $x=0, y=0$, при загрузке P на $x=0, y=b$ и свободном опирании по краям $x = \pm a/2$ (рис. 97) ($\nu = 0,3$)

$b/a =$	4	2	1,5	1	2/3	0,5	1/3	0,25	0
$\beta =$	-0,000039	-0,0117	-0,0455	-0,163	-0,366	-0,436	-0,498	-0,507	-0,509

Случай равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, свободно опертой по трем краям и свободной по краю $y=b$ (рис. 98), поддается тому же самому способу исследования, что и только что

¹⁾ Эта таблица составлена Богуновичем (V. Bogunovic) (цит. выше), см. также § 78.

разобранный случай, если край $y=0$ принять защемленным. Лишь второе из граничных условий (b) при этом необходимо заменить условием

$$\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{y=0} = 0.$$

Опуская выкладки, приводим здесь лишь полученные для этого случая окончательные численные результаты. Максимальный прогиб получается в середине свободного края. В этой же точке достигает своего максимального значения и изгибающий момент M_x . Эти значения прогибов w_{\max} и моментов $(M_x)_{\max}$ приводятся во втором и третьем столбцах таблицы 42¹⁾. Два последних столбца этой таблицы дают изгибающие моменты в центре пластинки.

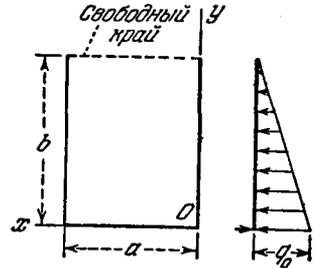


Рис. 99.

Таблица 42

Прогибы и изгибающие моменты в равномерно нагруженной прямоугольной пластинке, у которой три края свободно оперты, четвертый же свободен (рис. 98) ($\nu = 0,3$)

$\frac{b}{a}$	$x=a/2, y=b$		$x=a/2, y=b/2$	
	w_{\max}	$(M_x)_{\max}$	M_x	M_y
$\frac{1}{2}$	0,00710 qa^4/D	0,060 qa^2	0,039 qa^2	0,022 qa^2
$\frac{2}{3}$	0,00968 qa^4/D	0,083 qa^2	0,055 qa^2	0,030 qa^2
1/1,4	0,01023 qa^4/D	0,088 qa^2	0,059 qa^2	0,032 qa^2
1/1,3	0,01092 qa^4/D	0,094 qa^2	0,064 qa^2	0,034 qa^2
1/1,2	0,01158 qa^4/D	0,100 qa^2	0,069 qa^2	0,036 qa^2
1/1,1	0,01232 qa^4/D	0,107 qa^2	0,074 qa^2	0,037 qa^2
1	0,01286 qa^4/D	0,112 qa^2	0,080 qa^2	0,039 qa^2
1,1	0,01341 qa^4/D	0,117 qa^2	0,085 qa^2	0,040 qa^2
1,2	0,01384 qa^4/D	0,121 qa^2	0,090 qa^2	0,041 qa^2
1,3	0,01417 qa^4/D	0,124 qa^2	0,094 qa^2	0,042 qa^2
1,4	0,01442 qa^4/D	0,126 qa^2	0,098 qa^2	0,042 qa^2
1,5	0,01462 qa^4/D	0,128 qa^2	0,101 qa^2	0,042 qa^2
2	0,01507 qa^4/D	0,132 qa^2	0,113 qa^2	0,041 qa^2
3	0,01520 qa^4/D	0,133 qa^2	0,122 qa^2	0,039 qa^2
∞	0,01522 qa^4/D	0,133 qa^2	0,125 qa^2	0,037 qa^2

¹⁾ Эта таблица, а также таблица 43 составлены Б. Г. Галеркиным; см. Бюллетень Политехнического института, т. 26, стр. 124, СПб., 1915.

В таблице 43 указаны также прогибы и изгибающие моменты в середине свободного края и в центре пластинки при нагружении ее гидростатическим давлением.

Таблица 43

Прогибы и изгибающие моменты в нагруженной по гидростатическому закону прямоугольной пластинке, три края которой свободно оперты, четвертый свободен (рис. 99) ($\nu = 0,3$)

$\frac{b}{a}$	$x = a/2, y = b$		$x = a/2, y = b/2$		
	w	M_x	w	M_x	M_y
1/2	0,00230 $q_0 a^4 / D$	0,0197 $q_0 a^2$	0,00135 $q_0 a^4 / D$	0,0145 $q_0 a^2$	0,0120 $q_0 a^2$
2/3	0,00304 $q_0 a^4 / D$	0,0265 $q_0 a^2$	0,00207 $q_0 a^4 / D$	0,0220 $q_0 a^2$	0,0156 $q_0 a^2$
1	0,00368 $q_0 a^4 / D$	0,0325 $q_0 a^2$	0,00313 $q_0 a^4 / D$	0,0331 $q_0 a^2$	0,0214 $q_0 a^2$
1,5	0,00347 $q_0 a^4 / D$	0,0308 $q_0 a^2$	0,00445 $q_0 a^4 / D$	0,0453 $q_0 a^2$	0,0231 $q_0 a^2$
2,0	0,00291 $q_0 a^4 / D$	0,0258 $q_0 a^2$	0,00533 $q_0 a^4 / D$	0,0529 $q_0 a^2$	0,0222 $q_0 a^2$
∞	0	0	0,00651 $q_0 a^4 / D$	0,0625 $q_0 a^2$	0,0187 $q_0 a^2$

47. Прямоугольная пластинка, три края которой защемлены, четвертый свободен. Пластинки с такого рода граничными условиями представляют особый интерес, так как они входят составными частями в конструкции прямоугольных в плане резервуаров и подпорных стен.

В связи с этим в первую очередь здесь следует изучить их работу под равномерно распределенной и под гидростатической нагрузками.

Пусть защемление в данной нам пластинке осуществлено по краям $y = 0$ и $x = \pm a/2$, край $y = b$ оставлен свободным (рис. 100). Под равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q пластинка испытывает прогиб w , эквивалентный результату наложения трех прогибов:

$$w = w_1 + w_2 + w_3. \tag{a}$$

Первый из них

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \tag{b}$$

и второй

$$w_2 = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} Y_m (-1)^{(m-1)/2} \cos \frac{m\pi x}{a}, \tag{c}$$

если учесть новое положение начала координат, тождественны соответственно с выражениями (d) и (e) предыдущего параграфа.

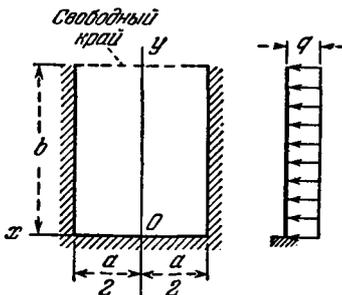


Рис. 100.

Третьему дополнительному компоненту ω_3 полного прогиба ω , обусловленному эффектом дополнительного защемления по краям $x = \pm a/2$, следует приписать вид ¹⁾

$$\omega_3 = \frac{qa^4}{D} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(F_n \gamma_n \operatorname{th} \gamma_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} - F_n \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b} \right) \sin \frac{n\pi y}{2b} +$$

$$+ \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(G_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + H_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + I_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (d)$$

где F_n, \dots — постоянные, а $\gamma_n = n\pi a/4b$.

Таблица 44

Прогибы, изгибающие моменты и опорные реакции равномерно нагруженной пластинки, три края которой защемлены, четвертый свободен (рис. 100) ($\nu = 1/6$)

b/a	x=0, y=b		x=0, y=b/2		
	$w = \alpha_1 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_2 qa^2$	$M_y = \beta'_2 qa^2$
	α_1	β_1	α_2	β_2	β'_2
0,6	0,00271	0,0336	0,00129	0,0168	0,0074
0,7	0,00292	0,0371	0,00159	0,0212	0,0097
0,8	0,00308	0,0401	0,00185	0,0252	0,0116
0,9	0,00323	0,0425	0,00209	0,0287	0,0129
1,0	0,00333	0,0444	0,00230	0,0317	0,0138
1,25	0,00345	0,0467	0,00269	0,0374	0,0142
1,5	0,00335	0,0454	0,00290	0,0402	0,0118

b/a	x=a/2, y=b		x=a/2, y=b/2		x=0, y=0	
	$M_x = \beta_3 qa^2$	$V_x = \gamma_3 qa$	$M_x = \beta_4 qa^2$	$V_x = \gamma_4 qa$	$M_y = \beta_5 qa^2$	$V_y = \gamma_5 qa$
	β_3	γ_3	β_4	γ_4	β_5	γ_5
0,6	-0,0745	0,750	-0,0365	0,297	-0,0554	0,416
0,7	-0,0782	0,717	-0,0439	0,346	-0,0545	0,413
0,8	-0,0812	0,685	-0,0505	0,385	-0,0535	0,410
0,9	-0,0836	0,656	-0,0563	0,414	-0,0523	0,406
1,0	-0,0853	0,628	-0,0614	0,435	-0,0510	0,401
1,25	-0,0867	0,570	-0,0708	0,475	-0,0470	0,388
1,5	-0,0842	0,527	-0,0755	0,491	-0,0418	0,373

¹⁾ В существенном этот метод был указан Гориуппом (Goriupp, Ingr.-Arch., стр. 153, 1948); см. также Van der Eb W. J., Ingenieur, т. 26, стр. 31, 1950.

Поскольку для $y=0$, $x = \pm a/2$ прогиб $w_3 = 0$, граничные условия, которым должны удовлетворять уравнения (d), принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} \right)_{y=b} &= 0, & \left[\frac{\partial^3 w_3}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} &= 0, \\ \left(\frac{\partial w_3}{\partial y} \right)_{y=0} &= 0, & \left[\frac{\partial (w_1 + w_2 + w_3)}{\partial x} \right]_{x = \pm a/2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Разложим теперь каждую из содержащихся в выражении (a) некруговых функций x в ряд вида $\sum a_m \cos(m\pi x/a)$ и все аналогичные

Таблица 45

Прогибы, изгибающие моменты и опорные реакции для нагруженной по гидростатическому закону прямоугольной пластинки, три края которой защемлены, четвертый свободен (рис. 101) ($\nu = 1/6$)

b/a	x=0, y=b		x=0, y=b/2		
	$w = \alpha_1 \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x = \beta_1 q_0 a^2$	$w = \alpha_2 \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x = \beta_2 q_0 a^2$	$M_y = \beta_2' q_0 a^2$
	α_1	β_1	α_2	β_2	β_2'
0,6	0,00069	0,0089	0,00044	0,0060	0,0062
0,7	0,00069	0,0093	0,00058	0,0080	0,0074
0,8	0,00068	0,0096	0,00072	0,0100	0,0083
0,9	0,00067	0,0096	0,00085	0,0118	0,0090
1,0	0,00065	0,0095	0,00097	0,0135	0,0094
1,25	0,00056	0,0085	0,00121	0,0169	0,0092
1,5	0,00042	0,0065	0,00138	0,0191	0,0075

b/a	x=a/2, y=b		x=a/2, y=b/2		x=0, y=0	
	$M_x = \beta_3 q_0 a^2$	$V_x = \gamma_3 q_0 a$	$M_x = \beta_4 q_0 a^2$	$V_x = \gamma_4 q_0 a$	$M_y = \beta_5 q_0 a^2$	$V_y = \gamma_5 q_0 a$
	β_3	γ_3	β_4	γ_4	β_5	γ_5
0,6	-0,0179	0,093	-0,0131	0,136	-0,0242	0,248
0,7	-0,0172	0,081	-0,0170	0,158	-0,0261	0,262
0,8	-0,0164	0,069	-0,0206	0,177	-0,0278	0,275
0,9	-0,0156	0,057	-0,0239	0,194	-0,0290	0,286
1,0	-0,0146	0,045	-0,0269	0,209	-0,0299	0,295
1,25	-0,0119	0,018	-0,0327	0,234	-0,0306	0,309
1,5	-0,0087	-0,006	-0,0364	0,245	-0,0291	0,311

функции u в ряд вида $\sum b_n \sin(n\pi y/2b)$. Тогда из условий (е) без труда выводится система линейных уравнений относительно F_n, G_n, \dots, I_m . Решая эти уравнения, мы получаем возможность выразить эти неизвестные постоянные через известные значения A_m, \dots, D_m (см. стр. 235).

При загрузении пластинки гидростатическим давлением по схеме рис. 101 решение (i) предыдущего параграфа следует наложить на решение вида (d) и поступать, как указано выше.

При любом типе загрузки¹⁾ эту задачу можно решить также и методом конечных разностей (см. § 83). Численные значения таблиц 44 и 45 получены в основном этим методом.

48. Прямоугольная пластинка, два противоположных края которой свободно оперты, два других свободны или упруго оперты (рис. 102).

Рассмотрим случай, когда края $x=0$ и $x=a$ свободно оперты, а два других края поддерживаются упругими балками. Если нагрузка распределена равномерно и балки совершенно одинаковы, то прогибы пластинки будут симметричны относительно оси x и нам достаточно будет принять во внимание лишь условия на крае $y=b/2$. Если, далее, предположить, что балки сопротивляются лишь изгибу в вертикальных плоскостях и не сопротивляются кручению, то граничные условия для края $y=b/2$ в соответствии с уравнением (114) примут вид

$$D \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b/2} &= 0, \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b/2} &= \\ &= \left(EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{y=b/2}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$



Рис. 102.

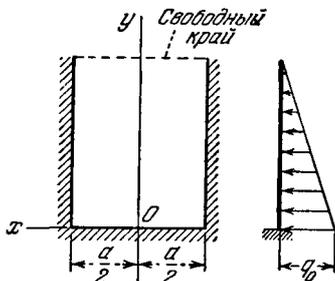


Рис. 101.

где EI обозначает жесткость несущих пластинку балок при изгибе. Поступая, как и в § 46, потребуем, что уравнение прогибов

¹⁾ Смотров А. А., Решение плит, нагруженных сплошной нагрузкой по закону трапеции, М. — Л., ОНТИ, 1936.

имело вид

$$w = w_1 + w_2, \quad (b)$$

где

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (c)$$

а

$$w_2 = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (d)$$

Из симметрии заключаем, что в выражении (f) предыдущего параграфа нам следует положить $C_n = D_m = 0$ и тогда для Y_m принять выражение

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (e)$$

Обе остальные постоянные A_m и B_m будут найдены из граничных условий (а), которые при обозначениях

$$\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m, \quad \frac{EI}{aD} = \lambda$$

дадут нам

$$\begin{aligned} A_m (1 - \nu) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m [2 \operatorname{ch} \alpha_m + (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m] &= \frac{4\nu}{m^5 \pi^5}, \\ -A_m [(1 - \nu) \operatorname{sh} \alpha_m + m\pi \lambda \operatorname{ch} \alpha_m] + \\ + B_m [(1 + \nu) \operatorname{sh} \alpha_m - (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - m\pi \lambda \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m] &= \frac{4\lambda}{m^4 \pi^4}. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, найдем

$$A_m = \frac{4}{m^5 \pi^5} \frac{\nu(1 + \nu) \operatorname{sh} \alpha_m - \nu(1 - \nu) \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - m\pi \lambda (2 \operatorname{ch} \alpha_m + \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m)}{(3 + \nu)(1 - \nu) \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - (1 - \nu)^2 \alpha_m + 2m\pi \lambda \operatorname{ch}^2 \alpha_m}, \quad (f)$$

$$B_m = \frac{4}{m^5 \pi^5} \frac{\nu(1 - \nu) \operatorname{sh} \alpha_m + m\pi \lambda \operatorname{ch} \alpha_m}{(3 + \nu)(1 - \nu) \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - (1 - \nu)^2 \alpha_m + 2m\pi \lambda \operatorname{ch}^2 \alpha_m}. \quad (g)$$

Изогнутая поверхность пластинки определяется подстановкой этих постоянных в выражение

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 = \\ &= \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (h) \end{aligned}$$

Если поддерживающие балки абсолютно жестки, то $\lambda = \infty$ в выражениях (f) и (g) и постоянные A_m и B_m получают те же значения, что и в § 30 для пластинки, у которой все четыре стороны покоятся на жестких опорах.

Подставив $\lambda = 0$ в выражения (f) и (g), мы получим значения постоянных ряда (h) для случая, когда две стороны пластинки свободно оперты, а две другие свободны.

Оказывается, что исключая случай весьма малых значений λ , максимальные прогибы и максимальные изгибающие моменты приходятся на центр пластинки. Ряд значений этих величин, вычисленных для квадратной пластинки при различных λ , приведен в таблице 46¹⁾.

Таблица 46

Прогибы и изгибающие моменты в центре равномерно загруженной квадратной пластинки, два края которой свободно оперты, а два других поддерживаются упругими балками (рис. 102) ($\nu = 0,3$)

$\lambda = EI/aD$	w_{\max}	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$
∞	$0,00406 qa^4/D$	$0,0479 qa^2$	$0,0479 qa^2$
100	$0,00409 qa^4/D$	$0,0481 qa^2$	$0,0477 qa^2$
30	$0,00416 qa^4/D$	$0,0486 qa^2$	$0,0473 qa^2$
10	$0,00434 qa^4/D$	$0,0500 qa^2$	$0,0465 qa^2$
6	$0,00454 qa^4/D$	$0,0514 qa^2$	$0,0455 qa^2$
4	$0,00472 qa^4/D$	$0,0528 qa^2$	$0,0447 qa^2$
2	$0,00529 qa^4/D$	$0,0571 qa^2$	$0,0419 qa^2$
1	$0,00624 qa^4/D$	$0,0643 qa^2$	$0,0376 qa^2$
0,5	$0,00756 qa^4/D$	$0,0744 qa^2$	$0,0315 qa^2$
0	$0,01309 qa^4/D$	$0,1225 qa^2$	$0,0271 qa^2$

Заслуживает некоторого внимания частный случай $\lambda = 0$ для пластинки, свободно опертой по двум противоположным краям и свободной по двум другим. Как видно из таблицы 47, прогибы и максимальные моменты такой пластинки при равномерном ее нагружении лишь незначительно отличаются от прогибов и моментов пластинки при цилиндрическом изгибе²⁾.

¹⁾ Таблица была составлена К. А. Чалышевым — Известия Института инженеров путей сообщения, СПб., 1914. Впоследствии задача была рассмотрена Мюллером (Müller E., Ingr.-Arch., т. 2, стр. 606, 1932). В этой работе были вычислены таблицы для несимметричных случаев. В работе Иенсена (Jensen V. P., Univ. Illinois Bull., 81, 1938) рассматриваются различные случаи прямоугольных и неразрезных пластинок на гибких балках.

²⁾ Эти результаты принадлежат Холлу (Holl D. L., Iowa State Coll. Eng. Exp. Sta. Bull., 129, 1936). Случай сосредоточенной нагрузки см. Ohlig R., Ingr.-Arch., т. 16, стр. 51, 1947. Оба автора останавливаются также на вопросе о влиянии защемления по опертым краям.

Прогибы и изгибающие моменты прямоугольной равномерно нагруженной пластинки, два края которой $x = 0$, $x = a$ свободно оперты и два других свободны (рис. 102) ($\nu = 0,3$)

$\frac{b}{a}$	$x = a/2, y = 0$			$x = a/2, y = \pm b/2$	
	$w = a \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$M_y = \beta_1' qa^2$	$w = a_2 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_2^2 qa^2$
	α_1	β_1	β_1'	α_2	β_2
0,5	0,01377	0,1235	0,0102	0,01443	0,1259
1,0	0,01309	0,0225	0,0271	0,01509	0,1318
2,0	0,01284	0,1235	0,0364	0,01521	0,1329
∞	0,01302	0,1250	0,0375	0,01522	0,1330

49. Прямоугольная пластинка, упруго опертая по четырем краям или опертая в вершинах, со свободными краями. Рассмотрим пластинку, несущую равномерно распределенную нагрузку и поддерживаемую по контуру четырьмя изгибаемыми балками. Предполагается, что последние жестко оперты в вершинах пластинки, причем параллельные балки могут иметь одинаковую жесткость (рис. 103).

Записав прогибы в виде

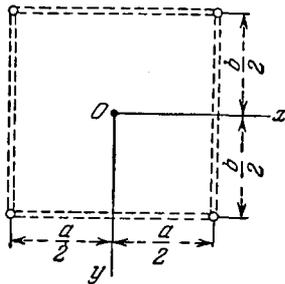


Рис. 103.

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{q}{384D(\gamma + \delta)} [\gamma(16x^4 - 24a^2x^2 + 5a^4) + \\
 & + \delta(16y^4 - 24b^2y^2 + 5b^4)] + \sum A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\
 & + \sum B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} + \\
 & + \sum C_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \\
 & + \sum D_n x \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)
 \end{aligned}$$

где δ/γ и A_n, \dots, D_n пока неизвестные постоянные, а $n = 1, 3, 5, \dots$, мы удовлетворим дифференциальному уравнению $\Delta w = q/D$ пластинки и условиям симметрии¹⁾. Разложим входящие в выражение (а) алгебраические и гиперболические функции в ряды косинусов. Введя, далее, для $x = a/2$, $y = b/2$ граничные условия, аналогичные условиям (а) предыдущего параграфа, приходим к системе уравнений для постоянных A_n, \dots, D_n выражения (а).

Положив, в частности, $\delta/\gamma = 0$ и $E_b I_b = \infty$, мы получаем решение, уже разобранный в § 48.

¹⁾ Этот метод решения принадлежит Б. Г. Галеркину; см. его Собрание трудов, т. 2, стр. 15, Москва, 1953. Указанные граничные условия легко осуществимы и потому удобны для проверки теории испытаниями; см. Dimitrov N., Bauingenieur, т. 32, стр. 359, 1957.

Остановимся теперь на изгибе квадратной пластинки ($a = b$), лежащей на четырех одинаковых балках. По условиям симметрии здесь $\delta/\gamma = 1$, $A_n = B_n$ и $C_n = D_n$. Неизвестные коэффициенты A_n исключаются в результате приравнивания нулю краевых моментов. Взяв затем лишь четыре члена ($n = 1, 3, 5$ и 7) в ряду (а), получаем четыре линейных уравнения относительно C_1, C_3, C_5 и C_7 . Итоги числовых выкладок, выполненных указанным способом, представлены в таблице 48.

Таблица 48

Прогибы и изгибающие моменты квадратной пластинки, упруго опертой по контуру (рис. 103) ($\nu = 0,25$)

$\gamma = \frac{EI}{aD}$	$x=0, y=0$		$x=0, y=a/2$
	$w = a \frac{qa^4}{D}$	$M_x = M_y = \beta_1 qa^2$	$M_x = \beta_2 qa^2$
	α	β_1	β_2
∞	0,00406	0,0460	0
100	0,00412	0,0462	
50	0,00418	0,0463	
25	0,00429	0,0467	0,0002
10	0,00464	0,0477	0,0024
5	0,00519	0,0494	0,0065
4	0,00546	0,0502	0,0085
3	0,00588	0,0515	0,0117
2	0,00668	0,0539	0,0177
1	0,00873	0,0601	0,0332
0,5	0,01174	0,0691	0,0559
0	0,0257	0,1109	0,1527

В частном случае $EI = 0$ приходим к квадратной пластинке, несущей равномерно распределенную нагрузку и опертой лишь в вершинах. Величина ν оказывает малое влияние на прогибы и моменты в центре пластинки; в большей степени это влияние сказывается на моментах по краям. Если, например, принять $\nu = 0,3$, то значения, приведенные в последней строке таблицы 48 для $\nu = 0,25$, следовало бы заменить соответственно на 0,249; 0,1090 и 0,1404¹⁾. Рассматривалось также и решение задачи об опертой лишь в вершинах квадратной пластинке при симметричном нагружении ее относительно центра²⁾. Если нагрузка P распределена равномерно по малой площадке прямоугольного или кругового контура, то мы можем³⁾ вывести выражение для моментов, возникающих в центре загруженной площадки.

¹⁾ См. Marcus H., Die Theorie elastischer Gewebe, 2-е изд., стр. 173, Берлин, 1932; несколько различных случаев пластинок, закрепленных в точках, рассмотрено Надаи (Nadai A., Z. angew. Math. Mech., т. 2, стр. 1, 1922), а также Торном (Thorne C. J., J. Appl. Mech., т. 15, стр. 73, 1948).

²⁾ См. Marcus, там же.

³⁾ См. Woïnowsky-Krieger, Ingr.-Arch., т. 23, стр. 349, 1955.

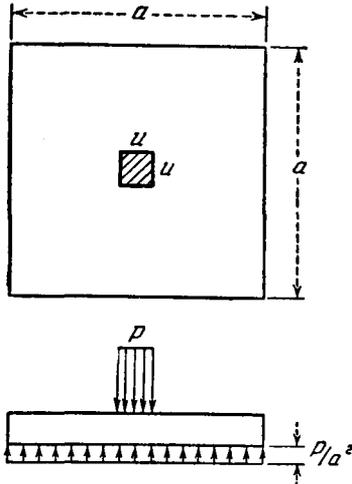


Рис. 104а.

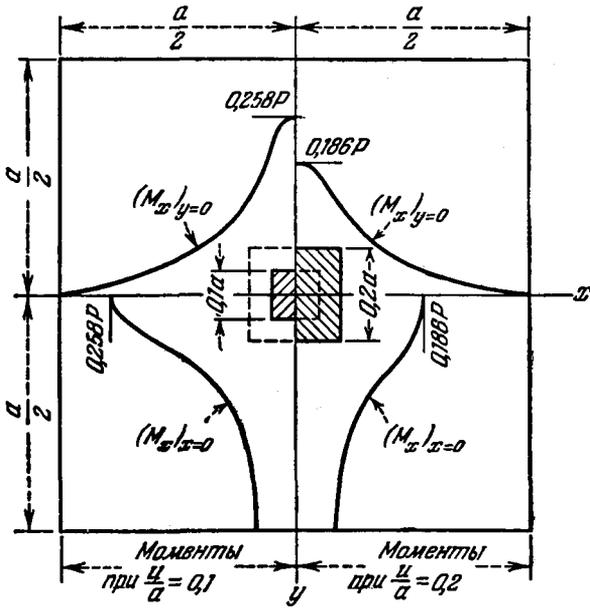


Рис. 104б.

В частности, если площадка загрузки — квадрат со стороной u , то при $\nu = 0,3$ эти моменты выражаются формулой

$$M_x = M_y = (0,1034 \ln a/u + 0,129) P. \quad (b)$$

Располагая этим решением, а также решением для равномерно нагруженной квадратной пластинки при тех же условиях опирания, мы решаем вместе с тем и задачу расчета пластинки, представленной на рис. 104а, применив с этой целью метод наложения. Очевидно, что если квадратная, свободная по краям пластинка поддерживается равномерно распределенными реакциями, то изгибающие моменты в центре могут быть получены путем вычитания из выражения (b) значения $M_x = M_y = 0,1090qa^2$, указанного выше для равномерно нагруженной квадратной пластинки, опирающейся в вершинах, при том же значении $\nu = 0,3$. В результате получаем

$$M_x = M_y = (0,1034 \ln a/u + 0,020) P \quad (c)$$

для $\nu = 0,3$. Распределение изгибающих моментов по средней линии фундаментной плиты показано на рис. 104б для $u/a = 0,1$ и $u/a = 0,2$. Для весьма жесткой фундаментной плиты, покоящейся на податливом основании, позволительно допустить равномерное распределение давления. Более общие гипотезы относительно закона распределения давления вводятся в главе VIII.

50. Полубесконечная прямоугольная пластинка под равномерным давлением. Изогнутая поверхность и распределение напряжений у короткой стороны длинной прямоугольной пластинки практически те же, что и у края полубесконечной пластинки, показанной на рис. 105. Главным образом по этой причине заслуживает рассмотрения сравнительно простая теория пластинок последнего вида. Пусть нагрузка равномерно распределена по всей площади такой пластинки, края же ее $x = 0$, $x = a$ предполагаются свободно опертыми¹⁾.

Изогнутую поверхность пластинки можно представить суммой функций

$$w = w_1 + w_2, \quad (a)$$

где

$$w_1 = \frac{q}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (b)$$

— частное решение уравнения $\Delta\Delta w = q/D$, в котором q — интенсивность нагрузки, а

$$w_2 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(A_m + B_m \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-m\pi y/a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (c)$$

— решение уравнения $\Delta\Delta w = 0$, дающее нулевой прогиб для $y = \infty$. Коэффициенты A_m и B_m остается выбрать так, чтобы удовлетворить граничным

¹⁾ Приводимые ниже решения задачи принадлежат Надаи; см. его книгу: N a d a i A., *Elastische Platten*, стр. 72, Берлин, 1925.

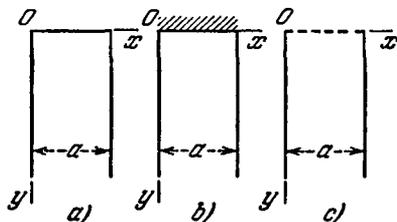


Рис. 105.

условиям по краю $y=0$. При этом могут представиться три следующих варианта.

Край $y=0$ свободно оперт (рис. 105, а). Соответствующие условия требуют при этом, чтобы $w=0, \partial^2 w/\partial y^2=0$ для $y=0$. Подстановка ряда, выражающего $w=w_1+w_2$, в эти условия дает значения коэффициентов $A_m=-1/m^5$ и $B_m=A_m/2$. Таким путем приходим к поверхности прогибов

$$w = w_1 - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(1 + \frac{m\pi y}{2a}\right) \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (d)$$

где w_1 определяется уравнением (б).

Особый интерес представляют изгибающие моменты M_y пластинки. Для ее средней линии $x=a/2$ находим дифференцированием

$$M_y = \frac{\nu qa^2}{8} + \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left[(1-\nu) \frac{m\pi y}{2a} - \nu \right] \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^3} (-1)^{(m-1)/2}. \quad (e)$$

Учитывая условие $\partial M_y/\partial y=0$ и удерживая лишь первый член быстро сходящегося ряда, устанавливаем, что M_y получает максимальное значение для

$$y = \frac{a}{\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu}.$$

Таблица 49 указывает наибольшие значения изгибающих моментов и реакций V_y по краям, а также силы R , действующие в вершинах пластинки и направленные вниз.

Таблица 49

Максимальные изгибающие моменты и реакции равномерно напряженной полубесконечной пластинки со свободно опертыми краями (рис. 105)

ν	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(V_y)_{\max}$	R
0,2	$0,1250 qa^2, x = \frac{a}{2},$ $y = \infty$	$0,0364 qa^2, x = \frac{a}{2},$ $y = 0,48a$	$0,520 qa, x = \frac{a}{2},$ $y = 0$	$0,1085 qa^2$
0,3	$0,0250 qa^2, x = \frac{a}{2},$ $y = \infty$	$0,0445 qa^2, x = \frac{a}{2},$ $y = 0,59a$	$0,502 qa, x = \frac{a}{2},$ $y = 0$	$0,0949 qa^2$

Следует обратить внимание на то, что значение $0,0364 qa^2$ превышает на 45% значение $0,0250 qa^2$ наибольшего момента M_y бесконечно длинной пластинки при равенстве в обоих случаях значений коэффициентов Пуассона.

Край $y=0$ защемлен (рис. 105, б). Следуя указанному выше общему ходу рассуждений, но приняв на этот раз граничные условия $w=0, \partial w/\partial y=0$ для $y=0$, вместо выражения (d), получим

$$w = w_1 - \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (f)$$

где w_1 по-прежнему определяется уравнением (б). Соответствующий изгибающий момент

$$M_y = \frac{\nu qa^2}{8} + \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left[(1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} - 1 - \nu \right] \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (г)$$

достигает максимума при $x = a/2$ и $y = 2a/\pi(1 - \nu)$. Полагая $\nu = 0,3$, находим $y = 0,91a$ и $(M_y)_{\max} = 0,0427 qa^2$, в предположении же $\nu = 0,2$ максимум падает до $(M_y)_{\max} = 0,0387 qa^2$ для $y = 0,80a$. Можно также показать, что изменение моментов защемления по короткой стороне $y = 0$ следует простому закону

$$(M_y)_{y=0} = -\frac{q}{2} (ax - x^2).$$

Заметив, что при больших значениях y поверхность прогибов пластинки можно считать цилиндрической, для этой области имеем

$$M_x = \frac{q}{2} (ax - x^2), \quad M_y = \nu \frac{q}{2} (ax - x^2).$$

Таким образом, распределение краевых моментов (г) совпадает с распределением моментов M_x поперек пластинки при $y = \infty$, но имеет противоположный знак.

Край $y = 0$ свободен (рис. 105, с). Если условия, предписанные для края $y = 0$, требуют, чтобы

$$\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

то, воспользовавшись выражениями (а), (б) и (с), приходим к поверхности прогибов

$$w = w_1 + \frac{4\nu qa^4}{(3 + \nu)\pi^5} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} - \frac{m\pi y}{a} \right) \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (h)$$

Прогибы и изгибающие моменты M_x достигают максимума в середине свободного края. Можно показать, что

$$(w)_{y=0} = \frac{3 - \nu}{(1 - \nu)(3 + \nu)} w_1$$

и

$$(M_x)_{y=0} = \frac{(3 - \nu)(1 + \nu)}{3 + \nu} (M_x)_1,$$

где w_1 и $(M_x)_1$ — прогибы и моменты бесконечной свободно опертой пластинки. Отсюда следует, что

$$(M_x)_{\max} = \frac{(3 - \nu)(1 + \nu)}{3 + \nu} \frac{qa^2}{8}.$$

В качестве последнего примера, приводящего к иной форме решения, рассмотрим равномерно нагруженную полубесконечную пластинку, один край $y = 0$ которой свободно оперт, а два края $x = \pm a/2$ защемлены

(рис. 106). Решение может быть получено подстановкой $b = \infty$ в надлежащим образом подобранное выражение для прогибов прямоугольной пластинки конечных размеров, свободно опертой по краям $y = 0$, b и защемленной по краям $x = \pm a/2$. В итоге опускаемого здесь вывода находим

$$w = \frac{4qa^4}{\pi D} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{\left(\operatorname{sh} \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{\beta x}{a} - \frac{\beta x}{a} \operatorname{sh} \frac{\beta}{a} \operatorname{sh} \frac{\beta x}{a}}{\operatorname{sh} \beta + \beta} \right] \frac{\sin \frac{\beta y}{a}}{\beta^5} d\beta. \quad (1)$$

Дифференцируя выражение (1) и замечая, что

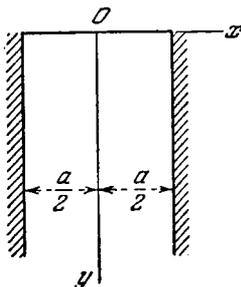


Рис. 106.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\beta y}{a}}{\beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{для } y > 0,$$

приходим к результату

$$\Delta \Delta w = \frac{2q}{\pi D} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\beta y}{a}}{\beta} d\beta = \frac{q}{D}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение изгиба пластинки удовлетворено. Можно показать, что надлежащие граничные условия для $y = 0$ и $x = \pm a/2$ также удовлетворяются решением (1).

В выражения изгибающих моментов здесь опять входят интегралы с бесконечными пределами, доступные для вычисления. На этот раз представляют интерес моменты M_y . Положив, в частности, $\nu = 0,2$, получаем $(M_y)_{\max} = 0,0174 qa^2$, имеющий место при $y = 0,3a$, тогда как для бесконечной пластинки при том же значении ν момент $M_y = \nu qa^2/24$ не превышает значения $0,00833 qa^2$.

Следует заметить, что свойствами полубесконечных пластинок можно воспользоваться как основой для определения прогибов и изгибающих моментов прямоугольных пластинок конечных размеров при любой заданной комбинации свободно опертых или защемленных краев¹⁾.

51. Полубесконечная прямоугольная пластинка под сосредоточенными нагрузками. Положив, что края $x = 0$ и $x = a$ пластинки свободно оперты, рассмотрим в отношении третьей стороны ($y = 0$) следующие две возможности: 1) край $y = 0$ свободно оперт и 2) край $y = 0$ защемлен.

Край $y = 0$ свободно оперт (рис. 107). Допустив, что заданная нагрузка P приложена в точке $x = \xi$, $y = \eta$, будем сначала иметь в виду бесконечную пластинку, опертую лишь по краям $x = 0$ и $x = a$. Прибегнув к методу отражений (см. стр. 181), введем вторую нагрузку $-P$, приложенную в точках $x = \xi$, $y = -\eta$, бесконечной пластинки, тогда линия $y = 0$ становится узловой линией изогнутой поверхности пластинки. При этом искомый прогиб полубесконечной пластинки будет получен как результат наложения прогибов [см. уравнение (148), стр. 169], произведенных в бесконечной пла-

¹⁾ Такой подход к теории прямоугольных пластинок освещается в работе Кепке; см. Коерске W., *Ingr.-Arch.*, т. 18, стр. 106, 1950.

стинке обеими сосредоточенными нагрузками. Поверхность прогибов будет представлена уравнением

$$w_1 = -\frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi}{a}(\eta-y)} \frac{1}{m^3} \left[1 + \frac{m\pi}{a}(\eta-y) \right] \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} -$$

$$-\frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m\pi}{a}(\eta+y)} \frac{1}{m^3} \left[1 + \frac{m\pi}{a}(\eta+y) \right] \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

принимая после некоторых упрощений вид

$$w_1 = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta/a}}{m^3} \left[\left(1 + \frac{m\pi\eta}{a} \right) \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (a)$$

имеющим силу в пределах $0 \leq y \leq \eta$ и удовлетворяющим условиям $w_1 = 0$ $\partial^2 w_1 / \partial y^2 = 0$ для $y = 0$. Прогибы для области $y > \eta$ определяются аналогичным образом.

Если распределить сосредоточенную нагрузку по малой площадке, то момент M_x в центре этой площадки, а также и соответствующие прогибы оказываются меньшей величины в сравнении с моментами и прогибами бесконечной пластинки, не имеющей поперечного края при $y = 0$. Но момент M_y и здесь

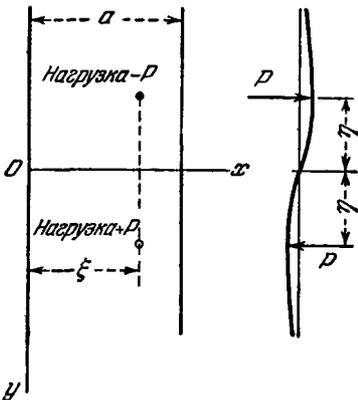


Рис. 107.

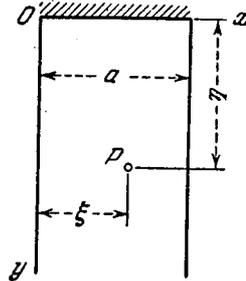


Рис. 108.

является исключением. Представим его в виде суммы $M_y = M_{y0} + m_y$, где M_{y0} — момент бесконечной пластинки. Поправка m_y , отражающая влияние нагрузки $-P$ (рис. 107), находится при этом без труда с помощью второго из уравнений (151) (см. стр. 170). Положив для примера $\nu = 0,3$, найдем $m_y = 0,0065 P$ — наибольшее значение поправки, отвечающее положению нагрузки в точке $x = a/2, y = 0,453a$.

Край $y = 0$ защемлен (рис. 108). Начнем с вычисления наклона изогнутой поверхности (а) у края $y = 0$. Получаем дифференцированием

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{P\eta}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m\pi\eta/a}}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (b)$$

Далее, подвергнем свободно опертую полубесконечную пластинку действию моментов, распределенных по краю $y = 0$ согласно закону

$$(M_y)_{y=0} = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Соответствующие прогибы, исчезающие при $y = \infty$, зададим в виде

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m y) e^{-m\pi y/a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (c)$$

Коэффициенты A_m и B_m этого выражения определяются непосредственно из условий

$$(w_2)_{y=0} = 0, \quad -D \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right)_{y=0} = f(x). \quad (d)$$

Отсюда находим

$$A_m = 0, \quad B_m = E_m a / 2m\pi D,$$

и наконец

$$w_2 = \frac{ay}{2\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m e^{-m\pi y/a}}{m} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (e)$$

Поскольку нам нужно уничтожить наклон (b), краевые условия принимают вид

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=0} + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (f)$$

Подстановка выражений (b) и (e) в уравнение (f) дает

$$E_m = -\frac{2P\eta}{a} e^{-m\pi\eta/a} \sin \frac{m\pi\xi}{a},$$

а выражение (e) преобразуется в зависимость

$$w_2 = -\frac{Py\eta}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m\pi}{a}(y+\eta)}}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (g)$$

Таким образом, поверхность прогибов полубесконечной пластинки, защемленной по $y = 0$, определится суммой

$$w = w_1 + w_2, \quad (h)$$

где под w_1 разумеется выражение (a). Как и ряд (g), его можно представить в замкнутой форме. Преобразуем лишь для этой цели содержащиеся в (g) функции синуса в показательные функции

$$e^{\pm i(m\pi\xi/a)} \quad \text{и} \quad e^{\pm i(m\pi x/a)}$$

и используем разложение

$$\ln(1 \pm e^z) = \pm e^z - \frac{e^{2z}}{2} \pm \frac{e^{3z}}{3} - \dots$$

В итоге этих преобразований выражение (g) предстанет в более простом виде:

$$w_2 = \frac{P\eta\eta}{4\pi D} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (y + \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (y + \eta) - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)}. \quad (i)$$

Значение моментов защемления по краю $y = 0$ будет получено как результат дифференцирования функции (i):

$$(M_y)_{y=0} = -\frac{P\eta}{2a} \operatorname{sh} \frac{\pi\eta}{a} \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x - \xi)} - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{a} - \cos \frac{\pi}{a} (x + \xi)} \right). \quad (j)$$

По мере того как точка приложения сосредоточенной нагрузки приближается к защемленному краю $y = 0$, величина момента $(M_y)_{y=0}$, определяемая из выражения (j), стремится к нулю. Но если имеют место одновременно условия $\xi = x$ и $\eta \rightarrow 0$, то из уравнения (j) находим

$$(M_y)_{y=0} = -\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{P\eta}{2a} \operatorname{coth} \frac{\pi\eta}{2a} \frac{1 - \cos \frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{a} - \cos \frac{2\pi x}{a}} \right) = -\frac{P}{\pi}. \quad (k)$$

Если, наконец, $\eta = 0$, момент M_y обращается в нуль.

В заключение представим себе, что нагрузка P (рис. 109) равномерно распределена по прямолинейному отрезку длиной u . Из уравнения (j) в таком случае мы легко можем найти момент, вызванный такой нагрузкой в середине защемленного края. Произведя в этом выражении подстановки $x = a/2$ и $P d\xi/u = P$ и выполнив интегрирование, найдем

$$(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=0} = -\frac{2P\eta}{au} \operatorname{sh} \frac{\pi\eta}{a} \int_{(a-u)/2}^{(a+u)/2} \frac{\sin \frac{\pi\xi}{a} d\xi}{\operatorname{ch} \frac{2\pi\eta}{a} + \cos \frac{2\pi\xi}{a}} = -\frac{2P\eta}{\pi u} \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi u}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\eta}{a}}.$$

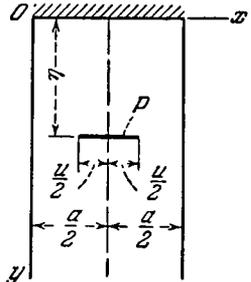


Рис. 109.

Таблица 50 позволит найти положение нагрузки, приводящее к возникновению максимального момента защемления, а также величину этого момента для различных значений отношения u/a .

Таблица 50

Максимальные моменты защемления для $x = a/2$, обусловленные действием нагрузки, распределенной по длине u (рис. 109)

u/a	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
η/a	0	0,147	0,203	0,272	0,312	0,321	0,343
M_y/P	-0,318	-0,296	-0,275	-0,237	-0,204	-0,172	-0,143

ГЛАВА VII

НЕРАЗРЕЗНАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНКА

52. Свободно опертая неразрезная пластинка. Входящие в состав конструкции зданий плоские междуэтажные перекрытия, опертые обычно по концам на наружные несущие стены, часто поддерживаются еще и промежуточными опорами либо в виде балок и внутренних стен, либо в виде стоек. В первом случае мы имеем дело с неразрезной пластинкой в собственном смысле слова; система же непосредственного опирания перекрытия на стойки без введения промежуточного звена — балки, называется *безбалочным перекрытием*. Балочные перекрытия делятся опорными балками на панели. В настоящей главе рассматриваются неразрезные пластинки с панелями лишь прямоугольной формы.

Начнем со случая, доступного строгому решению методами, уже использованными в предыдущей главе. Прямоугольная пластинка шириной b и длиной $a_1 + a_2 + a_3$, опертая, как показано на рис. 110, по краям, а также по промежуточным линиям ss и tt , представляет собой свободно опертую неразрезную пластинку, перекрывающую три пролета. Мы предполагаем, что промежуточные опоры не оседают под давлением поперечной нагрузки и не оказывают никакого сопротивления поворотам пластинки относительно осей ss и tt . При этих допущениях изгиб каждого отдельного пролета подобной пластинки без затруднений поддается расчету путем комбинирования уже известных нам решений для поперечно нагруженной свободно опертой прямоугольной пластинки с решениями для прямоугольной пластинки, изогнутой распределенными по краям моментами.

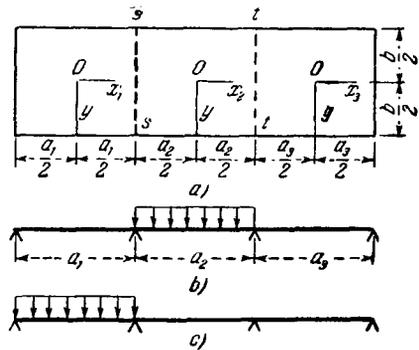


Рис. 110.

Предположим симметричные условия: равенство пролетов $a_1 = a_2 = a_3 = a$ и равномерное нагружение среднего пролета при свободных от нагрузки боковых пролетах (рис. 110, б). Рассматривая средний пролет как свободно опертую прямоугольную пластинку и применяя выражение (б) § 44 (см. стр. 224), заключаем, что наклон изогнутой поверхности по краю $x_2 = a/2$ равен

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2 = \frac{a}{2}} = \frac{2qb^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} - \text{th } \beta_m\right), \quad (\text{a})$$

где $\beta = m\pi a/2b$. Так как пластинка неразрезная, то по краям ее $x_2 = \pm a/b$ появятся равномерно распределенные изгибающие моменты M_x . Из симметрии видно, что эти моменты можно представить следующим рядом:

$$(M_x)_{x_2 = \pm \frac{a}{2}} = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (\text{б})$$

Вызванные этими моментами прогибы w_1 получатся из уравнения (173), соответствующий же им наклон по краю $x_2 = a/2$ [см. уравнение (е), стр. 225] равен

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)_{x_2 = \frac{a}{2}} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\text{th } \beta_m + \frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m}\right). \quad (\text{с})$$

Из условия непрерывности заключаем, что сумма выражений (а) и (с), определяющая собой наклон пластинки по линии $x_2 = a/2$, должна определять наклон по той же линии в смежном пролете изогнутой поверхности пластинки. Рассматривая этот смежный пролет как свободно опертую прямоугольную пластинку, изогнутую моментами (б), распределенными по краю $x_3 = -a/2$, находим из уравнения (176) (см. стр. 211) соответствующий прогиб w_2 пластинки

$$w_2 = \frac{b^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} \times \\ \times \left[\frac{1}{\text{ch } \beta_m} \left(\beta_m \text{th } \beta_m \text{ch } \frac{m\pi x_3}{b} - \frac{m\pi x_3}{b} \text{sh } \frac{m\pi x_3}{b} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{sh } \beta_m} \left(\beta_m \text{cth } \beta_m \text{sh } \frac{m\pi x_3}{b} - \frac{m\pi x_3}{b} \text{ch } \frac{m\pi x_3}{b} \right) \right]. \quad (\text{д})$$

Соответствующий наклон по краю $x_3 = -a/2$ равен

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right)_{x_3 = -\frac{a}{2}} = \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{E_m}{m} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{b} \times \\ \times \left(\operatorname{th} \beta_m + \operatorname{cth} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2 \beta_m} \right). \quad (e)$$

Уравнение для вычисления коэффициентов E_m таково:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2 = \frac{a}{2}} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)_{x_2 = \frac{a}{2}} = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right)_{x_3 = -\frac{a}{2}}.$$

Так как это уравнение остается справедливым при любом значении y , то для каждого значения m получаем следующее уравнение:

$$\frac{2qb^3}{\pi^4 D} \frac{1}{m^4} \left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \operatorname{th} \beta_m \right) - \frac{b}{2\pi D} \frac{E_m}{m} \left(\operatorname{th} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} \right) = \\ = \frac{b}{4\pi D} \frac{E_m}{m} \left(\operatorname{th} \beta_m + \operatorname{cth} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2 \beta_m} \right), \quad (f)$$

откуда

$$E_m = \frac{8qb^2}{\pi^3 m^3} \frac{\beta_m - \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch}^2 \beta_m}{3 \operatorname{th} \beta_m \operatorname{ch}^2 \beta_m + \operatorname{cth} \beta_m \operatorname{ch}^2 \beta_m + 3\beta_m - \beta_m \operatorname{cth}^2 \beta_m}. \quad (g)$$

Мы видим, что с возрастанием m коэффициент E_m быстро уменьшается, приближаясь к значению $-2qb^2/\pi^3 m^3$. Имея вычисленные по формуле (g) коэффициенты E_m , находим из выражения (b) и значения изгибающих моментов M_x по линии tt . Значение этого момента при $y=0$, т. е. в середине ширины пластинки, равно

$$(M_x)_{x_2 = \pm \frac{a}{2}, y=0} = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} E_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Взяв, например, $b = a$, будем иметь $\beta_m = m\pi/2$, и формула (g) даст нам

$$E_1 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0,1555, \quad E_3 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0,0092, \\ E_5 = \frac{8qa^2}{\pi^3} 0,0020, \quad (M_x)_{x_2 = \pm \frac{a}{2}, y=0} = -0,0381qa^2.$$

Изгибающие моменты в центре среднего пролета легко получить, комбинируя значения для свободно опертой пластинки под равномерной нагрузкой с моментами, отвечающими прогибам w_1 . Положив, например, $a = b$, $\nu = 0,2$ (обычное значение для бетона), находим для первого из этих моментов значения

$$(M_x)_0 = (M_y)_0 = 0,0479 \times \frac{1,2}{1,3} qa^2 = 0,0442qa^2$$

(см. табл. 8, стр. 143) и для вторых

$$(M_x)_1 = -0,0067qa^2, \quad (M_y)_1 = -0,0125qa^2.$$

Поэтому

$$(M_x)_{x_2=0, 4=0} = 0,0375qa^2, \quad (M_y)_{x_2=0, y=0} = 0,0317qa^2.$$

Если боковой пролет, как показано на рис. 110, с, равномерно нагружен, то изогнутая поверхность уже не будет симметричной относительно вертикальной оси симметрии пластинки и распределения изгибающих моментов по линиям ss и tt окажутся различными. Положим

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{x_1=\frac{a_1}{2}} &= \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m \cos \frac{m\pi y}{b}, \\ (M_x)_{x_2=\frac{a_2}{2}} &= \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} F_m \cos \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Для вычисления коэффициентов E_m и F_m выведем две системы уравнений из условия непрерывности поверхности прогибов пластинки на линиях ss и tt . Рассматривая нагруженный пролет, из выражений (а) и (е) найдем, что наклон изогнутой поверхности в точках опирания ss при $a_1 = a_2 = a_3 = a$ равен

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_{x_1=\frac{a}{2}} &= \frac{2qb^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} \left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} - \text{th} \beta_m \right) - \\ &- \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \text{ch} \frac{m\pi y}{b} \left(\text{th} \beta_m + \text{cth} \beta_m + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} - \frac{\beta_m}{\text{sh}^2 \beta_m} \right). \end{aligned} \quad (i)$$

Рассматривая теперь средний пролет как прямоугольную пластинку, изогнутую моментами M_x , распределенными по линиям ss и tt и выраженными рядом (h), находим по формуле (175) (см. стр. 211)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_{x_2=-\frac{a}{2}} &= \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[(E_m + F_m) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} + \text{th} \beta_m \right) + (E_m - F_m) \left(\text{cth} \beta_m - \frac{\beta_m}{\text{sh}^2 \beta_m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (j)$$

Из выражений (i) и (j) получаем следующую систему уравнений для вычисления коэффициентов E_m и F_m :

$$A_m \frac{8qb^2}{\pi^3 m^3} + E_m (B_m + C_m) = -B_m (E_m + F_m) - C_m (E_m - F_m), \quad (k)$$

где введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} - \text{th } \beta_m, \\ B_m &= -\left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} + \text{th } \beta_m \right), \\ C_m &= \frac{\beta_m}{\text{sh}^2 \beta_m} - \text{cth } \beta_m. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Наклон изогнутой поверхности среднего пролета по опорной линии tt определится из выражения (j):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_{x_2 = \frac{a}{2}} = -\frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \left[(E_m + F_m) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\beta_m}{\text{ch}^2 \beta_m} + \text{th } \beta_m \right) + (F_m - E_m) \left(\text{cth } \beta_m - \frac{\beta_m}{\text{sh}^2 \beta_m} \right) \right].$$

Этот наклон должен равняться наклону в смежном незагруженном пролете, получаемому из выражения (c) после подстановки в него F_m вместо E_m . Таким путем получим вторую систему уравнений, которая в обозначениях (l) может быть написана следующим образом:

$$B_m (E_m + F_m) + C_m (F_m - E_m) = -(B_m + C_m) F_m. \quad (m)$$

Из этого уравнения получаем

$$F_m = E_m \frac{C_m - B_m}{2(B_m + C_m)}. \quad (n)$$

Подстановка в уравнения (k) дает

$$E_m = A_m \frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{2(B_m + C_m)}{(C_m - B_m)^2 - 4(B_m + C_m)^2}. \quad (o)$$

Подставляя в каждом частном случае вместо A_m , B_m и C_m их численные значения, полученные из уравнений (l), мы найдем коэффициенты E_m и F_m , а далее из выражений (h) получим и изгибающие моменты по линиям ss и tt . Положим, например, что $b = a$. Тогда $\beta_m = m\pi/2$, и уравнения (l) дадут нам

$$\begin{aligned} A_1 &= -0,6677, & B_1 &= -1,1667, & C_1 &= -0,7936, \\ A_3 &= -0,9983, & B_3 &= -1,0013, & C_3 &= -0,9987, \end{aligned}$$

При $m > 3$ мы можем принять с достаточной точностью

$$A_m = B_m = C_m = -1.$$

Подстановка этих значений в уравнение (о) дает

$$E_1 = -\frac{8qa^2}{\pi^3} 0,1720, \quad E_3 = -\frac{8qa^2}{\pi^3 3^3} 0,2496, \quad E_5 = -\frac{8qa^2}{\pi^3 5^3} 0,2500.$$

Момент для середины опоры ss равен

$$(M_x)_{x_1 = \frac{a}{2}, y=0} = (E_1 - E_3 + E_5 + \dots) = -0,0424qa^2.$$

Для середины опоры tt получим

$$(M_x)_{x_2 = \frac{a}{2}, y=0} = (F_1 - F_3 + F_5 - \dots) = 0,0042qa^2.$$

Зная изгибающие моменты по линиям опор, мы легко можем получить для каждого пролета пластинки и прогибы, накладывая прогибы, вызванные опорными моментами, на прогибы от поперечной нагрузки.

Изгибающие моменты в панелях неразрезной пластинки можно получить подобным же образом. Вычислив, например, моменты в центре среднего пролета и положив $\nu = 0,2$, найдем

$$(M_x)_{x_2=0, y=0} = -0,0039qa^2,$$

$$(M_y)_{x_2=0, y=0} = -0,0051qa^2.$$

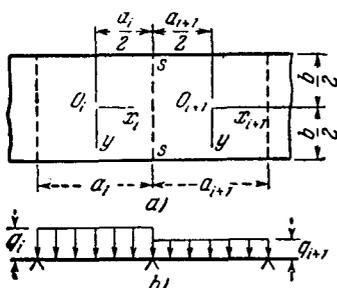


Рис. 111.

Уравнения, полученные для трех пролетов, легко могут быть обобщены и распространены на случай с любым числом пролетов. При этом получается уравнение, аналогичное уравнению трех моментов для неразрезной балки¹⁾. Рассмотрим (рис. 111) два смежных пролета l и $l+1$ длиной соответственно a_l и a_{l+1} . Соответствующие значения функций (1) обозначены черз

$$A_m^l, B_m^l, C_m \quad \text{и} \quad A_m^{l+1}, B_m^{l+1}, C_m^{l+1}.$$

Изгибающие моменты по трем последовательным опорным линиям

¹⁾ Эта задача была исследована несколько иным способом Галеркиным; см. Галеркин Б. Г., Собрание сочинений, т. II, стр. 410, Л.—М., Изд. АН СССР, 1953.

можно представить рядами

$$M_x^{l-1} = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m^{l-1} \cos \frac{m\pi y}{b},$$

$$M_x^l = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m^l \cos \frac{m\pi y}{b},$$

$$M_x^{l+1} = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} E_m^{l+1} \cos \frac{m\pi y}{b}.$$

Рассматривая пролет $l+1$, из выражений (а) и (j) найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x_{l+1}}\right)_{x_{l+1} = -\frac{a_{l+1}}{2}} &= -\frac{2q_{l+1}b^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} A_m^{l+1} - \\ &- \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \times \\ &\times [(E_m^l + E_m^{l+1})B_m^{l+1} - (E_m^{l+1} + E_m^l)C_m^{l+1}]. \quad (p) \end{aligned}$$

Точно таким же образом, рассматривая пролет l , будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x_l}\right)_{x_l = \frac{a_l}{2}} &= \frac{2q_l b^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} A_m^l + \\ &+ \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} \times \\ &\times [(E_m^{l-1} + E_m^l)B_m^l + (E_m^l + E_m^{l-1})C_m^l]. \quad (q) \end{aligned}$$

Из условия непрерывности заключаем, что

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_{l+1}}\right)_{x_{l+1} = -\frac{a_{l+1}}{2}} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_l}\right)_{x_l = \frac{a_l}{2}}.$$

Подставив в это уравнение выражения (p) и (q) и заметив, что оно должно удовлетворяться при любом значении y , приходим к следующему уравнению для вычисления E_m^{l-1} , E_m^l и E_m^{l+1} :

$$\begin{aligned} E_m^{l-1}(B_m^l - C_m^l) + E_m^l(B_m^l + C_m^l + B_m^{l+1} + C_m^{l+1}) + E_m^{l+1}(B_m^{l+1} - C_m^{l+1}) = \\ = -\frac{8b^2}{\pi^3 m^3} (q_{l+1}A_m^{l+1} + q_l A_m^l). \quad (177) \end{aligned}$$

Полученные нами выше уравнения (к) и (м) являются частными случаями этого уравнения. Мы можем написать столько же уравнений (177), сколько у нас имеется промежуточных опор, и если концы пластинки свободно оперты, то в вычислении моментов на промежуточных опорах не встретится никаких затруднений. Левая часть уравнения (177) остается в силе не только для равномерно распределенной нагрузки, но также и для всякого иного типа нагрузки, симметричной в каждом пролете относительно осей x и y . Правая же часть уравнения (177), как и в уравнении трех моментов для балок, имеет для каждого типа нагрузки всякий раз иное значение.

Задача о неразрезной пластинке, несущей сосредоточенные нагрузки, может быть рассмотрена аналогичным образом. В частном случае неограниченного числа равных пролетов и одной сосредоточенной силы, приложенной в некоторой точке какого-либо из пролетов, прогиб пластинки может быть найден путем решения уравнения в конечных разностях для неизвестного коэффициента E_m^i как функции индекса i ¹⁾.

Если промежуточные опоры — упругие, величина коэффициентов E_m^i определяется пятичленными уравнениями, аналогичными

уравнениям пяти моментов теории неразрезных балок²⁾. При изучении изгиба неразрезных пластинок необходимо к тому же принимать в расчет и крутильную жесткость несущих балок, которая уменьшает величину угла поворота пластинки при наличии опор³⁾.

Простейшим примером неразрезной пластинки, несущей сосредоточенную нагрузку, является бесконечно длинная пластинка, свободно опертая по краям $x = 0$, $x = a$, неразрезная на опоре $y = 0$ и несущая сосредоточенную нагрузку P в некоторой точке $x = \xi$, $y = \eta$ (рис. 112, а). Условия загрузки и граничные условия

легко могут быть выполнены путем наложения случаев, представленных на рис. 112, б и 112, с. В случае рис. 112, б каждая панель пластинки свободно оперта по линии $y = 0$, а поверхность прогибов дается выражением $\pm w_1/2$,

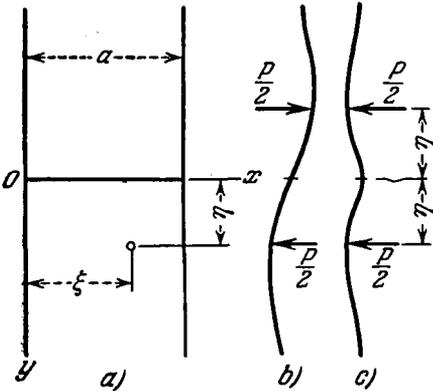


Рис. 112.

¹⁾ См. Woinowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 9, стр. 396, 1938.

²⁾ Неразрезная пластинка на упругих балках рассматривалась Йенсеном (Jensen V. P., Univ. Illinois Bull., 81, 1938) и Ньюмарком (Newmark N. M., Univ. Illinois Bull., 84, 1938).

³⁾ См. Girkman K., Flächentragwerke, 4-е изд., стр. 275, Вена, 1956. (Вышло переработанное, 5-е изд., Вена, 1960. — Прим. пер.)

в котором знак следует выбрать в зависимости от знака y , причем w_1 обозначает прогибы (а) § 51, а $|y| \leq |\eta|$. В случае рис. 112, с каждая панель защемлена по краю $y=0$ и соответствующие прогибы равны $w/2$, где w — значение, определяемое выражением (h) § 51. Отсюда, следовательно,

$$w = w_1 + \frac{w_2}{2} \quad \text{для } \eta \geq y > 0,$$

$$w = \frac{w_2}{2} \quad \text{для } y < 0,$$

и моменты по краю $y=0$ получают значения, вдвое меньшие моментов защемления полубесконечной пластинки с одним защемленным краем; эти последние моменты определяются выражением (j) § 51.

53. Приближенный расчет неразрезной равнопролетной пластинки ¹⁾. Балочные перекрытия проектируются обычно неразрезными и притом не в одном только направлении, как это предполагалось в § 52, но в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Подобного рода неразрезное перекрытие воспроизведено схематически на рис. 113. Пролеты и соответственно толщины одинаковы для всех прямоугольных панелей. Каждая панель имеет постоянную нагрузку q_0 , а возможно и временную p , причем и та и другая распределяются по площади панели равномерно; таким образом, наибольшая интенсивность полной нагрузки достигает величины $q = q_0 + p$.

Начнем с вычисления изгибающих моментов по промежуточным опорам панели междуэтажного перекрытия. Вычисление обнаруживает, что эти моменты зависят преимущественно от загрузки двух смежных панелей, влиянием же загрузки более отдаленных панелей допустимо пренебречь. Вполне оправданным поэтому будет рассчитывать опорные моменты, исходя из предпосылки о равномерном распределении нагрузки q по всей площади перекрытия (рис. 114, а). Если

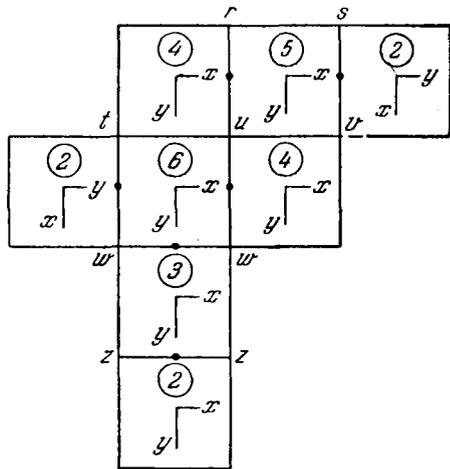


Рис. 113.

¹⁾ Излагаемый ниже метод разработан в основном Маркусом; см. его книгу: Marcus H., Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten, Берлин, 1929. Коэффициенты таблиц 51—56 основаны, однако, на решениях, выведенных в главе VI, и на значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,2$, между тем как Маркус использует для той же цели упрощенную теорию прямоугольной пластинки и принимает $\nu = 0$.

пренебречь углами поворота панелей у промежуточных опор, то каждая из панелей на рис. 114, а будет находиться в тех же условиях, что и прямоугольная пластинка, защемленная по промежуточным опорам и свободно опертая по внешнему контуру перекрытия.

Значения наибольших изгибающих моментов для пластинок с подобного рода граничными условиями приведены в таблицах 51—56.

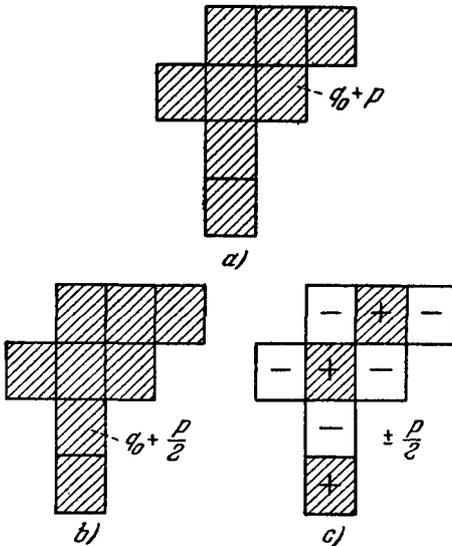


Рис. 114.

Шесть возможных сочетаний свободного опирания и защемления краев для прямоугольных пластинок указаны схематически при заголовках к этим таблицам. Направления координатных осей x , y в каждой панели перекрытия (рис. 113) должны быть выбраны в соответствии со схемами (рис. 115—120); пролет a измеряется в направлении оси x , пролет b — в направлении оси y соответствующей панели. Шесть случаев, представленных схемами на рис. 115—120, перенумерованы индексами 1—6, которыми отмечены также и соответствующие коэффициенты в таблицах 51—56.

Чтобы показать, как пользоваться этими таблицами, вычислим изгибающий момент в середине опоры tw (рис. 113). Определим с этой целью момент защемления в обеих панелях, примыкающих к опоре. Для панели 2 нам следует применить таблицу 52 и формулу

$$\bar{M}_{2y} = \delta_2 q l^2, \quad (a)$$

где l — меньший из пролетов a или b панели. Аналогично, пользуясь таблицей 56, находим момент защемления панели 6 из выражения

$$\bar{M}_{6x} = \gamma q l^2. \quad (b)$$

Искомый момент с достаточной точностью определяется как арифметическое среднее из найденных

$$M_{tw} = \frac{1}{2} (\bar{M}_{2y} + \bar{M}_{6x}). \quad (c)$$

Аналогично находятся и моменты для других промежуточных опор.

Отметим, что уравнение (с) выражает не что иное, как процедуру распределения моментов, в ее простейшей форме, когда допускается пренебречь как «перенесенными» с других опор моментами, так и

Таблица 51

Изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки ($\nu = 0,2$;
 l — меньший из двух пролетов:
 a или b)

Случай 1

b/a	Центр пластинки		Мно- житель
	$M_x = \alpha_1 q l^2$	$M_y = \beta_1 q l^2$	
	α_1	β_1	
0	0,0250 ¹⁾	0,1250	qb^2
0,5	0,0367	0,0999	
0,6	0,0406	0,0868	
0,7	0,0436	0,0742	
0,8	0,0446	0,0627	
0,9	0,0449	0,0526	
1,0	0,0442	0,0442	
1,1	0,0517	0,0449	
1,2	0,0592	0,0449	
1,3	0,0660	0,0444	
1,4	0,0723	0,0439	qa^2
1,5	0,0784	0,0426	
1,6	0,0836	0,0414	
1,7	0,0885	0,0402	
1,8	0,0927	0,0391	
1,9	0,0966	0,0378	
2,0	0,0999	0,0367	
∞	0,1250	0,0250 ²⁾	

¹⁾ $M_{\max} = 0,0364 qb^2$ на расстоянии $0,48 b$ от короткой стороны.
²⁾ $M_{\max} = 0,0364 qa^2$ на расстоянии $0,48 a$ от короткой стороны.

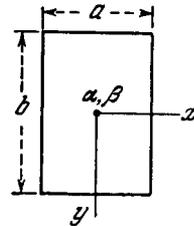


Рис. 115.

разностями жесткостей двух смежных панелей. Столь упрощенный расчет в значительно большей степени оправдан в применении к неразрезной пластинке, чем к неразрезной балке.

Найдем, далее, изгибающие моменты в центре панели b (рис. 113). Наиболее неблагоприятное распределение нагрузки для этих моментов может быть получено путем наложения нагрузок, представленных на рис. 114, b и c .

Влияние равномерно распределенной нагрузки $q_0 + p/2$ на значения моментов учитываем, пользуясь таблицей 56, откуда

$$M'_{bx} = \alpha_6 \left(q_0 + \frac{p}{2} \right) l^2, \quad M'_{by} = \beta_6 \left(q_0 + \frac{p}{2} \right) l^2, \quad (d)$$

где через l обозначен меньший из двух пролетов панели б.

Таблица 52

Изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки ($\nu = 0,2$; l — меньший из двух пролетов: a или b)

Случай 2

b/a	Центр пластинки		Середина защемленного края	Множитель
	$M_x = \alpha_2 q l^2$	$M_y = \beta_2 q l^2$	$\bar{M}_y = \delta_2 q l^2$	
	α_2	β_2	δ_2	
0	0,0125	0,0625	-0,1250	qb^2
0,5	0,0177	0,0595	-0,1210	
0,6	0,0214	0,0562	-0,1156	
0,7	0,0249	0,0514	-0,1086	
0,8	0,0272	0,0465	-0,1009	
0,9	0,0294	0,0415	-0,0922	
1,0	0,0307	0,0367	-0,0840	
1,1	0,0378	0,0391	-0,0916	
1,2	0,0451	0,0404	-0,0983	
1,3	0,0525	0,0415	-0,1040	qa^2
1,4	0,0594	0,0418	-0,1084	
1,5	0,0661	0,0418	-0,1121	
1,6	0,0722	0,0414	-0,1148	
1,7	0,0780	0,0408	-0,1172	
1,8	0,0831	0,0399	-0,1189	
1,9	0,0879	0,0390	-0,1204	
2,0	0,0921	0,0382	-0,1216	
∞	0,1250	0,0250 ¹⁾	-0,1250	

¹⁾ $M_{\max} = 0,0387 qa^2$ на расстоянии 0,80 a от защемленного края.

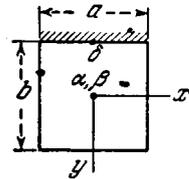


Рис. 116.

Исследуем теперь характер воздействия шахматного распределения нагрузки, показанного на рис. 114, с. Граничные условия для каждой панели здесь остаются теми же, что и для свободно опертой пластинки, моменты же в центре определяются непосредственно

Таблица 53

Изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки ($\nu = 0,2$; l — меньший из двух пролетов: a или b)

Случай 3

b/a	Центр пластинки		Середина зашлепленного края	Множитель	
	$M_x = \alpha_3 q l^2$	$M_y = \beta_3 q l^2$	$\bar{M}_y = \bar{\alpha}_3 q l^2$		
	α_3	β_3	$\bar{\alpha}_3$		
0	0,0083 ¹⁾	0,0417	-0,0833	qb^2	
0,5	0,0100	0,0418	-0,0842		
0,6	0,0121	0,0410	-0,0834		
0,7	0,0152	0,0393	-0,0814		
0,8	0,0173	0,0371	-0,0783		
0,9	0,0196	0,0344	-0,0743		
1,0	0,0216	0,0316	-0,0697		qa^2
1,1	0,0276	0,0349	-0,0787		
1,2	0,0344	0,0372	-0,0868		
1,3	0,0414	0,0391	-0,0938		
1,4	0,0482	0,0405	-0,0998		
1,5	0,0554	0,0411	-0,1049		
1,6	0,0620	0,0413	-0,1090		
1,7	0,0683	0,0412	-0,1122		
1,8	0,0741	0,0408	-0,1152		
1,9	0,0795	0,0401	-0,1174		
2,0	0,0846	0,0394	-0,1191		
∞	0,1250	0,0250 ²⁾	-0,1250		

¹⁾ $M_{\max} = 0,0174 qb^2$ на расстоянии 0,30 b от опертого края.

²⁾ $M_{\max} = 0,0387 qa^2$ на расстоянии 0,80 a от зашлепленного края.

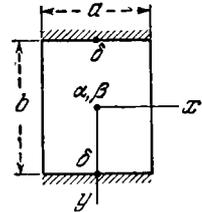


Рис. 117.

из таблицы 51 для случая 1. Нагрузка $+p/2$, действующая в панели б, дает

$$M''_{6x} = \frac{\alpha_1 p}{2} l^2, \quad M''_{6y} = \frac{\beta_1 p}{2} l^2. \quad (e)$$

Для наибольших моментов в центре панели б получим выражения

$$M_{6x} = M'_{6x} + M''_{6x}, \quad M_{6y} = M'_{6y} + M''_{6y}. \quad (f)$$

Чтобы вычислить наибольшие отрицательные моменты в той же точке,

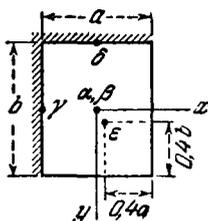


Рис. 118.

Таблица 54

Изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки
($\nu = 0,2$; l — меньший из двух пролетов: a или b)

Случай 4¹⁾

b/a	Центр пластинки		Середина зашечленного края			Множитель
	$M_x = \alpha_4 q l^2$	$M_y = \beta_4 q l^2$	$M_x = \gamma_4 q l^2$	$M_y = \delta_4 q l^2$	$M_{\max} = \epsilon_4 q l^2$	
	α_4	β_4	γ_4	δ_4	ϵ_4	
0,5	0,0191	0,0574	-0,0787	-0,1180	0,0662	qb^2
0,6	0,0228	0,0522	-0,0781	-0,1093	0,0570	
0,7	0,0257	0,0460	-0,0767	-0,0991	0,0501	
0,8	0,0275	0,0396	-0,0746	-0,0882	0,0430	
0,9	0,0282	0,0336	-0,0715	-0,0775	0,0363	
1,0	0,0281	0,0281	-0,0678	-0,0678	0,0305	
1,1	0,0330	0,0283	-0,0766	-0,0709	0,0358	qa^2
1,2	0,0376	0,0279	-0,0845	-0,0736	0,0407	
1,3	0,0416	0,0270	-0,0915	-0,0754	0,0452	
1,4	0,0451	0,0260	-0,0975	-0,0765	0,0491	
1,5	0,0481	0,0248	-0,1028	-0,0772	0,0524	
1,6	0,0507	0,0236	-0,1068	-0,0778	0,0553	
1,7	0,0529	0,0224	-0,1104	-0,0782	0,0586	
1,8	0,0546	0,0213	-0,1134	-0,0785	0,0608	
1,9	0,0561	0,0202	-0,1159	-0,0786	0,0636	
2,0	0,0574	0,0191	-0,1180	-0,0787	0,0662	

¹⁾ Авторы выражают признательность Научно-исследовательскому Совету Канады за помощь, оказанную в работе по вычислению этой таблицы.

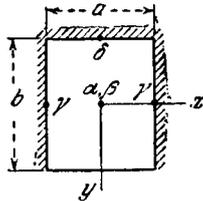


Рис. 119.

Таблица 55

Изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки
($\nu = 0,2$; l — меньший из двух пролетов: a или b)

Случай 5¹⁾

b/a	Центр пластинки		Середина защемленного края		Множитель
	$M_x = \alpha_5 q l^2$	$M_y = \beta_5 q l^2$	$M_x = \gamma_5 q l^2$	$M_y = \delta_5 q l^2$	
	α_5	β_5	γ_5	δ_5	
0,5	0,0206	0,0554	-0,0783	-0,114	qb^2
0,6	0,0245	0,0481	-0,0773	-0,102	
0,7	0,0268	0,0409	-0,0749	-0,0907	
0,8	0,0277	0,0335	-0,0708	-0,0778	
0,9	0,0274	0,0271	-0,0657	-0,0658	
1,0	0,0261	0,0213	-0,0600	-0,0547	
1,1	0,0294	0,0204	-0,0659	-0,0566	
1,2	0,0323	0,0192	-0,0705	-0,0573	
1,3	0,0346	0,0179	-0,0743	-0,0574	qa^2
1,4	0,0364	0,0166	-0,0770	-0,0576	
1,5	0,0378	0,0154	-0,0788	-0,0569	
1,6	0,0390	0,0143	-0,0803	-0,0568	
1,7	0,0398	0,0133	-0,0815	-0,0567	
1,8	0,0405	0,0125	-0,0825	-0,0567	
1,9	0,0410	0,0118	-0,0831	-0,0566	
2,0	0,0414	0,0110	-0,0833	-0,0566	
∞	0,0417	0,0083	-0,0833	-0,0566	

¹⁾ Данными этой таблицы авторы обязаны в существенном Черни (Czer ny F., Bautech. Arch., т. 11, стр. 33, Берлин, 1955).

нам остается лишь изменить знак нагрузки (рис. 114, б). Сопоставляя (d) и (e), получаем

$$M_{6x} = M'_{6x} - M''_{6x}, \quad M_{6y} = M'_{6y} - M''_{6y}. \quad (g)$$

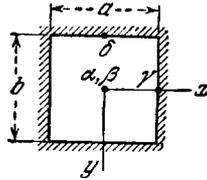


Рис. 120.

Таблица 56

Изгибающие моменты для равномерно нагруженной пластинки
($\nu = 0,2$; l — меньший из двух пролетов: a или b)

Случай 6

b/a	Центр пластинки		Середина защемленного края		Множитель	
	$M_x = \alpha_6 q l^2$	$M_y = \beta_6 q l^2$	$\bar{M}_x = \gamma_6 q l^2$	$\bar{M}_y = \delta_6 q l^2$		
	α_6	β_6	γ_6	δ_6		
0	0,0083	0,0417	—0,0571	—0,0833	$q b^2$	
0,5	0,0118	0,0408	—0,0571	—0,0829		
0,6	0,0150	0,0381	—0,0571	—0,0793		
0,7	0,0178	0,0344	—0,0569	—0,0736		
0,8	0,0198	0,0299	—0,0559	—0,0664		
0,9	0,0209	0,0252	—0,0540	—0,0588		
1,0	0,0213	0,0213	—0,0513	—0,0513		$q a^2$
1,1	0,0248	0,0210	—0,0581	—0,0538		
1,2	0,0284	0,0203	—0,0639	—0,0554		
1,3	0,0313	0,0193	—0,0687	—0,0563		
1,4	0,0337	0,0181	—0,0726	—0,0568		
1,5	0,0358	0,0169	—0,0757	—0,0570		
1,6	0,0372	0,0157	—0,0780	—0,0571		
1,7	0,0385	0,0146	—0,0799	—0,0571		
1,8	0,0395	0,0136	—0,0812	—0,0571		
1,9	0,0402	0,0126	—0,0822	—0,0571		
2,0	0,0408	0,0118	—0,0829	—0,0571		
∞	0,0417	0,0083	—0,0833	—0,0571		

В качестве второго примера применения приближенного метода вычислим изгибающие моменты неразрезной пластинки, представленной на рис. 121 и рассчитанной строгим методом в § 52.

Прежде всего устанавливаем направления координатных осей x и y в соответствии с рис. 116 и 117. Положив, далее, что нагрузка $q = q_0 + p$ равномерно распределена по всей площади пластинки (рис. 121, б), и введя коэффициенты, указанные в таблицах 52 и 53 для случаев 2 и 3 и отвечающие соотношению сторон $b/a = 1$, находим значение момента для центра опоры ss:

$$M_{ss} = -\frac{0,0840 + 0,0697}{2} (q_0 + p) a^2 = -0,0769 (q_0 + p) a^2 \quad (h)$$

по способу, примененному в первом примере [уравнение (с)]. Применяв точный метод решения, найдем, что наибольший по абсолютной величине момент у ss возникает при распределении нагрузки по схеме рис. 121, с. Налагая изгибающий момент, полученный на стр. 259, на момент, который мы вычислили на стр. 262, мы установим точное максимальное значение моментов

$$M_{ss} = - [0,0381 (q_0 + p) + 0,0424 (q_0 + p) - 0,0042q_0] a^2,$$

т. е.

$$M_{ss} = - (0,0805q_0 + 0,0763p) a^2. \quad (i)$$

Положив для примера $q_0 = q/3$, $p = 2q/3$, найдем из (i): $M_{ss} = -0,0777qa^2$ — значение, немного отличающееся от найденного приближенным методом $M = -0,0769qa^2$.

В заключение вычислим наибольший изгибающий момент в центре средней панели при наименее выгоднейшем распределении нагрузки (рис. 121, г). Комбинируя нагрузки, соответствующие схемам рис. 121, д и е, и вводя коэффициенты α и β из таблиц 53 и 51, приходим к следующим выражениям для этих моментов:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \left[0,0216 \left(q_0 + \frac{p}{2} \right) + 0,0442 \frac{p}{2} \right] a^2 = (0,0216q_0 + 0,0329p) a^2, \\ M_y &= \left[0,0316 \left(q_0 + \frac{p}{2} \right) + 0,0442 \frac{p}{2} \right] a^2 = (0,0316q_0 + 0,0379p) a^2. \end{aligned} \right\} (j)$$

Интересно проверить полученные приближенные значения путем сравнения с результатами, полученными на стр. 260 и 262. Распределяя нагрузку опять согласно схеме рис. 121, д и меняя местами в указанных выше результатах индексы x и y , получим

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 0,0317 (q_0 + p) a^2 - (0,0051 + 0,0051) q_0 a^2 = (0,0215q_0 + 0,0317p) a^2, \\ M_y &= 0,0375 (q_0 + p) a^2 - (0,0039 + 0,0039) q_0 a^2 = (0,0297q_0 + 0,0375p) a^2. \end{aligned} \right\} (k)$$

Положив опять $q_0 = q/3$ и $p = 2q/3$, получим для моментов точные значения $0,0283 qa^2$ и соответственно $0,0349 qa^2$. Уравнения (j) дают для тех же моментов приближенные значения $0,0291 qa^2$ и $0,00358 qa^2$.

Погрешность приближенного метода в значительной мере проистекает из того обстоятельства, что наибольшие положительные моменты не всегда приходятся на центр панели. Это отклонение максимума от центра особенно резко проявляется в прямоугольных панелях удлиненной формы. Если, например, b значительно больше a , то максимальный момент M_y возникает близ короткой стороны прямоугольной пластинки. Отдельные значения этих наибольших моментов приводятся в примечаниях к таблицам и их следует рассматривать как наименее вероятные значения, для соответствующих столбцов, независимо от фактического соотношения b/a .

Наконец, следует обратить внимание, что в несимметричном случае 4 моменты M_x и M_y не принимают максимальных значений в центре пластинки. Таблица 54 показывает, однако, что разность между M_{\max} и наибольшим из значений M_x или M_y не превышает 10% от этих последних значений и что общий ход вычислений, проведенных на стр. 266, остается в силе и в применении к случаю 4.

В таблицу 54, в целях облегчения расчета отдельных панелей, не являющихся неразрезными (рис. 118), введены значения максимальных моментов

M_{\max} , действующих при $x = 0,1a$, $y = 0,1b$; для прямоугольных пластинок направление σ_{\max} практически совпадает с коротким пролетом, для квадратной же пластинки — с направлением диагонали $x = -y$. Эти значения M_x могут быть использованы с запасом также и в расчете неразрезных панелей продолговатой формы.

Изложенный в этом параграфе метод сохраняет силу и в тех случаях, когда пролеты, изгибные жесткости или интенсивность загрузки слегка отличаются от панели к панели в неразрезной системе. Более резкие изменения этих параметров требуют перехода к более точным методам.

Следует, однако, отметить, что применение строгой теории в проектировании неразрезных балочных перекрытий часто связано с кропотливой вычислительной работой, причем приобретаемая такой ценой точность оказывается иллюзорной, если учесть множество более или менее неопределенных факторов, влияющих на величину моментов в пластинке. К таким факторам относятся, например, гибкость или крутильная жесткость опорных балок, сдерживающее слияние наружных стен, анизотропия самой пластинки и неточность оценки величины таких постоянных, как, например, коэффициент Пуассона ν .

Можно, однако, упростить процедуру расчета различными приемами. Например, можно ограничить ряд Фурье, представляющий величину изгибающего момента в пластинке,

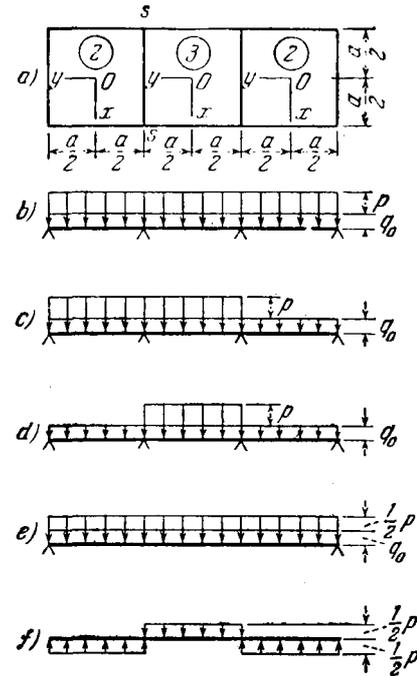


Рис. 121.

начальным членом или заменить фактические значения моментов или наклонов вдоль той или иной опоры пластинки их средними значениями, или, наконец, использовать метод распределения моментов¹⁾.

54. Изгиб пластинки, опирающейся на несколько рядов равноотстоящих колонн (безбалочное перекрытие). Если размеры пластинки велики в сравнении с расстояниями a и b между колоннами (рис. 122) и поперечная нагрузка распределена по ней равномерно, то изгиб во всех достаточно удаленных от краев пластинки панелях можно считать одинаковым, и мы будем вправе свести нашу задачу к вопросу об изгибе одной лишь единственной панели. Направив оси

¹⁾ Этот метод излагается, например, в работе Sless C. P., Newmark N. M., Univ. Illinois Bull., 43, 1950, где дается и дальнейшая библиография по рассматриваемому вопросу. См. также статью Westergaard H. M., Proc. Am. Congr. Instr., т. 22, 1926, в которой содержатся ценные заключения к вопросу о проектировании неразрезных балочных перекрытий.

координат параллельно рядам колонн и поместив начало в центре панели, мы сможем рассматривать эту панель как равномерно нагруженную прямоугольную пластинку со сторонами a и b . Изогнутая поверхность ее в силу симметрии примет вид, показанный на рис. 122, b пунктиром. Максимальный прогиб будет в центре пластинки, в вершинах же прогиб будет равен нулю. Для упрощения задачи предположим, что размеры поперечных сечений колонн малы и что ими

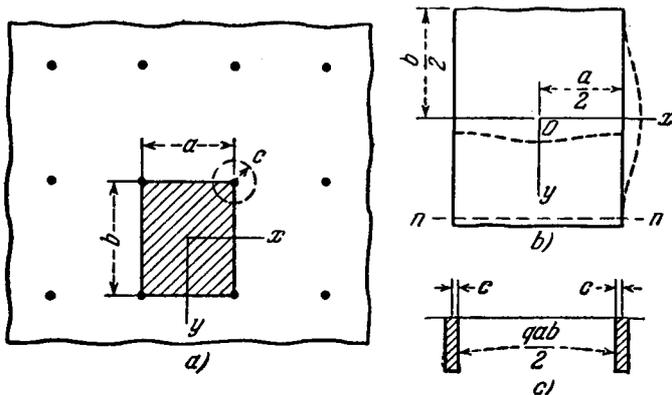


Рис. 122.

можно пренебречь, пока дело идет о прогибах и моментах в центре пластинки¹⁾. Мы будем тогда иметь равномерно нагруженную прямоугольную пластинку, опертую в вершинах, причем из симметрии мы должны будем заключить, что наклон изогнутой поверхности в направлении нормали к краю, а также перерезывающая сила обращаются в нуль во всех точках на краях пластинки, за исключением вершин²⁾.

Поступая, как и в случае свободно опертой пластинки (§ 30), прием полный прогиб в виде

$$w = w_1 + w_2, \quad (a)$$

где

$$w_1 = \frac{qb^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 \quad (b)$$

представляет собой прогиб равномерно нагруженной полоски, защемленной по краям $y = \pm b/2$, удовлетворяющий дифференциальному

¹⁾ В этой упрощенной форме задача рассматривалась несколькими авторами; см., например: N a d a i A., Über die Biegung durchlaufender Platten, Z. angew. Math. Mech., т. 2, стр. 1, 1922; Галеркин Б. Г., Собрание сочинений, т. 2, стр. 29, М. — Л., Изд. АН СССР, 1953.

²⁾ Обращение в нуль крутящего момента M_{xy} по контуру следует из того факта, что наклон в направлении нормали к контуру равен нулю.

уравнению (103) прогиба пластинки, равно как и граничным условиям

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0, \quad (Q_x)_{x=\pm \frac{a}{2}} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right)_{x=\pm \frac{a}{2}} = 0. \quad (c)$$

Прогиб w_2 берем в виде ряда

$$w_2 = A_0 + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (d)$$

каждый член которого удовлетворяет условиям (c). Функции Y_m должны быть подобраны таким образом, чтобы удовлетворялось однородное уравнение

$$\Delta \Delta w_2 = 0, \quad (e)$$

и, сверх того, так, чтобы w удовлетворяло граничным условиям на краях $y = \pm b/2$. Уравнение (e) и условия симметрии будут удовлетворяться, если мы припишем ряду (d) форму

$$w_2 = A_0 + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (f)$$

где постоянные A_0 , A_m и B_m подлежат определению из граничных условий на краю $y = b/2$. Из условия, указанного ранее относительно наклона, т. е. из

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}} = 0,$$

мы непосредственно получим

$$B_m = -A_m \frac{\operatorname{th} \alpha_m}{\alpha_m + \operatorname{th} \alpha_m}, \quad (g)$$

где, как и раньше,

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}. \quad (h)$$

Приняв теперь во внимание условие, налагаемое на перерезывающую силу, мы видим, что в нормальном сечении nn (рис. 122, *b*) пластинки, бесконечно близком к краю $y = b/2$, перерезывающая сила Q_y равна нулю во всех точках, за исключением тех, которые близки к колоннам, причем в этих последних точках Q_y должна быть бесконечно большой, чтобы передать конечную нагрузку $1/2 qab$ колонне (рис. 122, *c*) на бесконечно малом расстоянии между $x = a/2 - c$ и $x = a/2 + c$. Представив Q_y тригонометрическим рядом, который по

условию симметрии имеет вид

$$Q_y = C_0 + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (i)$$

и заметив, что

$$Q_y = 0 \quad \text{для} \quad 0 < x < \frac{a}{2} - c \quad \text{и что}$$

$$\int_{\frac{a}{2}-c}^{\frac{a}{2}} Q_y dx = -\frac{qab}{4},$$

находим, пользуясь обычным приемом расчета, что

$$C_0 = -\frac{qab}{2a} = -\frac{P}{2a}$$

и

$$C_m = \frac{4}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} Q_y \cos \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{P}{a} (-1)^{\frac{m}{2}},$$

где $P = qab$ представляет собой полную нагрузку на панель пластинки. Подстановка этих значений коэффициентов C_0 и C_m в ряд (i) дает нам искомое граничное условие в таком виде:

$$\begin{aligned} (Q_y)_{y=\frac{b}{2}} &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=\frac{b}{2}} = \\ &= -\frac{P}{a} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a} - \frac{P}{2a}. \end{aligned}$$

Подставив сюда вместо w выражение (a) и обратив внимание на то, что второй член в скобках обращается в нуль в силу граничного условия для $\partial w / \partial y$, получаем

$$-D \left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} \right)_{y=\frac{b}{2}} = -\frac{P}{a} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a},$$

откуда, пользуясь выражением (f), находим, что

$$D \frac{m^3 \pi^3}{a^3} [(A_m + 3B_m) \operatorname{sh} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m] = \frac{P}{a} (-1)^{\frac{m}{2}}. \quad (j)$$

Решая уравнения (q) и (j) относительно постоянных A_m и B_m , получаем

$$\left. \begin{aligned} A_m &= -\frac{Pa^2}{2m^3\pi^3D} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{\alpha_m + \text{th } \alpha_m}{\text{sh } \alpha_m \text{ th } \alpha_m}, \\ B_m &= \frac{Pa^2}{2m^3\pi^3D} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\text{sh } \alpha_m}. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Прогиб пластинки принимает, таким образом, вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{qb^4}{384D} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) + A_0 + \frac{qa^3b}{2\pi^3D} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \text{sh } \alpha_m \text{ th } \alpha_m} \times \\ &\times \left[\text{th } \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \text{sh } \frac{m\pi y}{a} - (\alpha_m + \text{th } \alpha_m) \text{ch } \frac{m\pi y}{a} \right]. \quad (l) \end{aligned}$$

Постоянную A_0 можно будет теперь определить из того условия, что прогиб в вершинах пластинки обращается в нуль, т. е.

$$(w)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} = 0.$$

Тогда

$$A_0 = -\frac{qa^3b}{2\pi^3D} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha_m - \frac{\alpha_m + \text{th } \alpha_m}{\text{th}^2 \alpha_m} \right). \quad (m)$$

С помощью выражений (l) и (m) можно вычислить прогиб в любой точке пластинки. Максимальный прогиб получится, очевидно, в центре

$$\begin{aligned} (w)_{x=0, y=0} &= \frac{qb^4}{384D} - \frac{qa^3b}{2\pi^3D} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{\alpha_m + \text{th } \alpha_m}{\text{sh } \alpha_m \text{ th } \alpha_m}}{m^3} - \\ &- \frac{qa^3b}{2\pi^3D} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha_m - \frac{\alpha_m + \text{th } \alpha_m}{\text{th}^2 \alpha_m} \right). \quad (n) \end{aligned}$$

Вычисленные для некоторых величин отношения b/a значения этого прогиба приведены в таблице 57. Здесь даны и вычисленные по формулам (101) и (l) значения моментов $(M_x)_{x=0, y=0}$ и $(M_y)_{x=0, y=0}$.

Мы видим, что при $b > a$ максимальный изгибающий момент в центре пластинки не очень значительно отличается от момента в середине равномерно нагруженной полоски длиной b , защемленной по концам.

Т а б л и ц а 57

Прогибы и моменты в центре панели (рис. 122)
($\nu = 0,2$)

b/a	$w = \alpha \frac{qb^4}{D}$	$M_x = \beta qb^2$	$M_y = \beta_1 qb^2$
	α	β	β_1
1	0,00581	0,0331	0,0331
1,1	0,00487	0,0261	0,0352
1,2	0,00428	0,0210	0,0363
1,3	0,00387	0,0175	0,0375
1,4	0,00358	0,0149	0,0384
1,5	0,00337	0,0131	0,0387
2,0	0,00292	0,0092	0,0411
∞	0,00260	0,0083	0,0417

В опорных точках пластинки возникают сосредоточенные реакции, и определяемые по формуле (1) моменты становятся при этом бесконечно большими.

Мы вправе, однако, допустить, что реактивные силы распределяются равномерно по площади круга, представляющего поперечное сечение колонны. Возникающие в центре опорной площади изгибающие моменты сохраняют при этом конечную величину и могут быть вычислены способом, сходным с тем, которым мы пользовались для прямоугольной пластинки (стр. 171). В применении к рис. 122 результат выражается формулами¹⁾

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} &= M_0 - \frac{qb^2}{4} \left[\frac{\nu}{3} + (1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{n\pi b}{a}} \right], \\ (M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} &= M_0 + \frac{qb^2}{4} \left[-\frac{1}{3} + (1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh}^2 \frac{n\pi b}{a}} + (1-\nu) \frac{a}{\pi b} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

В этих выражениях

$$M_0 = -\frac{qab}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{2\pi c (1-q^2)^2 (1-q^4)^2 \dots} + 1 \right],$$

$q = -\pi b/a$, а через c обозначен радиус круга, предполагаемого достаточно малым в сравнении с пролетами a и b панели. Выполнение указываемых вычислений приводит уравнения (o) к виду

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} &= -\frac{qab}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} - (\alpha + \beta\nu) \right], \\ (M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}} &= -\frac{qab}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} - (\beta + \alpha\nu) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

¹⁾ Такие вычисления были произведены А. Надаи в его книге «Elastische Platten», стр. 154, Берлин, 1925.

Входящие сюда коэффициенты α и β приводятся для некоторых отношений b/a в таблице 58.

Таблица 58

Значения коэффициентов α и β в уравнениях (р)
для моментов на опоре

b/a	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0
α	0,811	0,822	0,829	0,833	0,835	0,836	0,838
β	0,811	0,698	0,588	0,481	0,374	0,286	0,256

Изгибающие моменты в центрах колонн прямоугольного сечения можно вычислить, исходя из предпосылки, что опорные реакции распределены равномерно по прямоугольникам, заштрихованным на рис. 123 и представляющим собой поперечные сечения колонн¹⁾. В случае квадратных панелей и квадратных колонн имеем $c/a = d/b = k$, и моменты в центрах колонн и центрах панелей определяются из следующих формул:

$$(M_x)_{x=y=\frac{a}{2}} = (M_y)_{x=y=\frac{a}{2}} = -\frac{(1+\nu)qa^2}{4} \left[\frac{(1-k)(2-k)}{12} + \frac{1}{\pi^3 k^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^3 \operatorname{sh} m\pi} \operatorname{sh} \frac{m\pi k}{2} \operatorname{ch} \frac{m\pi(2-k)}{2} \sin m\pi k \right], \quad (q)$$

$$(M_x)_{x=y=0} = (M_y)_{x=y=0} = -\frac{(1+\nu)qa^2}{4} \left[\frac{1-k^2}{12} + \frac{1}{\pi^3 k^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\operatorname{sh} m\pi k \sin m\pi k}{m^3 \operatorname{sh} m\pi} \right]. \quad (r)$$

Значения этих моментов, а также моментов для середин пролетов между колоннами, полученные на основе того же решения и вычисленные для различных значений k и $\nu = 0,2$, приводятся в таблице 59.

Из таблицы видно, что моменты у колонн значительно больше, чем моменты в центрах панелей, причем их величина в значительной степени зависит от размеров поперечного сечения колонн. Моменты в центрах панелей остаются практически постоянными для $k \leq 0,2$.

¹⁾ Этот случай был исследован Войновским-Кригером (Woinowsky-Krieger S., Z. angew. Math. Mech., т. 14, стр. 13, 1934). См. также работы: Lewe V., Bauingenieur, т. 1, стр. 631, 1920, и Frey K., Bauingenieur, т. 7, стр. 21, 1926.

Таблица 59

Изгибающие моменты и максимальная перерезывающая сила для квадратной панели равномерно загруженной пластинки (рис. 123) ($\nu = 0,2$)

$u/a = k$	$(M)_{x=y=a/2} = \beta qa^2$	$(M)_{x=y=0} = \beta_1 qa^2$	$(M_x)_{x=a/2, y=0} = \beta_2 qa^2$	$(M_y)_{x=a/2, y=0} = \beta_3 qa^2$	$Q_{\max} = \gamma qa$
	β	β_1	β_2	β_3	γ
0	$-\infty$	0,0331	-0,0185	0,0512	∞
0,1	-0,196	0,0329	-0,0182	0,0508	2,73
0,2	-0,131	0,0321	-0,0178	0,0489	
0,3	-0,0933	0,0308	-0,0170	0,0458	0,842
0,4	-0,0678	0,0289	0,0158	0,0415	
0,5	-0,0487	0,0265	-0,0140	0,0361	0,419

Поэтому предыдущее решение, полученное в предположении, что опорные реакции сосредоточены в вершинах панелей, остается достаточно точным для центрального участка панели.

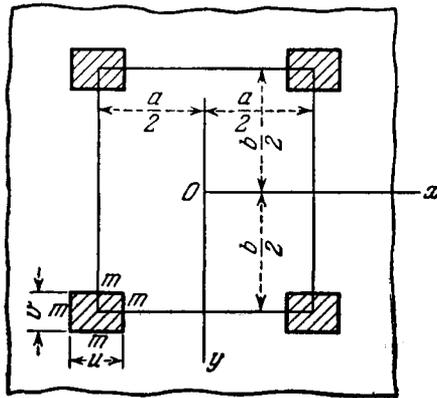


Рис. 123.

Приближенное вычисление моментов с помощью ряда формулы (q) можно выполнить также и на основе выражений (p). Введя сюда с этой целью уравнение (с) § 37, подставим в равенства (p) значение

$$c = \frac{u}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi}{4} - 1} = 0,57u,$$

т. е. величину радиуса круга, эквивалентного площади заданного квадрата $u \times u$. В частном случае квадратных панелей получаемые таким путем численные результаты лишь незначительно отличаются от значений, приведенных во втором столбце таблицы 59.

Перерезывающие силы достигают своего максимального значения по серединам сторон колонн в точках m на рис. 123. Это значение для случая квадратных панелей зависит от величины отношения k и может быть представлено формулой $Q = \gamma qa^2$. Несколько численных значений коэффициента γ приведено в таблице 59. Интересно отметить, что разница между этими значениями и средними значениями, получающимися в результате деления полной приходящейся на колонну нагрузки $qa^2(1 - k^2)$ на периметр $4ka$ поперечного сечения колонны, составляет всего лишь около 10%.

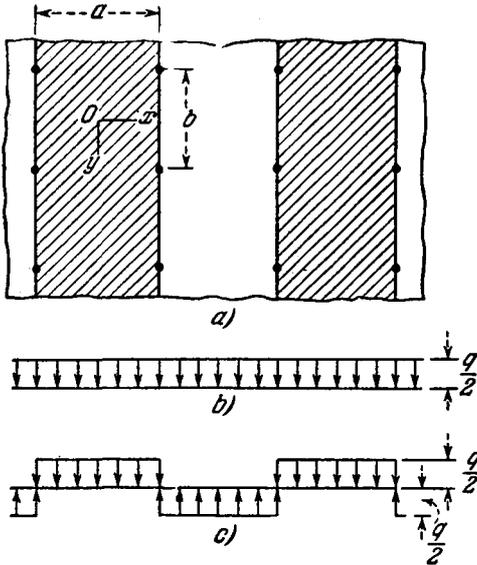


Рис. 124.

Равномерное загрузение всей пластинки создает наиболее неблагоприятные условия у колонн. Чтобы получить максимальный изгибающий момент в центре панели, нагрузку следует распределить так, как показано на рис. 124, *a* штриховкой. Решение для этого

случая легко получается комбинированием показанного на рис. 124, *b* равномерного распределения нагрузки интенсивностью $q/2$ с показанной на рис. 124, *c* нагрузкой $q/2$, меняющей знак в смежных последовательных пролетах. Поверхность прогибов в последнем случае получается, очевидно, такой же, как и для равномерно нагруженной полоски длиной a , свободно опертой на концах. Взяв, например, случай квадратных панелей и воспользовавшись значениями таблицы 57, находим для центра панели (рис. 124, *a*)

$$(w)_{x=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,00581 \frac{a^4}{D} + \frac{5}{384} \frac{qa^4}{2D} = 0,00942 \frac{qa^4}{D},$$

$$(M_x)_{x=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,0331 a^2 + \frac{1}{16} qa^2 = 0,0791 qa^2,$$

$$(M_y)_{x=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,0331 a^2 + \frac{0,2}{16} qa^2 = 0,0291 qa^2.$$

Из таблицы 59 заключаем, что

$$(M_x)_{x=0, y=\frac{b}{2}} = \frac{1}{2} q \cdot 0,0512 a^2 + \frac{1}{16} qa^2 = 0,0881 qa^2.$$

Эти результаты получены в предположении, что пластинка может у опор свободно поворачиваться. Обычно колонны жестко соединены с перекрытием и в случае, если нагрузка распределена по схеме рис. 124, их воздействие на перекрытие не исчерпывается одними лишь вертикальными реакциями, но проявляется также в форме моментов, стесняющих изгиб панелей. Подобное сочетание безбалочного перекрытия с колонной, представляющее собой конструкцию с жесткими узлами, должно быть поэтому рассчитано путем обобщения теории рам — только таким путем можно получить более точные значения изгибающих моментов под знакопеременной нагрузкой¹⁾.

Случай, когда одна панель равномерно загружена, четыре же смежных с ней свободны от нагрузки, получается путем наложения на равномерную нагрузку $q/2$ нагрузки $q/2$, знаки которой чередуются, как показано на рис. 125. В этом последнем случае каждая панель находится в тех же условиях, что и свободно опертая пластинка, и все необходимые данные относительно изгиба ее могут быть взяты из таблицы 8. Для центра панели квадратной пластинки находим

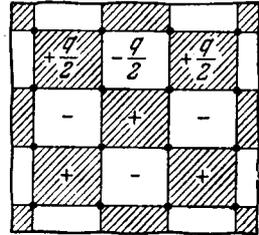


Рис. 125.

$$(\omega)_{x=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0,00581 \frac{a^4}{D} + \frac{1}{2} q \cdot 0,00406 \frac{a^4}{D} = 0,00494 qa^4/D.$$

$$\begin{aligned} (M_x)_{x=y=0} &= (M_y)_{x=y=0} = \\ &= \frac{1}{2} q \cdot 0,0331 a^2 + \frac{1}{2} q \cdot 0,0479 \cdot \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} a^2 = 0,0387 qa^2. \end{aligned}$$

Тем же по существу приемом, т. е. использованием закона двойной периодичности в прогибах, решается и случай пластинки бесконечно большой протяженности, загруженной равными сосредоточенными силами, приложенными в центрах всех панелей²⁾.

Исследована также и задача изгиба равномерно загруженного безбалочного перекрытия из косоугольных панелей³⁾.

55. Безбалочное перекрытие из девяти панелей и перекрытия с двумя свободными краями. До сих пор предполагалось, что исследуемое перекрытие имеет неограниченное простираение.

¹⁾ Рекомендуемый способ излагается в ряде опубликованных работ; см., например, Магнус Н., Die Theorie elastischer Gewebe, стр. 310, Берлин, 1932.

²⁾ Эта задача обсуждается в книге Лева (Lewe V., Pflzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten, Берлин, 1926), а также в работе Pozzati P., Riv. math. Univ. Parma, т. 2, стр. 123, 1951.

³⁾ См. Блох В. И., Доклады АН СССР, т. 73, стр. 45, 1950.

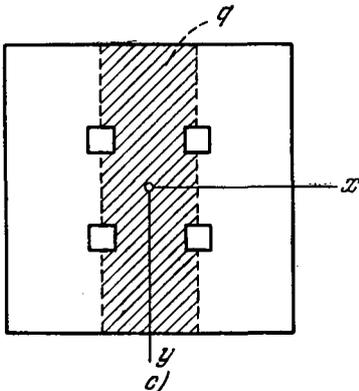
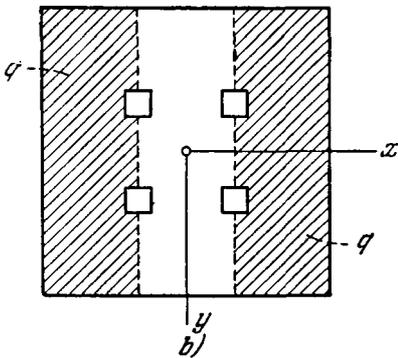
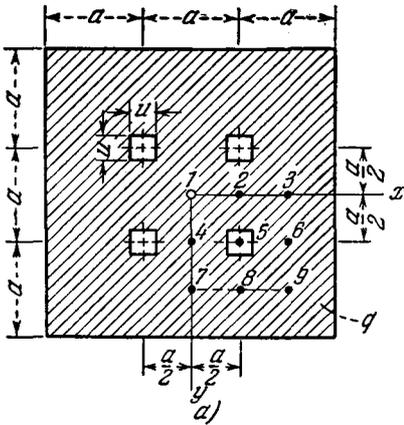


Рис. 126.

Рассмотрим теперь пластинку, свободно опертую на наружные стены, замыкающие ее квадратный контур, а также на четыре внутренние колонны (рис. 126). Из симметрии заключаем, что под равномерной нагрузкой интенсивностью q пластинка вызовет в колоннах одинаковые реакции R , которые в данной статически неопределимой системе можно рассматривать как лишние неизвестные. Устранив из системы все колонны, получим свободно опертую квадратную пластинку, несущую лишь заданную нагрузку q . Прогибы w_0 , производимые этой нагрузкой над центрами колонн, легко вычисляются с помощью теории, изложенной в главе V. Далее, устранив нагрузку q и распределив силу $R=1$ (действующую внизу) равномерно по каждой из площадей $a \times a$, получим в тех же точках $x = \pm a/2$, $y = \pm a/2$ некоторые иные прогибы w_1 . Из того условия, что фактически в этих точках пластинка не прогибается, заключаем, что $w_0 - R w_1 = 0$, откуда находим $R = w_0/w_1$. Теперь остается лишь учесть совместное влияние как равномерной нагрузки q , так и четырех (теперь уже известных) реакций колонн на изгибающие моменты квадратной пластинки размером $3a \times 3a$.

В случае частичного загроужения пластинки по схемам рис. 126, *b* и *c* нам следует наложить только что полученные значения моментов, уменьшив их предварительно вдвое, на моменты свободно опертой пластинки площадью $a \times 3a$, несущей равномерно распределен-

ную нагрузку $\pm q/2$. Вычисления, выполненные по этому способу Маркусом¹⁾, позволили найти изгибающие моменты, приведенные в таблице 60. Реакция колонны в этом случае оказалась равной $R = 1,196 qa^2$. Подобным же способом можно исследовать и моменты в балке бесконечной длины, опертой не только по двум своим параллельным краям, но и по одному или же нескольким рядам равностоящих колонн²⁾.

Без всяких затруднений решается для некоторых типов загрузки также и случай изгиба длинной прямоугольной пластинки, опирающейся лишь на два параллельных ряда колонн (рис. 127). Начнем со случая,

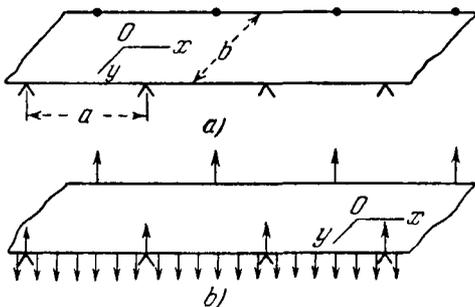


Рис. 127.

когда пластинка изогнута моментами M_y , выраженными посредством

Таблица 60

Коэффициенты β для определения изгибающих моментов $M = \beta qa^2$ свободно опертой квадратной пластинки, опирающейся на четыре промежуточные колонны (рис. 126) ($u/a = 0,25$, $v = 0,2$)

Точка	$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{b}$	Нагрузка a		Нагрузка b		Нагрузка c	
			M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
1	0	0	0,021	0,021	-0,048	-0,004	0,069	0,025
2	0,5	0	-0,040	0,038	-0,020	0,019	-0,020	0,019
3	1,0	0	0,069	0,025	0,093	0,027	-0,024	-0,002
4	0	0,5	0,038	-0,040	-0,036	-0,036	0,074	-0,004
5	0,5	0,5	-0,140	-0,140	-0,070	-0,070	-0,070	-0,070
6	1,0	0,5	0,074	-0,004	0,092	0,014	-0,018	-0,018
7	0	1,0	0,025	0,069	-0,028	0,017	0,052	0,052
8	0,5	1,0	-0,004	0,074	-0,002	0,037	-0,002	0,037
9	1,0	1,0	0,053	0,053	0,066	0,044	-0,013	0,009

¹⁾ Marcus H., Die Theorie elastischer Gewebe, см. также Lewe, цит. выше. Случай квадратной пластинки с одной промежуточной опорой был исследован Нильсеном (Nielsen N. J., Bestemmelse af Spaendinger i Plader стр. 217, Копенгаген, 1920).

²⁾ Задача была решена Грейном (Grein K., Pilzdecken, Берлин, 1948).

ряда

$$(M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = M_0 + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (a)$$

Поскольку поперечная нагрузка отсутствует, изогнутую поверхность пластинки можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} w = & A_0 + A_1 \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) + \\ & + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (b) \end{aligned}$$

коэффициенты которого надлежит определить из следующих граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=\pm \frac{b}{2}} &= M_0 + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} E_m \cos \frac{m\pi x}{a}, \\ D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=\pm \frac{b}{2}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

а также из условия, что прогиб у колонн обращается в нуль. Подставив ряд (b) в уравнения (c), находим, что

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{M_0}{2D}, \\ A_m &= -\frac{a^2 E_m}{\pi^2 m^2 D} \frac{(1 + \nu) \operatorname{sh} \alpha_m - (1 - \nu) \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m}{(3 + \nu)(1 - \nu) \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - \alpha_m (1 - \nu)^2}, \\ B_m &= -\frac{a^2 E_m}{\pi^2 m^2 D} \frac{\operatorname{sh} \alpha_m}{(3 + \nu) \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m - \alpha_m (1 - \nu)}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Сочетая это решение с решением (1) § 54, получаем возможность исследовать изгиб пластинки, показанной на рис. 127, а, под равномерно распределенной нагрузкой. С этой целью вычислим изгибающие моменты M_y из выражения (1) по формуле (101).

При этом мы получим

$$\begin{aligned} (M_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} &= \\ &= -\frac{qb^2}{12} - \frac{qab}{2\pi} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m} \left[\frac{1 + \nu}{\operatorname{th} \alpha_m} - \frac{\alpha_m (1 - \nu)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_m} \right] \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (e) \end{aligned}$$

Приравнивая этот момент взятому с обратным знаком моменту (а), найдем значения M_0 и E_m , которые надо будет подставить в уравнения (д) для определения постоянных A_1 , A_m и B_m , входящих в выражение (б). Складывая выражение (б) при этих значениях постоянных с выражением (1) § 54, получим искомое решение для показанной на рис. 127, а равномерно нагруженной пластинки.

Сочетая это решение с прогибом равномерно нагруженной свободно опертой полоски длиной b , равным

$$w = -\frac{q}{24D} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \left(\frac{5}{4} b^2 - y^2 \right),$$

получаем решение для случая, когда пластинка изогнута, как показано на рис. 127, б, нагрузкой, равномерно распределенной по ее краям.

56. Влияние жесткого соединения с колонной на моменты в безбалочном перекрытии. В исследованиях изгиба перекрытий мы неизменно предполагали, что реакции колонн сосредоточены в некоторых точках или распределены равномерно по некоторой площади в соответствии с поперечным сечением колонны или ее капители. Как правило, однако, бетонные перекрытия сочленяются с колоннами в жесткие узлы по схеме, указанной на рис. 128.

Приступая к определению моментов в подобного рода жестких узлах, начнем со случая круглой колонны и положим, что радиус ее поперечного сечения равен c . Воспользовавшись ¹⁾ выражением (1) (§ 54), убеждаемся, что для квадратной панели ($a = b$) и малых значений c/a изгибающие моменты в радиальном направлении обращаются практически в нуль по окружности радиуса $e = 0,22a$ (рис. 122, а). Поэтому часть пластинки, лежащая вне контура колонны и внутри этой окружности, находится в условиях кольцевой пластинки, свободно опертой по окружности $r = 0,22a$ и защемленной по окружности $r = c$, при поперечном смещении одной окружности относительно другой. На этом основании максимальные напряжения изгиба вокруг колонны можно получить из формул (75), выведенных ранее для круглой пластинки (см. стр. 77) и комбинируя по рис. 36 случаи 3 и 8.

Более подробная разработка этой задачи выполнена Тёлке ²⁾. Численные результаты, полученные им для квадратной панели и $c/a = 0,1$ (рис. 129), приводятся в таблице 61, вместе со значениями изгибающих моментов, вычисленными для тех же условий на основе обычной теории. Из таблицы

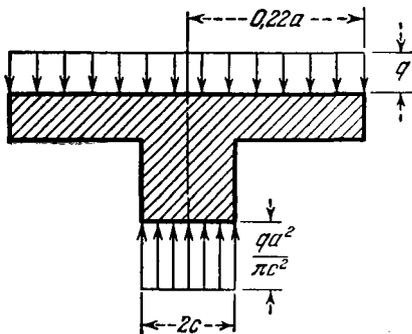


Рис. 128.

¹⁾ Эти вычисления были выполнены А. Надаи; см. его книгу *Elastische Platten*, стр. 156, Берлин, 1925.

²⁾ Tölkе F., *Ingr.-Arch.*, т. 5, стр. 187, 1934.

Таблица 61

Коэффициенты β для вычисления изгибающих моментов $M = \beta qa^2$ равномерно загруженной панели безбалочного перекрытия ($\nu = 0,2$)

Изгибающий момент	Точка панели	Круглая колонна (рис. 129)		Квадратная колонна (рис. 130)	
		жесткое соединение с колонной	обычная теория	жесткое соединение с колонной	обычная теория
$M_x = M_y$	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}$	0,0292	0,0323	0,0264	0,0321
M_x	$x = \frac{a}{2}, y = 0$	0,0399	0,0494	0,0348	0,0487
M_y	$x = \frac{a}{2}, y = 0$	-0,061	-0,0179	-0,0146	-0,0178
$M_x = M_y$	$x = 0, y = 0$...	-0,143	...	-0,131
M_x	$x = \frac{u}{2}, y = 0$	-0,0626	-0,0803
M_r	$x = \frac{u}{2}, y = \frac{u}{2}$	$-\infty$	-0,0480
M_r	$r = c$	-0,1682	-0,0629		

видно, что жесткому соединению перекрытия с колонной свойственна тенденция увеличивать абсолютные значения моментов над опорами и уменьшать положительные моменты в пролете.



Рис. 129.

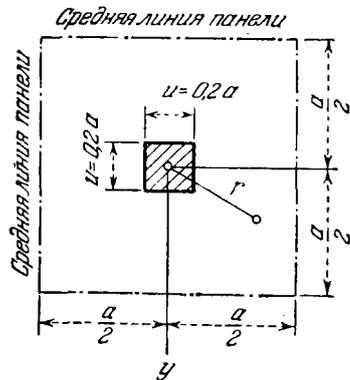


Рис. 130.

В этой же таблице указаны моменты для безбалочного перекрытия, жестко укрепленного на колоннах квадратного профиля¹⁾ (рис. 130). Беско-

¹⁾ См. Wołnowsky-Krieger S., J. Appl. Mech., т. 21, стр. 263, 1954.

нечно большие напряжения, возникающие в этом случае над углами колонн, носят резко выраженный локальный характер. Практически их эффект ограничивается образованием трещин в растянутых зонах бетона и местным течением стальной арматуры.

Из изложенного можно заключить, (1) что фактические значения изгибающих моментов в безбалочных перекрытиях над опорами лежат, как общее правило, между значениями, указанными в таблице 61 для жесткого узла, и значениями обычной теории и (2) что круглые колонны гарантируют более равномерное распределение моментов защемления, чем колонны, опорная площадь которых имеет квадратную форму¹⁾.

¹⁾ См. Haas T., *Conception et calcul des planchers à dalles champignon*, Париж, 1950. Распределение напряжений в безбалочном перекрытии было исследовано экспериментально Рошем и Эйхингером (Ros M., Eichinger A., Proc. Congr. Concrete and Reinforced Concrete, Льеж, 1930), а также Каминадом и Лермитом (Caminade R., L'Hermitte R., Ann. inst. tech. bâtiment et trav. publ., февраль 1936) и позднее Хагеманом (Hagemann J. G., Ingenieur, т. 65, июнь 1953).

Г Л А В А VIII

ПЛАСТИНКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

57. Изгиб, симметричный относительно центра. Поперечно нагруженная пластинка может покоиться на упругом основании, как это имеет место, например, в бетонных покрытиях автомобильных дорог или взлетно-посадочных полос аэродромов, а также в настилах. Исследование подобных задач начнем исходя из простейшего предположения о том, что интенсивность реакции основания пропорциональна прогибам w пластинки. Эта интенсивность определяется выражением $k w$, в котором коэффициент k называется *модулем основания* или *коэффициентом постели* и имеет размерность давления (выраженного в $кг/см^2$), отнесенного к единице прогиба ($см$). Численное значение этого модуля в значительной мере зависит от свойств основания. В применении к дорожным покрытиям или настилам это значение можно установить приблизительно из нижеприводимой таблицы 62¹⁾.

Начнем со случая круглой пластинки, нагруженной симметрично относительно центра. Положив в основу уравнение (58), присоединим к заданной поперечной нагрузке q нагрузку $-k w$, представляющую реакцию основания. Тогда дифференциальное уравнение изгиба пластинки примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right) = \frac{q - k w}{D}. \quad (178)$$

В частном случае пластинки, нагруженной в центре²⁾ силой P , интенсивность q обращается в нуль по всей площади пластинки, за

¹⁾ В таблице принята классификация грунтов по Казагранде. Она, однако, не снимает необходимости экспериментального определения k при исследовании несущей способности пластинки. Более подробные сведения имеются в Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., т. 113, стр. 901, 1948. См. также Terzaghi K., Géotechnique, т. 5, стр. 297, 1955 (Harvard Soil Mechanics Series, № 51).

²⁾ Эта задача была исследована Герцем (Herz H., Wiedemann's Annalen der Physik und Chemie, т. 22, стр. 449, 1884); см. также его «Gesammelte Werke», т. 1, стр. 288, 1895; см. также Föppel A., Vorlesungen über

Таблица 62

Значения модуля основания (коэффициента постели)

Коэффициент постели K в $\text{кг/см}^2/\text{см}$									
2,16	4,15		5,52	6,9		13,8			22,7
Общая классификация грунтов, используемых в качестве земляного полотна (земляной постели), балластов и оснований покрытий									
Весьма слабый грунт	Слабый грунт	Хороший грунт	Отличный грунт	Хорошая балластная постель	Хор. основание		Отличн. основание		
						Гр. Х			
						Гр. Гл.			
						Гр. Пл.			
						Гр. М			
						П. Х.			
						П. Гл.			
						П. Пл.			
						П. М			
						Гл. С.-сж.		И. М.-ср.-сж.	
						О. С.-сж.		Гл. М.-ср.-сж.	
								О. М.-ср.-сж.	
								И. С.-сж.	

Гр. - гравий, П. - песок, И. - очень мелкозернистый песок - ил, Гл. - глина, М. - мелочь, материал из зерен меньше 0,1 мм, О - грунт органического происхождения, Х. - материал хорошо отсортированный - с подобранным зерновым составом, Пл. - плохо просеянный, М.-ср.-сж. - малой, средней сжимаемости, С.-сж. - сильной сжимаемости.

исключением центра. Введя обозначение

$$\frac{k}{D} = \frac{1}{l^4}, \quad (a)$$

приведем уравнение (178) к следующему виду:

$$l^4 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + w = 0. \quad (b)$$

Так как k измеряется в килограммах на кубический сантиметр (кг/см^3), а D в килограммо-сантиметрах (кгсм), то величина l обладает размерностью длины. Для упрощения наших дальнейших выкладок удобно ввести безразмерные величины, воспользовавшись следующими обозначениями:

$$\frac{w}{l} = z, \quad \frac{r}{l} = x. \quad (c)$$

technische Mechanik, т. 5, стр. 103, 1922. Нужно учесть, что объектом исследования Герца была пластинка, плавающая на поверхности жидкости, а не пластинка на упругом основании. Здесь поэтому гипотеза о постоянстве k выполняется, поскольку k у Герца — удельный вес жидкости.

Тогда уравнение (b) примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right) \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx}\right) + z = 0. \quad (d)$$

Применив символ Δ вместо

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx},$$

мы напишем это уравнение таким образом:

$$\Delta \Delta z + z = 0. \quad (e)$$

Это — линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка, общее решение которого может быть представлено в следующем виде:

$$z = AX_1(x) + BX_2(x) + CX_3(x) + DX_4(x), \quad (f)$$

где A, \dots, D — постоянные интегрирования, а функции x_1, \dots, x_4 представляют собой четыре независимых решения уравнения (e).

Попытаемся теперь найти решение уравнения (e) в виде степенного ряда. Пусть $a_n x^n$ будет общий член этого ряда. Дифференцирование дает нам тогда

$$\Delta(a_n x^n) = n(n-1)a_n x^{n-2} + na_n x^{n-2} = n^2 a_n x^{n-2}$$

и

$$\Delta \Delta(a_n x^n) = n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4}.$$

Для выполнения уравнения (e) необходимо, чтобы каждому члену $a_n x^n$ в ряде соответствовал такой член $a_{n-4} x^{n-4}$, для которого было бы справедливо соотношение

$$n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4} + a_{n-4} x^{n-4} = 0. \quad (g)$$

При этом условии по подстановке ряда в уравнение (e) все его члены исчезают. Поэтому, если этот ряд сходящийся, то он представляет собой частное решение уравнения. Из уравнения (g) следует, что

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2}. \quad (h)$$

Заметив также, что

$$\Delta \Delta(a_0) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta \Delta(a_2 x^2) = 0, \quad (i)$$

приходим к выводу, что имеются два ряда, удовлетворяющие уравнению (е), а именно:

$$\left. \begin{aligned} X_1(x) &= 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \\ \text{и} \\ X_2(x) &= x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \frac{x^{14}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Из обозначений (с) можно видеть, что при малых значениях расстояния r , т. е. для точек, близких к точке приложения нагрузки P , величина x мала и ряды (j) быстро сходятся. Мы видим также, что последовательные производные рядов (j) сохраняют конечное значение в точке приложения нагрузки ($x=0$). Это указывает на то, что одних этих рядов недостаточно для представления напряженного состояния в точке приложения нагрузки, где, как известно из ранее разобранных случаев, изгибающие моменты становятся бесконечно большими.

По этим соображениям частное решение X_3 уравнения (е) берется нами в следующем виде:

$$X_3 = X_1 \ln x + F_3(x), \quad (k)$$

где $F_3(x)$ — функция x , которую точно так же можно представить степенным рядом. Дифференцируя, находим

$$\Delta \Delta X_3 = \frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \ln x \Delta \Delta X_1 + \Delta \Delta F_3(x);$$

подставляя же X_3 вместо z в уравнение (е), получаем

$$\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \ln x (\Delta \Delta X_1 + X_1) + \Delta \Delta F_3(x) + F_3(x) = 0.$$

Поскольку X_1 удовлетворяет уравнению (е) и может быть представлена первым рядом (j), получаем для определения $F_3(x)$ следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F_3(x) + F_3(x) &= -\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} = \\ &= -4 \left(-\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot x^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^{12} \cdot 12^2} + \dots \right). \quad (l) \end{aligned}$$

Взяв $F_3(x)$ в виде ряда

$$F_3(x) = b_4 x^4 + b_8 x^8 + b_{12} x^{12} + \dots \quad (m)$$

и подставив этот ряд в уравнение (l), определим коэффициенты b_4, b_8, b_{12}, \dots так, чтобы наше уравнение удовлетворялось. Заметим, что

$$\Delta \Delta (b_4 x^4) = 4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4,$$

и приравняв нулю сумму членов, не содержащих x , мы найдем, что

$$4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4 = 4 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2}$$

или

$$b_4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 4^4} = \frac{3}{128}.$$

Приравнявая нулю сумму членов, содержащих x^4 , находим

$$b_8 = -\frac{25}{1769472}.$$

Вообще будем иметь

$$b_n = (-1)^{\frac{n}{4}-1} \frac{1}{n^2(n-2)^2} \left[b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots n^2} \right].$$

Таким образом, третье частное решение уравнения (e) будет

$$X_3 = X_1 \ln x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \dots \quad (n)$$

Подобным же способом мы найдем и четвертый частный интеграл X^4 уравнения (e), положив

$$\begin{aligned} X_4 &= X_2 \ln x + F_4(x) = \\ &= X_2 \ln x + 4 \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} x^6 - \frac{1}{10^2 \cdot 8^2} \left(4 \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{4^2 \cdot 6^2 \dots 10^2} \right) x^{10} + \dots \quad (o) \end{aligned}$$

Подставив частные решения (j), (n) и (o) в выражение (f), получим общее решение уравнения (e) в следующем виде:

$$\begin{aligned} z &= A_1 \left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) + \\ &+ A_2 \left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) + \\ &+ A_3 \left[\left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) \ln x + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \dots \right] + \\ &+ A_4 \left[\left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \ln x + \right. \\ &+ \left. \frac{5}{3456} x^6 - \frac{1054 \cdot 10^{-4}}{442368} x^{10} + \dots \right]. \quad (p) \end{aligned}$$

Теперь остается лишь определить в каждом частном случае постоянные интегрирования A_1, \dots, A_4 так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Рассмотрим случай, когда контур круглой пластинки радиуса a совершенно свободен (не оперт). Используя для радиальных мо-

ментов выражение (52), а для радиальных перерезывающих сил Q_2 выражение (55), напомним граничные условия в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

В дополнение к этим двум уравнениям мы имеем еще два условия, относящиеся к центру пластинки, а именно, что прогиб в центре пластинки должен иметь конечное значение, а сумма перерезывающих сил, распределенных по боковой поверхности бесконечно малого круглого цилиндра, вырезанного из пластинки в ее центре, должна уравновешивать сосредоточенную силу P . Первое из этих двух условий приводит нас к тому заключению, что постоянная A_3 в общем решении (p) исчезает. Второе условие дает

$$\left(\int_0^{2\pi} Q_r r d\theta \right)_{r=\epsilon} + P = 0 \quad (r)$$

или, если воспользоваться обозначением (a),

$$-kl^4 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=\epsilon} 2\pi\epsilon + P = 0, \quad (s)$$

где ϵ — радиус бесконечно малого цилиндра. Подставив в это уравнение lz вместо w и воспользовавшись для z выражением (p), найдем, что при бесконечно малом значении x , равном ϵ/l , это уравнение сводится к равенству

$$-kl^4 \frac{4A_4}{l\epsilon} \cdot 2\pi\epsilon + P = 0,$$

из которого следует, что

$$A_4 = \frac{P}{8\pi kl^3}. \quad (t)$$

Имея значения постоянных A_3 и A_4 , мы можем найти из соотношений (q) и обе остальные постоянные A_1 и A_2 . При заданных размерах пластинки и известных модулях пластинки и основания эти соотношения приводятся к двум линейным относительно A_1 и A_2 уравнениям.

Возьмем для примера пластинку радиуса $a = 5$ см и такой жесткости, что

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = 5 \text{ см.}$$

Приложим в центре ее нагрузку такую, что

$$A_4 = \frac{P}{8\pi kl^3} = 102 \cdot 10^{-5}.$$

Приняв это значение для D , подставив lz вместо w и $a/l = 1$ вместо x и воспользовавшись выражением (р), мы найдем из уравнений (q)

$$\begin{aligned} 0,500A_1 + 0,250A_2 &= 4,062A_4 = 4,062 \cdot 102 \cdot 10^{-5}, \\ 0,687A_1 + 8,483A_2 &= 11,09A_4 = 11,09 \cdot 102 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Эти уравнения дают

$$A_1 = 86 \cdot 10^{-4}, \quad A_2 = -64 \cdot 10^{-5}.$$

Подставив эти значения в выражение (р) и приняв в расчет лишь члены, содержащие x в степени не выше четвертой, получим следующее выражение для прогиба:

$$w = lz = 5 \left[86 \cdot 10^{-4} \left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - 64 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 102 \cdot 10^{-5} x^2 \ln x \right) \right].$$

Прогиб в центре ($x = 0$) будет тогда

$$(w)_{\max} = 43 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Прогиб на контуре ($x = 1$)

$$(w)_{\min} = 39,1 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Разница между этими прогибами сравнительно мала, и распределение давления по основанию лишь слегка отличается от равномерного.

Если мы возьмем радиус пластинки вдвое большим ($a = 10$ см), оставив для жесткости пластинки прежнее значение, то величина x окажется на контуре равной 2 и уравнения (q) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} 0,826A_1 + 1,980A_2 &= 1,208A_4, \\ 2,665A_1 + 5,745A_2 &= 16,37A_4. \end{aligned}$$

Эти уравнения дают

$$A_1 = 3,93D = 400 \cdot 10^{-5}, \quad A_2 = -1,03D = -105 \cdot 10^{-5}. \quad (\text{и})$$

Прогиб из выражения (р) получается равным

$$w = lz = 5 \left\{ 400 \cdot 10^{-5} \left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \right) - 105 \cdot 10^{-5} \left(x^2 - \frac{x^6}{576} \right) + \right. \\ \left. + 102 \cdot 10^{-5} \left[\ln x \left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} \right) + \frac{5}{3456} x^6 \right] \right\}.$$

Прогибы в центре и на контуре пластинки будут соответственно

$$w_{\max} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ см} \quad \text{и} \quad w_{\min} = 0,88 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

Мы видим, таким образом, что если радиус пластинки вдвое больше величины l , то распределение давления по основанию уже весьма сильно отличается от равномерного. Использование энергетического метода в задаче изгиба пластинки на упругом основании излагается в § 80.

58. Применение функций Бесселя в задаче об изгибе круглой пластинки. Общее решение (f) уравнения (e) в предыдущем параграфе может быть представлено также через функции Бесселя. С этой целью введем в уравнение (e) новую переменную $\xi = x\sqrt{i}$; таким путем придем к уравнению

$$\Delta' \Delta' z - z = 0, \quad (\text{а})$$

в котором

$$\Delta' = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}.$$

Уравнение (а) эквивалентно уравнению

$$\Delta'(\Delta'z + z) - (\Delta'z + z) = 0, \quad (b)$$

а следовательно, также и уравнению

$$\Delta'(\Delta'z - z) + (\Delta'z - z) = 0. \quad (c)$$

Отсюда следует заключить, что (а) удовлетворяется решениями дифференциального уравнения Бесселя

$$\Delta'z + z = \frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dz}{d\xi} + z = 0, \quad (d)$$

а также и решениями уравнения

$$\Delta'z - z = \frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dz}{d\xi} - z = 0, \quad (e)$$

преобразующегося в (d) при подстановке в него ξi вместо ξ . Поэтому совместное решение уравнений (d) и (e) можно записать в виде

$$z = B_1 I_0(x \sqrt{i}) + B_2 I_0(xi \sqrt{i}) + B_3 K_0(x \sqrt{i}) + B_4 K_0(xi \sqrt{i}). \quad (f)$$

Здесь I_0 и K_0 — бесселевы функции соответственно первого и второго рода, от мнимого аргумента, B_1, B_2, \dots — произвольные постоянные. Поскольку аргумент x — вещественное число, все входящие в уравнение (f) функции имеют комплексный вид. Для выделения вещественной части решения целесообразно ввести четыре новые функции, впервые использованные Кельвином и определяемые как ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} I_0(x \sqrt{\pm i}) &= \text{ber } x \pm \text{bei } x, \\ K_0(x \sqrt{\pm i}) &= \text{ker } x \pm \text{kei } x. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Полагая, далее,

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= C_1 i, & B_1 - B_2 &= -C_2 i i, \\ B_3 + B_4 &= C_3 i, & B_3 - B_4 &= -C_4 i i, \end{aligned}$$

где новые переменные C_1, C_2, \dots — вещественные числа, получаем следующее выражение для прогибов пластинки:

$$w = C_1 \text{ber } x + C_2 \text{bei } x + C_3 \text{ker } x + C_4 \text{kei } x. \quad (h)$$

¹⁾ См., например, Watson G. N., Theory of Bessel functions, стр. 81, Кембридж, 1948 (имеется русский перевод: Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, Москва, 1949).

Все содержащиеся в нем функции табулированы¹⁾ и вещественны для вещественных значений аргумента. Для малых значений аргумента имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ber} x &= 1 - \frac{x^4}{64} + \dots, \\ \operatorname{bei} x &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{2304} + \dots, \\ \operatorname{ker} x &= -\ln x + \ln 2 - \gamma + \frac{\pi x^2}{16} + \dots, \\ \operatorname{kei} x &= -\left(\frac{x^2}{4}\right) \ln x - \frac{\pi}{4} + (1 + \ln 2 - \gamma) \frac{x^2}{4} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\gamma = 0,5772157 \dots$ — постоянная Эйлера, а $\ln 2 - \gamma = 0,11593 \dots$ При больших значениях аргумента пользуются следующими асимптотическими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ber} x &\sim \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right), \\ \operatorname{bei} x &\sim \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \sin\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right), \\ \operatorname{ker} x &\sim \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\frac{2x}{\pi}}} \cos\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right), \\ \operatorname{kei} x &\sim -\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\frac{2x}{\pi}}} \sin\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $\sigma = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Общее решение (h) можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба круглой пластинки, с отверстием или без него, при опирании ее на упругом основании. Четыре постоянные C , соответствующие в наиболее общем случае четырем граничным условиям, определяются в каждом частном случае²⁾.

¹⁾ См. Tables of Bessel functions $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for complex arguments, Columbia Univ. Press, Нью-Йорк, 1943, и аналогичные таблицы для функций $Y_0(z)$ и $Y_1(z)$, Нью-Йорк, 1950. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ber} x &= \operatorname{Re} [J_0(xe^{i\pi/4})], & \operatorname{bei} x &= -\operatorname{Im} [J_0(xe^{i\pi/4})], \\ \operatorname{ker} x &= -\frac{\pi}{2} \operatorname{Re} [Y_0(xe^{i\pi/4})] - \frac{\pi}{2} I_m [J_0(xe^{i\pi/4})], \\ \operatorname{kei} x &= \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} [Y_0(xe^{i\pi/4})] - \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} [J_0(xe^{i\pi/4})]. \end{aligned}$$

²⁾ Ряд частных решений этой задачи указывается Шлейхером в его книге: Schleichner F., Kreisplatten auf elastischer Unterlage, Берлин, 1926. В ней приводятся также таблицы функций $Z_1(x) = \operatorname{ber} x$, $Z_2(x) = -\operatorname{bei} x$, $Z_3(x) = -\left(\frac{2}{\pi}\right) \operatorname{kei} x$, $Z_4(x) = -\left(\frac{2}{\pi}\right) \operatorname{ker} x$ вместе с их первыми производными. Сокращенная таблица функций Z и их первых производных дается ниже, в § 118, где эти функции обозначены через ψ .

Ограничимся случаем бесконечно большой пластинки, несущей сосредоточенную нагрузку P в точке $x = 0$. Из четырех функций, составляющих решение (h), первые две функции неограниченно возрастают с увеличением аргумента, в соответствии с уравнениями (j); функция же $\text{kei } x$ принимает бесконечно большое значение в начале, как это мы можем заключить из уравнений (i). Положив поэтому $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, приводим решение (h) к виду

$$w = C_3 \text{kei } x. \quad (k)$$

Для определения постоянной C_3 вычислим из уравнений (i) перерезывающую силу [см. уравнения (193)]

$$Q_r = -\frac{D}{l^3} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} \right) = \frac{C_3 D}{l^3} \left(\frac{1}{x} - \frac{\pi x}{8} + \dots \right).$$

С уменьшением x величина Q_r стремится к $C_3 D/l^3 x = C_3 D/l^2 r$. С другой стороны, при равномерном распределении нагрузки P по окружности радиуса r имеем $Q_r = -P/2\pi r$. Приравняв оба эти полученные для Q_r выражения, находим

$$C_3 = -\frac{Pl^2}{2\pi D}. \quad (l)$$

Подстановка C_3 в уравнение (k) дает, наконец, полное решение задачи Герца в виде

$$w = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \text{kei } x, \quad (179)$$

а соответствующая реакция основания определяется как $p = kw = \frac{wD}{l^4}$.

Характер изменения этих величин по меридианному сечению изогнутой поверхности пластинки виден из кривых на рис. 131, где нанесены также и аналогичные кривые, основанные на теории, с которой читатель познакомится в § 61.

В начале координат $\text{kei } x = -\pi/4$, и прогиб под нагрузкой достигает максимального значения

$$w_{\max} = \frac{Pl^2}{8D}. \quad (180)$$

Для реакции основания в той же точке находим

$$p_{\max} = \frac{P}{8l^2}. \quad (181)$$

Если мы имеем дело с пластинкой бесконечно большой протяженности при условиях для жесткости и загрузки, указанных на стр. 295, то прогиб под нагрузкой принимает значение

$$w_{\max} = \frac{Pl^2}{8D} = \frac{P}{8kl^2} = \pi l A_4 = (3,14) (5) (102 \cdot 10^{-5}) = 0,016 \text{ см},$$

которое на 20% меньше, чем значение 0,02 см, найденное для круглой пластинки конечного радиуса $a = 2l$.

Распределение изгибающих моментов под сосредоточенной нагрузкой представлено на рис. 131, с. Мы убеждаемся, что радиальные моменты на некотором расстоянии от нагрузки принимают отрицательные значения, причем их численно наибольшее значение составляет около $-0,02P$. Положительные

моменты, бесконечно большие в начале, уже на небольшом¹⁾ расстоянии от точки приложения нагрузки легко поддаются вычислению с помощью

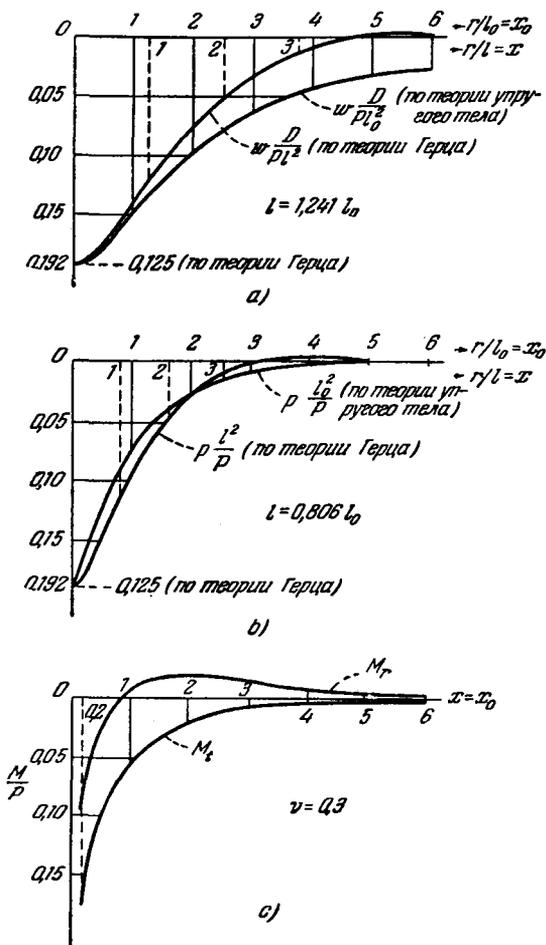


Рис. 131.

функции $\text{ke}^{\pm x}$, взятой в форме (1). Введя значения прогиба из (179) в формулы (52) и (53), приходим к результатам

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \left(\ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) - \frac{1}{2} (1 - \nu) \right], \\ M_t &= \frac{P}{4\pi} \left[(1 + \nu) \left(\ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) + \frac{1}{2} (1 - \nu) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

¹⁾ В сравнении с характеристической длиной $l = \sqrt[4]{D/k}$.

Сопоставление только что полученных выражений с уравнениями (90) и (91) убеждает в том, что напряженное состояние пластинки близ точки приложения нагрузки как в теории Герца, так и для свободно опертой круглой пластинки радиуса $a = 2le^{-\nu} = 1,123l$ тождественно, если исключить момент $M'_r = M'_t = -\frac{P}{8\pi}(1-\nu)$, который следует наложить на моменты для круглой пластинки.

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка P распределена по площади круга радиуса c , малого в сравнении с l . Изгибающие моменты в центре круглой пластинки, несущей такую нагрузку, равны

$$M_r = M_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} + 1 \right]. \quad (m)$$

Тот же результат получается и из уравнений (83), если мы пренебрежем малым в сравнении с 1 отношением c^2/a^2 . Введя в уравнение (m) подстановку $a = 2le^{-\nu}$ и добавив момент $M = -P/8(1-\nu)$, найдем для центра загруженного круга бесконечно большой пластинки моменты

$$M_{\max} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left(\ln \frac{2l}{c} - \nu + \frac{1}{2} \right) \quad (n)$$

или

$$M_{\max} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left(\ln \frac{l}{c} + 0,616 \right). \quad (183)$$

В случае высокой концентрации нагрузки значения напряжений при вычислении их из уравнения (183) подлежат исправлению средствами теории толстой пластинки. Такая исправленная формула для напряжений дана на стр. 187.

При равномерном распределении нагрузки по площади малого прямоугольника мы можем поступить так, как это изложено в § 37. Эквивалентом квадратной площади, например, является круг радиусом $c = 0,57 u$, где u — длина стороны квадрата (см. стр. 187). Подставив это в уравнение (183), получим

$$M_{\max} = \frac{1+\nu}{4\pi} P \left(\ln \frac{l}{u} + 1,177 \right). \quad (o)$$

Влияние любой произвольной группы сосредоточенных нагрузок на прогибы неограниченной пластинки можно определить, суммируя прогибы, производимые каждой нагрузкой в отдельности.

59. Прямоугольная неразрезная пластинка на упругом основании. Пример пластинки, покоящейся на упругом основании и опирающейся вместе с тем по прямоугольному контуру, приведен на рис. 132, где балка прямоугольного коробчатого сечения вдавливаются в упругое основание силами P . Нижняя пластинка балки, нагруженная упругими реакциями основания, удерживается вертикальными стенками балки, а также вертикальными поперечными диафрагмами, показанными на чертеже пунктирными линиями. При исследовании изгиба подобного типа пластинок предполагаем, как и раньше, что интенсивность реакции упругого основания в некоторой точке пропорциональна прогибу ω в этой точке, так что $p = k\omega$, где k — модуль основания.

В согласии с этим допущением дифференциальное уравнение прогиба пластинки на упругом основании принимает вид

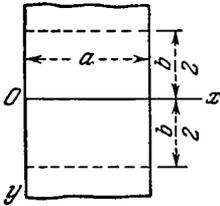
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} - \frac{k w}{D}, \quad (a)$$

где q , как и раньше, интенсивность поперечной нагрузки.

Начнем со случая, изображенного на рис. 132. Если w_0 обозначает прогиб краев нижней пластинки, а w — прогиб этой пластинки относительно плоскости ее краев, то интенсивность реакции основания в некоторой точке выразится произведением $k(w_0 - w)$, и уравнение (a) напишется в таком виде:

$$\Delta \Delta w = \frac{k}{D} (w_0 - w). \quad (b)$$

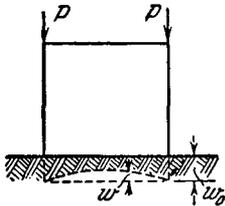
Расположив оси координат, как показано на чертеже, и предположив, что края пластинки, параллельные оси y , свободно оперты, а два других края защемлены, получаем граничные условия



$$(w)_{x=0, x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0, x=a} = 0, \quad (c)$$

$$(w)_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0. \quad (d)$$

Прогиб w можно взять в виде ряда



$$w = \frac{4k w_0}{D\pi} \sum_{m=1, 3, 5, \dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a}}{m \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (e)$$

Рис. 132.

Первый ряд в правой части есть частное решение уравнения (b), представляющее собой прогиб свободно опертой, покоящейся на упругом основании полочки. Второй ряд — решение однородного уравнения

$$\Delta \Delta w + \frac{k}{D} w = 0. \quad (f)$$

Функции Y_m должны поэтому удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right) Y_m = 0. \quad (g)$$

Введя обозначения

$$\frac{m\pi}{a} = \mu_m, \quad \frac{k}{D} = \lambda^4, \quad (h)$$

$$2\beta_m^2 = \sqrt{\mu_m^4 + \lambda^4} + \mu_m^2, \quad 2\gamma_m^2 = \sqrt{\mu_m^4 + \lambda^4} - \mu_m^2 \quad (i)$$

и взяв решение уравнения (g) в виде e^{ry} , получим для r следующие четыре корня:

$$r = \beta + i\gamma, \quad -\beta + i\gamma, \quad \beta - i\gamma, \quad -\beta - i\gamma.$$

Соответствующие четыре независимых частных решения уравнения (g) будут

$$e^{\beta m y} \cos \gamma_m y, \quad e^{-\beta m y} \cos \gamma_m y, \quad e^{\beta m y} \sin \gamma_m y, \quad e^{-\beta m y} \sin \gamma_m y, \quad (j)$$

причем их можно написать также и в следующем виде:

$$\operatorname{ch} \beta_m y \cos \gamma_m y, \quad \operatorname{sh} \beta_m y \cos \gamma_m y, \quad \operatorname{ch} \beta_m y \sin \gamma_m y, \quad \operatorname{sh} \beta_m y \sin \gamma_m y. \quad (k)$$

Из симметрии можно заключить, что Y_m в нашем случае будет четной функцией y . Пользуясь поэтому интегралами (k), получим

$$Y_m = A_m \operatorname{ch} \beta_m y \cos \gamma_m y + B_m \operatorname{sh} \beta_m y \sin \gamma_m y,$$

и прогиб пластинки будет

$$w = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[\frac{4kw_0}{D\pi} \frac{1}{m \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + \right. \\ \left. + A_m \operatorname{ch} \beta_m y \cos \gamma_m y + B_m \operatorname{sh} \beta_m y \sin \gamma_m y \right]. \quad (l)$$

Это выражение удовлетворяет граничным условиям (c). Чтобы удовлетворить условиям (d), нам следует подобрать постоянные A_m и B_m таким образом, чтобы имели силу уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{4kw_0}{D\pi} \frac{1}{m \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} + \frac{k}{D} \right)} + A_m \operatorname{ch} \frac{\beta_m b}{2} \cos \frac{\gamma_m b}{2} + \\ + B_m \operatorname{sh} \frac{\beta_m b}{2} \sin \frac{\gamma_m b}{2} = 0, \\ (A_m \beta_m + B_m \gamma_m) \operatorname{sh} \frac{\beta_m b}{2} \cos \frac{\gamma_m b}{2} - \\ - (A_m \gamma_m - B_m \beta_m) \operatorname{ch} \frac{\beta_m b}{2} \sin \frac{\gamma_m b}{2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Подставив эти значения A_m и B_m в выражение (l), найдем искомый прогиб пластинки. Исходя из того же уравнения (a), можно решить

и задачу о прямоугольной пластинке, свободно опертой по всему контуру. При расположении координатных осей по схеме рис. 59 (стр. 124) прогиб пластинки, если воспользоваться решением Навье, выразится рядом

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{н})$$

Пусть аналогично ряд

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{о})$$

представляет распределение заданной нагрузки, а ряд

$$p = k\omega = \sum \sum k A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{р})$$

— реакцию основания. Введя ряд (н) в левую часть, а ряды (о) и (р) в правую часть уравнения (а), найдем

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + k}. \quad (\text{q})$$

В качестве примера рассмотрим изгиб пластинки сосредоточенной силой P , приложенной в некоторой точке (ξ, η) ; тогда

$$a_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \quad (\text{r})$$

в силу уравнения (б) на стр. 131. Подстановкой выражений (q) и (r) в уравнение (н) получаем

$$\omega = \frac{4P}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + k} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{s})$$

Зная прогиб пластинки под действием сосредоточенной силы, мы можем получить методом наложения и прогиб под поперечной нагрузкой какого угодно иного типа. Возьмем, например, случай равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q . Подставив в выражение (q) вместо P произведение $q d\xi d\eta$ и интегрируя — в пределах от 0 до a и от 0 до b , получим

$$\omega = \frac{16q}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + k \right]}. \quad (\text{t})$$

Если k обращается в нуль, то прогиб сводится к значению, даваемому решением Навье (131) для прогиба равномерно нагруженной свободно опертой пластинки¹⁾.

Рассмотрим теперь случай, представленный на рис. 133. Большая в плане, покоящаяся на упругом основании пластинка нагружена по оси x в равноотстоящих одна от другой точках силами P (рис. 133).

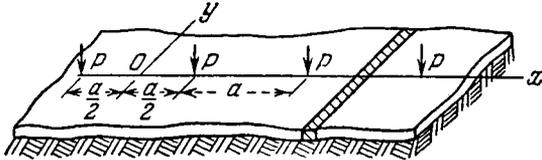


Рис. 133.

Расположим оси координат, как показано на чертеже, и, поскольку у нас нет сплошной поперечной нагрузки, воспользуемся уравнением (f). Рассмотрим решение этого уравнения в виде ряда

$$w = w_0 + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (u)$$

где первый член

$$w_0 = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}ak} e^{-\frac{\lambda y}{\sqrt{2}}} \left(\cos \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \right)$$

представляет собой прогиб бесконечно длинной параллельной оси y полоски шириной в единицу, нагруженной в точке $y=0$ грузом P/a [см. уравнение (283), стр. 522]. Остальные члены ряда удовлетворяют требованию симметрии, согласно которому касательная к изогнутой поверхности в направлении x должна иметь нулевой наклон, т. е. быть горизонтальной как в точках приложения нагрузки, так и в средних между ними точках. Возьмем для функций Y_m частные интегралы (j), обращающиеся в нуль при бесконечных значениях y . Тогда

$$Y_m = A_m e^{-\beta_m y} \cos \gamma_m y + B_m e^{-\beta_m y} \sin \gamma_m y.$$

¹⁾ Случай прямоугольной пластинки с предписанными прогибами и моментами по двум противоположным краям и различными условиями по двум другим краям рассматривается в работе Fletcher H. J., Thorne C. J., J. Appl. Mech., т. 19, стр. 361, 1952. В этой работе приводится обильный графический материал.

²⁾ Эта задача была изучена Вестергором (Westergaard H. M., Ingeniøren, т. 32, стр. 513, 1923). О практических применениях решения этой задачи при проектировании бетонных дорог Вестергор сообщает в журнале Public Roads, т. 7, стр. 25, 1926, т. 10, стр. 65, 1929 и т. 14, стр. 185, 1933.

Чтобы удовлетворить условию симметрии $(\partial w / \partial y)_{y=0} = 0$, мы должны положить в этом выражении

$$B_m = \frac{\beta_m A_m}{\gamma_m}.$$

Введя же новые постоянные $A'_m = A_m / \gamma_m$, мы представим прогибы (w) в следующем виде:

$$w = w_0 + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} A'_m \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-\beta_m y} (\gamma_m \cos \gamma_m y + \beta_m \sin \gamma_m y). \quad (v)$$

Чтобы выразить постоянные A'_m в функции от нагрузок P , рассмотрим перерезывающую силу Q_y , действующую в нормальном сечении пластинки, проходящем через ось x . Из симметрии заключаем, что эта сила обращается в нуль во всех точках, за исключением точек приложения нагрузок P , где она должна дать равнодействующие, равные $-P/2$. При исследовании подобного же распределения перерезывающих сил в § 54 (стр. 277) было показано, что эти перерезывающие силы можно представить рядом.

$$Q_y = -\frac{P}{2a} - \frac{P}{a} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m\pi x}{a}.$$

Вычисление же по формуле (v) дает для них следующее значение:

$$\begin{aligned} Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \\ &= -\frac{P}{2a} - 2D \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} A'_m \beta_m \gamma_m (\beta_m^2 + \gamma_m^2) \cos \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Из сравнения этих двух выражений для перерезывающей силы находим

$$A'_m = \frac{P(-1)^{\frac{m}{2}}}{2aD\beta_m\gamma_m(\beta_m^2 + \gamma_m^2)}$$

или, пользуясь обозначениями (i),

$$A'_m = \frac{P(-1)^{\frac{m}{2}}}{aD\lambda \sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4}}.$$

Подставляя это в выражение (v), получаем наконец

$$w = w_0 + \frac{P\lambda^2}{ak} \sum_{m=2, 4, 6, \dots} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4}} \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-\beta_m y} (\gamma_m \cos \gamma_m y + \beta_m \sin \gamma_m y). \quad (w)$$

Максимальный прогиб имеет, очевидно, место под грузами P , и величина его определяется подстановкой $x = a/2$, $y = 0$ в выражение (w), что дает нам

$$w_{\max} = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}ak} + \frac{P\lambda^2}{ak} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4}}. \quad (184)$$

В частном случае единственного сосредоточенного груза P , действующего на неограниченную пластинку, прогиб также может быть получен из формулы (184), если в ней положить $a = \infty$. В этом случае первый член в формуле обращается в нуль, и, если пользоваться обозначениями (i), мы получим

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\pi k} \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4} - \mu_m^2}{\lambda^4 + \mu_m^4}} = \\ &= \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\pi k} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 + \mu^4} - \mu^2}{\lambda^4 + \mu^4}} d\mu. \end{aligned}$$

Применив подстановку

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{1}{2u\sqrt{u^2 + 1}},$$

найдем, в согласии с результатом (180),

$$w_{\max} = \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\pi k} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \frac{P\lambda^2}{8k}. \quad (185)$$

При такой величине прогиба максимальное давление на упругое основание равно

$$(p)_{\max} = kw_{\max} = \frac{P\lambda^2}{8} = \frac{P}{8} \sqrt{\frac{k}{D}}. \quad (186)$$

Максимальное растягивающее напряжение имеет место на нижней поверхности пластинки под точкой приложения нагрузки. Вышеизложенная теория дает для изгибающего момента в этой точке бесконечно большое значение, и потому здесь следует обратиться

к теории толстой пластинки (см. § 26). В вышеупомянутом исследовании Вестергора на основе этой теории выведена следующая формула для расчета максимального растягивающего напряжения на нижней поверхности пластинки:

$$(\sigma_r)_{\max} = 0,275(1 + \nu) \frac{P}{h^2} \lg \left(\frac{Eh^3}{kb^4} \right). \quad (x)$$

Здесь h обозначает толщину пластинки, а

$$b = \sqrt{1,6c^2 + h^2} - 0,675h \quad \text{при } c < 1,724h,$$

$$b = c \quad \text{при } c > 1,724h,$$

где c — радиус того круга, по площади которого, как мы предполагаем, равномерно распределена нагрузка P . При $c = 0$ мы приходим к случаю сосредоточенной силы.

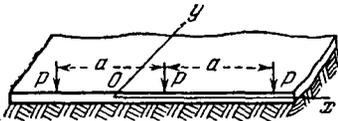


Рис. 134.

В случае загрузки площади квадрата $u \times v$ вместо c следует ввести $0,57u$ (стр. 187).

Тому же приему расчета поддается и изображенный на рис. 134 случай равноотстоящих нагрузок P , приложенных по краю полубесконечной пластинки. Окончательная формула максимального растягивающего напряжения на нижней поверхности пластинки под нагрузкой, если расстояние a велико, имеет вид

$$(\sigma_x)_{\max} = 0,529(1 + 0,54\nu) \frac{P}{h^2} \left[\lg \left(\frac{Eh^3}{kb^4} \right) - 0,71 \right], \quad (y)$$

где b вычисляется, как и в предыдущем случае, а c есть радиус полукруга, по площади которого предполагается равномерное распределение нагрузки P . Формулы (x) и (y) оказались весьма полезными при проектировании бетонных дорог, причем в этом случае круг радиуса c представляет собой площадь соприкосновения покрышки колеса с поверхностью дороги¹⁾.

60. Пластика, несущая несколько рядов равноотстоящих колонн. В качестве последнего примера рассмотрим бесконечную пластинку-настил, покоящуюся на упругом основании и несущую равноотстоящие и равные

¹⁾ Задача о распределении напряжений близ точки приложения нагрузки в кармаше большой пластинки пока еще не решена с той степенью достоверности, которая достигнута в решении только что рассмотренной задачи. Некоторые относящиеся к этому вопросу эмпирические и полуэмпирические формулы для напряжений можно найти в издании Американской Ассоциации портланд-цемента: «Concrete pavement design, стр. 79, Чикаго, 1951». Ценные экспериментальные результаты в этой области были получены Дантю (Dantu M., Ann. ponts et chaussées, т. 122, стр. 337, 1952). См. также Black L. D., Trans. Eng. Inst. Canada, т. 2, стр. 129, 1958, и Nevel D. E., там же, стр. 132.

нагрузки P , из которых каждая распределена равномерно по площади $u \times v$ прямоугольника, как это показано на рис. 135. К задаче об изгибе такого «опрокинутого безбалочного перекрытия» можно подойти изложенным ранее методом Вестергорга, применив простой ряд ¹⁾. Много проще, однако, а если исключить случай резко сосредоточенной нагрузки, то и точнее, получается решение в двойных рядах по способу Навье.

Условия симметрии побуждают нас представить поперечную нагрузку колонн в виде ряда косинусов

$$q = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b}. \quad (a)$$

Интенсивность заданной нагрузки равна P/uv внутри заштрихованных прямоугольников на рис. 135 и нулю по всей остальной площади пластинки. Поэтому, поступая как обычно, т. е. умножая уравнение (a)

на $\cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} dx dy$ и интегрируя в пределах $-a/2, +a/2$, для y , получаем

$$a_{mn} = \frac{4P\epsilon_{mn}}{\pi^2 m n u v} \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b}, \quad (b)$$

где

$$\epsilon_{mn} = 1 \text{ для } m \neq 0, n \neq 0,$$

$$\epsilon_{mn} = \frac{1}{2} \text{ для } m = 0, n \neq 0,$$

$$\epsilon_{mn} = \frac{1}{4} \text{ для } m = n = 0$$

или $m \neq 0, n = 0$.

В частном случае $m = 0$ или $n = 0$ коэффициент получается непосредственно как предельное значение выражения (b).

В соответствии с уравнением (a) примем теперь для прогибов ряд

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b}, \quad (c)$$

и тогда связь между коэффициентами a_{mn} и A_{mn} легко устанавливается по соображениям, приведенным выше (см. стр. 304). Введя обозначения

$$\alpha_m = \frac{2m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{2n\pi}{b}, \quad \gamma_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2, \quad (d)$$

¹⁾ См. Müller W., Ingr.-Arch., т. 20, стр. 278, 1952, и Österr. Ingr.-Arch., т. 6, стр. 404, 1952.

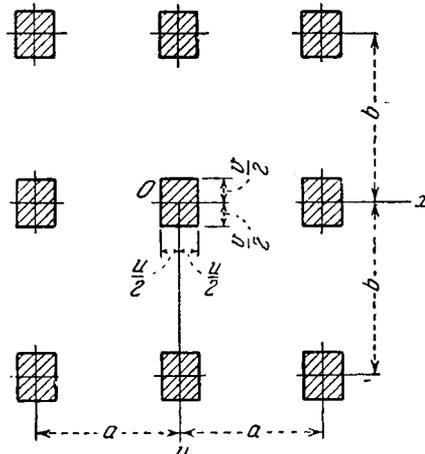


Рис. 135.

находим

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{D\gamma_{mn}^4 + k}. \quad (e)$$

Подставляя это значение коэффициентов в ряд (с) и учитывая (b), приходим к окончательному результату¹⁾

$$w = \frac{4P}{\pi^2 uv} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{mn} \sin \frac{m\pi u}{a} \sin \frac{n\pi v}{b} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y}{mn (D\gamma_{mn}^4 + k)}. \quad (f)$$

Изгибающие моменты находим теперь обычным дифференцированием, а распределение давления между пластинкой и основанием получаем умножением выражения (f) на модуль k .

Частный случай $k=0$ отвечает равномерному распределению реакции основания, т. е. схеме «опрокинутого безбалочного перекрытия», нагруженного равномерно с интенсивностью $q = P/ab$. Из структуры выражения (f) видно, что введение коэффициента постели приводит к уменьшению прогибов, а также изгибающих моментов пластинки.

Случай прямоугольной пластинки конечных размеров, покоящейся на упругом основании и подвергнутой действию сосредоточенной нагрузки, был исследован Хаппелем²⁾. При определении прогибов такой пластинки был использован метод Ритца (см. стр. 344), причем на частном примере центрально нагруженной квадратной пластинки было показано, что ряд, представляющий прогиб, быстро сходится и что этот прогиб может быть получен с достаточной точностью путем суммирования лишь немногих первых членов ряда³⁾.

61. Изгиб пластинки, покоящейся на полубесконечном упругом основании. До сих пор мы предполагали, что осадки основания в определенной точке его поверхности пропорциональны давлению пластинки на основание в этой же точке и, следовательно, не зависят от распределения давления в других местах. Это справедливо для пластинки, плавающей на поверхности жидкости (см. стр. 250), но если основание состоит из вязкого материала, то такая гипотеза лишь грубо аппроксимирует действительное поведение основания; лучшего приближения можно иногда достигнуть на основе следующих допущений:

1. Основание обладает свойствами полубесконечного упругого тела.

2. Пластинка покоится на основании без трения.

3. Совершенный контакт между пластинкой и основанием сохраняется также и в случае отрицательного взаимного давления.

Это последнее предположение может показаться произвольным; однако в действительности отрицательное давление между пластинкой и основанием более или менее компенсируется весом пластинки.

Упругие свойства основания могут быть охарактеризованы (если предположить изотропию) модулем Юнга E_0 и коэффициентом Пуассона ν .

¹⁾ Этот вывод принадлежит Леу (Lewy V., Bauingenieur, т. 3, стр. 453, 1923).

²⁾ Happel H., Math. Z., т. 6, стр. 203, 1920. См. также Halbritter F., Bautechnik, т. 26, стр. 181, 1949.

³⁾ Задача о квадратной пластинке на упругом основании подверглась также экспериментальному изучению; см. по этому вопросу Vint J., Eigoood W. N., Phil. Mag., 7-я серия, т. 19, стр. 1, 1935; Murphy G., Iowa State Coll. Eng. Exp. Sta. Bull., 135, 1957.

Приближенные численные значения ¹⁾ этих постоянных, зависящие от природы материала основания и полученные из результатов динамических испытаний, приводятся в таблице 63 вместе со значением постоянной

$$k_0 = \frac{E_0}{2^2(1-\nu_0^2)}, \quad (a)$$

используемой в дальнейшем.

Таблица 63

**Значения упругих постоянных для оснований
из различных материалов**

Материал основания	E_0 , кг/см ²	ν_0	k_0 , кг/см ²
Глина	770	0,17	400
Лесс и глина	910	0,42	553
Песок средней крупности . .	980—1300	0,33—0,23	553—686
Песок и гравий	2800	0,33	1540
Пластичная глина (нижней юры)	2660	0,44	1645
Известь-пушонка (гашеная на воздухе)	11,550—13,300	0,32—0,38	6440—7700
Песчаник	112,000	0,26	60,200

Ограничимся в дальнейшем случае бесконечно большой пластинки, обладающей осевой симметрией. Введя полярные координаты r , θ , представим уравнение пластинки зависимостью

$$D\Delta \Delta w(r) = q(r) - p(r), \quad (b)$$

где $q(r)$ обозначает заданную распределенную нагрузку, а $p(r)$ — реакцию основания.

Пусть $K_0(r, \rho, \varphi)$ — прогиб в точке $(r, 0)$ поверхности основания, произведенный нормальной единичной нагрузкой, приложенной к этой поверхности (ρ, φ) . Форма этой «функции влияния» («поверхности влияния») K_0 зависит лишь от природы (характеристики) основания. Если воспользоваться некоторыми свойствами бесселевых функций, то можно показать ²⁾, что уравнение (b) удовлетворяется выражением

$$w(r) = \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) K(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha}{1 + D\alpha^4 K(\alpha)}. \quad (c)$$

¹⁾ Они заимствованы из книги: Schultze E., Muhs H., Bodenuntersuchungen für Ingenieurbauten, Берлин, 1950. См. также Veröffentlich. Degebo, тетрадь 4, стр. 37, 1936.

²⁾ Решение задачи в этой общей форме принадлежит Холлу (Holl D. L., Proc. V. Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938).

Здесь J_0 — бесселева функция нулевого порядка. Параметр, зависящий от характеристики основания, представляет собой интеграл

$$K(\alpha) = \int_0^{\infty} 2\pi s K_0(s) J_0(\alpha s) ds, \quad (d)$$

причем K_0 определяется из

$$K_0(s) = K_0[(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi)^{1/2}],$$

а s есть расстояние между точками $(r, 0)$ и (ρ, φ) . Наконец,

$$Q(\alpha) = \int_0^{\infty} q(\rho) J_0(\alpha \rho) \rho d\rho \quad (e)$$

— параметр, зависящий от интенсивности $q(\rho)$ симметричной нагрузки в $r = \rho$.

В частном случае нагрузки P , равномерно распределенной по окружности радиуса c , имеем

$$Q(\alpha) = \frac{P}{2\pi} J_0(\alpha c). \quad (f)$$

При равномерном распределении нагрузки P по площади круга того же радиуса уравнение (e) дает

$$Q(\alpha) = \frac{P}{\pi c \alpha} J_1(\alpha c), \quad (g)$$

куда входит бесселева функция первого порядка. Если, наконец, нагрузка сосредоточена в начале координат ($\rho = 0$), находим из (f)

$$Q(\alpha) = \frac{P}{2\pi}. \quad (h)$$

Что касается распределения реактивного давления, то соответствующую функцию $p(r)$ получаем из уравнения (b), так как первый член разности

$$q(r) = \int_0^{\infty} Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha \quad (i)$$

уже выражен выше через преобразование Фурье — Бесселя (e). Поэтому

$$p(r) = \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha}{1 + D\alpha^4 K(\alpha)}. \quad (j)$$

Остановимся теперь на физической природе основания в двух ее вариантах. Для *плавающей* пластинки (§ 57) функция влияния $K_0(s)$ обращается повсюду в нуль, исключая точку $s = 0$, где приложена сосредоточенная сила. В силу уравнения (d) величина $K_0(\alpha)$ должна быть в этом случае постоянной. С тем чтобы получить из уравнения (c) выражение $w(r) = p(r)/k$, в соответствии с определением модуля, нам следует принять $K_0(\alpha) \approx 1/k$.

Используя ранее введенное обозначение $l^4 = D/k$ (стр. 291), получим из уравнения (с) выражение

$$w(r) = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha}{1 + \alpha^4 l^4}, \quad (k)$$

удовлетворяющее дифференциальному уравнению (178) плавающей пластинки.

Для изотропной полубесконечной среды мы имеем, в силу полученного Буссинеском результата ¹⁾, $K_0(s) = (1 - \nu_0^2)/\pi E_0 s$, а из уравнения (d): $K(\alpha) = 2(1 - \nu_0^2)/E_0 \alpha$, т. е.

$$K(\alpha) = \frac{1}{(k_0 \alpha)},$$

где k_0 — упругая постоянная, определяемая из (а). Записав сокращенно

$$\frac{k_0}{D} = \frac{E_0}{2D(1 - \nu_0^2)} = \frac{1}{l_0^3}, \quad (l)$$

получаем наконец решение (с) для указанной выше гипотезы материала ²⁾

$$w(r) = \frac{1}{k_0} \int_0^{\infty} \frac{Q(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha}{1 + \alpha^3 l_0^3}. \quad (m)$$

В частном случае нагрузки, сосредоточенной в начале координат, выражение (m) в сочетании с (h) дает

$$w = \frac{P l_0^2}{2\pi D} \int_0^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{l_0}\right) d\lambda}{1 + \lambda^3}, \quad (187)$$

где $\lambda = \alpha l_0$. Отсюда прогиб под нагрузкой

$$w_{\max} = \frac{P l_0^2}{2\pi D} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^3} = \frac{P l_0^2 \sqrt{3}}{9D} = 0,192 \frac{P l_0^2}{D} \quad (188)$$

— значение, отличающееся от полученного Герцем $0,125 P l^2/D$. Распределение давления устанавливается непосредственно из общего выражения (j):

$$p = \frac{P}{2\pi l_0^2} \int_0^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{l_0}\right) \lambda d\lambda}{1 + \lambda^3}, \quad (189)$$

¹⁾ См., например, Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of elasticity, 2-е изд., стр. 365, Нью-Йорк, 1951.

²⁾ По этому вопросу см. также Woïnowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 3, стр. 250, 1932 и т. 17, стр. 142, 1949; Marguerre K., Z. angew. Math. Mech., т. 17, стр. 229, 1937; Hogg A. H. A., Phil. Mag., т. 25, стр. 576, 1938.

и, в частности, под нагрузкой

$$p_{\max} = \frac{P}{2\pi l_0^2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{1 + \lambda^3} = \frac{P\sqrt{3}}{9l_0^2} = 0,192 \frac{P}{l_0^2}, \quad (190)$$

что опять отличается от результата Герца $0,125 P/l^2$. Если мы примем для обоих случаев одинаковые значения w_{\max} , то формула (190) дает для p_{\max} значение в 2,37 большее, чем формула Герца (181). В таком случае должно иметь место соотношение $l = 1,241l_0$, и кривые соответствующих прогибов, вычисленные из уравнений (179) и (187), воспроизведены на рис. 131, а. Рис. 131, б дает представление о характере изменения давления; на этот раз для получения равных значений p_{\max} в обоих случаях следует положить $l = 0,806l_0$.

Можно, наконец, показать, что вблизи точки приложения сосредоточенной силы моменты для обоих таких оснований получают одну и ту же величину, если каждый из них выразить в зависимости от безразмерного аргумента $x = r/l$ в одном случае и $x = r/l_0$ — в другом. Отсюда мы заключаем, что выражениями для изгибающих моментов типа (183) можно пользоваться и для пластинок, покоящейся на изотропной упругой среде, если l заменены на l_0 . Поступая таким образом с формулой (х) Вестергорга для напряжений (стр. 308), приходим к формуле

$$\sigma_{\max} = 0,366 (1 + \nu) \frac{P}{h^2} \left[\lg \left(\frac{Eh^3}{k_0 b^3} \right) - 0,266 \right], \quad (n)$$

где k_0 определяется из уравнения (а), а b обозначает ту же величину, что и на стр. 308.

Задача об изгибе круглой пластинки конечных размеров приводит к бесконечной системе линейных уравнений для коэффициентов ряда, которым выражаются прогибы такой пластинки¹⁾.

При решении этой задачи находит также применение и метод конечных разностей²⁾.

Рассматривались, кроме того, задачи об изгибе бесконечной пластинки, покоящейся на упругом слое, который в свою очередь опирается на идеально жесткое основание³⁾, а также задача о полубесконечной плите дорожного покрытия⁴⁾.

¹⁾ См. W o g o w i c k a H., *Ingr.-Arch.*, т. 10, стр. 113, 1939; И ш к о в а А. Г., Доклады АН СССР, т. 56, стр. 129, 1947; P i c k e t t G., M e s s o r g m i c k F. J., *Proc. I, U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, стр. 331, Чикаго, 1951. Влияние поднятия внешней области пластинки, несущей центральную нагрузку, было рассмотрено Юнгом (J u n g H., *Ingr.-Arch.*, т. 20, стр. 8, 1952). Изгиб прямоугольных пластинок на упругом основании излагается М. И. Горбуновым-Посадовым «Прикладн. мат. мех.», т. 2, стр. 68, 1940. (См. также его позднейшие работы: «Расчет конструкций на упругом основании», М., 1953; «Таблица для расчета тонких плит на упругом основании», М., 1959. — *Прим. пер.*)

²⁾ H a b e l A., *Bauingenieur*, т. 18, стр. 188, 1937; Применения к прямоугольным пластинкам см. P i c k e t t G., J a n e s W. C., R a v i l l e M. E., M e s s o r g m i c k F. J., *Kansas State Coll. Eng. Sta. Bull.*, 65, 1951.

³⁾ H o g g A. H. A., *Phil. Mag.*, т. 35, стр. 265, 1944.

⁴⁾ P i c k e t t H. G., B a d a r u d d i n S., *Proc. IX Intern. Congr. Appl. Mech.*, т. 6, стр. 396, Брюссель, 1957.

Напряжения, производимые резко сосредоточенными поверхностными силами, должны быть подвергнуты проверке на основе общей теории толстых пластинок. Разработана также и специальная теория упруго опертых толстых пластинок ¹⁾.

¹⁾ Первыми исследованиями статического и динамического поведения такого рода пластинок выполнены Маргерром (Marguerre K., *Ingr.-Arch.*, т. 4, стр. 332, 1933); см. также Szabó I., *Ingr.-Arch.*, т. 19, стр. 128, 342, 1951; *Z. angew. Math. Mech.*, т. 32, стр. 145, 1952. О применении теории Э. Рейсснера см. Naghdi P. M., Rowley J. C., *Proc. I. Midwest Conf. solid Mech.* (Univ. Illinois), 1953, стр. 119, и Frederick D., *J. Appl. Mech.*, т. 23, стр. 195, 1956.

ГЛАВА IX

ПЛАСТИНКИ РАЗЛИЧНЫХ ОЧЕРТАНИЙ

62. Уравнения изгиба пластинки в полярных координатах. При исследовании симметричного изгиба круглой пластинки мы уже применяли полярные координаты (глава III). Этой же системой выгодно воспользоваться и в общем случае изгиба круглой пластинки.

Если отсчет координат r и θ производить так, как указано на рис. 136, *a*, то связь между полярными и декартовыми координатами выразится уравнениями

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \operatorname{arctg} y/x, \quad (a)$$

откуда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Пользуясь этими выражениями, находим наклон изогнутой поверхности пластинки в направлении x

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta. \quad (c)$$

Аналогичное выражение можно написать и для наклона в направлении y . Чтобы получить выражение для кривизны в полярных координатах, нам потребуются вторые производные. Повторяя указанную в выражении (c) операцию дважды, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (d)$$

Подобным же образом имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}, \quad (e)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}. \quad (f)$$

При таком преобразовании координат получаем

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \quad (g)$$

После двукратного повторения этой операции дифференциальное уравнение (103) для изогнутой поверхности поперечно нагруженной пластинки преобразуем в полярных координатах к следующему виду:

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D}. \quad (191)$$

Если нагрузка распределена симметрично относительно центра пластинки, то прогиб w не зависит от θ , и уравнение (191) совпадает с уравнением (58), полученным ранее (см. стр. 69) для случая симметрично нагруженной круглой пластинки.

Рассмотрим элемент, вырезанный из пластинки двумя смежными осевыми плоскостями, образующими между собой угол $d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$ (рис. 136, *b*).

Обозначим действующие на элемент изгибающие и крутящий моменты, отнеся их к единице длины, через M_r , M_t и M_{rt} и припишем им при указанных на чертеже направлениях положительные знаки. Чтобы выразить эти моменты через прогиб w пластинки, положим, что ось x совпадает с радиусом r . Тогда моменты M_r , M_t и M_{rt} будут иметь те же значения, что и соответствующие той же точке моменты M_x , M_y , M_{xy} , и подстановка $\theta = 0$ в выражения (d), (e) и (f)

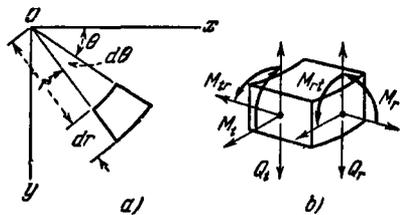


Рис. 136.

даст нам

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_t &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\ M_{rt} &= (1 - \nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} = (1 - \nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

Подобным же образом из формул (108) получим выражения для перерезывающих сил ¹⁾

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \quad \text{и} \quad Q_t = -D \frac{\partial (\Delta w)}{r \partial \theta}, \quad (193)$$

где Δw дается выражением (g).

В случае защемления граничные условия для круглой пластинки радиуса Q будут

$$(\varpi)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varpi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0. \quad (h)$$

В случае свободного опирания по контуру

$$(\varpi)_{r=a} = 0, \quad (M_r)_{r=a} = 0. \quad (i)$$

В случае свободного (не опертого) контура (см. стр. 105)

$$(M_r)_{r=a} = 0, \quad V = \left(Q_r - \frac{\partial M_{rt}}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = 0. \quad (j)$$

Общее решение уравнения (191) может быть, как и раньше, взято в виде суммы

$$\dot{\varpi} = \varpi_0 + \varpi_1, \quad (k)$$

где ϖ_0 — частное решение уравнения (191), а ϖ_1 — решение однородного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varpi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varpi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varpi_1}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (194)$$

Это последнее решение берем в форме нижеследующего ряда ²⁾:

$$\varpi_1 = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} R'_m \sin m\theta. \quad (195)$$

¹⁾ Направление Q_r на рис. 136, b противоположно указанному на рис. 28: этим объясняется появление знака минус в уравнении (193).

²⁾ Это решение было дано А. Клебшем в его «Theorie der Elasticität fester Körper», 1862.

где $R_0, R_1, \dots, R'_1, R'_2, \dots$ суть функции одного лишь радиального расстояния r . Подставив этот ряд в уравнение (194), получим для каждой из этих функций обыкновенное дифференциальное уравнение следующего типа:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d R_m}{dr} - \frac{m^2 R_m}{r^2} \right) = 0.$$

Общее решение этого уравнения при $m > 1$ имеет вид

$$R_m = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}. \tag{1}$$

При $m = 0$ и $m = 1$ решения будут соответственно

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r \\ R_1 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r. \end{aligned} \right\} \tag{m}$$

Аналогичные выражения можно написать для функций R'_m . Подставив эти выражения для функций R_m и R'_m в ряд (195), получим общее решение уравнения (194). Постоянные интегрирования A_m, B_m, \dots, D_m должны быть определены в каждом частном случае, чтобы удовлетворить граничным условиям. Решение R_0 , не зависящее от угла θ , представляет симметричный изгиб круглой пластинки. Несколько частных случаев этого рода было уже разобрано в главе III.

63. Круглая пластинка под нагрузкой, изменяющейся по линейному закону.

Если круглая пластинка подвергается действию нагрузки, распределенной, как показано на рис. 137, то эту нагрузку всегда можно разбить на две составляющие: 1) равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $\frac{1}{2}(p_2 + p_1)$ и 2) нагрузку, изменяющуюся линейно от интенсивности, равной нулю на диаметре CD пластинки, до интенсивностей $-p$ и $+p$ на концах A и B диаметра AB . Случай равномерной нагрузки был уже разобран в главе III. Нам остается здесь исследовать лишь неравномерную нагрузку, изображенную на рис. 137 двумя заштрихованными треугольниками¹⁾.

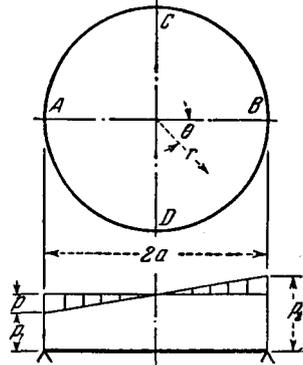


Рис. 137.

¹⁾ Эта задача была исследована Флюгге (Flügge W., Bauingenieur, т. 10, стр. 221, 1929).

Интенсивность нагрузки q в некоторой точке с координатами r и θ равна

$$q = \frac{pr \cos \theta}{a}. \quad (a)$$

Поэтому частное решение уравнения (191) может быть взято в форме

$$\omega_0 = A \frac{pr^5 \cos \theta}{a}.$$

После подстановки в уравнение (191) оно дает

$$A = \frac{1}{192D},$$

откуда

$$\omega_0 = \frac{pr^5 \cos \theta}{192aD}. \quad (b)$$

В качестве решения однородного уравнения (194) мы возьмем лишь один член ряда (195), содержащий функцию R_1 , и примем

$$\omega_1 = (A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r) \cos \theta. \quad (c)$$

Так как эти расчеты удобнее вести с безразмерными величинами, то вместо r мы введем отношение

$$\rho = \frac{r}{a}.$$

В этом новом обозначении прогиб пластинки напишется следующим образом:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 = \frac{pa^4}{192D} (\rho^5 + A\rho + B\rho^3 + C\rho^{-1} + D\rho \ln \rho) \cos \theta, \quad (d)$$

где ρ изменяется от нуля до единицы. Входящие в это выражение постоянные интегрирования A, B, \dots определяются из граничных условий.

Начнем со случая свободно опертой пластинки (рис. 137). Прогиб ω и изгибающий момент M_r на контуре такого типа пластинки обращаются в нуль, так что

$$(\omega)_{\rho=1} = 0, \quad (M_r)_{\rho=1} = 0. \quad (e)$$

В центре пластинки ($\rho = 0$) прогиб ω и момент M_r должны принять конечные значения. Отсюда непосредственно следует, что постоянные C и D в выражении (d) равны нулю. Остальные две постоянные A и B найдутся теперь из уравнений (e):

$$(\omega)_{\rho=1} = \frac{pa^4}{192D} (1 + A + B) \cos \theta = 0,$$

$$(M_r)_{\rho=1} = -\frac{pa^2}{192} [4(5 + \nu) + 2(3 + \nu)B] \cos \theta = 0.$$

Так как эти уравнения должны сохранить силу при любом значении θ , то множители при $\cos \theta$ должны обратиться в нуль. Это дает

$$\begin{aligned} 1 + A + B &= 0, \\ 4(5 + \nu) + 2(3 + \nu)B &= 0, \end{aligned}$$

и мы получим

$$B = -\frac{2(5 + \nu)}{3 + \nu}, \quad A = \frac{7 + \nu}{3 + \nu}.$$

Подставив эти значения в выражение (d), находим прогиб пластинки в следующем виде:

$$w = \frac{pa^4 \rho (1 - \rho^2)}{192(3 + \nu)D} [7 + \nu - (3 + \nu)\rho^2] \cos \theta. \quad (f)$$

Для вычисления изгибающих моментов и перерезывающих сил подставим выражение (f) в уравнения (192) и (193), в результате чего получим

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{pa^2}{48} (5 + \nu) \rho (1 - \rho^2) \cos \theta, \\ M_t &= \frac{pa^2}{48(3 + \nu)} \rho [(5 + \nu)(1 + 3\nu) - (1 + 5\nu)(3 + \nu)\rho^2] \cos \theta, \end{aligned} \right\} (g)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{pa}{24(3 + \nu)} [2(5 + \nu) - 9(3 + \nu)\rho^2] \cos \theta, \\ Q_t &= -\frac{pa}{24(3 + \nu)} \rho [2(5 + \nu) - 3(3 + \nu)\rho^2] \sin \theta. \end{aligned} \right\} (h)$$

Мы видим, что $(M_r)_{\max}$ имеет место при $\rho = 1/\sqrt{3}$, где он равен

$$(M_r)_{\max} = \frac{pa^2(5 + \nu)}{72\sqrt{3}}.$$

M_t достигает максимального значения при

$$\rho = \frac{\sqrt{(5 + \nu)(1 + 3\nu)}}{\sqrt{3(1 + 5\nu)(3 + \nu)}},$$

причем это максимальное значение равно

$$(M_t)_{\max} = \frac{pa^2(5 + \nu)(1 + 3\nu)}{72(3 + \nu)}.$$

Интенсивность вертикальной опорной реакции на контуре равна ¹⁾

$$-V = -Q_r + \frac{\partial M_{rt}}{r \partial \theta} = \frac{pa}{4} \cos \theta.$$

¹⁾ Положительным считается ее направление вверх.

Момент этой реакции относительно диаметра CD пластинки (рис. 137) равен

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{pa}{4} \cos \theta a^2 \cos \theta d\theta = \frac{\pi a^3 p}{4}.$$

Этим моментом уравнивается момент распределенной по пластинке нагрузки относительно того же диаметра.

В качестве второго примера рассмотрим случай круглой пластинки со свободным (не опертым) контуром. Подобное условие реализуется, например, в случае круглой фундаментной плиты, поддерживающей дымовую трубу. В результате давления ветра на плиту будет передаваться момент M (рис. 138). Предположив, что соответствующие этому моменту реакции распределены, как

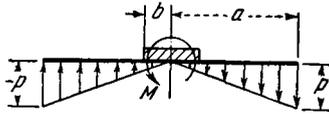


Рис. 138.

показано на чертеже, по линейному закону, мы получим здесь тот же самый тип нагрузки, что и в предыдущем случае, причем общее его решение может быть взято в том же самом виде (d), что и раньше. Граничные условия на внешнем контуре пластинки, свободном от всяких сил, будут

$$(M_r)_{\rho=1} = 0, \quad (V)_{\rho=1} = \left(Q_r - \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} \right)_{\rho=1} = 0. \quad (i)$$

Внутренняя часть пластинки радиусом b рассматривается как абсолютно жесткая. Кроме того, предполагается, что край пластинки защемлен по окружности радиуса b . Поэтому для $\rho = b/a = \beta$ должно удовлетворяться следующее граничное условие:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{\rho=\beta} = \left(\frac{w}{\rho} \right)_{\rho=\beta} \quad (j)$$

Подставив выражение (d) в уравнения (i) и (j), получим следующие уравнения для определения постоянных:

$$\begin{aligned} 4(5 + \nu) + 2(3 + \nu)B + 2(1 - \nu)C + (1 + \nu)D &= 0, \\ 4(17 + \nu) + 2(3 + \nu)B + 2(1 - \nu)C - (3 - \nu)D &= 0, \\ 4\beta^4 + 2\beta^2 B - 2\beta^{-2} C + D &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений определяем

$$\begin{aligned} B &= -2 \frac{4(2 + \nu) + (1 - \nu)\beta^2(3 + \beta^4)}{(3 + \nu) + (1 - \nu)\beta^4}, \\ C &= -2 \frac{4(2 + \nu)\beta^4 - (3 + \nu)\beta^2(3 + \beta^4)}{(3 + \nu) + (1 - \nu)\beta^4}, \\ D &= 12. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в выражение (d) и пользуясь уравнениями (192) и (193), получаем значения моментов и перерезывающих сил. Постоянная A в эти уравнения не входит. Соответствующий член в выражении (d) представляет поворот пластинки как твердого тела относительно диаметра, перпендикулярного к плоскости чертежа на рис. 138. Если модуль основания известен, то угол поворота может быть вычислен из условия равновесия внешнего момента M и реакций основания.

Пользуясь выражением (d), легко решить и случай свободно опертой круглой плиты, нагруженной в центре моментом M (рис. 139, a). Для этого нам нужно лишь опустить член с ρ^5 , представляющий распределенную нагрузку. Постоянную C следует приравнять нулю, чтобы исключить бесконечно большой прогиб в центре. Таким образом, выражение (d) сводится к

$$w = (A\rho + B\rho^3 + D\rho \ln \rho) \cos \theta. \quad (k)$$

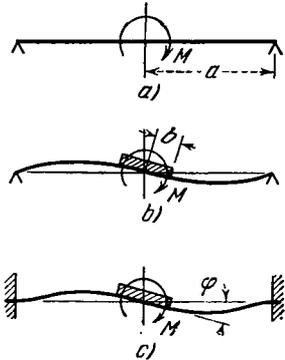


Рис. 139.

Теперь нужно определить постоянные A , B и D из следующих граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} & (\omega)_{\rho=1} = 0, \quad (M_r)_{\rho=1} = 0, \\ & -a \int_{-\pi}^{+\pi} (M_{r\theta})_{\rho=1} \sin \theta \, d\theta + a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} (Q_r)_{\rho=1} \cos \theta \, d\theta + M = 0. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Первые два из этих уравнений представляют условия на свободно опертом контуре; последнее фиксирует условие равновесия сил и моментов, действующих на контуре пластинки, и момента M внешних сил. Из уравнений (l) получаем

$$A = -\frac{1+\nu}{3+\nu} \frac{Ma}{8\pi D}, \quad B = \frac{1+\nu}{3+\nu} \frac{Ma}{8\pi D}, \quad D = -\frac{Ma}{4\pi D}.$$

Отсюда

$$w = -\frac{Ma}{8\pi D(3+\nu)} \rho [(1+\nu)(1-\rho^2) + 2(3+\nu) \ln \rho] \cos \theta. \quad (m)$$

В связи с наличием в скобках члена, стоящего под знаком логарифма, выражение (m) дает для наклона изогнутой поверхности бесконечно большое значение. Чтобы избежать этой трудности, центральную часть радиуса b пластинки можно принять абсолютно жесткой¹⁾.

¹⁾ Опыты с такого рода пластинками производились Порком (R o a r k R. J., Bull. Univ. Wisconsin, 74, 1932).

Предположив, что пластинка зашкреплена по этому внутреннему контуру, испытывающему поворот под действием момента M (рис. 139, б), находим

$$\omega = \frac{Ma}{8\pi D [(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4]} \left\{ - [(1+\nu) + (1-\nu)\beta^4] \rho^3 + \right. \\ \left. + (1+\nu)(1-\beta^2)^2 \rho + 2 [(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4] \rho \ln \rho - \right. \\ \left. - \beta^2 [(1+\nu)\beta^2 - (3+\nu)] \rho^{-1} \right\} \cos \theta, \quad (n)$$

где $\beta = b/a$. Если β равно нулю, уравнение (n) сводится к ранее полученному уравнению (m). Подстановка выражения (n) в уравнение (192) позволяет вычислить изгибающие моменты M_r и M_t .

Таблица 64

$\beta = b/a$	α	α_1	α_2
0,5	14,17	7,10	12,40
0,6	19,54	12,85	28,48
0,7	36,25	25,65	77,90
0,8	82,26	66,50	314,00

Аналогичному методу расчета поддается и случай, когда внешний контур пластинки зашкреплена

(рис. 139, с). Этот случай представляет практический интерес при проектировании упругих соединений валов¹⁾. Максимальные радиальные напряжения на внутреннем и внешнем контурах пластинки и угол поворота φ центральной жесткой части будут в этом случае

$$(\sigma_r)_{r=b} = \alpha \frac{h}{a} E\varphi, \quad (\sigma_r)_{r=a} = \alpha_1 \frac{h}{a} E\varphi, \\ \varphi = \frac{M}{\alpha_2 E h^3},$$

где постоянные α , α_1 и α_2 имеют значения, приведенные в таблице 64.

64. Круглая пластинка под сосредоточенной нагрузкой. Случай нагрузки, приложенной в центре пластинки, был уже разобран в § 19. Сейчас мы предположим, что нагрузка P приложена в точке A на расстоянии b от центра O пластинки (рис. 140)²⁾. Разделив пластинку на две части цилиндрическим сечением радиусом b , как показано на чертеже пунктирной линией, мы сможем для каждой из этих частей пластинки применить решение (195). Если угол θ отсчитывается от радиуса OA , то следует удержать лишь те члены, которые со-

¹⁾ Reissner H., Ingr.-Arch., т.1, стр. 72, 1929.

²⁾ Задача была решена Клебшем, цит. на стр. 318. См. также Фөррл А., Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., стр. 155, 1912. Исследование этой задачи в биполярных координатах было выполнено Меланом (Melan E., Eisenbau, стр. 190, 1920) и Флюгге (Flügge W., Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten, Берлин, 1928). См. также статью Шмидта (Schmidt H., Ingr.-Arch., т. 1, стр. 147, 1930) и Мюллера (Müller W., Ingr.-Arch., т. 13, стр. 355, 1943).

держат $\cos m\theta$. Поэтому для наружной части пластинки будем иметь

$$w = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta, \quad (a)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r, \\ R_1 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r, \\ &\dots \dots \dots \\ R_m &= A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Аналогичные выражения могут быть написаны также для функций R'_0, R'_1, R'_m , соответствующих внутренней части пластинки. Обозначим постоянные для этой части пластинки символами A'_m, B'_m, \dots вместо A_m, B_m, \dots . Тогда из того условия, что прогиб, наклон и моменты должны иметь в центре пластинки конечные значения, получим

$$\begin{aligned} C'_0 &= D'_0 = 0, \\ C'_1 &= D'_1 = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ B'_m &= D'_m = 0. \end{aligned}$$

Для каждого члена ряда (а) нам нужно будет, таким образом, определить четыре постоянные интегрирования для наружной части пластинки и две для внутренней части.

Шесть необходимых для этого решения уравнений могут быть получены из граничных условий на контуре пластинки и из условий непрерывности на окружности радиусом b . Если внешний контур пластинки предполагается защемленным, то граничные условия будут

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a} = 0. \quad (c)$$

Обозначив прогиб внутренней части пластинки через w_1 и заметив, что по окружности радиусом b не приложено никаких внешних моментов, мы сможем условия непрерывности на окружности записать следующим образом:

$$w = w_1, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \quad \text{при } r = b. \quad (d)$$

Последнее уравнение получено из соображения, относящегося к перерезывающей силе Q_r на пограничной окружности. Эта сила

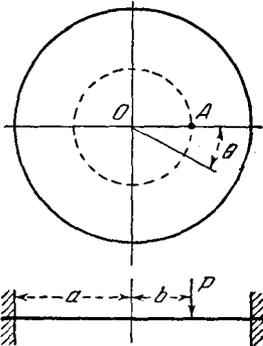


Рис. 140.

непрерывна во всех точках окружности, за исключением точки A , где она испытывает разрыв непрерывности вследствие присутствия приложенной там сосредоточенной силы P . Выразив эту силу в виде ряда ¹⁾

$$\frac{P}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right) \quad (e)$$

и взяв для перерезывающей силы первое из выражений (193), получим

$$D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w)_{r=b} - D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w_1)_{r=b} = \frac{P}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right). \quad (f)$$

Из шести уравнений (c), (d) и (f) можно вычислить постоянные интегрирования и представить функции R_m и R'_m в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{P}{8\pi D} \left[(r^2 + b^2) \ln \frac{r}{a} + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - r^2)}{2a^2} \right], \\ R'_0 &= \frac{P}{8\pi D} \left[(r^2 + b^2) \ln \frac{r}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - b^2)}{2a^2} \right], \\ R_1 &= -\frac{Pb^3}{16\pi D} \left[\frac{1}{r} + \frac{2(a^2 - b^2)r}{a^2b^2} - \frac{(2a^2 - b^2)r^3}{a^4b^2} - \frac{4r}{b^2} \ln \frac{a}{r} \right], \\ R'_1 &= -\frac{Pb^3}{16\pi D} \left[\frac{2(a^2 - b^2)r}{a^2b^2} + \frac{(a^2 - b^2)^2r^3}{a^4b^4} - \frac{4r}{b^2} \ln \frac{a}{r} \right], \\ R_m &= \frac{Pb^m}{8m(m-1)\pi D} \left\{ \frac{r^m}{a^{2m}} \left[(m-1)b^2 - ma^2 + (m-1)r^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m(m-1)}{m+1} \frac{b^2r^2}{a^2} \right] + \frac{1}{r^m} \left(r^2 - \frac{m-1}{m+1} b^2 \right) \right\}, \\ R'_m &= \frac{Pb^m}{8m(m-1)\pi D} \left\{ \frac{r^m}{a^{2m}} \left[(m-1)b^2 - ma^2 + \frac{a^{2m}}{b^{2m-2}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (m-1) \frac{r^{m+2}}{a^{2m}} \left[1 - \frac{m}{m+1} \frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{m+1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими функциями, находим прогиб под нагрузкой

$$(\omega)_{r=b, \theta=0} = \frac{P}{16\pi D} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2}. \quad (196)$$

При $b=0$ эта формула совпадает с формулой (92) для центрально нагруженной пластинки. Подобным же образом исследуется и случай пластинки, свободно опертой по контуру.

¹⁾ Этот ряд аналогичен примененному нами выше в случае прямоугольной пластинки, стр. 277.

С помощью того же ряда (а) может быть решена также и задача о круглой кольцевой пластинке, защемленной по внутреннему контуру ($r=b$) и находящейся под действием сосредоточенной силы P , приложенной на внешнем контуре (рис. 141). В этом случае граничные условия для внутреннего защемленного контура

$$(w)_{r=b} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=b} = 0. \quad (g)$$

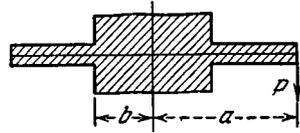


Рис. 141.

Для внешнего края, загруженного лишь в одной точке, эти условия будут иметь такой вид:

$$\left. \begin{aligned} (M_r)_{r=a} &= 0, \\ (V)_{r=a} &= \frac{P}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right). \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Выкладки, выполненные для частного случая $b/a = 2/3$, показывают¹⁾, что наибольший изгибающий момент на внутреннем контуре равен

$$(M_r)_{r=b, \theta=0} = -4,45 \frac{P}{2\pi}.$$

Изменения момента по внутреннему краю, а также по окружности радиуса $r = 5a/6$ показаны на рис. 142. Из него видно, что с увеличением угла θ , отсчитываемого от точки приложения нагрузки, момент быстро уменьшается.

Общим решением вида (а) можно с успехом воспользоваться в применении к круглой пластинке, загруженной системой сосредоточенных сил, распределенных симметрично относительно центра пластинки²⁾, а также к кольцевой пластинке. Что касается круглой пластинки без отверстий, нагруженной лишь одной внецентренно приложенной силой, то к простейшим решениям

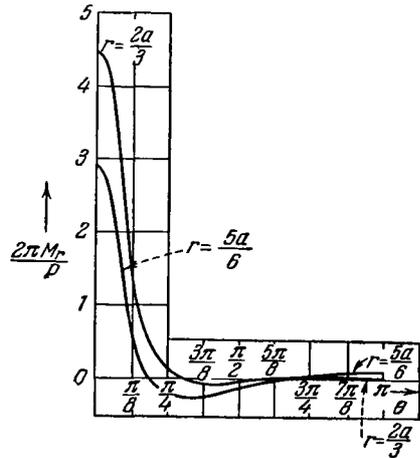


Рис. 142.

¹⁾ Reissner H., цит. на стр. 234.

²⁾ Комбинируя эти реактивные силы с заданным равномерным нагружением, мы можем решить задачу безбалочного перекрытия, ограниченного круговым контуром: см. Hajnal-Konyi K., Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken, Берлин, 1929.

приводит здесь метод комплексных переменных¹⁾, или же, если пластинка зашкреплена, метод инверсии²⁾. Для этого последнего случая уравнение изогнутой поверхности принимает вид

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi D} \left[(1 - x^2)(1 - \xi^2) + (x^2 + \xi^2) - 2x\xi \cos \theta \ln \frac{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \theta}{1 + x^2\xi^2 - 2x\xi \cos \theta} \right], \quad (197)$$

где $x = r/a$, $\xi = b/a$ (рис. 140). Выражение (197) сохраняет силу для всей площади пластинки и дает для $x = \xi$, $\theta = 0$, т. е. для точки приложения нагрузки прогиб (196), полученный выше методом рядов.

65. Круглая пластинка, опертая в нескольких точках по контуру. В случае нагрузки, распределенной симметрично относительно центра пластинки, мы приняли в качестве общего выражения для изогнутой поверхности уравнение следующего вида³⁾:

$$w = w_0 + w_1, \quad (a)$$

где w_0 — прогиб пластинки, свободно опертой по всему контуру, а w_1 удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\Delta \Delta w_1 = 0. \quad (b)$$

Обозначив сосредоточенные опорные реакции в точках опирания 1, 2, 3, ... через N_1, N_2, \dots, N_i и воспользовавшись для представления сосредоточенных сил рядом (h) предыдущего параграфа, получим для каждой реакции N_i следующее выражение:

$$\frac{N_i}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i \right), \quad (c)$$

где

$$\theta_i = \theta - \gamma_i.$$

¹⁾ Рейсснер применил этот метод к свободно опертой пластинке (Reissner E., Math. Ann., т. 111, стр. 777, 1935). О применении метода Мусхелишвили см. Лурье А. И., Бюлл. Ленингр. политехн. инстит., т. 31, стр. 305, 1928, и Прикл. мат. мех., т. 4, стр. 93, 1940. См. также Nasitta K., Ingr.-Arch., т. 23, стр. 85, 1955, и Roark R. J., Wisconsin Univ. Eng. Exp. Sta. Bull., 74, 1932.

²⁾ Mitchell J. H., Proc. London Math. Soc., т. 34, стр. 223, 1902.

³⁾ Несколько задач этого типа было рассмотрено Надаи (Nadai A., Z. Physik, т. 23, стр. 366, 1922). Пластинку, опертую в нескольких точках, исследовал также Бассали (Bassali W. A., Proc. Cambridge Phil. Soc., т. 53, стр. 728, 1957), круглую же пластинку при смешанных граничных условиях — Гладвэлл (Gladwell G. M. L., Quart. J. Mech. Appl. Math., т. 11, стр. 159, 1958).

причем γ_i представляет собой угол, определяющий положение опоры i (рис. 143). Тогда интенсивность опорных реакций в некоторой точке контура будет дана выражением

$$\sum_1^i \frac{N_i}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i \right), \quad (d)$$

в котором суммирование распространяется на все сосредоточенные реакции (с).

Общее решение однородного уравнения (б) дано выражением (195), стр. 318. Считая пластинку твердым телом и опуская члены, выражающие бесконечные прогибы и моменты в центре, получим из выражения (195)

$$\begin{aligned} w_1 = & A_0 + B_0 r^2 + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + C_m r^{m+2}) \cos m\theta + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m r^m + C'_m r^{m+2}) \sin m\theta. \quad (e) \end{aligned}$$

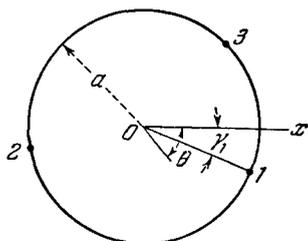


Рис. 143.

Для определения постоянных имеем следующие условия на контуре:

$$\left. \begin{aligned} (M_r)_{r=a} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} = 0, \\ (V)_{r=a} = \left(Q_r - \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = - \sum_1^i \frac{N_i}{\pi a} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i \right), \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

где $M_{r\theta}$ и Q_r даны уравнениями (192) и (193).

Рассмотрим частный случай, когда пластинка опирается в двух точках, расположенных на концах одного диаметра. Угол θ мы будем отсчитывать от этого диаметра. Тогда $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi$, и мы получим

$$\begin{aligned} w = & w_0 + \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)D} \left\{ 2 \ln 2 - 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{12} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[\frac{1}{m(m-1)} + \frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)(m-1)m^2} - \frac{\rho^2}{m(m+1)} \right] \rho^m \cos m\theta \right\}, \quad (g) \end{aligned}$$

где w_0 — прогиб свободно опертой симметрично нагруженной пластинки, P — полная нагрузка на пластинку и $\rho = r/a$. Если нагрузка приложена в центре, то из выражения (g), приняв $\nu = 0,25$, получаем

$$\begin{aligned} (w)_{\rho=0} &= 0,116 \frac{Pa^2}{D}, \\ (w)_{\rho=1, \theta=\frac{\pi}{2}} &= 0,118 \frac{Pa^2}{D}. \end{aligned}$$

Для равномерно нагруженной пластинки будем иметь следующие значения прогибов:

$$(w)_{\rho=0} = 0,269 \frac{qa^4}{D},$$

$$(w)_{\rho=1, \theta=\frac{\pi}{2}} = 0,371 \frac{qa^4}{D}.$$

Сочетанием двух решений типа (г) мы можем прийти также и к случаю, изображенному на рис. 144.

Если круглая пластинка оперта в трех точках контура, отстоящих одна от другой на 120° , и нагрузка приложена в центре, то прогиб пластинки в центре будет равен

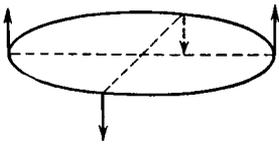


Рис. 144.

$$(w)_{\rho=0} = 0,0670 \frac{Pa^2}{D}.$$

Под равномерно распределенной нагрузкой прогиб в центре будет

$$(w)_{\rho=0} = 0,0362 \frac{Pa^2}{D},$$

где $P = \pi a^2 q$.

Случай пластинки, опертой в трех точках, был исследован экспериментально на стеклянных пластинках. Эти эксперименты обнаружили весьма удовлетворительное согласие с теорией¹⁾.

66. Пластинка, имеющая форму сектора круга. Выведенное для круглой пластинки (§ 62) общее решение совместно с некоторыми видоизменениями применить также и для пластинки, имеющей форму сектора, свободно опертого по прямолинейным краям²⁾.

Возьмем в качестве примера равномерно нагруженную пластинку в виде полукруга, опертую по диаметру AB (рис. 145). Прогиб такой пластинки ничем, очевидно, не будет отличаться от прогиба показанной пунктиром круглой пластинки, загруженной, как показано на рис. 145, b . Равномерно распределенная нагрузка представляется в этом случае рядом

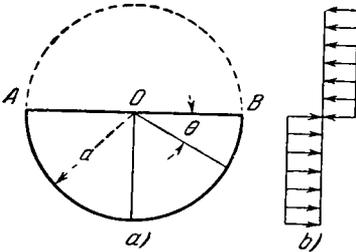


Рис. 145.

$$q = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{4q}{m\pi} \sin m\theta, \quad (a)$$

и дифференциальное уравнение изогнутой поверхности будет

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{4q}{m\pi} \sin m\theta. \quad (b)$$

¹⁾ Эти опыты были проделаны Надаи, цит. на стр. 328.

²⁾ Задачи этого типа исследовались Надаи (Nadai A., Z. Ver. deutsch. Ing., т. 59, стр. 169, 1925). См. также Галеркин Б. Г., Собрание сочинений, т. 2, стр. 320, М.—Л., АН СССР, 1953, где для таких случаев даны таблицы численных значений.

Частное решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям на диаметре AB , имеет вид

$$w_0 = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{4qr^4}{\pi m (16 - m^2) (4 - m^2) D} \sin m\theta. \quad (c)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (194), удовлетворяющее условиям на диаметре AB , будет

$$w_1 = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{m+2}) \sin m\theta. \quad (d)$$

Сочетание выражений (c) и (d) дает нам полное выражение для прогиба w полукруглой пластинки. Постоянные A_m и B_m находятся в каждом частном случае из условий на криволинейном контуре пластинки.

В случае свободно опертой пластинки будем иметь

$$\left. \begin{aligned} (w)_{r=a} &= 0, \\ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Подставив в эти уравнения вместо w сумму рядов (c) и (d), получим следующие уравнения для вычисления A_m и B_m :

$$\begin{aligned} A_m a^m + B_m a^{m+2} &= - \frac{4qa^2}{\pi m (16 - m^2) (4 - m^2) D}, \\ A_m a^m [m(m-1) - \nu m(m-1)] + B_m a^{m+2} (m+1)[m+2 + \nu(2-m)] &= \\ &= - \frac{4qa^2 [12 + \nu(4-m^2)]}{\pi m (16 - m^2) (4 - m^2) D}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{qa^4 (m+5+\nu)}{a^m \pi (16 - m^2) (2+m) \left[m + \frac{1}{2} (1+\nu) \right] D}, \\ B_m &= - \frac{qa^4 (m+3+\nu)}{a^{m+2} \pi (4+m) (4-m^2) \left[m + \frac{1}{2} (1+\nu) \right] D}. \end{aligned}$$

При найденных значениях постоянных выражение для прогиба пластинки принимает вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left\{ \frac{4r^4}{a^4} \frac{1}{\pi m (16 - m^2) (4 - m^2)} + \right. \\ &+ \frac{r^m}{a^m} \frac{m+5+\nu}{\pi m (16 - m^2) (2+m) \left[m + \frac{1}{2} (1+\nu) \right]} \\ &\left. - \frac{r^{m+2}}{a^{m+2}} \frac{m+3+\nu}{\pi m (4+m) (4 - m^2) \left[m + \frac{1}{2} (1+\nu) \right]} \right\} \sin m\theta. \end{aligned}$$

Это выражение для прогиба позволит нам без затруднений получить из уравнений (192) изгибающие моменты.

Аналогичным образом мы можем найти решение и для всякого иного сектора с центральным углом π/k , где k данное нам целое число. Окончательные выражения для прогибов и изгибающих моментов в заданной точке могут быть представлены в каждом частном случае следующими формулами:

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D}, \quad M_r = \beta qa^2, \quad M_t = \beta_1 qa^2, \quad (f)$$

где α , β и β_1 — численные коэффициенты. Некоторые значения этих коэффициентов для точек, взятых на оси симметрии сектора, приведены в таблице 65.

Таблица 65

Значения коэффициентов α , β , β_1 для различных углов π/k пластинки-сектора, свободно опертого по контуру ($\nu = 0,3$)

π/k	$r/a = 1/4$			$r/a = 1/2$		
	α	β	β_1	α	β	β_1
$\pi/4$	0,00006	-0,0015	0,0093	0,00033	0,0069	0,0183
$\pi/3$	0,00019	-0,0025	0,0177	0,00080	0,0149	0,0255
$\pi/2$	0,00092	0,0036	0,0319	0,00225	0,0353	0,0352
π	0,00589	0,0692	0,0357	0,00811	0,0868	0,0515
	$r/a = 3/4$			$r/a = 1$		
	α	β	β_1	α	β	β_1
$\pi/4$	0,00049	0,0161	0,0169	0	0	0,0025
$\pi/3$	0,00092	0,0243	0,0213	0	0	0,0044
$\pi/2$	0,00203	0,0381	0,0286	0	0	0,0088
π	0,00560	0,0617	0,0468	0	0	0,0221

Случай, когда пластинка, имеющая форму сектора, защемлена по дуге контура и свободно оперта по прямолинейным краям, поддается решению только что рассмотренным нами методом. Значения коэффициентов α и β для точек, расположенных на оси симметрии сектора, приведены в таблице 66.

Из этой таблицы мы видим, что максимальное напряжение изгиба в рассмотренном случае имеет место в средней точке, ограничивающей сектор дуги окружности.

Если этот круговой край в равномерно нагруженной пластинке, имеющей форму сектора, совершенно свободен, т. е. не оперт, то максимальный прогиб будет иметь место в средней точке этого свободного края. Для случая, когда $\pi/k = \pi/2$, будем иметь

$$w_{\max} = 0,0633 \frac{qa^4}{D}.$$

Изгибающий момент в этой точке равен

$$M_t = 0,1331 qa^2.$$

В общем случае пластинки, имеющей форму кругового сектора и защемленной или свободной (неопертой) по радиальным краям, следует при-

Таблица 66

Значения коэффициентов α и β для различных углов π/k пластинки-сектора, заземленной по дуге окружности и свободно опертой по радиальным краям ($\nu = 0,3$)

π/k	$r/a = 1/4$		$r/a = 1/2$		$r/a = 3/4$		$r/a = 1$	
	α	β	α	β	α	β	α	β
$\pi/4$	0,00005	-0,0008	0,00026	0,0087	0,00028	0,0107	0	-0,0250
$\pi/3$	0,00017	-0,0006	0,00057	0,0143	0,00047	0,0123	0	-0,0340
$\pi/2$	0,00063	0,0068	0,00132	0,0272	0,00082	0,0113	0	-0,0488
π	0,00293	0,0473	0,00337	0,0446	0,00153	0,0016	0	-0,0756

бегать к приближенным методам ¹⁾. Однако частная задача о клинообразной пластинке, несущей поперечную нагрузку, допускает строгое решение (см. § 78). Другая задача, также доступная точному методу — это задача об изгибе пластинки, заземленной по двум круговым дугам ²⁾. В этом случае надлежит

Таблица 67

Значения коэффициентов α , β и β_1 [уравнения (f)] для полукруглой пластинки, заземленной по контуру (рис. 145, a) ($\nu = 0,3$)

Распределение нагрузки	$r/a = 0$ β	$r/a = 0,483$ β_{\max}	$r/a = 0,486$ α_{\max}	$r/a = 0,525$ $\beta_1 \max$	$r/a = 1$ β
Равномерная нагрузка q	-0,0731	0,355	0,00202	0,0194	-0,0584
Гидростатическая нагрузка qu/a	-0,0276	-0,0355

¹⁾ См. Carrier G. F., Shaw F. S., Proc. Symposia Appl. Math., т. 3, стр. 125, 1950; Conway H. D., Huang M. K., J. Appl. Mech., т. 19, стр. 5, 1952; Hassé H. R., Quart. Mech., Appl. Math., т. 3, стр. 271, 1950. Загруженные сосредоточенной силой рассматривается в докладе Sekiya T., Saito A., Proc. IV Japan Congr. Appl. Mech., 1954, стр. 195. О заземленных пластинках, ограниченных двумя радиусами и двумя дугами, см. Carrier G. F., J. Appl. Mech., т. II, стр. A-134, 1944. Та же задача при различных граничных условиях рассматривается в работе Deverall L. I., Thorne C. J., J. Appl. Mech., т. 18, стр. 359, 1951. Изгиб равномерно нагруженной полукруглой пластинки, свободно опертой по криволинейной части контура и свободной по диаметру (диафрагмы паровой турбины), подробно исследован Мустером и Садовским (Muster D. F., Sadowsky M. A., J. Appl. Mech., т. 23, стр. 329, 1956). Такая же пластинка, но заземленная по криволинейной части контура составляет содержание работы: Müggel H., Ingr.-Arch., т. 24, стр. 308, 1956.

²⁾ Функция Грина для этих граничных условий была получена Диксоном (Dixon A. C., Proc. London Math. Soc., т. 19, стр. 373, 1920). Интересный случай ограничения (ее применимости) см.: Dean W. R., Proc. Cambridge Phil. Soc., т. 49, стр. 319, 1953. При распределенных нагрузках можно избежать несколько трудоемкого обращения к функции Грина; см. Woipowsky-Kriegel S., J. Appl. Mech., т. 22, стр. 129, 1955; Ingr.-Arch., т. 24, стр. 48, 1956.

воспользоваться биполярными координатами; численные же данные, относящиеся к частному типу такой задачи — о заземленной полукруглой пластинке, — приводятся в таблице 67.

Биполярные координаты с успехом находят применение также и в задаче о пластинке, заземленной между внешним и внутренним (неконцентрическими) круговыми контурами и несущей одну сосредоточенную нагрузку¹⁾.

67. Круглая пластинка переменной толщины. Круглые пластинки неравномерной толщины встречаются иногда при проектировании деталей машин: таковы, например, диафрагмы паровых турбин или поршни машин с возвратно-поступательным движением рабочих частей. Толщина таких пластинок бывает обычно функцией радиального расстояния, а действующая на них нагрузка симметрична относительно центра пластинки. Ограничимся в дальнейшем изложении этим симметричным случаем.

Поступая, как было разъяснено в § 15, и пользуясь обозначениями этого параграфа, выведем из условий равновесия элемента, подобного изображенному на рис. 28 (стр. 67), следующее уравнение:

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Qr = 0, \quad (a)$$

где, как и раньше,

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right), \\ M_t &= D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right), \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

причем

$$\varphi = -\frac{dw}{dr}, \quad (c)$$

а Q — перерезывающая сила, приходящаяся на единицу длины кольцевого окружного сечения радиуса r . Для сплошной пластинки Q выразится формулой

$$Q = \frac{1}{2\pi r} \int_0^r q 2\pi r dr, \quad (d)$$

в которой q — интенсивность поперечной нагрузки.

Подставив выражения (b), (c) и (d) в уравнение (a) и заметив, что жесткость пластинки при изгибе D уже не является постоянной величиной, а изменяется в зависимости от радиуса-вектора, мы придем к следующему уравнению:

$$D \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) + \frac{dD}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (e)$$

Таким образом, задача об изгибе круглой симметрично нагруженной пластинки сводится к решению дифференциального уравнения (e) второго

¹⁾ Эта задача исследована Кудрявцевым Н. В., Доклады АН СССР, т. 53, стр. 203, 1946.

порядка с переменными коэффициентами. Чтобы представить уравнение в безразмерной форме, введем следующие обозначения:

a — радиус внешнего контура пластинки,
 h — толщина пластинки в некоторой точке,
 h_0 — толщина пластинки в центре.

Тогда

$$\frac{r}{a} = x, \quad \frac{h}{h_0} = y. \quad (f)$$

Предположим, сверх того, что нагрузка распределена равномерно. Введя обозначение

$$p = \frac{6(1-\nu^2)a^3q}{Eh_0^3}, \quad (g)$$

преобразуем уравнение (e) к следующему виду:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{d \ln y^3}{dx} \right) \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\nu}{x} \frac{d \ln y^3}{dx} \right) \varphi = - \frac{px}{y^3}. \quad (198)$$

Во многих случаях переменную толщину пластинки можно с достаточной точностью представить уравнением ¹⁾

$$y = e^{-\frac{\beta x^2}{6}}, \quad (h)$$

где β — постоянная величина, которую нужно выбрать таким образом, чтобы в каждом частном случае подойти как можно ближе к действительным пропорциям в размерах пластинки. Графики изменения толщины пластинки в радиальном направлении, соответствующие различным значениям постоянной величины β , показаны на рис. 146. Подставив выражение (h) в уравнение (198), найдем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \beta x \right) \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} + \nu\beta \right) \varphi = - px e^{\frac{\beta x^2}{2}}. \quad (i)$$

Легко установить, что

$$\varphi_0 = - \frac{p}{(3-\nu)\beta} x e^{\frac{\beta x^2}{2}} \quad (j)$$

представляет собой частное решение уравнения (i). Одно из двух решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (i), может быть взято в форме степенного ряда

$$\varphi_1 = a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (1+\nu)(3+\nu) \dots (2n-1+\nu)}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots 2n \cdot 2n (2n+2)} x^{2n+1} \right], \quad (k)$$

¹⁾ Первое исследование изгиба круглой пластинки неравномерной толщины было выполнено Хольцером (H o l z e r H., Z. ges. Turbinenwesen, т. 15, стр. 21, 1918). Приведенные в настоящем параграфе результаты заимствованы из докторской диссертации Пихлера «Изгиб радиально-симметричных пластинок переменной толщины» (P i c h l e r O., Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke, Берлин, 1928). См. также статью Гран Ольссона (G r a n O l s s o n R., Ingr.-Arch., т. 8, стр. 81, 1937).

где a_1 — произвольная постоянная. Второе решение того же уравнения становится в центре пластинки, т. е. при $x = 0$, бесконечно большим и, следовательно, не должно приниматься в соображение, если в центре пластинки нет отверстия. Сочетая решения (j) и (k), мы можем написать общее решение уравнения (i) для всей пластинки в следующем виде:

$$\varphi = p \left(C \varphi_1 - \frac{x}{(3-\nu)\beta} e^{\frac{\beta x^2}{2}} \right). \quad (l)$$

Постоянная C должна быть в каждом частном случае определена из условия на контуре пластинки. Поскольку ряд (k) равномерно сходится, его можно дифференцировать, и подстановка в уравнения (b) даст нам выражения для изгибающих моментов. Прогиб находится из уравнения (c).

В случае пластинки, заземленной по контуру, граничные условия будут иметь вид

$$(w)_{x=1} = 0, \quad (\varphi)_{x=1} = 0, \quad (m)$$

и постоянная C в решении (l) примет следующее значение:

$$C = \frac{e^{\frac{\beta}{2}}}{(3-\nu)\beta (\varphi_1)_{x=1}}. \quad (n)$$

Чтобы получить численное значение C для данного значения β , определяющего профиль диаметрального сечения пластинки (см. рис. 146), мы должны

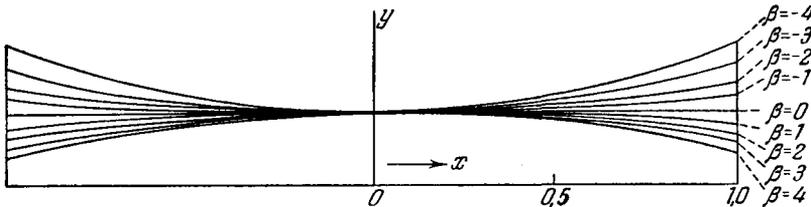


Рис. 146.

вычислить сумму ряда h для $x = 1$. Итоги таких вычислений приведены в вышеупомянутой работе Пихлера. В ней даны также и численные значения производной и интеграла ряда (k), с помощью которых можно вычислять моменты и прогибы пластинок.

Прогиб пластинки в центре можно представить формулой

$$w_{\max} = \alpha p = \alpha \frac{6(1-\nu^2)a^4 q}{Eh_0^3}, \quad (o)$$

где α — численный коэффициент, зависящий от постоянной β . Ряд значений этого коэффициента, вычисленных для $\nu = 0,3$, приводится во второй строке таблицы 68.

Максимальные напряжения изгиба для различных радиальных расстояний могут быть представлены формулами

$$(\sigma_r)_{\max} = \pm \gamma \frac{3qa^2}{h_0^2}, \quad (\sigma_t)_{\max} = \pm \gamma_1 \frac{3qa^2}{h_0^2}. \quad (p)$$

Таблица 68

Численные коэффициенты α и α' для вычисления прогибов в центре круглой пластинки переменной толщины ($\nu = 0,3$)

β	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
α	0,0801	0,0639	0,0505	0,0398	0,0313	0,0246	0,0192	0,0152	0,01195
α'	0,2233	0,1944	0,1692	0,1471	0,1273	0,1098	0,0937	0,0791	0,06605

Значения численных коэффициентов γ и γ_1 для различных размеров пластинки и различных значений $x = r/a$ представлены графически на рис. 147 и 148. При $\beta = 0$ эти кривые дают те же самые значения напряжений, что

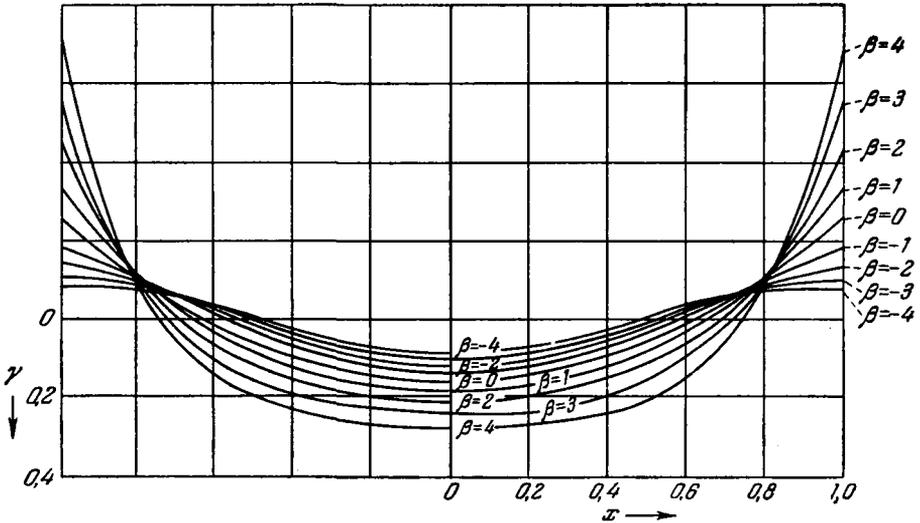


Рис. 147.

и полученные нами ранее для пластинки постоянной толщины (см. рис. 29, стр. 72).

В случае пластинки, *свободно опертой по контуру*, граничные условия будут

$$(w)_{x=1} = 0, \quad (M_r)_{x=1} = 0. \quad (q)$$

Исследование показывает, что уравнения, аналогичные уравнениям (o) и (p), могут дать выражения для прогибов и максимальных напряжений также и в этом случае. При этом для постоянных величин мы будем пользоваться обозначениями α' , γ' и γ_1' вместо α , γ и γ_1 , введенных нами для защемленной по контуру пластинки. Значения α' приведены в последней строке таблицы 68, значения же γ' и γ_1' представлены графически на рис. 149 и 150.

Вычисление прогибов и напряжений в данной пластинке переменной толщины мы начинаем с выбора надлежащего значения постоянной β , представленной посредством кривых рис. 146. После того как значение β установлено и условия на контуре известны, мы можем, воспользовавшись значениями таблицы 68, вычислить прогиб в центре, а с помощью кривых на

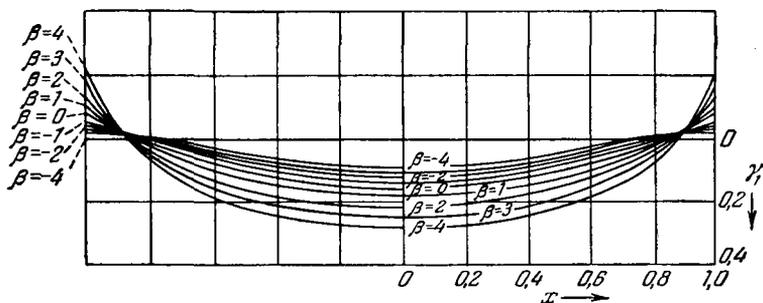


Рис. 148.

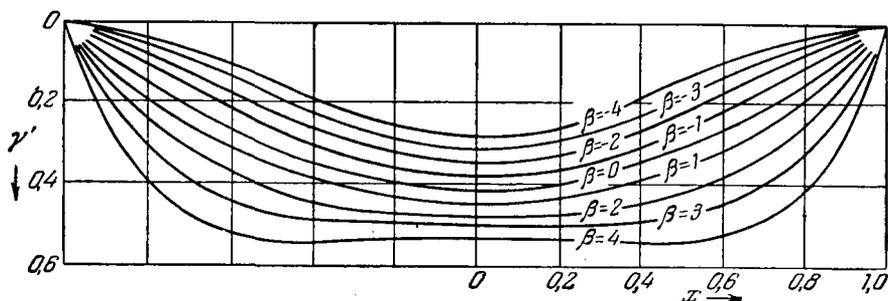


Рис. 149.

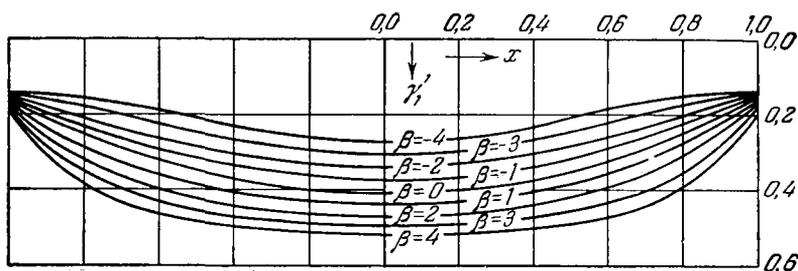


Рис. 150.

рис. 147, 148 или 149, 150 найти максимальное напряжение. Если форма диаметрального сечения данной нам пластинки не может быть представлена с удовлетворительной точностью ни одной из кривых рис. 146, то всегда

можно применить приближенный метод решения задачи. Этот метод заключается в том, что мы разбиваем пластинку концентрическими окружностями на несколько колец и для каждого из них пользуемся формулами, ранее выведенными для кольцевой пластинки постоянной толщины. Процедура расчета получается весьма сходной с той, которую Граммель (R. Grammel) предложил для вычисления напряжений во вращающихся дисках¹⁾.

68. Кольцевая пластинка линейно изменяющейся толщины. Рассмотрим круглую пластинку с концентрическим отверстием, толщина которой изменяется по закону, представленному на рис. 151. Пластинка несет нагрузку интенсивностью a , равномерно распределенную по площади, а также погонную нагрузку $p = P/2\pi b$, равномерно распределенную по краю отверстия²⁾. Положим, что изгибная жесткость пластинки по окружности $r = b$ равна $D_0 = Eh_0^3/12(1 - \nu^2)$, определим ее значение на некотором расстоянии r от центра величиной

$$D = \frac{D_0 r^3}{b^3}. \quad (a)$$

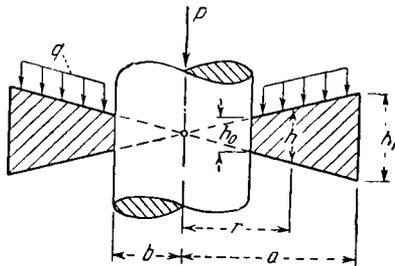


Рис. 151.

Подставляя это в уравнение (e) § 67 и принимая в расчет дополнительную перерезывающую силу $P/2\pi r$, обусловленную загрузкой края, приходим к дифференциальному уравнению

$$r^2 \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + 4r \frac{d\varphi}{dr} + (3\nu - 1) \varphi = -\frac{qb^3}{2D_0} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{Pb}{2\pi D_0 r^2}. \quad (b)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (b), получим без труда, положив $\varphi = r^\alpha$. Сочетая это решение с частным решением уравнения (b), находим

$$\varphi = Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2} + \frac{qb^3}{2D_0(1-3\nu)} - \frac{qb^5}{6(1-\nu)D_0 r^2} + \frac{Pb^3}{6\pi(1-\nu)D_0 r^2}, \quad (c)$$

где

$$\alpha_1 = -1,5 + \sqrt{3,25 - 3\nu}, \quad \alpha_2 = -1,5 - \sqrt{3,25 - 3\nu}. \quad (d)$$

В частном случае $\nu = 1/3$ выражение (c) заменяется иным:

$$\varphi = A + \frac{B}{r^3} - \frac{qb^3}{6D_0} \ln \frac{r}{b} - \frac{qb^5}{4D_0 r^2} + \frac{Pb^3}{4\pi D_0 r^2}. \quad (e)$$

¹⁾ Grammel R., Dingers Polytechn J., т. 338, стр. 217, 1923. На аналогично, существующую между задачей о вращающемся диске и задачей о поперечном изгибе круглой пластинки переменной толщины, указал Фёппль (Föppel L., Z. angew. Math. Mech., т. 2, стр. 92, 1922). Несимметричный изгиб круглой пластинки переменной толщины рассматривался Гран Ольссоном (Gran Olsson R., Ingr.-Arch., т. 10, стр. 14, 1939).

²⁾ Этот вопрос был исследован Конвеем (Conway H. D., J. Appl. Mech., т. 15, стр. 1, 1948). Численные результаты, приведенные в таблице 69, заимствованы из этой работы.

Произвольные постоянные A и B определяются из контурных условий пластинки. Введя сокращенную запись φ_b вместо $(\varphi)_{r=b}$, M_b вместо $(M_r)_{r=b}$ и аналогичным образом φ_a , M_a , даем в таблице 69 сводку граничных условий (в последнем столбце) и вычисленные с помощью уравнения (е) значения коэффициентов k и k_1 . С помощью последних читатель сможет

Таблица 69

Коэффициенты уравнений (f) для различных значений отношения a/b (рис. 151) ($\nu = 1/3$)

Различные варианты загрузки и опирания (классификация таблицы 3)	Коэффициент	a/b						Граничные условия
		1,25	1,5	2	3	4	5	
3	k k_1	0,249 0,00372	0,638 0,0453	3,96 0,401	13,64 2,12	26,0 4,25	40,6 6,28	$P = Q^*$ $\varphi_b = 0$ $M_a = 0$
4	k k_1	0,149 0,00551	0,0991 0,0564	2,23 0,412	5,57 1,673	7,78 2,79	9,16 3,57	$P = 0$ $\varphi_b = 0$ $M_a = 0$
5	k k_1	0,1275 0,00105	0,515 0,0115	2,05 0,0934	1,97 0,537	17,35 1,261	30,0 2,16	$P = Q$ $\varphi_b = 0$ $\varphi_a = 0$
6	k k_1	0,159 0,00174	0,396 0,0112	1,091 0,0606	3,31 0,261	6,55 0,546	10,78 0,876	$q = 0$ $\varphi_b = 0$ $\varphi_a = 0$
8	k k_1	0,353 0,00816	0,933 0,0583	2,63 0,345	6,88 1,358	11,47 2,39	16,51 3,27	$q = 0$ $\varphi_b = 0$ $M_a = 0$
	k k_1	0,0785 0,00092	0,208 0,008	0,52 0,0495	1,27 0,193	1,94 0,346	2,52 0,482	$P = 0$ $\varphi_b = 0$ $\varphi_a = 0$

*) Где $Q = \pi q (a^2 - b^2)$.

определять наибольшие абсолютные значения напряжений и прогибов для шести различных случаев загрузения q и P по формулам

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{\max} &= k \frac{qa^2}{h_1^2} \quad \text{или} \quad (\sigma_r)_{\max} = k \frac{P}{h_1^2}, \\ (w)_{\max} &= k_1 \frac{qa^4}{Eh_1^3} \quad \text{или} \quad (w)_{\max} = k_1 \frac{Pa^2}{Eh_1^3}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Соответствующие значения для подобных же пластинок постоянной толщины приводятся в таблице 3 (стр. 79).

69. Круглая пластинка линейно изменяющейся толщины. Исследование изгиба круглой пластинки¹⁾, представленной на рис. 152, обязывает нас рассмотреть в отдельности две ее части:

1) Кольцевую область $b < r < a$. Если $\nu \neq \frac{1}{3}$, то наклон $\varphi = \frac{dw}{dr}$ дается здесь опять выражением (с) § 68, однако без предпоследнего члена.

2) Внутреннюю область $r < b$. Здесь $dD/dr = 0$, и уравнение (е) § 67 приводится к

$$r^2 \frac{d^2\varphi_i}{dr^2} + r \frac{d\varphi_i}{dr} - \varphi_i = -\frac{qr^3}{2D_0} - \frac{P_r}{2\pi D_0}, \quad (a)$$

где индексом i отмечена внутренняя область пластинки. Общим решением уравнения (а) будет

$$\varphi_i = A_i r + \frac{B_i}{r} - \frac{qr^3}{16D_0} - \frac{P_r}{8\pi D_0} (2 \ln r + 1). \quad (b)$$

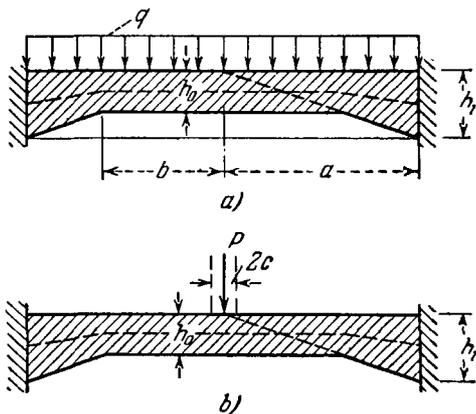


Рис. 152.

Постоянные A , B в уравнении (с) § 68, а также A_i , B_i в уравнении (b) устанавливаются граничным условием

$$(\varphi)_{r=a} = 0$$

и условиями непрерывности

$$(\varphi_i)_{r=0} = 0, \quad (\varphi - \varphi_i)_{r=b} = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\varphi_i}{dr} \right)_{r=b} = 0.$$

Таблицы 70 и 71 дают прогибы w_{\max} и значения изгибающих моментов для двух случаев загрузения. Чтобы вычислить изгибающий момент в центре в случае, когда сосредоточенная сила P приложена в центре, мы вправе

¹⁾ Зашемленные и свободно опертые пластинки такой формы исследовались Фавром (Favre H., Bull. Techn. Suisse romande, т. 75, 1949). Приводимые ниже численные результаты получены в основном из работы Favre H., Chabloz E., Bull. Techn. Suisse r., т. 78, 1952.

Таблица 70

Прогибы и изгибающие моменты круглой защемленной пластинки под равномерной нагрузкой (рис. 152, а) ($\nu = 0,25$)

b/a	$w_{\max} = \frac{qa^4}{Eh_0^3}$	$M_r = Bqa^2$			$M_t = B_1qa^2$		
		r=0	r=b	r=a	r=0	r=b	r=a
	α	β	β	β	β_1	β_1	β_1
0,2	0,008	0,0122	0,0040	-0,161	0,0122	0,0078	-0,040
0,4	0,042	0,0332	0,0007	-0,156	0,0332	0,0157	-0,039
0,6	0,094	0,0543	-0,0188	-0,149	0,0543	0,0149	-0,037
0,8	0,148	0,0709	-0,0519	-0,140	0,0709	0,0009	-0,035
1,0	0,176	0,0781	-0,125	-0,125	0,0781	-0,031	-0,031

принять, что эта нагрузка распределена равномерно по площади малого круга радиусом c . Тогда момент $M_r = M_t$ в точке $r = 0$ может быть выражен функцией

$$M_{\max} = M_0 - \frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{c^2}{2a^2}\right) + \gamma_1 P. \quad (c)$$

Здесь M_0 определяется из уравнения (83), имеющего силу для свободно опертой пластинки постоянной толщины; второй член представляет влияние краевого момента, третий член, отражающий неравномерность толщины пластинки, определяется по таблице 71.

Таблица 71

Прогибы и изгибающие моменты круглой защемленной по контуру пластинки под центральной нагрузкой (рис. 152, б) ($\nu = 0,25$)

b/a	$w_{\max} = \frac{qa^4}{Eh_0^3}$	$M_r = M_t$ r=0	$M_r = \beta P$		$M_t = \beta_1 P$	
			r=b	r=a	r=b	r=a
	α	γ_1^*	β	β	β_1	β_1
0,2	0,031	-0,114	-0,034	-0,129	-0,028	-0,032
0,4	0,093	-0,051	-0,040	-0,112	-0,034	-0,028
0,6	0,155	-0,021	-0,050	-0,096	-0,044	-0,024
0,8	0,203	-0,005	-0,063	-0,084	-0,057	-0,021
1,0	0,224	0	-0,080	-0,080	-0,020	-0,020

*) Из уравнения (с).

В случае высокой концентрации нагрузки, требующей обращения к теории толстой пластинки, напряжение в центре нижней поверхности пластинки

дается выражением

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \frac{6P\gamma_1}{h_0^2}, \quad (d)$$

где σ_0 можно вычислить из выражения (97).

Предполагая, далее, что изгибная жесткость пластинки изменяется по закону

$$D = D_0 \left(1 - \frac{r}{a_0}\right)^m, \quad (e)$$

где a_0 обозначает длину, по крайней мере равную радиусу пластинки, мы приходим к общему выражению наклона φ в гипергеометрических функциях¹⁾. Частное допущение $m = 1/\nu$ приводит, однако, к решению в замкнутой форме. Приняв, сверх того, $\nu = 1/3$, возвращаемся вновь к случаю пластинки с линейно изменяющейся толщиной²⁾.

Симметричная деформация пластинок, подобных воспроизведенной на рис. 153, была также исследована методом параметров, близким к изложенному в § 39. Отдельные численные результаты³⁾, полученные этим путем, приводятся в таблицах 72 и 73.

При центральном нагружении силой P (рис. 153, *b*) определение изгибающих моментов и растягивающих напряжений можно производить по формулам

$$M_{\max} = M_0 + \gamma_2 P \quad (f)$$

и

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \frac{6P\gamma_2}{h_0^2}, \quad (g)$$

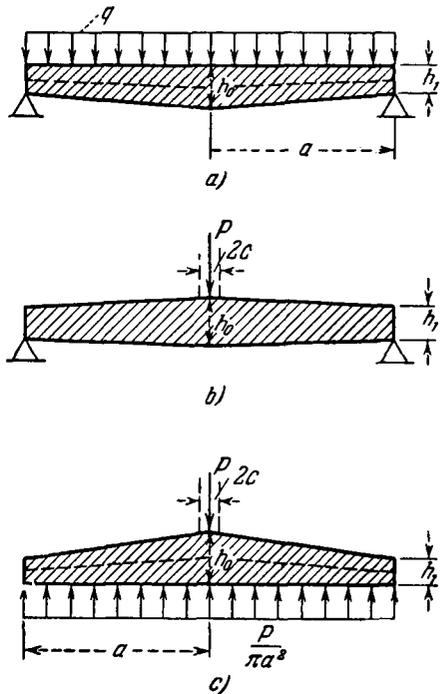


Рис. 153.

аналогичным уравнениям (c) и (d). M_0 и на этот раз находится из (83), причем σ_0 обозначает результат, полученный из выражения (96), а коэффициент γ_2 берется из таблицы 73.

Практический интерес представляет также сочетание нагрузок (рис. 153, *a* и *b*). Положив $q = -P/\pi a^2$, мы получаем состояние равновесия круглой фундаментной плиты, несущей центральную нагрузку P и испытывающей в то же время равномерно распределенную реакцию грунта

¹⁾ Gran Olsson R., Ingr.-Arch. т. 8, стр. 270, 1937.

²⁾ См. в особенности Conway H. D., J. Appl. Mech., т. 18, стр. 140, 151; т. 20, стр. 564, 1953.

³⁾ Как результаты, так и сам метод принадлежат Фавру и Шабло (Favre H., Chabloz E. Z., angew. Math. Phys., т. 1, стр. 317, 1950, и Bull. Techn. Suisse rom., т. 78, 1952).

Таблица 72

Прогибы и изгибающие моменты свободно опертой пластинки под равномерной нагрузкой (рис. 153, а) ($\nu = 0,25$)

$\frac{h_0}{h_1}$	$w_{\max} = a \frac{qa^4}{Eh_0^3}$	$M_r = \beta qa^2$		$M_t = \beta_1 qa^2$		
		$r=0$	$r=a/2$	$r=0$	$r=a/2$	$r=a$
		β	β	β_1	β_1	β_1
α						
1,00	0,738	0,203	0,152	0,203	0,176	0,094
1,50	1,26	0,257	0,176	0,257	0,173	0,054
2,33	2,04	0,304	0,195	0,304	0,167	0,029

Таблица 73

Прогибы и изгибающие моменты свободно опертой круглой пластинки под центральной нагрузкой (рис. 153, б) ($\nu = 0,25$)

$\frac{h_0}{h_1}$	$w_{\max} = a \frac{Pa^2}{Eh_0^3}$	$M_r = M_t$	$M_r = \beta P$	$M_t = \beta_1 P$	
		$r=0$	$r=a/2$	$r=a/2$	$r=a$
		γ_2	β	β_1	β_1
α					
1,0	0,582	0	0,069	0,129	0,060
1,50	0,93	0,029	0,088	0,123	0,033
2,33	1,39	0,059	0,102	0,116	0,016

Таблица 74

Изгибающие моменты круглой фундаментной плиты под центральной нагрузкой и равномерно распределенным давлением грунта (рис. 153, с) ($\nu = 0,25$)

$\frac{h_0}{h_1}$	$M_r = M_t$	$M_r = \beta P$	$M_t = \beta_1 P$	
	$r=0$	$r=a/2$	$r=a/2$	$r=a$
	γ_2	β	β_1	β_1
1,00	-0,065	0,021	0,073	0,030
1,50	-0,053	0,032	0,068	0,016
2,33	-0,038	0,040	0,063	0,007

(рис. 153, с). Некоторые, относящиеся к этому случаю данные и, в частности, значения коэффициента γ_2 , входящего в формулы (f) и (g), приведены в таблице 74¹⁾.

70. Нелинейные задачи изгиба круглой пластинки. Из теории изгиба бруса известно, что если условия его опирания или загрузки зависят от прогиба, то этот прогиб уже не будет пропорционален нагрузке, в связи с чем мы теряем право в этих условиях пользоваться принципом наложения²⁾. Аналогичные задачи встречаются также и в вопросах изгиба пластинок³⁾. Простым примером может служить случай, показанный на рис. 154. Круглая пластинка радиуса a прижата равномерно распределенной нагрузкой q к абсолютно жесткому горизонтальному основанию. Если по контуру пластинки приложены моменты интенсивностью M_a , то может оказаться, что кольцеобразная часть пластинки будет, как показано на чертеже, изогнута, средняя же часть радиусом b останется плоской. Подобные условия имеют место в преобладающем большинстве случаев, например, при изгибе днища круглых цилиндрических резервуаров, наполненных жидкостью. Моменты M_a представляют в этом случае действие цилиндрической стенки резервуара, испытывающего местный изгиб днища. Применяя к кольцевой части днища известную формулу для равномерно нагруженной круглой пластинки [см. выражение (m) в § 62], получим прогиб

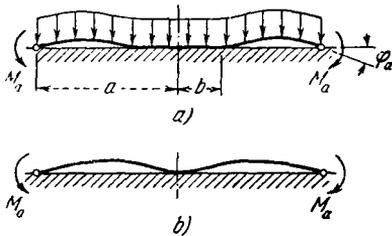


Рис. 154.

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}. \quad (a)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, \dots, C_4 мы располагаем следующими граничными условиями для внешнего края:

$$(w)_{r=a} = 0, \quad (M_r)_{r=a} = -M_a. \quad (b)$$

¹⁾ Дальнейшие сведения к расчету круглых пластинок переменной толщины см. в трудах: Gittleman W., Aircraft. Eng., т. 22, стр. 224, 1950, и Raschoud J., Schweiz. Arch., т. 17, стр. 305, 1951. Графический метод расчета был дан Chenea P. F., Naghdi P. M., J. Appl. Mech., т. 19, стр. 561, 1952.

²⁾ Пример подобной задачи рассмотрен С. П. Тимошенко в «Сопротивлении материалов», т. I, стр. 303, Гостехиздат, М., 1945.

³⁾ См. Гиркман (Girkman K., Der Stahlbau, т. 18, 1931). Несколько примеров такого рода задач разбирается также в статье Гофмана (Hoffman R., Z. angew. Math. Mech., т. 18, стр. 226, 1938).

На окружности радиуса b прогиб и наклон равны нулю. Изгибающий момент на этой окружности также должен быть равен нулю, так как внутренняя часть пластинки остается плоской. Поэтому условия на окружности радиусом b будут

$$(\omega)_{r=b} = 0, \quad \left(\frac{d\omega}{dr}\right)_{r=b} = 0, \quad (M_r)_{r=b} = 0. \quad (c)$$

Подчиняя выражение (а) условиям (b) и (c), приходим к следующим пяти уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a &= -\frac{qa^4}{64D}, \\ C_1 + C_2 \ln b + C_3 b^2 + C_4 b^2 \ln a &= -\frac{qb^4}{64D}, \\ C_2 \frac{\nu-1}{a^2} + C_3 2(\nu+1) + \\ &+ C_4 (3 + 2 \ln a + 2\nu \ln a + \nu) = -\frac{qa^2}{16D} (3 + \nu) + \frac{M_a}{D}, \\ C_2 \frac{\nu-1}{b^2} + C_3 2(\nu+1) + \\ &+ C_4 (3 + 2 \ln b + 2\nu \ln b + \nu) = -\frac{qb^2}{16D} (3 + \nu), \\ C_2 \frac{1}{b} + C_3 2b + C_4 b (2 \ln b + 1) &= -\frac{qb^2}{16D}. \end{aligned} \right\} (d)$$

Исключая из этих уравнений постоянные C_1, \dots, C_4 , получим уравнение, связывающее M_a с отношением b/a , из которого для любого заданного значения M_a можно вычислить радиус b плоской части пластинки. При этом значении b определяются постоянные интегрирования, и уравнение (а) даст нам выражение прогиба пластинки. Представив момент M_a и угол поворота φ_a края пластинки уравнениями

$$M_a = \alpha \frac{qa^2}{32} \quad \text{и} \quad \varphi_a = \beta \frac{qa^2}{32D} \quad (e)$$

и повторив вышеуказанные вычисления для нескольких значений момента M_a , мы сможем для частного случая¹⁾ $\nu = 0$ представить соотношение между постоянными коэффициентами α и β графически, как показано на рис. 155. Из этого графика мы видим, что β изменяется не пропорционально α и что с уменьшением отношения b/a сопротивление края пластинки повороту также уменьшается. Этот закон имеет силу до тех пор, пока α не примет значение 5, при

¹⁾ Этот случай рассмотрен в статье Гофмана, цит. на стр. 345.

котором $\beta = 1$ и $b/a = 0$. При этом пластинка соприкасается с основанием лишь в центре, как показано на рис. 154, *b*. При бoльших значениях α , т. е. для моментов, превышающих $M_a = 5qa^2/32$, пластинка вовсе не соприкасается с основанием, и зависимость между α и β изобразится прямой линией *AB*. Значение $M_a = 5qa^2/32$ является именно тем значением, при котором вызванный моментами M_a прогиб в центре становится численно

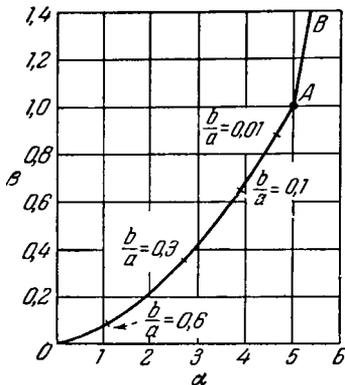


Рис. 155.

равным прогибу равномерно нагруженной свободно опертой по краю пластинки [см. уравнение (68)].

Другой пример того же типа изображен на рис. 156. Равномерно нагруженная круглая пластинка свободно опята по краю, покаясь в центре на абсолютно жестком основании. Кольцеобразную часть

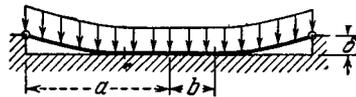


Рис. 156.

пластинки с внешним радиусом a и внутренним радиусом b здесь точно так же можно рассматривать как равномерно нагруженную пластинку и применить к ней решение (а). Отношение b/a зависит от прогиба δ и интенсивности нагрузки q .

71. Эллиптическая пластинка. Равномерно нагруженная эллиптическая пластинка, защемленная по контуру. Если оси координат расположены, как показано на рис. 157, то уравнение контура пластинки будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \quad (a)$$

Дифференциальное уравнение

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad (b)$$

и граничные условия для защемленного контура, т. е.

$$w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (c)$$

будут удовлетворяться, если мы примем для прогиба w выражение ¹⁾

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2. \quad (d)$$

Известно, что это выражение и его первые производные по x и y в силу уравнения (a) обращаются на контуре в нули. Подставив в уравнение (b) выражение (d), мы увидим, что это уравнение будет удовлетворяться, если только

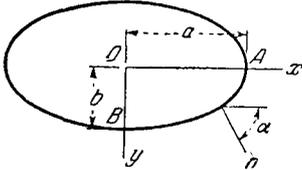


Рис. 157.

$$w_0 = \frac{q}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2 b^2} \right)}. \quad (199)$$

Таким образом, поскольку выражение (d) удовлетворяет уравнению (b) и граничным условиям, оно представляет собой точное решение для равномерно нагруженной эллиптической пластинки, защемленной по контуру. Подставив $x = y = 0$ в выражение (d), мы найдем, что w_0 , определенное из уравнения (199), будет прогибом пластинки в ее центре. Если $a = b$, то мы получим для прогиба значение, выведенное нами раньше для круглой защемленной по контуру пластинки [уравнение (62), стр. 71]. Если $a = \infty$, прогиб становится равным прогибу равномерно нагруженной полоски пролетом $2b$, защемленной по концам.

Изгибающий и крутящий моменты получаются при подстановке выражения (d) в уравнения (101) и (102). Таким путем мы найдем

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= -4w_0 D \left[\frac{3x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{a^2} + \nu \left(\frac{x^2}{a^2 b^2} + \frac{3y^2}{b^4} - \frac{1}{b^2} \right) \right]. \quad (e) \end{aligned}$$

Для центра пластинки и для концов большой оси эллипса получим соответственно

$$(M_x)_{x=0, y=0} = 4w_0 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \quad \text{и} \quad (M_x)_{x=a, y=0} = -\frac{8w_0 D}{a^2}. \quad (f)$$

Аналогичным образом для моментов M_y в центре и на концах малой оси эллипса найдем

$$(M_y)_{x=0, y=0} = 4w_0 D \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \quad \text{и} \quad (M_y)_{x=0, y=b} = -\frac{8w_0 D}{b^2}. \quad (g)$$

¹⁾ Это решение, а равно и решение для равномерно изменяющейся нагрузки q были получены Брайэном (G. H. Bryan); см. книгу Лява, Математическая теория упругости, стр. 505, ОНТИ, М.—Л., 1935. Случай эллиптической пластинки переменной толщины был исследован Гран Ольссоном (Gran Olsson R., Ingr.-Arch., т. 9, стр. 108, 1938).

Мы видим, что максимальное напряжение изгиба получается на концах малой оси эллипса. Располагая значениями моментов M_x , M_y и M_{xy} , мы можем с помощью уравнений (с) (§ 22, стр. 105) получить и значения как изгибающего M_n , так и крутящего M_{nt} моментов в любой точке контура, если произведем в указанных уравнениях подстановки

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{b^2 x}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}, \quad \sin \alpha = -\frac{dx}{ds} = \frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}}. \quad (h)$$

Перерезывающие силы Q_x и Q_y в произвольной точке получаются путем подстановки выражения (d) в уравнения (106) и (107). Перерезывающая сила Q_n на контуре находится из уравнения (d) (§ 22, стр. 105), опорная же реакция V_n — из уравнения (g) того же параграфа. Таким путем мы найдем, что интенсивность опорной реакции достигает максимального значения на концах малой оси эллипса, причем абсолютное значение ее будет

$$(V_n)_{\max} = \frac{a^2 b (3a^2 + b^2) q}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2 b^2} \quad \text{для } a > b. \quad (i)$$

Минимум абсолютного значения V_n получается на концах большой оси эллипса, где она равна

$$(V_n)_{\min} = \frac{ab^2 (a^2 + 3b^2) q}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2 b^2}. \quad (j)$$

Для круга $a = b$, и потому $(V_n)_{\max} = (V_n)_{\min} = qa/2$.

Эллиптическая пластинка, защемленная по контуру, под линейно изменяющимся давлением. Положив $q = q_0 x$, найдем, что уравнение (b) и граничные условия (с) будут удовлетворяться при

$$w = \frac{q_0 x}{24D} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}{\frac{5}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2}}. \quad (200)$$

Из этого выражения, как и в предыдущем случае, можно вычислить изгибающие моменты и реакции на контуре.

*Эллиптическая пластинка, свободно опертая по контуру и равномерно нагруженная*¹⁾. В этом случае решение сложнее, чем для защемленной пластинки¹⁾; поэтому приведем здесь лишь некоторые окончательные численные результаты. Положив $a/b > 1$, представим прогиб и изгибающие моменты в центре формулами

$$(w)_{x=y=0} = \alpha \frac{qb^4}{Eh^3}, \quad M_x = \beta q b^2, \quad M_y = \beta_1 q b^2. \quad (k)$$

¹⁾ См. Галеркин Б. Г., Z. angew. Math. Mech., т. 3, стр. 113, 1923.

Значения постоянных коэффициентов α , β и β_1 для различных значений отношения a/b и для $\nu = 0,3$ приведены в таблице 75.

Таблица 75

Коэффициенты α , β , β_1 , входящие в формулу (к) для расчета равномерно нагруженной и свободно опертой эллиптической пластинки ($\nu = 0,3$)

a/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	3	4	5	∞
α	0,70	0,83	0,96	1,07	1,17	1,26	1,58	1,88	2,02	2,10	2,28
β	0,206	0,215	0,219	0,223	0,223	0,222	0,210	0,188	0,184	0,170	0,150
β_1	0,206	0,235	0,261	0,282	0,303	0,321	0,379	0,433	0,465	0,480	0,500

Сопоставление этих численных значений с полученными ранее для прямоугольной пластинки (табл. 8, стр. 143) показывает, что при одинаковых значениях отношения между сторонами прямоугольной пластинки и отношения a/b полюсей эллиптической пластинки значения прогибов и моментов в центре для обоих этих типов пластинок заметно не различаются. Был исследован также и случай пластинки, имеющей форму полуэллипса, ограниченного малой осью¹⁾.

72. Треугольная пластинка. *Равносторонняя треугольная пластинка, свободно опертая по краям.* Ранее (см. стр. 112)

мы уже касались вопроса об изгибе такой треугольной пластинки моментами M_n , равномерно распределенными по контуру. При этом было показано, что поверхность прогибов пластинки получается такой же, как и для равномерно натянутой и равномерно нагруженной мембраны, и выражается уравнением

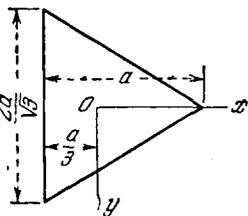


Рис. 158.

$$w = \frac{M_n}{4aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27} a^3 \right], \quad (a)$$

где a обозначает высоту треугольника, координатные же оси расположены так, как показано на рис. 158.

¹⁾ Галеркин Б. Г., Messenger Math., т. 52, стр. 99, 1923. Вопросы об изгибе сосредоточенными силами защемленных по контуру эллиптических пластинок посвящены следующие работы: Наррел Н., Math. Z., т. 6, стр. 203, 1920; Perry C. L., Proc. Symposia Appl. Math., т. 3, стр. 131, 1950; см. также Sengupta H. M., Bull. Calcutta Math. Soc., т. 41, стр. 163, 1949; т. 43, стр. 123, 1950. В последней статье вносится поправка к первой. Б. Сен, применив криволинейные координаты, получил решения для защемленных пластинок некоторых других очертаний при равномерно распределенной нагрузке; см. Sen B., Phil. Mag., т. 33, стр. 294, 1942.

В случае равномерно нагруженной пластинки поверхность прогибов будет ¹⁾

$$\omega = \frac{q}{64aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right). \quad (201)$$

Дифференцируя, находим

$$\Delta\omega = -\frac{q}{4aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right]. \quad (b)$$

Из уравнений (201) и (b) можно видеть, что как прогиб, так и изгибающий момент обращаются на контуре в нуль, поскольку в нуль здесь обращается выражение в скобках. Последующее дифференцирование дает

$$\Delta\Delta\omega = \frac{q}{D}. \quad (c)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение поверхности прогибов также удовлетворяется, и выражение (201) представляет собой решение задачи. Располагая выражением для прогибов, мы легко можем получить и выражения для изгибающих моментов и перерезывающих сил. Максимальный изгибающий момент имеет место на биссектрисах углов треугольника. Рассматривая точки по оси x и приняв $\nu = 0,3$, находим

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{\max} &= 0,0248qa^2 \quad \text{при } x = -0,062a, \\ (M_y)_{\max} &= 0,0259qa^2 \quad \text{при } x = 0,129a. \end{aligned} \right\} (202)$$

В центре пластинки

$$M_x = M_y = (1 + \nu) \frac{qa^2}{54}. \quad (203)$$

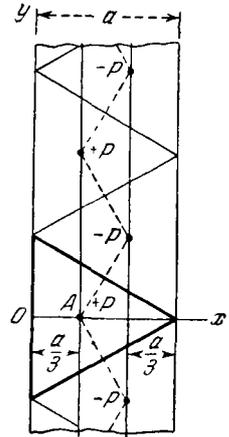


Рис. 159.

Задача загрузки пластинки сосредоточенной силой допускает решение *методом отображений* (см. стр. 181). Остановимся на случае, когда точка приложения нагрузки приходится на центр пластинки (рис. 159). Рассматривая пластинку, показанную на чертеже жирными линиями как часть бесконечно длинной прямоугольной пластинки шириной a , приложим к последней ряд фиктивных нагрузок P с чередующимися, как показано на чертеже, знаками. Узловые линии образовавшейся под такой нагрузкой изогнутой поверхности разобьют, очевидно, бесконечно длинную пластинку на равносторонние треугольники, каждый из которых будет находиться в точно таких же условиях, что и данная пластинка. Таким образом, задача будет сведена к задаче об изгибе бесконечно длинной

¹⁾ Задача об изгибе пластинки, имеющей форму равностороннего треугольника, была решена Войновским-Кригером (Woinowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 4, стр. 254, 1933).

прямоугольной пластинки, нагруженной двумя рядами равноотстоящих нагрузок $+P$ и $-P$. Зная решение для одной сосредоточенной силы (см. § 36) и применив метод наложения, легко вычислить прогиб в точке A , а также и напряжения около этой точки, поскольку влияние фиктивных сил на прогиб по мере удаления точек их приложения от A быстро падает. Этот прием позволяет определить прогиб в A :

$$\omega_0 = 0,00575 \frac{Pa^2}{D}. \quad (204)$$

Изгибающие моменты на небольшом расстоянии c от A будут

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left(\ln \frac{a\sqrt{3}}{\pi c} - 0,379 \right) - \frac{(1-\nu)P}{8\pi}, \\ M_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left(\ln \frac{a\sqrt{3}}{\pi c} - 0,379 \right) + \frac{(1-\nu)P}{8\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (205)$$

Так как для свободно опертой центрально нагруженной круглой пластинки радиуса a_0 радиальный и тангенциальный моменты на расстоянии c от центра равны соответственно (см. стр. 84)

$$M_r = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \ln \frac{a_0}{c} \quad \text{и} \quad M_t = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \ln \frac{a_0}{c} - \frac{(1-\nu)P}{4\pi}, \quad (d)$$

то можно утверждать, что первые члены в правых частях уравнений (205) тождественны с логарифмическими членами для круглой пластинки радиуса

$$a_0 = \frac{a\sqrt{3}}{\pi} e^{-0,379}. \quad (e)$$

Поэтому местные напряжения близ точки приложения нагрузки могут быть вычислены с помощью теории толстых пластинок в ее применении к случаю круглой пластинки (см. § 19).

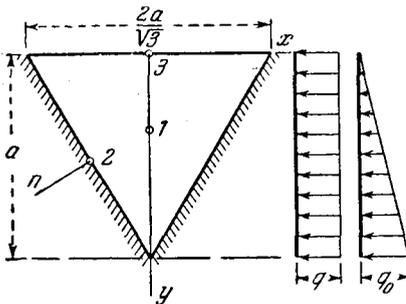


Рис. 160.

Равносторонняя треугольная пластинка, защемленная по двум или трем краям. Треугольную форму придают иногда днищам бункеров и силосов. В подобных случаях треугольная пластинка защемляется жестко по обоим своим наклонным краям и упруго по третьему горизонтальному краю (рис. 160). Практический интерес при этом представляют только равномерное и гидростатическое распределения нагрузки. Максимальный изгибающий

момент для пластинки и моменты защемления в середине защемленного края определяются формулами

$$M = \beta qa^2 \quad \text{или} \quad M = \beta_1 q_0 a^2, \quad (f)$$

в зависимости от характера загрузки (рис. 160). Значения коэффициентов β и β_1 , полученные методом конечных разностей¹⁾, приводятся в таблице 76.

Таблица 76

Значения коэффициентов β , β_1 в уравнениях (f) для равносторонней треугольной пластинки (рис. 160) ($\nu = 0,20$)

Распределение нагрузки	Край $y=0$ свободно оперт				Край $y=0$ защемлен			
	M_{x1}	M_{y1}	M_{xz}	M_{yz}	M_{x1}	M_{y1}	M_{xz}	M_{yz}
Равномерная β	0,0126	0,0147	-0,0285	0	0,0113	0,0110	-0,0238	-0,0238
Гидростатическая β_1	0,0053	0,0035	-0,0100	0	0,0051	0,0034	-0,0091	-0,0060

В заключение следует заметить, что свободно опертую по контуру треугольную пластинку с углами в вершинах $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$ можно рассматривать как половину равносторонней пластинки (рис. 158), загруженной антисимметрично выше оси x . Задача об изгибе такой пластинки может быть решена различными способами, например методом отображений²⁾.

Пластинка, имеющая форму равнобедренного прямоугольного треугольника со свободно опертymi краями. Такую пластинку можно рассматривать как половину изображенной на рис. 161 штриховой линией квадратной пластинки, и потому к ней могут быть применены методы, выведенные выше для прямоугольных пластинок³⁾. Если в точке A с координатами ξ и η (рис. 161) приложена нагрузка P , то мы вводим фиктивную нагрузку $-P$, приложенную в точке A' , являющейся зеркальным отражением точки A относительно диагонали BC квадрата. Эти две нагрузки вызовут, очевидно, такой изгиб квадратной пластинки, что диагональ BC займет положение узловой линии, и тогда часть OBC квадратной пластинки будет находиться в точности в таких же самых условиях, что и свободно опертая треугольная пластинка OBC . Приняв сначала во внимание нагрузку $+P$

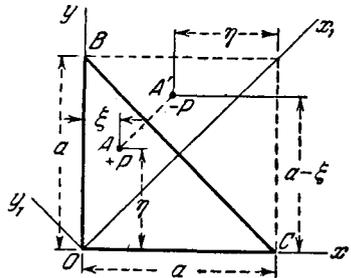


Рис. 161.

¹⁾ См. Смотров А. А., Решение плит, нагруженных сплошной нагрузкой по закону трапеции, М. — Л., ОНТИ, 1936.

²⁾ О решении этой задачи в двойных рядах см. Girtler R., Sitzber. Akad. Wiss. Wien, т. 145, стр. 61, 1936. Изгиб равносторонней треугольной пластинки переменной толщины рассматривается Геттликером (Göttlicher H., Ingr.-Arch., т. 9, стр. 12, 1938).

³⁾ Такой подход к решению был указан Надаи (Nadai A., Elastische Platten, стр. 178, 1925). Другой способ решения той же задачи был дан Б. Г. Галеркиным (Бюллетень Российской Академии наук, стр. 223, 1919, и Бюллетень Политехнического института, т. 28, стр. 1, СПб., 1919).

и применив решение Навье для квадратной пластинки (стр. 131), мы получим прогиб

$$w_1 = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{a}}{(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (g)$$

Точно таким же образом напишется и прогиб, вызванный нагрузкой — P , с той лишь разницей, что вместо ξ здесь надо будет взять $a - \eta$ и соответственно $a - \xi$ вместо η

$$w_2 = -\frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\sin \frac{m\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a}}{(m^2 + n^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (h)$$

Полный прогиб треугольной пластинки получится суммированием выражений (g) и (h), т. е.

$$w = w_1 + w_2. \quad (i)$$

Чтобы получить прогиб треугольной пластинки, вызванный равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , подставим

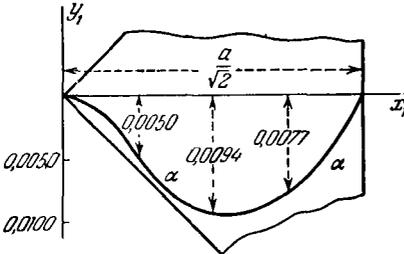


Рис. 162.

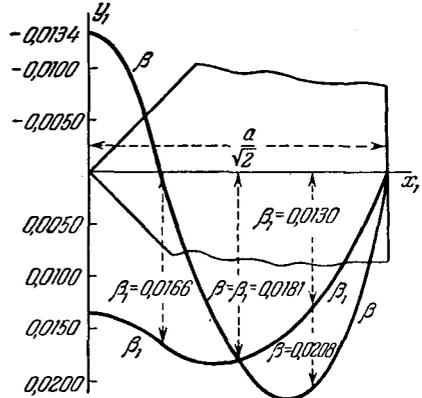


Рис. 163.

в выражение (h) вместо P произведение $q d\xi d\eta$ и проинтегрируем его по площади треугольника OBC . Таким путем получим

$$w = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \left[\sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{n \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}{m(n^2 - m^2)(m^2 + n^2)^2} + \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}}{n(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)^2} \right]. \quad (j)$$

Этот ряд быстро сходится, и им можно воспользоваться для вычисления прогиба и изгибающих моментов в любой точке пластинки. Приняв ось симметрии треугольника в качестве оси абсцисс x_1 , мы сможем представить прогибы и моменты M_{x_1} и M_{y_1} на этой оси формулами

$$w = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3}, \quad M_{x_1} = \beta qa^2, \quad M_{y_1} = \beta_1 qa^2. \quad (k)$$

Значения численных коэффициентов α , β и β_1 для этих формул даны на рис. 162 и 163. Сравнивая эти результаты с относящимися к равномерно нагруженной квадратной пластинке и приведенными в табл. 8, можно констатировать, что при одном и том же значении a максимальный изгибающий момент для треугольной пластинки будет несколько меньше половины максимального изгибающего момента для квадратной пластинки.

Чтобы упростить вычисление прогибов и моментов, двойной ряд (j) можно преобразовать в простой ряд¹⁾. С этой целью воспользуемся известным рядом

$$U_m(x) = \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2 + m^2)^2} = -\frac{2}{m^4} + \frac{\pi}{2m^3} \frac{\operatorname{ch} m \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi m}{2}} + \\ + \frac{\pi^2}{4m^2} \frac{\operatorname{ch} mx}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi m}{2}} + \frac{\pi x}{2m^2} \frac{\operatorname{sh} m \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}}, \quad (1)$$

который можно представить в следующем виде:

$$U_m(x) = (\alpha_m + \beta_m x) \operatorname{ch} mx + (\gamma_m + \delta_m) \operatorname{sh} mx - \frac{2}{m^4}. \quad (m)$$

Переходя теперь к ряду

$$V_m(x) = \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2 + m^2)^2 (n^2 - m^2)}, \quad (n)$$

получим

$$\frac{dV_m}{dx} = - \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{n \sin nx}{(n^2 + m^2)^2 (n^2 - m^2)} \quad (o)$$

и

$$\frac{d^2 V_m}{dx^2} + m^2 V_m = - \sum_{n=2, 4, 6, \dots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2 - m^2)^2} = -U_m. \quad (p)$$

Интегрируя уравнение (o), найдем

$$V_m = A_m \cos mx + B_m \sin mx + \frac{1}{m} \int_0^x U_m(\xi) \sin m(\xi - x) d\xi, \quad (q)$$

$$\frac{dV_m}{dx} = -mA_m \sin mx + mB_m \cos mx - \int_0^x U_m(\xi) \cos m(\xi - x) d\xi. \quad (r)$$

Постоянные A_m и B_m определяются из условий

$$\left(\frac{dV_m}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad V_m(0) = V_m(\pi), \quad (s)$$

¹⁾ О таком преобразовании автору было сообщено И. В. Успенским.

вытекающих из рядов (о) и (п). При этих значениях постоянных выражение (7) дает сумму ряда (о), который приводит двойной ряд в выражении (j) к простому ряду.

73. Косоугольная пластинка. Пластинки, имеющие форму параллелограмма, находят в последнее время применение в настилах косых мостов. Плиты подобного типа обычно свободно опираются на устои по двум своим сторонам, в то время как две другие стороны их остаются свободными или же опираются упруго на бортовые элементы или балки.

Как общее правило, при анализе напряженного состояния пластинок этого типа следует рекомендовать использование косоугольной системы координат, назначая в ней угол между осями в соответствии с углом скоса пластинки. Однако в отдельных случаях для исследования косых пластинок известные удобства может представить и прямоугольная система координат, причем наиболее многообещающим методом здесь является, по-видимому, метод конечных разностей. Таким именно путем были получены нижеприводимые численные данные, относящиеся к равномерно загруженным косым пластинкам¹⁾. Полагаем, что при свободном опирании по всему контуру (рис. 164, а) выражениям для прогибов и моментов в центре такой пластинки можно приписать вид

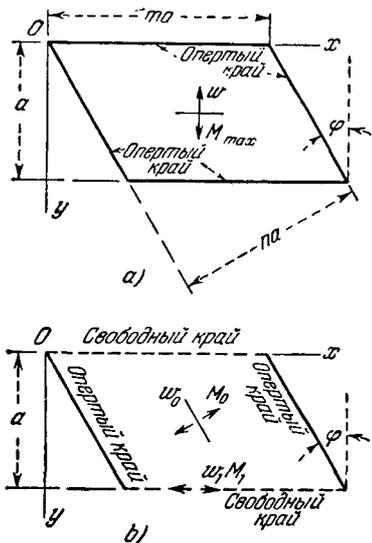


Рис. 164.

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D}, \quad M_{\max} = \beta qa^2. \quad (a)$$

Наибольший изгибающий момент M_{\max} действует в направлении, весьма близком к короткому пролету пластинки.

Если края $y = 0$ и $y = a$ свободны, другие же два края свободно оперты (рис. 164, б), то центральная часть пластинки передает нагрузку в направлении, нормальном к опорам. Положив, что w_0 и $(M_0)_{\max}$ — прогиб и изгибающий момент в центре пластинки, а $(w_1)_{\max}$ и $(M_1)_{\max}$ — соответствующую

¹⁾ Большая часть их принадлежит Иенсену (Jensen V. P., Univ. Illinois Bull. 332, 1941); Jensen V. P., Allen I. W., Univ. Illinois Bull., 369, 1947. См. также Siess C. P., Proc. ASCE, т. 74, стр. 323, 1948. Аналитические методы были использованы Фавром (Favre H., Schweiz. Bauztg., т. 60, стр. 35, 1942); Lardy P., Schweiz. Bauztg., т. 67, стр. 207, 1949; а также Krettniger I., Ingr.-Arch., т. 22, стр. 47, 1954, где указывается и дальнейшая литература. О применении энергетических методов см. также Guzman A. M., Luisoni C. I., Publs. Univ. Nacl. Buenos Aires, стр. 452, 1953. Чистому изгибу косой пластинки посвящена работа: Reissner E., Quart. Appl. Math., т. 10, стр. 395, 1953. Испытания косых пластинок на моделях описываются в работе: Schmerber L., Brandes G., Schambeck H., Bauingenieur, т. 33, стр. 174, 1958. Применения метода конечных разностей излагаются также в § 83.

щие значения для свободного края, мы можем выразить эти величины следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \alpha_0 \frac{qa^4}{D}, & (M_0)_{\max} &= \beta_0 qa^2, \\ (w_1)_{\max} &= \alpha_1 \frac{qa^4}{D}, & (M_1)_{\max} &= \beta_1 qa^2. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Численные значения коэффициентов приведены в таблице 77.

Таблица 77

Значения коэффициентов в уравнениях (a) и (b) для прогибов и изгибающих моментов равномерно нагруженной косоугольной пластинки ($\nu = 0,21$)

φ	m	n	Пластинка (рис. 164, a)		Пластинка (рис. 164, b)			
			α	β	α_0	α_1	β_0	β_1
0	2	2	0,01013	0,0999	0,214	0,224	0,495	0,508
30	2,02	1,75	0,01046	0,0968				
30	1,92	1,67			0,1183	0,1302	0,368	0,367
45	2	1,414	0,00938	0,0898	0,0708	0,0869	0,291	0,296
60	2	1	0,00796	0,0772	0,0186	0,0396	0,166	0,152
75	2	0,518	0,00094	0,0335				

74. Распределение напряжений вокруг отверстий. Простейшим подходом к анализу распределения напряжений около отверстия является исследование очень большой пластинки; полученные для нее результаты применимы без заметной погрешности к пластинкам любой формы, если только ширина отверстия остается малой в сравнении с общими размерами пластинки.

Рассмотрим для примера бесконечно большую пластинку, находящуюся в состоянии однородного напряженного состояния, определяемого изгибающими моментами

$$M'_x = M_0, \quad M'_y = 0 \quad (a)$$

и поверхностью прогибов

$$w' = \frac{M_0(x^2 - y^2)}{2D(1 - \nu^2)} = -\frac{M_0 r^2}{4D(1 - \nu^2)} \times [1 - \nu + (1 + \nu) \cos 2\theta]. \quad (b)$$

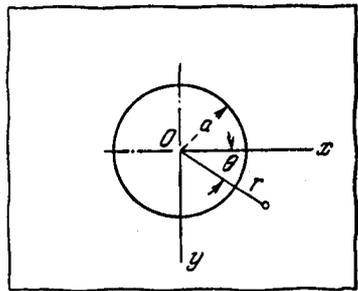


Рис. 165.

Чтобы определить возмущение, производимое в этом состоянии чистого изгиба круглым отверстием радиуса a (рис. 165), вообразим, что внутри контура круга удален материал. При этом необходимо

заменить действие первоначальных напряжений, приложенных по контуру отверстия, действием внешних пар и сил

$$\left. \begin{aligned} (M_r')_{r=a} &= \frac{M_0}{2} (1 + \cos 2\theta), \\ (V_r')_{r=a} &= \frac{M_0}{2} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

получаемых непосредственно дифференцированием выражения (b) в соответствии с формулами (192).

На начальное напряженное состояние мы накладываем дополнительное напряженное состояние, удовлетворяющее двум условиям: 1) суммарные значения пар и сил обращаются в нуль на $r = a$ и 2) наложенные напряжения, взятые в отдельности, должны исчезать на бесконечности ($r = \infty$).

Оба эти условия выполнимы, если дополнительный прогиб представить в виде

$$\omega'' = -\frac{M_0 a^2}{2D} \left(A \ln r + \left(B + C \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right). \quad (d)$$

Последнее выражение удовлетворяет также однородному дифференциальному уравнению (194) и дает для результирующих напряжений по контуру отверстия следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} (M_r'')_{r=a} &= -\frac{M_0}{2} \{ (1 - \nu) A + [4\nu B - 6(1 - \nu) C] \cos 2\theta \}, \\ (V_r'')_{r=a} &= \frac{M_0}{a} [(6 - 2\nu) A + 6(1 - \nu) C] \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Поскольку выражения (c) и (e) для M_r содержат постоянный член, а также член, пропорциональный $\cos 2\theta$, между тем как оба выражения для V_r содержат только по одному члену, для выполнения на контуре отверстия требуемых условий $M_r' + M_r'' = 0$ и $V_r' + V_r'' = 0$ необходимы три уравнения. Решая эти уравнения относительно неизвестных коэффициентов A , B и C , мы найдем окончательные значения прогибов $\omega = \omega' + \omega''$ и нижеследующие результирующие напряжения по контуру отверстия:

$$\left. \begin{aligned} M_t &= M_0 \left[1 - \frac{2(1 + \nu)}{3 + \nu} \cos 2\theta \right], \\ Q_t &= \frac{4M_0}{(3 + \nu)a} \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Для $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi/4$ получаем соответственно

$$\left. \begin{aligned} (M_t)_{\max} &= \frac{5 + 3\nu}{3 + \nu} M_0, \\ (Q_t)_{\max} &= \frac{4}{(3 + \nu)a} M_0. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Наибольшую величину компонента напряжения, обусловленного местным возмущением, принято обозначать через

$$\sigma_{\max} = k\sigma, \quad (h)$$

где σ — среднее значение этого компонента в том же сечении, а k — так называемый коэффициент концентрации напряжений. Зная наибольшее напряжение изгиба на контуре отверстия, мы можем определить и $k = (M_t)_{\max}/M_0$, где M_0 — первоначальное значение моментов напряжений для $\theta = \pi/2$, где возникают наибольшие напряжения. Таким образом, при чистом изгибе имеем

$$k = \frac{5 + 3\nu}{3 + \nu}, \quad (i)$$

что для стали ($\nu = 1/3$) составляет около 1,80.

Подобным же образом можно определять коэффициенты концентрации и для иных типов однородного напряженного состояния, а также для отверстий, имеющих форму, отличную от круговой¹⁾. Все эти результаты, однако, представляют сравнительно небольшую ценность по следующим соображениям.

В то время как нормальные напряжения изгиба (если ограничиться только что рассмотренным случаем) не превосходят значения $\sigma_{\max} = 6M_0k/h^2$, наибольшая величина соответствующих касательных напряжений равна

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2h} Q_{\max} = \frac{6M_0}{(3 + \nu)ah} = \frac{\sigma_{\max}}{(3 + \nu)k} \frac{h}{a}. \quad (j)$$

Уменьшая поэтому отношение a/h , мы можем по желанию увеличивать отношение $\tau_{\max}/\sigma_{\max}$. Таким путем мы вскоре приходим к поперечным касательным напряжениям такой величины, что их влияние на деформацию пластинки перестает быть пренебрежимо малым в сравнении с влиянием моментов. Следовательно, чтобы обеспечить достоверные результаты для распределения напряжений вблизи отверстий, необходимо обратиться к специальным теориям, учитывающим влияние деформации сдвига.

Значения коэффициентов концентрации напряжений, полученные²⁾ средствами теории Рейсснера (см. § 39), нанесены в виде кривых на рис. 166 в зависимости от отношения a/h . Кривая k_b отвечает

¹⁾ См. Goodier J. N., Phil. Mag., т. 22, стр. 69, 1936, и Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий, Москва, 1951.

²⁾ Reissner E., J. Appl. Mech., т. 12, стр. A-75, 1945. В наиболее строгой форме задача рассмотрена Албласом (Alblas J. B., Theorie van de driedimensionale Spanningstoestand in een doorborde plaat, Амстердам, 1957). Об изгибе квадратной пластинки с круглым отверстием см. E-I-N-a-s-h-i-m-y M., Ausgewählte Plattenprobleme, Цюрих, 1956, где применяется элементарная теория.

рассмотренному выше случаю чистого изгиба, кривая k_t дает концентрацию напряжений для однородного кручения, производимого моментами $M_x = M_0$, $M_y = -M_0$ в начальном напряженном состоянии. Значения $k_b = 1,80$ и $k_t = 1,60$, указываемые для этих случаев элементарной теорией, при вычерчивании диаграммы выглядят как прямые, асимптотически приближающиеся к соответствующим кривым по мере неограниченного возрастания отношения a/h . Из графика

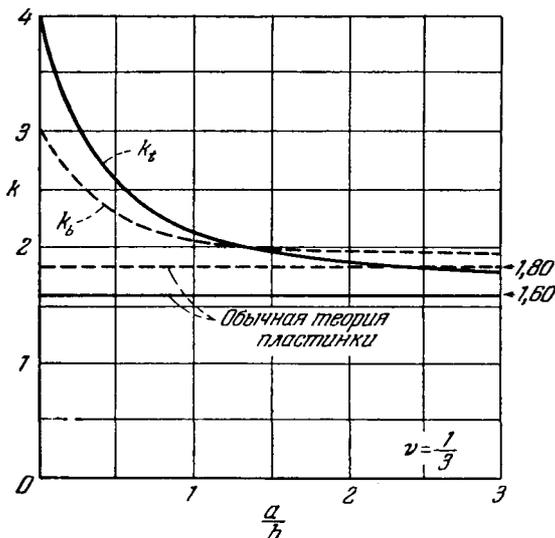


Рис. 166.

видно, что даже для отверстий, по ширине втрое превышающих толщину пластинки, погрешность, вводимая в результаты обычной теорией, составляет свыше 10% от истинного значения k_b . Заслуживает внимания тот факт, что с уменьшением диаметра отверстия до нуля предельное значение $k_b = 3$ коэффициента концентрации напряжений при чистом изгибе достигает величины того же коэффициента для плоского напряженного состояния, при котором предполагается однородное растяжение в одном направлении.

Если отверстие (рис. 165) заполнено упругим материалом, отличающимся от материала пластинки, мы имеем дело с «упругим включением». Незаполненное отверстие и жесткое включение рассматриваются, естественно, как предельные случаи упругого включения. Модуль Юнга для заполнения равен нулю в первом случае и бесконечно большой величине во втором. В нижеследующем остановимся вкратце на влиянии жесткого включения.

Точно так же, как и в случае отверстия, здесь следует сочетать начальное состояние напряжений с дополнительными. Иными, однако, будут здесь

условия, подлежащие выполнению на окружности радиуса $r = a$ (в симметричном случае)

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a} = 0, \quad (к)$$

где w — полный прогиб пластинки. Из выражений (192) для результирующих напряжений непосредственно должно соблюдаться соотношение $M_t = \nu M_r$, моменты же M_{rt} обращаются в нуль.

В частном случае чистого изгиба (см. стр. 56) распределение радиальных моментов по контуру жесткого включения подчиняется закону ¹⁾

$$M_r = M_0 \left(\frac{1}{1+\nu} + \frac{2 \cos 2\theta}{1-\nu} \right). \quad (1)$$

Соответствующий коэффициент концентрации напряжений равен $k = (3 + \nu)/(1 - \nu^2)$, т. е. 3,63 для стали. Однако поскольку этот результат не учитывает влияния поперечной деформации сдвига, он имеет смысл лишь для больших отношений a/h .

Мы убеждаемся, что вблизи жесткого включения радиальные моменты M_r значительно превышают тангенциальные моменты M_t ; это находится в резком контрасте с напряженным состоянием вокруг

отверстия, где моменты M_t превосходят моменты M_r . Величины обоих моментов оказываются сбалансированными наилучшим образом в случае упругого включения, как это видно из рис. 167. Здесь E_1 обозначает модуль Юнга для материала пластинки, E_2 — для заполнения.

Включение с упругим заполнением можно заменить, не изменяя в существенном его влияния на пластинку, кольцевым упругим включением. Армируя отверстие кольцом надлежащим образом подобранной жесткости, можно, следовательно, значительно снизить концентрацию напряжений в материале пластинки вокруг отверстия ²⁾.

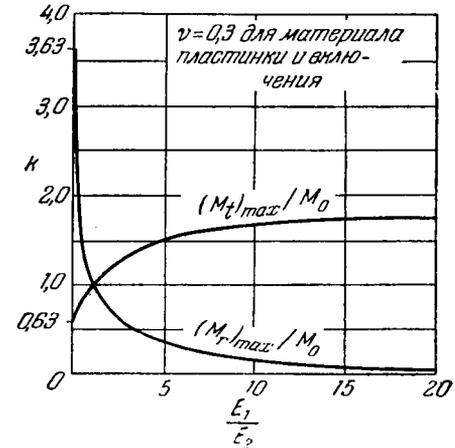


Рис. 167.

¹⁾ Goland M., J. Appl. Mech., т. 10, стр. А-69, 1943; рис. 167 заимствован из этой работы. См. также Yi-Yu an Yu, Proc. II. U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., Анн-Арбор, Мичиган, 1954, стр. 381.

²⁾ Относящиеся к этому случаю исследования напряжений и численные данные см. в книге Г. Н. Савина, цит. на стр. 359.

ГЛАВА X

СПЕЦИАЛЬНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК

75. Особенности при изгибе пластинки. Если любой из компонентов напряжения в точке¹⁾ (x_0, y_0) пластинки принимает бесконечно большое значение, то говорят, что напряженное состояние ее имеет в этой точке особенность. Из выражений (101), (102) и (108) для моментов и перерезывающих сил мы убеждаемся, что такой особой точки не возникает, пока прогиб $w(x, y)$ и его производные до четвертого порядка продолжают оставаться непрерывными функциями x и y .

Обычно особенность имеет место в точках приложения сосредоточенных сил или моментов. В некоторых случаях особенность, обусловленная реактивными силами, может возникнуть в вершинах пластинки независимо от характера распределения нагрузки по ее поверхности.

При дальнейших рассуждениях совместим начало координат с особой точкой пластинки. Тогда приводимые ниже выражения для прогиба (после надлежащих дифференцирований) дадут для напряжений значения, большие в сравнении с теми, к которым приводят внешние нагрузки, приложенные в других точках, или краевые усилия при малых x и y .

Сосредоточенная сила, приложенная во внутренней точке пластинки. Если расстояние рассматриваемой точки от контура и от точек приложения других сосредоточенных нагрузок достаточно велико, то возникающее при этом напряженное состояние можно охарактеризовать приближенно как осесимметричное относительно сосредоточенной силы P . В таком случае радиальная перерезывающая сила на расстоянии r от точки приложения силы P будет равна

$$Q_r = -\frac{P}{2\pi r}.$$

¹⁾ Точнее: в точке (x_0, y_0, z) .

Учтя выражение (193) для Q_r , устанавливаем непосредственно соответствующий прогиб

$$w_0 = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{a}, \quad (206)$$

где a — произвольная длина. Пока отношение r/a мало, множитель $r^2 \ln a$ дает пренебрежимо малые напряжения.

Сосредоточенный момент, примененный внутри контура пластинки. Приложим силу $-M_1/\Delta x$ в начале координат и силу $+M_1/\Delta x$ в точке $(-\Delta x, 0)$, где M_1 — заданный момент. Прогиб,

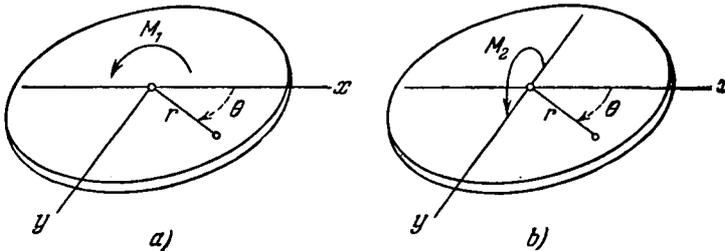


Рис. 168.

произведенный совместным действием этих двух сил, будет равен в силу ранее полученного (206)

$$w = \frac{M_1}{8\pi D} \frac{(x + \Delta x)^2 + y^2}{\Delta x} \ln \frac{[(x + \Delta x)^2 + y^2]^{1/2}}{a} - \frac{M_1}{8\pi D} \frac{x^2 + y^2}{\Delta x} \ln \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{a}. \quad (a)$$

Если Δx уменьшается до нуля, приходим к случаю сосредоточенно приложенного в начале координат момента M_1 (рис. 168, а) и тогда для прогиба найдем

$$w_1 = \lim [w]_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{M_1}{P} \frac{\partial w_0}{\partial x},$$

где w_0 — прогиб, определяемый из (206). Выполняя дифференцирование, находим

$$w_1 = \frac{M_1 x}{8\pi D} \left(\ln \frac{x^2 + y^2}{a^2} + 1 \right). \quad (b)$$

Опустив второй член $M_1 x / 8\pi D$, не дающий напряжений, и переходя к полярным координатам, получим

$$w_1 = \frac{M_1}{4\pi D} r \ln \frac{r}{a} \cos \theta. \quad (207)$$

Если пластинка подвергается действию момента M_2 , как это показано на рис. 168, *b*, то для определения соответствующего прогиба достаточно в предыдущей формуле заменить θ на $\theta + \pi/2$.

Два момента, приложенные внутри контура пластинки. Рассмотрим теперь совместное действие двух равных моментов

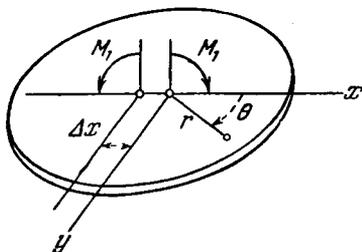


Рис. 169.

противоположного знака, действующих в двух параллельных плоскостях, отстоящих одна от другой на Δx , как это показано на рис. 169. Положив $M_1 \Delta x = H_1$, зафиксировав значение H_1 и поступив как прежде, придем к прогибу

$$w_2 = \frac{H_1}{M_1} \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{H_1}{P} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad (c)$$

являющемуся результатом особенности более высокого порядка, чем простой момент¹⁾. Подстановка выражения (206), в котором можно воспользоваться и прямоугольными координатами, дает прогиб

$$w_2 = \frac{H_1}{8\pi D} \left(2 \ln \frac{r}{a} + 2 + \cos 2\theta \right). \quad (208)$$

Выражения, содержащие особенность, можно получить также и в случае пары, действующей в вершине клиновидной пластинки, с двумя свободными краями, а также для полубесконечной пластинки, нагруженной силой или моментом в какой-либо точке свободного края²⁾.

Сосредоточенная нагрузка, приложенная вблизи защемленного края (рис. 170). Прогиб полубесконечной консольной пластинки, несущей сосредоточенную нагрузку P в точке (ξ, η) , определяется выражением

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[4x\xi - r^2 \ln \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{r_1^2} \right], \quad (d)$$

¹⁾ Чтобы уяснить характер подобной нагрузки, представим себе, что свободно опертая балка пролетом L , жесткостью EI загружена двумя моментами M , приложенными на расстоянии Δx один от другого таким образом, что эпюра моментов изображается прямоугольником со сторонами Δx и M , расположенным симметрично относительно середины балки. Поступая, как и прежде, т. е. полагая $\Delta x \rightarrow 0$ с сохранением постоянного значения $H = M\Delta x$, мы приходим к эпюре H , сосредоточенной в середине балки. Вводя фиктивную нагрузку в середине H/EI и применив метод Мора, мы получили бы треугольную эпюру прогибов балки с максимальной ординатой $HL/4EI$. Подобная же эпюра прогибов получается и для нагрузки, приложенной в середине идеально гибкой струны.

²⁾ См. N a d a i A., *Elastische Platten*, стр. 203, Берлин, 1925.

где $r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$. Ограничимся вычислением момента защемления в начале координат. Надлежащее дифференцирование выражения (d) дает

$$M_x = -\frac{P}{\pi} \cos^2 \varphi \quad (209)$$

при $x = y = 0$, если ξ и η не обращаются в нуль одновременно. Вообще, как мы видим, момент защемления M_x зависит лишь от отношения η/ξ . Если, однако, $\xi = \eta = 0$, то момент M_x также обращается в нуль и, таким образом, функция $M_x(\xi, \eta)$ испытывает в начале координат разрыв непрерывности.

Подобным же образом проявляется и действие сосредоточенной силы, приложенной близ жестко или упруго защемленного края независимо от способа опирания пластинки по остальному контуру. Это приводит к характеристической форме поверхности влияния для моментов, приложенных по краю защемленных или неразрезных пластинок (см. рис. 171 и 173).

Для перерезывающей или реактивной силы, действующей в точке $x = y = 0$ (рис. 170), получаем, как и раньше,

$$Q_x = \frac{2P}{\pi r} \cos^3 \varphi, \quad (210)$$

где $r^2 = \xi^2 + \eta^2$.

76. Использование поверхностей влияния для расчета пластинок. В § 29 мы ввели функцию влияния $K(x, y, \xi, \eta)$, определяющую прогиб в некоторой точке (x, y) свободно опертой прямоугольной пластинки, когда единичная нагрузка приложена в ее точке (ξ, η) . Аналогичные функции можно построить и для пластинок с иными граничными условиями и иных форм контура. Поверхность влияния $K(\xi, \eta)$ для прогиба в фиксированной точке (x, y) можно представить также и графически с помощью линий уровня. Применяя принцип наложения к системе n сосредоточенных сил P_i , приложенных в точках (ξ_i, η_i) , мы можем найти полный прогиб в (x, y) как сумму

$$\omega = \sum_{i=1}^n P_i K(x, y, \xi_i, \eta_i). \quad (a)$$

Распределенная по площади A пластинки сплошная нагрузка интенсивностью $p(\xi, \eta)$ дает прогиб

$$\omega = \int_A \int p(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (b)$$

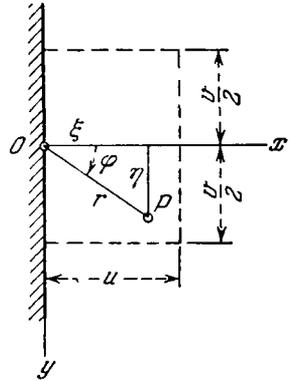


Рис. 170.

В силу принципа взаимности Максвелла здесь имеет место соотношения симметрии

$$K(x, y, \xi, \eta) = K(\xi, \eta, x, y), \quad (c)$$

на основании которого поверхность влияния для прогиба пластинки в точке (x, y) можно получить как поверхность прогибов $w(\xi, \eta)$ пластинки при загрузении ее единичной нагрузкой, приложенной в точке (x, y) . Поверхность $w(\xi, \eta)$ описывается, таким образом, дифференциальным уравнением $\Delta \Delta w(\xi, \eta) = 0$, причем решение этого уравнения должно не только удовлетворять граничным условиям, но и содержать особую точку того типа, с которым мы встретились в уравнении (206) при $\xi = x, \eta = y$.

Особый практический интерес представляют поверхности влияния для результирующих напряжений¹⁾ — они описываются уравнениями в частных производных от $w(x, y)$ по x и y . В качестве примера рассмотрим поверхности влияния для величины

$$-D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -D \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y, \xi, \eta). \quad (d)$$

Сопоставляя это выражение с формулой (c) § 75, убеждаемся, что в системе ξ, η оно дает ординаты поверхности прогибов, имеющей при $\xi = x, \eta = y$ особенность в связи с наличием «момента второго порядка» $H = 1$, приложенного в этой точке, как это показано на рис. 169.

Познакомимся на нескольких примерах с техникой построения поверхностей влияния и с их применением²⁾.

*Поверхность влияния для краевого момента круглой защемленной пластинки*³⁾ (рис. 171). Представив прогиб (197) (стр. 328) формулой $w = PK(x, 0, \xi, \theta)$, мы получаем возможность рассматривать K как функцию влияния для прогиба в некоторой точке $(x, 0)$, если мгновенное положение единичной нагрузки соответствует точке (ξ, θ) . Вычисляя краевой момент M_r при $x = r/a = 1, y = 0$, замечаем, что все члены соответствующих выражений (192), за единственным исключением, обращаются для защемленного края $x = 1$ в нуль. Лишь один остающийся член дает

$$M_r = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \right)_{x=1} = -\frac{1}{4\pi} \frac{(1 - \xi^2)^2}{\xi^2 - 2\xi \cos \theta + 1}. \quad (e)$$

Ради сокращения записи положим $\xi^2 - 2\xi \cos \theta + 1 = \eta^2$ и, далее, введем угол φ (рис. 171, a). Тогда, поскольку $\xi^2 = 1 - 2\eta \cos \varphi + \eta^2$,

$$M_r = -\frac{1}{4\pi} (2 \cos \varphi - \eta)^2$$

¹⁾ Впервые такие поверхности были использованы Вестергором (Westergaard H. M., Publ. Roads, т. 11, 1930); см. также Вагон F. M., J. Appl. Mech. т. 8, стр. A-3, 1941.

²⁾ За подробностями, относящимися к так называемому методу *особых точек*, отсылаем к работе Пухера (Pucher A., Ingr-Arch., т. 12, стр. 76, 1941).

³⁾ Некоторые поверхности влияния для круглой защемленной пластинки были даны Эль-Хашими (El-Hashimy M., Ausgewählte Plattenprobleme, Цюрих, 1956).

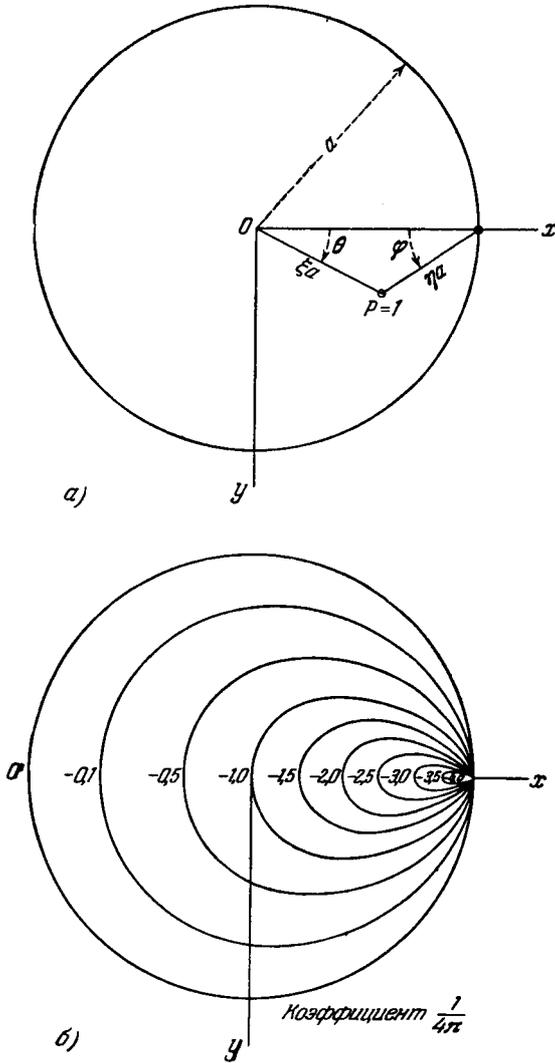


Рис. 171.

— выражение, которое для пренебрежимо малых значений η совпадает с (209). Поверхность влияния для момента M_x изобразится, таким образом, линиями уровней (рис. 171, б) с ординатами, умноженными на коэффициент 4 π .

Поверхность влияния для изгибающего момента M_x в центре свободно опертой квадратной пластинки¹⁾. Чтобы получить окончательный результат с помощью уравнений (101), здесь удобно воспользоваться поверхностями влияния для величин

$$M_{x0} = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad M_{y0} = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Поверхность влияния для M_{x0} можно построить, исходя из рис. 76. Влияние сосредоточенной нагрузки $P = 1$, приложенной в точке 0, устанавливается с помощью первого из уравнений (151) и уравнения (152). Последнее содержит в точке 0 требуемую особенность типа, данного уравнением (206). Влияние остальных нагрузок может быть учтено первым из уравнений (149), ряд которого быстро сходится. Поверхность влияния нанесена на рис. 72 в ординатах, умноженных на 8 π .

Найдем изгибающий момент M_x для двух сосредоточенных нагрузок P_1 и $P_2 \ll P_1$, приложенных на заданном расстоянии $0,25 a$ одна от другой и распределенных равномерно каждая по площади $0,1 a \times 0,1 a$. По остальной своей площади пластинка может также нести равномерно распределенную временную нагрузку интенсивностью $q < P_2/0,01 a^2$.

Поверхность влияния (рис. 172) построена для момента M_{x0} , и распределение нагрузки, приводящее к наибольшему значению M_{x0} , нанесено на рисунке сплошными линиями. Наличие особенности сказывается в том, что у центра пластинки ординаты поверхности принимают бесконечно большие значения; поэтому влияние нагрузки P_1 легче всего будет определить отдельно²⁾ из уравнений (163) и (165) и таблиц 26 и 27. В данном случае мы имеем $\nu = 0$, $\nu/\mu = k = 1$, $\varphi = 1,5708$, $\psi = 0$, $\lambda = 2,669$ и $\mu = 0$, откуда получаем $N = 0$, значение же M вычисляется далее. Что касается влияния нагрузки P_2 , то его можно принять пропорциональным ординате 2,30 поверхности в центре загруженной площади. Если мы введем в расчет лишь избытки этих местных нагрузок над интенсивностью q , приходящейся на всю площадь пластинки, то нам останется только суммировать значения моментов отдельных нагрузок, чтобы получить полную его величину M_{x0} :

1) Для нагрузки P_1 : из уравнений (163), (165) при $\xi = a/2$, $d = 0,1\sqrt{2} a$

$$M'_{x0} = \frac{M}{2} \frac{P_1 - 0,01qa^2}{8\pi} \left(2 \ln \frac{4}{0,1\pi\sqrt{2}} + 2,669 - 1,571 \right) = 0,219 (P_1 - 0,01qa^2).$$

2) Для P_2

$$M''_{x0} = \frac{1}{8\pi} 2,30 (P_2 - 0,01qa^2) = 0,092 (P_2 - 0,01qa^2).$$

¹⁾ Наиболее обширное собрание поверхностей влияния для прямоугольных пластинок с различными условиями опирания принадлежит Пухеру (Pucher A., *Einflussfelder elastischer Platten*, 2-е изд., Вена, 1958). См. также его работу в «*Federhofer-Girkmann Festschrift*», стр. 303, Вена, 1950. О поверхностях влияния для неразрезных пластинок см. Hoeland G., *Ingr.-Arch.*, 24, стр. 124, 1956.

²⁾ Влияние центральной нагрузки может быть вычислено также с помощью линий влияния, аналогичных линиям следующего примера, или же с помощью таблицы 20.

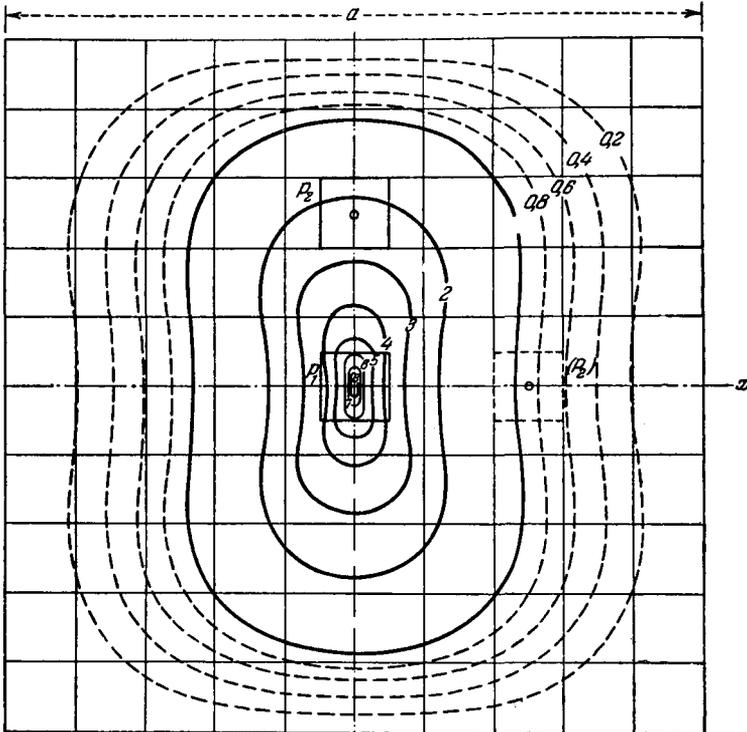
3) Для равномерно распределенной нагрузки q из данных рис. 172

$$M'''_{x_0} = 0,0369qa^2.$$

Следовательно,

$$M_{x_0} = 0,219P_1 + 0,092P_2 + 0,0338qa^2.$$

Благодаря квадратной форме пластинки и симметрии граничных условий мы вправе воспользоваться той же поверхностью влияния и для определе-



Коэффициент $\frac{1}{8\pi} = 0,0398$

у Для равномерно распределенной нагрузки $M_{x_0} = 0,0369qa^2$

Рис. 172.

ния M_{y_0} . Положение нагрузки P_2 , соответствующее ранее принятому положению для поверхности M_{x_0} , показано штриховой линией, и значение момента, обусловленного силой P_2 , определится как $M''_{y_0} = 0,035(P_2 - 0,01qa^2)$, влияния же P_2 и q останутся прежними. Полное значение M_{y_0} выразится суммой

$$M_{y_0} = 0,219P_1 + 0,035P_2 + 0,0344qa^2.$$

Положив для примера $\nu = 0,2$, найдем окончательно

$$M_x = M_{x_0} + 0,2M_{y_0} = 0,263P_1 + 0,099P_2 + 0,0407qa^2.$$

Поверхность влияния для момента M_x в центре опоры между двумя внутренними квадратными панелями пластинки, неразрезной в направлении x и свободно опертой на $y = \pm b/2$. С этим случаем приходится иметь дело при расчете мостовых покрытий, укладываемых на несколько поперечных и на две главные балки. Если прогибом и крутильной жесткостью всех этих несущих балок можно пренебречь, то получим поверхность влияния¹⁾ в виде, представленном на рис. 173.

В автодорожных мостах нагрузка каждого колеса распределяется равномерно по некоторой прямоугольной площади со сторонами u , v . Для нагрузки, перемещающихся по осевой линии $y = 0$ плиты, на рисунке нанесено пять линий влияния (для значений v/b — от 0,05 до 0,40) с указанием значений их наибольших ординат. Это позволяет без затруднений определить наименее выгодное положение нагрузки. Как поверхность влияния, так и линии влияния нанесены с ординатами, умноженными на 8 π .

Пример расчета. Допустим, что $a = b = 7,2$ м; примем, что нагрузка от заднего колеса $P_f = 7250$ кг, $u = 45$ см, $v = 75$ см, от переднего же колеса $P_f = 1812,5$ кг, $u = 45$ см, $v = 37,5$ см. Влияние толщины покрытия и плиты на распределение отдельных нагрузок может быть учтено в приведенных выше значениях u и v .

Для заднего колеса имеем $v/b \approx 0,10$, для переднего $v/b \approx 0,05$. Положим, что положение задних колес определяется последовательно абсциссами $\xi = 0,20a, 0,25a, 0,30a, 0,35a, 0,40a$. Соответственное положение передних колес фиксируется при этом расстоянием между осями, равным $4,2$ м = $0,583a$. Определение поверхности влияния для каждого частного положения нагрузки дает последовательность значений момента, нанесенных на рис. 173 штриховой линией для соответственных значений ξ . Кривая обнаруживает максимум близ $\xi = 0,30a$. Процесс вычисления воспроизведен здесь только для этого последнего положения.

Линии влияния, отмеченные числами 0,10 и 0,05, позволяют учесть влияние двух центральных нагрузок ($y = 0$):

$$-(7250 \cdot 3,24 + 1812,5 \cdot 3,32) = -29523 \text{ кг.}$$

Поверхность же влияния дает влияние остальных шести нагрузок

$$-7250(1,66 + 2,25 + 0,44) - 1812,5(1,59 + 2,25 + 0,41) = -39,364 \text{ кг.}$$

Наконец, вводя принятый множитель $1/8\pi = 0,0398$, приходим к результату

$$(M_x)_{\min} = -0,0398(65 \cdot 100 + 86 \cdot 600) = -2740 \text{ кг} \cdot \text{м/м.}$$

Максимум, превышающий силы при равномерном загрузении площади прямоугольника. Нагрузка этого типа, помещенная у защемленного края бесконечной консольной пластинки, очерчена на рис. 170 штриховым контуром. С этой задачей также приходится встречаться при расчете мостовых плит. Исходя из (210) и пользуясь принципом наложения, находим при $x = y = 0$ следующее значение превышающей силы:

$$(Q_x)_{\max} = \frac{2P}{\pi uv} \int_0^u d\xi \int_{-v/2}^{v/2} \frac{\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} d\eta,$$

откуда

$$(Q_x)_{\max} = \alpha \frac{P}{v}, \quad (f)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left[\frac{v}{u} \ln \left(\frac{4u^2}{v^2} + 1 \right) + 2 \operatorname{arctg} \frac{v}{2u} \right]. \quad (g)$$

¹⁾ О методе ее построения см. ссылку, приведенную к § 52.

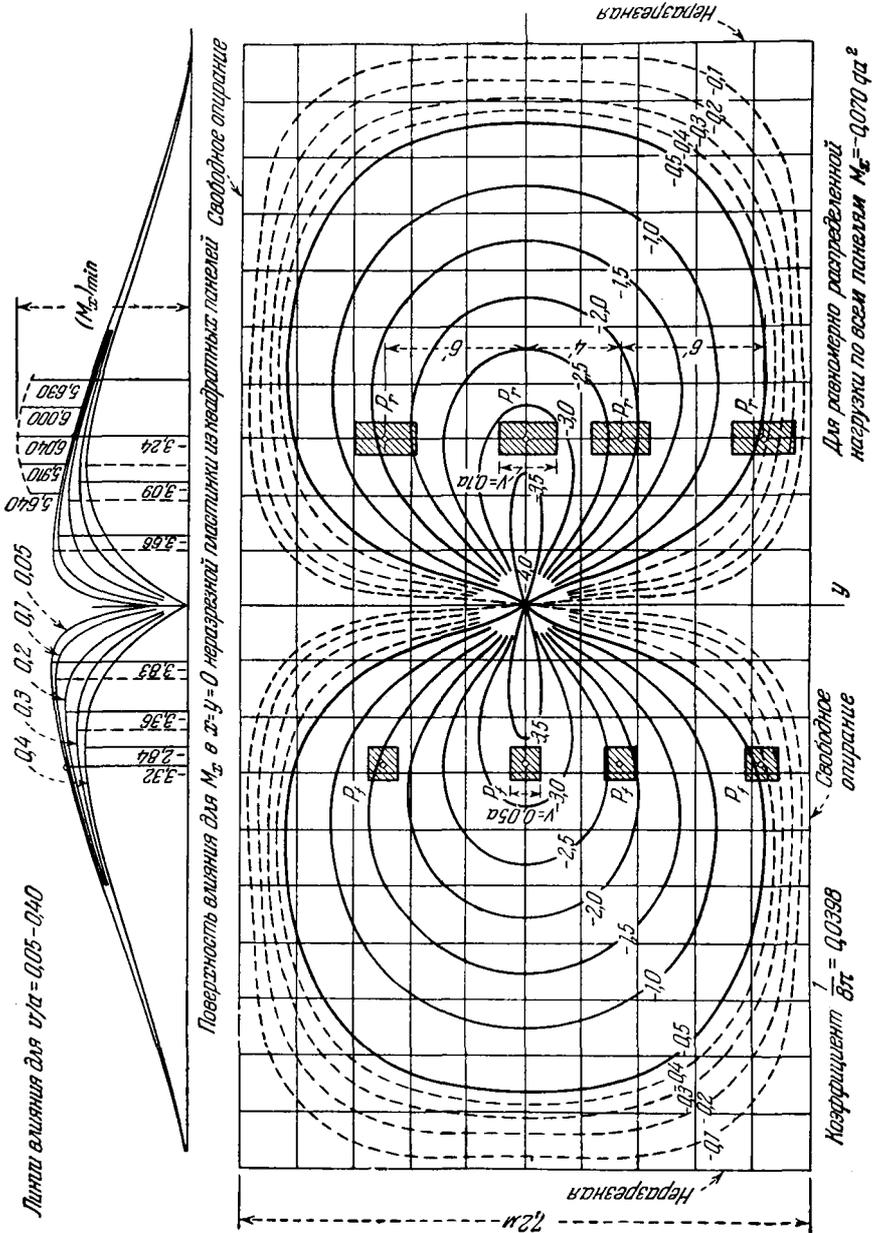


Рис. 173.

Численные значения коэффициента α приводятся в таблице 78. Поскольку влияние других нагрузок на Q_x обычно пренебрежимо мало, нам нет нужды строить для Q_x поверхность влияния. Формулой (f) можно пользоваться как обеспечивающей достаточно высокую точность при расчете плит конечных размеров, а также при упругом защемлении (в этом случае (f) дает оценку сверху) края.

Таблица 78
Значения коэффициента α
в уравнении (f)

v/u	α	v/u	α
0,1	0,223	1,2	0,852
0,2	0,357	1,4	0,884
0,3	0,459	1,6	0,909
0,4	0,541	1,8	0,927
0,5	0,607	2,0	0,941
0,6	0,662	2,5	0,964
0,7	0,708	3	0,977
0,8	0,747	4	0,989
0,9	0,780	5	0,994
1,0	0,817	10	0,999

77. **Функции влияния и характеристические функции.** Представляет интерес обнаружить существование тесной связи между задачей о функции влияния (или функции Грина) для изогнутой пластинки и задачей о ее свободных поперечных колебаниях. Последние описываются дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) W = - \frac{\mu}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (a)$$

где $W(x, y, t)$ — прогиб, μ — масса пластинки, отнесенная к единице площади, t — время. Предполагая, что $W = w(x, y) \cos pt$, получаем для функции w дифференциальное уравнение

$$D \Delta \Delta w - \lambda w = 0, \quad (b)$$

в котором $\lambda = p^2 \mu$. При некоторых частных граничных условиях решения уравнения (b) существуют только для определенной совокупности значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ параметра λ , так называемых *характеристических чисел* (или *собственных значений*) задачи. Соответствующие решения образуют систему характеристических функций $w_1(x, y), w_2(x, y), \dots, w_k(x, y) \dots$. Эти функции взаимно ортогональны, т. е.

$$\int_A \int w_i(x, y) w_k(x, y) dx dy = 0 \quad (c)$$

при $i \neq k$, где интегрирование распространяется по поверхности пластинки. Поскольку функции $w_k(x, y)$ определены с точностью до постоянного множителя, представляется возможность их «нормировать», выбрав этот множитель так, чтобы удовлетворилось условие

$$\int_A \int w_k^2(x, y) dx dy = a^2 b^2. \quad (d)$$

Форма, принятая для правой части (d), уместна для случая прямоугольной пластинки со сторонами a и b , но каков бы ни был контур пластинки, для w_k должна сохраняться размерность длины. С установлением совокупности чисел λ_k и соответствующей системы нормированных функций $w_k(x, y)$

устанавливается ¹⁾ вместе с тем и возможность разложения в ряд

$$K(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{a^2 b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k(x, y) w_k(\xi, \eta)}{\lambda_k} \quad (e)$$

для функций влияния пластинки, причем характеристические функции удовлетворяют граничным условиям.

Применяя уравнения (a) и (b) предыдущего параграфа к разложению (e), заключаем, что прогиб пластинки всегда можно представить линейным сочетанием ее характеристических функций, как бы ни была распределена нагрузка по ее площади.

Возьмем для примера прямоугольную пластинку, свободно опертую по краям (рис. 59). Собственными функциями, которые удовлетворяют уравнению (b) с граничными условиями $w = \Delta w = 0$ и условию (d), будут

$$w_k = 2\sqrt{ab} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (f)$$

где m и n — два произвольных целых числа. Соответствующее собственное значение из уравнения (b):

$$\lambda_k = \pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (g)$$

Подстановка его в разложение (e) немедленно приводит к результату (134). Для прямоугольных пластинок, у которых оперты лишь два противоположных края, а условия по двум другим краям произвольны, функции влияния можно получить подобным же образом. Однако в этом случае возникает необходимость вычислить предварительно значения λ из трансцендентного уравнения частот. Следующим объектом, для которого функцию влияния можно получить в виде ряда, является круглая пластинка, для которой формы колебаний, поддающиеся представлению в функциях Бесселя, хорошо известны.

78. Применение бесконечных интегралов и преобразований. Иной путь решения задачи изгиба пластинок дает использование различных преобразований ²⁾. Некоторыми из них мы займемся в настоящем параграфе.

Интегралы Фурье. В случае бесконечной или полубесконечной полосы, при произвольных условиях по двум параллельным краям, уместен метод Леви, описанный на стр. 133, но при этом ряды Фурье приходится заменять соответствующими бесконечными интегралами. В дополнение к примеру, рассмотренному в § 50, этим же путем ³⁾ можно решать и задачу о бесконечной консольной пластинке (рис. 174), несущей сосредоточенную силу P .

¹⁾ См., например, Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, 3-е изд., Гостехиздат, М.—Л., 1951.

²⁾ С теорией и применениями их можно познакомиться по книге: Sneddon I. N., Fourier transforms, Нью-Йорк, 1951. (Русский перевод: Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955).

³⁾ Решение и числовые результаты даются Jaramillo T. J., J. Appl. Mech., т. 17, 1952. Используя ряды Фурье, Н. Jung решает некоторые задачи; см. Math. Nachr., т. 6, стр. 343, 1952.

Пусть w_1 — прогиб части AB и w_2 — прогиб части BC пластинки шириной $AC = a$. Тогда должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = a, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

вместе с условиями непрерывности

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad \Delta w_1 = \Delta w_2 \quad \text{при } x = \xi. \quad (b)$$

Сосредоточенную силу P можно представить распределенной по длине ν .

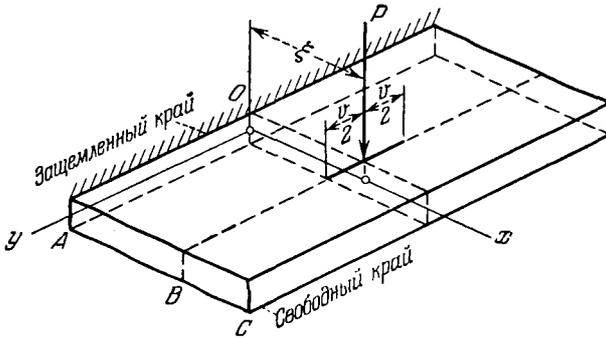


Рис. 174.

Вспомним, что любая четная функция u допускает представление через интеграл Фурье

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ay \, da \int_0^{\infty} f(\eta) \cos a\eta \, d\eta. \quad (c)$$

Поскольку интенсивность нагрузки $f(\eta) = P/\nu$ постоянна в интервале $-v/2 < \eta < v/2$ и исчезает на остальной площади пластинки, мы имеем

$$f(y) = \frac{2P}{\pi\nu} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\alpha v}{2} \cos \alpha y}{\alpha} \, d\alpha. \quad (d)$$

С другой стороны, функция $f(y)$ представляет собой разность между значениями перерезывающей силы Q_x по обоим краям сечения $x = \xi$. Поэтому в силу уравнений (108) получаем

$$D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_1 - \Delta w_2) = f(y) \quad (e)$$

для $x = \xi$. В соответствии с (d) представим прогибы w_1 и w_2 интегралами

$$w_i = \int_0^{\infty} X_i(x, \alpha) \cos \alpha y \, d\alpha, \quad i = 1, 2, \quad (f)$$

в которых функция

$$X_i(x, \alpha) = (A_i + B_i x) \operatorname{ch} \alpha x + (C_i + D_i x) \operatorname{sh} \alpha x$$

имеет тот же вид, что и функция Y_m на стр. 135.

Теперь остается подставить выражения (f) в уравнения (a), (b) и (c), чтобы определить коэффициенты A_1, B_1, \dots, D_2 , не зависящие от y , но зависящие от α .

Распределение изгибающих моментов по защемленному краю, вычисленное из этого решения для различных точек приложения сосредоточенной нагрузки при $\nu = 0, \nu = 0,3$, представлено на рис. 175.

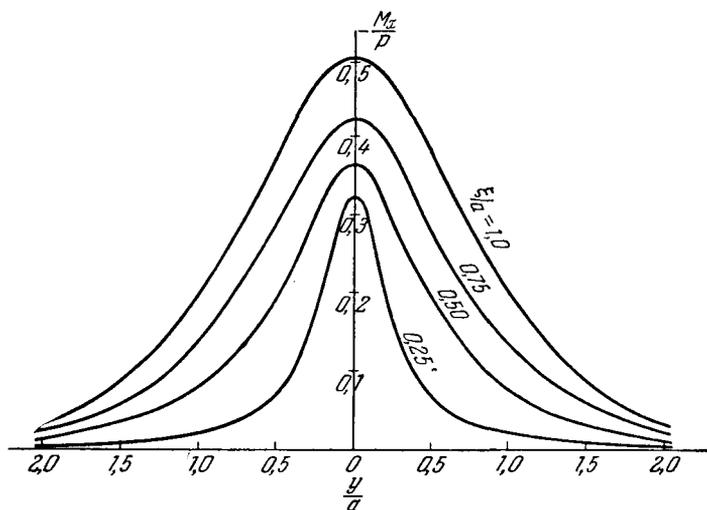


Рис. 175.

Преобразование Меллина. Использование этого преобразования уместно в расчете клинообразной пластинки при произвольных однородных (постоянных) условиях по краям $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$ (рис. 176). Положим ¹⁾, в конкретном случае, что край $\theta = 0$ защемлен, а край $\theta = \alpha$ свободен, за исключением точки $r = r_0$, где приложена сосредоточенная сила P .

¹⁾ Эта задача была решена Войновским-Кригером; см. Wołnowsky-Krieger S., *Ingr.-Arch.*, т. 20, стр. 391, 1952. Некоторые поправки были внесены Койтером (Koiter W. T., *Ingr.-Arch.*, т. 21, стр. 381, 1953). Применение метода к пластинке, защемленной по двум краям, см.: Уфлянд И. С., Доклады АН СССР, т. 84, стр. 463, 1952. См. также Koiter W. T., Aiblas J. B., *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, т. 57, № 2, стр. 259, 1954.

Пользуясь полярной системой координат (см. § 62), принимаем для дифференциального уравнения $\Delta\Delta w = 0$ общее решение в виде

$$W(s) = r^{-s}\theta(\theta, s), \tag{g}$$

где s — параметр, а

$$\theta(\theta s) = A(s) \cos s\theta + B(s) \sin s\theta + C(s) \cos(s+2)\theta + D(s) \sin(s+2)\theta. \tag{h}$$

Прогиб и наклон по защемленному краю обращаются в нуль, если

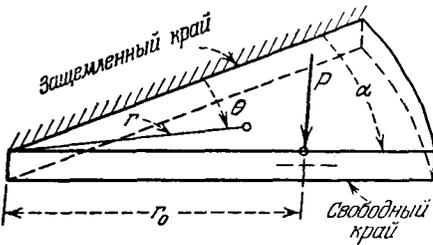


Рис. 176.

$$\begin{aligned} [W(s)]_{\theta=0} &= 0, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial W(s)}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} &= 0. \end{aligned} \tag{i}$$

Изгибающий момент M_t по свободному краю также исчезает при условии, если

$$\left[\nu \frac{\partial^2 W(s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W(s)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(s)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\alpha} = 0. \tag{j}$$

Функцию $f(r)$ можно теперь представить с помощью формулы Меллина следующим образом:

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} r^{-s} ds \int_0^{\infty} \rho^{s-1} f(\rho) d\rho, \tag{k}$$

где σ — вещественная постоянная, подчиняющаяся некоторым ограничительным условиям. В частности, для силы P , сосредоточенной в точке $r = r_0$, получим

$$f(r) = \frac{P}{2\pi i r_0} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-(s+3)} ds. \tag{l}$$

Этим подсказывается выбор вида выражения для прогиба пластинки

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} r^{-s} \theta(\theta, s) ds. \tag{m}$$

Тогда реактивные силы по краю $\theta = \alpha$ определяются разностью

$$(V_t)_{\theta=\alpha} = \left(Q_t - \frac{\partial M_{rt}}{\partial r} \right)_{\theta=\alpha}. \tag{n}$$

Подставив надлежащие выражения для Q_t и M_{rt} (см. стр. 317, 318) и учтя (m), получим

$$(V_t)_{\theta=\alpha} = -\frac{D}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} \left\{ \frac{\partial^3 \theta}{\partial \theta^3} + [s^2 + (1-\nu)(s+1)(s+2)] \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right\}_{\theta=\alpha} r^{-(s+3)} ds. \tag{o}$$

Сопоставляя, наконец, выражения (1) и (о), получаем, в дополнение к уравнениям (1) и (j), четвертое условие для определения величин $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ и $D(s)$. Подстановка этих коэффициентов в выражения (h) и (m) и введение

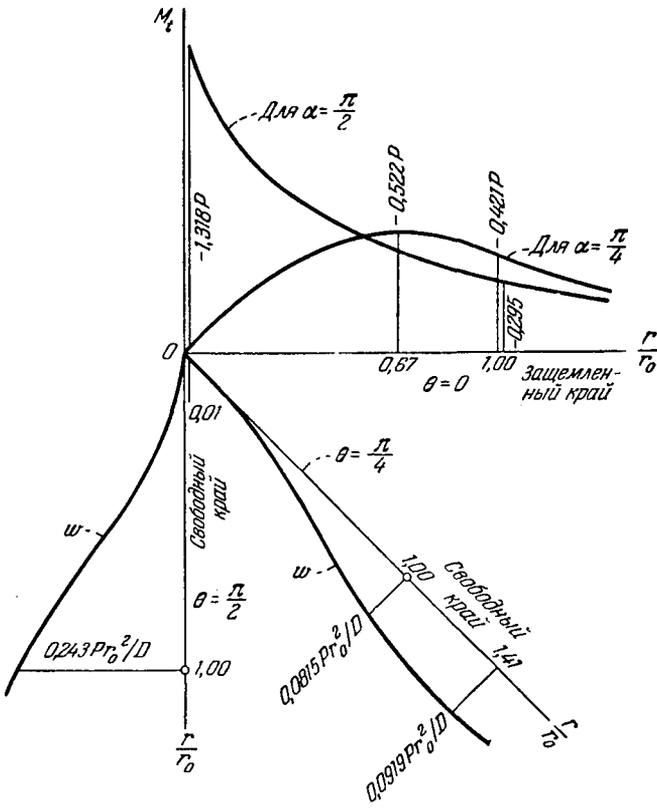


Рис. 177.

нового переменного $u = -(s + 1)i$, где $i = \sqrt{-1}$, дает следующее выражение для прогиба пластинки:

$$w = \frac{2Pr_0}{\pi D} \int_0^\infty \frac{G \cos\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right) + H \sin\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right)}{Nu(1+u^2)} du, \quad (p)$$

где G и H — некоторые функции α , θ , u , а N — функция α и u .

Эпюра прогибов по свободному краю и эпюра моментов M_z по зашемленному краю $\theta = 0$ для частного случая $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = \pi/2$ представлены на рис. 177.

Преобразование Ганкеля. Пусть круглая пластинка радиуса a изогнута в поверхность вращения симметрично распределенной нагрузкой $q(r)$.

Умножаем дифференциальное уравнение $\Delta \Delta w = q/D$ такой пластинки на $r J_0(\lambda r) dr$ и интегрируем по частям между пределами $r = 0$ и $r = \infty$. Если $w = 0$ для $r > a$, то в результате получим

$$\lambda^4 \int_0^{\infty} w(r) r J_0(\lambda r) dr = g(\lambda), \quad (q)$$

где

$$g(\lambda) = (C_1 + \lambda^2 C_2) J_0(\lambda a) + (\lambda C_3 + \lambda^3 C_4) J_1(\lambda a) + \frac{1}{D} \int_0^a q(\rho) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho, \quad (r)$$

J_0 и J_1 — бesselовы функции нулевого и первого порядков, C_i — постоянные. Применение теоремы обращения Ганкеля к уравнению (q) дает

$$w = \int_0^{\infty} g(\lambda) \frac{1}{\lambda^3} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (s)$$

Постоянные C_i определяются теперь из условий по контуру $r = a$ пластинки и из условия, требующего, чтобы функция $g(\lambda)/\lambda^4$ была ограничена. В случае кольцевой пластинки¹⁾ лишь слегка изменяется выражение (r). Примеры применения решений типа (s) к задаче об упруго опертой пластинке приводятся в § 61.

Синус-преобразование. В случае прямоугольной пластинки мы применяли решения вида

$$w(x, y) = \sum Y(y, \alpha) \sin \alpha x,$$

а для пластинки, имеющей форму сектора, решения вида

$$w(r, \theta) = \sum R(r, \beta) \sin \beta \theta.$$

Конечные синусы-преобразования функции w , выполненные по отношению к x или соответственно θ и введенные вместе с преобразованными производными от w и преобразованным дифференциальным уравнением пластинки, оказались полезными при вычислении постоянных функций Y и R из данных граничных условий пластинки²⁾.

79. Метод комплексных переменных. Преобразовав независимые переменные дифференциального уравнения (104) изогнутой пластинки с помощью подстановки $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, получим это уравнение в новых переменных

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \frac{1}{16D} q(z, \bar{z}). \quad (a)$$

¹⁾ Обоснование метода и обширный обзор преобразований, используемых в его применениях, имеются в работе Юнга (Jung H., Z. angew. Math. Mech., т. 32, стр. 46, 1952).

²⁾ Использование этого метода принадлежит Девереллу и Торну; см. Deverall L. I., Thorne C. J., J. Appl. Mech., т. 18, стр. 152, 359, 1951.

Положим $w = w_0 + w_1$, где w_1 — общее решение уравнения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial^2 z \partial^2 \bar{z}} = 0,$$

а w_0 — частное решение уравнения (а). Тогда ¹⁾

$$w_1 = \Re [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad (b)$$

где φ и χ — функции, аналитические в рассматриваемой области. Обычно вместе с χ входит и ее производная $\varphi = \partial\chi/\partial z$.

В случае сосредоточенной силы P , приложенной в $z_0 = x_0 + iy_0$, решению w_0 можно придать вид

$$w_0 = \frac{P}{16\pi D} (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) \ln [(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)], \quad (c)$$

по существу эквивалентный выражению (206). Для равномерного нагружения уместна иная форма решения:

$$w_0 = \frac{qz^2\bar{z}^2}{64D}.$$

Если внешний или внутренний контур пластинки — окружность, мы всегда вправе заменить ее единичной окружностью $z = e^{i\theta}$, или, короче, положить $z = \sigma$. Граничные условия на $z = \sigma$ также должны быть сформулированы в комплексной форме. Функции φ и ψ могут быть приняты в виде степенных рядов с добавочными, если нужно, членами, в зависимости от значения результирующих напряжений по внутреннему контуру пластинки. Умножение граничных условий на множитель $[2\pi i(\sigma - z)]^{-1} d\sigma$ и интегрирование по $z = \sigma$ приведет тогда к искомым функциям ²⁾ φ и ψ .

Если контур пластинки отличается от окружности, можно применить отображающую функцию $z = \omega(\zeta) = \omega(\rho e^{i\varphi})$, преобразующую данный контур в единичную окружность $\zeta = e^{i\varphi} = \sigma$. Определение функций $\varphi_1(\zeta) = \varphi(z)$ и $\psi_1(\zeta) = \psi(z)$ из граничных условий на $\zeta = \sigma$ будет тогда приведено к уже рассмотренной задаче. Изложенный здесь метод Мусхелишвили особенно эффективен в случаях, касающихся распределения напряжений вокруг отверстий ³⁾; функция $\omega(\zeta)$ в этих случаях отображает бесконечную область пластинки во внутреннюю область единичного круга.

Метод комплексных переменных позволяет также выразить в замкнутой форме функции Грина для круглой пластинки с различными граничными

¹⁾ \Re обозначает вещественную часть решения. Эта форма решения бигармонического уравнения принадлежит Гурса (Goursat E., Bull. Soc. Math. France, т. 26, стр. 236, 1898).

²⁾ О вычислении интегралов типа Коши см. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, М.—Л., Изд. АН СССР, 1949.

³⁾ Широкое применение этого метода в задаче о концентрации напряжений выполнено Г. Н. Савиным; см. его книгу «Концентрация напряжений вокруг отверстий», Москва, 1951. См. также Yü - Yü a n Yu, J. Appl. Mech., т. 21, стр. 129, 1954, и Proc. IX Intern. Congr. Appl. Mech., т. 6, стр. 378, Брюссель, 1957; также Deverall L. I., J. Appl. Mech., т. 24, стр. 295, 1957. Несколько отличный метод, уместный также для некоторых задач теории толстой пластинки, был применен Стивенсоном (Stevenson A. C., Phil. Mag., т. 33, стр. 639, 1942).

условиями ¹⁾. В иных случаях, как, например, для квадратной пластинки, заземленной по контуру, приходится пользоваться приближенным определением функций Грина ²⁾.

Если деформацию пластинки можно выразить посредством двойных тригонометрических рядов, то ее можно представить и в более простом виде, используя свойства двойкой периодичности эллиптических функций. Для величины Δw , удовлетворяющей гармоническому уравнению $\Delta(\Delta w) = 0$, такое представление оказывается особенно удобным вследствие близкой связи между функцией Грина для выражения Δw и функцией, отображающей область заданной пластинки в единичный круг ³⁾. С определением Δw непосредственно устанавливается и величина перерезывающих сил как производных этой функции в соответствии с уравнениями (108).

80. Применение энергетического метода для вычисления прогибов. Вернемся к задаче о свободно опертой прямоугольной пластинке. Из выкладок § 28 видно, что прогиб свободно опертой прямоугольной пластинки (рис. 59) всегда может быть представлен в форме двойного тригонометрического ряда ⁴⁾

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

Коэффициенты его a_{mn} можно рассматривать как координаты, определяющие форму поверхности прогибов, и для их нахождения можно воспользоваться принципом виртуальных перемещений. Для этого нам потребуется выражение энергии деформации

$$V = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (b)$$

Подставляя сюда вместо w ряд (а), получаем для первого члена подынтегрального выражения

$$\frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx dy. \quad (c)$$

¹⁾ Reissner E., Math. Ann., т. III, стр. 777, 1935; А. И. Лурье, Прикл. мат. мех., т. 4, стр. 93, 1940.

²⁾ Schultz-Grinow F., Z. angew. Math. Mech., т. 33, стр. 227, 1953.

³⁾ Курант, Гильберт (см. цит. на стр. 373), т. 1, стр. 377. Эллиптические функции нашли применение, в частности, в работах Надаи, (A. Nadai, Z. angew. Math. Mech., т. 2, стр. 1, 1922) (безбалочные перекрытия) и Тельке (Tölke F., Ingr.-Arch., т. 5, стр. 187, 1934) (прямоугольные пластинки), а также у Аггарвала (Aggarwala B. D., Z. angew. Math., Mech., т. 34, стр. 226, 1954) (полигональные и, в частности, треугольные пластинки).

⁴⁾ Членами этого ряда являются характеристические функции рассматриваемой пластинки (см. § 77).

Заметив, что

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = 0,$$

если $m \neq m'$ и $n \neq n'$, мы заключаем, что при вычислении интеграла (с) нам достаточно принять в расчет лишь квадраты заключенных в скобки членов бесконечного ряда.

Формула

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4}$$

дает при вычислении интеграла (с)

$$\frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2.$$

Из того факта, что

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \int_0^a \int_0^b \cos^2 \frac{m\pi x}{a} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4},$$

можно заключить, что второй член стоящего под знаком интеграла выражения (b) обращается в результате интегрирования в нуль. По этой причине полная энергия деформации будет в этом случае выражена интегралом (с) и в итоге сведется к

$$V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (d)$$

Рассмотрим изгиб пластинки (рис. 59) сосредоточенной силой P , нормальной к пластинке и приложенной в точке $x = \xi$, $y = \eta$. Чтобы получить виртуальное перемещение, удовлетворяющее граничным условиям, сообщим некоторому коэффициенту $a_{m'n'}$ ряда (а) бесконечно малое приращение $\delta a_{m'n'}$. В результате этого прогиб (а) получит приращение

$$\delta w = \delta a_{m'n'} \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b}$$

и сосредоточенная нагрузка P произведет виртуальную работу

$$P \delta a_{m'n'} \sin \frac{m'\pi \xi}{a} \sin \frac{n'\pi \eta}{b}.$$

Из принципа виртуальных перемещений следует, что эта работа должна быть равна приращению потенциальной энергии (d), обусловленному приращением $\delta a_{m'n'}$. На этом основании

$$P \delta a_{m'n'} \sin \frac{m'\pi\xi}{a} \sin \frac{n'\pi\eta}{b} = \frac{\partial V}{\partial a_{m'n'}} \delta a_{m'n'}$$

Подставив сюда выражение (d) для V , получим

$$P \delta a_{m'n'} \sin \frac{m'\pi\xi}{a} \sin \frac{n'\pi\eta}{b} = \frac{\pi^4 ab}{4} D a_{m'n'} \left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2} \right)^2 \delta a_{m'n'}, \quad (e)$$

откуда

$$a_{m'n'} = \frac{4P \sin \frac{m'\pi\xi}{a} \sin \frac{n'\pi\eta}{b}}{\pi^4 ab D \left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2} \right)^2}. \quad (f)$$

Подставив это значение коэффициента $a_{m'n'}$ в выражение (a), приходим вновь к результату (133).

Вместо того чтобы пользоваться принципом виртуальных перемещений при вычислении коэффициентов a_{mn} в выражении (a) для прогибов, мы можем достигнуть того же результата из рассмотрения полной энергии системы. Если система находится в состоянии устойчивого равновесия, то полная энергия ее принимает минимальное из всех возможных значений. Прилагая этот принцип к исследованию изгиба пластинки, заметим, что полная энергия в подобных случаях состоит из двух частей, а именно: из энергии деформации изгиба, данной выражением (b), и из потенциальной энергии нагрузки, распределенной по пластинке. Если положение элемента $q dx dy$ нагрузки определять вертикальными его расстояниями w от горизонтальной плоскости xu , то соответствующая ему потенциальная энергия может быть принята равной $-wq dx dy$, и потенциальная энергия всей нагрузки будет

$$- \int \int wq dx dy. \quad (g)$$

Тогда полную энергию системы даст интеграл

$$I = \int \int \left\{ \frac{D}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - wq \right\} dx dy. \quad (h)$$

Задача об изгибе пластинки сводится в каждом частном случае к нахождению функции w от x и y , удовлетворяющей заданным граничным условиям и обращающей значение интеграла (h) в минимум. Используя для этой задачи средства вариационного исчисления,

мы получим для w дифференциальное уравнение в частных производных (104), выведенное уже ранее из условий равновесия элемента пластинки. Интегралом (h) можно, однако, с успехом воспользоваться и в приближенном исследовании изгиба пластинки. С этой целью заменим задачу вариационного исчисления задачей об отыскании минимума некоторой функции, допустив, что прогиб w может быть представлен в виде ряда

$$w = a_1\varphi_1(x, y) + a_2\varphi_2(x, y) + a_3\varphi_3(x, y) + \dots + a_n\varphi_n(x, y), \quad (211)$$

в котором функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ выбраны так, чтобы они могли¹⁾ представлять поверхность прогибов w и в то же время удовлетворяли бы граничным условиям. Подставив выражение (211) в интеграл (h), получим после интегрирования функцию второй степени от коэффициентов a_1, a_2, \dots . Эти коэффициенты следует теперь выбрать так, чтобы интеграл (h) принял минимальное значение, т. е. чтобы

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0. \quad (i)$$

Это — система n линейных уравнений относительно величин a_1, a_2, \dots, a_n , которые легко могут быть вычислены в каждом отдельном случае. Если функции φ такого типа, что ряд (211) может представить любую функцию внутри контура пластинки²⁾, то этот метод вычисления прогибов w приводит нас ко все более и более точному приближению по мере того, как число n членов ряда возрастает; взяв же n бесконечно большим, мы получим точное решение задачи.

Применяя этот метод к случаю свободно опертой прямоугольной пластинки, выразим прогиб ее тригонометрическим рядом (a), для энергии же деформации используем выражение (d); тогда интеграл (h) представится в следующем виде:

$$I = \frac{\pi^4 abD}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \int_0^a \int_0^b q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad (j)$$

¹⁾ Из опыта мы обычно знаем приблизительно форму поверхности прогибов, этим знанием нам и надлежит руководствоваться при выборе подходящих функций φ .

²⁾ Мы видели, что двойной тригонометрический ряд (a) обладает этим свойством в отношении прогибов w для свободно опертой прямоугольной пластинки, поэтому им можно пользоваться и при получении точного решения задачи. Метод решения задач об изгибе пластинки с применением интеграла (h) был разработан Ритцем; см. J. reine angew. Math., т. 135, 1908, а также Ann. Physik, 4-я серия, т. 28, стр. 737, 1909.

а уравнения (i) примут вид

$$\frac{\pi^4 ab D}{4} a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0. \quad (k)$$

Если нагрузка P приложена в точке с координатами ξ, η , то интенсивность q нагрузки равна нулю во всех точках, за исключением точки ξ, η , для которой нам следует положить $\bar{q} dx dy = P$. Тогда уравнение (k) совпадает с уравнением (e), выведенным выше из принципа виртуальных перемещений. В практических целях полезно обратить внимание на то, что входящий в выражения (b) и (h) интеграл

$$\int \int \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (l)$$

обращается в нуль для пластинки, жестко защемленной по контуру. То же упрощение имеет место и для многоугольной пластинки, если одно из граничных условий требует, чтобы либо $w = 0$, либо $\partial w / \partial n = 0$, где n — направление нормали к краю¹⁾.

Если перейти от прямоугольных координат к полярным, допустив при этом осевую симметрию нагрузки и деформации, то уравнение (h) преобразуется в

$$I = \int \int \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{2(1-\nu)}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] - wq \right\} r dr d\theta. \quad (m)$$

При этом для защемленной по контуру пластинки значение члена, содержащего множитель $(1-\nu)$, и на этот раз сводится к нулю.

Энергетическим методом можно также вычислить прогиб круглой пластинки, покоящейся на упругом основании. Для получения грубого приближения представим прогиб в виде

$$w = A + Br^2, \quad (n)$$

где A и B — две постоянные, подлежащие определению из того условия, что полная энергия системы в состоянии устойчивого равновесия приобретает минимальное значение.

Энергия деформации пластинки радиуса a на основании уравнения (m) выразится так:

$$V_1 = 4B^2 D \pi a^2 (1 + \nu).$$

Энергия деформации упругого основания будет

$$V_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{k w^2}{2} r dr d\theta = \pi k \left(\frac{1}{2} A^2 a^2 + \frac{1}{2} A B a^4 + \frac{1}{6} B^2 a^6 \right).$$

¹⁾ См., например, Berger E. R., Österr. Ingr.-Arch., т. 7, стр. 41, 1953.

Полная энергия системы для случая, когда нагрузка P приложена в центре, равна

$$V = 4B^2 D \pi a^2 (1 + \nu) + \pi k \left(\frac{1}{2} A^2 a^2 + \frac{1}{2} A B a^4 + \frac{1}{6} B^2 a^6 \right) - P A.$$

Беря производные от этого выражения по A и по B и приравнявая их нулю, получим

$$A + B a^2 \left[\frac{2}{3} + \frac{16D(1+\nu)}{k a^4} \right] = 0,$$

$$A + \frac{1}{2} B a^2 = \frac{P}{\pi k a^2}.$$

В соответствии с численным примером (стр. 296) примем

$$l = a, \quad \frac{D}{k a^4} = 1, \quad \frac{P}{8 \pi k a^3} = 102 \cdot 10^{-5},$$

откуда

$$w_{\max} = A = 41,8 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

Этот результат приблизительно на 3% меньше значения $43 \cdot 10^{-3}$ см, полученного из дифференциального уравнения пластинки, покоящейся на упругом основании. Уточнение этого результата достигается введением в ряд (п) большего числа членов.

Если мы ставим себе задачу найти не только прогиб, но и распределение напряжений близ точки приложения сосредоточенной нагрузки, нам следует ввести в ряд (п) дополнительный член вида

$$\frac{P}{8 \pi D} r^2 \ln r,$$

в соответствии с типом особенности, имеющей здесь место [см. уравнение (206)].

В полярных координатах интеграл (h) в самом общем случае принимает вид

$$I = \int \int \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - w q \right\} r dr d\theta. \quad (o)$$

81. Иной способ применения энергетического метода. Вычисление коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n в выражении (211), которое должно удовлетворять граничным условиям, но не дифференциальному уравнению задачи, можно выполнить также и без фактического определения потенциальной энергии системы.

Зная виртуальный прогиб δw пластинки, мы можем вычислить соответствующую работу нагрузки q либо непосредственно из интеграла

$$(\delta V)_1 = \int \int q \delta w dx dy, \quad (a)$$

будет удовлетворять требуемым условиям

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0, \quad \text{где } u = \pm 1,$$

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0 \quad \text{при } v = \pm 1.$$

Проведем подсчет для частного случая квадратной пластинки. Поскольку здесь x и y взаимно заменимы, имеем $a_2 = a_3$ и, следовательно,

$$\varphi_2 = \varphi_3 = U_1 V_2 + U_2 V_1.$$

Положив $qa^4/16D = N$, запишем ряд (21) в виде

$$\omega = a_1 U_1 V_1 + a_2 (U_1 V_2 + U_2 V_1) + a_1 U_2 V_2. \quad (g)$$

Подставляя его последовательно в уравнения (d) с коэффициентами φ_1 , φ_2 и φ_4 и используя обозначения (e), вычислим интегралы в пределах $u = \pm 1$, $v = \pm 1$. Приходим к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 6,687345a_1 + 1,215879a_2 + 0,0675488a_4 &= 0,1422221N, \\ 1,215879a_1 + 2,743525a_2 + 0,218235a_4 &= 0,0406349N, \\ 0,0675488a_1 + 0,218235a_2 + 0,00590462a_4 &= 0,00290249N. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

В первом приближении находим

$$a_1 = \frac{0,1422221}{6,687345} N = 0,02127N.$$

Решая всю систему (h), получаем в третьем приближении

$$a_1 = 0,02023N, \quad a_2 = 0,00535N, \quad a_4 = 0,00625N.$$

Полученные из выражения (g) численные результаты для прогибов в центре, моментов $M_x = M_y$ в центре и моментов M_x в точке $x = a/2$, $y = 0$ сводятся к следующему: в первом приближении: $0,001329qa^4/D$, $0,0276qa^2$, $-0,0425qa^2$; в третьем приближении: $0,001264qa^4/D$, $0,0228qa^2$, $-0,0512qa^2$. Для сравнения приводим соответствующие данные из таблицы 35:

$$0,00126qa^4/D, \quad 0,0231qa^2, \quad -0,0513qa^2.$$

Моменты в центре вычислены для $\nu = 0,3$.

Из приведенных выкладок можно сделать вывод, что если первое приближение еще нельзя признать удовлетворительным, то третье представляется вполне достаточным даже и для изгибающих моментов.

82. Различные приближенные методы. Комбинированный метод¹⁾. Описанную в предыдущем параграфе методику можно ограничить, сведя ее к одной переменной, например y , и получив таким путем для другого переменного x обыкновенное дифференциальное уравнение. Вернемся к изгибу защемленной квадратной пластинки под равномерной нагрузкой (рис. 91).

Ограничившись первым приближением, примем на этот раз

$$\omega = \varphi(x) \psi(y) = \varphi(x) (a^2 - 8a^2y^2 + 16y^4). \quad (a)$$

¹⁾ Предложен Л. В. Канторовичем, Изв. АН СССР, № 5, 1933.

Граничные условия $w = \frac{dw}{dy} = 0$ при $y = \pm a/2$ будут при этом удовлетворены функцией $\psi(y)$. Попытаемся теперь удовлетворить условию (с) § 81, взяв вариацию в виде

$$\delta w = \psi(y) \delta \varphi(x). \quad (b)$$

Подстановка в уравнение (с) § 81 дает

$$\int \left[\int \left(\Delta \Delta w - \frac{q}{D} \right) \psi(y) dy \right] dx \delta \varphi(x) = 0, \quad (c)$$

что удовлетворяется при

$$\int_{-a/2}^{a/2} \left(\Delta \Delta w - \frac{q}{D} \right) \psi(y) dy = 0. \quad (d)$$

Подставив теперь выражение (а) в это последнее уравнение, мы придем к следующему дифференциальному уравнению для неизвестной функции $\varphi(x)$:

$$\frac{a^4}{504} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \frac{a^2}{21} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi = \frac{q}{384D}. \quad (e)$$

Очевидное частное решение этого уравнения будет $\varphi = q/384D$. Для однородного уравнения, к которому приводится (е) при $q = 0$, мы можем принять $\varphi = e^{\lambda x/a}$. Это дает $\lambda = \pm \alpha \pm \beta i$ при $\alpha = 4,1503$ и $\beta = 2,2858$. Вследствие симметрии поверхности прогибов относительно оси x решения уравнения (е) должны быть четными функциями x ; поэтому получаем

$$\varphi = \frac{q}{384D} \left(1 + C_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{a} \cos \frac{\beta x}{a} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{a} \sin \frac{\beta x}{a} \right). \quad (f)$$

Для вычисления постоянных C_1 и C_2 пользуемся граничными условиями $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ на $x = \pm a/2$, откуда находим $C_1 = -0,50227$, $C_2 = -0,04396$.

Этими значениями окончательно устанавливаются форма функции (f) и решение (а).

Последнее дает следующие численные результаты для центра пластинки: $w = 0,001296qa^4/D$ (для $\nu = 0,3$), $M_x = 0,0241qa^2$ и $M_y = 0,0261qa^2$.

Благодаря частичному использованию дифференциального уравнения результат первого приближения получается более точным, нежели приведенные в § 81, где энергетический метод был применен в чистом виде. В целях дальнейшего повышения точности положим

$$w = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots, \quad (g)$$

где все функции $\psi(y)$ подчиняются требованию удовлетворять граничным условиям при $y = \pm a/2$. Использование уравнения (с) с вариациями $\delta w_1 = \psi_1 \delta \varphi_1$, $\delta w_2 = \psi_2 \delta \varphi_2$, ... приводит теперь к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... Решение подобной системы, хотя и не представляет принципиальных трудностей, может оказаться трудоемким для приближений более высокого порядка: в практических применениях, однако, приемлемые результаты дает чаще всего второе приближение.

Метод обращения. Решением (211), удовлетворяющим лишь граничным условиям задачи, можно воспользоваться также и иным путем. Вместо того чтобы вычислять прогибы из заданного распределения нагрузки с помощью уравнения (103), воспользуемся тем же уравнением для определения нагрузки

$$\bar{q} = D\Delta \Delta w, \quad (h)$$

приводящей к прогибу (211). В согласии с нашей гипотезой выражение (211) не представляет строгого решения задачи, и поэтому нагрузка (h) никогда не будет совпадать с заданной нагрузкой q . Мы вправе, однако, выбрать параметры a_1, a_2, \dots в уравнении (211) таким образом, чтобы значения функций q и \bar{q} в среднем становились равными на отдельных участках площади пластинки.

Рассмотрим, например, прямоугольную пластинку (рис. 178), с симметричными относительно обеих осей x и y граничными условиями и распределением нагрузки. Разбив пластинку на 16 равных прямоугольных участков, нам достаточно будет в силу симметрии рассмотреть только четыре таких участка, например A_1, A_2, A_3, A_4 . Выражение (211) можно будет ограничить всего четырьмя членами, т. е. принять

$$w = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4. \quad (i)$$

Подчиним теперь значения q и \bar{q} на каждом из участков условию

$$\iint_{A_n} (q - \bar{q}) dx dy = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (j)$$

Это дает четыре линейных уравнения для четырех параметров a_n , и их решение позволит установить окончательный вид выражения (i)¹⁾.

Методы аппроксимации граничных условий. Если нам удалось найти решение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению (103) и вместе с тем одному из граничных условий, то второе принятое условие может быть удовлетворено путем определения совокупности надлежаще выбранных параметров. При решении задачи § 44 в качестве таких параметров были введены коэффициенты двух тригонометрических рядов, представляющих изменения краевых моментов пластинки. Разложение выражения для наклона $d\omega/dN$ в ряд²⁾ Фурье было проведено с той целью, чтобы обратить этот наклон в нуль на контуре, как это требуется условиями задачи. Последнее условие дает возможность вычислить параметры. Для приближенного

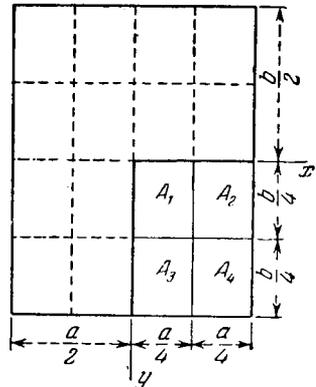


Рис. 178.

¹⁾ Иллюстрирующий пример применения этого метода можно найти: Biezeno С. В. und Grammel R., Technische Dynamik, 2-е изд., т. 1, стр. 147, Berlin, 1953 (имеется русский перевод с 1-го издания: Бицено и Граммель, Техническая динамика, т. 1, Гостехиздат, Москва, 1950).

²⁾ Для выполнения граничных условий Надаи применил ортогонализацию по контуру для системы функций более общего характера; см. N a d a i A., Elastische Platten, стр. 180, Берлин, 1925.

выполнения контурных условий уместно бывает также прибегнуть к тому или иному экстремальному принципу, например к методу наименьших квадратов. В тех, однако, случаях, когда требуется одновременное выполнение двух граничных условий, использование подобного принципа бывает сопряжено с некоторыми дополнительными трудностями¹⁾.

Если мы располагаем решением, которое удовлетворяет одному лишь дифференциальному уравнению задачи, то простейшим иной раз путем к полному решению бывает выполнение граничных условий только в нескольких надлежащим образом выбранных точках контура. При выборе этих точек рекомендуется учитывать симметрию деформации пластинки, если, конечно, такая симметрия существует. Для того чтобы удовлетворить всем граничным условиям в m точках, нам нужно ввести $2m$ неизвестных параметров.

В самом общем случае²⁾ мы можем принять выражение для прогиба, которое не удовлетворяет ни дифференциальному уравнению изогнутой пластинки, ни граничным условиям задачи. Тогда назначают некоторое число точек, например n , внутри контура и на контуре пластинки, в которых дифференциальное уравнение должно удовлетворяться в точности. Тогда для получения решения задачи потребуется $2m + n$ параметров.

*Метод Вайнштейна*³⁾. В частном случае пластинки, защемленной по контуру, можно сперва искать решение дифференциального уравнения $\Delta \Delta w_1 = q/D$ для заданной нагрузки q и для граничных условий $w_1 = 0$, $\Delta w_1 = 0$, отличающихся от условий, заданных в действительности. В § 24 было показано, что этот последний способ эквивалентен последовательному решению двух задач, относящихся к равновесию нагруженной мембраны.

Решение поставленной задачи можно взять в виде

$$w = w_1 + \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k, \quad (к)$$

где a_k — некоторые коэффициенты, а φ_k — функции x, y , обращающиеся в нуль на контуре и удовлетворяющие дифференциальному уравнению $\Delta \Delta \varphi_k = 0$. Требуемое условие $\partial w / \partial N$ на контуре (где N — нормаль к контуру) может быть преобразовано на основе теоремы Грина, что приводит к следующей системе m линейных уравнений для параметров a_k :

$$\left. \begin{aligned} \iint \frac{q\varphi_1}{D} dx dy + \sum_{k=1}^m a_k \iint \Delta \varphi_1 \Delta \varphi_2 dx dy = 0, \\ \iint \frac{q\varphi_2}{D} dx dy + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \iint \Delta \varphi_2 \Delta \varphi_3 dx dy = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (л)$$

где все интегралы берутся по всей площади пластинки. Этот метод пред-

¹⁾ Важный вклад в эту проблему внес Бергер (Berger E., стр. 39, цит. на стр. 384).

²⁾ Этот метод излагается в работе Thorne C. J., Atanosoff J. V., Iowa State Coll. J. Sci., т. 14, стр. 333, 1940.

³⁾ Weinstein A., Rock D. H., Quart. Appl. Math., т. 2, стр. 262, 1944.

ставляет выгоды в тех случаях, когда граничные условия $w = 0$, $\Delta w = 0$ подсказывают значительно более простое решение в сравнении с действительными условиями задачи $w = 0$, $\partial w / \partial N = 0$.

83. Применение уравнений в конечных разностях к исследованию изгиба свободно опертой прямоугольной пластинки. Ранее (см. § 24) было показано, что дифференциальное уравнение изгиба пластинки может быть заменено двумя уравнениями, из коих каждое имеет форму уравнения провисания равномерно растянутой мембраны. При этом было упомянуто, что это последнее уравнение может быть решено с достаточной точностью путем замены его уравнением в конечных разностях.

Чтобы проиллюстрировать этот метод решения, начнем со случая равномерно нагруженной длинной прямоугольной пластинки. На значительном расстоянии от коротких ее сторон поверхность прогибов такой пластинки можно считать цилиндрической. Если ось x расположить параллельно этим коротким сторонам, то дифференциальные уравнения (120) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= -q, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{M}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Оба эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнение прогиба растянутой поперечно нагруженной гибкой струны.

Пусть AB (рис. 179, а) представляет собой упругую кривую нити, натянутой силами S и равномерно нагруженной вертикальной нагрузкой интенсивностью q . Для вывода уравнения этой кривой рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента mn . Растягивающие силы в точках m и n направлены по касательным к изогнутой кривой в этих точках, и потому, проектируя эти силы, а также нагрузку $q dx$ на ось z , получим

$$-S \frac{dw}{dx} + S \left(\frac{dw}{dx} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) + q dx = 0, \quad (b)$$

откуда

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{q}{S}. \quad (c)$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (а), выведенное для бесконечно длинной пластинки. Кривая прогибов получится теперь в результате интегрирования уравнения (с), которое дает нам параболу

$$w = \frac{4\delta x (a - x)}{a^2}, \quad (d)$$

удовлетворяющую условиям $w = 0$ на концах и имеющую в середине прогиб δ .

Эта задача может быть решена и графически путем замены равномерно распределенной сплошной нагрузки системой равноотстоящих сосредоточенных сил $q \Delta x$, где Δx представляет собой расстояние между двумя смежными силами, и построения вервочного многоугольника для этих сил. Если A (рис. 179, б) — одна из вершин этого вервочного многоугольника, а S_{k-1} и S_k — растягивающие силы в двух его смежных сторонах, то горизонтальные проекции этих сил

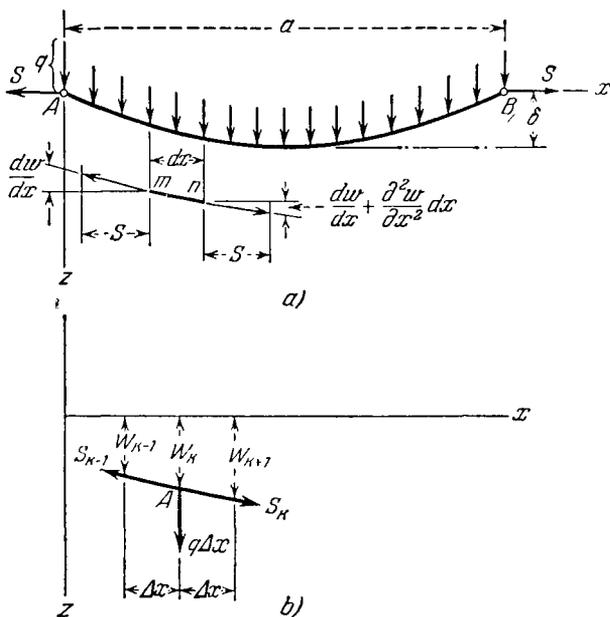


Рис. 179.

будут равны S , сумма же их вертикальных проекций будет уравновешивать нагрузку $q \Delta x$. Это даст

$$-S \frac{w_k - w_{k-1}}{\Delta x} + S \frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta x} + q \Delta x = 0. \quad (\epsilon)$$

В этих уравнениях w_{k-1} , w_k и w_{k+1} — ординаты трех последовательных вершин вервочного многоугольника, а $(w_k - w_{k-1})/\Delta x$ и $(w_{k+1} - w_k)/\Delta x$ — наклоны двух смежных его сторон. Уравнением (ϵ) можно пользоваться для вычисления последовательных ординат w_1 ,

$w_2, \dots, w_{k-1}, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ веревочного многоугольника. С этой целью составим таблицу (f):

0	w_0		
Δx	w_1	Δw_0	
.....
$(k-1)\Delta x$	w_{k-1}	Δw_{k-1}	
$k\Delta x$	w_k	Δw_k	$\Delta^2 w_k$
$(k+1)\Delta x$	w_{k+1}		

(f)

В первом столбце таблицы помещаются абсциссы последовательных точек деления пролета. Во втором столбце — ординаты последовательных вершин многоугольника. Образуя разности последовательных ординат $w_1 - w_0, \dots, w_k - w_{k-1}, w_{k+1} - w_k, \dots$, мы получим так называемые *первые разности*, обозначенные через $\Delta w_0, \dots, \Delta w_{k-1}, \Delta w_k, \dots$; мы вносим их в третий столбец таблицы. *Вторые разности* получаются путем образования разностей между последовательными числами третьего столбца. Например, для точки k с абсциссой $k\Delta x$ вторая разность равна

$$\begin{aligned} \Delta^2 w_k &= \Delta w_k - \Delta w_{k-1} = w_{k+1} - w_k - (w_k - w_{k-1}) = \\ &= w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}. \end{aligned} \quad (g)$$

В этих обозначениях уравнение (e) может быть написано следующим образом:

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = -\frac{q}{S}. \quad (h)$$

Это — уравнение в конечных разностях, соответствующее дифференциальному уравнению (c) и приближающееся к нему все больше и больше по мере того, как число точек деления пролета увеличивается.

Подобным же образом и дифференциальные уравнения (a) также могут быть заменены нижеследующими уравнениями в конечных разностях:

$$\frac{\Delta^2 M}{\Delta x^2} = -q, \quad \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = -\frac{M}{D}. \quad (i)$$

Чтобы проиллюстрировать применение этих уравнений для вычисления прогибов пластинки, разделим пролет, положим, на восемь равных панелей, т. е. положим, что $\Delta x = \frac{1}{8} a$. Тогда уравнения (i) примут вид

$$\Delta^2 M = -\frac{qa^2}{64},$$

$$\Delta^2 w = -\frac{Ma^2}{64D}.$$

Образуя в соответствии с уравнением (g) вторые разности для последовательных точек деления w_1, w_2, w_3 и w_4 и заметив, что в нашем случае $w_0 = 0$ и $M_0 = 0$, а из симметрии $w_3 = w_5$ и $M_3 = M_5$, получаем следующие две группы линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M_2 - 2M_1 &= -\frac{qa^2}{64}, & w_2 - 2w_1 &= -\frac{M_1 a^2}{64D}, \\ M_3 - 2M_2 + M_1 &= -\frac{qa^2}{64}, & w_3 - 2w_2 + w_1 &= -\frac{M_2 a^2}{64D}, \\ M_4 - 2M_3 + M_2 &= -\frac{qa^2}{64}, & w_4 - 2w_3 + w_2 &= -\frac{M_3 a^2}{64D}, \\ M_3 - 2M_4 + M_3 &= -\frac{qa^2}{64}, & w_3 - 2w_4 + w_3 &= -\frac{M_4 a^2}{64D}. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Решив первую группу, получаем следующие значения для M :

$$M_1 = \frac{7}{2} \frac{qa^2}{64}, \quad M_2 = 6 \frac{qa^2}{64}, \quad M_3 = \frac{15}{2} \frac{qa^2}{64}, \quad M_4 = 8 \frac{qa^2}{64}. \quad (k)$$

Эти значения в точности совпадают со значениями изгибающих моментов для равномерно нагруженной полоски, вычисленными из известного уравнения

$$M = \frac{qa}{2} x - \frac{qx^2}{2}.$$

Подставив эти значения (k) моментов во вторую группу уравнений (j), получаем

$$\begin{aligned} w_2 - 2w_1 &= -\frac{7}{2} N, \\ w_3 - 2w_2 + w_1 &= -6N, \\ w_4 - 2w_3 + w_2 &= -\frac{15}{2} N, \\ w_3 - 2w_4 + w_3 &= -8N, \end{aligned}$$

где

$$N = \frac{qa^4}{64^2 D}.$$

Решая эти уравнения, получаем следующие прогибы в точках деления:

$$w_1 = 21N, \quad w_2 = 38,5N, \quad w_3 = 50N, \quad w_4 = 54N. \quad (l)$$

Приводим для сравнения точные значения этих прогибов, получающиеся из известного уравнения

$$w = \frac{qx}{24D} (a^3 - 2ax^2 + x^3)$$

для прогиба равномерно нагруженной полоски длиной a ; а именно они таковы:

$$w_1 = 20,7N, \quad w_2 = 38N, \quad w_3 = 49,4N, \quad w_4 = 53,3N.$$

Мы видим, что при делении пролета на восемь частей погрешность в определении величины максимальных прогибов из уравнений в конечных разностях (i) составляет около 1,25%. Увеличивая число точек деления, мы можем повысить точность наших расчетов, но это потребует и большей работы, ибо с увеличением числа делений увеличится и число уравнений системы (j).

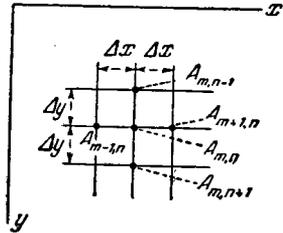


Рис. 180.

Рассмотрим теперь прямоугольную пластинку конечной длины. В этом случае прогибы будут функциями обеих координат: как x , так и y , и от уравнений (а) мы должны перейти к общим уравнениям (120). Заменяя эти уравнения уравнениями в конечных разностях, мы должны учесть разности, соответствующие изменениям обеих координат: как x , так и y . Введем следующие обозначения для первых разностей в точке A_{mn} с координатами $m \Delta x$ и $n \Delta y$. При этом обозначения, принятые для смежных точек, показаны на рис. 180:

$$\begin{aligned} \Delta_x w_{m-1, n} &= w_{m, n} - w_{m-1, n}, & \Delta_x w_{m, n} &= w_{m+1, n} - w_{m, n}, \\ \Delta_y w_{m, n-1} &= w_{m, n} - w_{m, n-1}, & \Delta_y w_{m, n} &= w_{m, n+1} - w_{m, n}. \end{aligned}$$

Имея первые разности, мы можем образовать три вида вторых разностей:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{xx} w_{m, n} &= \Delta_x w_{mn} - \Delta_x w_{m-1, n} = \\ &= w_{m+1, n} - w_{m, n} - (w_{m, n} - w_{m-1, n}) = \\ &= w_{m+1, n} - 2w_{m, n} + w_{m-1, n}, \\ \Delta_{yy} w_{m, n} &= \Delta_y w_{m, n} - \Delta_y w_{m, n-1} = \\ &= w_{m, n+1} - w_{m, n} - (w_{m, n} - w_{m, n-1}) = \\ &= w_{m, n+1} - 2w_{m, n} + w_{m, n-1}, \\ \Delta_{xy} w_{m, n} &= \Delta_y w_{m, n} - \Delta_y w_{m-1, n} = \\ &= w_{m, n+1} - w_{m, n} - (w_{m-1, n+1} - w_{m-1, n}) = \\ &= w_{m, n+1} - w_{m, n} - w_{m-1, n+1} + w_{m-1, n}. \end{aligned} \right\} (m)$$

В этих обозначениях дифференциальным уравнениям (120) будут отвечать следующие уравнения в конечных разностях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta_{xx}M}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy}M}{\Delta y^2} &= -q, \\ \frac{\Delta_{xx}w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy}w}{\Delta y^2} &= -\frac{M}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (п)$$

В случае свободно опертой прямоугольной пластинки M и w обращаются на краях в нули, и мы без затруднений можем решить последовательно уравнения (п).

Чтобы проиллюстрировать процедуру вычисления моментов и прогибов, возьмем весьма простой случай равномерно нагруженной квадратной пластинки (рис. 181). Грубое приближение для M и w будет получено разбиением пластинки, как показано на чертеже, на 16 небольших квадратов, так что в уравнениях (п) $\Delta x = \Delta y = \frac{a}{4}$. Из симметрии очевидно, что эти вычисления достаточно проделать лишь для $\frac{1}{8}$ площади всей пластинки, именно для заштрихованного на чертеже треугольника. Но и на этой площади нам потребуется установить искомые значения лишь для трех точек 0, 1, 2, в которых M и w отличны от нуля. В остальных точках 3, 4, 5 эти величины обращаются в нуль в силу граничных условий. Начав с первого из уравнений (п) и применив его к центру пластинки, т. е. к точке 0, найдем для этой точки с помощью уравнений (п) и условий симметрии следующие значения вторых разностей:

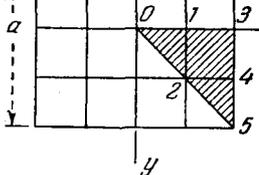


Рис. 181.

где M_1 и M_0 суть значения M соответственно в точках 1 и 0. Подобным же образом для точки 1 получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{xx}M_0 &= 2M_1 - 2M_0, \\ \Delta_{yy}M_0 &= 2M_1 - 2M_0, \end{aligned}$$

где M_1 и M_0 суть значения M соответственно в точках 1 и 0. Подобным же образом для точки 1 получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{xx}M_1 &= M_3 - 2M_1 + M_0 = -2M_1 + M_0, \\ \Delta_{yy}M_1 &= 2M_2 - 2M_1. \end{aligned}$$

Точно таким же образом можно вычислить и вторые разности в точке 2. Подставив эти выражения для вторых разностей в первое из уравнений (п), получим для точек 0, 1, 2 следующие три

уравнения:

$$\begin{aligned} 4M_1 - 4M_0 &= -\frac{qa^2}{16}, \\ 2M_2 - 4M_1 + M_0 &= -\frac{qa^2}{16}, \\ -4M_2 + 2M_1 &= -\frac{qa^2}{16}, \end{aligned}$$

из которых находим

$$M_0 = \frac{9}{2} \frac{qa^2}{64}, \quad M_1 = \frac{7}{2} \frac{qa^2}{64}, \quad M_2 = \frac{11}{4} \frac{qa^2}{64}.$$

Подставив эти значения во второе из уравнений (п), получим следующие три уравнения для вычисления прогибов w_0 , w_1 и w_2 :

$$\begin{aligned} 4w_1 - 4w_0 &= -\frac{9}{2} N, \\ 2w_2 - 4w_1 + w_0 &= -\frac{7}{2} N, \\ -4w_2 + 2w_1 &= -\frac{11}{4} N, \end{aligned}$$

где

$$N = \frac{qa^4}{16 \cdot 64D}.$$

Из этих уравнений находим следующие значения прогибов:

$$w_0 = \frac{66}{16} N, \quad w_1 = \frac{48}{16} N, \quad w_2 = \frac{35}{16} N.$$

Для прогиба в центре получаем

$$w_0 = \frac{66}{16} N = \frac{66qa^4}{16 \cdot 16 \cdot 64D} = 0,00403 \frac{qa^4}{64}.$$

Сравнивая это с приведенным в таблице 8 значением $0,00406 qa^4/D$, мы можем убедиться, что погрешность в вычислении максимального прогиба меньше 1%. Для изгибающего момента в центре пластинки находим

$$M_x = M_y = \frac{M_0(1+\nu)}{2} = \frac{1,3}{2} \cdot \frac{9}{2} \frac{qa^2}{64} = 0,0457 qa^2,$$

что меньше точного значения $0,0479 qa^2$ приблизительно на $4 \frac{1}{2}$ %. Отсюда можно видеть, что небольшое число подразделений пластинки

дает в рассматриваемом случае уже достаточную для практических применений точность. Если число делений удвоить, т. е. положить

$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{8} a$, то значение полученного при этом изгибающего момента будет отличаться от точной величины менее чем на 1%.

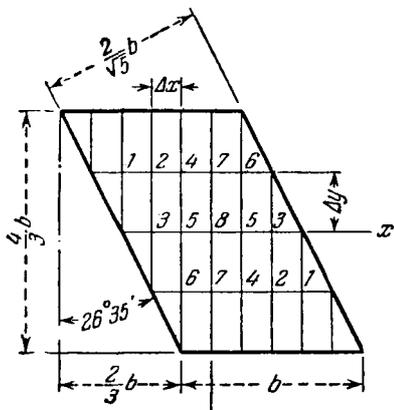


Рис. 182.

для разностей выражениями (m), получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -10M_1 + 4M_2 &= -\frac{qb^2}{9}, \\ 4M_1 - 10M_2 + M_3 + 4M_4 &= -\frac{qb^2}{9}, \\ M_2 - 10M_3 + 4M_5 &= -\frac{qb^2}{9}, \\ 4M_2 - 10M_4 + M_5 + 4M_7 &= -\frac{qb^2}{9}, \\ 2M_3 + M_4 - 10M_5 + M_6 + 4M_8 &= -\frac{qb^2}{9}, \\ M_5 - 10M_6 + 4M_7 &= -\frac{qb^2}{9}, \\ 4M_4 + 4M_8 - 10M_7 + M_8 &= -\frac{qb^2}{9}, \\ 8M_5 + 2M_7 - 10M_8 &= -\frac{qb^2}{9}. \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

Решение этой системы дает

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 0,29942 \frac{qb^2}{9}, & M_5 &= 0,66191 \frac{qb^2}{9}, \\ M_2 &= 0,49854 \frac{qb^2}{9}, & M_6 &= 0,39387 \frac{qb^2}{9}, \\ M_3 &= 0,41462 \frac{qb^2}{9}, & M_7 &= 0,56920 \frac{qb^2}{9}, \\ M_4 &= 0,59329 \frac{qb^2}{9}, & M_8 &= 0,74337 \frac{qb^2}{9}. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

В качестве второй задачи исследуем изгиб свободно опертой косоугольной пластинки, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q (рис. 182). Делим ее стороны в этом случае на интервалы $\Delta x = b/6$, $\Delta y = b/3$, поэтому первое из уравнений (h) запишется здесь в виде

$$4\Delta_{xx}M + \Delta_{yy}M = -\frac{qb^2}{9}. \quad (o)$$

Применяя это уравнение последовательно к точкам 1—8 и пользуясь

Второе уравнение из системы (п) принимает вид

$$4\Delta_{xx}w + \Delta_{yy}w = -\frac{Mb^2}{9D}. \quad (г)$$

С учетом результата (q) оно приводит ко второй группе уравнений

$$\left. \begin{aligned} -10w_1 + 4w_2 &= -0,29942 N, \\ 4w_1 - 10w_2 + w_3 + 4w_4 &= -0,49854 N, \\ w_2 - 10w_3 + 4w_5 &= -0,41462 N, \\ 4w_2 - 10w_4 + w_5 + 4w_7 &= -0,59329 N, \\ 4w_3 + w_4 - 10w_5 + w_6 + 4w_8 &= -0,66191 N, \\ w_5 - 10w_6 + 4w_7 &= -0,39387 N, \\ 4w_4 + 4w_6 - 10w_7 + w_8 &= -0,56920 N, \\ 8w_5 + 2w_7 - 10w_8 &= -0,74337 N, \end{aligned} \right\} \quad (с)$$

где $N = qb^4/81D$. Это дает прогибы

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 0,13176 N, & w_5 &= 0,38549 N, \\ w_2 &= 0,24455 N, & w_6 &= 0,20293 N, \\ w_3 &= 0,22111 N, & w_7 &= 0,31249 N, \\ w_4 &= 0,32469 N, & w_8 &= 0,44523 N. \end{aligned} \right\} \quad (т)$$

Следует отметить, что интегрирование дифференциального уравнения изогнутой пластинки аналитическими методами встретилось бы в данном случае со значительными трудностями.

Для вычисления моментов в средней точке δ пластинки нам следует прибегнуть к выражениям (101) и (102), предварительно заменив в них производные соответствующими отношениями конечных разностей. Так, пользуясь ¹⁾ выражениями (м) и вводя значения (т) прогибов, получим (при $\nu = 0,2$)

$$(M_x)_\delta = -D \left(\frac{w_5 - 2w_8 + w_6}{\Delta x^2} + \nu \frac{w_7 - 2w_8 + w_1}{\Delta y^2} \right) = 0,0590qb^2,$$

$$(M_y)_\delta = -D \left(\frac{w_7 - 2w_8 + w_1}{\Delta y^2} + \nu \frac{w_5 - 2w_8 + w_6}{\Delta x^2} \right) = 0,0401qb^2,$$

$$(M_{xy})_\delta = (1 - \nu) D \frac{w_4 - w_6 - w_6 + w_4}{4\Delta x \Delta y} = 0,0108qb^2.$$

Круг Мора (рис. 183) дает ²⁾ нам теперь следующие значения главных моментов для точки δ :

$$M_{\max} = \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2} = 0,0639qb^2,$$

$$M_{\min} = \frac{M_x + M_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2} \right)^2 + M_{xy}^2} = 0,0352qb^2.$$

¹⁾ См. также диаграммы на рис. 184 для частного случая $\Delta x = \Delta y$.

²⁾ Следует обратить внимание на разницу в обозначениях на рис. 183 и 22. Главные моменты на рис. 183 обозначены как M_{\max} и M_{\min} . Кроме того, точка на обеих диаграммах движется по окружности по направлению часовой стрелки. Нормаль к соответствующему сечению вращается в том же направлении.

Направление связанных с этими моментами напряжений относительно координатных осей x, y определится углом

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} = 24^\circ 25'.$$

Рис. 182 позволяет сделать вывод, что напряжения в центре, обусловленные моментами M_{\max} , действуют почти в точности в направлении короткой стороны пластинки.

Форма пластинки рис. 182 такова, что мы не встретили трудностей в разбиении ее на участки прямоугольной координатной сетки с постоянными интервалами Δx и Δy . В более общем случае при исследовании косугольных плит приходится прибегать к треугольной сетке ¹⁾.

Метод конечных разностей применим также к пластинкам с защемленными или свободными краями, а также к пластинкам со смешанными граничными условиями ²⁾. Поскольку в общем случае значение M на контуре не фиксируется, в связи с чем использование моментов становится мало удобным, вычисление прогибов w представляется возможным провести непо-

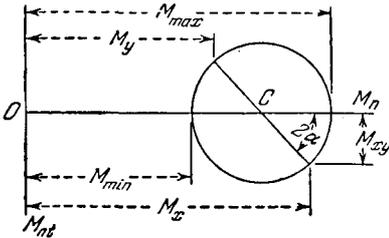


Рис. 183.

средственно из последовательности разностных уравнений, эквивалентной дифференциальному уравнению $\Delta \Delta w = q/D$ изогнутой пластинки. Для наглядности разностный эквивалент оператора $\Delta \Delta (\dots)$ представлен на рис. 184 вместе с другими полезными для использования операторами. Диаграмма основана на предположении, что $\Delta x = \Delta y = \lambda$. Каждое число нужно умножить на символ w_k , обозначающий прогиб в соответствующей точке k , и сумму таких произведений разделить затем на выражение, указанное в схеме.

Для того чтобы сформулировать граничные условия для края, на котором прогибы обращаются в нуль, составим прежде всего уравнение для внутренней точки 7, ближайшей к краю (рис. 185). Применяя оператор $\Delta \Delta (\dots)$, получаем

$$[w_1 + w_5 + w_9 + w_{13} + 2(w_2 + w_4 + w_{10} + w_{12}) - 8(w_3 + w_6 + w_8 + w_{11}) + 20w_7] \frac{1}{\lambda^4} = \frac{q^7}{D}, \quad (u)$$

где $w_2 = w_3 = w_4 = 0$. Далее, нам следует исключить прогиб w_1 для фиктивной точки 1, лежащей на продолжении координатной сетки за контуром пластинки. Это легко сделать, поскольку при свободном опирании пластинки в точке 3 мы имеем $w_1 = -w_7$, при защемлении же ее $w_1 = w_7$. Таким образом, в уравнении (u) останутся лишь прогибы внутренних точек и

¹⁾ Широко применял такие сетки Иенсен (Jensen V. P., Univ. Illinois Bull., 332, 1941); приведенный выше численный пример заимствован из этой работы.

²⁾ С большим количеством численных примеров подобного рода можно ознакомиться по книге Маркуса (Marcus H., Die Theorie elastischer Gewebe, 2-е изд., Берлин, 1932); см. также Nielsen N. J., Bestemmelse af Spaendinger i Plader, Копенгаген, 1920.

общее число таких неизвестных прогибов не будет превышать числа имеющих в нашем распоряжении уравнений типа (u).

При наличии свободного края число таких разностных уравнений возрастает на число точек 2, 3, 4, ... по контуру, в которых прогибы не обращаются в нуль. Соответствующие операторы $\Delta \Delta w$ должны быть при этом

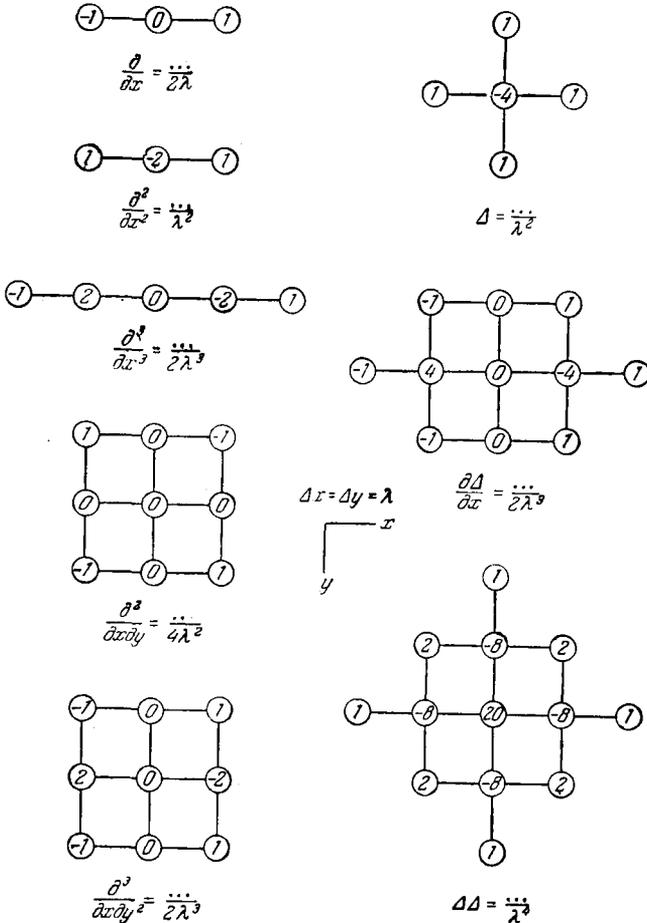


Рис. 184.

распространены на область сетки, лежащую вне контура пластинки на расстояниях λ и 2λ от свободного края. Для каждой пары таких неизвестных прогибов w_0 , w_1 вводятся два граничных условия вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0,$$

выраженные в конечных разностях для точки 3, противостоящей двум внешним точкам сетки 0 и 1. И тогда общее число уравнений вновь станет равным числу неизвестных прогибов.

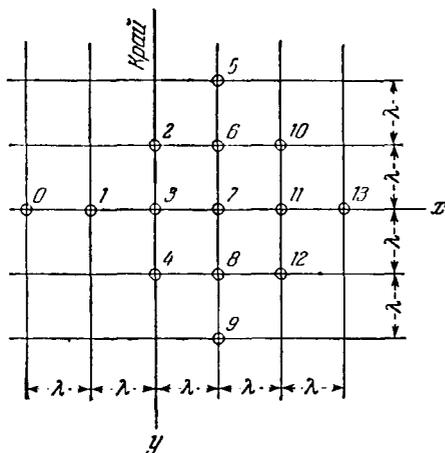


Рис. 185.

ведено обычными приборами, предназначенными для этой цели тензотензографами, а также тензотензографами всевозможных иных типов²⁾. Нижеследующий краткий обзор ограничивается лишь теми методами, которые находят применение в специальных условиях изгиба тонких упругих пластинок.

*Использование фотоупругости*³⁾. Этот метод, применяемый обычно для исследования плоского напряженного состояния, требует, естественно, известного приспособления к особенностям изгиба пластинок. Действительно, нормальные напряжения в двух волокнах, расположенных симметрично относительно срединной плоскости пластинки, при ее изгибе имеют равную величину, но противоположные знаки. В связи с этим оптический эффект, производимый растянутой зоной пластинки на проходящий через

Когда значения M внутри пластинки перестают быть величинами, не зависящими от прогибов w , разностные уравнения для прогибов получаются сложнее, чем это имело место в двух разобранных примерах. Иногда в решении этих уравнений с большим успехом находит применение метод релаксации¹⁾.

84. Экспериментальные методы. При исследовании пластинок неправильных очертаний, нерегулярно изменяющейся толщины или ослабленных большим числом отверстий, экспериментальные методы приводят к цели скорее, чем теоретический анализ. Измерение деформаций в изогнутой пластинке может быть произ-

¹⁾ Этот метод предложен Саусвеллом (R. V. Southwell). Изложение его имеется в книге Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of elasticity, 2-е изд., стр. 468, Нью-Йорк, 1951. См. также Shaw F. S., An introduction to relaxation methods, Нью-Йорк, 1953, где указывается дальнейшая библиография. Другой метод последовательных приближений с использованием разностных уравнений был развит Либманом (Liebman H., Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen, Sitzber. München. Akad., стр. 385, 1918). Сходимость этого метода была исследована Вольфом (Wolf F., Z. angew. Math. Mech., т. 6, стр. 118, 1926) и Курантом (Courant R., Z. angew. Math. Mech., т. 6, стр. 322, 1926). Улучшенный метод дал Цурмюль (Zurmühl R., Z. angew. Math. Mech., т. 37, стр. 1, 1957).

²⁾ Электромеханический метод измерения кривизны в изогнутой плите был применен Андрэ, Леонхардтом и Кригером (André W., Leonhardt F., Krieger R., Bauingenieur, т. 33, стр. 407, 1958).

³⁾ См., например, Timoshenko, Goodier, цит. выше, стр. 131.

нее луч поляризованного света, уничтожается противоположным эффектом сжатой зоны.

Влияние этой второй, сжатой зоны можно исключить, соединив вместе две тождественные пластинки из материала, применяемого для моделей в поляризационном исследовании, с прокладкой между ними листа отражающей металлической фольги. Той же цели можно достигнуть также и посеребрив одну или обе внутренние поверхности пластинок¹⁾. Вычисление подтверждает, что оптический эффект такой двухслойной пластинки толщиной h почти тот же, что и эффект одиночной пластинки толщиной $h/2$, находящейся в плоском напряженном состоянии той же величины, что и напряжение крайнего волокна изогнутой пластинки.

Другой способ сделать изогнутую пластинку доступной для поляризационного исследования²⁾ заключается в том, что она соединяется из двух экземпляров, материал которых, обладая одинаковыми свойствами фотоупругости, характеризуется, однако, различными для каждого из этих двух экземпляров упругими константами. Закон распределения напряжений изгиба перестает быть для такой пластинки линейным. Поэтому при изгибе такая пластинка проявляет активное воздействие на оптические характеристики поляризованного луча света.

По третьему методу отражающая поверхность пластинки из какого угодно упругого материала и каких угодно размеров покрывается листовым материалом, обладающим фотоупругими свойствами³⁾. Характер воздействия этого материала на поляризованный луч позволяет исчерпывающим образом судить о напряженном состоянии крайних волокон испытываемой пластинки. Этому методу доступны не только модели пластинок лабораторных масштабов, но и плиты, входящие в состав эксплуатируемых сооружений и подвергающиеся воздействию эксплуатационных нагрузок.

*Использование отраженного света*⁴⁾. Влияние отражающей поверхности деформированной пластинки на изменения направлений двух смежных лучей света может быть использовано для вычисления кривизн $\partial^2 w / \partial x^2$, $\partial^2 w / \partial y^2$ и $\partial^2 w / \partial x \partial y$, а следовательно, также и для определения значений изгибающих и крутящих моментов пластинок. Тому же назначению может служить и искажение прямоугольной оптической сетки, проектируемой на первоначально плоскую поверхность пластинки. К особо ценным результатам приводит этот путь для пластинок на упругом основании, механические свойства которых никогда не удается выразить чисто аналитическими средствами.

Интерференционный метод. Послужив основой для классического способа определения коэффициента Пуассона, интерференционный принцип нашел также применение и в измерении прогибов изогнутой пластинки⁵⁾.

¹⁾ См. Goodier J. N., Lee G. H., J. Appl. Mech., т. 8, стр. А-27, 1941, и Dantu M., Ann. ponts. chaussées, стр. 281, 1952.

²⁾ См. Favre H., Schweiz. Bauztg., 1950. О применении этого метода к консольной пластинке переменной толщины см. Schwieger H., Haberland G., Z. angew. Math. Mech., т. 36, стр. 287, 1956.

³⁾ Метод фотоупругости предложен в принципе Менаже (1930) (A. Menager), но его практическое использование реализовано лишь недавно; см., например, Zandman F., Wood M. R., Prod. Eng., сент. 1956. О применении процедуры так называемого «замораживания» к пластинкам см. Drucker D. C., J. Appl. Mech., т. 9, стр. А-161, 1942.

⁴⁾ Теория метода и его применения к различным задачам изгиба пластинки см. Dantu M., Ann. ponts. chaussées, 1940 и 1952; см. также Bowen G., Eng. News-Rec., т. 143, стр. 70, 1949.

⁵⁾ См. Landwehr R., Grabert G., Ingr.-Arch., т. 18, стр. 1, 1950.

*Аналогия между плоским напряженным состоянием и изгибом пластинки*¹⁾. Существует аналогия между прогибом пластинки, подчиняющимся дифференциальному уравнению $\Delta \Delta w = 0$, для частного случая действия одних лишь краевых сил, и функцией напряжений Эри φ , удовлетворяющей уравнению $\Delta \Delta \varphi = 0$. В то время как функция w определяет кривизны деформированной пластинки, функция Эри определяет компоненты $\sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2$, $\sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2$ и $\tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y$ плоского напряженного состояния упругого тела. Если в обоих случаях мы имеем дело с одним и тем же контуром, положим $f(x, y) = 0$, то подобие явлений устанавливается соотношениями

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = K \sigma_y, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K \sigma_x, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -K \tau_{xy},$$

где K — произвольная постоянная, при которой значения кривизны остаются малыми.

Если определенные критерии аналогии выполняются как на контуре пластинки, так и на границе упругого тела, то по измеренным прогибам w можно вычислить компоненты плоского напряженного состояния и, наоборот, по известной функции напряжений Эри можно найти деформации пластинки²⁾.

¹⁾ Установлена Вигхардтом (Wieghardt K., Mitt. Forschungsarb. Ingenieurwesens, т. 49, 1908). Дальнейшее развитие этой аналогии см. Schaefer H., Abhandl. Braunschweig. wiss. Ges., т. 8, стр. 142, 1956.

²⁾ Простая формулировка этих условий была дана Дантю (Dantu M., Ann. ponts. chausseés, стр. 386, 1952). Об экспериментальных методах, основанных на аналогии с электрическими явлениями, см. MacNeal R. H., J. Appl. Mech., т. 18, стр. 59, 1951, и Wotruba K., Czechoslov. J. Phys., т. 2, стр. 56, 1953. Дальнейшие сведения о различных экспериментальных методах имеются в книге Förppl L., Möplich E., Praktische Spannungsoptik, 2-е изд., Берлин, 1959.

Г Л А В А XI

ИЗГИБ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

85. Дифференциальное уравнение изгиба. В предыдущих рассуждениях предполагалось, что упругие свойства материала пластинки остаются одинаковыми во всех направлениях. Встречаются, однако, случаи, когда, стремясь привести теорию пластинки в соответствие с данными эксперимента¹⁾, мы должны учесть анизотропию материала. Положим, что материал пластинки в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии²⁾. Если эти плоскости принять в качестве координатных плоскостей, то соотношения между компонентами напряжения и деформации для случая плоского распределения в плоскости $xу$ можно будет представить следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E'_x \epsilon_x + E'' \epsilon_y, \\ \sigma_y &= E'_y \epsilon_y + E'' \epsilon_x, \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Мы видим, что для характеристики упругих свойств материала в случае плоского напряженного состояния нам потребуются четыре постоянные E'_x , E'_y , E'' и G .

Исследуя изгиб пластинки, изготовленной из подобного материала, мы, как и прежде, предполагаем, что перпендикулярные к срединной плоскости пластинки, т. е. к плоскости $xу$, линейные элементы ее остаются прямыми и нормальными к изогнутой поверхности

¹⁾ Случай пластинки из анизотропного материала был рассмотрен Буссинеском (Boussinesq J., J. Math., 3-я серия, т. 5, 1879). См. также принадлежащий Сен-Венану перевод книги А. Клебша «Théorie de l'élasticité des corps solides», прим. 73, на стр. 693.

²⁾ Такие пластинки называются иногда ортотропными. Изгибу пластинок, обладающих упругими свойствами более общего характера, посвящены исследования С. Г. Лехницкого; см. его книгу «Анизотропные пластинки», 2-е изд., М., 1957.

пластинки после ее изгиба¹⁾. На этом основании мы вправе воспользоваться нашими прежними выражениями компонентов деформации

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (b)$$

Соответствующие компоненты напряжений найдутся из уравнений (а)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -z \left(E'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -z \left(E'_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E'' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Этими выражениями для компонентов напряжений определяются и значения для изгибающих и крутящего моментов

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \, dz = - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \, dz = - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \, dz = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

где

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}, \quad D_y = \frac{E'_y h^3}{12}, \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12}, \quad D_{xy} = \frac{G h^3}{12}. \quad (d)$$

Подставив выражения (212) в дифференциальное уравнение равновесия (100), получим следующее уравнение для анизотропной пластинки:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q.$$

¹⁾ Влияние поперечного сдвига в случае анизотропии рассматривается в работе Гиркмана и Беера (Girkman K., Beer R., *Österr. Ingr.-Arch.*, т. 12, стр. 101, 1958).

Вводя обозначение

$$H = D_1 + 2D_{xy}, \quad (e)$$

получим

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q. \quad (213)$$

Соответствующие выражения для перерезывающих сил находим непосредственно из условий равновесия элемента пластинки (рис. 48) и ранее полученных выражений для моментов. Они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

В частном случае изотропии имеем

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad E'' = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} D_x = D_y &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \\ H = D_1 + 2D_{xy} &= \frac{h^3}{12} \left(\frac{\nu E}{1 - \nu^2} + \frac{E}{1 + \nu} \right) = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

и уравнение (213) сводится к ранее выведенному уравнению (103).

Уравнением (213) можно пользоваться при исследовании изгиба пластинки не только из неизотропного, но и из неоднородного материала, например железобетонных плит¹⁾, обладающих в двух взаимно перпендикулярных направлениях двумя различными жесткостями при изгибе.

86. Определенные жесткости в различных частных случаях. Приведенные в предыдущем параграфе выражения (d) для жесткостей подлежат незначительным видоизменениям в соответствии с природой используемого материала. В частности, все значения жесткости при кручении D_{xy} , основанные на чисто теоретических соображениях, следует рассматривать лишь как первые приближения, для получения же более достоверных значений модуля G нужно рекомендовать непосредственное испытание, подобное воспроизведенному на схеме рис. 25, с. Общепринятые значения жесткостей для некоторых случаев, представляющих практический интерес, приводятся ниже.

Железобетонные плиты. Пусть E_s — модуль Юнга для стали, E_c — для бетона, ν_c — коэффициент Пуассона для бетона, $\nu = E_s/E_c$. Исходя из упругих

¹⁾ Применением теории анизотропной пластинки к расчету железобетонных плит мы обязаны Губеру (M. T. Huber), опубликовавшему по этому вопросу ряд работ; см. Z. Österr. Ing. u. Archit. Ver., стр. 557, 1914. Важнейшие результаты собраны в его книгах: «Teorya Plyt», Львов, 1922, и «Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten», Варшава, 1929. Резюме его работ приведены в Comptes rendus, т. 170, стр. 511 и 1305, 1920, и т. 180, стр. 1243, 1925.

постоянных, введенных в § 85, получаем приближенно $\nu_c = E'' / \sqrt{E'_x E'_y}$. Для плиты, армированной в двух перекрестных направлениях x и y , можно принять

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} [I_{cx} + (n-1) I_{sx}], \\ D_y &= \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} [I_{cy} + (n-1) I_{sy}], \\ D_1 &= \nu_c \sqrt{D_x D_y}, \\ D_{xy} &= \frac{1 - \nu_c}{2} \sqrt{D_x D_y}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

В этих уравнениях I_{cx} — момент инерции материала плиты (здесь бетона), I_{sx} — момент инерции арматуры относительно нейтральной оси в сечении $x = \text{const}$, $-I_{cy}$ и I_{sy} — соответствующие значения для сечения $y = \text{const}$.

Из приведенного здесь (и рекомендованного Губером) выражения для D_{xy} получаем

$$H = \sqrt{D_x D_y}, \quad (b)$$

а также дифференциальное уравнение

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (c)$$

которое без труда приводится к виду (103) путем введения новой переменной $y_1 = y \sqrt{D_x / D_y}$.

Таблица 79

Упругие постоянные для фанеры
(в единицах 10^3 кг/см^2)

Материал	E'_x	E'_y	E''	σ
Фанера **) — кленовая 5-слойная .	131	42	5,1	11,1
Фанера *) из волокна афары (Афага) — 3-слойная	137	11,6	3	7,7
Габун *) (Окуме) (Gaboou, Окоштё) 3-слойный	90	7,7	1	6,0
Фанера **) — березовая 3- и 5-слойная	140	11,7	5,4	12
Фанера **) — березовая на бакелитовом клее	119	6,0	4,3	7

Источник:

*) Heaгmon R. F. S., Adams E. H., Brit. J. Appl. Phys., т. 3, стр. 155, 1952.

**) Лехницкий С. Г., Анизотропные пластинки, стр. 40, Москва, 1947.

Очевидно, что значения (а) зависят от состояния бетона. Например, различия в плотностях или характере армирования в направлениях x и y повлияют на отношение D_x/D_y значительно более резко после образования в бетоне трещин, чем в бетоне, еще сохранившем свою монолитность.

Фанера. Для пластинки, склеенной из трех или пяти слоев, причем ось x предполагается направленной параллельно волокнам наружного слоя, мы можем воспользоваться постоянными, приведенными в таблице 79.

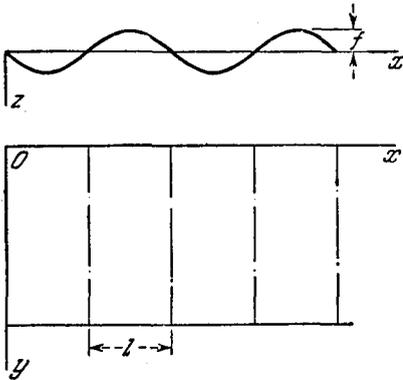


Рис. 186.

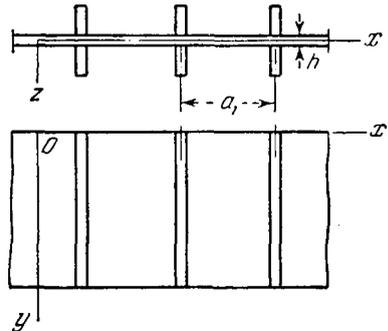


Рис. 187.

Гофрированный листовый материал. Пусть E и ν — упругие постоянные материала, h — его толщина,

$$z = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

— форма волны, s — длина дуги полуволны (рис. 186). Тогда ¹⁾

$$D_x = \frac{l}{s} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$D_y = EI,$$

$$D_1 \sim 0,$$

$$H = 2D_{xy} = \frac{s}{l} \frac{Eh^3}{12(1+\nu)},$$

где приближенно

$$s = l \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \right),$$

$$I = \frac{f^2 h}{2} \left[1 - \frac{0,81}{1 + 2,5 \left(\frac{f}{2l} \right)^2} \right].$$

Пластинка, армированная равностоящими параллельными элементами жесткости в одном направлении. Для пластинки, армированной симметрично относительно срединной плоскости, как это показано на рис. 187,

¹⁾ См. Seydel E., Ber. deut. Versuchsanstalt Luftfahrt, 1931.

можно принять ¹⁾

$$D_x = H = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'I}{a_1},$$

где E и ν — упругие постоянные материала, E' — модуль Юнга, I — момент инерции ребра жесткости относительно оси симметрии поперечного сечения пластинки.

Пластинка, перекрестно армированная двумя взаимно перпендикулярными системами равноотстоящих элементов жесткости. Полагая по-прежнему, что ребра симметричны относительно срединной плоскости пластинки, находим

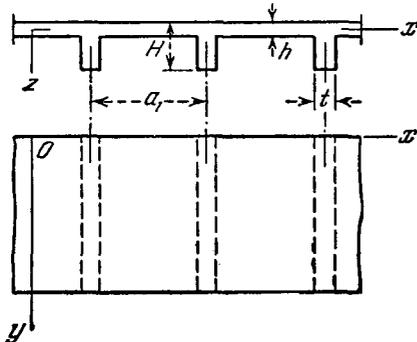


Рис. 188.

$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'I_1}{b_1},$$

$$D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'I_2}{a_1},$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Здесь I_1 — момент инерции ребра жесткости, b_1 — расстояние между ребрами в направлении x ; I_2 и a_1 — соответствующие значения для армирования в направлении y .

Плита, усиленная с одной стороны системой равноотстоящих ребер. Для случая, представленного схемой рис. 188, теория, изложенная в § 85, может дать только самое грубое приближенное представление о действительном напряженно деформированном состоянии плиты. Если E — модуль упругости материала (например, бетона), I — момент инерции таврового профиля с полкой шириной a_1 и $a = h/H$, то для жесткостей можно принять следующие значения:

$$D_x = \frac{Ea_1h^3}{12(a_1 - t + a^3t)},$$

$$D_y = \frac{EI}{a_1},$$

$$D_1 = 0.$$

¹⁾ Рекомендовано С. Г. Лехницким (цит. на стр. 405, 408). Более точные значения приводятся в работе Huffington N. I., J. Appl. Mech., т. 23, стр. 15, 1956. Экспериментальное определение жесткостей для ребристых и рифленых пластинок было выполнено Хоппманом, Хаффингтоном и Магнессом (Hoppmann W. H., Huffington N. I., Magness L. S., J. Appl. Mech., т. 23, стр. 343, 1956).

²⁾ Более точная теория ребристых плит, армированных в одном или в двух направлениях, приводящая к дифференциальному уравнению восьмого порядка для прогибов, излагается в работах: Trenks K., Bauingenieur, т. 29, стр. 372, 1954; Pflüger A., Ingr-Arch., т. 16, стр. 111, 1947.

Влиянием поперечной деформации сжатия во всех предыдущих формулах пренебрегается. Наконец, крутильная жесткость определяется из выражения

$$D_{xy} = D'_{xy} + \frac{C}{2a_1},$$

где D'_{xy} — крутильная жесткость плиты без ребер, а C — крутильная жесткость одного ребра ¹⁾.

87. Применение теории к расчету балочных сеток. Уравнение (213) применимо также и к решетчатой системе, изображенной на рис. 189. Она состоит из двух систем параллельных балок, отстоящих одна от другой на равных расстояниях (a_1) в направлении

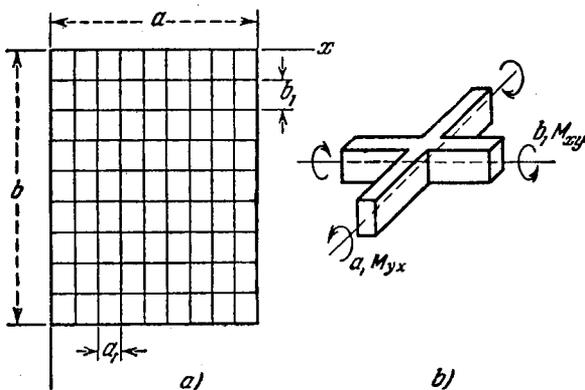


Рис. 189.

оси x и на равных расстояниях (b_1) в направлении оси y_1 и жестко сочлененных между собой в точках их пересечения. Балки оперты по концам, а нагрузка приложена нормально к плоскости xu . Если расстояния a_1 и b_1 между балками малы в сравнении с размерами a и b решетки и если жесткость при изгибе каждой из балок, параллельных оси x , равна B_1 , а каждой из балок, параллельных оси y , равна B_2 , то мы можем произвести в уравнении (213) следующие подстановки:

$$D_x = \frac{B_1}{b_1}, \quad D_y = \frac{B_2}{a_1}. \quad (a)$$

¹⁾ С более точной теорией плит, усиленных ребрами в одном или в двух направлениях, которая приводит к дифференциальному уравнению восьмого порядка для прогиба, можно ознакомиться в работе Trenks K., *Vaaingenieur*, т. 29, стр. 372, 154; см. также Pflüger A., *Ingr.-Arch.*, т. 16, стр. 111, 1947.

Величина D_1 в этом случае обращается в нуль, величину же D_{xy} можно выразить в функции от жесткостей при кручении C_1 и C_2 балок, параллельных соответственно осям x и y . С этой целью рассмотрим кручение элемента, изображенного на рис. 189, *b*. При этом мы получим следующие соотношения между крутящими моментами и кручением $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$:

$$M_{xy} = \frac{C_1}{b_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad M_{yx} = -\frac{C_2}{a_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (b)$$

Подставив эти выражения в уравнение равновесия (е) на стр. 98, найдем, что в случае системы, изображенной на рис. 189, *a*, дифференциальное уравнение изогнутой поверхности будет

$$\frac{B_1}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{C_1}{b_1} + \frac{C_2}{a_1} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{B_2}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (215)$$

т. е. того же самого вида, что и уравнение (213).

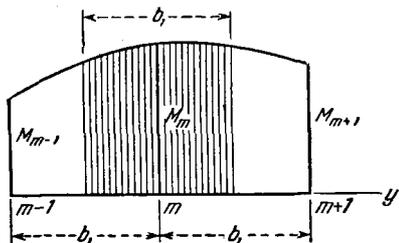


Рис. 190.

Для получения окончательных выражений изгибающих и крутящих моментов для ребер нам остается лишь значения, указываемые, например, уравнениями (212), где они отнесены к единице ширины сетки, умножить на расстояние между ребрами. Для закона распределения моментов, например M_x и M_{xy} , в интервале между точками $(m-1)$ и $(m+1)$ может быть принята парабола, а заштрихованную площадь эпюры (рис. 190) можно отнести к ребру (m) , уложенному в направлении x . Учитывая тогда выражения (212), получим следующие приближенные формулы для обоих моментов ребра (m) :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{B_1}{24} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m-1} + 22 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_m + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m+1} \right], \\ M_{xy} &= \frac{C_1}{24} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{m-1} + 22 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_m + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{m+1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Для ребер, уложенных в направлении y , сохраняют силу эти же формулы, если B_1 заменить в них на B_2 , C_1 на C_2 ; точки $(m-1)$, m , $(m+1)$ будут тогда обозначать три последовательных узла на ребре, параллельном оси x .

Двумя параметрами, в значительной мере определяющими упругие свойства сетки и часто используемыми в расчетах, являются

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{B_2 b_1}{B_1 a_1}}, \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{\frac{C_1}{b_1} + \frac{C_2}{a_1}}{\sqrt{\frac{B_1 B_2}{a_1 b_1}}}. \quad (d)$$

Параметр λ , умноженный на отношение сторон a/b (рис. 189), дает относительную несущую способность прямоугольной пластинки в направлениях y и x , между тем как параметр μ характеризует крутильную жесткость сетки в сопоставлении ее с изгибной жесткостью.

Уравнение (215) широко используется в исследовании распределения сосредоточенной нагрузки, приложенной в произвольной точке между главными балками моста, усиленного в поперечном направлении неразрезными балками жесткости настила ¹⁾.

88. Изгиб прямоугольной анизотропной пластинки. Если пластинка свободно оперта по всему контуру, то решение уравнения (213) может быть выполнено тем же методом, что и в случае изотропной пластинки. Применим метод Навье (см. § 28) и предположим, что пластинка загружена равномерно распределенной нагрузкой. Расположив оси координат, как показано на рис. 59, и представив нагрузку в виде двойного тригонометрического ряда, напишем для этого случая дифференциальное уравнение (213)

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{16q_0}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, может быть взято в виде двойного тригонометрического ряда

$$w = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

Подставив этот ряд в уравнение (9), находим следующее выражение для коэффициентов a_{mn} :

$$a_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6} \frac{1}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4}{b^4} D_y \right)}.$$

Поэтому решением уравнения (a) будет

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4}{b^4} D_y \right)}. \quad (c)$$

¹⁾ Коэффициенты, дающие распределение для сосредоточенной нагрузки, были вычислены для $\mu = 0$ Гуйоном (Guyon Y., Ann. ponts et chaussées, т. 116, стр. 553, 1946), и для $\mu \neq 0$ Массоне (Massonet C., Publs. Intern. Assoc. Bridge struct. engrs., т. 10, стр. 147, 1950). Подтверждение вычисленных результатов испытаниями см. Sattler K., Bauingenieur, т. 30, стр. 77, 1955, а также: Нагуока М., Yonezawa H., Publs Intern. assoc. bridge struct. engrs., т. 16, 1956. О косых сетках см. Woinowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 25, 350, 1957.

В случае изотропного материала $D_x = D_y = H = D$, и это решение совпадает с приведенными на стр. 000.

Остановимся на частном случае $H = \sqrt{D_x D_y}$, уже упомянутом на стр. 129. Сопоставляя выражение (с) с соответствующим выражением (131) для изотропной пластинки, убеждаемся, что прогиб в центре такой ортотропной пластинки с жесткостями D_x , D_y и со сторонами a , b получается таким же, что и для изотропной пластинки жесткостью D , со сторонами $a_0 = a \sqrt[4]{D/D_x}$ и $b_0 = b \sqrt[4]{D/D_y}$. Точно так же и кривизны ортотропной пластинки могут быть выражены через соответствующие характеристики некоторой изотропной пластинки. Полученные таким путем выражения для прогиба и изгибающих моментов ортотропной пластинки принимают вид

$$\left. \begin{aligned} w &= \alpha \frac{q_0 b^4}{D_y}, \\ M_x &= \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{E''}{E'_x} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \frac{q_0 a^2}{\epsilon}, \\ M_y &= \left(\beta_2 + \beta_1 \frac{E''}{E'_y} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right) q_0 b^2, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

где α , β_1 и β_2 — численные коэффициенты, приводимые в таблице¹⁾ 80, а

$$\epsilon = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}}. \quad (e)$$

В качестве второго примера рассмотрим бесконечно длинную пластинку (рис. 74) и предположим, что нагрузка распределена по оси x согласно закону синусоиды

$$q = q_0 \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (f)$$

Уравнение (213) для незагруженных участков пластинки принимает в этом случае вид

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (g)$$

¹⁾ Вычислены Губером (Huber M. T., Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten, стр. 74, Варшава, 1929). Численные данные, относящиеся к равномерно нагруженным прямоугольным пластинкам при различных условиях опирания и для различных коэффициентов жесткости кручения, имеются в работе Шаде (Schade H. A., Trans. soc. naval architects marine engrs., т. 49, стр. 154, 180, 1941).

Таблица 80

Постоянные α , β_1 и β_2 для свободно опертой прямоугольной ортотропной пластинки с $H = \sqrt{D_x D_y}$, входящие в уравнения (d) и (e) (рис. 59)

n	α	β_1	β_2	n	α	β_1	β_2
1	0,00407	0,0368	0,0368	1,8	0,00932	0,0214	0,0884
1,1	0,00488	0,0359	0,0447	1,9	0,00974	0,0191	0,0929
1,2	0,00565	0,0344	0,0524	2,0	0,01013	0,0174	0,0964
1,3	0,00639	0,0324	0,0597	2,5	0,01150	0,0099	0,1100
1,4	0,00709	0,0303	0,0665	3,0	0,01223	0,0055	0,1172
1,5	0,00772	0,0280	0,0728	4	0,01282	0,0015	0,1230
1,6	0,00831	0,0257	0,0785	5	0,01297	0,0004	0,1245
1,7	0,00884	0,0235	0,0837		0,01302	0	0,1250

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям на сторонах, параллельных оси y , можно принять в следующем виде:

$$w = Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (h)$$

где Y_m — функция одного лишь y . Подставив это в уравнение (k), получим следующее уравнение для определения функций Y_m :

$$D_y Y_m^{IV} - 2H \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{II} + D_x \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0. \quad (i)$$

Корни соответствующего характеристического уравнения

$$r_{1,2,3,4} = \pm \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{H}{D_y} \pm \sqrt{\frac{H^2}{D_y^2} - \frac{D_x}{D_y}}}. \quad (j)$$

Введя в соответствии с уравнением (d) § 87 обозначения

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}}, \quad \mu = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}, \quad (k)$$

нам нужно будет рассмотреть три следующих случая:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Случай 1, } \mu > 1: H^2 > D_x D_y, \\ \text{Случай 2, } \mu = 1: H^2 = D_x D_y, \\ \text{Случай 3, } \mu < 1: H^2 < D_x D_y. \end{array} \right\} \quad (l)$$

В первом случае все корни уравнения (j) — вещественные числа. Рассматривая часть пластинки с положительными значениями y и

заметив, что прогиб w и его производные на значительных расстояниях от точки приложения нагрузки должны исчезнуть, мы вправе удержать лишь отрицательные корни. Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a\lambda}{\pi} \sqrt{\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}}, \\ \beta &= \frac{a\lambda}{\pi} \sqrt{\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}}, \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

напишем интеграл уравнения (i) в виде

$$Y_m = A_m e^{-\frac{my}{\alpha}} + B_m e^{-\frac{my}{\beta}},$$

тогда выражение (h) можно будет представить таким образом:

$$w = \left(A_m e^{-\frac{my}{\alpha}} + B_m e^{-\frac{my}{\beta}} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Из симметрии заключаем, что на оси x

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0.$$

Отсюда находим

$$\left. \begin{aligned} B_m &= -\frac{\beta}{\alpha} A_m, \\ w &= A_m \left(e^{-\frac{my}{\alpha}} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\frac{my}{\beta}} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Коэффициент A_m определяем из условия, относящегося к перерезывающей силе Q_y на оси x , которое дает

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -\frac{q_0}{2} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

Подставив сюда вместо w его выражение (n), получим

$$A_m = \frac{q_0 \alpha^3 \rho^2}{2m^3 D_y (\alpha^2 - \beta^2)} = \frac{\alpha q_0 a^4}{2\pi^4 m^3 D_x (\alpha^2 - \beta^2)}.$$

Отсюда получаем выражение (n) для прогиба в окончательном виде

$$w = \frac{q_0 a^4}{2\pi^4 m^3 D_x (\alpha^2 - \beta^2)} \left(\alpha e^{-\frac{my}{\alpha}} - \beta e^{-\frac{my}{\beta}} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (o)$$

Во втором из трех подлежащих нашему рассмотрению случаев (l) характеристическое уравнение имеет два двойных корня и функция Y_m принимает тот же вид, что и в случае изотропной пластинки (§ 36).

В третьем из случаев (1) вводим обозначения

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{a\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1-\mu}}, \\ \beta' &= \frac{a\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1+\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

и получаем решение

$$w = \frac{q_0 a^2}{4\pi^2 m^3 \sqrt{D_x D_y}} \left(\alpha' \sin \frac{my}{a'} + \beta' \cos \frac{my}{a'} \right) e^{-\frac{mx}{\beta'}} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (q)$$

Переход от случая 1 к случаю 2 мы можем, таким образом, совершить с помощью комплексных соотношений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\beta'} - i \frac{1}{\alpha'}, \\ \frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\beta'} + i \frac{1}{\alpha'}. \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

Зная поверхность прогибов для синусоидальной нагрузки (f), можно получить прогибы и для любого иного типа загрузки по оси x , представив с этой целью нагрузку в виде ряда

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

и применив полученное для нагрузки (f) решение последовательно к каждому члену этого ряда. Нижеследующие выражения получаются, например, если нагрузка P сосредоточена в точке $x = \xi$, $y = 0$ бесконечной полосы (рис. 72):

Случай 1, $\mu > 1$:

$$w = \frac{Pa^3}{\pi^4 D_x} \frac{1}{a^2 - \beta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha e^{-\frac{my}{a}} - \beta e^{-\frac{my}{\beta}} \right) \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (s)$$

Случай 2, $\mu = 1$:

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D_x \lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(1 + \frac{m\pi y}{a\lambda} \right) e^{-\frac{my}{\beta'}} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (t)$$

Случай 3, $\mu < 1$:

$$w = \frac{Pa}{2\pi^2 \sqrt{D_x D_y}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\alpha' \sin \frac{my}{a'} + \beta' \cos \frac{my}{a'} \right) e^{-\frac{my}{\beta'}} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (u)$$

Подобно тому, как это было сделано в отношении изотропной пластинки (§ 35), мы и здесь при загрузении сосредоточенной силой

можем получить выражения изгибающих моментов в замкнутой форме¹⁾.

Наличие такого решения дает возможность найти прогиб также при распределении нагрузки по площади круга, выполнив для этого интегрирование, как было показано в применении к изотропной пластинке (§ 35). Метод же отражений позволяет и здесь решение, обоснованное для бесконечно длинной пластинки, перенести в области исследования пластинки конечных размеров²⁾.

89. Изгиб круглой и эллиптической пластинок. Простое решение уравнения (213) может быть получено для случая эллиптической пластинки, защемленной³⁾ по контуру и несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q . Если главные направления x и y ортогонального материала параллельны главным осям эллипса (рис. 157), то выражение

$$w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2, \quad (a)$$

в котором

$$w_0 = \frac{q}{\frac{24D_x}{a^4} + \frac{16H}{a^2b^2} + \frac{24D_y}{b^4}}, \quad (b)$$

удовлетворяет уравнению (213) и требуемым условиям на контуре. Изгибающие моменты пластинки определяются непосредственно из выражений (212). В частном случае защемленной круглой пластинки ($a = b$) получаем следующие результаты:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q(a^2 - r^2)^2}{64D'}, \\ M_x &= \frac{q}{16D'} [(D_x + D_1)(a^2 - r^2) - 2(D_x x^2 + D_1 y^2)], \\ M_y &= \frac{q}{16D'} [(D_y + D_1)(a^2 - r^2) - 2(D_y y^2 + D_1 x^2)], \\ M_{xy} &= \frac{q}{4D'} D_{xy} xy, \\ Q_x &= -\frac{qx}{8D'} (3D_x + H), \\ Q_y &= -\frac{qy}{8D'} (3D_y + H), \end{aligned} \right\} (c)$$

¹⁾ См. Nowacki W., Acta techn. acad. sci. Hung., т. 8, стр. 109, 1954; Wołnowsky-Krieger S., Ingr.-Arch., т. 25, стр. 90, 1957. Численные результаты, относящиеся к поверхностям влияния для ортогональных прямоугольных пластинок, можно найти в работах: Olsen H., Reinitzhuber F., Die zweiseitig gelagerte Platte, Берлин, 1950, и Homberg H., Weinmeister J., Einflüßflächen für Kreuzwerke, 2-е изд., Берлин, 1956.

²⁾ Несколько примеров этого типа разработано в книгах Губера: Huber M. T., Teorya plyt., Львов, 1922, и Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten, Варшава, 1929.

³⁾ Изгиб свободно опертой эллиптической пластинки излагается в работе Ohasl Y., Z. angew. Math. Phys., т. 3, стр. 212, 1952.

где

$$r + \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad D' = \frac{1}{8} (3D_x + 2H + 3D_y).$$

Поскольку кручение по контуру отсутствует, опорные реакции находятся как линейные полиномы контурных значений перерезывающих сил Q_x и Q_y (см. стр. 105).

Непосредственное решение осуществимо также и в случае чистого изгиба или чистого кручения ортотропной пластинки. Подвергнем такую пластинку равномерному воздействию пар $M_x = M_1$, $M_y = M_2$ и $M_{xy} = M_3$. Представив прогиб в виде

$$w = Ax^2 + Bxy + Cy^2, \quad (d)$$

мы, очевидно, удовлетворим дифференциальному уравнению (213). Тогда постоянные A , B , C будут найдены из линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} D_x A + D_y C &= -\frac{1}{2} M_1, \\ D_x A + D_y C &= -\frac{1}{2} M_2, \\ D_{xy} B &= \frac{1}{2} M_3, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

являющихся следствиями из выражений (212).

Изучен также и изгиб круглой пластинки с цилиндрической аэлотропией¹⁾. Если в дополнение к свойству упругой симметрии заданное распределение нагрузки обладает еще и симметрией относительно центра пластинки, то в обыкновенное дифференциальное уравнение изогнутой пластинки войдут лишь два значения изгибной жесткости — радиальное и тангенциальное. Формальные решения этого уравнения для любых граничных условий получить нетрудно; но выбор упругих постоянных для материала потребует особой тщательности, поскольку некоторые допущения в отношении этих постоянных приводят к появлению бесконечно больших значений для изгибающих моментов в центре пластинки, даже и при сплошном распределении нагрузки.

Большая часть специальных методов, находящих применение в решении задач изгиба изотропной пластинки (глава X), с некоторыми видоизменениями может принести пользу и в случае анизотропии.

Если, например, обратиться к методу комплексных переменных²⁾, то форма решения, как обнаруживает опыт, получается отличной от той, с которой мы имели дело в § 79. Как можно показать, она зависит от корней ρ_1 , ρ_2 , $-\rho_1$ и $-\rho_2$ характеристического уравнения

$$D_y \rho^4 + 2H\rho^2 + D_x = 0,$$

¹⁾ Carrier G. F., J. Appl. Mech., т. 11, стр. A-129, 1944, а также С. Г. Лехницкий (цит. на стр. 405).

²⁾ См. Лехницкий С. Г., Прикл. мат. мех., т. 2, стр. 181, 1938, и Morcovin V., Quart. Appl. Math., т. 1, стр. 116, 1943. О применении метода к задаче о концентрации напряжений см. Савин Г. Н., Концентрация напряжений вокруг отверстий, Москва, 1951, и Лехницкий С. Г., Инженерный сборник, т. 17, стр. 3, 1953. Концентрация напряжений в изотропных и анизотропных пластинках рассматривается также в работе Хольгэйта (Holgate S., Proc. Roy. Soc. London, т. 185A, стр. 35, 56, 1946).

являющихся либо мнимыми, либо комплексными числами. По определении этих корней решение однородного уравнения

$$D_x \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = 0$$

можно будет представить либо в виде

$$w_1 = \Re [\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)],$$

если $\rho_1 \neq \rho_2$, либо в виде

$$w_1 = \Re [\varphi_1(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2(z_1)],$$

если $\rho_1 = \rho_2$. В этих выражениях φ_1 и φ_2 — произвольные аналитические функции комплексных переменных $z_1 = x + \rho_1 y$ и $z_2 = x + \rho_2 y$. Если прибегнуть к методу Ритца, то выражение (b) § 80 для энергии деформации потребует замены выражением

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

в основном же процедура вычисления остается той же, что и в случае изотропной пластинки.

ГЛАВА XII
**ИЗГИБ ПЛАСТИНКИ ПОД СОВМЕСТНЫМ ДЕЙСТВИЕМ
 ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК И СИЛ
 В ЕЕ СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ**

90. Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности.
 В предшествующем изложении всюду предполагалось, что пластинка изгибается одними лишь поперечными нагрузками. Если кроме поперечных нагрузок в условиях задачи имеются еще и силы, действующие в срединной плоскости пластинки, то эти последние силы могут оказать значительное влияние на изгиб пластинки, и потому при выводе дифференциального уравнения изогнутой поверхности их необходимо принять в расчет. Поступая, как и в случае поперечной нагрузки (см. § 21, стр. 96), рассмотрим равновесие малого элемента, вырезанного из пластинки двумя парами плоскостей, параллельных координатным плоскостям xz и yz (рис. 191). В отличие, однако, от случая, рассмотренного в § 21, у нас теперь будут еще и силы, действующие в срединной плоскости пластинки. Обозначим величину этих сил по отношению их к единице длины через N_x , N_y и $N_{xy} = N_{yx}$, как показано на чертеже. Проектируя эти силы на оси x и y и полагая, что объемных сил, а равно и касательных сил в этих направлениях по граням пластинки нет, получим следующие уравнения равновесия:

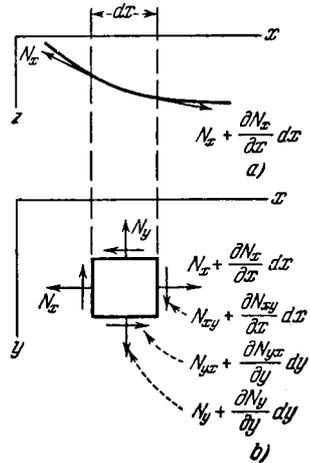


Рис. 191.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (216)$$

Эти уравнения совершенно независимы от трех уравнений равновесия, рассмотренных в § 21, и потому, как будет показано в § 92, ими можно оперировать также независимо,

Рассматривая проекцию показанных на рис. 191 сил на ось z , мы должны учесть, что пластинка изгибается и что в результате этого изгиба между направлениями сил N_x , действующих на противоположные грани элемента, равно как и между направлениями сил N_y , образуются малые углы. Вследствие этого изгиба проекция нормальных сил N_x на ось z дает

$$-N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy.$$

После упрощения, если пренебречь малыми величинами выше второго порядка малости, эта проекция получает такое выражение:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \quad (a)$$

Точно таким же образом проекция нормальных сил N_y на ось z дает

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy. \quad (b)$$

Что касается проекции перерезывающих сил N_{xy} на ось z , то заметим, что наклон изогнутой поверхности в направлении y на двух противоположных гранях элемента выразится производными: $\partial w / \partial y$ по одной грани и $(\partial w / \partial y) + (\partial^2 w / \partial x \partial y) dx$ по другой грани. Поэтому проекция перерезывающих сил на ось z будет равна

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy.$$

Аналогичное выражение может быть получено и для проекции на ось z перерезывающих сил $N_{yx} = N_{xy}$. Окончательное выражение для проекции всех перерезывающих сил на ось z может быть в таком случае написано в следующем виде:

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy. \quad (c)$$

Складывая силы (a), (b) и (c) с действующей на элемент нагрузкой $q dx dy$ и пользуясь уравнениями (216), мы получим вместо уравнения (100) (стр. 98) следующее уравнение равновесия:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Подставляя сюда вместо M_x , M_y и M_{xy} выражения (101) и (102), получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (217)$$

Этим уравнением следует пользоваться вместо уравнения (103) при определении прогиба пластинки, если кроме поперечных нагрузок она подвергается еще и действию сил в ее срединной плоскости.

Если в срединной плоскости пластинки действуют, сверх того, еще и объемные силы ¹⁾ или же если по ее поверхности распределены касательные силы, то дифференциальные уравнения равновесия элемента, показанного на рис. 191, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

Здесь X и Y обозначают два компонента объемных или касательных сил, приходящихся на единицу площади срединной поверхности пластинки.

Если вместо уравнений (216) мы применим уравнения (218), то для изогнутой поверхности у нас получится следующее дифференциальное уравнение ²⁾:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X \frac{\partial w}{\partial x} - Y \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (219)$$

Уравнения (217) и (219) вместе с условиями на краях (см. § 22, стр. 100) определяют прогиб пластинки, нагруженной поперечно и подвергающейся, кроме того, действию сил, лежащих в ее срединной плоскости.

91. Прямоугольная свободно опертая пластинка под совместным действием равномерно распределенной поперечной нагрузки и равномерного растяжения. Положим, что пластинка подвергается, как показано на рис. 192, равномерному растяжению в направлении x . Равномерную поперечную нагрузку q можно представить тригонометрическим рядом (см. стр. 128)

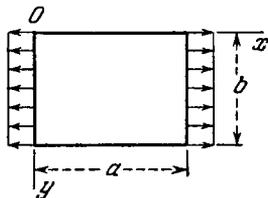


Рис. 192.

$$q = \frac{16q}{\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

¹⁾ Примером объемной силы, действующей в срединной плоскости пластинки, может служить сила тяжести в случае вертикального положения пластинки.

²⁾ Это дифференциальное уравнение было выведено Сен-Венаном; см. заключительное примечание 73 в его переводе книги Клебша «Théorie de l'élasticité des corps solides», стр. 704, 1883.

Поэтому уравнение (217) принимает вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{16q}{D\pi^2} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

Это уравнение, а также граничные условия на свободно опертых краях, будут удовлетворены, если мы примем прогиб w в виде ряда

$$w = \sum \sum a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (c)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (b), найдем для коэффициентов a_{mn} следующие значения:

$$a_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} \right]}, \quad (d)$$

где m и n — нечетные числа $1, 3, 5, \dots$; $a_{mn} = 0$, если m или n или оба они оказываются четными числами. Таким образом, изогнутая поверхность пластинки выразится уравнением

$$w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{N_x m^2}{\pi^2 D a^2} \right]} \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (e)$$

Сравнивая этот результат с решением (131) (стр. 129), мы на основании присутствия члена $N_x m^2 / \pi^2 D a^2$ в скобках знаменателя приходим к заключению, что под действием растягивающих сил N_x прогиб пластинки, как это и следовало ожидать, несколько уменьшается.

Воспользовавшись методом Леви (см. § 30), можно получить решение в виде простого ряда, эквивалентное выражению (e), но более удобное для вычислений. Найденные этим путем¹⁾ максимальные значения прогиба и изгибающих моментов при $\nu = 0,3$ имеют следующий вид:

$$w_{\max} = \alpha \frac{qb^4}{Eh^3}, \quad (M_x)_{\max} = \beta q b^2, \quad (M_y)_{\max} = \beta_1 q b^2. \quad (f)$$

¹⁾ Conway H. D., J. Appl. Mech., т. 16, стр. 301, 1949, где приводятся сравнительные графики; случай $N_x = N_y$ рассматривается в работе Morse R. F., Conway H. D., J. Appl. Mech., т. 18, стр. 209, 1951, а случай пластинки, защемленной по всему контуру: Chang C. S., Conway H. D., J. Appl. Mech., т. 19, стр. 179, 1952. О совместном действии изгиба и сжатия см. Lockwood Taylor J., The shipbuilder, Marine Engine Builder, № 494, стр. 15, 1950.

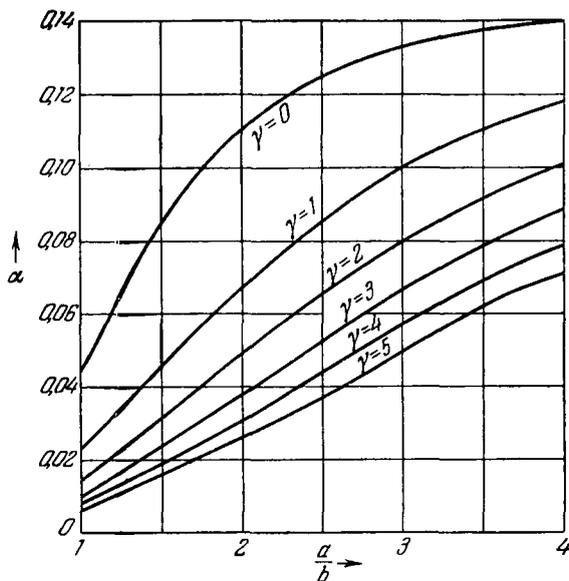


Рис. 193.

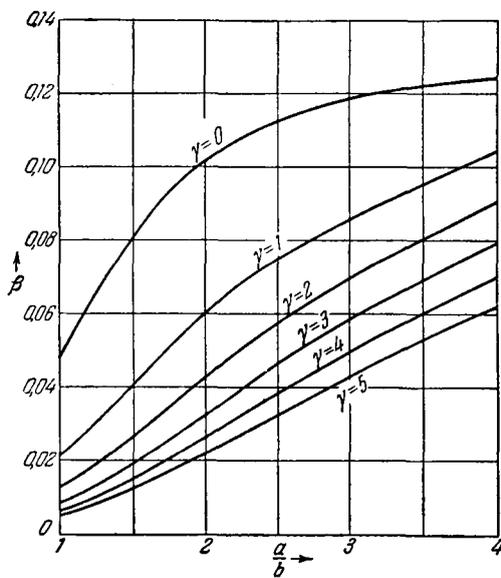


Рис. 194.

$$\gamma = \frac{N_x b^2}{4\pi^2 D},$$

нанесены на рис. 193, 194 и 195.

Если вместо растяжения у нас имеется сжатие, сила N_x становится отрицательной и прогибы (e) получаются ббльшими, чем в пластинке, изогнутой одной лишь поперечной нагрузкой. При некоторых

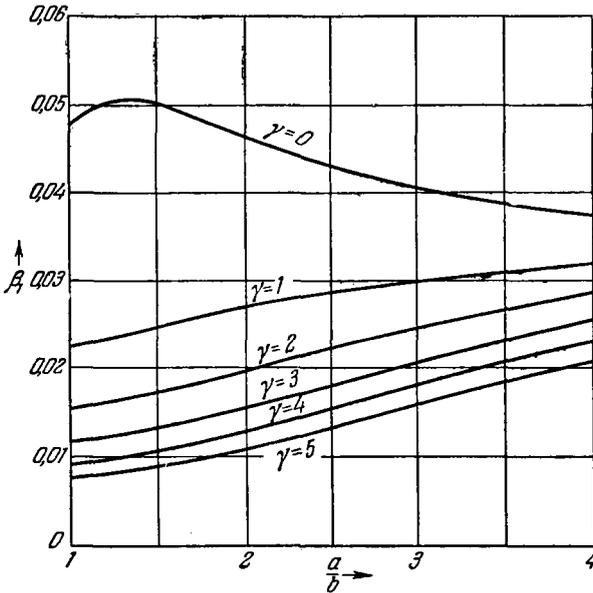


Рис. 195.

значениях сжимающей силы N_x знаменатель одного из членов ряда (е) может в этом случае обратиться в нуль, и это указывает на то, что при таких значениях N_x пластинка без всякой поперечной нагрузки может потерять в поперечном направлении устойчивость.

92. Применение энергетического метода. Энергетический метод, примененный нами ранее при исследовании изгиба пластинки поперечной нагрузкой (см. § 80, стр. 380), может быть также использован и в тех случаях, когда поперечная нагрузка сочетается с силами, действующими в срединной плоскости пластинки. Чтобы вывести выражение для энергии деформации, соответствующей этим последним силам, положим, что силы эти приложены сначала к неизогнутой пластинке. Таким путем мы придем к плоской задаче, допускающей

трактовку методами теории упругости¹⁾. Допустив, что эта задача решена и что силы N_x , N_y и N_{xy} известны в каждой точке пластинки, мы получим вместе с тем и компоненты деформации срединной плоскости пластинки из известных формул, выражающих закон Гука, а именно

$$\epsilon_x = \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{hE} (N_y - \nu N_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{N_{xy}}{hG}; \quad (a)$$

и тогда энергия деформации, обусловленная растяжением срединной плоскости пластинки, будет равна

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \int \int (N_x \epsilon_x + N_y \epsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = \\ &= \frac{1}{2hE} \int \int [N_x^2 + N_y^2 - 2\nu N_x N_y + 2(1 + \nu) N_{xy}^2] dx dy, \quad (220) \end{aligned}$$

где интегрирование распространяется по всей пластинке.

Приложим теперь поперечную нагрузку. Она изогнет пластинку и вызовет дополнительную деформацию срединной плоскости. До сих пор во всех наших исследованиях изгиба пластинок мы этим последним видом деформации всегда пренебрегали. Здесь, однако, мы обязаны принять ее во внимание, ибо эта малая деформация в сочетании с конечными силами N_x , N_y , N_{xy} может внести в выражение энергии деформации некоторые члены того же порядка малости, что и энергия деформации изгиба. Обозначим соответственно через u , v и w компоненты по осям x , y и z малого смещения, испытываемого при изгибе произвольной точкой срединной плоскости пластинки. Рассматривая линейный элемент AB , лежащий в этой плоскости в направлении x , мы можем заметить из рис. 196, что удлинение элемента, обусловленное смещением u , будет равно $(\partial u / \partial x) dx$, как в этом можно удостовериться из сравнения длины элемента $A_1 B_1$ на рис. 196 с длиной его проекции на ось x . Поэтому полное относительное удлинение в направлении x элемента, расположенного в срединной плоскости пластинки, будет равно

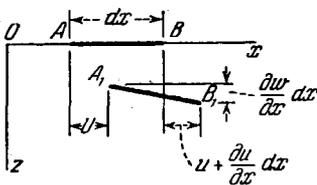


Рис. 196.

$$\epsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (221)$$

¹⁾ См., например, Тимошенко С. П., Теория упругости, стр. 170, М., ОНТИ, 1937, а также Timoshenko S., Goodier J. N., Theory of elasticity, 2-е изд., стр. 11, 1951.

Подобным же образом деформация в направлении оси y выразится суммой

$$\epsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (222)$$

Рассматривая теперь вызванную изгибом деформацию сдвига в срединной плоскости, мы приходим, как и раньше (см. рис. 23), к выводу, что деформация сдвига, обусловленная смещениями u и v , будет равна $(\partial u/\partial y) + (\partial v/\partial x)$.

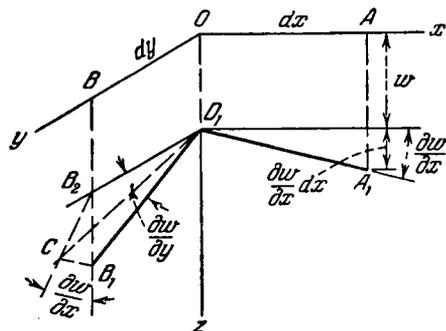


Рис. 197.

Чтобы определить деформацию сдвига, вызванную смещением w , возьмем, как показано на рис. 197, два бесконечно малых линейных элемента OA и OB в направлениях x и y . Вследствие смещений в направлении z эти элементы займут положение O_1A_1 и O_1B_1 . Разность между углом $\pi/2$ и углом $A_1O_1B_1$ представит собой деформацию сдвига, соответствующую смещению w .

Чтобы найти эту разность, рассмотрим прямой угол $B_2O_1A_1$, в котором B_2O_1 параллельна BO . Повернув плоскость $B_2O_1A_1$ вокруг O_1A_1 на угол $\partial w/\partial y$, мы совместим ее с плоскостью $B_1O_1A_1$, точку же B_2 совместим с C . Смещение B_2C равно $(\partial w/\partial y) dy$ и наклонено к вертикали B_2B_1 , образуя с ней угол $\partial w/\partial x$. Поэтому B_1C равно $(\partial w/\partial x) (\partial w/\partial y) dy$, и угол CO_1B_1 , представляющий собой связанную со смещением w деформацию сдвига, равен $(\partial w/\partial x) (\partial w/\partial y)$. Прибавляя эту деформацию сдвига к деформации, вызванной смещениями u и v , получим

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (223)$$

Формулы (221), (222) и (223) дают значения компонентов дополнительной деформации в срединной плоскости пластинки, обусловленной малыми прогибами. Считая их весьма малыми в сравнении с компонентами ϵ_x , ϵ_y и γ_{xy} , принятыми нами во внимание при выводе выражения (220), мы вправе допустить, что силы N_x , N_y , N_{xy} остаются при изгибе неизменными. При таком допущении добавочная энергия деформации пластинки, обусловленная деформацией ее

¹⁾ Углы $\partial w/\partial y$ и $\partial w/\partial x$ соответствуют малым прогибам пластинки и рассматриваются как малые величины.

срединной плоскости в связи с изгибом, выразится интегралом

$$V_2 = \iint (N_x \epsilon'_x + N_y \epsilon'_y + N_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy.$$

Подставляя сюда вместо ϵ'_x , ϵ'_y , γ'_{xy} их выражения (221), (222) и (223), получим окончательно

$$V_2 = \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy + \\ + \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (224)$$

Интегрируя по частям, мы убедимся, что первый интеграл в правой части выражения (224) представляет собой работу, произведенную при изгибе силами, действующими в срединной плоскости пластинки. Взяв, например, прямоугольную пластинку и направив оси координат, как показано на рис. 192, получим для первого члена интеграла

$$\int_0^b \int_0^a N_x \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \int_0^b |N_x u|_0^a dy - \int_0^b \int_0^a u \frac{\partial N_x}{\partial x} dx dy.$$

Поступив точно таким же образом с остальными членами первого интеграла в выражении (224), найдем окончательно

$$\int_0^b \int_0^a \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy = \\ = \int_0^b (|N_x u|_0^a + |N_{xy} v|_0^a) dy + \int_0^a (|N_y v|_0^b + |N_{xy} u|_0^b) dx - \\ - \int_0^b \int_0^a u \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) dx dy - \int_0^b \int_0^a v \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) dx dy.$$

Первый интеграл в правой части этого выражения равен, очевидно, работе, произведенной при изгибе силами, приложенными на краях $x=0$ и $y=a$ пластинки. Аналогичным образом второй интеграл выражает работу сил, приложенных на краях $y=0$ и $x=b$. Два остальных интеграла в силу уравнений (218) равны работе, произведенной при изгибе объемными силами, действующими в срединной плоскости. Каждый из этих интегралов обращается в нуль в случае отсутствия соответствующих сил.

Складывая значения энергии, выраженные формулами (220) и (224), с энергией изгиба [см. уравнения (117), стр. 106], мы получим полную энергию деформации изогнутой пластинки под совместным действием поперечных нагрузок и сил, расположенных в срединной плоскости

пластинки. Эта энергия деформации равна работе T_v , произведенной поперечной нагрузкой при изгибе пластинки, плюс работе T_h , произведенной силами, лежащими в срединной плоскости пластинки. Заметив, что эта последняя работа равна энергии деформации V_1 , сложенной с энергией деформации, представленной первым интегралом выражения (224), заключаем, что работа, произведенная поперечными силами, равна

$$T_v = \frac{1}{2} \int \int \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \\ + \frac{D}{2} \int \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (225)$$

Применив теперь принцип виртуальных перемещений, сообщим прогибу w приращение δw , и тогда уравнение (225) даст нам

$$\delta T_v = \frac{1}{2} \delta \int \int \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \\ + \frac{D}{2} \delta \int \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (226)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой работу, произведенную на виртуальном перемещении поперечной нагрузкой, правая же выражает приращение энергии деформации пластинки. Применение этого уравнения будет иллюстрировано на нескольких примерах в следующем параграфе.

93. Свободно опертая прямоугольная пластинка под совместным действием поперечных нагрузок и сил в ее срединной плоскости. Начнем со случая прямоугольной пластинки, равномерно растянутой в направлении x (рис. 192) и несущей сосредоточенный груз P^z в точке с координатами ξ и η . Общее выражение прогиба, удовлетворяющее граничным условиям, будет

$$w = \sum_{m=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 2, 3, \dots}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

Чтобы получить коэффициенты a_{mn} для этого ряда, воспользуемся общим уравнением (226). Поскольку в нашем случае $N_y = N_{xy} = 0$, первый интеграл в правой части уравнения (225) после подстановки в него ряда (a) вместо w выразится рядом

$$\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{ab}{8} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a}. \quad (b)$$

Энергия деформации изгиба, представленная в уравнении (225) вторым интегралом, равна [см. уравнение (d), стр. 381]

$$V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (c)$$

Чтобы получить виртуальный прогиб δw , сообщим коэффициенту $a_{m_1 n_1}$ приращение $\delta a_{m_1 n_1}$. Соответствующий прогиб пластинки будет

$$\delta w = \delta a_{m_1 n_1} \sin \frac{m_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_1 \pi y}{b}.$$

Работа, которую произведет поперечная нагрузка P на этом виртуальном перемещении, выразится произведением

$$P \delta a_{m_1 n_1} \sin \frac{m_1 \pi \xi}{a} \sin \frac{n_1 \pi \eta}{b}. \quad (d)$$

Соответствующее приращение энергии деформации будет состоять из двух членов, а именно

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \delta \int_0^a \int_0^b N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = \\ = \frac{ab}{8} N_x \frac{\partial}{\partial a_{m_1 n_1}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \delta a_{m_1 n_1} = \\ = \frac{ab}{4} N_x a_{m_1 n_1} \frac{m_1^2 \pi^2}{a^2} \delta a_{m_1 n_1} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

и

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial a_{m_1 n_1}} \delta a_{m_1 n_1} = \frac{\pi^4 ab}{4} D a_{m_1 n_1} \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{b^2} \right)^2 \delta a_{m_1 n_1}.$$

Подставив выражения (d) и (e) в уравнение (226), получим

$$\begin{aligned} P \delta a_{m_1 n_1} \sin \frac{m_1 \pi \xi}{a} \sin \frac{n_1 \pi \eta}{b} = \\ = \frac{ab}{4} N_x a_{m_1 n_1} \frac{m_1^2 \pi^2}{a^2} \delta a_{m_1 n_1} + \frac{\pi^4 ab}{4} D a_{m_1 n_1} \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{b^2} \right)^2 \delta a_{m_1 n_1}, \end{aligned}$$

откуда

$$a_{m_1 n_1} = \frac{4P \sin \frac{m_1 \pi \xi}{a} \sin \frac{n_1 \pi \eta}{b}}{ab \pi^4 D \left[\left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{b^2} \right)^2 + \frac{m_1^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} \right]}. \quad (f)$$

Подставив эти значения коэффициентов $a_{m,n}$ в выражение (а), найдем, что прогиб пластинки равен

$$w = \frac{4P}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (g)$$

Если вместо растягивающих сил N_x у нас имеются сжимающие силы той же величины, то прогиб пластинки получится путем подстановки $-N_x$ вместо N_x в выражение (g). Эта подстановка дает

$$w = \frac{4P}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (h)$$

Наименьшее значение N_x , при котором знаменатель одного из членов в выражении (h) обращается в нуль, называется *критическим*

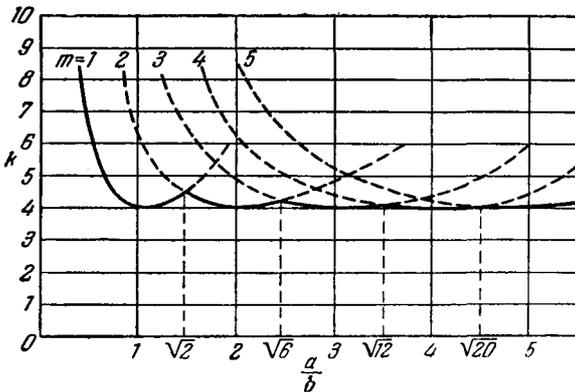


Рис. 198.

значением сжимающей силы N_x . Очевидно, эта критическая сила получится, если положить $n = 1$. Поэтому

$$(N_x)_{кр} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb}\right)^2, \quad (227)$$

где m должна быть подобрана таким образом, чтобы выражение (227) приняло минимальное значение. Нанося на график значения величины

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb}\right)^2,$$

как функции отношения a/b для различных целых значений m , мы получим сетку кривых, показанных на рис. 198. Те участки этих

кривых, которыми следует пользоваться для определения k , показаны сплошными линиями. Мы видим, что коэффициент k равен 4 для квадратной пластинки, равно как и для всякой пластинки, которую можно разбить на целое число квадратов со стороной b . Из чертежа можно заметить, что для длинных пластинок k остается практически постоянным и равным 4¹⁾. Поскольку значение m в уравнении (227) для продолговатых пластинок может отличаться от 1, такие пластинки, будучи подвергнуты действию поперечной нагрузки в сочетании с сжимающими силами, как общее правило, не прогибаются²⁾ по полуволне в направлении длинной стороны пластинки. Если, например, $a/b = 2, 4, \dots$, изогнутая поверхность принимает ясно выраженную асимметричную форму относительно средней линии $x = a/2$ (рис. 192), в особенности для значений N_x , близких к критическому значению $(N_x)_{\text{крит}}$.

Пользуясь выражением (g) для прогиба, произведенного одним сосредоточенным грузом, мы можем путем наложения получить прогиб и от любой поперечной нагрузки. Положив, например, что пластинка загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , мы подставляем в выражение (g) произведение $q d\xi d\eta$ вместо P и интегрируем его по всей площади пластинки. Таким путем мы получим то же выражение для прогиба пластинки под равномерно распределенной нагрузкой, что и выведенное нами другим способом раньше (см. стр. 423).

Если пластинка, нагруженная поперечной силой P , в то же время сжата в срединной плоскости равномерно распределенными силами N_x и N_y , то, поступая, как раньше, получим

$$\omega = \frac{4P}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} - \frac{n^2 N_y}{\pi^2 b^2 D}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (i)$$

Критические значения сил N_x и N_y определяются из условия³⁾

$$\frac{m^2 (N_x)_{\text{кр}}}{\pi^2 a^2 D} + \frac{n^2 (N_y)_{\text{кр}}}{\pi^2 b^2 D} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2, \quad (j)$$

где m и n подбираются таким образом, чтобы N_x и N_y принимали минимальные значения при любой заданной величине отношения между ними $N_x : N_y$. В случае квадратной пластинки, подвергнутой действию равномерного давления в срединной плоскости пластинки, мы

¹⁾ Более подробно этот вопрос рассмотрен в книге Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, стр. 290, 296 и след., Гостехиздат, 1955.

²⁾ Несколько примеров подобной деформации рассматривается у К. Гиркманна (Stahlbau, т. 15, стр. 57, 1942).

³⁾ Полное исследование этой задачи приводится С. П. Тимошенко в книге «Устойчивость упругих систем», стр. 290, Гостехиздат, 1955.

будем иметь $a = b$ и $N_x = N_y = p$. Уравнение (j) дает тогда

$$p_{кр} = \frac{\pi^2 D}{a^2} (m^2 + n^2)_{\min}. \quad (k)$$

Критическое значение p определится, если положить $m = n = 1$, что дает

$$p_{кр} = \frac{2\pi^2 D}{a^2}. \quad (228)$$

В случае пластинки, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника, подвергающейся выпучиванию при свободном опирании по краям (рис. 161), изогнутая поверхность пластинки, удовлетворяющая всем граничным условиям, будет иметь вид¹⁾

$$w = a \left(\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right).$$

Критическое же значение напряжения сжатия получится после подстановки в выражение (k) значений $m = 1$ и $n = 2$ или $m = 2$, $n = 1$. Это дает

$$p_{кр} = \frac{5\pi^2 D}{a^2}. \quad (229)$$

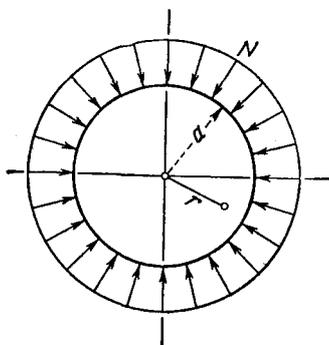


Рис. 199.

94. Круглая пластинка при совместном действии поперечной нагрузки и растяжения или сжатия. Рассмотрим круглую пластинку (рис. 199), подвергающуюся одновременному воздействию симметрично приложенной поперечной нагрузки и равномерного сжатия силами $N_r = N_t = N$ в срединной плоскости. В результате угловой деформации φ , сопутствующей изгибу (рис. 27), радиальная сжимающая сила N получит поперечный компонент $N d\varphi/dr$, который нужно будет прибавить к перерезывающей силе Q (рис. 28), представляющей эффект поперечного закружения. Дифференциальное уравнение (54)

потому будет иметь вид

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \left(\frac{k^2}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \varphi = -\frac{Q}{D}, \quad (a)$$

где

$$k^2 = \frac{Na^2}{D}. \quad (b)$$

При отсутствии в пластинке отверстия²⁾ решением уравнения (a) будет

$$\varphi = C_1 J_1 \left(\frac{kr}{a} \right) + \varphi_0, \quad (c)$$

¹⁾ Это — форма собственных колебаний квадратной пластинки, диагональ которой является узловой линией.

²⁾ При наличии концентрического отверстия к выражению (c) присоединяется член, пропорциональный функции Бесселя второго рода. При этом внутренний контур следует нагрузить тем же давлением N , что и внешний контур — в противном случае задача осложняется в связи с непостоянством напряжений N_r и N_t .

где J_1 — бesselева функция первого порядка, φ_0 — частное решение уравнения (а), зависящее от Q , а C_1 — постоянная, определяемая граничными условиями пластинки.

Для жестко заземленной пластинки ¹⁾, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q , частным решением будет

$$\varphi_0 = -\frac{qra^2}{2k^2D} = -\frac{qr}{2N},$$

откуда, следовательно,

$$\varphi = \frac{d\psi}{dr} = C_1 J_1\left(\frac{kr}{a}\right) - \frac{qr}{2N}. \quad (d)$$

Интегрируя находим

$$\psi = \frac{C_1 a}{k} J_0\left(\frac{kr}{a}\right) - \frac{qr^2}{4N} + C_2, \quad (e)$$

где J_0 — бesselева функция нулевого порядка, C_2 — вторая постоянная. Определив C_1 из условия $\varphi = 0$ на $r = a$ и C_2 из условия $\psi = 0$ на $r = a$, приходим к окончательному решению ²⁾:

$$\psi = \frac{qa^4 \left[J_0\left(\frac{kr}{a}\right) - J_0(k) \right]}{2k^3 J_1(k) D} - \frac{qa^2(a^2 - r^2)}{4k^2 D}. \quad (f)$$

При $J_1(k) = 0$ прогиб (f) получает бесконечно большое значение. Обозначая нули функции J_1 в последовательности их возрастания через j_1, j_2, \dots , мы убеждаемся, что условие $k = j_1$ определяет наименьшее критическое значение

$$N_{\text{крит}} = \frac{Dj_1^2}{a^2} \quad (g)$$

сжимающего усилия N . Но функция $J_1(k)$ представляет собой произведение

$$J_1(k) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k^2}{j_1^2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{j_2^2}\right) \dots, \quad (h)$$

в котором $j_1 = 3,83171$, $j_2 = 7,01559, \dots$ Для $k < j_1$ мы вправе пренебречь членами k^2/j^2 , начиная со вторых скобок. Заметив, далее, что

$$\frac{k^2}{j_1^2} = \frac{N}{N_{\text{крит}}}$$

в силу уравнений (b) и (g), находим приближенно

$$J_1(k) = \frac{k}{2} (1 - \alpha), \quad (i)$$

где

$$\alpha = \frac{N}{N_{\text{крит}}}. \quad (j)$$

¹⁾ Случай упругого стеснения без поперечной нагрузки был рассмотрен Рейссманом (J. Appl. Mech., т. 19, стр. 167, 1952).

²⁾ Этот результат можно найти у Надаи (Nadaï A., Elastische Platten, стр. 255, Берлин, 1925).

Исходя из (i) можно доказать, что приближенно ¹⁾

$$w = \frac{w_q}{1 - \alpha},$$

где w_q — прогиб, зависящий от одной лишь нагрузки q . Этому же способу решения поддаются и иные сочетания граничных условий при иных законах распределения поперечной нагрузки. В общем случае симметричного поперечного нагружения в сочетании со сжатием можно принять приближенно для центра пластинки ($r = 0$)

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= \frac{(w_q)_0}{1 - \alpha}, \\ \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_0 &= \left(\frac{d^2w}{dr^2} \right)_0 = \frac{1 + c_0\alpha}{1 - \alpha} \left(\frac{1}{r} \frac{dw_q}{dr} \right)_0 \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

и для контура ($r = a$)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)_a &= \frac{1 + c'\alpha}{1 - \alpha} \left(\frac{1}{r} \frac{dw_q}{dr} \right)_a, \\ \left(\frac{d^2w}{dr^2} \right)_a &= \frac{1 + c''\alpha}{1 - \alpha} \left(\frac{d^2w_q}{dr^2} \right)_a, \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

где w_q относится к пластинке, несущей одну лишь заданную нагрузку, а $\alpha = N/N_{кр}$ имеет следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \text{для свободно опертой пластинки} \quad \alpha &= \frac{Na^2}{4,20D}, \\ \text{для защемленной пластинки} \quad \alpha &= \frac{Na^2}{14,68D}, \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

причем первое значение имеет силу для $\nu = 0,3$. Значения постоянных c_0 , c' и c'' приводятся в таблице 81. Если круглая пластинка несет поперечную нагрузку, подвергаясь одновременно равномерному растяжению N вместо сжатия, то мы имеем приближенно

$$(w)_{r=0} = \frac{(w_q)_{r=0}}{1 + \alpha},$$

где α — абсолютное значение отношения $N/N_{кр}$. Что касается кривизны, то здесь в выражения (k) и (l) вместо множителя $(1 + c\alpha)/(1 - \alpha)$ вводится другой множитель

$$\frac{1}{1 + (1 + c)\alpha},$$

причем постоянная c заменяет последовательно c_0 , c' и c'' .

¹⁾ См. Pettersson O., Acta polytechn. Stockholm, № 138, 1954. Ниже следующие результаты заимствованы из этой работы: в ней, однако, задача решается в более общей постановке — в предположении упругого защемления по контуру.

Значения постоянных в приближенных выражениях
(к) и (л) ($\nu = 0,3$)

Случай	Закон распределения нагрузки	Граничные условия	Значения постоянных
1	Равномерное распределение моментной нагрузки по контуру	Свободное опирание	$c_0 = 0,305$ $c' = -0,270$ $c'' = -1,219$
2	Равномерное загрузеие по площади	Свободное опирание	$c_0 = 0,0480$ $c' = c'' = -0,0327$
3		Защемление	$c_0 = 0,308$ $c'' = -0,473$
4	Центральное равномерное загрузеие по площади радиуса ϵa	Свободное опирание	$c_0 = -1 + \frac{2,153}{1-1,31\pi \epsilon}$ $c' = c'' = 0,205$
5		Защемление	$c_0 = -1 - \frac{1,308}{\pi \epsilon}$ $c'' = 0,0539$

95. Изгиб пластинки, имеющей малую начальную кривизну¹⁾.

Положим, что срединная поверхность пластинки уже несколько выпучена до изгиба, так что в любой ее точке имеется некоторый начальный прогиб w_0 , малый в сравнении с толщиной пластинки. Если такую пластинку подвергнуть действию поперечной нагрузки, то последняя вызовет дополнительный прогиб w_1 , так что полный прогиб любой точки срединной поверхности пластинки будет $w_0 + w_1$. Для вычисления прогиба w_1 воспользуемся уравнением (103), выведенным для плоской пластинки. Этот прием допустим в том случае, если начальный прогиб w_0 мал, поскольку мы вправе рассматривать его в этом случае как эффект фиктивной нагрузки и применить принцип наложения²⁾. Если кроме поперечных нагрузок имеются еще и силы, действующие в срединной плоскости пластинки, то влияние этих сил на изгиб зависит не только от w_1 , но также и от w_0 . Чтобы учесть это обстоятельство, мы в правой части уравнения (217) вводим полный прогиб $w = w_0 + w_1$. Следует помнить, что левая часть этого уравнения была получена из выражений для изгибающих

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Известия Института инженеров путей сообщения, т. 89, СПб., 1915.

²⁾ В случае больших прогибов величина их уже непропорциональна нагрузке, и потому принцип наложения теряет свою силу.

моментов в пластинке. Так как эти моменты зависят не от полной кривизны, но лишь от изменения кривизны пластинки, то при записи левой части этого уравнения в его применении к данной задаче нам следует вводить не w , а w_1 . Таким образом, в применении к случаю начально искривленной пластинки уравнение (217) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \\ & = \frac{1}{D} \left[q + N_x \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \right]. \quad (230) \end{aligned}$$

Из этого выражения мы видим, что влияние начальной кривизны на прогиб эквивалентно влиянию фиктивной поперечной нагрузки интенсивностью

$$N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}.$$

Таким образом, при наличии начальной кривизны пластинка будет испытывать изгиб под действием сил, лежащих в одной лишь плоскости xu .

Возьмем в качестве примера случай прямоугольной пластинки (рис. 192) и допустим, что начальный прогиб пластинки определен уравнением

$$w_0 = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (a)$$

Если по контуру этой пластинки приложены равномерно распределенные сжимающие силы N_x , то уравнение (230) принимает вид

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x \frac{a_{11} \pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - N_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right). \quad (b)$$

Возьмем решение этого уравнения в виде

$$w_1 = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (c)$$

Подставив это значение w_1 в уравнение (b), получим

$$A = \frac{a_{11} N_x}{\frac{\pi^2 D}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) - N_x}.$$

При этом значении A выражение (c) дает прогиб пластинки, вызванный сжимающими силами N_x . Сложив этот прогиб с начальным прогибом (a), получим для полного прогиба пластинки следующее выражение:

$$w = w_0 + w_1 = \frac{a_{11}}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (d)$$

где

$$\alpha = \frac{N_x}{\frac{\pi^2 D}{a^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}. \quad (e)$$

Максимальный прогиб получится в центре, причем величина его будет равна

$$w_{\max} = \frac{a_{11}}{1 - \alpha}. \quad (f)$$

Эта формула аналогична соответствующему выражению для стержня с начальной кривизной¹⁾.

В более общем случае мы можем принять уравнение начально изогнутой поверхности прямоугольной пластинки в виде следующего ряда:

$$w_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (g)$$

Подставив этот ряд в уравнение (230), найдем, что дополнительный прогиб в некоторой произвольной точке пластинки равен

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (h)$$

где

$$b_{mn} = \frac{a_{mn} N_x}{\frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{n^2}{m} \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - N_x}. \quad (i)$$

Мы видим, что все коэффициенты b_{mn} возрастают с возрастанием N_x . Поэтому как только N_x приближается к критическому значению, член в ряде (h), соответствующий поперечно выпущенной форме пластинки [см. уравнение (227)], приобретает главенствующее значение. Мы имеем здесь полную аналогию со случаем изгиба начально искривленного и подвергнутого сжатию стержня.

Если вместо сжатия в срединной плоскости пластинки имеет место растяжение, задача решается тем же способом. При этом нужно лишь в выведенных уравнениях изменить знак N_x . Без каких-либо затруднений мы можем получить прогиб также и в том случае, когда у нас кроме сил N_x имеются еще и равномерно распределенные по краям пластинки силы N_y и N_{xy} .

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Сопrotивление материалов, т. 2, стр. 101, 1946.

Г Л А В А Х И И

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ПЛАСТИНКИ

96. Изгиб круглой пластинки моментами, равномерно распределенными по контуру. Выше (см. стр. 62) при исследовании чистого изгиба круглой пластинки было показано, что деформацией срединной плоскости пластинки допустимо пренебречь в тех случаях, когда прогибы малы в сравнении с толщиной пластинки. Во всех случаях, когда прогибы уже не малы в сравнении с толщиной пластинки и вместе с тем еще малы в сравнении с другими ее измерениями, исследование задачи должно быть обобщено в том смысле, что в нем следует принять во внимание также и деформацию срединной плоскости пластинки¹⁾.

Положим, что круглая пластинка изогнута моментами M_0 , равномерно распределенными по ее контуру (рис. 200, *a*). Так как изогнутая поверхность в этом случае будет симметричной относительно центра O , то смещение точки в срединной плоскости пластинки можно будет разложить на две составляющие: составляющую u в радиальном направлении и составляющую w , перпендикулярную к плоскости пластинки. Поступая, как было указано ранее на рис. 196 (стр. 427), заключаем, что деформация в радиальном направлении равна²⁾

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (a)$$

Деформация в тангенциальном направлении равна, очевидно,

$$\epsilon_t = \frac{u}{r}. \quad (b)$$

¹⁾ Эта задача была исследована С. П. Тимошенко; см. Известия Института инженеров путей сообщения, т. 89, 1915.

²⁾ В случае весьма больших прогибов имеем

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right],$$

и это вносит изменения в нижеследующие дифференциальные уравнения; см. Reissner E., Proc. Symposia Appl. Math., т. 1, стр. 213, 1949.

Обозначая соответствующие растягивающие силы на единицу длины через N_r и N_t и применяя закон Гука, получаем

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu\epsilon_t) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \nu \frac{u}{r} \right], \\ N_t &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_t + \nu\epsilon_r) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Эти силы должны быть приняты в расчет при выводе уравнений равновесия элемента пластинки, подобного показанному на рис. 200, *b*

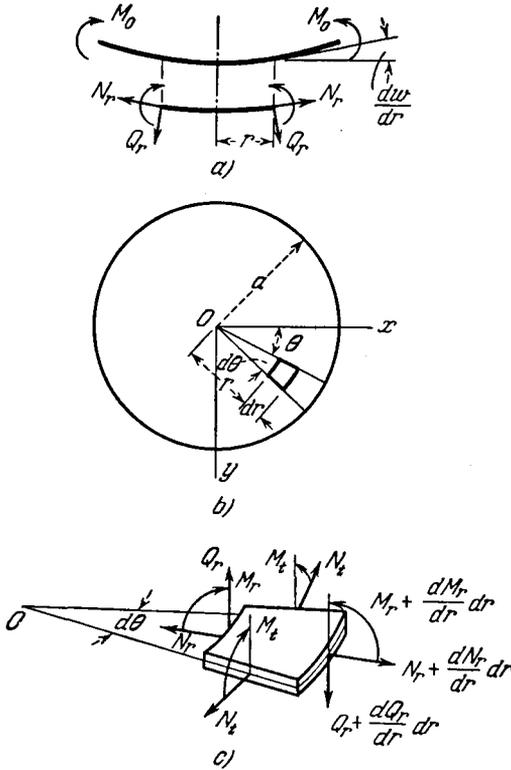


Рис. 200.

и 200, *c*. Взяв сумму проекций на радиальное направление всех действующих на элемент сил, получим

$$r \frac{dN_r}{dr} dr d\theta + N_r dr d\theta - N_t dr d\theta = 0,$$

откуда

$$N_r - N_t + r \frac{dN_r}{dr} = 0. \quad (d)$$

Второе уравнение равновесия элемента получим точно так же, как и при выводе уравнения (55) (стр. 68), взяв моменты относительно оси, перпендикулярной к радиусу. Таким путем найдем¹⁾

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right). \quad (e)$$

Величину перерезывающей силы Q_r найдем, рассмотрев равновесие внутренней круглой части пластинки радиуса r (рис. 200, а). Это приводит нас к соотношению

$$Q_r = -N_r \frac{dw}{dr}. \quad (f)$$

Подставив это выражение для перерезывающей силы в уравнение (e) и воспользовавшись выражениями (c) для N_r и N_t , мы можем представить уравнения равновесия (d) и (e) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} &= -\frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r^2} - \frac{1-\nu}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2}, \\ \frac{d^3 w}{dr^3} &= -\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{12}{h^2} \frac{dw}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

Эти два нелинейных уравнения можно интегрировать численно, отправляясь от центра пластинки и двигаясь малыми приращениями в радиальном направлении. Для центра кольцевого элемента малого радиуса c мы примем некоторую радиальную деформацию

$$\epsilon_0 = \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0}$$

и некоторую постоянную кривизну

$$\frac{1}{\rho_0} = - \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)_{r=0}.$$

Зная эти значения радиальной деформации и кривизны в центре, мы можем вычислить как радиальное смещение u , так и наклон dw/dr для $r=c$. Таким образом, все входящие в правую часть уравнения (231) величины нам будут известны, и мы сможем вычислить значения $d^2 u/dr^2$ и $d^3 w/dr^3$ для $r=c$. Как только мы найдем эти величины, у нас будет возможность предпринять следующий шаг, а именно передвинуться на длину c в радиальном направлении и вычислить

¹⁾ Направление силы Q_r здесь противоположно указанному на рис. 28. Этим объясняется знак минус в уравнении (e).

все входящие в правую часть уравнений (231) величины для $r = 2c^1$ и т. д. Как только нам будут известны численные значения u и w , а также их производные на конце каждого интервала, мы сможем из уравнений (с) вычислить значения сил N_r и N_t , а из уравнений (52) и (53) (см. стр. 67) изгибающие моменты M_r и M_t . Посредством таких повторных вычислений мы подойдем к радиальному

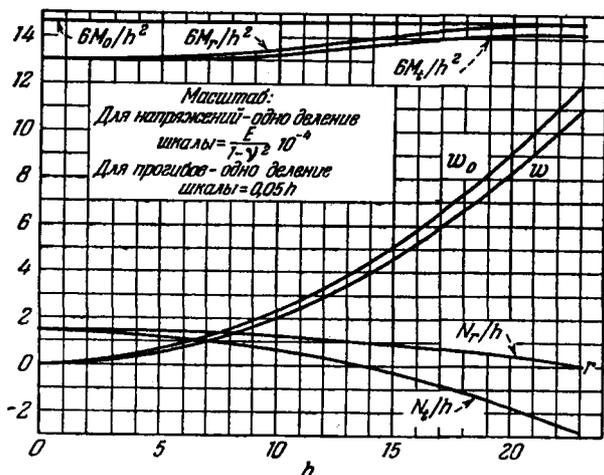


Рис. 201.

расстоянию $r = a$, где радиальная сила N_r обращается в нуль. В результате мы получим круглую пластинку радиуса a , изогнутую моментами M_0 , равномерно распределенными по контуру. Изменяя численные значения ϵ_0 и $1/\rho_0$ в центре, мы будем иметь пластинки с различными значениями внешнего радиуса и различными значениями распределенного по контуру момента.

На рис. 201 графически представлены результаты, полученные для пластинки, у которой

$$a \approx 23h \text{ и } (M_r)_{r=a} = M_0 = 2,93 \cdot 10^{-3} \frac{D}{h}.$$

¹⁾ Если интервалы, на которые разбивается радиус, достаточно малы, то можно воспользоваться простым приемом, подобным тому, который был применен С. П. Тимошенко в книге «Теория колебаний в инженерном деле». Представленные на рис. 201 численные результаты получены именно таким путем. Более высокой степени точности можно достигнуть, пользуясь методом Адамса (Adams) или Штёрмера (Störmer). О методе Адамса см. книгу Башфорта (Bashforth, On forms of fluid drops) «О формах капель жидкости» Cambridge Univ. Press., 1883. Метод Штёрмера весьма подробно излагается в книге А. Н. Крылова «Приближенные вычисления», изданной Академией наук СССР, Москва, 1935. См. также: Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., ИЛ., 1953.

Заметим, что максимальный прогиб пластинки получается здесь равным $0,55h$; это приблизительно на 9% меньше прогиба w_0 , указываемого элементарной теорией, которая пренебрегает деформацией в срединной плоскости пластинки. Силы N_r и N_t в центральной части пластинки обе оказываются положительными. В наружной части ее силы N_t становятся отрицательными; это значит, что в тангенциальном направлении имеет место сжатие. Максимальное тангенциальное напряжение сжатия на контуре составляет приблизительно 18% максимального изгибающего напряжения изгиба $\frac{6M_0}{h^2}$. Напряжения изгиба, вызванные моментами M_r и M_t , получаются несколько меньше напряжения $6M_0/h^2$, указываемого элементарной теорией, и принимают наименьшее значение в центре, где погрешность элементарной теории составляет около 12%. Из этого численного примера можно заключить, что для прогибов порядка $0,5h$ погрешности в указываемых элементарной теорией значениях максимального прогиба и максимального напряжения становятся значительными и что для получения более точных результатов нужно принять во внимание деформацию срединной плоскости.

97. Приближенные формулы для равномерно нагруженной круглой пластинки с большими прогибами. Описанный в предыдущем параграфе метод может быть использован также и в случае поперечной нагрузки пластинки. Он, однако, не нашел практического применения, так как для получения прогибов и напряжений в каждом частном случае приходится производить большую вычислительную работу. Более удобный прием для приближенного вычисления прогибов можно получить, применяя энергетический¹⁾ метод. Пусть круглая пластинка радиуса a закреплена по контуру и подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q . Допустив, что форма изогнутой поверхности может быть при этом представлена тем же самым уравнением, что и в случае малых прогибов, положим

$$w = w_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2. \quad (a)$$

Соответствующая энергия деформации изгиба по уравнению (м) (стр. 384) будет равна

$$\begin{aligned} V &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] r dr d\theta = \\ &= \frac{32\pi}{3} \frac{w_0^2}{a^2} D. \quad (b) \end{aligned}$$

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле. Приближенные формулы см. также в таблице 82 (стр. 456).

Для радиальных смещений примем выражение

$$u = r(a - r)(C_1 + C_2 r + C_3 r^2 + \dots), \quad (c)$$

каждый член которого удовлетворяет граничным условиям, требующим, чтобы u обращалось в нуль в центре и на контуре пластинки. Из выражений (а) и (с) для смещений вычислим, как показано в предыдущем параграфе, составляющие деформации ϵ_r и ϵ_t срединной плоскости и посредством выражения

$$V_1 = 2\pi \int_0^a \left(\frac{N_r \epsilon_r}{2} + \frac{N_t \epsilon_t}{2} \right) r dr = \frac{\pi E h}{1 - \nu^2} \int_0^a (\epsilon_r^2 + \epsilon_t^2 + 2\nu \epsilon_r \epsilon_t) r dr \quad (d)$$

получим энергию деформации, обусловленной растяжением срединной плоскости. Взяв лишь два первых члена (с), будем иметь

$$V_1 = \frac{\pi E h a^2}{1 - \nu^2} \left(0,250 C_1^2 a^2 + 0,1167 C_2^2 a^4 + 0,300 C_1 C_2 a^3 - \right. \\ \left. - 0,00846 C_1 a \frac{8w_0^2}{a^2} + 0,00682 C_2 a^2 \frac{8w_0^2}{a^2} + 0,00477 \frac{64w_0^4}{a^4} \right). \quad (e)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются теперь из того условия, что полная энергия пластинки в положении равновесия принимает минимальное значение. Поэтому

$$\frac{\partial V_1}{\partial C_1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial V_1}{\partial C_2} = 0. \quad (f)$$

Подставив выражение (е) вместо V_1 , получим два линейных уравнения для C_1 и C_2 . Из них мы найдем, что

$$C_1 = 1,185 \frac{w_0^2}{a^3} \quad \text{и} \quad C_2 = -1,75 \frac{w_0^2}{a^4},$$

после чего из уравнения (е) получим¹⁾

$$V_1 = 2,59\pi D \frac{w_0^4}{a^2 h^2}. \quad (g)$$

Прибавляя эту энергию, зависящую от растяжения срединной плоскости, к энергии изгиба (б), получим полную энергию деформации

$$V + V_1 = \frac{32}{3} \pi D \frac{w_0^2}{a^2} \left(1 + 0,244 \frac{w_0^2}{h^2} \right). \quad (h)$$

Второй член в скобках представляет собой поправку на деформацию в срединной плоскости пластинки. Легко видеть, что эта поправка

¹⁾ В этом вычислении принято $\nu = 0,3$.

мала и ею можно пренебречь, если прогиб w_0 в центре пластинки мал в сравнении с толщиной h пластинки.

Зная теперь из выражения (h) энергию деформации, мы, пользуясь принципом виртуальных перемещений, получаем и прогиб пластинки. Из этого принципа следует, что

$$\frac{d(V + V_1)}{dw_0} \delta w_0 = 2\pi \int_0^a q \delta w r dr = 2\pi q \delta w_0 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 r dr.$$

Подставив в это уравнение выражение (h), получим кубическое уравнение относительно w_0 . Это уравнение можно написать в таком виде:

$$w_0 = \frac{qa^4}{64D} \frac{1}{1 + 0,488 \frac{w_0^2}{h^2}}. \quad (232)$$

Последний множитель в правой части уравнения выражает влияние растяжения срединной поверхности на прогиб пластинки. Вследствие этого влияния прогиб w_0 перестает быть пропорциональным интенсивности q нагрузки и жесткость пластинки возрастает с прогибом. Взяв, например, $w_0 = 1/2h$, получим из уравнения (232)

$$w_0 = 0,89 \frac{qa^4}{64D}.$$

Это указывает на то, что прогиб в данном случае получился на 11% меньше, чем в том случае, когда мы пренебрегаем растяжением срединной поверхности.

До сих пор мы предполагали, что радиальные смещения обращаются на контуре пластинки в нуль. Но не исключена и противоположная возможность — свободного перемещения края в радиальном направлении. Тогда выражение (232) необходимо будет заменить зависимостью ¹⁾

$$w_0 = \frac{qa^4}{64D} \frac{1}{1 + 0,146 \frac{w_0^2}{h^2}}, \quad (233)$$

из которой явствует, что влияние растяжения пластинки в условиях свободного перемещения края сказывается значительно меньше, чем в первом случае. Принимая, например, $w_0 = 1/2h$, находим $w_0 = 0,965 (qa/64D)$, чему соответствует растяжение, составляющее $3\frac{1}{2}\%$ вместо 11%, полученных выше.

Далее, из уравнений (b) и (c) § 96 мы можем заключить, что если $N_r = 0$ на контуре, то N_t принимает на контуре значение

¹⁾ Она получается методом, изложенным в § 100.

$N_r = E h \varepsilon_r = E h u / r$, т. е. становится отрицательной величиной. Создается поэтому основание ожидать, что при достижении определенного критического значения поперечной нагрузки краевая зона пластинки переходит в неустойчивое состояние¹⁾.

Другой вариант приближенного решения задачи был разработан А. Надаи²⁾. Он исходит из уравнений равновесия, сходных с уравнениями (231). Чтобы их вывести, нам нужно лишь преобразовать уравнения (f) предыдущего параграфа таким образом, чтобы они отвечали случаю поперечной нагрузки интенсивностью q . После такого преобразования выражение для перерезывающей силы получает, очевидно, вид

$$Q_r = -N_r \frac{dw}{dr} - \frac{1}{r} \int_0^r q r dr. \quad (i)$$

Пользуясь этим выражением точно таким же образом, как в предыдущем параграфе мы пользовались выражением (f), получим вместо уравнений (231) следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} &= -\frac{1-\nu}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2}, \\ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} &= \frac{12}{h^2} \frac{dw}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + \frac{1}{Dr} \int_0^r q r dr. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

Чтобы найти приближенное решение задачи, следует принять для прогиба w подходящее выражение в качестве первого приближения. Подставив его в правую часть первого из уравнений (294), мы получим линейное дифференциальное уравнение относительно u , которое может быть проинтегрировано и даст, таким образом, второе приближение для u . Этим вторым приближением можно будет затем воспользоваться для получения следующих приближений для u и w посредством повторного выполнения той же последовательности вычислительных операций.

Исследуя изгиб равномерно нагруженной, защемленной по контуру круглой пластинки, Надаи начинает с производной dw/dr и берет в качестве первого приближения выражение

$$\frac{dw}{dr} = C \left[\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right], \quad (j)$$

¹⁾ Возникающая в этих условиях неустойчивость исследована Д. Ю. Пановым и В. И. Феодосьевым (Прикл. мат. мех., т. 12, стр. 389, 1948).

²⁾ См. его книгу «Elastische Platten», стр. 288, 1925.

которое в соответствии с условиями на защемленном контуре обращается в нуль при $r=0$ и $r=a$. Тогда первое из уравнений (234) даст нам первое приближение для u . Подставив эти первые приближения для u и $d\omega/dr$ во второе из уравнений (234) и решив его относительно q , определим постоянные C и n в выражении (j) таким образом, чтобы величина q как можно меньше отличалась от постоянной. Таким путем при $\nu=0,25$ мы получим для вычисления прогиба в центре следующее уравнение¹⁾:

$$\frac{w_0}{h} + 0,583 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 = 0,176 \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4. \quad (235)$$

Для очень тонких пластинок прогиб w может оказаться весьма большим в сравнении с h . В подобных случаях сопротивлением пластинки изгибу можно пренебречь и ее можно рассматривать как гибкую мембрану. Общие уравнения для такой мембраны получают из уравнений (234), положив левую часть во втором из этих уравнений равной нулю. Приближенное решение полученных таким способом уравнений найдем, отбросив из левой части уравнения (235) первый член как малый в сравнении со вторым членом. Отсюда получим

$$0,583 \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 \approx 0,176 \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4 \quad \text{и} \quad w_0 \approx 0,665a \sqrt[3]{\frac{qa}{Eh}}.$$

Более полное исследование той же задачи²⁾ дает

$$w_0 = 0,662a \sqrt[3]{\frac{qa}{Eh}}. \quad (236)$$

Эта формула, находящаяся в весьма удовлетворительном согласии с опытами³⁾, показывает, что прогибы не пропорциональны интенсивности нагрузки, а изменяются пропорционально кубическому корню из этой нагрузки. Для растягивающих напряжений в центре мембраны и на контуре то же решение дает соответственно

$$(\sigma_r)_{r=0} = 0,423 \sqrt[3]{\frac{Eq^2a^2}{h^2}} \quad \text{и} \quad (\sigma_r)_{r=a} = 0,328 \sqrt[3]{\frac{Eq^2a^2}{h^2}}.$$

¹⁾ Другой метод приближенного решения уравнений (234) был предложен К. Ф. Федерхофером (Federhofer K., Eisenbau, т. 9, стр. 152, 1918); См. также Forschungsarbeiten, т. 7, стр. 148, 1936. Его уравнение для w_0 отличается от уравнения (235) лишь численным значением коэффициента в левой части, а именно при $\nu=0,25$ вместо 0,583 у него получается 0,523.

²⁾ Решение этой задачи было дано Генки (Hencky H., Z. Math. Physik, т. 63, стр. 311, 1915). О некоторых особых явлениях, возникающих в краевой зоне весьма тонких пластинок, см. Friedrichs K. O., Proc. Symposia Appl. Math., т. 1, стр. 188, 1949.

³⁾ См. Eick Bruno, Z. angew. Math. Mech., т. 7, стр. 498, 1927. Об испытаниях круглых защемленных по контуру пластинок см. также McPherson A., Ramberg W., Levy S., NACA Rept., 744, 1942.

Чтобы получить прогибы, пропорциональные давлению, что часто требуется в различных измерительных инструментах, следует прибегнуть к гофрированным мембранам¹⁾, подобным, например, изображенной на рис. 202. Вследствие гофрировки деформация сводится главным образом к изгибу и потому возрастает пропорционально давлению²⁾. Если гофрировка (рис. 202) следует закону синусоиды, а число волн, укладываемыхся на длине диаметра пластинки, достаточно велико ($n > 5$), то при обозначениях рис. 186 для $w_0 = (w)_{\max}$ можно будет воспользоваться следующим выражением³⁾:



Рис. 202.

$$w_0 = (w)_{\max} = 8 \left(\frac{w_0}{h} \right) \left[\frac{2}{3(1-\nu^2)} + \left(\frac{f}{h} \right)^2 \right] + \frac{6}{7} \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 = \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4.$$

98. Точное решение для равномерно нагруженной круглой пластинки, защемленной по контуру⁴⁾. Для того чтобы получить более удовлетворительное решение задачи о больших прогибах равномерно нагруженной круглой пластинки с защемленным контуром, необходимо решить уравнения (234). С этой целью напомним прежде всего эти уравнения в несколько ином виде. Как это можно заметить из самого процесса их вывода в § 96, первое из этих уравнений эквивалентно уравнению

$$N_r - N_t + r \frac{dN_r}{dr} = 0. \quad (237)$$

Точно так же, как это видно из уравнения (e) § 96 и уравнения (i) § 97, второе из этих уравнений можно написать таким образом:

$$D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = N_r \frac{dw}{dr} + \frac{qr}{2}. \quad (238)$$

Из общих выражений для радиальной и тангенциальной деформаций (стр. 440) получаем

$$\epsilon_r = \epsilon_t + r \frac{d\epsilon_t}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2.$$

¹⁾ Теория прогиба такого рода мембран изложена у Штанге (Stange K., Ingr. Arch., т. 2, стр. 47, 1931).

²⁾ Библиографию по диафрагмам, применяемым в измерительных инструментах, см. в работе Херси (Hersey M. D., Rept. Nat. Advisory Comm. Aeronautics, 165, 1923).

³⁾ Вольмир А. С., Гибкие пластинки и оболочки, стр. 214, Москва, 1956. В этой книге имеется также обширная библиография по большим прогибам пластинок и оболочек.

⁴⁾ Этим решением мы обязаны Уэю (Wau S., Trans. Am. Soc. Mech. Eng., т. 56, стр. 627, 1934).

Подставив в это уравнение

$$\epsilon_r = \frac{1}{hE} (N_r - \nu N_t) \quad \text{и} \quad \epsilon_t = \frac{1}{hE} (N_t - \nu N_r)$$

и применив уравнение (237), получим

$$r \frac{d}{dr} (N_r + N_t) + \frac{hE}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0. \quad (239)$$

Три уравнения (237), (238) и (239), содержащих три неизвестные функции N_r , N_t и w , мы используем теперь для решения задачи. Начнем с преобразования этих уравнений к безразмерной форме путем введения следующих обозначений:

$$p = \frac{q}{E}, \quad \xi = \frac{r}{h}, \quad S_r = \frac{N_r}{hE}, \quad S_t = \frac{N_t}{hE}. \quad (240)$$

В этих обозначениях уравнения (а), (б) и (с) принимают вид

$$\frac{d}{d\xi} (\xi S_r) - S_t = 0, \quad (241)$$

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dw}{d\xi} \right) \right] = \frac{p\xi}{2} + S \frac{dw}{d\xi}, \quad (242)$$

$$\xi \frac{d}{d\xi} (S_r + S_t) + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 = 0. \quad (243)$$

Граничные условия требуют в данном случае, чтобы радиальное смещение u и наклон dw/dr обращались на контуре в нуль. Пользуясь уравнением (б) § 96 для смещений (u) и применяя закон Гука, формулируем эти условия так:

$$(u)_{r=a} = r (S_t - \nu S_r)_{r=a} = 0, \quad (244)$$

$$\left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0. \quad (а)$$

Полагая, что S_r есть симметричная функция, а dw/dr — антисимметричная функция от ξ , представим эти функции следующими степенными рядами:

$$S_r = B_0 + B_2 \xi^2 + B_4 \xi^4 + \dots, \quad (б)$$

$$\frac{dw}{dr} = \sqrt{8} (C_1 \xi + C_3 \xi^3 + C_5 \xi^5 + \dots), \quad (с)$$

в которых B_0, B_2, \dots и C_1, C_3, \dots суть постоянные, подлежащие определению в дальнейшем. Подставив первый из этих рядов в уравнение (е), найдем

$$S_t = B_0 + 3B_2 \xi^2 + 5B_4 \xi^4 + \dots \quad (д)$$

Интегрируя и дифференцируя уравнение (е), получим соответственно

$$\frac{w}{h} = V\sqrt{8} \left(C_1 \frac{\xi^2}{2} + C_3 \frac{\xi^4}{4} + C_5 \frac{\xi^6}{6} + \dots \right), \quad (е)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{dw}{dr} \right) = V\sqrt{8} (C_1 + 3C_3\xi^2 + 5C_5\xi^4 + \dots). \quad (ф)$$

Очевидно, все интересующие нас величины могут быть найдены, если мы знаем постоянные $B_0, B_2, \dots, C_1, C_3, \dots$. Подставив ряды (b), (c) и (d) в уравнения (242) и (243) и заметив, что эти уравнения должны удовлетворяться при любом значении ξ , приходим к следующим соотношениям между постоянными B и C :

$$\left. \begin{aligned} B_k &= -\frac{4}{k(k+2)} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{k-1} C_m C_{k-m}, & k &= 2, 4, 6, \dots \\ C_k &= \frac{12(1-\nu^2)}{k^2-1} \sum_{m=0, 2, 4, \dots}^{k-3} B_m C_{k-2-m}, & k &= 5, 7, 9, \dots \\ C_3 &= \frac{3}{2} (1-\nu^2) \left(\frac{p}{2V\sqrt{8}} + B_0 C_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Мы видим, что приписав постоянным B_0 и C_1 определенные значения, мы получаем возможность вычислить из соотношений (г) и все остальные постоянные, и тогда значения S_r, S_t и dw/dr определятся рядами (b), (d) и (c) для всех точек пластинки. Как можно видеть из рядов (е) и (ф), фиксировать определенные значения для B_0 и C_1 означает то же самое, что и выбрать значения S_r и кривизны в центре пластинки¹⁾.

Построение кривых для расчета прогибов и напряжений в отдельных частных случаях осуществляется следующим способом: для данных значений ν и $p = q/E$ и для выбранных нами значений B_0 и C_1 подсчитывается большое количество различных численных примеров²⁾, причем определяются радиусы пластинок таким образом, чтобы удовлетворялось граничное условие (а). Для всех этих пластинок вычисляются значения S_r и S_t на контуре, а затем для того же контура находятся радиальные смещения $(u)_{r=a}$. Так как все эти вычисления производятся для произвольно принятых значений B_0 и C_1 , то граничные условия (244) вообще не удовлетворяются. Интерполяция, однако, дает нам возможность получить все необходимые данные для пластинки так, чтобы удовлетворяться оба условия (244) и (а). Результат этих вычислений представлен графически на рис. 203.

¹⁾ С выбором этих же самых величин мы уже сталкивались в случае изгиба круглой пластинки моментами, равномерно распределенными по контуру (см. стр. 442).

²⁾ Уэй (S. Way), цит. на стр. 449, вычислил 19 отдельных случаев.

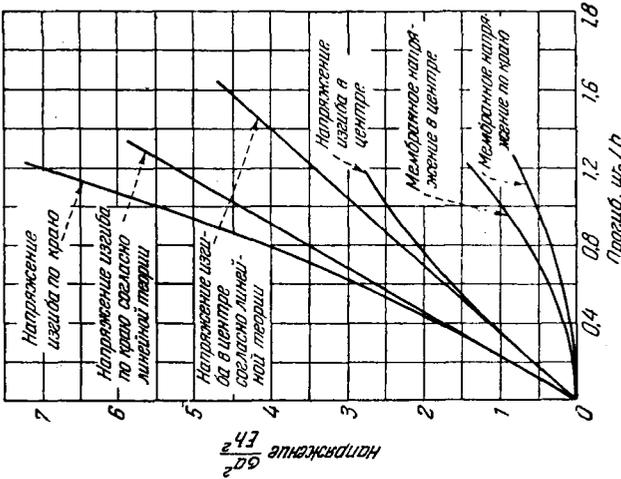


Рис. 204.

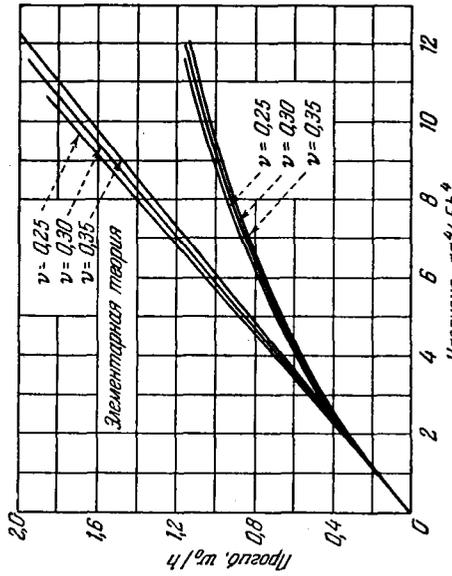


Рис. 203.

Если прогиб пластинки мы нашли из этого графика, то соответствующее напряжение можно определить с помощью кривых рис. 204. Кривые этого графика соответствуют мембранным напряжениям

$$\sigma_r = \frac{N_r}{h}$$

и напряжениям изгиба

$$\sigma'_r = \frac{6M_r}{h^2},$$

вычисленным для центра и для контура пластинки ¹⁾. Складывая σ_r и σ'_r , получаем полное максимальное напряжение в центре и на контуре пластинки. Для сравнения на рис. 203 и 204 нанесены также прямые линии, соответствующие показаниям элементарной теории, которая пренебрегает деформацией срединной плоскости. Следует заметить, что погрешность элементарной теории возрастает по мере возрастания нагрузки и прогибов.

99. Круглая свободно опертая пластинка под равномерно распределенной нагрузкой. Точное решение задачи ²⁾ может быть получено методом разложения в ряды, сходным с использованным в предыдущем параграфе.

В силу осевой симметрии имеем и на этот раз $dw/dr = 0$ и $N_r = N_t$ для $r = 0$. Поскольку радиальные моменты на контуре исчезают, должно быть

$$\left[\frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \right) + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right]_{r=a} = 0. \quad (a)$$

Что касается напряжений и деформаций в срединной плоскости пластинки, то для них имеют место два граничных условия: 1) Полагая, что контур неподвижен, заключаем из уравнения (244), что $S_t - \nu S_r = 0$, что согласно уравнению (237) эквивалентно условию

$$\left[S_r (1 - \nu) + r \frac{dS_r}{dr} \right]_{r=a} = 0. \quad (b)$$

2) Полагая, что край может свободно перемещаться в радиальном направлении, имеем непосредственно

$$(S_r)_{r=a} = 0. \quad (c)$$

Функции S_r и $\frac{dw}{dr}$ и в рассмотренном случае допускают представление в рядах

$$S_r = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)a^2\rho} (B_1\rho + B_3\rho^3 + B_5\rho^5 + \dots), \quad (d)$$

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{h}{2a\sqrt{3}} (C_1\rho + C_3\rho^3 + C_5\rho^5 + \dots), \quad (e)$$

¹⁾ Напряжения даны в безразмерной форме.

²⁾ Federhofer K., Egger H., Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Вена, II, т. 155, стр. 15, 1946; см. также Stippes M., Hausrath A. H., J. Appl. Mech., т. 19, стр. 287, 1952. Исползованный в последней из указанных работ метод возмущения применим также и в случае сосредоточенной нагрузки.

где $\rho = r/a$. Вводя эти ряды в уравнения (241), (242), (243) и исключая из них величину S_r , приходим к следующим соотношениям между постоянными B и C :

$$B_k = -\frac{1-\nu^2}{2(k^2-1)} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{k-2} C_m C_{k-m-1}, \quad k=3, 5, \dots, \quad (f)$$

$$C_k = \frac{1}{k^2-1} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{k-2} C_m B_{k-m-1}, \quad k=5, 7, \dots, \quad (g)$$

$$8C_3 - B_1 C_1 + 12\sqrt{3}(1-\nu^2) \frac{\rho a^4}{h^4} = 0, \quad (h)$$

где $p = q/E$, а q — интенсивность нагрузки. Все постоянные и на этот раз легко выражаются через две постоянные B_1 и C_1 , в свою очередь связанные между собой двумя дополнительными соотношениями, вытекающими из граничных условий, а именно:

в первом случае

$$\sum_{k=1,3,5,\dots} B_k (k-\nu) = 0, \quad \sum_{k=1,3,5,\dots} C_k (k+\nu) = 0, \quad (i)$$

и во втором случае

$$\sum_{k=1,3,5,\dots} B_k = 0, \quad \sum_{k=1,3,5,\dots} C_k (k+\nu) = 0. \quad (j)$$

Чтобы приступить к решению полученной системы уравнений, можно воспользоваться в качестве исходных значений B_1 и C_1 теми, которые могли бы дать первое приближение. Такое решение, удовлетворяющее условию (а), может, например, иметь вид

$$\frac{dw}{dr} = C(\beta \rho^n - \rho). \quad (k)$$

Здесь C — постоянная, а $\beta = \frac{1+\nu}{n+\nu}$ ($n=3, 5, \dots$). Подставляя это в уравнения (241) и (243), заменяя в них ξ на $\rho a/h$ и исключая S_r , получаем

$$S_r = c_1 + \frac{c_2}{\rho^2} - \frac{C^2}{2} \left(\beta^2 \frac{\rho^{2n}}{n_1} - 2\beta \frac{\rho^{n+1}}{n_2} + \frac{\rho^2}{8} \right). \quad (l)$$

Здесь c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, а

$$n_1 = 4n(n+1), \quad n_2 = (n+1)(n+3).$$

Допустим, например, что заданные нам граничные условия отвечают случаю 2. Тогда

$$c_1 = \frac{C^2}{2} \left(\frac{\beta^2}{n_1} - \frac{2\beta}{n_2} + \frac{1}{8} \right), \quad c_2 = 0. \quad (m)$$

Постоянную C , наконец, можно найти тем или иным энергетическим методом, например описанным в § 100. Применяя приведенные там уравнения (m) или (o), мы должны лишь подставить в них $dq/dr = rhES$, а вместо dw/dr — одно из указанных выше приближенных выражений (k), (l).

Наибольшие значения прогибов и полных напряжений, полученные Федерхофером и Эггером на основе точного решения, представлены графиками на рис. 205 для случая 1 и на рис. 206 для случая 2. Вычисления выполнены для $\nu = 0,25$.

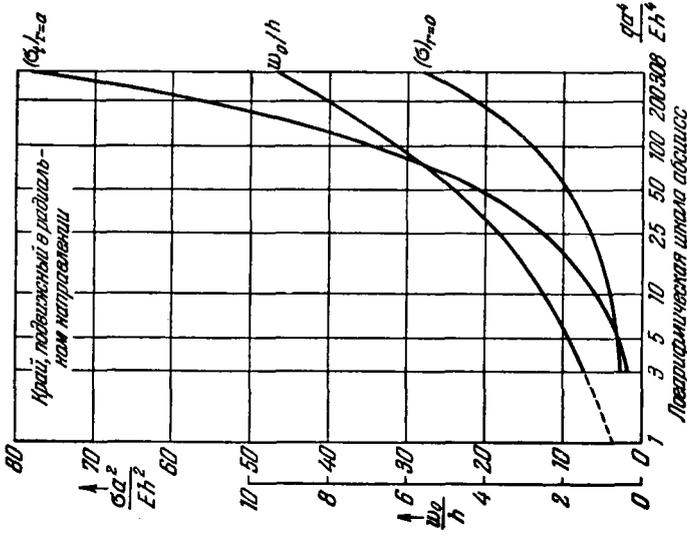


Рис. 206.

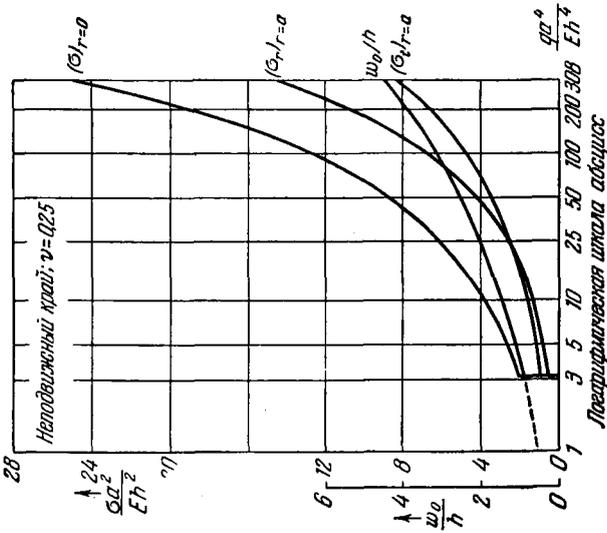


Рис. 205.

Таблица 82

Данные к вычислению приближенных значений прогибов w_0 и напряжений в равномерно нагруженной пластинке ($\nu = 0,3$)

Условия опирания		A	B	В центре		На контуре			
				$\alpha_r = \alpha_t$	$\beta_r = \beta_t$	α_r	α_t	β_r	β_t
Зашемленные	Контур неподвижен	0,471	0,171	0,976	2,86	0,476	0,143	-4,40	-1,32
	Контур подвижен	0,146	0,171	0,500	2,86	0	-0,333	-4,40	-1,32
Свободное опирание	Контур неподвижен	1,852	0,696	0,905	1,778	0,610	0,183	0	0,755
	Контур подвижен	0,262	0,696	0,295	1,778	0	-0,427	0	0,755

Таблица 82 может оказаться полезной для приближенных вычислений прогиба w_0 в центре из уравнения вида

$$\frac{w_0}{h} + A \left(\frac{w_0}{h} \right)^3 = B \frac{q}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^4, \quad (n)$$

а также напряжений в срединной плоскости по формулам

$$\sigma_r = \alpha_r E \frac{w_0^2}{a^2}, \quad \sigma_t = \alpha_t E \frac{w_0^2}{a^2} \quad (o)$$

и напряжений изгиба в крайнем волокне ¹⁾

$$\sigma'_r = \beta_r E \frac{w_0 h}{a^2}, \quad \sigma'_t = \beta_t E \frac{w_0 h}{a^2}. \quad (p)$$

100. Круглая пластинка, нагруженная в центре. Приближенное решение этой задачи может быть получено методом, описанным в § 81. Работа внутренних сил на виртуальных перемещениях $\delta \epsilon_r$, $\delta \epsilon_t$ выражается интегралом

$$\delta V_1 = -2\pi \int_0^a (N_r \delta \epsilon_r + N_t \delta \epsilon_t) r dr.$$

¹⁾ Знак отрицателен, если нижняя зона пластинки сжата.

Приняв во внимание уравнения (а) и (б) § 96, получим

$$\delta V_1 = -2\pi \int_0^a \left\{ N_r \delta \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 \right] + N_t \delta \left(\frac{u}{r} \right) \right\} r dr. \quad (a)$$

Допустим далее, что на контуре либо радиальное перемещение в срединной плоскости, либо радиальные силы N_r обращаются в нуль. Интегрируя тогда выражение (а) по частям и положив $\delta u = 0$ или $N_r = 0$ на $r = 0$, найдем

$$\delta V_1 = 2\pi \int_0^a \left[\frac{d}{dr} (rN_r) - N_t \right] \delta u dr - 2\pi \int_0^a rN_r \frac{d\omega}{dr} \delta \left(\frac{d\omega}{dr} \right) dr. \quad (b)$$

Работа изгибающих моментов M_r и M_t на вариациях $\delta(-d^2\omega/dr^2)$ и $\delta(-1/2 d\omega/dr)$ кривизн определяется аналогичным интегралом

$$\delta V_2 = 2\pi \int_0^a \left[M_r \delta \left(\frac{d^2\omega}{dr^2} \right) + M_t \delta \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \right] r dr. \quad (c)$$

Положим, что либо радиальный изгибающий момент M_r , либо наклон $\delta(d\omega/dr)$ должен обращаться на контуре в нуль. Интегрирование выражения (с) по частям дает тогда

$$\delta V_2 = 2\pi \int_0^a D \frac{d}{dr} (\Delta\omega) \delta \left(\frac{d\omega}{dr} \right) r dr. \quad (d)$$

Наконец, работа внешних сил равна

$$\delta V_3 = 2\pi \int_0^a q \delta w r dr,$$

или, если положить

$$\psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr, \quad q = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\psi) \quad (e)$$

и ввести сюда эти значения:

$$\delta V_3 = 2\pi \int_0^a \frac{d}{dr} (r\psi) \delta w r dr.$$

Для $\delta w = 0$ на контуре находим

$$\delta V_3 = -2\pi \int_0^a r\psi \delta \left(\frac{d\omega}{dr} \right) r dr. \quad (f)$$

Условие $\delta(V_1 + V_2 + V_3) = 0$ приводит теперь к уравнению

$$\int_0^a \left[D \frac{d}{dr} (\Delta w) - \psi - N_r \frac{dw}{dr} \right] \frac{d}{dr} (\delta w) r dr + \int_0^a \left[\frac{d}{dr} (r N_r) - N_t \right] \delta u dr = 0. \quad (g)$$

Нашим следующим шагом будет признать произвольными обе вариации δw и δu . Мы придем тогда ко второму из дифференциальных уравнений (234), для сил же N_r примем выражение (с) § 96 и уравнение (d) того же параграфа. Если мы предположим, что только это последнее уравнение равновесия должно быть выполнено, то нам потребуется еще удовлетворить условию

$$\int_0^a \left[D \frac{d}{dr} (\Delta w) - \psi - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \frac{dw}{dr} \right] \frac{d}{dr} (\delta w) r dr = 0, \quad (h)$$

в котором f — функция напряжений, определяющая

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{df}{dr}, \quad N_t = \frac{d^2 f}{dr^2} \quad (i)$$

и удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr} (\Delta f) = -\frac{Eh}{2r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad (j)$$

которое следует в свою очередь из уравнения (239). Интегрируя еще раз выражение (h) по частям, получаем

$$\int_0^a \left[D \Delta \Delta w - q - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{df}{dr} \frac{dw}{dr} \right) \right] \delta w r dr = 0. \quad (k)$$

Имея в виду использовать метод, описанный в § 81, выразим прогиб рядом

$$w = a_1 \varphi_1(r) + a_2 \varphi_2(r) + \dots + a_n \varphi_n(r). \quad (l)$$

Точно так же, как и в выражении (211), каждая функция $\varphi_i(r)$ должна удовлетворять здесь двум граничным условиям, предписанным для прогиба. Подставляя выражение (l) либо в уравнение (h), либо в (k) и повторяя ход рассуждения § 81, приходим к последовательности уравнений вида

$$\int_0^a X \frac{d\varphi_i}{dr} r dr, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (m)$$

где

$$X = D \frac{d}{dr} (\Delta w) - \psi - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \frac{dw}{dr}, \quad (n)$$

или же к группе уравнений

$$\int_0^a Y \varphi_i r dr, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (o)$$

где

$$Y = D \Delta \Delta w - q - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{df}{dr} \frac{dw}{dr} \right). \quad (p)$$

Рассмотрим теперь защемленную пластинку, нагруженную сосредоточенной силой P в центре $r=0$. Ограничимся в выражении (1) одним первым членом ряда, приняв для прогиба формулу

$$w = w_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + 2 \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} \right), \quad (q)$$

представляющую точное решение для пластинки с малыми прогибами. Из уравнения (j) получаем интегрированием

$$\frac{df}{dr} = - \frac{Ehw_0^2 r^3}{a^4} \left(\ln^2 \frac{r}{a} - \frac{3}{2} \ln \frac{r}{a} + \frac{7}{8} \right) + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (r)$$

Допустим, что на контуре возможно свободное радиальное перемещение. В таком случае постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из двух условий. Первое, а именно

$$(N_r)_{r=a} = 0,$$

может быть переписано в виде

$$\left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right)_{r=a} = 0, \quad (s)$$

второе же

$$\left(\frac{df}{dr} \right)_{r=0} = 0. \quad (t)$$

Это последнее условие нужно добавить с тем, чтобы ограничить в центре ($r=0$) значение N_r , определяемое из уравнения (i). Таким образом получаем

$$C_1 = \frac{7}{8} \frac{Ehw_0^2}{a^2}, \quad C_2 = 0.$$

Функция нагрузки в данном случае имеет вид

$$\psi = \frac{P}{2\pi r},$$

а выражения (q) и (r) дают

$$X = D \frac{8w_0}{a^2 r} - \frac{P}{2\pi r} + \frac{4Ew_0^3 h}{a^3} \left(\frac{r^3}{a^3} \ln^3 \frac{r}{a} - \frac{3}{2} \frac{r^3}{a^3} \ln^2 \frac{r}{a} + \frac{7}{8} \frac{r^3}{a^3} \ln \frac{r}{a} - \frac{7}{8} \frac{r}{a} \ln \frac{r}{a} \right), \quad (u)$$

между тем как φ_1 дается выражением в скобках (q). Подставляя это в уравнение (m), приходим к соотношению

$$16Dw_0 + \frac{191}{648} Ehw_0^3 = \frac{Pa^2}{\pi}. \quad (v)$$

Теперь из уравнений (101) получаем соответствующие прогибу (q) выражения для напряжений изгиба в крайнем волокне

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_r &= \frac{2Ehw_0}{(1-\nu^2)a^2} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right], \\ \sigma'_t &= \frac{2Ehw_0}{(1-\nu^2)a^2} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right]. \end{aligned} \right\} \quad (w)$$

Эти выражения дают бесконечно большие значения для напряжений при стремлении r к нулю. Полагая, однако, что нагрузка P распределена равномерно по площади круга малого радиуса $r = c$, мы получаем возможность использовать здесь простое соотношение, установленное для пластинки с малыми прогибами, между напряжениями $\sigma_r'' = \sigma_t''$ в центре такой площади и напряжениями $\sigma_r' = \sigma_t'$, произведенными в $r = c$ той же нагрузкой P , приложенной в точке $r = 0$. Согласно Надаи ¹⁾ это соотношение имеет вид

$$\sigma_r'' = \sigma_t'' = \sigma_r' + \frac{3}{2} \frac{P}{\pi h^2}.$$

Применяя его к пластинке с большими прогибами, получим для центра загруженной площади радиусом c приблизительно

$$\sigma_r'' = \sigma_t'' = \frac{2Eh\omega_0}{(1-\nu^2)a^2} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{c} - 1 \right] + \frac{3}{2} \frac{P}{\pi h^2}. \quad (x)$$

Полученные результаты распространяются на круглую пластинку, защемлен-

Таблица 83

Данные для вычисления приближенных значений прогибов ω_0 и напряжений в центрально нагруженной пластинке ($\nu = 0,3$)

Условия опирания		A	B	В центре	На контуре			
				$\alpha_r = \alpha_t$	α_r	α_t	β_r	β_t
Защемление	Контур неподвижный	0,443	0,217	1,232	0,357	0,107	-2,198	-0,659
	Контур подвижный	0,200	0,217	0,875	0	-0,250	-2,198	-0,659
Свободное опирание	Контур неподвижный	1,430	0,552	0,895	0,488	0,147	0	0,606
	Контур подвижный	0,272	0,552	0,407	0	-0,341	0	0,606

ною по неподвижному контуру. Вводя другие граничные условия, получаем для ω_0 уравнение

$$\frac{\omega_0}{h} + A \left(\frac{\omega_0}{h} \right)^3 = B \frac{Pa^2}{Ek^4}, \quad (y)$$

являющееся обобщением уравнения (v). Постоянные A и B приводятся в таблице 83. В той же таблице даны и некоторые коэффициенты ²⁾, необходимые для вычисления напряжений

$$\sigma_r = \alpha_r E \frac{\omega_0^2}{a^2}, \quad \sigma_t = \alpha_t E \frac{\omega_0^2}{a^2}, \quad (z)$$

¹⁾ Nadai A., *Elastische Platten*, стр. 63, Берлин, 1925.

²⁾ Все данные, содержащиеся в таблице 82, заимствованы из книги А. С. Вольмира, цит. выше, стр. 449.

действующих в срединной плоскости пластинки, а также напряжений изгиба в крайних волокнах

$$\alpha'_r = \beta_r E \frac{w_0 h}{a^2}, \quad \alpha'_t = \beta_t E \frac{w_0 h}{a^2}. \quad (z')$$

Первые вычисляются с помощью выражений (1), последние из (101) для моментов, причем знак — минус, если сжатие получается в нижней зоне ¹⁾.

101. Общие уравнения для больших прогибов пластинки. Для исследования общего случая больших прогибов пластинки воспользуемся уравнением (219), которое было выведено нами из рассмотрения равновесия элемента пластинки в направлении, перпендикулярном к пластинке. Силы N_x , N_y и N_{xy} зависят теперь не только от приложенных в плоскости xy внешних сил, но также и от деформации срединной плоскости пластинки в связи с изгибом. Предполагая, что объемных сил в плоскости xy не имеется и что нагрузка действует перпендикулярно к пластинке, мы должны будем принять следующие уравнения равновесия элемента в плоскости xy :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Третье уравнение, необходимое для определения трех величин N_x , N_y и N_{xy} , получается из рассмотрения деформации в срединной поверхности пластинки при ее изгибе. Соответствующие компоненты деформации [см. уравнения (221), (222) и (223)] будут

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Взяв от этих выражений вторые производные и скомбинировав получившиеся соотношения, можно показать, что

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (c)$$

¹⁾ Изгиб кольцевых пластинок с большими прогибами освещается в работах: Federhofer K., *Österr. Ingr.-Arch.*, т. 1, стр. 21, 1946; Reissner E., *Quart. Appl. Math.*, т. 10, стр. 167, 1952; т. 11, стр. 473, 1953. Большие прогибы эллиптической пластинки рассматриваются в статье Weil N. A., Newmark N. M., *J. Appl. Mech.*, т. 23, стр. 21, 1956.

Заменив компоненты деформации эквивалентными выражениями

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_y), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{hE} (N_y - \nu N_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{hG} N_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

получим и третье уравнение относительно искомым N_x , N_y и N_{xy} .

Решение этих трех уравнений значительно упрощается введением функции напряжений¹⁾. Очевидно, уравнения (а) тождественно удовлетворяются, если положить

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (e)$$

где F — функция x и y . Если эти выражения для сил подставить в уравнения (d), то компоненты деформации напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ \gamma_{xy} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Подставив эти выражения в уравнение (с), получим

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (245)$$

Второе уравнение, необходимое для определения F и w , получается путем подстановки выражений (е) в уравнение (217), что дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \\ &= \frac{h}{D} \left(\frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (246)$$

Уравнения (245) и (246) совместно с граничными условиями определяют две функции F и w ²⁾. Зная функцию напряжений, мы с по-

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Теория упругости, стр. 36, М., ОНТИ, 1937, а также Timoschenko S., Goodier J. N., Theory of elasticity, 2-е изд., стр. 26, 1951.

²⁾ Эти два уравнения были выведены Карманом (Th. von Kármán, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. IV, стр. 349, 1910). Конне применял к изгибу пластинок общий метод нелинейной теории упругости (Корре Е., Z. angew. Math. Mech., т. 36, стр. 455, 1956).

мощью уравнений (е) можем определить напряжения в срединной поверхности пластинки. Из функции w , определяющей изогнутую поверхность пластинки, мы можем получить напряжения изгиба и касательные напряжения, пользуясь теми же формулами, что и в случае пластинки с малым прогибом [см. уравнения (101) и (102)]. Таким образом, исследование больших прогибов пластинки сводится к решению двух нелинейных дифференциальных уравнений (245) и (246). Решение этих уравнений в общем случае не получено. Некоторые приближенные решения, однако, известны, и они будут рассмотрены в следующем параграфе.

В частном случае изгиба пластинки по цилиндрической поверхности¹⁾ с осью, параллельной оси y , уравнения (245) и (246) упрощаются, если заметить, что w в этом случае является функцией одного лишь x и что производные $\partial^2 F / \partial x^2$ и $\partial^2 F / \partial y^2$ суть постоянные величины. Уравнение (245) тогда удовлетворяется тождественно, а уравнение (246) сводится к

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q}{D} + \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Подобного рода задачи уже разбирались подробно в главе I. В случае применения более удобных для круглых пластинок полярных координат система уравнений (245) и (246) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F &= -\frac{E}{2} L(w, w), \\ \Delta \Delta w &= \frac{h}{D} L(w, F) + \frac{q}{D}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L(w, F) &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

а $L(w, w)$ определяется из предыдущего выражения после замены в нем w на F .

В случае весьма тонкой пластинки, прогибы которой могут во много раз превысить ее толщину, сопротивлением пластинки изгибу можно пренебречь, иными словами, жесткость пластинки при изгибе D может быть приравнена нулю, и задача сведется тогда к нахождению

¹⁾ Более общая теория пластинок (в частности, консольных), изогнутых без растяжения в развертывающуюся поверхность, излагается в работах: Mansfield E. H., Quart. J. Mech. Appl. Math., т. 8, стр. 338, 1955; Ashwell D. G., Quart. J. Mech. Appl. Math., т. 10, стр. 169, 1957. Явление пограничного слоя, возникающего по свободным краям таких пластинок, рассматривается в работе Fung Y. C., Witrick W. H., Quart. J. Mech. Appl. Math., т. 8, стр. 191, 1955.

прогиба гибкой мембраны. Уравнения (245) и (246) принимают в этом случае вид ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\ \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (247)$$

Численное решение этой системы уравнений методом конечных разностей было выполнено Генки ²⁾.

Энергетический метод представляет собой другое средство получения приближенного решения прогиба мембраны. Энергия деформации мембраны, обусловленная одним лишь растяжением ее срединной поверхности, дается выражением

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int \int (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy = \\ &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int \int \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2} (1-\nu) \gamma_{xy}^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (248)$$

Подставив выражения (179), (180) и (181) вместо компонентов деформации ε_x , ε_y , γ_{xy} , получим

$$\begin{aligned} V &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\nu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (249)$$

Применяя энергетический метод, мы должны в каждом частном случае принять надлежащие выражения для смещений u , v и w . Эти выражения должны, конечно, удовлетворять граничным условиям и содержать несколько произвольных параметров, значения которых подлежат определению методом виртуальных перемещений. Чтобы иллюстрировать применение этого метода, рассмотрим равномерно на-

¹⁾ Эти уравнения были получены А. Фепплом (F ö p p l A., Vorlesungen über technische Mechanik, т. 5, стр. 132, 1907).

²⁾ Н е н с к у Н., Z. angew. Math. Mech., т. 1, стр. 81 и 423, 1921. См. также К а i s e r R., Z. angew. Math. Mech., т. 16, стр. 73, 1936.

груженную квадратную мембрану¹⁾ со сторонами длиной $2a$ (рис. 207). Смещения u , v и w должны в этом случае обращаться на контуре в нуль. Сверх того, из симметрии можно заключить, что w — четная функция от x и y , функции же u и v — нечетные функции от x и соответственно от y . Все эти требования удовлетворяются, если мы примем для смещений следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a}, \\ u &= c \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2a}, \\ v &= c \sin \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi x}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

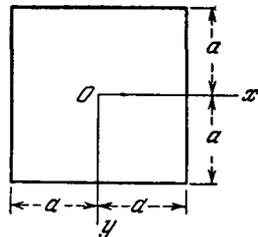


Рис. 207.

в которых содержатся два параметра w_0 и c . Подставив эти выражения в уравнение (243), получим при $\nu = 0,25$

$$V = \frac{Eh}{7,5} \left\{ \frac{5\pi^4}{64} \frac{w_0^4}{a^2} - \frac{17\pi^2}{6} \frac{cw_0^2}{a} + c^2 \left(\frac{35\pi^2}{4} + \frac{80}{9} \right) \right\}. \quad (h)$$

Принцип виртуальных перемещений дает два следующих уравнения²⁾:

$$\frac{\partial V}{\partial c} = 0, \quad (i)$$

$$\frac{\partial V}{\partial w_0} \delta w_0 = \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} q \delta w_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2a} dx dy. \quad (j)$$

Подставив выражение (h) вместо V , получим из уравнения (i)

$$c = 0,147 \frac{w_0^2}{a},$$

а из уравнения (j)

$$w_0 = 0,802a \sqrt[3]{\frac{qa}{Eh}}. \quad (250)$$

Этот прогиб в центре несколько больше, чем значение (236), полученное ранее для равномерно нагруженной круглой мембраны. Деформация

¹⁾ Вычисления для этого случая приводятся в книге «Сила и деформация» А.-Л. Фёппля, т. 1, стр. 257, М., ГТИ, 1933. См. также Непску, работу, указанную выше в сноске¹⁾ на стр. 464.

²⁾ Правая часть уравнения (i) равна нулю, потому что изменение параметра c приводит лишь к горизонтальным смещениям, вертикальная же нагрузка не совершает работы.

растяжения в центре мембраны по вычислению из выражений (g) получается равной

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\pi c}{a} = 0,462 \frac{w_0^2}{a^2}.$$

соответствующее же растягивающее напряжение

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu} \cdot 0,462 \frac{w_0^2}{a^2} = 0,616 \frac{E w_0^2}{a^2} = 0,396 \sqrt[3]{\frac{q^2 E a^2}{h^2}}. \quad (251)$$

Некоторые применения этих результатов к исследованию больших прогибов тонкой пластинки будут показаны в следующем параграфе.

102. Большие прогибы равномерно нагруженной прямоугольной пластинки. Начнем со случая пластинки с защемленными краями. Для получения приближенного решения задачи воспользуемся энергетическим методом ¹⁾. Полная энергия V деформации пластинки получится путем сложения энергии изгиба [выражение (117), стр. 106] с энергией, обусловленной деформацией срединной поверхности [выражение (249), стр. 464]. Тогда принцип виртуальных перемещений даст нам уравнение

$$\delta V - \delta \int \int q w \, dx \, dy = 0, \quad (a)$$

которое имеет силу при любых приращениях смещений u , v и w . Дифференцируя приращение V , мы можем получить из уравнения (a) систему уравнений (245) и (246), точное решение которой неизвестно. Чтобы найти приближенное решение нашей задачи, примем для u , v и w три функции, удовлетворяющие граничным условиям, налагаемым защемлением по контуру, и содержащие несколько параметров, которые определятся из уравнения (a). Для прямоугольной пластинки со сторонами $2a$ и $2b$ и при расположении осей координат, показанном на рис. 207, смещения запишутся в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)x(b_{00} + b_{02}y^2 + b_{20}x^2 + b_{22}x^2y^2), \\ v &= (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)y(c_{00} + c_{02}y^2 + c_{20}x^2 + c_{22}x^2y^2), \\ w &= (a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2(a_{00} + a_{02}y^2 + a_{20}x^2). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Первые два из этих выражений, представляющие собой смещения u и v в срединной плоскости, суть нечетные функции относительно x и соответственно относительно y , обращающиеся в нуль на контуре. Выражение для w , являющееся четной функцией относительно x и y , также обращается в нуль на контуре, равно как и его первые производные. Таким образом, все граничные условия, налагаемые защемлением по краям, удовлетворяются.

Выражения (b) содержат 11 параметров b_{00}, \dots, a_{20} , подлежащих теперь определению из уравнения (a), которое должно удовлетворяться при произ-

¹⁾ Такое решение было дано Уэем (S. Way); см. «Труды V Международного конгресса по прикладной механике», Proc. V Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938. О применении метода последовательных приближений и об экспериментальных подтверждениях результатов см. Chien Wei-Zang, Yeh Kai-Yuan, Proc. IX Intern. Congr. Appl. Mech., Брюссель, т. 6, стр. 403, 1957. Большие прогибы слегка изогнутой прямоугольной пластинки при сжатии по краям исследуются в работе Syed Yusuf, J. Appl. Mech., т. 19, стр. 446, 1952.

вольном изменении каждого из этих параметров. Таким путем получаем 11 уравнений, из которых три имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial a_{mn}} \left(U - \iint q w \, dx \, dy \right) = 0, \quad (c)$$

а восемь остальных¹⁾:

$$\frac{\partial V}{\partial b_{mn}} = 0 \text{ или } \frac{\partial V}{\partial c_{mn}} = 0. \quad (d)$$

Эти уравнения нелинейны относительно параметров a_{mn} , b_{mn} и c_{mn} ; в отличие от того, как это было в случае малых прогибов (см. стр. 383), три уравнения вида (c) содержат члены третьей степени относительно параметров a_{mn} . Уравнения вида (d) линейны относительно параметров b_{mn} и c_{mn} и квадратны

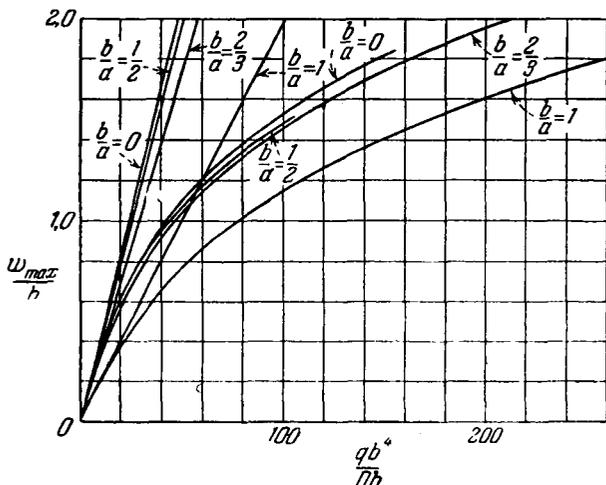


Рис. 208.

относительно параметров a_{mn} . Решение начинаем с уравнений (d), из которых определяем параметры b_{mn} и c_{mn} в функции a_{mn} , а затем вносим эти выражения в уравнения (c). Таким путем мы придем к трем уравнениям третьей степени, в которые будут входить лишь одни параметры a_{mn} . Для этих уравнений можно будет затем в каждом частном случае получить численные решения методом последовательных приближений.

Численные значения всех параметров были вычислены для различных интенсивностей нагрузки q и различных форм пластинки, именно для $b/a = 1$, $b/a = 2/3$ и $b/a = 1/2$, в предположении, что $\nu = 0,3$.

Из выражения для w видно, что если константа a_{00} нам известна, то мы сразу же можем получить прогиб пластинки в центре. Эти прогибы представлены графически на рис. 208, где даны кривые w_{\max}/h в функции qb^4/Dh . Для сравнения на графике нанесены также прямые линии, представляющие собой прогибы, вычисленные на основе теории малых прогибов. Кроме того, здесь имеется еще кривая для $b/a = 0$, дающая значения прогибов для бесконечно длинной пластинки, вычисление которых произведено по способу,

¹⁾ Появление нулей в правых частях этих уравнений обусловлено тем, что при изменениях u или v поперечная нагрузка не совершает никакой работы.

изложенному в § 3 (см. стр. 23). Можно заметить, что прогибы пластинки конечных размеров с $b/a < \frac{2}{3}$ весьма близки к значениям, полученным для бесконечно длинной пластинки.

Зная из выражений (б) смещения, мы можем из уравнений (б) предыдущего параграфа вычислить деформацию срединной плоскости и соответствующие напряжения мембраны. Напряжения изгиба находятся после этого из уравнений (101) и (102) для изгибающего и крутящего моментов.

Складывая напряжения мембраны и напряжения изгиба, получаем полные напряжения. Максимальные значения этих напряжений получаются в серединах длинных сторон пластинки. Они даны в графической форме на рис. 209. Для сравнения здесь нанесены также прямые линии, представляющие напряжения, полученные на основе теории малых прогибов, и кривая $b/a = 0$ для напряжений в бесконечно длинной пластинке. Представляется естественным ожидать, что полное напряжение при $b/a = 0$ должно быть больше, чем при $b/a = 1/2$ для любого значения нагрузки. Мы видим, однако, что кривая для $b/a = 0$ лежит ниже кривых для $b/a = 1/2$ и $b/a = 2/3$. Это, вероятно, результат приближенности решения энергетическим методом, объясняющийся тем, что мы пользуемся здесь конечным числом постоянных. Он указывает на то, что в вычисленных напряжениях содержится погрешность в сторону запаса прочности, т. е. что они слишком велики. Погрешность для $b/a = 1/2$ составляет, по-видимому, около 10%.

Энергетический метод применим также и в случае больших прогибов свободно опертой прямоугольной пластинки. Однако, как это можно заметить из предшествующего исследования, проведенного для случая защемления по контуру, его использование сопряжено с большим объемом вычислительной работы. Приближенное решение для свободно опертой прямоугольной пластинки может быть получено простым способом, состоящим из сочетания известных решений, указанных теорией малых прогибов и теорией мембраны ¹⁾.

¹⁾ Этот метод рекомендуется в книге Фёпpla «Сила и деформация», цит. на стр. 465.

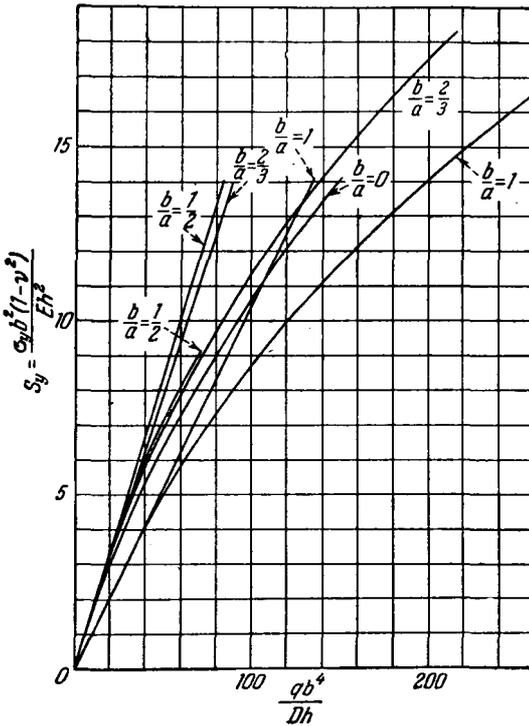


Рис. 209.

Проиллюстрируем теперь применение этого метода на простом примере квадратной пластинки. Положим, что нагрузку q можно разложить на две составляющие q_1 и q_2 таким образом, что часть q_1 будет уравниваться напряжениями изгиба и касательными напряжениями, вычисленными по теории малых прогибов, часть же q_2 будет уравниваться напряжениями мембраны. Прогиб в центре квадратной пластинки со сторонами $2a$ по вычислению с помощью теории малых прогибов будет равен¹⁾

$$w_0 = 0,730 \frac{q_1 a^4}{Eh^3}.$$

Отсюда определяем

$$q_1 = \frac{w_0 E h^3}{0,730 a^4}. \quad (e)$$

Рассматривая пластинку как мембрану и пользуясь формулой (250), получим

$$w_0 = 0,802a \sqrt[3]{\frac{q_2 a}{Eh}},$$

откуда

$$q_2 = \frac{w_0^3 E h}{0,516 a^4}. \quad (f)$$

Прогиб w_0 определится теперь из уравнения

$$q = q_1 + q_2 = \frac{w_0 E h^3}{0,730 a^4} + \frac{w_0^3 E h}{0,516 a^4},$$

которое дает

$$q = \frac{w_0 E h^3}{a^4} \left(1,37 + 1,94 \frac{w_0^2}{h^2} \right). \quad (252)$$

После того как из этого уравнения будет вычислен прогиб w_0 , а из уравнений (e) и (f) найдутся нагрузки q_1 и q_2 , вычисляются, наконец, и соответствующие напряжения, причем для q_1 пользуются теорией малых прогибов (см. § 30), а для q_2 уравнением (251). Полное напряжение найдется как сумма напряжений, обусловленных нагрузками q_1 и q_2 .

Другой приближенный метод, представляющий практический интерес, основывается на соображениях, вытекающих из свойств выражения (248) для энергии деформации растяжения срединной поверхности пластинки²⁾. Этому выражению можно придать вид

$$V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint [e^2 - 2(1-\nu)e_2] dx dy, \quad (g)$$

где

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y, \quad e_2 = \epsilon_x \epsilon_y - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2.$$

Подобное же выражение может быть записано и в полярных координатах, причем в случае осевой симметрии $e_2 = \epsilon_r \cdot \epsilon_t$. Для получения полной энергии

¹⁾ Коэффициент 0,730 возник в результате умножения приведенного в таблице 8 числа 0,00406 на 16 и на $12(1-\nu^2) = 11,25$.

²⁾ Веггер Н. М., J. Appl. Mech., т. 22, стр. 465, 1955.

деформации пластинки к величине (g) следует, разумеется, добавить еще энергию изгиба. Однако проверка точных решений, подобных приведенным в § 98, приводит к заключению, что члены дифференциальных уравнений, связанные с присутствием e_2 в выражении (g), не оказывают большого влияния на окончательный результат.

Исходя из гипотезы, что членом, содержащим e_2 , практически допустимо пренебречь в сравнении с e^2 , приходим к дифференциальному уравнению изогнутой пластинки

$$\Delta \Delta w - \alpha^2 \Delta w = \frac{q}{D}, \quad (h)$$

в котором величина

$$\alpha^2 = \frac{12}{h^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (i)$$

как обнаруживается, представляет собой постоянную. Из уравнений (b) § 101 следует, что удлинение $e = \epsilon_x + \epsilon_y$ в таком случае сохраняет постоянство для всей срединной поверхности изогнутой пластинки. В этом упрощенном виде рассматриваемая нами задача приобретает таким образом черты близкого сходства с задачами, которым была посвящена глава XII.

Для круглой пластинки под симметричной нагрузкой уравнение (i) преобразуется в

$$\alpha^2 = \frac{12}{h^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]. \quad (i)$$

В этом последнем случае постоянные интегрирования уравнения (h) вместе с постоянной (α) позволяют выполнить все условия, предписанные для контура пластинки. Однако в целях более точного вычисления мембранных напряжений N_r , N_t из прогибов вместо соотношения (j) следовало бы воспользоваться первым из уравнений (231).

Вычисление мембранных напряжений в прямоугольных пластинках, как показывает практика, приводит к сравнительно более громоздким формулам. И все же в целом процедура протекает при этом много проще, чем оперирование точными уравнениями (245) и (246), а численные результаты, в исследованных до сего времени случаях, обнаруживают точность, удовлетворительную для технической практики. Тем не менее в применениях этого метода представляется уместной некоторая осторожность, поскольку заложенная в его основе гипотеза не поддается непосредственной механической интерпретации.

103. Большие прогибы прямоугольной свободно опертой пластинки. К точному решению¹⁾ задачи, исследованной приближенно в предыдущем параграфе, можно подойти, отходя от системы уравнения (245) и (246).

¹⁾ Оно найдено С. Леви: Levy S., NACA Techn. Note, 846, 1942 и Proc. Symposia Appl. Math., т. 1, стр. 197, 1949. О применении этого метода к защемленным пластинкам см. последнюю из указанных работ, а также NACA Techn. Notes 847 и 852, 1942; применение к слабо изогнутой пластинке при сжатии по краям см. Соан J. M., J. Appl. Mech., т. 18, стр. 143, 1951, М. Стиппес применил метод Ритца к пластинке, опертой по двум противоположным краям, в которой мембранные силы по контуру обращаются в нуль: см. Proc. I. Natl. Congr. Appl. Mech., Chicago, Чикаго, 1952, стр. 339.

Представим прогиб пластинки (рис. 59) в форме, предложенной Навье,

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (a)$$

Граничные условия, распространяющиеся на прогибы и изгибающие моменты, удовлетворяются при этом некоторыми, пока неизвестными значениями коэффициентов w_{mn} . Заданное поперечное давление можно разложить в двойной ряд Фурье

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (b)$$

Функция напряжений Эри получает при этом выражение

$$F = \frac{P_x y^2}{2bh} + \frac{P_y x^2}{2ah} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (c)$$

где через P_x и P_y обозначена полная растягивающая нагрузка, приложенная соответственно по сторонам $x=0$ и $y=0$. Вводя выражения (a) и (c) в уравнение (245), приходим к следующему соотношению между коэффициентами обоих рядов:

$$f_{mn} = \frac{E}{4(m^2 b/a + n^2 a/b)^2} \sum b_{rspq} w_{rs} w_{pq}. \quad (d)$$

В сумму входят все произведения, для которых $r \pm p = m$ и $s \pm q = n$. Коэффициенты b_{rspq} определяются выражением

$$b_{rspq} = 2rspq \pm (r^2 q^2 + s^2 p^2), \quad (e)$$

в котором из двух знаков положительный берется в тех случаях, когда или $r+p=m$ и $s-q=n$ или же $r-p=m$, а $s+q=n$, отрицательный же — в других случаях. Например, для квадратной пластинки ($a=b$) имеем

$$f_{2,4} = \frac{E}{1600} (-4w_{1,1}w_{1,3} + 36w_{1,1}w_{3,3} + 36w_{1,1}w_{1,5} + 64w_{1,2}w_{1,6} \dots).$$

Остается установить связь между прогибами, функцией напряжений и поперечной нагрузкой. Вводя выражения (a), (b) и (c) в уравнение (246), приходим к уравнению

$$q_{mn} = D w_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + P_x w_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2 b} + P_y w_{mn} \frac{n^2 \pi^2}{a b^2} + \frac{h \pi^4}{4a^2 b^2} \sum c_{rspq} f_{rs} w_{pq}. \quad (f)$$

Суммирование охватывает на этот раз все произведения, для которых $r \pm p = m$ и $s \pm q = n$, коэффициенты же получают значения

$$c_{rspq} = \pm (r q \pm s p)^2, \text{ если } r \neq 0 \text{ и } s \neq 0, \quad (g)$$

или же вдвое большие, если эти условия принимают противоположный смысл. Первый знак положителен, если либо $r-p=m$, либо $s-q=n$ (но не одновременно), и отрицателен во всех иных случаях. Второй знак положителен,

если $r + p = m$ и $s - q = n$ или же $r - p = m$ и $s + q = n$, и отрицателен в иных условиях. Например,

$$q_{1,3} = Dw_{1,3}\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 + P_x w_{1,3} \frac{\pi^2}{a^2 b} + P_y w_{1,3} \frac{9\pi^2}{ab^2} + \\ + \frac{h\pi^4}{4a^2 b^2} (-8f_{0,2}w_{1,1} - 8f_{0,2}w_{1,5} + 100f_{2,4}w_{3,1} - 64f_{2,2}w_{3,1} + \dots).$$

В самолетостроении пластинки, входящие в состав конструкций, жестко обрамляются рамой так, что края их при деформировании сохраняют свою

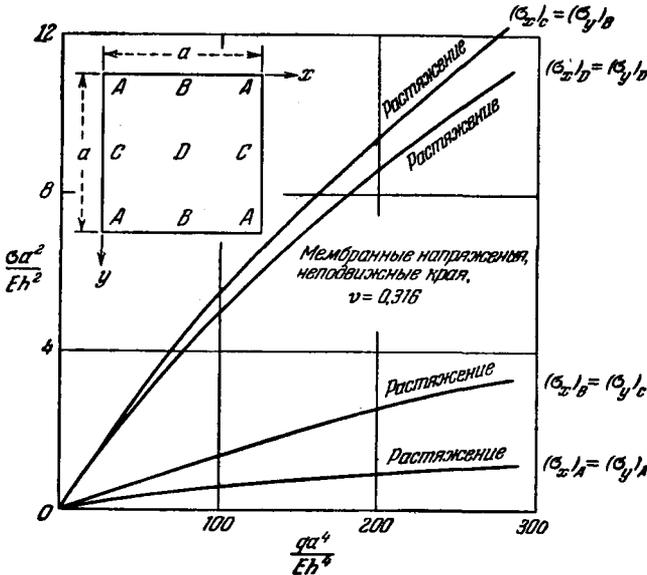


Рис. 210.

прямолинейность¹⁾. При этом удлинение пластинки, скажем, в направлении x , не должно зависеть от y . На основании уравнений (b) и (l) § 101 его значение равно

$$\delta_x = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^a \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx. \quad (h)$$

Вводя сюда ряды (a) и (c), получаем

$$\delta_x = \frac{P_x a}{bhE} - \frac{\nu P_y}{hE} - \frac{\pi^2}{8a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 w_{mn}^2, \quad (i)$$

¹⁾ Решение, принадлежащее Кайзеру (цит. на стр. 464), свободно от этого ограничительного условия.

т. е. выражение, действительно не содержащее y . Аналогично

$$\delta_y = \frac{P_y b}{ahE} - \frac{\nu P_x}{hE} - \frac{\pi^2}{8b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 w_{mn}^2. \quad (i)$$

Что касается граничных условий, то здесь опять следует иметь в виду два случая:

1) Все края неподвижны. Тогда $\delta_x = \delta_y = 0$, и уравнения (i) и (j) позволят нам выразить P_x и P_y через коэффициенты w_{mn} .

2) Внешние силы в плоскости пластинки по контуру отсутствуют. Это условие формулируется просто: $P_x = P_y = 0$.

Далее, вычисляется несколько членов в рядах (a) и (b), и соответствующие выражения (d) вводятся в уравнение (f). Таким путем для любого

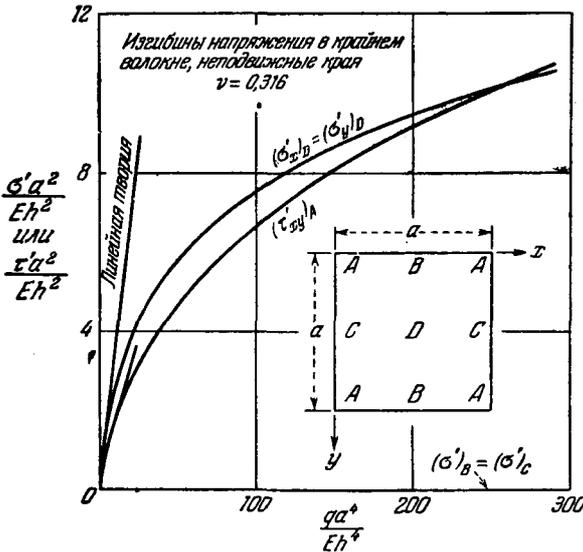


Рис. 211.

принятого нами числа неизвестных коэффициентов w_{mn} мы получим такое же число кубических уравнений. Решив их, вычислим коэффициенты (d) и таким путем, пользуясь рядами (a) и (c), получаем все данные о напряжениях и деформациях в пластинке. О точности решения можно судить, наблюдая изменения численных результатов по мере постепенного возрастания числа коэффициентов w_{mn} , вводимых в процесс вычисления. Некоторые полученные таким образом данные относительно изгибных и мембранных напряжений для равномерно нагруженной квадратной пластинки с неподвижными краями приводятся на рис. 210 и 211.

ГЛАВА XIV ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧКИ БЕЗ ИЗГИБА

104. Определения и обозначения. В нижеследующем исследовании деформаций и напряжений в оболочке мы будем пользоваться той же системой обозначений, что и в нашем изложении теории пластинки. Толщину оболочки будем обозначать через h , причем

эта величина всегда будет рассматриваться нами как малая в сравнении с другими измерениями оболочки и ее радиусами кривизны. Поверхность, делящая пополам толщину пластинки, называется *срединной поверхностью*. Задавая форму срединной поверхности и толщину оболочки в каждой ее точке, мы исчерпывающим образом определяем оболочку в геометрическом отношении.

Чтобы исследовать внутренние силы, вырежем из оболочки бесконечно малый элемент, образованный двумя парами смежных плоскостей, нормальных к срединной поверхности оболочки и содержащих ее главные кривизны (рис. 212, а). Направим оси координат x и y , как показано на чертеже, по касательным в точке O к линиям главной кривизны, а ось z нормально к срединной поверхности. Главные радиусы кривизны, лежащие в плоскостях xz и yz , обозначим соответственно через r_x и r_y . Напряжения, действующие в плоских гранях элемента, разложим по направлениям координатных

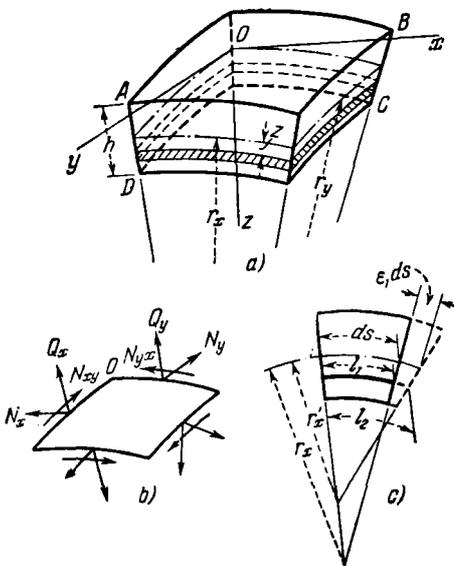


Рис. 212.

зано на чертеже, по касательным в точке O к линиям главной кривизны, а ось z нормально к срединной поверхности. Главные радиусы кривизны, лежащие в плоскостях xz и yz , обозначим соответственно через r_x и r_y . Напряжения, действующие в плоских гранях элемента, разложим по направлениям координатных

осей и для компонентов напряжений сохраним ранее принятые нами обозначения σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, τ_{xz} . В этих обозначениях¹⁾ результирующие силы на единицу длины нормальных сечений, показанных на рис. 212, *b*, будут

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz, \quad (a)$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz, \quad (b)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz. \quad (c)$$

Малые величины z/r_x и z/r_y появляются в выражениях (a), (b), (c) вследствие того, что боковые грани показанного на рис. 212, *a* элемента в связи с кривизной оболочки имеют трапециевидальную форму. В результате этого силы сдвига N_{xy} и N_{yx} вообще уже не равны друг другу, хотя равенство $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и продолжает при этом оставаться в силе. В нашем дальнейшем изложении мы, как уже сказано, будем предполагать, что толщина h весьма мала в сравнении с радиусами r_x , r_y , и на этом основании в выражениях (a), (b) и (c) будем всегда отбрасывать члены z/r_x и z/r_y . Тогда $N_{xy} = N_{yx}$, и результирующие силы будут определяться теми же самыми выражениями, что и в случае пластинки (см. § 21).

Изгибающий и крутящий моменты на единицу длины нормальных сечений будут даны выражениями

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz, \quad (d)$$

$$M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad M_{yx} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz, \quad (e)$$

¹⁾ Для поверхности вращения, положение элемента которой определяется углами θ и φ (см. рис. 213), в обозначениях напряжений, результирующих сил и моментов вместо индексов x и y применяются индексы θ и φ .

причем правило, с помощью которого определяются направления моментов, остается здесь тем же, что и в случае пластинки. В этих формулах мы будем также пренебрегать и малыми величинами z/r_x и z/r_y , обязанными своим присутствием кривизне оболочки, и пользоваться для моментов теми же выражениями, что и в исследовании пластинки.

При исследовании изгиба оболочки мы предполагаем, что линейные элементы ее, нормальные к ее срединной поверхности, подобные, например, элементам AD и BC (рис. 212, a), остаются прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности оболочки. Начнем с простого случая, когда боковые грани элемента $ABCD$ поворачиваются при изгибе лишь относительно линий пересечения их со срединной поверхностью. Если r'_x и r'_y — значения, принимаемые радиусами кривизны после деформации, то относительные удлинения тонкой полоски, находящейся на расстоянии z от срединной поверхности (рис. 212, a), будут равны

$$\epsilon_x = -\frac{z}{1 - \frac{z}{r_x}} \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right), \quad \epsilon_y = -\frac{z}{1 - \frac{z}{r_y}} \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right). \quad (f)$$

Если кроме поворота боковые грани элемента будут испытывать еще и параллельное самим себе смещение вследствие растяжения срединной поверхности и если соответствующие относительные удлинения срединной поверхности в направлениях x и y обозначить через ϵ_1 и соответственно ϵ_2 , то удлинение ϵ_x рассматриваемой полоски, как это явствует из рис. 212, c , будет равно

$$\epsilon_x = \frac{l_2 - l_1}{l_1}.$$

Произведя подстановки

$$l_1 = ds \left(1 - \frac{z}{r_x} \right), \quad l_2 = ds (1 + \epsilon_1) \left(1 - \frac{z}{r'_x} \right),$$

получим

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_1}{1 - \frac{z}{r_x}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{r_x}} \left[\frac{1}{(1 + \epsilon_1)r'_x} - \frac{1}{r_x} \right]. \quad (g)$$

Аналогичное выражение можно получить и для удлинения ϵ_y . Пренебрегая по малости величинами z/r_x и z/r_y , будем пренебрегать также и влиянием удлинений ϵ_1 и ϵ_2 на кривизну¹⁾. Тогда вместо

¹⁾ Аналогичные упрощения делаются обычно и в теории изгиба тонкого кривого бруса. Можно показать, что такой прием является допустимым, если толщина h поперечного сечения мала в сравнении с радиусом r , т. е. если, например, $h/r < 0,1$. См. книгу Тимошенко С. П., Сопrotивление материалов, т. 2, стр. 98, М., 1946.

выражений, подобных выражению (g), получим

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_1 - z \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) = \epsilon_1 - \chi_x z, \\ \epsilon_y &= \epsilon_2 - z \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) = \epsilon_2 - \chi_y z,\end{aligned}$$

где χ_x и χ_y обозначают изменения кривизн. Пользуясь этими выражениями для компонентов деформации полоски и положив, что нормальные напряжения между полосками отсутствуют ($\sigma_2 = 0$), мы найдем следующие выражения для компонентов напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 - z(\chi_x + \nu\chi_y)], \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_2 + \nu\epsilon_1 - z(\chi_y + \nu\chi_x)].\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнения (a) и (d) и пренебрегая малыми в сравнении с единицей величинами z/r_x и z/r_y , получим

$$\left. \begin{aligned}N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu\epsilon_2), & N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_2 + \nu\epsilon_1), \\ M_x &= -D(\chi_x + \nu\chi_y), & M_y &= -D(\chi_y + \nu\chi_x).\end{aligned} \right\} \quad (253)$$

где D имеет то же самое значение, что и в теории пластинки [см. уравнение (3)], и обозначает жесткость оболочки при изгибе.

Более общий случай деформации элемента, показанного на рис. 212, получится, если мы предположим, что кроме нормальных напряжений по боковым граням элемента действуют также и касательные напряжения. Обозначая (рис. 212, a) деформацию сдвига в срединной поверхности оболочки через γ , поворот же ребра BC по отношению к ребру Oz вокруг оси x через $\chi_{xy} dx$ и поступая, как и в случае пластинки [см. уравнение (42)], найдем

$$\tau_{xy} = (\gamma - 2z\chi_{xy}) G.$$

Подставив это в уравнения (b) и (e) и произведя указанные нами выше упрощения, получим

$$\left. \begin{aligned}N_{xy} &= N_{yx} = \frac{\gamma h E}{2(1+\nu)}, \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-\nu)\chi_{xy}.\end{aligned} \right\} \quad (254)$$

Допустив, таким образом, что при изгибе оболочки линейные ее элементы, нормальные к срединной поверхности, остаются прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности, мы получаем возможность выразить результирующие силы на

единицу длины N_x , N_y и N_{xy} , а также моменты M_x , M_y и M_{xy} в функции от шести величин: трех компонентов деформации ϵ_1 , ϵ_2 и γ срединной поверхности оболочки и трех величин χ_x , χ_y и χ_{xy} , представляющих собой изменения кривизн и относительное кручение срединной поверхности.

Во многих задачах, требующих определения деформации оболочки, напряжениями изгиба можно пренебречь, принимая обязательно во внимание лишь те напряжения, которые обусловлены деформацией в ее срединной поверхности. Возьмем в качестве примера тонкостенный сферический резервуар, подвергающийся действию равномерно распределенного внутреннего давления, нормального к поверхности оболочки. Под этим давлением срединная поверхность оболочки подвергается равномерной деформации, и так как толщина оболочки мала, то мы будем вправе предположить здесь, что растягивающие напряжения распределены по ее толщине равномерно. Аналогичный пример представляет собой тонкостенный резервуар в форме круглого цилиндра, в котором газ или жидкость сжаты посредством поршня, свободно движущегося по оси цилиндра. Кольцевые напряжения, возникающие в цилиндрической оболочке под действием равномерного внутреннего давления, распределяются по толщине оболочки равномерно. Если торцы цилиндра защищены, то оболочка не может свободно расширяться, и под действием внутреннего давления около ее торцов может произойти некоторый изгиб. Более детальное исследование показывает, однако (см. § 114), что этот изгиб носит местный характер и что часть оболочки на определенном расстоянии от торцов продолжает оставаться цилиндрической и испытывает лишь деформацию в срединной поверхности без заметного изгиба.

Если условия таковы, что изгибом оболочки допустимо пренебречь, то задача вычисления напряжений значительно упрощается, так как результирующие моменты (d) и (e), равно как и результирующие перерезывающие силы (с), при этом исчезают. Единственными неизвестными останутся тогда три величины N_x , N_y и $N_{xy} = N_{yx}$, которые могут быть определены из условий равновесия элемента, подобного показанному на рис. 212. Если, таким образом, все действующие на оболочку силы нам известны, то задача становится статически определимой. Получаемые при этом силы N_x , N_y и N_{xy} называются иногда *мембранными силами*, а теория оболочки, основанная на пренебрежении напряжениями изгиба, называется *мембранной теорией*.

Приложения этой теории к различным частным случаям излагаются в последующих параграфах этой главы.

105. Оболочка вращения, нагруженная симметрично относительно оси. Оболочки, имеющие форму поверхностей вращения, находят широкое применение во всякого рода резервуарах, цистернах,

бассейнах и куполах. Поверхность вращения получается в результате вращения плоской кривой относительно оси, лежащей в плоскости этой кривой. Эта кривая называется *меридианом*, а ее плоскость — *меридианной плоскостью*. Элемент оболочки вырезается из нее, как показано на рис. 213, а, двумя смежными меридианами и двумя параллельными кругами. Положение меридиана определяется углом θ , отсчитываемым от некоторой заданной меридианной плоскости; положение параллельного круга определяется углом φ , который нормаль к поверхности образует с осью вращения. Меридианная плоскость и плоскость, перпендикулярная к меридиану, являются плоскостями главных кривизн в некоторой точке поверхности вращения, а соответствующие радиусы кривизны обозначаются через r_1 и r_2 ; радиус параллельного круга обозначается через r_0 . Таким образом, длины встречающихся в точке O сторон элемента будут, как показано на чертеже, равны $r_1 d\varphi$ и $r_0 d\theta = r_2 \sin \varphi d\theta$. Тогда площадь поверхности элемента выразится произведением $r_1 r_2 \sin \varphi d\varphi d\theta$.

Из постулированной нами симметрии нагрузки и деформации можно заключить, что перерезывающих сил на гранях элемента не будет,

приходящиеся же на единицу длины нормальные силы обозначены, как показано на чертеже, через N_φ и N_θ . Интенсивность действующей в меридианной плоскости внешней нагрузки разлагается на две составляющие Y и Z , параллельные координатным осям. Умножая эти составляющие на площадь $r_1 r_2 \sin \varphi d\varphi d\theta$, получим составляющие приложенной к элементу внешней нагрузки.

Чтобы написать уравнения равновесия элемента, начнем с сил, действующих в направлении касательной к меридиану. На верхнюю сторону (грань) элемента действует сила

$$N_\varphi r_0 d\theta = N_\varphi r_2 \sin \varphi d\theta. \quad (a)$$

Соответствующая сила на нижней стороне элемента будет равна

$$\left(N_\varphi + \frac{dN_\varphi}{d\varphi} d\varphi \right) \left(r_0 + \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta. \quad (b)$$

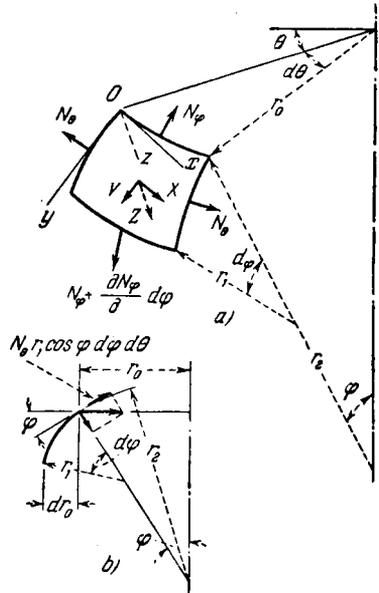


Рис. 213.

Из выражений (а) и (b), пренебрегая малой величиной второго порядка, находим, что результирующая в направлении y равна

$$N_{\varphi} \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi d\theta + \frac{dN_{\varphi}}{d\varphi} r_0 d\varphi d\theta = \frac{d}{d\varphi} (N_{\varphi} r_0) d\varphi d\theta. \quad (c)$$

Компонент внешней силы в том же направлении равен

$$Y r_1 r_0 d\varphi d\theta. \quad (d)$$

Силы, действующие на боковые стороны элемента, равны $N_{\theta} r_1 d\varphi$, а их равнодействующая в направлении радиуса параллельного круга равна $N_{\theta} r_1 d\varphi d\theta$. Компонент этой силы в направлении y (рис. 213, b) равен

$$-N_{\theta} r_1 \cos \varphi d\varphi d\theta. \quad (e)$$

Суммируя силы (c), (d) и (e), получаем уравнение равновесия в направлении касательной к меридиану

$$\frac{d}{d\varphi} (N_{\varphi} r_0) - N_{\theta} r_1 \cos \varphi + Y r_1 r_0 = 0. \quad (f)$$

Второе уравнение равновесия получается суммированием проекций сил на направление z . Силы, действующие по верхней и нижней сторонам элемента, имеют результирующую в направлении z , равную

$$N_{\varphi} r_0 d\theta d\varphi. \quad (g)$$

Силы, действующие по боковым сторонам элемента с равнодействующей $N_{\theta} r_1 d\varphi d\theta$ в направлении радиуса параллельного круга, дают компонент в направлении z , равный

$$N_{\theta} r_1 \sin \varphi d\varphi d\theta. \quad (h)$$

Компонент приложенной к элементу внешней нагрузки в том же направлении равен

$$Z r_1 r_0 d\theta d\varphi. \quad (i)$$

Складывая силы (g), (h) и (i), получим второе уравнение равновесия

$$N_{\varphi} r_0 + N_{\theta} r_1 \sin \varphi + Z r_1 r_0 = 0. \quad (j)$$

Если нам даны радиусы r_0 и r_1 , а также компоненты Y и Z интенсивности внешней нагрузки, то с помощью уравнений (f) и (j) мы можем в каждом частном случае вычислить силы N_{θ} и N_{φ} .

Вместо рассмотрения равновесия элемента мы можем (рис. 214) рассмотреть равновесие части оболочки, расположенной над парал-

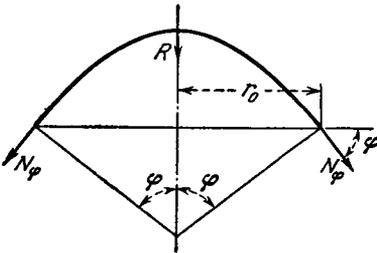


Рис. 214.

лельным кругом, определяемым углом φ . Если приходящуюся на эту часть оболочки результирующую полную нагрузки обозначить через R , то уравнение равновесия будет

$$2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi + R = 0. \quad (255)$$

Этим уравнением можно пользоваться вместо дифференциального уравнения (f), из которого оно получается посредством интегрирования. Если уравнение (j) разделить на произведение $r_1 r_0$, то оно напишется в виде

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -Z. \quad (256)$$

Мы видим, что если определить силу N_φ из уравнения (255), то из уравнения (256) можно будет вычислить силу N_θ . Таким образом, задача о мембранных напряжениях легко решается в каждом частном случае. Некоторые приложения этих уравнений будут разобраны в следующем параграфе.

106. Частные случаи оболочки вращения¹⁾. Сферический купол. Положим, что сферическая оболочка (рис. 215, а) подвергается действию собственного веса, величина которого на единицу площади постоянна и равна q . Обозначив радиус сферы через a , будем иметь $r_0 = a \sin \varphi$ и

$$R = 2\pi \int_0^\varphi a^2 q \sin \varphi \, d\varphi = 2\pi a^2 q (1 - \cos \varphi).$$

Тогда уравнения (255) и (256) нам дадут

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{aq(1 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} = -\frac{aq}{1 + \cos \varphi}, \\ N_\theta &= aq \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right). \end{aligned} \right\} \quad (257)$$

Мы видим, что силы N_φ получаются всегда отрицательными. Это значит, что по меридианам имеет место сжатие, которое возрастает по мере увеличения угла φ . Для $\varphi = 0$ имеем $N_\varphi = -aq/2$, для $\varphi = \pi/2$ сила возрастает вдвое: $N_\varphi = -aq$. Силы N_θ для малых углов φ тоже отрицательны. Если $\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi = 0$, т. е. для

¹⁾ Подобного рода примеры можно найти в книге Форххаймера (F o r s h e i m e r P., Die Berechnung ebener und gekrümmtter Behälterböden, 3-е изд., Берлин, 1931). См. также статью Геккелера (I. W. Geckeler) в Handbuch der Physik, т. 6, Берлин, 1928.

$\varphi = 51^\circ 50'$, N_φ обращается в нуль и с последующим увеличением φ становится положительной. Это указывает на то, что для φ , превышающих $51^\circ 50'$, в направлении, перпендикулярном к меридианам, имеются растягивающие напряжения.

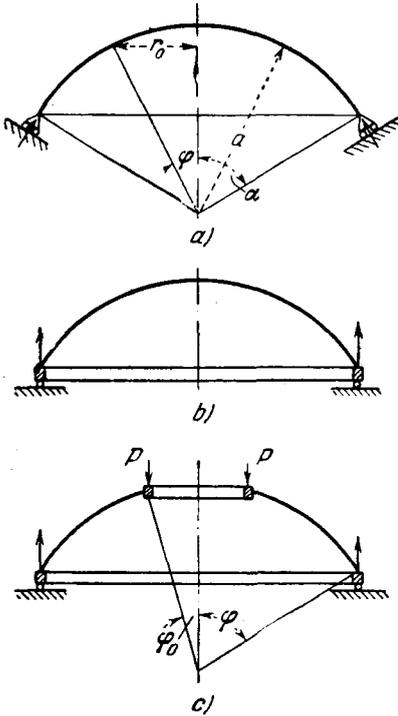


Рис. 215.

Вычисленные по уравнению (257) напряжения представляют собой весьма точные¹⁾ значения напряжений, фактически имеющих место в оболочке, если опоры ее такого рода, что реакции направлены по касательным к меридианам (рис. 215, а). Обычно конструкция бывает такова, что на купол передаются лишь вертикальные реакции опор, горизонтальные же компоненты сил N_φ воспринимаются опорным кольцом (рис. 215, б), которое подвергается равномерному окружному (тангенциальному) растяжению. Так как деформация растяжения кольца обычно отличается от деформации, имеющей место в параллельном круге оболочки и определяемой выражениями (257), то около опорного кольца будет происходить некоторое изгибание оболочки. Исследование этого изгиба²⁾ показывает, что в случае тонкой оболочки он имеет ясно

выраженный местный характер и что на определенном расстоянии от опорного кольца уравнения (257) продолжают с удовлетворительной точностью представлять распределение напряжений в оболочке.

¹⁾ Малые напряжения изгиба, обусловленные деформацией срединной поверхности, исследуются в главе XVI.

²⁾ См. § 131. Следует, однако, заметить, что в случае отрицательной или нулевой кривизны ($r_1, r_2 \leq 0$) изгибные напряжения, обусловленные краевым эффектом, не обязательно ограничиваются краевой зоной оболочки. См., например, Флюгге В., Статика и динамика оболочек, М., Госстройиздат, 1961. Ограничительный характер мембранной теории оболочки подробно обсуждается А. Л. Гольденвейзером в его книге «Теория упругих тонких оболочек», стр. 423, Москва, 1953. Вопрос о совместности мембранного напряженного состояния под заданной нагрузкой с заданными граничными условиями освещается также у Белендорфа (Behlendorff E., Z. angew. Math. Mech., т. 36, стр. 399, 1956).

Весьма часто верхняя часть сферического купола удаляется, как показано на рис. 215, с, и для поддержания вышерасположенных конструкций укладывается верхнее укрепляющее кольцо жесткости. Если угол, соответствующий верхнему отверстию купола, равен $2\varphi_0$, а вертикальная нагрузка, приходящаяся на единицу длины этого верхнего кольца, равна P , то результирующая R , соответствующая углу φ , выразится суммой

$$R = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} a^2 q \sin \varphi \, d\varphi + 2\pi P a \sin \varphi_0,$$

и тогда из уравнений (255) и (256) мы найдем

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -a q \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - P \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi}, \\ N_{\theta} &= a q \left(\frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} - \cos \varphi \right) + P \frac{\sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (258)$$

В качестве другого примера сферической оболочки рассмотрим сферический резервуар, опертый по параллельному кругу AA

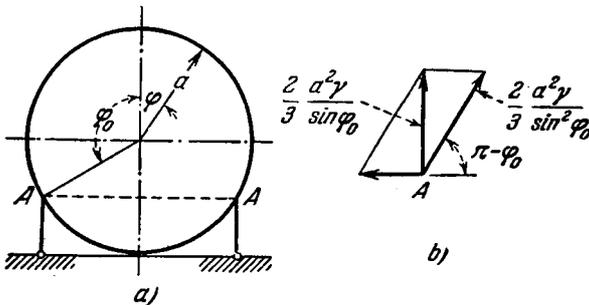


Рис. 216.

(рис. 216) и наполненный жидкостью удельного веса γ . Внутреннее давление для некоторого угла φ будет дано выражением¹⁾

$$p = -Z = \gamma a (1 - \cos \varphi).$$

Равнодействующая R этого давления для части оболочки, определенной углом φ , выразится интегралом

$$\begin{aligned} R &= -2\pi a^2 \int_0^{\varphi} \gamma a (1 - \cos \varphi) \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= -2\pi a^3 \gamma \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{2}{3} \cos \varphi \right) \right]. \end{aligned}$$

¹⁾ Равномерное давление, вызывающее в сферической оболочке равномерное растяжение, без труда может быть наложено на это давление.

Подставляя это значение в уравнение (255), получим

$$N_{\varphi} = \frac{\gamma a^2}{6 \sin^2 \varphi} [1 - \cos^2 \varphi (3 - 2 \cos \varphi)] = \frac{\gamma a^2}{6} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right); \quad (259)$$

из уравнения же (256) найдем, что

$$N_{\varphi} = \frac{\gamma a^2}{6} \left(5 - 6 \cos \varphi + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right). \quad (260)$$

Уравнения (259) и (260) справедливы для $\varphi < \varphi_0$. При вычислении равнодействующей R для бóльших значений φ , т. е. для нижней части резервуара, мы должны принять во внимание не только внутреннее давление, но также и сумму вертикальных реакций по кольцу AA . Эта сумма равна, очевидно, полному весу жидкости $4\pi a^3 \gamma / 3$. Поэтому

$$R = -\frac{4}{3} \pi a^3 \gamma - 2\pi a^3 \gamma \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{2}{3} \cos \varphi \right) \right].$$

Подставляя в уравнение (255), получим

$$N_{\varphi} = \frac{\gamma a^2}{6} \left(5 + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \right), \quad (261)$$

а из уравнения (256)

$$N_{\theta} = \frac{\gamma a^2}{6} \left(1 - 6 \cos \varphi - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \right). \quad (262)$$

Сравнивая выражения (259) и (261), мы видим, что на опорном кольце AA силы N_{φ} изменяются скачком на величину, равную $2\gamma a^2 / 3 \sin^2 \varphi_0$. Та же самая величина получится у нас при рассмотрении вертикальной реакции, приходящейся на единицу длины кольца AA , и разложении ее на два компонента (рис. 216, *b*): один по направлению касательной к меридиану, другой же — в горизонтальном направлении. Первый из этих компонентов равен указанному выше скачкообразному изменению величины N_{φ} , горизонтальный же компонент представляет собой реакцию в опорном кольце, вызывающую в нем равномерное сжатие. Этого сжатия можно избежать, если вместо изображенных на рис. 216, *a* вертикальных опорных стоек поставить раскосы в направлениях, касательных к меридианам. Как можно заметить из выражений (260) и (262), силы N_{θ} также испытывают скачкообразное изменение на круге AA . Это свидетельствует о том, что при переходе с одной стороны параллельного круга AA на другую скачкообразному изменению подвергается и окружное растяжение. Таким образом, мембранная теория не удовлетворяет условию непрерывности на круге AA , и мы вправе ожидать, что близ опорного кольца должен произойти некоторый местный изгиб.

Коническая оболочка. В этом случае известные мембранные напряжения могут быть вызваны силой, приложенной на вершине конуса. Если сила P действует в направлении оси конуса, то распределение напряжений симметрично, и из рис. 217 получаем

$$N_{\varphi} = -\frac{P}{2\pi r_0 \cos \alpha}. \quad (a)$$

Уравнение (256) дает тогда $N_{\theta} = 0$. Случай поперечной силы, приложенной в вершине в направлении образующей, находит место в § 110, а загрузка оболочки ее собственным весом рассматривается в § 133.

Если по конической поверхности симметрично распределены поперечные силы, то мембранные напряжения можно вычислить с помощью уравнений (255) и (256). Так как кривизна меридиана в случае конуса равна нулю, то $r_1 = \infty$, и мы можем написать эти уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -\frac{R}{2\pi r_0 \sin \varphi}, \\ N_{\theta} &= -Zr_2 = -\frac{Zr_0}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Каждая из результирующих сил N_{φ} и N_{θ} может быть вычислена независимо, если только нам известно распределение нагрузки. В качестве примера рассмотрим случай изображенного на рис. 218 конического резервуара, наполненного жидкостью удельного веса γ . Если y измеряет вертикальное расстояние параллельного круга от дна резервуара, d обозначает глубину всего слоя жидкости в резервуаре, то давление на уровне некоторого параллельного круга mn выразится произведением

$$p = -Z = \gamma(d - y).$$

Кроме того, для подобного резервуара $\varphi = (\pi/2) + \alpha$ и $r_0 = y \operatorname{tg} \alpha$. Подставив эти значения во второе из уравнений (c), получим

$$N_{\theta} = \frac{\gamma(d - y)y \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}. \quad (c)$$

Своего максимума эта сила достигает, очевидно, при $y = d/2$

$$(N_{\theta})_{\max} = \frac{\gamma d^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \cos \alpha}.$$

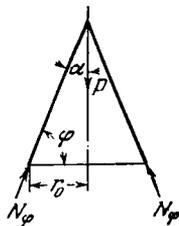


Рис. 217.

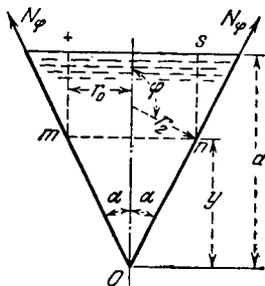


Рис. 218.

При вычислении силы N_φ заметим, что нагрузка R в первом из уравнений (с) численно равна весу жидкости в конической части mno вместе с весом жидкости в цилиндрической части $mnst$. Отсюда

$$R = -\pi\gamma y^2 \left(d - y + \frac{1}{3}y \right) \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

и мы получим

$$N_\varphi = \frac{\gamma y \left(d - \frac{2}{3}y \right) \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha}. \quad (d)$$

Эта сила принимает максимальное значение при $y = \frac{3}{4}d$, где она равна

$$(N_\varphi)_{\max} = \frac{3}{16} \frac{d^2 \gamma \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}.$$

Если опорные реакции резервуара направлены, как показано на рис. 218, по образующим, то выражения (с) и (d) представляют распределение напряжений в оболочке с большой точностью. Обычно по верхнему краю резервуара устраивается кольцо жесткости. Это кольцо и воспринимает горизонтальные компоненты сил N_φ ; вертикальные компоненты тех же самых сил представляют собой опорные реакции резервуара. В этом случае мы найдем, что местный изгиб оболочки произойдет у армирующего кольца.

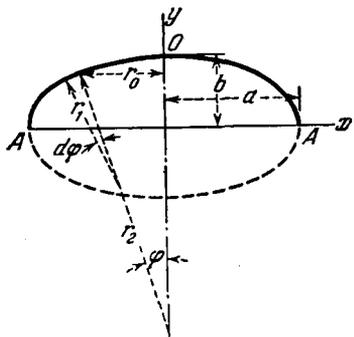


Рис. 219.

Оболочка, имеющая форму эллипсоида вращения. Такая оболочка весьма часто применяется для торцов цилиндрических котлов. При этом, как

показано на рис. 219, используется половина эллипсоида. Для эллипса с полуосями a и b главные радиусы кривизны будут выражаться формулами

$$r_1 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad r_2 = \frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \quad (e)$$

или, если написать то же в примененных на чертеже прямоугольных координатах x , y ,

$$r_1 = r_2^3 \frac{b^2}{a^4}, \quad r_2 = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{1}{2}}}{b^2}. \quad (f)$$

Если главные кривизны определены из уравнения (е) или (f), то силы N_φ и N_θ находятся непосредственно из уравнений (255) и (256). Пусть p будет равномерно распределенное давление пара в котле, тогда для параллельного круга радиуса r_0 мы будем иметь $R = -\pi r_0^2 p$, и уравнение (255) нам даст

$$N_\varphi = \frac{pr_0}{2 \sin \varphi} = \frac{pr_2}{2}. \quad (263)$$

Подставив это в уравнение (256), найдем

$$N_\theta = r_2 p - \frac{r_2}{r_1} N_\varphi = p \left(r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1} \right). \quad (264)$$

Для вершины оболочки, т. е. для точки O , имеем $r_1 = r_2 = a^2/b$, и уравнения (263) и (264) дадут

$$N_\varphi = N_\theta = \frac{pa^2}{2b}. \quad (г)$$

На экваторе AA имеем $r_1 = b^2/a$ и $r_2 = a$. Отсюда

$$N_\varphi = \frac{pa}{2}, \quad N_\theta = pa \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} \right). \quad (h)$$

Мы видим, что силы N_φ всегда положительны, в то время как силы N_θ становятся на экваторе отрицательными, если

$$a^2 > 2b^2. \quad (i)$$

В частном случае сферы $a = b$, и мы найдем, что во всех ее точках $N_\varphi = N_\theta = pa/2$.

Оболочка, имеющая форму тора. Если тор получен вращением круга радиуса a около вертикальной оси (рис. 220), то силы N_φ определяются из рассмотрения равновесия кольцеобразной части оболочки, изображенной на чертеже жирной линией AB . Так как силы N_φ в параллельном круге BB горизонтальны, то при рассмотрении равновесия в вертикальном направлении нам необходимо будет принимать во внимание лишь силы N_φ на круге AA и приложенные к кольцу внешние силы. Полагая, что оболочка подвергается действию равномерного внутреннего давления p , получим уравнение равновесия

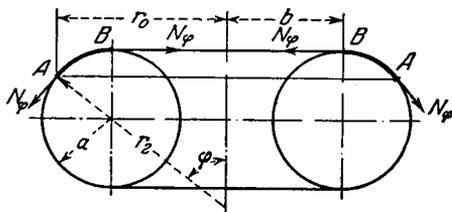


Рис. 220.

$$2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi = \pi p (r_0^2 - b^2),$$

откуда

$$N_{\varphi} = \frac{p(r_0^2 - b^2)}{2r_0 \sin \varphi} = \frac{pa(r_0 + b)}{2r_0}. \quad (265)$$

Подставив это выражение в уравнение (256), найдем¹⁾

$$N_{\theta} = \frac{pr_2(r_0 - b)}{2r_0} = \frac{pa}{2}. \quad (266)$$

Подобным же примером рассчитывается и тор эллиптического поперечного сечения.

107. Оболочки равного сопротивления. В качестве первого примера оболочки постоянного сопротивления рассмотрим купол переменной толщины, нагруженный собственным весом. Вес оболочки на единицу площади срединной поверхности равен γh , и два компонента этого веса по осям координат будут

$$Y = \gamma h \sin \varphi, \quad Z = \gamma h \cos \varphi. \quad (a)$$

Очертание меридианов для оболочки равного сопротивления определяется из того условия, чтобы сжимающее напряжение в срединной поверхности было постоянно во всех направлениях и равнялось бы σ , т. е. так, чтобы

$$N_{\varphi} = N_{\theta} = -\sigma h.$$

Подставляя это в уравнение (256), находим

$$\sigma h \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \gamma h \cos \varphi, \quad (b)$$

откуда, внося сюда $r_2 = r_0 \sin \varphi$ и решив относительно r_1 , получаем

$$r_1 = \frac{r_0}{\frac{\gamma}{\sigma} r_0 \cos \varphi - \sin \varphi}. \quad (c)$$

Из рнс. 213, b имеем

$$r_1 d\varphi = \frac{dr_0}{\cos \varphi}.$$

Таким образом, уравнение (c) может быть представлено в виде

$$\frac{dr_0}{d\varphi} = \frac{r_0 \cos \varphi}{\frac{\gamma}{\sigma} r_0 \cos \varphi - \sin \varphi}. \quad (d)$$

Для вершины купола, где $\varphi = 0$, правая часть уравнения становится неопределенной. Чтобы устранить это затруднение, воспользуемся уравнением (b).

¹⁾ Рассмотрение деформации оболочки обнаруживает тем не менее, что близ вершины $r_0 = b$ оболочки неизбежно должны возникнуть напряжения изгиба, даже в отсутствие каких бы то ни было особенностей как в форме поверхности оболочки, так и в распределении нагрузки; см. Dean W. R., Phil. Mag., 7-я серия, т. 28, стр. 452, 1939, а также Флюгге, цит. выше, стр. 482.

В силу условий симметрии на вершине имеем $r_1 = r_2$, и отсюда

$$r_1 = r_2 = \frac{2\sigma}{\gamma} \quad \text{и} \quad dr_0 = r_1 d\varphi = \frac{2\sigma}{\gamma} d\varphi.$$

Поэтому для вершины купола получаем

$$\frac{dr_0}{d\varphi} = \frac{2\sigma}{\gamma}. \quad (e)$$

Форму меридиана мы можем получить из уравнений (e) и (d) посредством численного интегрирования, приняв в качестве отправного пункта вершину купола и для каждого приращения $\Delta\varphi$ угла φ вычисляя соответствующее приращение Δr_0 радиуса r_0 . Изменения толщины оболочки находятся с помощью уравнения (f) § 105. Подставив в это уравнение $N_\varphi = N_0 = -\sigma h$ и заметив, что σ — величина постоянная, получим

$$-\frac{d}{d\varphi}(hr_0) + hr_1 \cos \varphi + \frac{\gamma}{\sigma} r_1 r_0 h \sin \varphi = 0. \quad (f)$$

Подставив сюда вместо r_1 выражение (c), получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{d\varphi}(hr_0) = hr_0 \frac{\cos \varphi + \frac{\gamma}{\sigma} r_0 \sin \varphi}{\frac{\gamma}{\sigma} r_0 \cos \varphi - \sin \varphi}. \quad (g)$$

Для $\varphi = 0$ из уравнения (f) найдем

$$\frac{d}{d\varphi}(hr_0) \approx hr_1 = h \frac{dr_0}{d\varphi}.$$

Мы видим, что при первом приращении $\Delta\varphi$ угла φ для h можно взять любое постоянное значение. Толщина оболочки для остальных точек меридиана находится после этого путем численного интегрирования уравнения (g). Итоги такого рода подсчета изображены на рис. 221¹⁾. Мы видим, что условие

$$N_0 = N_\varphi = -\sigma h$$

приводит нас не только к определенной форме срединной поверхности купола, но также и к определенному закону изменения его толщины вдоль меридиана.

В случае резервуара равного сопротивления, содержащего жидкость с давлением γd в наивысшей точке A (рис. 222), наша задача сводится к нахождению такой формы меридиана, при которой внутреннее давление, равное γz , приводит к возникновению во всех точках оболочки сил²⁾

$$N_\varphi = N_0 = \text{const.}$$

Подобная же задача встречается при определении формы капли жидкости, покоящейся на горизонтальной плоскости. Под действием капиллярных

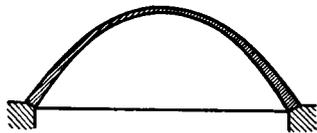


Рис. 221.

¹⁾ Этот пример был вычислен Флюгге; см. Флюгге В., Статика и динамика оболочек, М., Госстройиздат, 1961.

²⁾ Математическое исследование этой задачи приводится в книге Рунге Кёнига (Runge С., König Н., Vorlesungen über numerisches Rechnen, стр. 320, Берлин, 1924).

сил при этом образуется тонкая поверхностная пленка равномерного напряжения, которая обертывает жидкость и препятствует ей распространяться по опорной поверхности. Обе задачи в математическом отношении идентичны.

Для таких случаев уравнение (256) дает

$$N_{\varphi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \gamma z. \quad (h)$$

Взяв, как показано на чертеже, прямоугольные координаты, имеем

$$r_2 = \frac{x}{\sin \varphi}, \quad r_1 d\varphi = ds = \frac{dx}{\cos \varphi}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{r_2} = \frac{\sin \varphi}{x}, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{\cos \varphi d\varphi}{dx} = \frac{d \sin \varphi}{dx}.$$

Уравнение (h) дает

$$\frac{d \sin \varphi}{dx} + \frac{\sin \varphi}{x} = \frac{\gamma z}{N_{\varphi}}. \quad (i)$$

Заметив, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{dx} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad (j)$$

мы можем исключить $\sin \varphi$ из уравнения (i), получить таким путем дифференциальное уравнение относительно z в функции x . Получаемое таким

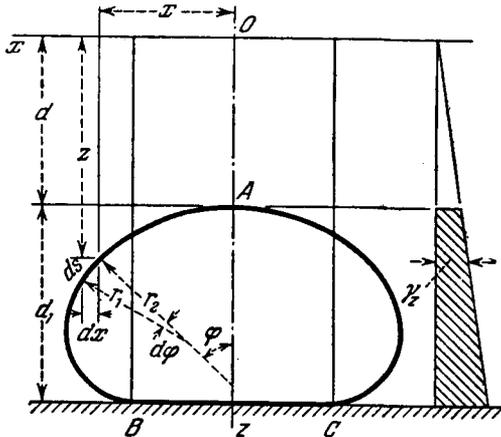


Рис. 222.

способом уравнение весьма сложно, и более простой путь решения задачи заключается во введении новой переменной $u = \sin \varphi$. Произведя эту подстановку в уравнениях (i) и (j), получим

$$\frac{du}{dx} + \frac{x}{u} = \frac{\gamma z}{N_{\varphi}}, \quad (k)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (l)$$

Эти уравнения можно интегрировать численно, отправляясь от наивысшей точки A резервуара. В силу симметрии в этой точке $r_1 = r_2$, и уравнение (h) дает

$$r_1 = \frac{2N_\varphi}{\gamma d}.$$

Введя обозначение

$$\frac{N_\varphi}{\gamma} = a^2,$$

мы можем написать

$$r_1 = \frac{2a^2}{d}. \quad (\text{m})$$

Этим радиусом мы описываем первый элемент меридианной кривой $r_1 \Delta\varphi = \Delta x$, соответствующий малому углу $\Delta\varphi$. В конце этой дуги мы имеем, как для малой дуги окружности,

$$\left. \begin{aligned} z &\approx d + r_1 \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} = d + \frac{(\Delta x)^2}{2r_1} = d \left(1 + \frac{(\Delta x)^2}{4a^2} \right), \\ u &\approx \frac{\Delta x}{r_1} = d \frac{\Delta x}{2a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{n})$$

После того как из уравнений (n) найдем значения u и z , уравнения (k) и (l) позволят нам найти для той же точки du/dx и dz/dx . Исходя из этих значений производных, мы получим возможность вычислить значения z и u для конца ближайшего следующего интервала и т. д. Эти вычисления можно без затруднений продолжить до угла φ , равного, например, 50° , когда u станет равным приблизительно 0,75. Начиная с этого пункта и до $\varphi = 140^\circ$ приращения z становятся значительно более длинными, чем приращения x , и потому здесь становится выгодным принять в качестве независимой переменной z вместо x . Для $\varphi > 140^\circ$ независимой переменной нужно будет взять опять x и вычисления продолжить до точки B , где касательная BC к меридианной кривой принимает горизонтальное положение. По площади круга BC резервуар имеет горизонтальную поверхность соприкосновения с фундаментом и давление $\gamma(d + d_1)$ уравновешивается реакцией этого фундамента.

Рассчитанный таким способом резервуар будет резервуаром равного сопротивления лишь в том случае, если давление в A окажется именно таким, какое предположено в расчетах ¹⁾. Для всякого иного значения этого давления силы N_θ и N_φ уже не будут постоянными, но станут изменяться вдоль меридиана. Величину их можно будет тогда вычислить из общих уравнений (255) и (256). Мы обнаружим также, что равновесие резервуара потребует, чтобы по параллельному кругу BC действовали вертикальные перерезывающие силы. Это укажет на то, что вблизи этого круга произойдет местный изгиб стенки резервуара.

108. Смещения в симметрично нагруженной оболочке вращения. В случае симметричной деформации оболочки малое смещение точки можно разложить на два компонента: v — по направлению касательной к меридиану и w — по направлению нормали к срединной

¹⁾ Такого типа резервуар был построен чикагским заводом мостов и металлических конструкций; см. Day C. L., Eng. News. Rec., т. 103, стр. 416, 1929.

поверхности. Рассматривая элемент AB меридиана (рис. 223), мы видим, что приращение длины элемента вследствие тангенциальных смещений v и $v + (dv/d\varphi)d\varphi$ его концов равно $(dv/d\varphi)d\varphi$. Вследствие радиальных смещений w точек A и B длина элемента сокращается на величину $w d\varphi$. Изменением длины элемента, обусловленным разницей радиальных смещений точек A и B , можно пренебречь, как малой величиной более высокого порядка малости.

Таким образом, полное изменение длины элемента AB вследствие деформации будет равно разности

$$\frac{dv}{d\varphi} d\varphi - w d\varphi.$$

Разделив эту величину на первоначальное значение длины $r_1 d\varphi$ элемента, мы найдем, что линейная деформация оболочки в меридианном направлении равна

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{w}{r_1}. \quad (a)$$

Если мы рассмотрим элемент параллельного круга, то увидим (рис. 223), что благодаря смещениям v и w радиус r_0 круга возрастает на величину

$$v \cos \varphi - w \sin \varphi.$$

Длина окружности параллельного круга возрастает в том же отношении, что и радиус, поэтому

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_0} (v \cos \varphi - w \sin \varphi),$$

или, подставив $r_0 = r_2 \sin \varphi$, получим

$$\varepsilon_\theta = \frac{v}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{w}{r_2}. \quad (b)$$

Исключив w из уравнений (a) и (b), получим для определения v дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \operatorname{ctg} \varphi = r_1 \varepsilon_\varphi - r_2 \varepsilon_\theta. \quad (c)$$

На основании закона Гука компоненты деформации ε_φ и ε_θ можно будет выразить в функции сил N_φ и N_θ . Это нам даст

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

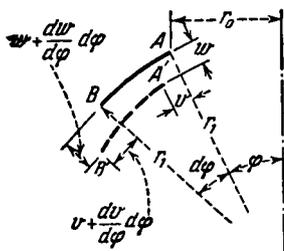


Рис. 223.

Подставив в уравнение (с), получим

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{Eh} [N_{\varphi}(r_1 + \nu r_2) - N_{\theta}(r_2 + \nu r_1)]. \quad (267)$$

Силы N_{φ} и N_{θ} могут быть найдены в каждом частном случае из условий загрузки, и тогда смещение v определится путем интегрирования дифференциального уравнения (267). Обозначив правую часть этого уравнения через $f(\varphi)$, напишем

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \operatorname{ctg} \varphi = f(\varphi).$$

Общим решением этого уравнения будет

$$v = \sin \varphi \left(\int \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + C \right), \quad (e)$$

где C — постоянная интегрирования, подлежащая определению из условий на опоре.

Возьмем для примера сферическую оболочку постоянной толщины, нагруженную своим собственным весом (рис. 215, а). В этом случае $r_1 = r_2 = a$ силы N_{φ} и N_{θ} задаются выражениями (257), а уравнение (267) принимает вид

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \operatorname{ctg} \varphi = \frac{a^2 q (1 + \nu)}{Eh} \left(\cos \varphi - \frac{2}{1 + \cos \varphi} \right).$$

Общее решение (e) получит тогда вид

$$v = \frac{a^2 q (1 + \nu)}{Eh} \left[\sin \varphi \ln (1 + \cos \varphi) - \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \right] + C \sin \varphi. \quad (f)$$

Постоянная C определится теперь из условия, что при $\varphi = \alpha$ смещение v равно нулю (рис. 215, а). Из этого условия

$$C = \frac{a^2 q (1 + \nu)}{Eh} \left[\frac{1}{1 + \cos \alpha} - \ln (1 + \cos \alpha) \right]. \quad (g)$$

Смещение v определится после подстановки этого значения C в выражение (f). Смещение w найдется тотчас же из уравнения (b). На опоре, где $v = 0$, смещение w можно вычислить непосредственно из уравнения (b), не пользуясь решением (f), а подставив значение ϵ_0 из второго уравнения (d).

109. Оболочка вращения под несимметричной нагрузкой. Рассмотрим вновь элемент, вырезанный из оболочки двумя смежными меридианами и двумя параллельными кругами (рис. 224); в общем случае по его сторонам будут действовать не только нормальные силы N_{φ} и N_{θ} , но также и силы сдвига $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$. Взяв сумму проекций на направление u всех действующих на элемент сил, мы

должны будем к силам, рассмотренным в § 105, присоединить еще силу

$$\frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta} r_1 d\theta d\varphi, \quad (a)$$

представляющую собой разность сил сдвига, действующих по боковым сторонам элемента. Поэтому вместо уравнения (f) § 105 мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} (N_{\varphi} r_0) + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial\theta} r_1 - N_{\theta} r_1 \cos\varphi + Y r_1 r_2 = 0. \quad (268)$$

При рассмотрении сил, действующих по направлению x , мы должны включить:

1) разность между перерезывающими силами, действующими по верхней и по нижней сторонам элемента; эта разность выражается следующим образом:

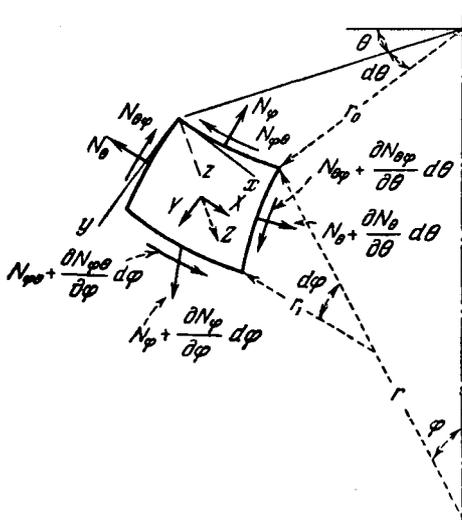


Рис. 224.

$$\begin{aligned} N_{\varphi\theta} \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi d\theta + \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial\varphi} r_0 d\varphi d\theta = \\ = \frac{\partial}{\partial\varphi} (r_0 N_{\varphi\theta}) d\varphi d\theta; \end{aligned} \quad (b)$$

2) силу

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial\theta} r_1 d\theta d\varphi, \quad (c)$$

обязанную своим существованием изменению силы N_{θ} ;

3) силу

$$N_{\theta\varphi} r_1 \cos\varphi d\theta d\varphi, \quad (d)$$

возникающую в связи с наличием малого угла $\cos\varphi d\theta$ между направлениями сил сдвига $N_{\theta\varphi}$, действующих по боковым сторонам элемента;

4) наконец, компонент по направлению оси x , приложенной к элементу внешней нагрузки, равный

$$X r_0 r_1 d\theta d\varphi. \quad (e)$$

Суммируя все эти силы, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} (r_0 N_{\varphi\theta}) + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial\theta} r_1 + N_{\theta\varphi} r_1 \cos\varphi + X r_0 r_1 = 0. \quad (269)$$

Третье уравнение равновесия получится при проектировании всех сил на ось z . Так как проекция сил сдвига на эту ось обращается

в нуль, то третье уравнение совпадает с уравнением (256), выведенным для симметричной нагрузки.

Задача определения мембранных напряжений под несимметричной нагрузкой сводится к решению трех уравнений (268), (269) и (256) для заданных значений компонентов X , Y и Z интенсивности внешней нагрузки. В следующем параграфе будет показано применение этих уравнений к случаю оболочки, подвергающейся давлению ветра.

110. Напряжения от ветровой нагрузки¹⁾. В качестве частного примера применения выведенных в предыдущем параграфе общих уравнений равновесия рассмотрим действие на оболочку давления ветра. Допустив, что направление ветра определяется меридианной плоскостью $\theta = 0$ и что давление его нормально к поверхности оболочки, мы будем иметь

$$X = Y = 0, \quad Z = p \sin \varphi \cos \theta. \quad (a)$$

Уравнениями равновесия тогда будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} r_1 - N_\theta r_1 \cos \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\varphi\theta}) + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 + N_{\theta\varphi} r_1 \cos \varphi &= 0, \\ N_\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin \varphi &= -pr_0 r_1 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Пользуясь последним из этих уравнений, исключим силу N_θ , в результате чего получим для определения N_φ и $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta}$ следующие два дифференциальных уравнения²⁾ первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \left(\frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{d\varphi} + \operatorname{ctg} \varphi \right) N_\varphi + \frac{r_1}{r_0} \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} &= -pr_1 \cos \varphi \cos \theta, \\ \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{d\varphi} + \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi \right) N_{\theta\varphi} - \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \theta} &= -pr_1 \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

¹⁾ Первое исследование по этому вопросу было выполнено Рейсснером (Reissner H., Müller-Breslau-Festschrift, стр. 181, Лейпциг, 1912). См. также работу Дишингера (F. Dischinger) в Handbuch der Eisenbetonbau, Eimperger, 4-е изд., том 6, Берлин, 1928. Кроме того, см. Wiedemann E., Schweiz. Bauzeitung, т. 108, стр. 249, 1936, и Girkmann K., Der Stahlbau. Дальнейшее развитие теории несимметричной деформации находит в работах: Truesdell C., Trans. Am. Math. Soc., т. 58, стр. 96, 1945 и Bull. Am. Math. Soc., т. 54, стр. 994, 1948; Reissner E., J. Math. and Phys., т. 26, стр. 290, 1948; Zегла W., Ingr.-Arch., т. 17, стр. 223, 1949.

²⁾ Применением функции напряжения при исследовании ветровых напряжений мы обязаны Пухеру (Pucher A., Pub. Intern. Assoc. Bridge and Structural Eng., т. 5, стр. 275, 1938). См. также § 113.

Рассмотрим частную задачу в применении к сферической оболочке, для которой $r_1 = r_2 = a$. Возьмем решение уравнений (с) в виде

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= S_\varphi \cos \theta, \\ N_{\theta\varphi} &= S_{\theta\varphi} \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

где S_φ и $S_{\theta\varphi}$ суть функции одного лишь φ . После подстановки в уравнения (с) получим для определения этих функций следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_\varphi}{d\varphi} + 2 \operatorname{ctg} \varphi S_\varphi + \frac{1}{\sin \varphi} S_{\theta\varphi} &= -pa \cos \varphi, \\ \frac{dS_{\theta\varphi}}{d\varphi} + 2 \operatorname{ctg} \varphi S_{\theta\varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} S_\varphi &= -pa. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Складывая и вычитая эти два уравнения и вводя обозначения

$$U_1 = S_\varphi + S_{\theta\varphi}, \quad U_2 = S_\varphi - S_{\theta\varphi}, \quad (f)$$

получим два следующих обыкновенных дифференциальных уравнения, каждое из которых содержит лишь одно неизвестное:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_1}{d\varphi} + \left(2 \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} \right) U_1 &= -pa (1 + \cos \varphi), \\ \frac{dU_2}{d\varphi} + \left(2 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{1}{\sin \varphi} \right) U_2 &= pa (1 - \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Применяя общее правило интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, получим

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{1 + \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left[C_1 + pa \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right], \\ U_2 &= \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left[C_2 - pa \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Подстановка в уравнения (f) и применение уравнений (d) нам дадут в результате

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \left[\frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{C_1 - C_2}{2} \cos \varphi + pa \left(\cos^3 \varphi - \frac{1}{3} \cos^4 \varphi \right) \right], \\ N_{\theta\varphi} &= \frac{\sin \theta}{\sin^3 \varphi} \left[\frac{C_1 - C_2}{2} + \frac{C_1 + C_2}{2} \cos \varphi + pa \left(\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Чтобы определить постоянные интегрирования C_1 и C_2 , рассмотрим оболочку, имеющую форму полусферы, и положим $\varphi = \pi/2$ в выра-

жениях (i). Тогда силы по экватору оболочки будут

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{C_1 + C_2}{2} \cos \theta, \\ N_{\theta\varphi} &= \frac{C_1 - C_2}{2} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Так как давление в каждой точке сферы имеет радиальное направление, то момент сил ветра относительно диаметра сферы, перпендикулярного к плоскости $\theta = 0$, равен нулю. Пользуясь этим обстоятельством и применяя первое из уравнений (j), получим

$$\int_0^{2\pi} N_{\varphi} a^2 \cos \theta \, d\theta = a^2 \frac{C_1 + C_2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = 0,$$

что дает

$$C_1 = -C_2. \quad (k)$$

Второе необходимое нам уравнение мы получим, взяв сумму компонентов всех сил, действующих на полусферу по направлению горизонтального диаметра в плоскости $\theta = 0$. Это дает

$$\int_0^{2\pi} N_{\theta\varphi} a \sin \theta \, d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} p \sin \varphi \cos \theta \cdot a \sin \varphi \sin \varphi \cos \theta \, d\varphi \, d\theta,$$

или

$$a\pi \frac{C_1 - C_2}{2} = -pa^2 \frac{2}{3} \pi. \quad (l)$$

Из (k) и (l) получим

$$C_1 = -\frac{2}{3} ap, \quad C_2 = \frac{2}{3} ap.$$

Подставив эти значения постоянных в выражения (i) и воспользовавшись третьим из уравнений (b), получим

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -\frac{pa}{3} \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi), \\ N_{\theta} &= \frac{pa}{3} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \varphi} (2 \cos \varphi - 3 \sin^2 \varphi - 2 \cos^4 \varphi), \\ N_{\theta\varphi} &= -\frac{pa}{3} \frac{\sin \theta}{\sin^3 \varphi} (2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

С помощью этих уравнений ветровые напряжения легко могут быть вычислены для любой точки оболочки. Если оболочка имеет форму

полусферы, то нормальных сил по краю ее не будет, поскольку $(N_\varphi)_{\varphi=\pi/2}=0$. Силы сдвига $N_{\theta\varphi}$ по краю будут отличаться от нуля, по величине они будут равны, а по направлению противоположны равнодействующей давления ветра. Максимум абсолютных значений этих сил получится на концах диаметра, перпендикулярного к плоскости $\theta=0$; в этой точке они равны $\pm 2pa/3$.

В качестве второго примера применения уравнений (с) рассмотрим случай оболочки, имеющей форму кругового конуса, опирающегося в вершине на колонну (рис. 225). В этом случае радиус r_1 бесконечно велик, для элемента же dy меридиана мы можем написать $dy = r_1 d\varphi$. Отсюда

$$\frac{d}{d\varphi} = r_1 \frac{d}{dy}.$$

Кроме того, имеем

$$r_0 = y \sin \alpha, \quad \frac{dr_0}{dy} = \sin \alpha,$$

$$r_2 = y \operatorname{tg} \alpha.$$

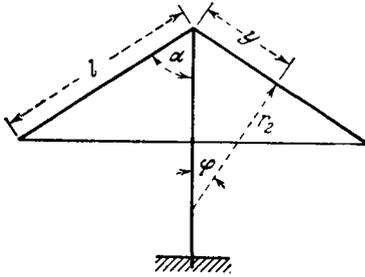


Рис. 225.

После подстановки в уравнения (с) получаем для конической оболочки, находящейся под давлением ветра $Z = p \sin \varphi \cos \theta$, уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\varphi}{\partial y} + \frac{N_\varphi}{y} + \frac{1}{y \sin \alpha} \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} &= -p \sin \alpha \cos \theta, \\ \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial y} + \frac{2N_{\theta\varphi}}{y} &= -p \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Второе уравнение легко интегрируется и дает

$$N_{\theta\varphi} = -\frac{1}{y^2} \left(\frac{py^3}{3} + C \right) \sin \theta. \quad (o)$$

По краю оболочки $y=l$ сил нет. Поэтому постоянная интегрирования в выражении (o) равна

$$C = -\frac{pl^3}{3},$$

и мы получаем окончательно

$$N_{\theta\varphi} = \frac{p}{3} \frac{l^3 - y^3}{y^2} \sin \theta. \quad (p)$$

Подставив в первое из уравнений (n), найдем

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial y} + \frac{N_\varphi}{y} = -\left(\frac{p}{3} \frac{l^3 - y^3}{y^3 \sin \alpha} + p \sin \alpha \right) \cos \theta,$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$N_{\varphi} = \frac{p \cos \theta}{\sin \alpha} \left(\frac{l^3 - y^3}{3y^2} - \frac{l^2 - y^2}{2y} \cos^2 \alpha \right) \quad (q)$$

— выражение, которое, как это и должно быть, обращается в нуль на краю $y=l$. Силы N_{θ} определяются из третьего уравнения (b), которое дает

$$N_{\theta} = -py \sin \alpha \cos \theta. \quad (r)$$

Выражения (p), (q) и (r) дают полное решение задачи о напряжениях, возникающих под ветровой нагрузкой в конической оболочке, изображенной на рис. 225. На вершине $y=0$ силы N_{φ} и $N_{\theta\varphi}$ становятся бесконечно большими. Чтобы устранить это затруднение, мы должны вообразить себе, что для некоторого конечного значения y имеется параллельный круг, по которому коническая оболочка укреплена на колонне. Разделенные по этому кругу силы N_{φ} , $N_{\theta\varphi}$ уравнивают действующее на конус давление ветра. Можно заметить, что если радиус круга недостаточно велик, эти силы могут стать весьма большими.

При загрузке оболочки поперечной силой Q , приложенной у вершины конуса (рис. 226, a), уравнения (п), правые части которых обращаются при этом в нуль, удовлетворяются при

$$N_{\varphi} = \frac{Q \cos \theta}{\pi y \sin^2 \alpha}, \quad N_{\theta\varphi} = 0. \quad (s)$$

Интегрированием нетрудно установить, что перерезывающая сила, т. е. результирующая напряжений N_{φ} для любого сечения, нормального к оси конуса, равна Q и что момент этих напряжений относительно оси $\theta = \pi/2$ этого сечения равен моменту $Qy \cos \alpha$ нагрузки. Что касается компонентов N_{θ} напряжения, то они исчезают для всей оболочки, как это подтверждается третьим из группы уравнений (b), где нам следует наложить $r_1 = \infty$, $p = 0$.

Если нагрузка S действует в направлении образующей конуса (рис. 226, б), следует учесть совместное воздействие обоих ее компонентов $P = S \cos \alpha$ (рис. 217) и $Q = S \sin \alpha$ на силы N_{φ} .

В результате получим

$$N_{\varphi} = \frac{S}{2\pi r_0} (2 \cos \theta - 1),$$

т. е. формулу, дающую оба экстремальных значения: $N_{\varphi} = S/2\pi r_0$ для $\theta = 0$ и $N_{\varphi} = -3S/2\pi r_0$ для $\theta = \pi$.

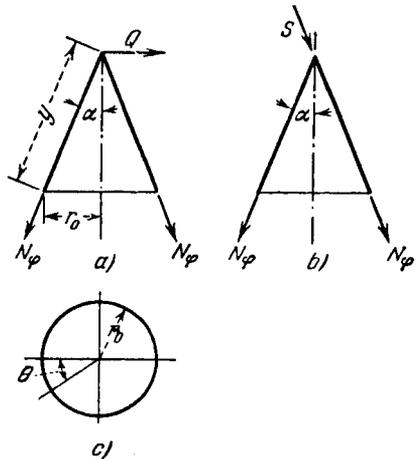


Рис. 226.

111. Сферическая оболочка, опертая в отдельных изолированных точках¹⁾). Начнем с общей задачи об оболочке, имеющей форму поверхности вращения, и рассмотрим случай, когда силы приложены лишь по краю ее так, что $X = Y = Z = 0$. Общие уравнения (b) предыдущего параграфа принимают тогда вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} r_1 - N_\theta r_1 \cos \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\theta\varphi}) + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} r_1 = N_{\theta\varphi} r_1 \cos \varphi &= 0, \\ N_\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Возьмем решение этих уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= S_{\varphi n} \cos n\theta, \\ N_\theta &= S_{\theta n} \cos n\theta, \\ N_{\theta\varphi} &= S_{\theta\varphi n} \sin n\theta, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

где $S_{\varphi n}$, $S_{\theta n}$ и $S_{\theta\varphi n}$ суть функции одного лишь φ , а n — целое число. Подставив выражения (b) в уравнения (a), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (r_0 S_{\varphi n}) + n r_1 S_{\theta\varphi n} - r_1 S_{\theta n} \cos \varphi &= 0, \\ \frac{d}{d\varphi} (r_0 S_{\theta\varphi n}) - n r_1 S_{\theta n} + r_1 S_{\theta\varphi n} \cos \varphi &= 0, \\ S_{\varphi n} + \frac{r_1}{r_2} S_{\theta n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

С помощью третьего из этих уравнений мы можем исключить функцию $S_{\theta n}$, после чего получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_{\varphi n}}{d\varphi} + \left(\frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{d\varphi} + \operatorname{ctg} \varphi \right) S_{\varphi n} + n \frac{r_1}{r_2} \frac{S_{\theta\varphi n}}{\sin \varphi} &= 0, \\ \frac{dS_{\theta\varphi n}}{d\varphi} + \left(\frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{d\varphi} + \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi \right) S_{\theta\varphi n} + \frac{n S_{\varphi n}}{\sin \varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

В частном случае сферической оболочки $r_1 = r_2 = a$, $r_0 = a \sin \varphi$, и уравнения (d) примут нижеследующий простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_{\varphi n}}{d\varphi} + 2 \operatorname{ctg} \varphi S_{\varphi n} + \frac{n}{\sin \varphi} S_{\theta\varphi n} &= 0, \\ \frac{dS_{\theta\varphi n}}{d\varphi} + 2 \operatorname{ctg} \varphi S_{\theta\varphi n} + \frac{n}{\sin \varphi} S_{\varphi n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Поступая, как и в предыдущем параграфе, т. е. взяв сумму и разность уравнений (e) и введя обозначения

$$U_{1n} = S_{\varphi n} + S_{\theta\varphi n}, \quad U_{2n} = S_{\varphi n} - S_{\theta\varphi n}, \quad (f)$$

¹⁾ См. Флюге В., цит. выше. О применении функции напряжений при решении подобного рода задач см. работу Пухера, цит. на стр. 495.

получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_{1n}}{d\varphi} + \left(2 \operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi}\right) U_{1n} &= 0, \\ \frac{dU_{2n}}{d\varphi} + \left(2 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{n}{\sin \varphi}\right) U_{2n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Решения этих уравнений:

$$U_{1n} = C_{1n} \frac{\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)^n}{\sin^2 \varphi}, \quad U_{2n} = C_{2n} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^n}{\sin^2 \varphi}. \quad (h)$$

Далее, из уравнений (f) получаем

$$\left. \begin{aligned} S_{\varphi n} &= \frac{U_{1n} + U_{2n}}{2} = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} \left[C_{1n} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)^n + C_{2n} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^n \right], \\ S_{\theta \varphi n} &= \frac{U_{1n} - U_{2n}}{2} = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} \left[C_{1n} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right)^n - C_{2n} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^n \right]. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Если оболочка без отверстия на вершине, то выражения (i) должны принять для $\varphi = 0$ конечные значения. Для этого требуется, чтобы постоянная интегрирования $C_{1n} = 0$. Подставляя это в уравнение (i) и пользуясь уравнениями (b), найдем

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -N_{\theta} = \frac{C_{2n}}{2 \sin^2 \varphi} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^n \cos n\theta, \\ N_{\theta \varphi} &= -\frac{C_{2n}}{2 \sin^2 \varphi} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^n \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Если вместо φ подставить в эти уравнения угол φ_0 , соответствующий краю сферической оболочки, то мы найдем те нормальные и перерезывающие силы, которые нужно будет распределить по краю оболочки, для того чтобы в ней возникли силы (j). Взяв для примера случай, когда $\varphi_0 = \pi/2$, т. е. когда оболочка представляет собой полусферу, найдем из выражений (j)

$$\left. \begin{aligned} (N_{\varphi})_{\varphi = \frac{\pi}{2}} &= \frac{C_{2n}}{2} \cos n\theta, \\ (N_{\theta \varphi})_{\varphi = \frac{\pi}{2}} &= -\frac{C_{2n}}{2} \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Зная напряжения, вызванные в сферической оболочке нормальными и касательными силами, приложенными по ее краю и пропорциональными соответственно $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, мы в силах решить и задачу о каком угодно ином распределении нормальных сил по краю, представив это распределение тригонометрическим рядом, каждый член которого есть решение, подобное решению (j)¹⁾. Возьмем в качестве примера случай полусферического купола

¹⁾ Применяя для нормальных сил ряд

$$N_{\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{n=1, 2, 3, \dots}^{\infty} C_{2n} \cos n\theta,$$

мы получим распределение этих сил, симметричное относительно диаметра $\theta = 0$. В общем случае этот ряд содержит не только члены с косинусами, но и члены с синусами. Решения для членов с синусами получаются в точности таким же способом, что и показанный нами для членов с косинусами. В уравнениях (b) нужно лишь поменять местами $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$.

радиусом a , несущего лишь свой собственный вес $q \text{ кг/м}^2$ и опирающегося на четыре симметрично расположенные колонны. Если бы купол покоился на сплошном фундаменте, то силы N_φ были бы равномерно распределены по краю, как показано на рис. 227, a , где интенсивность силы aN_φ на единичный угол нанесена в функции угла θ . В случае четырех равноотстоящих друг от друга колони распределение реакций будет соответствовать схеме, изображенной на рис. 227, b , где $2e$ обозначает угол, соответствующий дуге

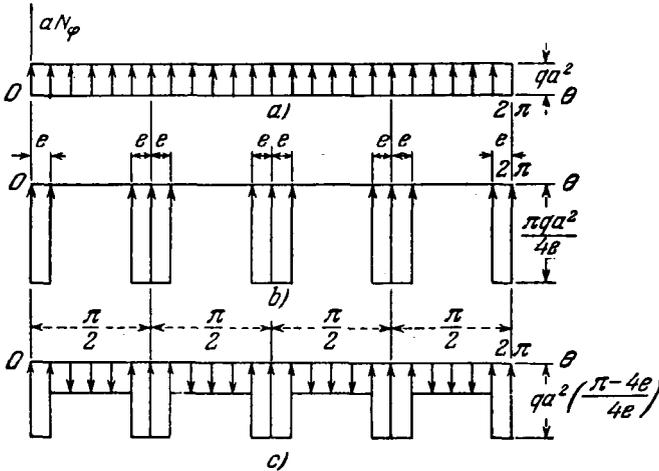


Рис. 227.

окружности, поддерживаемой каждой колонной. Вычитая распределение сил рис. 227, a из распределения сил рис. 227, b , получим распределение, изображающее систему сил, находящуюся в равновесии (рис. 227, c). Это распределение можно представить в виде ряда

$$(aN_\varphi)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=4, 8, 12, \dots}^{\infty} A_n \cos n\theta, \quad (1)$$

в котором должны быть учтены лишь члены со значениями $n = 4, 8, 12, \dots$, поскольку диаграмма 227, c после каждого интервала, равного $\pi/2$, повторяет себя и содержит в угле 2π четыре полных периода. Пользуясь обычным методом вычисления коэффициентов ряда (1), найдем

$$A_n = \frac{2qa^2}{ne} \sin(ne).$$

Поэтому распределение, изображенное диаграммой 227, c , представится рядом

$$(aN_\varphi)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2qa^2}{e} \sum_{n=4, 8, 12, \dots}^{\infty} \frac{\sin ne}{n} \cos n\theta. \quad (m)$$

Сравнивая каждый член этого ряда с первым уравнением (к), заключаем, что

$$C_{2n} = \frac{4qa}{e} \frac{\sin ne}{n}.$$

Взяв теперь решения вида (j), отвечающие каждому члену ряда (м), и налагая эти значения друг на друга, мы получаем возможность найти напряжения, вызываемые в оболочке силами (м). Таким путем получаем

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -N_{\theta} = \frac{2qa}{e \sin^2 \varphi} \sum_{n=4, 8, 12, \dots}^{\infty} \frac{\sin ne}{n} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^n \cos n\theta, \\ N_{\theta\varphi} &= -\frac{2qa}{e \sin^2 \varphi} \sum_{n=4, 8, 12, \dots}^{\infty} \frac{\sin ne}{n} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)^n \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п})$$

Накладывая это решение на решение (257), полученное ранее для купола, поддерживаемого равномерно распределенными по краю силами (рис. 215, а), мы получим формулы для расчета напряжений в куполе, покоящемся на четырех колоннах. Следует, однако, заметить, что, давая распределение реактивных сил N_{φ} в соответствии со схемой рис. 227, б, это наложение вводит вместе с тем перерезывающие силы $N_{\theta\varphi}$, не обращающиеся в нуль по краю купола; иначе говоря, наше решение не удовлетворяет всем условиям задачи. В самом деле, пока мы ограничиваем себя рамками мембранной теории, мы не будем располагать достаточным количеством постоянных, чтобы удовлетворить всем условиям и получить полное решение задачи. В фактически реализуемых сооружениях для восприятия перерезывающих сил $N_{\theta\varphi}$ по краю оболочки укладывается обычно армирующее кольцо. В подобных случаях решение, полученное наложением решений (257) и (п), будет достаточно точно представлять внутренние силы, возникающие в сферическом куполе, покоящемся на четырех колоннах. Более удовлетворительное в смысле точности решение этой задачи достигается средствами теории изгиба оболочки¹⁾.

Изложенный в этом параграфе метод применим также и в случае несферического купола. При этом надлежит обращаться к уравнениям (д), подпадающим решению с достаточной точностью методами численного интегрирования²⁾.

112. Мембранная теория цилиндрической оболочки. При исследовании цилиндрического изгиба оболочки (рис. 228, а) мы предполагаем, что образующая оболочки горизонтальна и параллельна оси x . Мы вырезаем из оболочки элемент двумя смежными

¹⁾ Пример такого решения дан Якобсоном. См. его статью: Aas-Jacobson A., *Ingr.-Arch.*, т. 8, стр. 275, 1937.

²⁾ Пример такого интегрирования приводится в книге Флюгге (цит. выше). На стр. 55 этой книги приводится также вычисление мембранных сил в апсидной оболочке-полукуполе (со свободным вертикальным краем), вызванных собственным весом. О применении метода комплексных переменных к исследованию напряжений в сферических оболочках см. Martin F., *Ingr.-Arch.*, т. 17, стр. 167, 1949; см. также Власов В. З., *Прикл. мат. мех.*, т. 11, стр. 397, 1947.

образующими и двумя поперечными сечениями, перпендикулярными к оси x , положение же этого элемента определяем координатой x и углом φ . Действующие на стороны элемента силы показаны на рис. 228, *b*. Кроме того, по поверхности элемента распределена нагрузка, причем компоненты интенсивности этой нагрузки обозначаются, как и прежде,

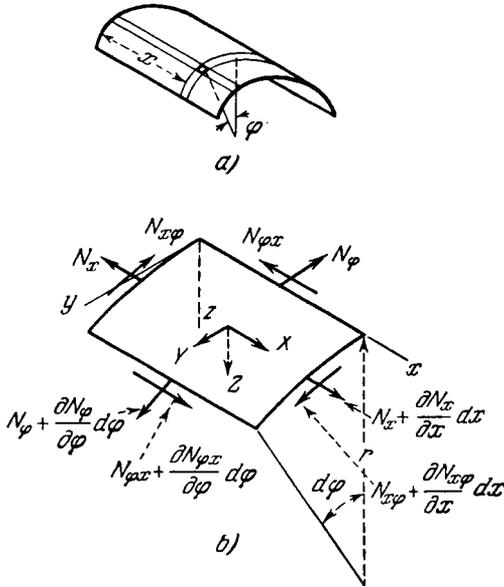


Рис. 228.

через X , Y , Z . Рассматривая условия равновесия элемента и суммируя силы в направлении x , получаем

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} r d\varphi dx + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi dx + Xr d\varphi dx = 0. \quad (a)$$

Подобным же образом силы в направлении касательной к нормальному поперечному сечению, т. е. в направлении оси y , дадут нам второе уравнение равновесия

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} r d\varphi dx + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dx + Yr d\varphi dx = 0. \quad (b)$$

Силы, действующие в направлении нормали к оболочке, т. е. в направлении оси z , дают уравнение

$$N_\varphi d\varphi dx + Zr d\varphi dx = 0. \quad (c)$$

После упрощения три уравнения равновесия представляется в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} &= -X, \\ \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} &= -Y, \\ N_\varphi &= -Zr. \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

В каждом частном случае мы легко можем найти значение N_φ . Подставляя это значение во второе уравнение, мы найдем после интегрирования $N_{x\varphi}$. Пользуясь найденным таким образом значением $N_{x\varphi}$ и интегрируя первое уравнение, находим N_x .

В качестве примера применения уравнения (270) рассмотрим горизонтальную трубку круглого сечения, наполненную жидкостью и опертую по концам¹⁾. Если угол φ отсчитывать так, как показано на рис. 229, *b*, а давление на

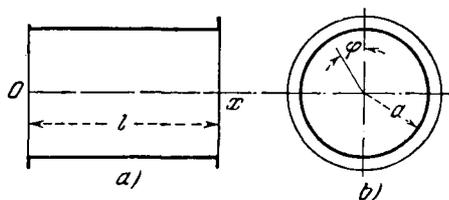


Рис. 229.

оси трубы обозначить через p_0 , то давление в любой ее точке будет равно $p_0 - \gamma a \cos \varphi$. Мы получим, таким образом,

$$X = Y = 0, \quad Z = -p_0 + \gamma a \cos \varphi. \quad (d)$$

Подставляя в уравнение (270), находим

$$N_\varphi = p_0 a - \gamma a^2 \cos \varphi, \quad (e)$$

$$N_{x\varphi} = - \int \gamma a \sin \varphi dx + C_1(\varphi) = - \gamma a x \sin \varphi + C_1(\varphi), \quad (f)$$

$$\begin{aligned} N_x &= \int \gamma \cos \varphi x dx - \frac{1}{a} \int \frac{dC_1(\varphi)}{d\varphi} dx + C_2(\varphi) = \\ &= \gamma \frac{x^2}{2} \cos \varphi - \frac{x}{a} \frac{dC_1(\varphi)}{d\varphi} + C_2(\varphi). \end{aligned} \quad (g)$$

Теперь остается определить функции $C_1(\varphi)$ и $C_2(\varphi)$ из условий на краях.

Положим сначала, что сил N_x на концах трубы нет. Тогда

$$(N_x)_{x=0} = 0, \quad (N_x)_{x=l} = 0.$$

¹⁾ Эта задача была исследована Тома (Thoma D., Z. ges. Turbinenwesen, т. 17, стр. 49, 1920).

Мы удовлетворим этим условиям, если возьмем

$$C_2(\varphi) = 0, \quad C_1(\varphi) = \frac{a\gamma l}{2} \sin \varphi + C.$$

Из выражения (f) видно, что постоянная C представляет силы $N_{x\varphi}$, равномерно распределенные по краю трубы, как это имеет место в том случае, когда труба подвергается кручению. Если никакого крутящего момента к трубе не приложено, то мы должны положить $C = 0$; тогда решение уравнений (270) в нашем частном случае будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= p_0 a - \gamma a^2 \cos \varphi, \\ N_{x\varphi} &= \gamma a \left(\frac{l}{2} - x \right) \sin \varphi, \\ N_x &= -\frac{\gamma}{2} x (l - x) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (271)$$

Мы видим, что $N_{x\varphi}$ и N_x пропорциональны перерезывающей силе и соответственно изгибающему моменту равномерно нагруженной балки пролетом l . Они могут быть поэтому найдены путем применения формул теории балки к трубе, несущей равномерно распределенную нагрузку интенсивностью¹⁾ $\pi a^2 \gamma$ на единицу длины трубы.

Подбирая надлежащим образом функцию $C_2(\varphi)$, мы в состоянии решить аналогичную задачу также и для цилиндрической оболочки, защемленной по торцам. В этом случае длина образующей не подвергается изменениям, и мы имеем условие

$$\int_0^l (N_x - \nu N_\varphi) dx = 0.$$

Подставляя

$$N_x = -\frac{\gamma}{2} x (l - x) \cos \varphi + C_2(\varphi), \quad N_\varphi = p_0 a - \gamma a^2 \cos \varphi,$$

получим

$$C_2(\varphi) = \nu p_0 a + \left(\frac{l^2}{12} - \nu a^2 \right) \gamma \cos \varphi$$

и

$$N_x = -\frac{\gamma x}{2} (l - x) \cos \varphi + \nu p_0 a + \left(\frac{l^2}{12} - \nu a^2 \right) \gamma \cos \varphi. \quad (272)$$

Под действием сил N_φ и N_x на концах трубы, вопреки нашему допущению о защемлении этих концов, произойдет некоторая линейная деформация по окружности. Это свидетельствует о наличии на

¹⁾ Весом трубы в этом расчете мы пренебрегаем.

концах трубы некоторого местного изгиба, оставшегося неучтенным мембранной теорией. Более полное решение задачи можно будет получить лишь при совместном учете как мембранных напряжений, так и напряжений изгиба, что будет выполнено в следующей главе.

Части цилиндрических оболочек, подобные показанному на рис. 230, применяются иногда в качестве перекрытий для различного рода сооружений. Обычно они бывают оперты лишь по торцам, борта же AB и CD остаются свободными. Для вычисления мембранных напряжений в таких оболочках можно опять воспользоваться уравнениями (270). Возьмем, например, оболочку полукругового поперечного сечения, несущую свой собственный вес, который предполагается равномерно распределенным по поверхности оболочки. В таком случае мы имеем

$$X = 0, \quad Y = p \sin \varphi, \quad Z = p \cos \varphi.$$

Третье из уравнений (270) дает

$$N_{\varphi} = -pa \cos \varphi \quad (h)$$

— величину, обращающуюся в нуль на бортах AB и CD , как это и должно быть. Можно заметить, что это уравнение будет удовлетворяться также и в том случае, если вместо полуокружности мы будем иметь дело с какой-либо иной кривой, лишь бы при этом на краях было $\varphi = \pm \pi/2$. Подставив выражение (h) во второе из уравнений (270), найдем

$$N_{x\varphi} = -2px \sin \varphi + C_1(\varphi). \quad (i)$$

Поместив начало координат в середину пролета и положив, что на обоих торцах $x = \pm l/2$ трубы имеют силу одинаковые условия, заключаем из симметрии, что $C_1(\varphi) = 0$. Отсюда

$$N_{x\varphi} = -2px \sin \varphi. \quad (j)$$

Мы видим, что это решение не обращается в нуль на бортах AB и CD , как это должно было бы быть для свободных краев. В практике конструирования борта обычно усиливаются продольными элементами, достаточно прочными, чтобы противостоять деформации, производимой перерезывающей силой (j). Подставив выражение (j) в первое из уравнений (270), получим

$$N_x = \frac{px^2}{a} \cos \varphi + C_2(\varphi). \quad (k)$$

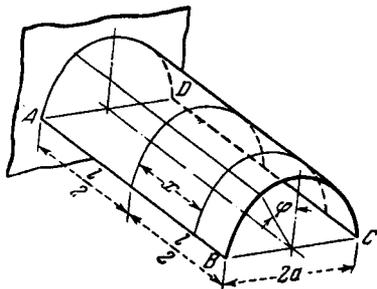


Рис. 230.

Если оболочка оперта по торцам таким образом, что реакции действуют в плоскостях концевых поперечных сечений, то силы N_x должны обратиться на торцах в нуль. Поэтому

$$C_2(\varphi) = -pl^2 \cos \varphi / 4a,$$

и мы получим

$$N_x = -\frac{P \cos \varphi}{4a} (l^2 - 4x^2). \quad (1)$$

Выражения (h), (j) и (l) представляют собой решение уравнений (270) для нашего частного случая рис. 230, удовлетворяющее условиям на торцах, а также одному из условий на бортах AB и CD . Второму условию, относящемуся к перерезывающим силам $N_{x\varphi}$, удовлетворить нельзя, если учитывать одни лишь мембранные напряжения. В практических применениях предполагается, что силы $N_{x\varphi}$ воспринимаются предназначенными для усиления бортов продольными элементами. Можно ожидать, что это предположение будет обоснованным в тех случаях, когда длина оболочки невелика, например при $l \leq 2a$, и что мембранная теория дает в таких случаях приближенную картину распределения напряжений. Для более длинных оболочек удовлетворительное решение можно получить, учитывая как мембранные напряжения, так равно и напряжения изгиба. Этой задачей мы займемся в следующих главах (см. §§ 124 и 126).

113. Использование функции напряжений для вычисления мембранных сил оболочки. В общем случае оболочки, заданной уравнением $z = f(x, y)$ ее срединной поверхности, известные удобства может представить обращение к функции напряжений¹⁾, определяющей все три компонента напряжения. Рассмотрим элемент оболочки, подвергающейся действию нагрузки, интенсивность которой, будучи отнесенной к единице площади на плоскости x, y , задана компонентами X, Y, Z (рис. 231). Статическое условие равновесия элемента описывается в этих условиях уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_x \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_y \frac{\partial z}{\partial y} + \bar{N}_{xy} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + Z = 0. \quad (b)$$

¹⁾ Названная функция введена А. Пухером, цит. на стр. 495, и *Beton u. Eisen*, т. 33, стр. 298, 1934; см. также *Proc. V Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., 1938. Цилиндрические координаты, более удобные для оболочек, имеющих форму поверхности вращения, также были применены Пухером. Общая теория деформации, построенная на установках Пухера, излагается в работе *Flügge W., Geyling F.*, *Proc. IX Intern. Congr. Appl. Mech.*, т. 6, стр. 250, Брюссель, 1957.

Входящие сюда обозначения имеют следующий смысл:

$$N_x = \bar{N}_x \frac{\cos \theta}{\cos \varphi}, \quad N_y = \bar{N}_y \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}, \quad N_{xy} = \bar{N}_{xy}, \quad (c)$$

причем $\operatorname{tg} \varphi = dr/\partial x$, $\operatorname{tg} \theta = dr/\partial y$. Выполняя указанное в (b) дифференцирование и учитывая уравнения (a), получаем

$$\bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -Z + X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (d)$$

Мы можем удовлетворить обоим уравнениям (a), введя функцию напряжений $F(x, y)$, обладающую таким свойством, что

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx, \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy, \quad \bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (e)$$

где нижними и верхними пределами интегрирования являются соответственно x_0 , x и y_0 , y при фиксированных x_0 и y_0 . Подставляя это в уравнение

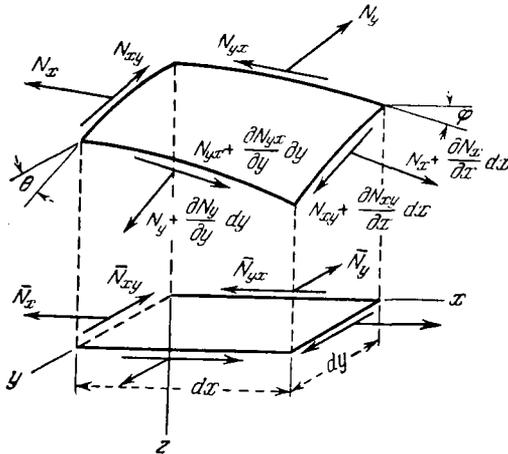


Рис. 231.

(d), получим следующее дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция напряжений F

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = q; \quad (f)$$

правая часть его записана здесь сокращенно обозначением

$$q = -Z + X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int X dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int Y dy. \quad (g)$$

Если задачей указаны действующие по контуру оболочки мембранные силы, то граничные условия без труда формулируются на основе уравнений (e). В частности, опирание оболочки по контуру на вертикальную стену, изгибная жесткость которой пренебрежимо мала, или же полное отсутствие

опирания по контуру влекут за собой исчезновение краевых сил, нормальных к элементам ds контура и пропорциональных $\partial^2 F / \partial s^2$. Поэтому закон изменения функции напряжений по такому контуру должен быть линейным.

Оболочка, имеющая форму эллиптического параболоида. Для иллюстрации метода исследуем указанного типа оболочку (рис. 232), срединная поверхность которой описывается уравнением

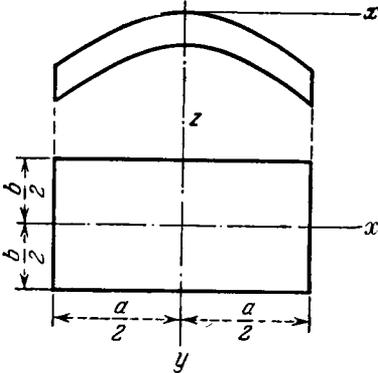


Рис. 232.

$$z = \frac{x^2}{h_1} + \frac{y^2}{h_2}, \quad (h)$$

где h_1 и h_2 — положительные постоянные. Сечения $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ дадут два семейства парабол, горизонталями же будут эллипсы. Допустим, что на оболочку действует лишь вертикальная нагрузка, равномерно распределенная по площади ее основания, и прибегнув к уравнениям (f) и (g), получим

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{p}{2}, \quad (i)$$

где $p = Z$ — интенсивность нагрузки.

Пусть оболочку поддерживают четыре вертикальные стены $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$ таким образом, что реактивные силы, нормальные к соответствующей стене, обращаются на контуре в нуль. Тогда граничными условиями для функции F будут $\partial^2 F / \partial y^2 = 0$ на $x = \pm a/2$ и $\partial^2 F / \partial x^2 = 0$ на $y = \pm b/2$. Это значит, что функция F на контуре линейна относительно x и y . То обстоятельство, что члены, содержащие x или y лишь в первой степени, не оказывают влияния на напряжения [см. уравнения (e)], равносильно условию $F = 0$ на всем контуре.

Мы удовлетворим уравнению (i) и осуществим $F = 0$ на $y = \pm b/2$, приняв для F выражение

$$F = \frac{ph_1}{4} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + \sum_{h=1, 3, 5, \dots}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (j)$$

где $c = b\sqrt{h_1/h_2}$. С тем чтобы выполнить остающееся условие $F = 0$ на $x = \pm a/2$, разложим прежде всего алгебраический член в выражении (j) в ряд Фурье

$$\frac{ph_1}{4} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) = \frac{2ph_1 b^2}{\pi^3} \sum_{h=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (k)$$

Введя последний в уравнение (j), положив $x = \pm a/2$ и приравняв результат нулю, получим для каждого $n = 1, 3, 5, \dots$ уравнение

$$\frac{2ph_1 b^2}{\pi^3 n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2c} = 0. \quad (l)$$

Оно позволяет вычислить коэффициент A_n и приводит к окончательному решению

$$F = \frac{ph_1}{4} \left[\frac{b^2}{4} - y^2 + \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n^3} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{c}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2c}} \cos \frac{n\pi y}{b} \right]. \quad (m)$$

Для получения мембранных сил остается лишь продифференцировать этот ряд в соответствии с выражениями (е) и использовать соотношения (с). Результатом будет

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -\frac{ph_2}{2} \sqrt{\frac{h_1^2 + 4x^2}{h_2^2 + 4y^2}} \left[1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{c}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2c}} \cos \frac{n\pi y}{b} \right], \\ N_y &= 2 \frac{ph_1^2}{h_2} \sqrt{\frac{h_2^2 + 4y^2}{h_1^2 + 4x^2}} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{c}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2c}} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ N_{xy} &= 2 \frac{ph_1}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{c}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2c}} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Все входящие сюда ряды сходятся, за исключением лишь последнего ряда, расходящегося в вершинах $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$. Это обстоятельство обусловлено особым свойством поверхности рассматриваемой оболочки, образующей поступательным перемещением плоской кривой. Элементы такой поверхности не испытывают кручения и по этой причине мембранные силы N_{xy} не участвуют в распределении нормальной нагрузки оболочки. Поскольку обе силы N_x и N_y обращаются у вершин в нуль, постольку функция передачи нагрузки вблизи этих точек падает на одни лишь силы сдвига N_{xy} . В связи с тем, что, как уже сказано, кручение в такого рода оболочка исчезает, указанные силы сдвига возрастают к вершинам оболочки до бесконечно больших значений, а на практике, если крайевые условия $N_x = 0$, $N_y = 0$ строго выполняются, изгибающие моменты и поперечные перерезывающие силы увеличиваются в непосредственной близости к вершинам.

*Оболочка, имеющая форму гиперболического параболоида*¹⁾. Другим объектом, в отношении которого метод Пухера может с выгодой найти применение, является оболочка, срединная поверхность которой задается уравнением

$$z = -\frac{xy}{c}, \quad (o)$$

¹⁾ См. A i m o n d F., *Cénie civil*, т. 102, стр. 179, 1933; Proc. Intern. Assoc. Bridge Struct. Engrs., т. 4, стр. 1, 1936; L a f a i l l e B., Proc. Intern. Assoc. Bridge Struct. Engrs., т. 3, стр. 295, 1935. Различные варианты загрузки рассматриваются К. Тестером: T e s t e r K. G., *Ingr.-Arch.*, т. 16, стр. 39, 1947.

где $c = a^2/h$ (рис. 233). Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{c}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{c}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{c}. \quad (p)$$

Если мы имеем дело с одной лишь вертикальной нагрузкой, то дифференциальное уравнение (f) приводится к виду

$$\frac{2}{c} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -Z. \quad (q)$$

Оно дает

$$N_{xy} = \frac{Zc}{2}. \quad (r)$$

Предположим сначала, что нагрузка интенсивностью $Z = q$ распределена равномерно по горизонтальной проекции оболочки, причем нормальные силы по ее контуру отсутствуют. Это состояние описывается уравнениями

$$N_{xy} = \frac{qc}{2}, \quad N_x = N_y = 0. \quad (s)$$

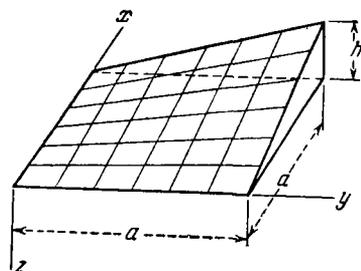


Рис. 233.

Учтем теперь влияние собственного веса оболочки, выражающегося величиной $q_0 = \text{const}$, отнесенной к единице площади поверхности. Этой площади соответствует площадь

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}$$

горизонтальной проекции оболочки. Поэтому

$$Z = \frac{q_0}{c} \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}, \quad (t)$$

и уравнение (r) дает

$$N_{xy} = \frac{q_0}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}.$$

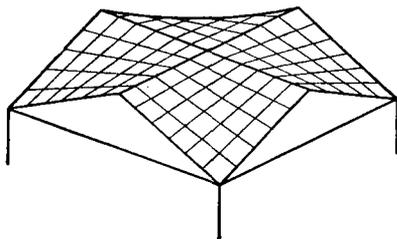


Рис. 234.

Дифференцируя это выражение по y и интегрируя результат по x , или же производя эти операции в обратном порядке, в обоих случаях с учетом уравнений (e) получаем

$$\bar{N}_x = -\frac{q_0 y}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}{\sqrt{y^2 + c^2}},$$

$$\bar{N}_y = -\frac{q_0 x}{2} \ln \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}{\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

Истинные значения сил N_x и N_y находим из этих выражений с помощью уравнений (с), в которых углы φ , θ заданы тангенсами: $\text{tg } \varphi = -y/c$, $\text{tg } \theta = -x/c$.

Несколько оболочек этого типа можно соединять вместе для того, чтобы получить кровлю, например формы рис. 234. Следует, однако, учитывать, что ни собственный вес ребер, обязательных в такого рода кровле, ни

частичная временная нагрузка, например, снеговая, не могут быть переданы в этих оболочках одними лишь мембранными силами, и что в них, следовательно, непременно возникают напряжения изгиба¹⁾).

Представляют практический интерес и достойны упоминания также коноидальные оболочки, используемые иногда при проектировании кровель-навесов и плотин²⁾. В строительной практике нашли применение³⁾ также и кровли-оболочки этого типа, но с криволинейными образующими вместо прямолинейных.

¹⁾ См. Флюгге, цит. выше на стр. 482; Flügge, Geyling цит. выше; Gerard F. A., Trans. Eng. Inst. Canada, т. 3, стр. 32, 1959.

²⁾ Теория коноидальной оболочки разработана Топрохой (Торгоја Е., Riv. Ing., т. 9, стр. 29, 1941); см. также Soare M., Bauingenieur, т. 33, стр. 256, 1958; также Флюгге, цит. выше.

³⁾ См. Doganoff I., Bautechnik, т. 34, стр. 232, 1957.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

114. **Круговая цилиндрическая оболочка под симметричной относительно оси нагрузкой.** В практических применениях мы часто встречаемся с задачами, где круговая цилиндрическая оболочка подвергается действию сил, распределенных симметрично, относительно оси цилиндра. Распределение напряжений в цилиндрических котлах, подвергающихся давлению пара, напряжения в цилиндрических резервуарах с вертикальной осью, подвергающихся действию внутреннего давления жидкости, наконец, напряжения в круглых трубах под равномерным внутренним давлением — все это примеры такого рода задач.

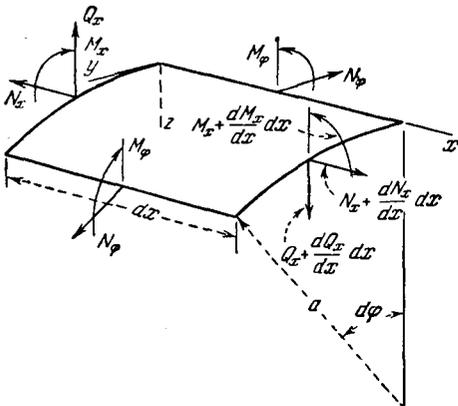


Рис. 235.

и 235, и выведем для него уравнения равновесия. Из симметрии заключаем, что мембранные силы сдвига $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ обращаются в данном случае в нуль, а силы N_{φ} остаются постоянными по окружности. Обратившись к поперечным перерезывающим силам, точно так же из симметрии обнаруживаем, что отличными от нуля остаются здесь лишь силы Q_x . Рассмотрение действующих на элемент (рис. 235) моментов приводит нас равным образом, на основании симметрии, к выводу, что крутящие моменты $M_{x\varphi} = M_{\varphi x}$ обращаются в нуль, изгибающие же моменты M_{φ} остаются постоянными по окружности.

При этих условиях симметрии три из шести уравнений равновесия элемента удовлетворяются тождественно, и нам остается рассмотреть лишь три остальных уравнения, а именно те, которые получаются проектированием сил на оси x и z и нахождением моментов сил относительно оси y . Полагая, что внешние силы сводятся к одному лишь нормальному к поверхности давлению, мы сможем написать эти уравнения равновесия следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_x}{dx} a dx d\varphi &= 0, \\ \frac{dQ_x}{dx} a dx d\varphi + N_\varphi dx d\varphi + Za dx d\varphi &= 0, \\ \frac{dM_x}{dx} a dx d\varphi - Q_x a dx d\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Первое из них указывает, что силы N_x постоянны¹⁾, и в нашем дальнейшем изложении мы примем их равными нулю. Если в действительности они отличаются от нуля, то обусловленные этими постоянными силами деформации и напряжения легко могут быть вычислены и наложены на напряжения и деформации, произведенные поперечной нагрузкой. Остальные два уравнения без труда напишутся в следующем упрощенном виде:

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{a} N_\varphi = -Z, \quad \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0. \quad (b)$$

Эти два уравнения содержат три неизвестные величины N_φ , Q_x и M_x . Для решения задачи нам следует поэтому рассмотреть смещения точек в срединной поверхности оболочки.

Из симметрии заключаем, что компонент v смещения в окружном направлении обращается в нуль. Нам остается поэтому принять во внимание лишь компоненты u и w в направлениях x и соответственно z . Тогда выражения для компонентов деформации примут вид

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad \epsilon_\varphi = -\frac{w}{a}. \quad (c)$$

Отсюда, применяя закон Гука, получаем

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_\varphi) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{a} \right) = 0, \\ N_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_\varphi + \nu\epsilon_x) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(-\frac{w}{a} + \nu \frac{du}{dx} \right). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Первое из этих уравнений дает

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{a},$$

¹⁾ Влиянием этих сил на изгиб мы в данном исследовании пренебрегаем.

из второго же следует, что

$$N_{\varphi} = -\frac{Eh\varpi}{a}. \quad (e)$$

Рассматривая изгибающие моменты, приходим, по соображениям симметрии, к выводу, что кривизна на окружности остается постоянной, кривизна же в направлении x равна $-\frac{d^2\varpi}{dx^2}$. Пользуясь теми же уравнениями, что и для пластинки, получаем

$$\left. \begin{aligned} M_{\varphi} &= \nu M_x, \\ M_x &= -D \frac{d^2\varpi}{dx^2}, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

есть жесткость оболочки при изгибе.

Возвращаясь теперь к уравнениям (b) и исключая из них Q_x , находим

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{1}{a} N_{\varphi} = -Z,$$

откуда с помощью уравнений (e) и (f) получаем

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2\varpi}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{a^2} \varpi = Z. \quad (273)$$

Таким образом, все задачи, связанные с симметричной деформацией круговой цилиндрической оболочки, сводятся к интегрированию уравнения (273).

Наиболее простым способом это уравнение решается в том случае, когда толщина оболочки постоянна. При этом оно принимает вид

$$D \frac{d^4\varpi}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} \varpi = Z. \quad (274)$$

Введя обозначение

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 h^2}, \quad (275)$$

мы можем представить его в более простом виде

$$\frac{d^4\varpi}{dx^4} + 4\beta^4\varpi = \frac{Z}{D}. \quad (276)$$

Это уравнение совпадает с полученным нами ранее уравнением для призматического стержня с изгибной жесткостью D , покоящегося на

сплошном упругом основании и находящегося под действием нагрузки интенсивностью Z^1).

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x), \quad (277)$$

где $f(x)$ — частное решение уравнения (276), а C_1, \dots, C_4 — постоянные интегрирования, которые нужно определять в каждом частном случае из условий на концах цилиндра.

Возьмем в качестве примера длинную круглую трубку, к которой приложены изгибающие моменты M_0 и перерезывающие силы Q_0 , причем и те и другие равномерно распределены по $x=0$ (рис. 236). Распределенное по поверхности оболочки давление Z в этом случае отсутствует, и потому в общем решении (277) нужно положить $f(x) = 0$. Так как приложенные на $x=0$ силы производят местный изгиб, быстро уменьшающийся до нуля по мере увеличения расстояния x от торца, то мы заключаем, что первый член в правой части уравнения (277) должен исчезнуть²⁾. Поэтому $C_1 = C_2 = 0$, и мы получаем

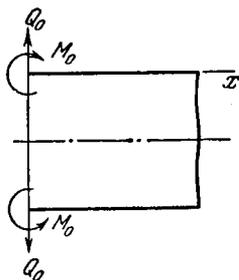


Рис. 236.

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x). \quad (g)$$

Постоянные C_3 и C_4 можно теперь определить из уравнений на нагруженном конце; эти условия записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{x=0} &= -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0, \\ (Q_x)_{x=0} &= \left(\frac{dM_x}{dx} \right)_{x=0} = -D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Если вместо w подставить сюда выражение (g), то эти граничные условия дадут нам

$$C_3 = -\frac{1}{2\beta^3 D} (Q_0 + \beta M_0), \quad C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D}, \quad (i)$$

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Сопrotивление материалов, т. 2, стр. 12, М., 1946.

²⁾ Если учесть, что система сил, приложенных по торцу трубы, уравновешена, а длина трубы может быть произвольно увеличена, то это вытекает также из принципа Сен-Венана; см. например, Тимошенко С., Goodier J. N., Theory of elasticity, 2-е изд., стр. 33, 1951.

и следовательно, в окончательном виде выражение для w получится таким:

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cos \beta x]. \quad (278)$$

Максимальный прогиб получается на загруженном конце, где он равен

$$(w)_{x=0} = -\frac{1}{2\beta^3 D} (\beta M_0 + Q_0). \quad (279)$$

Отрицательный знак для этого прогиба объясняется тем обстоятельством, что w считается положительным в направлении к оси цилиндра. Наклон на загруженном конце получается путем дифференцирования выражения (278). Это дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} &= \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \cos \beta x + Q_0 (\cos \beta x + \sin \beta x)]_{x=0} = \\ &= \frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta M_0 + Q_0). \end{aligned} \quad (280)$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \\ \psi(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \\ \theta(\beta x) &= e^{-\beta x} \cos \beta x, \\ \zeta(\beta x) &= e^{-\beta x} \sin \beta x, \end{aligned} \right\} \quad (281)$$

то выражения для прогиба и его последовательных производных могут быть представлены в следующей упрощенной форме:

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{1}{2\beta^3 D} [\beta M_0 \psi(\beta x) + Q_0 \theta(\beta x)], \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \theta(\beta x) + Q_0 \varphi(\beta x)], \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{1}{2\beta D} [2\beta M_0 \varphi(\beta x) + 2Q_0 \zeta(\beta x)], \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= \frac{1}{D} [2\beta M_0 \zeta(\beta x) - Q_0 \psi(\beta x)]. \end{aligned} \right\} \quad (282)$$

Численные значения функции $\varphi(\beta x)$, $\psi(\beta x)$, $\theta(\beta x)$ и $\zeta(\beta x)$ приводятся в таблице 84¹⁾. Функции $\varphi(\beta x)$ и $\psi(\beta x)$ представлены графически

¹⁾ Числа этой таблицы взяты из книги: Z i m m e r m a n n H., Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues, Берлин, 1888.

Таблица 84

Значения функций φ , ψ , θ и ζ

βx	φ	ψ	θ	ζ
0	1,0000	1,0000	1,0000	0
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099
0,7	0,6997	0,0599	0,3798	0,3199
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223
0,9	0,5712	-0,0657	0,2527	0,3185
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430
1,5	0,2384	-0,2068	0,0158	0,2226
1,6	0,1959	-0,2077	-0,0059	0,2018
1,7	0,1576	-0,2047	-0,0235	0,1812
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1610
1,9	0,0932	-0,1899	-0,0484	0,1415
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1230
2,1	0,0439	-0,1675	-0,0618	0,1057
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0895
2,3	0,0080	-0,1416	-0,0668	0,0748
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0492
2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132
3,0	-0,0423	-0,0563	-0,0493	0,0071
3,1	-0,0431	-0,0469	-0,0450	0,0019
3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0407	-0,0024
3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0364	-0,0058
3,4	-0,0408	-0,0237	-0,0323	-0,0085
3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0283	-0,0106
3,6	-0,0366	-0,0124	-0,0245	-0,0121
3,7	-0,0341	-0,0079	-0,0210	-0,0131
3,8	-0,0314	-0,0040	-0,0177	-0,0137
3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0147	-0,0140

Продолжение

βx	φ	ψ	θ	ζ
4,0	-0,0258	0,0019	-0,0120	-0,0139
4,1	-0,0231	0,0040	-0,0095	-0,0136
4,2	-0,0204	0,0057	-0,0074	-0,0131
4,3	-0,0179	0,0070	-0,0054	-0,0125
4,4	-0,0155	0,0079	-0,0038	-0,0117
4,5	-0,0132	0,0085	-0,0023	-0,0108
4,6	-0,0111	0,0089	-0,0011	-0,0100
4,7	-0,0092	0,0090	0,0001	-0,0091
4,8	-0,0075	0,0089	0,0007	-0,0082
4,9	-0,0059	0,0087	0,0014	-0,0073
5,0	-0,0046	0,0084	0,0019	-0,0065
5,1	-0,0033	0,0080	0,0023	-0,0057
5,2	-0,0023	0,0075	0,0026	-0,0049
5,3	-0,0014	0,0069	0,0028	-0,0042
5,4	-0,0006	0,0064	0,0029	-0,0035
5,5	0,0000	0,0058	0,0029	-0,0029
5,6	0,0005	0,0052	0,0029	-0,0023
5,7	0,0010	0,0046	0,0028	-0,0018
5,8	0,0013	0,0041	0,0027	-0,0014
5,9	0,0015	0,0036	0,0026	-0,0010
6,0	0,0017	0,0031	0,0024	-0,0007
6,1	0,0018	0,0026	0,0022	-0,0004
6,2	0,0019	0,0022	0,0020	-0,0002
6,3	0,0019	0,0018	0,0018	+0,0001
6,4	0,0018	0,0015	0,0017	0,0003
6,5	0,0018	0,0012	0,0015	0,0004
6,6	0,0017	0,0009	0,0013	0,0005
6,7	0,0016	0,0006	0,0011	0,0006
6,8	0,0015	0,0004	0,0010	0,0006
6,9	0,0014	0,0002	0,0008	0,0006
7,0	0,0013	0,0001	0,0007	0,0006

на рис. 237. Из этих кривых и из таблицы 84 видно, что функции, определяющие изгиб оболочки, с возрастанием величины βx приближаются к нулю. Это указывает на то, что произведенный в оболочке изгиб действительно имеет лишь местный характер, как это и было предположено вначале, когда мы вычисляли постоянные интегрирования.

Если момент M_x и прогиб w найдены из выражений (282), то изгибающий момент M_φ определится помощью первого из уравне-

ний (f), значение же сил N_φ находится из уравнений (e). Таким образом, все необходимые данные для вычисления напряжений в оболочке становятся известными.

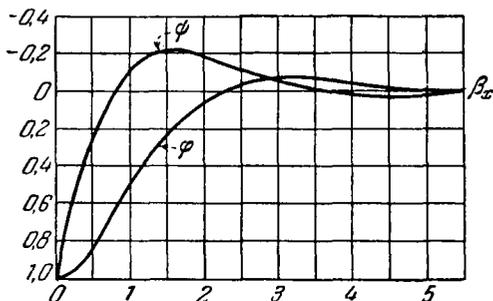


Рис. 237.

115. Частные случаи симметричной деформации круговой цилиндрической оболочки. Изгиб длинной цилиндрической оболочки под нагрузкой, равномерно распределенной по круговому сечению (рис. 238). Если нагрузка приложена достаточно далеко от торцов цилиндра, то для каждой половины оболочки можно применить решение (278). По соображениям симметрии мы заключаем, что в этом случае $Q_0 = -P/2$. Поэтому правая часть уравнения (278) напишется у нас таким образом:

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} \left[\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) + \frac{P}{2} \cos \beta x \right], \quad (a)$$

причем x отсчитывается здесь от того поперечного сечения, в котором приложена нагрузка.

Чтобы вычислить входящий в выражение (a) момент M_0 , воспользуемся выражением (280), дающим значение наклона при $x = 0$. В нашем случае в силу симметрии этот наклон обращается в нуль. Отсюда

$$2\beta M_0 - \frac{P}{2} = 0,$$

и мы получаем

$$M_0 = \frac{P}{4\beta}. \quad (b)$$

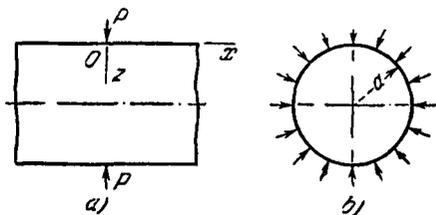


Рис. 238.

Подстановка этого значения в выражение (а) определяет прогиб оболочки

$$w = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x) = \frac{P}{8\beta^3 D} \varphi(\beta x), \quad (283)$$

дифференцирование же дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= -2\beta \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} \sin \beta x = -\frac{P}{4\beta^2 D} \zeta(\beta x), \\ \frac{d^2w}{dx^2} &= 2\beta^2 \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) = -\frac{P}{4\beta D} \psi(\beta x), \\ \frac{d^3w}{dx^3} &= 4\beta^3 \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} \cos \beta x = \frac{P}{2D} \theta(\beta x). \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Замечая из уравнений (b) и (f) предыдущего параграфа, что

$$M_x = -D \frac{d^2w}{dx^2}, \quad Q_x = -D \frac{d^3w}{dx^3},$$

получаем для изгибающего момента и перерезывающей силы окончательно следующие выражения:

$$M_x = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x), \quad Q_x = -\frac{P}{2} \theta(\beta x). \quad (284)$$

Все эти полученные нами результаты представлены графически на рис. 239. Мы видим, что максимальный прогиб получается под нагрузкой P и что его значение, определяемое из уравнения (283), равно

$$w_{\max} = \frac{P}{8\beta^3 D} = \frac{Pa^2\beta}{2Eh}. \quad (285)$$

Максимальный изгибающий момент также приходится в точку приложения нагрузки и определяется из уравнения (284)

$$M_{\max} = \frac{P}{4\beta}. \quad (286)$$

Максимум абсолютного значения перерезывающей силы равен, очевидно, $P/2$. Значения всех этих величин на некотором расстоянии от нагрузки легко могут быть получены из таблицы 84. Из этой таблицы, а также из рис. 239 мы видим, что все величины, определяющие изгиб оболочки, малы при $x > \pi/\beta$. Это обстоятельство свидетельствует о том, что изгиб носит местный характер и что оболочка длиной $l = 2\pi/\beta$, нагруженная посередине, испытывает практически тот же максимальный прогиб и то же максимальное напряжение, что и очень длинная оболочка.

Имея решение задачи для того случая, когда нагрузка сосредоточена в круговом поперечном сечении, мы легко, пользуясь принципом наложения, можем решить эту задачу и для нагрузки, распре-

деленной по некоторой длине цилиндра. Разберем для примера случай равномерной нагрузки интенсивностью q , распределенной по длине l цилиндра (рис. 240). Полагая, что нагрузка приложена на значительном расстоянии от торцов цилиндра, мы вправе воспользоваться для вычисления прогибов решением (283). Прогиб в точке A , произведенный элементарной кольцевой нагрузкой интенсивностью $q d\xi$, приложенной на расстоянии ξ

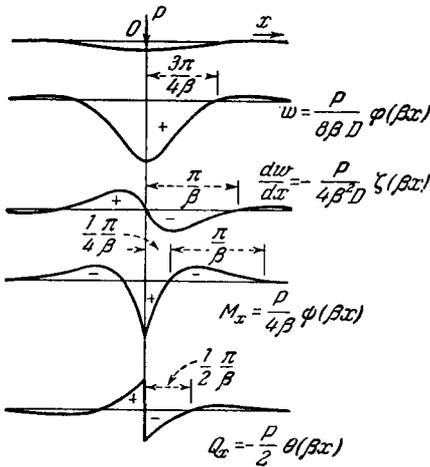


Рис. 239.

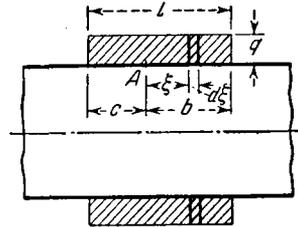


Рис. 240.

от A , определится из выражения (283) после замены в нем P через $q d\xi$ и x через ξ :

$$\frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi).$$

Прогиб, получающийся в A под действием всей нагрузки, распределенной по длине l , будет найден интегрированием

$$\begin{aligned} w &= \int_0^b \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) + \int_0^c \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) = \\ &= \frac{qa^2}{2Eh} (2 - e^{-\beta b} \cos \beta b - e^{-\beta c} \cos \beta c). \end{aligned}$$

Точно так же методом наложения можно будет найти и изгибающий момент в точке A .

Цилиндрическая оболочка под равномерным внутренним давлением (рис. 241). Если торцы оболочки свободны, то внутреннее давление p вызывает лишь кольцевое (окружное) напряжение

$$\sigma_t = \frac{pa}{h},$$

1) Произведение $q d\xi$ есть нагрузка на единицу длины окружности.

причем радиус цилиндра возрастает на величину

$$\delta = \frac{\alpha s_t}{E} = \frac{pa^2}{Eh}. \quad (d)$$

Если торцы оболочки, как показано на рис. 241, *a*, защемлены, то они будут лишены возможности смещаться, и потому у торцов возникнет местный изгиб. Если длина l оболочки достаточно велика, то мы можем при исследовании изгиба применить решение (278),

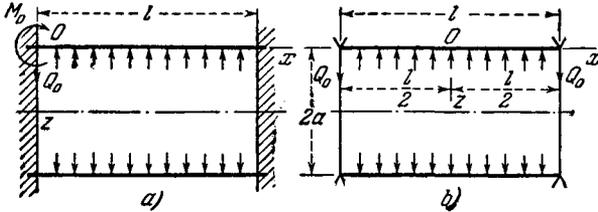


Рис. 241.

причем как момент M_0 , так и перерезывающая сила Q_0 определятся из условий, что как прогиб, так и наклон на защемленном торце $x=0$ (рис. 241, *a*) должны обращаться в нуль. Соответственно этим условиям уравнения (279) и (280) предыдущего параграфа принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\beta^3 D} (\beta M_0 + Q_0) &= \delta, \\ \frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta M_0 + Q_0) &= 0, \end{aligned}$$

причем δ определяется здесь уравнением (d).

Решая относительно M_0 и Q_0 , находим

$$M_0 = 2\beta^2 D \delta = \frac{p}{2\beta^2}, \quad Q_0 = -4\beta^3 D \delta = -\frac{p}{\beta}. \quad (287)$$

В результате мы получили положительный изгибающий момент и отрицательную перерезывающую силу, действующие так, как показано на рис. 241, *a*. При подстановке этих значений в выражение (282) и с помощью таблицы 84 прогибы и изгибающие моменты легко могут быть вычислены для любого расстояния от торца оболочки.

Если вместо защемленных торцов мы имеем свободно опертые, как показано на рис. 241, *b*, то прогиб и изгибающий момент M_x у торца обращаются в нуль; $M_0 = 0$, и из уравнений (279) мы найдем

$$Q_0 = -2\beta^3 D \delta.$$

Подстановка этих значений в решение (278) позволит нам вычислить прогиб на любом расстоянии от торца.

В предыдущем изложении предполагалось, что длина оболочки велика. Если в действительности это не так, то изгиб на одном конце оболочки уже нельзя будет считать не зависящим от условий на другом конце, и нам тогда нужно будет обратиться к общему решению (277), содержащему четыре постоянные интегрирования. Частным решением уравнения (276) для случая равномерной нагрузки ($Z = -p$) будет

$$-\frac{p}{4\beta^4 D} = -\frac{pa^2}{Eh}.$$

Вводя вместо показательных функций гиперболические, мы сможем тогда написать общее решение (277) следующим образом:

$$\omega = -\frac{pa^2}{Eh} + C_1 \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_2 \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + \\ + C_3 \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x. \quad (e)$$

Если начало координат поместить, как показано на рис. 241, *b*, по середине длины цилиндра, то выражение (e) будет четной функцией x , и тогда

$$C_2 = C_3 = 0. \quad (f)$$

Постоянные C_1 и C_4 нужно теперь подобрать таким образом, чтобы удовлетворялись условия на концах. Если торцы свободно оперты, то прогиб и изгибающий момент должны обращаться на концах в нуль, и мы получим

$$(\omega)_{x=\frac{l}{2}} = 0, \quad \left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)_{x=\frac{l}{2}} = 0. \quad (g)$$

Подставив в эти соотношения выражение (e) и вспомнив, что $C_2 = C_3 = 0$, найдем

$$\left. \begin{aligned} -\frac{pa^2}{Eh} + C_1 \sin \alpha \operatorname{sh} \alpha + C_4 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha &= 0, \\ C_1 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha - C_4 \sin \alpha \operatorname{sh} \alpha &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

где ради упрощения положено

$$\frac{\beta l}{2} = \alpha. \quad (i)$$

Из этих уравнений получаем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{pa^2}{Eh} \frac{\sin \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\sin^2 \alpha \operatorname{sh}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \alpha} = \frac{pa^2}{Eh} \frac{2 \sin \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha}, \\ C_4 &= \frac{pa^2}{Eh} \frac{\cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\sin^2 \alpha \operatorname{sh}^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \alpha} = \frac{pa^2}{Eh} \frac{2 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

Подставив значения (j) и (f) постоянных в выражение (e) и заметив из выражения (275), что

$$\frac{Eh}{a^2} = 4D\beta^4 = \frac{64\alpha^4 D}{l^4}, \quad (k)$$

получаем

$$\omega = -\frac{pl^4}{64D\alpha^4} \left(1 - \frac{2 \sin \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x - \frac{2 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \right). \quad (l)$$

Если размеры оболочки известны, то безразмерную величину α можно в каждом частном случае вычислить из обозначения (i) и соотношения (275). Подстановка этого значения в выражение (l) позволит нам вычислить прогиб оболочки в любой ее точке.

Для середины оболочки, подставляя $x = 0$ в выражение (l), получаем

$$(\omega)_{x=0} = -\frac{pl^4}{64D\alpha^4} \left(1 - \frac{2 \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \right). \quad (m)$$

Если оболочка длинная, то α неопределенно возрастает и второй член в скобках в выражении (m) становится малым, вследствие чего и прогиб приближается к значению (d), вычисленному для случая свободных торцов. Это указывает на то, что в случае длинной оболочки влиянием концевых опор на прогиб в середине можно пренебречь. Взяв другой крайний случай, а именно случай, когда величина α весьма мала, мы можем, разлагая тригонометрическую и гиперболическую функции в степенные ряды, показать, что заключенное в скобки выражение из уравнения (m) приближается к значению $5\alpha^4/6$ и что прогиб (l) приближается к значению, соответствующему равномерно нагруженной и свободно опертой балке длиной l , обладающей жесткостью при изгибе, равной D .

Дифференцируя дважды выражение (l) и умножая результат на D , находим изгибающий момент

$$M_x = -D \frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{pl^2}{4\alpha^2} \left(\frac{\sin \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x - \frac{\cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha} \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x \right). \quad (n)$$

В середине оболочки этот момент равен

$$(M_x)_{x=0} = -\frac{pl^2}{4\alpha^2} \frac{\sin \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha}. \quad (o)$$

Мы видим, что при больших значениях α , т. е. для длинной оболочки, этот момент становится столь малым, что им можно пренебречь, почему среднюю часть оболочки во всех практических приложениях

можно считать находящейся под действием одних лишь кольцевых напряжений pa/h .

Аналогичным путем можно подойти и к случаю защемленного по торцам цилиндра (рис. 241, а). Переходя непосредственно к окончательному результату¹⁾, мы видим, что действующий по защемленному торцу изгибающий момент M_0 равен

$$M_0 = \frac{P}{2\beta^2} \frac{\text{sh } 2\alpha - \sin 2\alpha}{\text{sh } 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{P}{2\beta^2} \chi_2(2\alpha), \quad (288)$$

где

$$\chi_2(2\alpha) = \frac{\text{sh } 2\alpha - \sin 2\alpha}{\text{sh } 2\alpha + \sin 2\alpha}.$$

В случае длинной оболочки α велико, множитель $\chi_2(2\alpha)$ в выражении (288) приближается к единице, и значение момента приближается к величине, указываемой первым из выражений (287). Для более коротких оболочек значение входящего в уравнение (288) множителя $\chi_2(2\alpha)$ может быть взято из таблицы 85.

Таблица 85

Коэффициенты χ

2α	$\chi_1(2\alpha)$	$\chi_2(2\alpha)$	$\chi_3(2\alpha)$
0,2	5,000	0,0068	0,100
0,4	2,502	0,0268	0,200
0,6	1,674	0,0601	0,300
0,8	1,267	0,1065	0,400
1,0	1,033	0,1670	0,500
1,2	0,890	0,2370	0,596
1,4	0,803	0,3170	0,689
1,6	0,755	0,4080	0,775
1,8	0,735	0,5050	0,855
2,0	0,738	0,6000	0,925
2,5	0,802	0,8220	1,045
3,0	0,893	0,9770	1,090
3,5	0,966	1,0500	1,085
4,0	1,005	1,0580	1,050
4,5	1,017	1,0400	1,027
5,0	1,017	1,0300	1,008

Цилиндрическая оболочка, изогнутая силами и моментами, распределенными по торцам. Эта задача была нами разобрана выше в предположении, что оболочка длинная и что каждый ее торец

¹⁾ Оба случая были разобраны подробно И. Г. Бубновым в его «Строительной механике корабля», т. 2, стр. 368, СПб., 1913. Там же приводятся и таблицы численных значений, упрощающие вычисление моментов и прогибов.

можно рассматривать независимо от другого. В случае более коротких оболочек влияние обоих торцов надлежит учитывать совместно, применяя для этого решение (с) с четырьмя постоянными интегрирования. Поступая, как и раньше, приходим к следующим результатам.

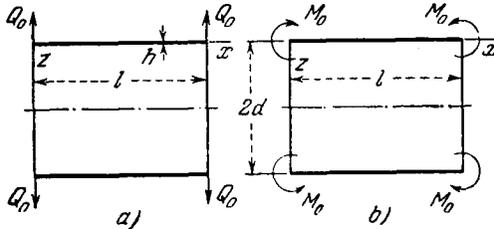


Рис. 242.

Для случая изгиба равномерно распределенными перерезывающими силами Q_0 (рис. 242, а) прогиб и наклон на концах равны

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0, x=l} &= -\frac{2Q_0\beta a^2}{Eh} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha} = -\frac{2Q_0\beta a^2}{Eh} \chi_1(2\alpha), \\ \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0, x=l} &= \pm \frac{2Q_0\beta^3 a^2}{Eh} \frac{\operatorname{sh} 2\alpha - \sin 2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha} = \pm \frac{2Q_0\beta^3 a^2}{Eh} \chi_2(2\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (289)$$

В случае изгиба моментами M_0 (рис. 242, б) получаем

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0, x=l} &= -\frac{2M_0\beta^2 a^2}{Eh} \frac{\operatorname{sh} 2\alpha - \sin 2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha} = -\frac{2M_0\beta^2 a^2}{Eh} \chi_2(2\alpha), \\ \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0, x=l} &= \pm \frac{4M_0\beta^3 a^2}{Eh} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\alpha}{\operatorname{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha} = \pm \frac{4M_0\beta^3 a^2}{Eh} \chi_3(2\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (290)$$

В случае длинной оболочки коэффициенты χ_1 , χ_2 и χ_3 в выражениях (289) и (290) близки к единице, и результаты совпадают с теми значениями, которые получаются из выражений (279) и (280). Чтобы упростить расчеты для более коротких оболочек, значения функций χ_1 , χ_2 и χ_3 собраны в таблице 85.

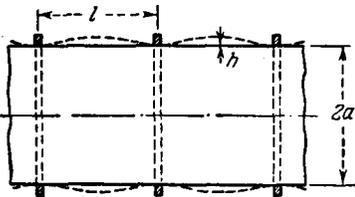


Рис. 243.

С помощью решений (289) и (290) легко можно найти напряжения в длинной трубе, усиленной равноотстоящими кольцами (рис. 243) и подвергающейся действию равномерного внутреннего давления p .

Положим сначала, что колец нет; тогда под действием внутреннего давления возникнут кольцевые напряжения $\sigma_t = pa/h$ и радиус

трубы увеличится на

$$\delta = \frac{pa^2}{Eh}.$$

Приняв затем во внимание кольца и предположив, что они абсолютно жесткие, устанавливаем, что между каждым кольцом и трубой возникают реактивные силы. Обозначим величину этих сил на единицу длины окружности трубы через P . Эту величину P нам нужно теперь определить из того условия, что силы P производят прогиб трубы под кольцом, равный ее расширению δ , вызванному внутренним давлением p . Для вычисления этого прогиба заметим, что часть трубы между двумя смежными кольцами можно рассчитывать как оболочку, показанную на рис. 242, *a* и 242, *b*. В таком случае $Q_0 = -\frac{1}{2}P$, и величина изгибающего момента M_0 под кольцом определится из условия, что $dw/dx = 0$ в этой точке. Тогда на основании уравнений (289) и (290) находим

$$-\frac{P\beta^2 a^2}{Eh} \chi_2(2\alpha) + \frac{4M_0\beta^3 a^2}{Eh} \chi_3(2\alpha) = 0,$$

откуда

$$M_0 = \frac{P\chi_2(2\alpha)}{4\beta\chi_3(2\alpha)}. \quad (p)$$

Если расстояние l между кольцами велико¹⁾, величина

$$2\alpha = \beta l = \frac{l}{\sqrt{ah}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$$

будет также велика, функции $\chi_2(2\alpha)$ и $\chi_3(2\alpha)$ будут близки к единице, а момент M_0 приблизится к значению (286). Чтобы вычислить входящую в уравнение (p) силу P , нам нужно будет воспользоваться выражениями для прогибов, данными в уравнениях (289) и (290). Эти выражения дают

$$\frac{P\beta a^2}{Eh} \chi_1(2\alpha) - \frac{P\beta a^2}{2Eh} \frac{\chi_2^2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)} = \delta = \frac{pa^2}{Eh},$$

или

$$P\beta \left[\chi_1(2\alpha) - \frac{1}{2} \frac{\chi_2^2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)} \right] = \frac{\delta Eh}{a^2} = p. \quad (291)$$

При больших значениях 2α это сводится к

$$\frac{P\beta a^2}{2Eh} = \delta,$$

что совпадает с уравнением (285). Если 2α невелико, значение реактивных сил P вычисляется из уравнения (291) с помощью таблицы 85;

¹⁾ Для $\nu = 0,3$ $2\alpha = 1,285l/\sqrt{ah}$.

решая уравнение (291) относительно P и подставляя результат в выражение (р), найдем

$$M_0 = \frac{P}{2\beta^2} \chi_2(2\alpha). \quad (292)$$

Это совпадает с выражением (285), полученным ранее для оболочки с защемленными торцами.

Для того чтобы принять во внимание растяжение колец, заметим, что реактивные силы P вызывают в кольце растягивающую силу Pa и что соответствующее увеличение внутреннего радиуса кольца равно ¹⁾

$$\delta_1 = \frac{Pa^2}{AE},$$

где A — площадь поперечного сечения кольца. Чтобы принять в расчет это расширение, подставляем $\delta - \delta_1$ вместо δ в уравнение (291), в результате чего получаем

$$P\beta \left[\chi_1(2\alpha) - \frac{1}{2} \frac{\chi_2^2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)} \right] = p - \frac{Ph}{A}. \quad (293)$$

Сила P легко определяется из этого уравнения с помощью таблицы 85, момент же найдем из уравнения (292), подставив в него $p - (Ph/A)$ вместо p .

Если давление p действует не только на цилиндрическую оболочку, но также и на ее днища, то в оболочке возникнут продольные силы

$$N_x = \frac{pa}{2}.$$

Увеличение радиуса оболочки будет тогда равно

$$\delta' = \frac{pa^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right),$$

и в уравнения (292) и (293) вместо p нужно будет подставить величину $p \left(1 - \frac{1}{2} \nu \right)$.

Уравнениями (293) и (291) можно пользоваться также и в случае равномерного внешнего давления, если только сжимающие напряжения в кольце и оболочке достаточно далеки от критических напряжений, при которых может произойти выпучивание ²⁾. Этот случай

¹⁾ При этом предполагается, что размеры поперечного сечения кольца малы в сравнении с радиусом a .

²⁾ Выпучивание колец и цилиндрических оболочек исследуется в книге Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., 1946.

представляет практическую важность при проектировании подводных лодок, и он исследовался разными авторами¹⁾.

116. Баллоны и резервуары под давлением. Метод, иллюстрированный примерами предыдущего параграфа, может быть применен также и для вычисления напряжений в цилиндрических сосудах, подвергающихся действию внутреннего давления²⁾. При изложении «мембранной» теории уже неоднократно указывалось, что эта теория неспособна представить фактические напряжения в частях оболочки, расположенных близко к краям, поскольку граничные условия на краях обычно не могут быть полностью удовлетворены из рассмотрения одних лишь мембранных напряжений. Аналогичное положение, когда

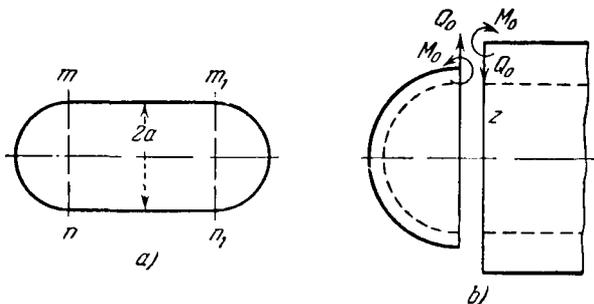


Рис. 244.

мембранная теория оказывается несостоятельной, возникает также и при расчете цилиндрических напорных резервуаров в местах примыкания цилиндрической части их к днищам. В этих стыках мембранные напряжения сопровождаются обычно местными напряжениями изгиба, распределяющимися симметрично относительно оси цилиндра. Эти местные напряжения можно вычислить по формуле (278) из § 114.

Начнем с простого случая цилиндрического сосуда с полусферическими днищами (рис. 244)³⁾. На достаточном расстоянии от стыков mn

¹⁾ См. статью Зандена и Гюнтера (Sanden K., Günther K., Werft und Reederei, т. 1, стр. 163—168, 189—198, 216—221, 1920; т. 2, стр. 505—510, 1921).

²⁾ См. также: Esslinger M., Statische Berechnung von Kesselböden, Берлин, 1952; Salét G., Barthelemy J., Bull. assoc. tech. maritime aeronaut., т. 44, 505, 1945; Maulbetsch J. L., Hetenyi M., ASCE Design Data, № 1, 1944; Schultz-Grunow F., Ingr.-Arch., т. 4, стр. 545, 1933; Svensson N. L., J. Appl. Mech., т. 25, стр. 89, 1958.

³⁾ Этот случай был исследован Мейсснером (Meissner E., Schweiz. Bauzeitung, т. 86, стр. 1, 1925).

и $m_1 n_1$ мембранная теория является достаточно точной и дает для цилиндрической части радиусом a

$$N_x = \frac{pa}{2}, \quad N_t = pa, \quad (a)$$

где p обозначает внутреннее давление.

При сферических днищах теория дает для равномерной растягивающей силы значение

$$N = \frac{pa}{2}. \quad (b)$$

Удлинение радиуса цилиндрической оболочки под действием сил (а) равно

$$\delta_1 = \frac{pa^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \quad (c)$$

Удлинение же радиуса сферических днищ

$$\delta_2 = \frac{pa^2}{2Eh} (1 - \nu). \quad (d)$$

Из сравнения выражений (с) и (d) можно заключить, что если мы примем во внимание одни лишь мембранные напряжения, то у стыков, как показано на рис. 244, *b*, у нас получится разрыв непрерывности. Это свидетельствует о том, что у стыков должны действовать перерезывающие силы Q_0 и изгибающие моменты M_0 , равномерно распределенные по окружности, и такой величины, что они компенсируют этот разрыв непрерывности. Вызванные этими силами напряжения называются иногда *разрывными напряжениями*.

При вычислении величин Q_0 и M_0 мы предполагаем, что изгиб носит местный характер и что при исследовании изгиба цилиндрической части применение решения (278) может обеспечить нам достаточную точность. Исследование изгиба сферических днищ представляет собой более сложную задачу, которая во всех подробностях будет разобрана в главе XVI. Здесь же мы займемся лишь приближенным ее решением, сделав предположение, что этот изгиб достигает заметной величины в той зоне сферической оболочки, которая примыкает к шву, и что эту зону можно трактовать как часть длинной цилиндрической оболочки¹⁾ радиуса a . Если и сферическая и цилиндрическая части сосуда или резервуара одинаковой толщины, то поворот, испытываемый краями обеих этих частей у стыка (рис. 244, *b*) под действием сил Q_0 , будет одинаков. Это свидетель-

¹⁾ Мейсснер в вышеупомянутой работе показал, что погрешность в величине напряжений изгиба при вычислении по такому приближенному методу для тонкой сферической оболочки мала, и при $a/h > 30$ она меньше 1%.

ствует о том, что M_0 обращается в нуль и что для компенсации разрыва непрерывности достаточно лишь силы Q_0 . Величина же Q_0 определится теперь из того условия, что сумма численных значений прогибов на краях обеих частей резервуара должна равняться разности $\delta_1 - \delta_2$ радиальных растяжений, определяемых мембранной теорией. Из уравнения (279) для прогибов получаем

$$\frac{Q_0}{\beta^3 D} = \delta_1 - \delta_2 = \frac{pa^2}{2Eh},$$

откуда, пользуясь обозначением (275),

$$Q_0 = \frac{pa^2 \beta^3 D}{2Eh} = \frac{p}{8\beta}. \quad (e)$$

Найдя это значение силы Q_0 , мы получаем возможность вычислить по формулам (236) прогибы и изгибающие моменты M_x для любой точки¹⁾

$$w = \frac{Q_0}{2\beta^3 D} \theta(\beta x),$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{Q_0}{\beta} \zeta(\beta x).$$

Подставив выражение (e) вместо Q_0 и выражение (275) вместо β в формулу для M_x , получим

$$M_x = -\frac{ahp}{8\sqrt{3}(1-\nu^2)} \zeta(\beta x). \quad (f)$$

Этот момент достигает максимума своего абсолютного значения на расстоянии $x = \pi/4\beta$, ибо производная его, как это можно видеть из четвертого уравнения (282), обращается в этой точке в нуль.

Сочетая максимальное напряжение изгиба, вызванное M_x , с мембранным напряжением, находим

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{ap}{2h} + \frac{3}{4} \frac{ap}{h\sqrt{3}(1-\nu^2)} \zeta\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,293 \frac{ap}{2h}. \quad (g)$$

Напряжение, действующее на внешней поверхности цилиндрической оболочки, приблизительно на 30% больше, чем мембранное напряжение, действующее в осевом направлении. При вычислении напряжений по окружности кроме мембранного напряжения pa/h нужно принять во внимание кольцевое напряжение, вызванное прогибом w , равно как и напряжение изгиба, вызванное моментами $M_\varphi = \nu M_x$.

¹⁾ Следует заметить, что направление Q_0 на рис. 244 противоположно направлению этой силы на рис. 235.

На этом основании получаем для наружной поверхности цилиндрической оболочки

$$\sigma_t = \frac{ap}{h} - \frac{Ew}{a} - \frac{6\nu}{h^2} M_x = \frac{ap}{h} \left[1 - \frac{1}{4} \theta(\beta x) + \frac{3\nu}{4\sqrt{3}(1-\nu^2)} \zeta(\beta x) \right].$$

Взяв $\nu = 0,3$ и воспользовавшись таблицей 84, находим

$$(\sigma_t)_{\max} = 1,032 \frac{ap}{h} \quad \text{при} \quad \beta x = 1,85. \quad (h)$$

Так как в сферических днищах мембранное напряжение меньше, чем в цилиндре, то максимальное напряжение в них будет всегда меньше вычисленного по формуле (h). Поэтому в расчете такого рода котлов и резервуаров нужно исходить именно из последнего значения.

Тот же самый метод вычисления разрывных напряжений можно применить и в том случае, когда днища имеют форму эллипсоида вращения. Мембранные напряжения в этом случае определяются по формулам (263) и (264) (см. стр. 487). По стыку mn (рис. 245), представляющему собой экватор эллипсоида, напряжения в меридианном и в экваториальном направлениях будут соответственно

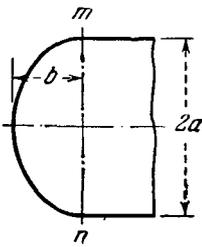


Рис. 245.

$$\sigma_\varphi = \frac{pa}{2h}, \quad \sigma_\theta = \frac{pa}{h} \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} \right). \quad (i)$$

Удлинение радиуса экватора равно

$$\delta'_2 = \frac{a}{E} (\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi) = \frac{pa^2}{Eh} \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} - \frac{\nu}{2} \right).$$

Подставив эту величину вместо δ_2 в вышеприведенные вычисления перерезывающей силы Q_0 , находим

$$\delta_1 - \delta'_2 = \frac{pa^2}{Eh} \frac{a^2}{2b^2}$$

и тогда вместо уравнения (e) получим

$$Q_0 = \frac{p}{8\beta} \frac{a^2}{b^2}.$$

Мы видим, что перерезывающая сила Q_0 для эллипсоидальных днищ получается большей, чем для полусферических в отношении a^2/b^2 . В том же отношении возрастут, очевидно, и напряжения непрерывности. Взяв, например, $a/b = 2$, мы получим из выражений (g) и (h)

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{ap}{2h} + \frac{3ap}{h\sqrt{3}(1-\nu^2)} \zeta\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,172 \frac{ap}{2h},$$

$$(\sigma_t)_{\max} = 1,128 \frac{ap}{h}.$$

Наибольших значений достигает здесь опять напряжение $(\sigma_t)_{\max}$; поэтому именно из этого напряжения и нужно исходить при проектировании¹⁾.

117. Цилиндрические резервуары со стенками постоянной толщины. Если резервуар подвергается действию давления жидкости, как показано на рис. 246, то напряжения в стенке можно вычислить из уравнения (276). Подставив в это уравнение

$$Z = -\gamma(d-x), \quad (a)$$

где γ — вес единицы объема жидкости, получим

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = -\frac{\gamma(d-x)}{D}. \quad (b)$$

Частным интегралом этого уравнения будет

$$w_1 = -\frac{\gamma(d-x)}{4\beta^4 D} = -\frac{\gamma(d-x)a^2}{Eh}. \quad (c)$$

Это выражение представляет собой радиальное расширение цилиндрической оболочки со свободными торцами под действием кольцевых напряжений. Если вместо $f(x)$ в уравнении (277) ввести выражение (c), то мы получим общее решение уравнения (b):

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma(d-x)a^2}{Eh}.$$

На практике толщина h стенки бывает в большинстве случаев мала в сравнении как с радиусом a , так и с глубиной d резервуара, и мы можем считать оболочку бесконечно длинной. Постоянные C_1 и C_2 обращаются при этом в нуль, и мы получаем

$$w = e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma(d-x)a^2}{Eh}. \quad (d)$$

Теперь из условий у дна резервуара мы можем определить постоянные C_3 и C_4 . Если предположить, что нижний край стенки

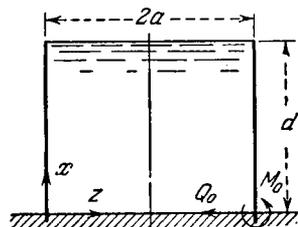


Рис. 246.

¹⁾ Более подробные сведения о напряжениях в котлах с эллипсоидальным дном можно найти в книге Хёна (Höhn, Ueber die Festigkeit der gewölbten Böden und der Zylinderschale, Цюрих, 1927). В ней приводятся также результаты экспериментальных исследований напряжений непрерывности, обнаруживающие хорошее согласие с приближенным решением. См. также Schulz-Grupow F., Ingr.-Arch., т. 4, 545, 1933.

резервуара зашпелен в абсолютно жесткий фундамент, то граничные условия будут иметь вид

$$(w)_{x=0} = C_3 - \frac{\gamma a^2 d}{Eh} = 0,$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = [-\beta C_3 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \beta C_4 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) + \frac{\gamma a^2}{Eh}]_{x=0} = \beta (C_4 - C_3) + \frac{\gamma a^2}{Eh} = 0.$$

Из этих уравнений получаем

$$C_3 = \frac{\gamma a^2 d}{Eh}, \quad C_4 = \frac{\gamma a^2}{Eh} \left(d - \frac{1}{\beta}\right).$$

Выражение (d) преобразуется при этом в следующее:

$$w = -\frac{\gamma a^2}{Eh} \left\{ d - x - e^{-\beta x} \left[d \cos \beta x + \left(d - \frac{1}{\beta}\right) \sin \beta x \right] \right\},$$

откуда, пользуясь обозначением (281), получаем

$$w = -\frac{\gamma a^2 d}{Eh} \left[1 - \frac{x}{d} - \theta(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \zeta(\beta x) \right]. \quad (e)$$

Это выражение позволяет нам с помощью таблицы 84 легко вычислить прогиб в любой точке. Действующая по окружности сила N_φ найдется тогда из формулы

$$N_\varphi = -\frac{Eh w}{a} = \gamma a d \left[1 - \frac{x}{d} - \theta(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \zeta(\beta x) \right]. \quad (f)$$

Вторая производная от выражения (e) дает нам изгибающий момент

$$\begin{aligned} M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2\beta^2 \gamma a^2 D d}{Eh} \left[-\zeta(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \theta(\beta x) \right] = \\ &= \frac{\gamma a d h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} \left[-\zeta(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \theta(\beta x) \right]. \end{aligned} \quad (g)$$

Располагая выражениями (f) и (g), мы легко можем вычислить максимальные напряжения в каждом частном случае в любой точке. Изгибающий момент достигает своего максимального значения у дна, где он равен

$$(M_x)_{x=0} = M_0 = \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \frac{\gamma a d h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)}. \quad (h)$$

К тому же результату мы придем и с помощью ранее выведенных формул (279) и (280) (см. стр. 518). Если принять, что нижний край оболочки совершенно свободен, то выражение (c) нам даст

$$(w_1)_{x=0} = -\frac{\gamma a^2 d}{Eh}, \quad \left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\gamma a^2}{Eh}. \quad (l)$$

Чтобы уничтожить это смещение и поворот края и, таким образом, удовлетворить граничным условиям у дна резервуара, нужно приложить, как указано на рис. 246, перерезывающую силу Q_0 и изгибающий момент M_0 . Значения этих сил и момента получатся, если мы приравняем выражения (279) и (280) выражениям (i), взятым с обратными знаками. Это нам дает

$$-\frac{1}{2\beta^3 D} (\beta M_0 + Q_0) = + \frac{\gamma a^2 d}{Eh},$$

$$\frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta M_0 + Q_0) = - \frac{\gamma a^2}{Eh}.$$

Из этих уравнений мы опять получаем выражение (h) для M_0 . Для перерезывающей же силы Q_0 находим ¹⁾

$$Q_0 = - \frac{\gamma a dh}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left(2\beta - \frac{1}{d} \right). \quad (i)$$

Взяв для примера $a = 9,15$ м, $d = 7,93$ м, $h = 3,56$ м, $\gamma = 0,001$ кг/см³ и $\nu = 0,25$, находим $\beta = 0,00718$ см⁻¹ и $\beta d = 5,691$. При этом значении величины βd наше допущение относительно того, что оболочка бесконечно длинна, приводит нас к весьма точным значениям для момента и перерезывающей силы. Выражения (h) и (i) дают нам

$$M_0 = 6338 \text{ кгм/м}, \quad Q_0 = -10\,074 \text{ кг/м}.$$

При сооружении стальных резервуаров очень часто пользуются листовым металлом нескольких различных толщин, как показано на рис. 247. Применяя частное решение (e) к каждому поясу постоянной толщины, мы обнаруживаем, что эти различия в толщине влекут за собой разрывы непрерывности в смещениях w , по стыкам m и n . Эти разрывы непрерывности, равно как и смещения у дна ab , могут быть устранены путем приложения моментов и перерезывающих сил. Полагая, что вертикальное измерение каждого цилиндрического пояса достаточно велико для того, чтобы оправдать применение формул для бесконечно длинной оболочки, вычисляем необходимые для уничтожения разрыва непрерывности моменты и перерезывающие силы, как и раньше, с помощью уравнений (279) и (280) и налагаем для каждого стыка по два условия, согласно которым два смежных пояса оболочки должны иметь у этого стыка одинаковые прогибы и общую касательную. Если применение формул (279) и (280), выведенных для бесконечно длинной оболочки, не может быть оправдано, то к каждому участку резервуара следует применить общее решение, содержащее четыре постоянные интегрирования. Определение постоянных в этих условиях становится гораздо более сложным, так как отдельные стыки теперь уже нельзя

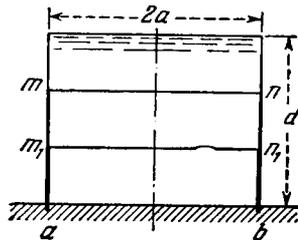


Рис. 247.

¹⁾ Отрицательный знак указывает на то, что сила Q_0 имеет здесь направление, указанное на рис. 246, т. е. противоположное тому, которое предполагалось при выводе уравнений (279) и (280) и которое указано на рис. 236.

рассматривать независимо один от другого, а это приводит к необходимости решать систему совместных уравнений. Такая задача допускает решение приближенными методами ¹⁾.

118. Цилиндрические резервуары со стенками переменной толщины.

В случае если толщина стенки резервуара изменяется, решение задачи требует интегрирования уравнения (273), причем жесткость D при изгибе и толщина h должны рассматриваться здесь уже не как постоянные величины, а как функции x . Иначе говоря, мы имеем здесь дело с линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами. В качестве примера рассмотрим случай, когда толщина стенки является линейной функцией координаты x ²⁾. Взяв начало координат, как показано на рис. 248, будем иметь для толщины и для жесткости при изгибе следующие выражения:

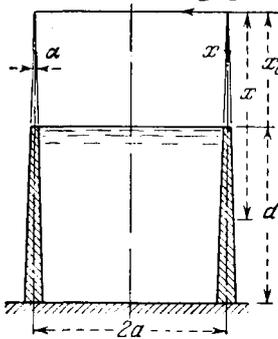


Рис. 248.

$$h = \alpha x, \quad D = \frac{E\alpha^3}{12(1-\nu^2)} x^3; \quad (a)$$

при этом уравнение (273) принимает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 \alpha^2} x w = - \frac{12(1-\nu^2) \nu (x-x_0)}{E\alpha^3}. \quad (b)$$

Частным интегралом этого уравнения будет

$$w_1 = - \frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{x-x_0}{x}. \quad (c)$$

Это решение представляет собой радиальное расширение оболочки со свободными краями под внутренним давлением $\nu(x-x_0)$. В результате смещения (с) произойдет некоторое изгибание образующих цилиндра. Соответствующий изгибающий момент равен

$$M_x = -D \frac{d^2 w_1}{dx^2} = - \frac{\gamma a^2 \alpha^2 x_0}{6(1-\nu^2)}. \quad (d)$$

Этот момент не зависит от x и во всех встречающихся на практике случаях столь мал, что его влиянием можно обычно пренебречь.

¹⁾ Приближенный метод решения этой задачи был предложен Рунге (Runge S., Z. Math. Physik, т. 51, стр. 254, 1904). Гиркман (K. Girkmann) применил этот метод к расчету крупного сварного резервуара: Der Stahlbau, т. 4, стр. 25, 1931.

²⁾ Reissner H., Beton и Eisen, т. 7, стр. 150, 1908. См. также Флюгге В., Статика и динамика оболочек, М., Госстройиздат, 1961. О резервуарах, форма которых слегка отклоняется от цилиндрической, см. Federhofer K., Österr. Bauzeitschrift, т. 6, стр. 149, 1951; о резервуарах со стенкой, толщина которой изменяется по квадратичному закону: Federhofer K., Österr. Ingr.-Arch., т. 6, стр. 43, 1952. Метод параметров, близкий к изложенному в § 40, был применен Фором (Fauger H., Proc. IX Congr. Appl. Mech., Брюссель, т. 6, стр. 297, 1957). Данные, относящиеся к проектированию резервуаров для воды, приводятся в книгах: Gray W. S., Reinforced concrete reservoirs and tanks, Лондон, 1954, и Lewe V., Handbuch für Eisenbetonbau, т. 9, Берлин, 1934.

Чтобы получить полное решение уравнения (b), нам остается к частному интегралу (c) прибавить решение однородного уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 a^2} x w = 0,$$

которое по делении на x может быть написано таким образом:

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 a^2} w = 0. \quad (e)$$

Решение этого уравнения четвертого порядка можно привести к решению двух уравнений второго порядка¹⁾, если мы заметим, что

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dw}{dx} \right) \right] \right\}.$$

Для упрощения записей введем следующие обозначения:

$$L(w) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dw}{dx} \right), \quad (f)$$

$$\rho^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 a^2}, \quad (g)$$

и тогда уравнение (e) примет вид

$$L[L(w)] + \rho^4 w = 0, \quad (h)$$

причем его можно будет записать одним из следующих способов:

$$\left. \begin{aligned} L[L(w) + i\rho^2 w] - i\rho^2 [L(w) + i\rho^2 w] &= 0, \\ L[L(w) - i\rho^2 w] + i\rho^2 [L(w) - i\rho^2 w] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Мы видим, что уравнение (h) удовлетворяется решениями уравнений второго порядка

$$L(w) + i\rho^2 w = 0, \quad (j)$$

$$L(w) - i\rho^2 w = 0. \quad (k)$$

Положив, что

$$w_1 = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad w_2 = \varphi_3 + i\varphi_4, \quad (l)$$

суть два линейно независимых решения уравнения (j), мы заметим, что

$$w_3 = \varphi_1 - i\varphi_2 \quad \text{и} \quad w_4 = \varphi_3 - i\varphi_4, \quad (m)$$

представляют собой решения уравнения (k). Все четыре решения (l) и (m), вместе взятые, представят тогда полную систему независимых решений уравнения (h). Пользуясь суммами и разностями решений (l) и (m), мы сможем представить общее решение уравнения (h) в следующем виде:

$$w = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 \varphi_3 + C_4 \varphi_4, \quad (n)$$

¹⁾ Это приведение было показано Кирхгоффом (Kirchhoff G., Berliner Monatsberichte, стр. 815, 1879); см. также Todhunter I., Pearson K., History of the theory of elasticity, т. 2, стр. 92.

где C_1, \dots, C_4 — произвольные постоянные. Таким образом, задача сводится к определению четырех функций $\varphi_1, \dots, \varphi_4$, причем все они могут быть получены, если нам известно полное решение одного из уравнений (j) и (k).

Взяв уравнение (j) и подставив вместо $L(w)$ его значение (f), получим

$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + 2 \frac{dw}{dx} + i\rho^2 w = 0. \quad (o)$$

При введении новых переменных

$$\eta = 2\rho \sqrt{ix}, \quad \zeta = w \sqrt{x} \quad (p)$$

уравнение (o) преобразуется в

$$\eta^2 \frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} + \eta \frac{d\zeta}{d\eta} + (\eta^2 - 1)\zeta = 0. \quad (r)$$

Возьмем в качестве решения этого уравнения степенной ряд

$$\zeta_1 = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots \quad (s)$$

Подставив этот ряд в уравнение (r) и приравняв коэффициенты при каждой степени η нулю, получим следующее соотношение между коэффициентами ряда (s):

$$(\eta^2 - 1)a_n + a_{n-2} = 0. \quad (t)$$

Применяя это уравнение к первым двум коэффициентам и положив $a_{-1} = a_{-2} = 0$, найдем, что $a_0 = 0$ и что a_1 может быть приравнено любой произвольной постоянной величине. Вычисляя с помощью уравнения (t) следующие коэффициенты, найдем, что ряд (s) имеет вид

$$\zeta = C' \frac{\eta}{2} \left(1 - \frac{\eta^2}{2 \cdot 4} + \frac{\eta^4}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{\eta^6}{2 \cdot (4 \cdot 6)^2 \cdot 8} + \dots \right) = C' J_1(\eta), \quad (u)$$

где $J_1(\eta)$ — функция Бесселя первого рода и первого порядка. В нашем дальнейшем изложении нам удобно будет пользоваться соотношением

$$J_1(\eta) = -\frac{d}{d\eta} \left[1 - \frac{\eta^2}{2^2} + \frac{\eta^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{\eta^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right] = -\frac{dJ_0}{d\eta}, \quad (v)$$

в котором ряд, заключенный в скобки и обозначенный через J_0 , представляет собой функцию Бесселя первого рода нулевого порядка. Подставив вместо η выражение $2\rho \sqrt{ix}$ [см. обозначение (p)] в ряд, представляющий $J_0(\eta)$, и собрав отдельно действительные и отдельно мнимые члены, получим

$$J_0(\eta) = \psi_1(2\rho \sqrt{x}) + i\psi_2(2\rho \sqrt{x}), \quad (w)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(2\rho \sqrt{x}) &= 1 - \frac{(2\rho \sqrt{x})^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{(2\rho \sqrt{x})^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \dots \\ \psi_2(2\rho \sqrt{x}) &= -\frac{(2\rho \sqrt{x})^2}{2^2} + \frac{(2\rho \sqrt{x})^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} - \frac{(2\rho \sqrt{x})^{10}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

Решение (u) дает нам тогда

$$\zeta_1 = -C' [\psi'_1(2\rho\sqrt{x}) + i\psi'_2(2\rho\sqrt{x})], \quad (a')$$

где ψ'_1 и ψ'_2 обозначают производные функции (294) по аргументу $2\rho\sqrt{x}$.

Второй интеграл уравнения (r) — более сложного вида. Не дифференцируя, мы устанавливаем, что его можно представить в виде

$$\zeta_2 = C''' [\psi'_3(2\rho\sqrt{x}) + i\psi'_4(2\rho\sqrt{x})], \quad (b')$$

где ψ'_3 и ψ'_4 суть производные по аргументу $2\rho\sqrt{x}$ от следующих функций:

$$\left. \begin{aligned} \psi_3(2\rho\sqrt{x}) &= \frac{1}{2} \psi_1(2\rho\sqrt{x}) - \frac{2}{\pi} \left[R_1 + \ln \frac{\beta 2\rho\sqrt{x}}{2} \psi_2(2\rho\sqrt{x}) \right], \\ \psi_4(2\rho\sqrt{x}) &= \frac{1}{2} \psi_2(2\rho\sqrt{x}) + \frac{2}{\pi} \left[R_2 + \ln \frac{\beta 2\rho\sqrt{x}}{2} \psi_1(2\rho\sqrt{x}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

где

$$R_1 = \left(\frac{2\rho\sqrt{x}}{2} \right)^2 - \frac{S(3)}{(3 \cdot 2)^2} \left(\frac{2\rho\sqrt{x}}{2} \right)^6 + \frac{S(5)}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^2} \left(\frac{2\rho\sqrt{x}}{2} \right)^{10} - \dots,$$

$$R_2 = \frac{S(2)}{2^2} \left(\frac{2\rho\sqrt{x}}{2} \right)^4 - \frac{S(4)}{(4 \cdot 3 \cdot 2)^2} \left(\frac{2\rho\sqrt{x}}{2} \right)^8 +$$

$$+ \frac{S(6)}{(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^2} \left(\frac{2\rho\sqrt{x}}{2} \right)^{12} - \dots,$$

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$\ln \beta = 0,57722.$$

Имея решения (a') и (b') уравнения (r), мы заключаем, что общее решение (n) уравнения (e) есть

$$w = \frac{\zeta}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} [C_1 \psi'_1(2\rho\sqrt{x}) + C_2 \psi'_2(2\rho\sqrt{x}) + C_3 \psi'_3(2\rho\sqrt{x}) + C_4 \psi'_4(2\rho\sqrt{x})]. \quad (c')$$

Численные значения функций ψ_1, \dots, ψ_4 и их первых производных приведены в таблице 86¹⁾. Графическое представление функций ψ'_1, \dots, ψ'_4 дано на рис. 249. Мы видим, что с увеличением расстояния от конца значения этих функций быстро возрастают или уменьшаются. Это указывает на то, что при вычислении постоянных интегрирования в решении (c') мы очень

¹⁾ Эта таблица была вычислена Ф. Шлейхером; см. Schleicher F., Kreisplatten auf elastischer Unterlage, Берлин, 1926. Вместо функций ψ можно пользоваться хорошо известными функциями Кельвина. Связь между теми и другими выясняется из следующих соотношений: $\psi_1(x) = \operatorname{ber} x$, $\psi_2(x) = -\operatorname{bei}(x)$, $\psi_3(x) = -(2/\pi) \operatorname{ker} x$, $\psi_4(x) = -(2/\pi) \operatorname{keg} x$. Более точные таблицы этих функций см. на стр. 298.

часто можем поступить так же, как мы поступали с функциями (281), т. е. считать цилиндр бесконечно длинным и принимать во внимание в решении (с') для каждого конца лишь две постоянные из общего их числа четырех.

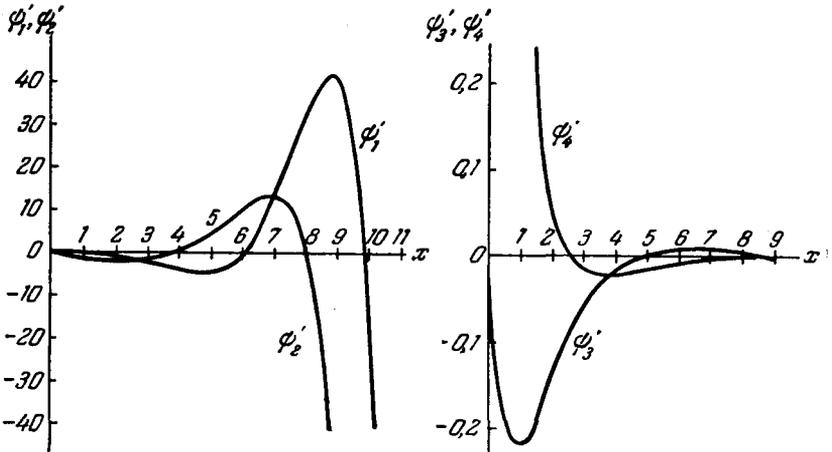


Рис. 249.

В приложении общей теории к частным случаям вычисление последовательных производных w упрощается, если мы воспользуемся следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1''(\xi) &= \psi_2(\xi) - \frac{1}{\xi} \psi_1'(\xi), & \psi_2''(\xi) &= -\psi_1(\xi) - \frac{1}{\xi} \psi_2'(\xi), \\ \psi_3''(\xi) &= \psi_4(\xi) - \frac{1}{\xi} \psi_3'(\xi), & \psi_4''(\xi) &= -\psi_3(\xi) - \frac{1}{\xi} \psi_4'(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (d')$$

в которых символ ξ введен вместо $2\rho\sqrt{x}$. Тогда из выражения (с') получим

$$N_\varphi = -\frac{Eh}{a} w = -\frac{E\alpha}{a} \sqrt{x} [C_1 \psi_1'(\xi) + C_2 \psi_2'(\xi) + C_3 \psi_3'(\xi) + C_4 \psi_4'(\xi)], \quad (e')$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \{ C_1 [\xi \psi_2(\xi) - 2\psi_1'(\xi)] - C_2 [\xi \psi_1(\xi) + 2\psi_2'(\xi)] + \\ + C_3 [\xi \psi_4(\xi) - 2\psi_3'(\xi)] - C_4 [\xi \psi_3(\xi) + 2\psi_4'(\xi)] \}, \quad (f')$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{E\alpha^3}{48(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{ C_1 [(\xi)^2 \psi_2'(\xi) - 4(\xi) \psi_2(\xi) + 8\psi_1'(\xi)] - \\ - C_2 [(\xi)^2 \psi_1'(\xi) - 4(\xi) \psi_1(\xi) - 8\psi_2'(\xi)] + \\ + C_3 [(\xi)^2 \psi_4'(\xi) - 4(\xi) \psi_4(\xi) + 8\psi_3'(\xi)] - \\ - C_4 [(\xi)^2 \psi_3'(\xi) - 4(\xi) \psi_3(\xi) - 8\psi_4'(\xi)] \}, \quad (g')$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{E\alpha^3 \rho^2}{24(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{ C_1 [\xi \psi_1(\xi) + 2\psi_2'(\xi)] + C_2 [\xi \psi_2(\xi) - 2\psi_1'(\xi)] + \\ + C_3 [\xi \psi_3(\xi) + 2\psi_4'(\xi)] + C_4 [\xi \psi_4(\xi) - 2\psi_3'(\xi)] \}. \quad (h')$$

Таблица функций $\psi(x)$

x	$\psi_1(x)$	$\psi_2(x)$	$\frac{d\psi_1(x)}{dx}$	$\frac{d\psi_2(x)}{dx}$
0,00	+1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,10	+1,0000	-0,0025	-0,0001	-0,0500
0,20	+1,0000	-0,0100	-0,0005	-0,1000
0,30	+0,9999	-0,0225	-0,0017	-0,1500
0,40	+0,9996	-0,0400	-0,0040	-0,2000
0,50	+0,9990	-0,0625	-0,0078	-0,2499
0,60	+0,9980	-0,0900	-0,0135	-0,2998
0,70	+0,9962	-0,1224	-0,0214	-0,3496
0,80	+0,9936	-0,1599	-0,0320	-0,3991
0,90	+0,9898	-0,2023	-0,0455	-0,4485
1,00	+0,9844	-0,2496	-0,0624	-0,4974
1,10	+0,9771	-0,3017	-0,0831	-0,5458
1,20	+0,9676	-0,3587	-0,1078	-0,5935
1,30	+0,9554	-0,4204	-0,1370	-0,6403
1,40	+0,9401	-0,4867	-0,1709	-0,6860
1,50	+0,9211	-0,5576	-0,2100	-0,7302
1,60	+0,8979	-0,6327	-0,2545	-0,7727
1,70	+0,8700	-0,7120	-0,3048	-0,8131
1,80	+0,8367	-0,7953	-0,3612	-0,8509
1,90	+0,7975	-0,8821	-0,4238	-0,8857
2,00	+0,7517	-0,9723	-0,4931	-0,9170
2,10	+0,6987	-1,0654	-0,5690	-0,9442
2,20	+0,6377	-1,1610	-0,6520	-0,9661
2,30	+0,5680	-1,2585	-0,7420	-0,9836
2,40	+0,4890	-1,3575	-0,8392	-0,9944
2,50	+0,4000	-1,4572	-0,9436	-0,9983
2,60	+0,3001	-1,5569	-1,0552	-0,9943
2,70	+0,1887	-1,6557	-1,1737	-0,9815
2,80	+0,0651	-1,7529	-1,2993	-0,9589
2,90	-0,0714	-1,8472	-1,4315	-0,9256
3,00	-0,2214	-1,9376	-1,5698	-0,8804
3,10	-0,3855	-2,0228	-1,7141	-0,8223
3,20	-0,5644	-2,1016	-1,8636	-0,7499
3,30	-0,7584	-2,1723	-2,0177	-0,6621
3,40	-0,9680	-2,2334	-2,1755	-0,5577
3,50	-1,1936	-2,2832	-2,3361	-0,4353
3,60	-1,4353	-2,3199	-2,4983	-0,2936
3,70	-1,6933	-2,3413	-2,6608	-0,1315
3,80	-1,9674	-2,3454	-2,8221	+0,0526
3,90	-2,2576	-2,3300	-2,9808	+0,2596

Продолжение

x	$\psi_1(x)$	$\psi_2(x)$	$\frac{d\psi_1(x)}{dx}$	$\frac{d\psi_2(x)}{dx}$
4,00	-2,5634	-2,2927	-3,1346	+0,4912
4,10	-2,8843	-2,2309	-3,2819	+0,7482
4,20	-3,2195	-2,1422	-3,4199	+1,0318
4,30	-3,5679	-2,0236	-3,5465	+1,3433
4,40	-3,9283	-1,8726	-3,6587	+1,6833
4,50	-4,2991	-1,6860	-3,7536	+2,0526
4,60	-4,6784	-1,4610	-3,8280	+2,4520
4,70	-5,0639	-1,1946	-3,8782	+2,8818
4,80	-5,4531	-0,8837	-3,9006	+3,3422
4,90	-5,8429	-0,5251	-3,8910	+3,8330
5,00	-6,2301	-0,1160	-3,8454	+4,3542
5,10	-6,6107	+0,3467	-3,7589	+4,9046
5,20	-6,9803	+0,8658	-3,6270	+5,4835
5,30	-7,3344	+1,4443	-3,4446	+6,0893
5,40	-7,6674	+2,0845	-3,2063	+6,7198
5,50	-7,9736	+2,7890	-2,9070	+7,3729
5,60	-8,2466	+3,5597	-2,5409	+8,0453
5,70	-8,4794	+4,3986	-2,1024	+8,7336
5,80	-8,6644	+5,3068	-1,5856	+9,4332
5,90	-8,7937	+6,2854	-0,9844	+10,1394
6,00	-8,8583	+7,3347	-0,2931	+10,3462
x	$\psi_3(x)$	$\psi_4(x)$	$\frac{d\psi_3(x)}{dx}$	$\frac{d\psi_4(x)}{dx}$
0,00	+0,5000	$-\infty$	0,0000	$+\infty$
0,10	+0,4946	-1,5409	-0,0929	+6,3413
0,20	+0,4826	-1,1034	-0,1419	+3,1340
0,30	+0,4667	-0,8513	-0,1746	+2,0498
0,40	+0,4480	-0,6765	-0,1970	+1,4974
0,50	+0,4275	-0,5449	-0,2121	+1,1585
0,60	+0,4058	-0,4412	-0,2216	+0,9273
0,70	+0,3834	-0,3574	-0,2268	+0,7582
0,80	+0,3606	-0,2883	-0,2286	+0,6286
0,90	+0,3377	-0,2308	-0,2276	+0,5258
1,00	+0,3151	-0,1825	-0,2243	+0,4422
1,10	+0,2929	-0,1419	-0,2193	+0,3730
1,20	+0,2713	-0,1076	-0,2129	+0,3149
1,30	+0,2504	-0,0786	-0,2054	+0,2656
1,40	+0,2302	-0,0542	-0,1971	+0,2235
1,50	+0,2110	-0,0337	-0,1882	+0,1873
1,60	+0,1926	-0,0166	-0,1788	+0,1560
1,70	+0,1752	-0,0023	-0,1692	+0,1290
1,80	+0,1588	+0,0094	-0,1594	+0,1056
1,90	+0,1433	+0,0189	-0,1496	+0,0854

Продолжение

x	$\psi_3(x)$	$\psi_4(x)$	$\frac{d\psi_3(x)}{dx}$	$\frac{d\psi_4(x)}{dx}$
2,00	+0,1289	+0,0265	-0,1399	+0,0679
2,10	+0,1153	+0,0325	-0,1304	+0,0527
2,20	+0,1026	+0,0371	-0,1210	+0,0397
2,30	+0,0911	+0,0405	-0,1120	+0,0285
2,40	+0,0804	+0,0429	-0,1032	+0,0189
2,50	+0,0705	+0,0444	-0,0948	+0,0109
2,60	+0,0614	+0,0451	-0,0868	+0,0039
2,70	+0,0531	+0,0452	-0,0791	-0,0018
2,80	+0,0455	+0,0447	-0,0719	-0,0066
2,90	+0,0387	+0,0439	-0,0650	-0,0105
3,00	+0,0326	+0,0427	-0,0586	-0,0137
3,10	+0,0270	+0,0412	-0,0526	-0,0161
3,20	+0,0220	+0,0394	-0,0469	-0,0180
3,30	+0,0176	+0,0376	-0,0417	-0,0194
3,40	+0,0137	+0,0356	-0,0369	-0,0204
3,50	+0,0102	+0,0335	-0,0325	-0,0210
3,60	+0,0072	+0,0314	-0,0284	-0,0213
3,70	+0,0045	+0,0293	-0,0246	-0,0213
3,80	+0,0022	+0,0271	-0,0212	-0,0210
3,90	+0,0003	+0,0251	-0,0180	-0,0206
4,00	-0,0014	+0,0230	-0,0152	-0,0200
4,10	-0,0028	+0,0211	-0,0127	-0,0193
4,20	-0,0039	+0,0192	-0,0104	-0,0185
4,30	-0,0049	+0,0174	-0,0083	-0,0177
4,40	-0,0056	+0,0156	-0,0065	-0,0168
4,50	-0,0062	+0,0140	-0,0049	-0,0158
4,60	-0,0066	+0,0125	-0,0035	-0,0148
4,70	-0,0069	+0,0110	-0,0023	-0,0138
4,80	-0,0071	+0,0097	-0,0012	-0,0129
4,90	-0,0071	+0,0085	-0,0003	-0,0119
5,00	-0,0071	+0,0073	+0,0005	-0,0109
5,10	-0,0070	+0,0063	+0,0012	-0,0100
5,20	-0,0069	+0,0053	+0,0017	-0,0091
5,30	-0,0067	+0,0044	+0,0022	-0,0083
5,40	-0,0065	+0,0037	+0,0025	-0,0075
5,50	-0,0062	+0,0029	+0,0028	-0,0067
5,60	-0,0059	+0,0023	+0,0030	-0,0060
5,70	-0,0056	+0,0017	+0,0032	-0,0053
5,80	-0,0053	+0,0012	+0,0033	-0,0047
5,90	-0,0049	+0,0008	+0,0033	-0,0041
6,00	-0,0046	+0,0004	+0,0033	-0,0036

С помощью этих формул прогибы и напряжения вычисляются для любой точки, если только из начальных условий определены постоянные C_1, \dots, C_4 . Если $2\rho\sqrt{x} \leq 6$, то значения функций ψ_1, \dots, ψ_4 следует взять из таблицы 47. Для больших значений аргумента достаточно точны ниже следующие приближенные выражения:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\xi) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \\ \psi_2(\xi) &\approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \\ \psi'_1(\xi) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \\ \psi'_2(\xi) &\approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \\ \psi_3(\xi) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \\ \psi_4(\xi) &\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \\ \psi'_3(\xi) &\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \\ \psi'_4(\xi) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right). \end{aligned} \right\} \quad (296)$$

В качестве примера рассмотрим цилиндрический резервуар тех же общих размеров, что и тот, с которым мы имели дело в предыдущем параграфе (стр. 537), и положим, что толщина стенки изменяется от 356 мм у дна до 8,9 мм у верхнего края. В таком случае расстояние начала координат (рис. 248) от дна резервуара будет равно

$$d + x_0 = \frac{4}{3} d = 10,57 \text{ м.}$$

Отсюда $(2\rho\sqrt{x})_{x=x_0+d} = 21,45$. Для такого большого значения аргумента функции ψ_1, \dots, ψ_4 и их первые производные могут быть заменены их приближенными выражениями (296). Прогиб и наклон у дна резервуара соответствующие частному решению (с), будут

$$(w_1)_{x=x_0+d} = -\frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{d}{d+x_0}, \quad \left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=x_0+d} = -\frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{x_0}{(x_0+d)^2}. \quad (1')$$

Полагая, что длина цилиндрической оболочки в осевом направлении весьма велика, принимаем постоянные C_3 и C_4 в решении (с') равными нулю, а по-

стоянные C_1 и C_2 определяем таким образом, чтобы прогиб и наклон у дна оболочки обращались в нуль. Эти требования дают нам два следующих уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{V\bar{x}} [C_1\psi'_1(2\rho V\bar{x}) + C_2\psi'_2(2\rho V\bar{x})]_{x=x_0+d} &= \frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{d}{d+x_0}, \\ \frac{1}{2x\sqrt{x}} \{C_1[2\rho V\bar{x}\psi_2(2\rho V\bar{x}) - 2\psi'_1(2\rho V\bar{x})] - \\ - C_2[2\rho V\bar{x}\psi_1(2\rho V\bar{x}) + 2\psi'_2(2\rho V\bar{x})]\}_{x=x_0+d} &= \frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{x_0}{(d+x_0)^2}. \end{aligned} \right\} (j')$$

Вычислив значения функций ψ_1 , ψ_2 и их производных из асимптотических формул (296) и подставив найденные значения в уравнение (j'), получим

$$C_1 = -269 \frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{1}{\sqrt{d+x_0}} \cdot N,$$

$$C_2 = -299 \frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{1}{\sqrt{d+x_0}} \cdot N,$$

где

$$N = \left(e^{-\frac{\xi}{V^2}} \sqrt{2\pi\xi} \right)_{\xi=21,45}.$$

Внеся эти значения постоянных в выражение (g'), найдем для изгибающего момента у дна

$$M_0' = 6311 \text{ кг.м./м.}$$

Точно таким же образом, пользуясь выражением (h'), находим величину перерезывающей силы у дна резервуара

$$Q_0 = -9400 \text{ кг./м.}$$

Эти результаты ненамного отличаются от ранее полученных значений для резервуара со стенками постоянной толщины (стр. 537).

119. Температурные напряжения в цилиндрической оболочке.

Равномерное распределение температуры. Если цилиндрическая свободная по торцам оболочка подвергается воздействию равномерного изменения температуры, то никаких температурных напряжений в ней не возникает. Но если торцы ее оперты или защемлены, то свободное расширение оболочки станет невозможным и на торцах возникнут местные напряжения изгиба. Если температурное расширение оболочки со свободными торцами известно, то при посредстве уравнений (279) и (280) легко получить, как это и было сделано в случаях, показанных на рис. 241, значения реактивных моментов и сил для любого способа симметричного опирания.

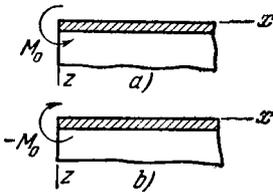
Градиент температуры в радиальном направлении. Положим, что t_1 и t_2 (постоянные) температуры стенки цилиндра на ее внутренней и соответственно на наружной поверхностях и что по толщине стенки температура изменяется линейно. При этих

условиях в точках, находящихся на значительном расстоянии от концов оболочки, изгиба не будет, и напряжения можно будет вычислить по формуле (51), выведенной для защемленной по краям пластинки (см. стр. 65). В таком случае напряжения на наружной и на внутренней поверхностях оболочки будут равны

$$\sigma_x = \sigma_\varphi = \pm \frac{E\alpha(t_1 - t_2)}{2(1 - \nu)}, \quad (a)$$

причем верхний знак относится к наружной поверхности, указывая на то, что при $t_1 > t_2$ на ней будут действовать растягивающие напряжения.

Вблизи торцов обычно имеет место некоторый изгиб оболочки, и потому полные значения температурных напряжений получатся в результате наложения на (a) напряжений, приводящих к выполнению заданных граничных условий. Рассмотрим для примера случай свободных торцов, у которых напряжения σ_x должны отсутствовать. Приступая к анализу напряженно-деформированного состояния, заметим, что напряжения (a) сопровождаются здесь появлением равномерно распределенных моментов M_0 (рис. 250, a), величина которых равна



$$M_0 = -\frac{E\alpha(t_1 - t_2)h^2}{12(1 - \nu)}. \quad (b)$$

Рис. 250.

Реализация условий свободного торца требует здесь наложения моментов той же величины, но противоположного знака (рис. 250, b). Напряжения на свободном торце определяются поэтому путем наложения на напряжения (a) напряжений, вызванных моментами $-M_0$ (рис. 250, b). Эти последние напряжения легко вычислить, пользуясь решением (278). Из этого решения следует, что

$$\left. \begin{aligned} (M_x)_{x=0} &= \frac{E\alpha(t_1 - t_2)h^2}{12(1 - \nu)}, \\ (M_\varphi)_{x=0} &= \nu(M_x)_{x=0} = \frac{\nu E\alpha(t_1 - t_2)h^2}{12(1 - \nu)}, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$(N_\varphi)_{x=0} = -\frac{Eh}{a}(\omega)_{x=0} = \frac{Eh}{a} \frac{M_0}{2\beta^2 D} = \frac{Eh\alpha(t_1 - t_2)}{2\sqrt{3}(1 - \nu)} \sqrt{1 - \nu^2}. \quad (d)$$

Мы видим, что на свободном торце максимальное температурное напряжение действует в окружном направлении и получается путем сложения напряжений (a) с напряжениями, вызванными моментами M_φ и силой N_φ . Полагая, что $t_1 > t_2$, получаем, таким образом,

$$(\sigma_\varphi)_{\max} = \frac{E\alpha(t_1 - t_2)}{2(1 - \nu)} \left(1 - \nu + \frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\sqrt{3}} \right). \quad (e)$$

При $\nu = 0,3$ это напряжение приблизительно на 25% больше напряжения (а), вычисленного для точек, находящихся на большом расстоянии от торцов. Отсюда мы можем заключить, что если в каком-либо хрупком материале, например стекле, возникнет вследствие разности температур $t_1 - t_2$ трещина, то начнется она с торца и будет следовать в осевом направлении. Подобным же образом можно вычислить напряжения также и для тех случаев, когда торцы заземлены или оперты¹⁾.

Градиент температуры в осевом направлении. Если температура постоянна по толщине стенки, но изменяется по длине цилиндра, то задачу легко свести к решению уравнения (274)²⁾. Пусть $t = F(x)$ представляет собой повышение температуры оболочки, отсчитываемое от некоторой постоянной начальной температуры. Положим, что наша оболочка разбита плоскостями, перпендикулярными к оси x , на бесконечно тонкие кольца; тогда, обозначив радиус оболочки через a , мы сможем представить радиальное расширение колец вследствие изменения температуры в виде произведения $2aF(x)$. Это расширение можно уничтожить, вернув оболочку к ее начальному диаметру, путем наложения внешнего давления такой интенсивности Z , что

$$\frac{a^2 Z}{Eh} = a\alpha F(x),$$

что дает

$$Z = \frac{Eh\alpha}{a} F(x). \quad (f)$$

Нагрузка такой интенсивности полностью устраняет температурное расширение оболочки, вызывая в ней лишь окружные напряжения величиной

$$\sigma_\varphi = -\frac{aZ}{h} = -E\alpha F(x). \quad (g)$$

Чтобы получить полные температурные напряжения, мы должны на напряжения (g) наложить напряжения, производимые в оболочке нагрузкой интенсивностью $-Z$. Эту последнюю нагрузку нужно приложить для того, чтобы освободить боковую поверхность оболочки от внешней нагрузки, данной уравнением (f). Напряжения, вызванные в оболочке нагрузкой $-Z$, получаются посредством интегрирования дифференциального уравнения (276), принимающего в данном случае вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = -\frac{Eh\alpha}{Da} F(x). \quad (h)$$

¹⁾ Несколько примеров такого рода разбирается в работе Кента (Kent C. H., Trans. Am. Soc. Mech. Eng., т. 53, стр. 167, 1931).

²⁾ См. Тимошенко С. П., Лессельс Д., Прикладная теория упругости, М., Гостехиздат, 1931.

В качестве примера применения этого уравнения рассмотрим длинный цилиндр, подобный показанному на рис. 251, *a*, и положим, что часть цилиндра, лежащая вправо от поперечного сечения *mn*, имеет постоянную температуру t_0 , между тем как температура левой части линейно падает до величины t_1 на конце $x = b$ согласно закону

$$t = t_0 - \frac{(t_0 - t_1)x}{b}.$$

Изменение температуры в некоторой точке этой части цилиндра выражается, таким образом, формулой

$$F(x) = t - t_0 = -\frac{(t_0 - t_1)x}{b}. \quad (i)$$

Подставив это выражение для изменения температуры в уравнение (h), находим, что частным решением этого уравнения будет

$$w_1 = \frac{aa}{b}(t_0 - t_1)x. \quad (j)$$

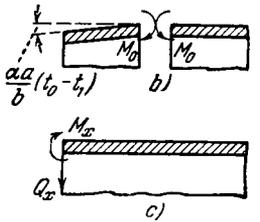


Рис. 251.

Соответствующее этому частному решению смещение показано на рис. 251, *b*, из которого видно, что в сечении *mn* получается при этом угол разрыва, равный

$$\frac{w_1}{x} = \frac{aa}{b}(t_0 - t_1). \quad (k)$$

Чтобы устранить этот разрыв, необходимо приложить моменты M_0 . Так как соответствующее частному решению (j) напряжение σ_φ компенсирует напряжения (g), то мы заключаем, что напряжения, вызванные моментами M_0 , представляют собой полные температурные напряжения, вызванные указанным выше падением температуры. Если расстояния поперечного сечения *mn* от концов цилиндра велики, то значение момента M_0 можно получить путем подстановки

$$Q_0 = 0, \quad \left(\frac{dw_1}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{aa}{2b}(t_0 - t_1)$$

непосредственно из уравнения (280), которое дает ¹⁾

$$M_0 = -\beta D \frac{aa}{2b}(t_0 - t_1). \quad (l)$$

¹⁾ Если разность $t_0 - t_1$ положительна, как мы приняли при выводе, то момент M_0 будет отрицательным и примет направление, показанное на рис. 251, *b*.

Внеся сюда вместо β его значение из выражения (275) и взяв $\nu = 0,3$, найдем, что максимальное температурное напряжение равно

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6M_0}{h^2} = 0,353 \frac{E\alpha}{b} \sqrt{ah} (t_0 - t_1). \quad (m)$$

В этих подсчетах предполагалось, что расстояние b до торца цилиндра велико. Если в действительности это не так, то в значение момента (l) должна быть внесена поправка, вычисление которой производится следующим образом. В бесконечно длинной оболочке момент M_0 вызывает на расстоянии $x = b$ появление момента и перерезывающей силы (рис. 251, c)¹⁾, определяемых общим решением (282)

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 \varphi(\beta b), \\ Q_x &= -D \frac{d^3 w}{dx^3} = -2\beta M_0 \zeta(\beta b). \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Так как на расстоянии $x = b$ у нас имеется свободный край, то для устранения сил (h) (рис. 251, b) нам необходимо приложить момент и силу, величины которых равны

$$-M_x = -M_0 \varphi(\beta b), \quad -Q_x = 2\beta M_0 \zeta(\beta b). \quad (o)$$

Момент, произведенный силами (o) в поперечном сечении (mn), дает искомую поправку ΔM_0 , которую нужно внести в значение момента (l). Величина этой поправки определяется третьим из уравнений (282), если вместо M_0 мы подставим в него $-M_0 \varphi(\beta b)$ ²⁾ и $-2\beta M_0 \zeta(\beta b)$ вместо Q . Эти подстановки дают

$$\Delta M = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_0 [\varphi(\beta b)]^2 - 2M_0 [\zeta(\beta b)]^2. \quad (p)$$

Рассмотрим для примера чугунный цилиндр следующих размеров: $a = 246$ мм, $h = 35$ мм, $b = 108$ мм, $\alpha = 101 \cdot 10^{-7}$, $E = 9,1 \cdot 10^6$ кг/см², $t_0 - t_1 = 180^\circ$ С. Тогда формула (m) дает

$$\sigma_{\max} = 656 \text{ кг/см}^2.$$

Вычисляя поправку (p), имеем

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{a^2 h^2}} = \frac{1}{7,21} \text{ см}^{-1}, \quad \beta b = 1,50$$

и из таблицы 84

$$\varphi(\beta b) = 0,238, \quad \zeta(\beta b) = 0,223.$$

¹⁾ Показанные на рис. 251, b направления M_x и Q_x положительны, если ось x направлена так, как показано на рис. 251, a.

²⁾ Здесь введен знак, обратный по отношению к имеющемуся в выражении (o), так как уравнения (282) выведены для направления оси x , противоположного указанному на рис. 251, a.

Отсюда по формуле (p)

$$\Delta M = -M_0 (0,238^3 + 2 \cdot 0,223^3) = -0,156M_0.$$

Это указывает на то, что для получения истинного максимального значения температурного напряжения вычисленное выше максимальное напряжение (q) нужно уменьшить на 15,6%.

Изложенный здесь метод вычисления температурных напряжений в случае линейного закона изменения температуры (i) без затруднений может быть применен также и в тех случаях, когда $F(x)$ имеет иной — не линейный вид.

120. Деформация нерастяжимой круговой цилиндрической оболочки¹⁾. Если торцы тонкой круглой цилиндрической оболочки свободны и нагрузка не симметрична относительно оси цилиндра, то деформация сводится в основном к изгибу. Величину прогиба в подобных случаях можно получить с достаточной точностью, совершенно пренебрегая растяжением срединной поверхности оболочки. Пример такого типа загрузжения изображен на рис. 252. Укорочение

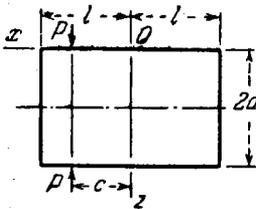


Рис. 252.

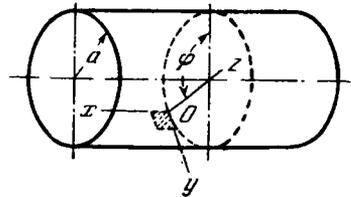
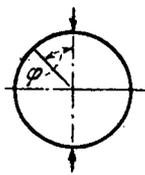


Рис. 253.

вертикального диаметра, по которому действуют силы P , может быть определено здесь с удовлетворительной точностью, если принять во внимание один лишь изгиб оболочки и допустить, что срединная поверхность ее нерастяжима.

Рассмотрим сначала те ограничения, которые налагаются на компоненты смещения в тех случаях, когда деформация цилиндрической оболочки не сопровождается растяжением. Выделив в точке O срединной поверхности оболочки элемент и направив оси координат, как показано на рис. 253, обозначим компоненты смещений точки O в направлениях x , y и z соответственно через u , v и w . Линейная деформация в направлении x будет тогда

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (a)$$

¹⁾ Теория деформаций нерастяжимых оболочек принадлежит Рэлею (Lord Rayleigh, Proc. London Math. Soc., т. 13, 1881, и Proc. Roy. Soc., London, т. 45, 1889).

Для вычисления линейной деформации в окружном направлении воспользуемся уравнением (а) (§ 108, стр. 492). При этом будем иметь

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{a}. \quad (b)$$

Деформация сдвига в срединной поверхности выразится суммой

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{\partial u}{a \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (c)$$

той же самой, что и в случае малых прогибов пластинки, с той лишь разницей, что вместо du здесь входит произведение $a d\varphi$. Условие, согласно которому деформация не должна сопровождаться растяжением, требует при этом, чтобы три компонента деформации обращались у срединной поверхности в нуль, т. е. чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{a} = 0, \quad \frac{\partial u}{a \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (d)$$

Эти требования будут удовлетворены, если мы представим смещения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0, \\ v_1 &= a \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi - a'_n \sin n\varphi), \\ w_1 &= -a \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n \sin n\varphi + a'_n \cos n\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

где a — радиус срединной поверхности оболочки, φ — центральный угол, а a_n и a'_n — постоянные, вычисляемые для каждого частного случая загрузки. Смещения (е) представляют тот случай, когда все поперечные сечения оболочки деформируются совершенно одинаково. На эти смещения нам нужно наложить смещения (два из которых изменяются по длине цилиндра), выражаемые посредством следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (b_n \sin n\varphi + b'_n \cos n\varphi), \\ v_2 &= x \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\varphi - b'_n \sin n\varphi), \\ w_2 &= -x \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n \sin n\varphi + b'_n \cos n\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Подстановкой в уравнения (d) легко доказать, что эти выражения точно так же удовлетворяют условиям нерастяжимости. Таким образом, окончательными выражениями для смещений при деформации нерастяжимой цилиндрической оболочки будут

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2. \quad (g)$$

Для вычисления деформации без растяжения цилиндрической оболочки, находящейся под действием данной системы сил, удобно применить энергетический метод. Чтобы вывести нужное нам выражение для энергии деформации изгиба оболочки, начнем с того, что вычислим изменения кривизны срединной поверхности оболочки. В направлении образующей это изменение равно нулю, поскольку, как это можно видеть из выражений (e) и (f), образующие остаются прямыми. Изменение кривизны окружности получится из сравнения

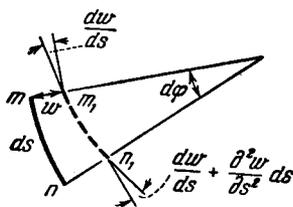


Рис. 254.

кривизны элемента m_1n_1 окружности (рис. 254) до деформации с кривизной, соответствующей элементу m_1n_1 после деформации. До деформации кривизна в окружном направлении равна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{d\varphi}{a d\varphi} = \frac{1}{a}.$$

Кривизна элемента m_1n_1 после деформации

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \approx \frac{d\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} ds}{(a - w) d\varphi}.$$

Отсюда изменение кривизны

$$\chi_\varphi = \frac{d\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} ds}{(a - w) d\varphi} - \frac{d\varphi}{a d\varphi} \approx \frac{1}{a^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right).$$

Пользуясь вторым из уравнений (d), мы можем также написать

$$\chi_\varphi = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right). \quad (h)$$

Изгибающий момент, производящий это изменение кривизны, равен

$$M_\varphi = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right).$$

Соответствующая же энергия деформации изгиба на единицу площади может быть вычислена по тому же способу, которым мы поль-

зовались в расчетах пластинок (см. стр. 60), причем она оказывается равной

$$\frac{D}{2a^4} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 = \frac{D}{2a^4} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2. \quad (i)$$

Кроме изгиба каждый элемент, подобный, например, изображенному у точки O на рис. 253, будет испытывать кручение. Для того чтобы вычислить деформацию кручения, заметим, что элемент образующей поворачивается¹⁾ при этом на угол, равный $-\partial w/\partial x$, относительно оси y , и на угол, равный $\partial v/\partial x$, относительно оси z . Если мы обратимся теперь к подобному же элементу образующей, отстоящему от первого на расстоянии $a d\varphi$ по окружности, то заметим, что его поворот относительно оси y в результате смещения w будет равен

$$-\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} d\varphi. \quad (j)$$

Вращение того же элемента в плоскости, касательной к оболочке, равно

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial \varphi} d\varphi.$$

В силу того, что между двумя элементами имеется угол $d\varphi$, указанное вращение будет иметь составляющую относительно оси y , равную²⁾

$$-\frac{\partial v}{\partial x} d\varphi. \quad (k)$$

Из формул (j) и (k) заключаем, что полный угол кручения между двумя рассматриваемыми элементами равен

$$-\chi_{x\varphi} a d\varphi = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\varphi$$

и что величина энергии деформации кручения на единицу площади выразится произведением (см. стр. 61)

$$\frac{D(1-\nu)}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2. \quad (l)$$

Складывая выражения (i) и (l) и интегрируя по всей поверхности оболочки, находим полную энергию деформации цилиндрической

¹⁾ При установлении знака поворота здесь применено правило винта с правой нарезкой.

²⁾ В этом выражении мы пренебрегаем малой величиной второго порядка.

оболочки, подвергающейся деформации без растяжения

$$V = \frac{D}{2a^4} \int \int \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 + 2(1-\nu) a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] a d\varphi dx.$$

Подставив сюда вместо w и v их выражения (g) и интегрируя, находим для цилиндра длиной $2l$ (рис. 252) следующее выражение для энергии деформации:

$$V = \pi D l \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2 - 1)^2}{a^3} \left\{ n^2 \left[a^2 (a_n^2 + a_n'^2) + \frac{1}{3} l^2 (b_n^2 + b_n'^2) \right] + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) a^2 (b_n^2 + b_n'^2) \right\}. \quad (297)$$

Это выражение не содержит члена с $n = 1$, так как соответствующие смещения

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= a (a_1 \cos \varphi - a_1' \sin \varphi), \\ w_1 &= -a (a_1 \sin \varphi + a_1' \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

представляют собой смещения круга как твердого тела в его плоскости. Вертикальный и горизонтальный компоненты этого смещения находятся подстановкой $\varphi = \pi/2$ в выражения (m); при этом получаем

$$(v_1)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -aa_1', \quad (w_1)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -aa_1.$$

Это смещение не оказывает влияния на величину энергии деформации.

Тот же вывод может быть сделан и в отношении смещений, представленных членами с $n = 1$ в выражениях (f).

Применим теперь выражение (297) энергии деформации к вычислению деформации, произведенной в цилиндрической оболочке, двумя равными и противоположными силами P , действующими по диаметру в сечении, отстоящем на расстоянии c от середины оболочки¹⁾ (рис. 252). Эти силы производят работу лишь на радиальных смещениях w точек их приложения, т. е. точек $x = c$, $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Так как члены с коэффициентами a_n и b_n в выражениях для w_1 и w_2 [см. уравнения (e) и (f)] в этих точках обращаются в нуль, то в выражение для деформации войдут лишь члены с коэффициентами a_n' и b_n' . Пользуясь принципом виртуальных перемещений, пишем

¹⁾ Случай цилиндрической оболочки, усиленной упругими кольцами и нагруженной двумя противоположными силами, которые действуют по диаметрам этих колец, рассматривал Р. С. Леви (L e v y R. S., J. Appl. Mech., т. 15, стр. 30, 1948).

уравнения для вычисления коэффициентов a'_n и b'_n :

$$\frac{\partial V}{\partial a'_n} \delta a'_n = -na \delta a'_n (1 + \cos n\pi) P,$$

$$\frac{\partial V}{\partial b'_n} \delta b'_n = -nc \delta b'_n (1 + \cos n\pi) P.$$

Подставляя сюда вместо V выражение (297), получаем для случая, когда n — четное число,

$$\left. \begin{aligned} a'_n &= -\frac{a^2 P}{n(n^2-1)^2 \pi D l}, \\ b'_n &= -\frac{nc P a^3}{(n^2-1)^2 \pi D l \left[\frac{1}{3} n^2 l^2 + 2(1-\nu) a^2 \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Если n — нечетное число, имеем

$$a'_n = b'_n = 0. \quad (o)$$

И тогда по формулам (e) и (f)

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Pa^3}{\pi D l} \sum_{n=2, 4, 6, \dots} \frac{ac \cos n\varphi}{(n^2-1)^2 \left[\frac{1}{3} n^2 l^2 + 2(1-\nu) a^2 \right]}, \\ v &= \frac{Pa^3}{\pi D l} \sum_{n=2, 4, 6, \dots} \left\{ \frac{1}{n(n^2-1)^2} + \frac{ncx}{(n^2-1)^2 \left[\frac{1}{3} n^2 l^2 + 2(1-\nu) a^2 \right]} \right\} \sin n\varphi, \\ w &= \frac{Pa^3}{\pi D l} \sum_{n=2, 4, 6, \dots} \left\{ \frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{n^2 cx}{(n^2-1)^2 \left[\frac{1}{3} n^2 l^2 + 2(1-\nu) a^2 \right]} \right\} \cos n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

Если силы P приложены в середине оболочки, т. е. если $c = 0$, то укорочение вертикального диаметра оболочки будет равно

$$\delta = (w)_{\varphi=0} + (w)_{\varphi=\pi} = \frac{2Pa^3}{\pi D l} \sum_{n=2, 4, 6, \dots} \frac{1}{(n^2-1)^2} = 0,149 \frac{Pa^3}{2Dl}. \quad (q)$$

Удлинение же горизонтального диаметра

$$\delta_1 = -\left[(w)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} + (w)_{\varphi=\frac{3\pi}{2}} \right] = \frac{2Pa^3}{\pi D l} \sum_{n=2, 4, 6, \dots} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n^2-1)^2} = 0,137 \frac{Pa^3}{2Dl}. \quad (r)$$

Легко вычислить также изменение длины любого другого диаметра. Подобные же выкладки можно произвести и для того случая, когда c отлично от нуля, а прогибы изменяются с расстоянием x от середины.

Решение (p) не удовлетворяет условиям на свободных краях оболочки, так как оно требует, чтобы во избежание изгиба в меридианных плоскостях были приложены распределенные моменты $M_x = \nu M\varphi$. Изгиб этот носит,

однако, местный характер и заметно не влияет на прогибы (q) и (r), что находится в удовлетворительном согласии с экспериментами.

Только что описанным методом анализа деформаций цилиндрической оболочки без растяжения можно воспользоваться также и при вычислении деформации части цилиндрической оболочки, вырезанной из целого цилиндра радиуса a двумя осевыми сечениями, образующими между собой угол α (рис. 255). Взяв, например, для смещений ряды

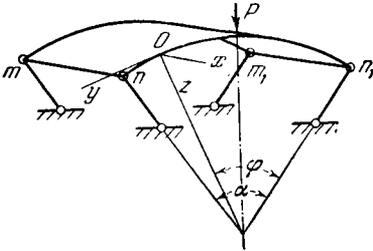


Рис. 255.

$$u = -\frac{a\alpha}{\pi} \sum \frac{b_n}{n} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha},$$

$$v = a \sum a_n \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} + x \sum b_n \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha},$$

$$w = -\frac{\pi a}{\alpha} \sum na_n \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} - \frac{x\pi}{a} \sum nb_n \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha},$$

мы получим такую деформацию оболочки без растяжения, что смещения u и w , а также изгибающие моменты M_φ обратятся по краям mn и m_1n_1 в нуль. Такие условия имеют место в том случае, если оболочка подперта в точках m, n, m_1, n_1 радиально направленными стержнями и нагружена в плоскости симметрии силой P . Произведенный этой нагрузкой прогиб можно найти, воспользовавшись принципом виртуальных перемещений.

121. Общий случай деформации цилиндрической оболочки ¹⁾.

Чтобы вывести дифференциальные уравнения для определяющих де-

¹⁾ Общая теория изгиба тонкой оболочки была построена Лявом; см. Love A. E. H., Phil. Trans. Roy. Soc., Лондон, серия А, стр. 491, 1888, а также его книгу: Ляв А., Математическая теория упругости, ОНТИ, М.—Л., 1935, глава 24, стр. 540; см. также Lamb H., Proc. London Math. Soc., т. 21.

Изгиб цилиндрических оболочек см. также Reissner H., Z. angew. Math. Mech., т. 13, стр. 133, 1933; Donnell L. H., NACA Rept., 479, 1933 (упрощенная теория); Torroja E., Batanero J., Cubiertas laminares cilindros, Мадрид, 1950; Parkus H., Österr. Ingr.-Arch., т. 6, стр. 30, 1951; Zегпа W., Ingr.-Arch., т. 20, стр. 357, 1952; Сопка Р., Acta tech. Acad. sci. Hung., т. 6, стр. 167, 1953. Эффект сосредоточенной нагрузки рассматривается в работах: Aas-Jakobsen A., Bauingenieur, т. 22, стр. 343, 1941; Работнов Ю. Н., Доклады АН СССР, т. 3, 1946; Власов В. З., Общая теория оболочек, Гостехиздат, Москва, 1949. Цилиндрические оболочки, усиленные ребрами, рассматривались в работах: Hoff N. J., J. Appl. Mech., т. 11, стр. 235, 1944; Reissner H., Anniversary volume, Анн-Арбор, Мичиган, США, 1949; Schnell W., Z. Flugwiss., т. 3, стр. 385, 1955. Анизотропные пластинки (вместе с общей теорией) трактуются в работе Flügge W., Ingr.-Arch., т. 3, стр. 463, 1932, также у В. З. Власова (цит. выше) — главы 11 и 12. Материалы к вопросу о распределении напряжений вокруг армированных отверстий приводятся в статье: Natl. Luchtvaarlab. Rappts., стр. 362, Амстердам, 1950. Теория толстой цилиндрической оболочки была разработана Базантом (Bazant Z., Proc. assoc. bridge structural engs., т. 4, 1936).

формацию оболочки смещений u , v и w , будем поступать так же, как и при расчете пластинки. Начнем с уравнений равновесия элемента, вырезанного из цилиндрической оболочки двумя смежными осевыми сечениями и двумя смежными сечениями, перпендикулярными к оси цилиндра (рис. 253). Образованный таким способом элемент срединной поверхности оболочки после деформации изображен на рис. 256, *a* и *b*. На рис. 256, *a* показаны результирующие

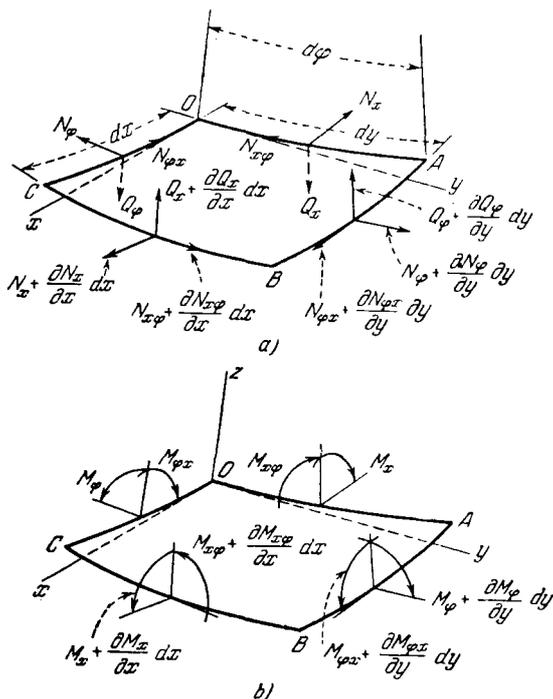


Рис. 256.

силы, а на рис. 256, *b* — результирующие моменты, о которых говорилось в § 104. До деформации оси x , y и z в любой точке O срединной поверхности были направлены по образующей, по касательной к окружности и соответственно по нормали к срединной поверхности. После деформации, которая предполагается здесь весьма малой, эти направления слегка изменяются. Мы совмещаем тогда новую ось z с нормалью к деформированной срединной поверхности, ось x — с касательной к образующей, которая может стать при этом кривой, ось же y направляем перпендикулярно к плоскости xz . Направления результирующих сил также слегка изменятся, и эти

изменения нужно принять во внимание при составлении уравнений равновесия элемента $OABC$.

Начнем с вывода формул для углов поворота сторон BC и AB относительно сторон OA и соответственно OC элемента. При этом мы будем считать смещения u , v и w весьма малыми; вычислим углы поворота, обусловленные каждым из этих смещений, и посредством наложения получим результирующий угол поворота. Начнем с вращения сторон EC относительно сторон OA . Это вращение можно разложить на три составляющие вращения относительно осей x , y и z . Вращения сторон OA и BC относительно оси x вызваны смещениями v и w . Так как смещения v представляют собой движение сторон OA и BC в окружном направлении (рис. 253), то при радиусе срединной поверхности цилиндра, равном a , соответствующее вращение стороны OA относительно оси x будет равно v/a , а стороны BC

$$\frac{1}{a} \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right).$$

Таким образом, вращение BC относительно стороны OA вокруг оси x , обусловленное смещениями v , будет равно

$$\frac{1}{a} \frac{dv}{dx} dx. \quad (a)$$

В результате смещений w сторона OA повернется относительно оси x на угол $\partial w/a \partial \varphi$, а сторона BC — на угол

$$\frac{\partial w}{a \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{a \partial \varphi} \right) dx.$$

Поэтому вызванный смещениями w относительный угол поворота равен

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{a \partial \varphi} \right) dx. \quad (b)$$

Суммируя (a) и (b), найдем относительное вращение сторон BC около оси x при отсчете угла от стороны BC :

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) dx. \quad (c)$$

Вращение стороны BC вокруг оси y относительно стороны OA вызывается изгибом образующих в осевых плоскостях и равно

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx. \quad (d)$$

Вращение стороны BC вокруг оси z относительно стороны OA является результатом изгиба образующих в касательных плоскостях и равно

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx. \quad (e)$$

Таким образом, формулы (с), (d) и (e) дают три компонента вращения стороны BC относительно стороны OA .

Выведем теперь соответствующие формулы для вращения стороны AB относительно стороны OC . В силу кривизны цилиндрической оболочки начальный угол между этими боковыми сторонами элемента $OABC$ равен $d\varphi$. В результате смещений v и w этот угол, однако, изменится. Угол поворота боковой стороны OC относительно оси x равен

$$\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \varphi}. \quad (f)$$

Соответствующий угол для боковой стороны AB равен

$$\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \varphi} + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \varphi} \right) d\varphi.$$

Таким образом, вместо начального угла $d\varphi$ мы получим

$$d\varphi + d\varphi \left(\frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \varphi^2} \right). \quad (g)$$

Для вычисления угла поворота стороны AB около оси y относительно стороны OC используем выражение для угла закручивания из предыдущего параграфа (см. стр. 555); оно дает нам требуемое угловое смещение

$$- \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\varphi. \quad (h)$$

Вращение стороны AB вокруг оси z относительно OC вызывается смещениями v и w . Обусловленный смещениями v угол поворота стороны OC равен $\partial v / \partial x$, стороны же AB

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) a d\varphi,$$

так что относительный поворот равен

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) a d\varphi. \quad (i)$$

Вследствие смещения w сторона AB поворачивается в осевой плоскости на угол $\partial w / \partial x$. Компонент этого поворота относительно оси z равен

$$- \frac{\partial w}{\partial x} d\varphi. \quad (j)$$

Суммируя (i) и (j), находим относительный поворот стороны AB около оси z при отсчете от стороны OC

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\varphi. \quad (k)$$

Располагая этими формулами ¹⁾ для углов, мы можем теперь написать три уравнения равновесия элемента $OABC$ (рис. 256), проектируя все силы на оси x , y и z . Начав с сил, параллельных результирующим силам N_x и $N_{\varphi x}$, и спроектировав их на ось x , получим

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx a d\varphi, \quad \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi dx.$$

Ввиду наличия угла поворота, представленного выражением (к), силы, параллельные N_y , дадут компонент в направлении x , равный

$$- N_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\varphi dx.$$

Вследствие вращения, представленного выражением (е), силы, параллельные $N_{x\varphi}$, дадут компонент в направлении x , равный

$$- N_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx a d\varphi.$$

Наконец, в результате вращений, представленных выражениями (d) и (h), силы, параллельные Q_x и Q_{φ} , дадут в направлении x компоненты, равные

$$- Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx a d\varphi - Q_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\varphi dx.$$

Что касается приложенных к элементу внешних сил, то мы предполагаем, что он подвергается действию одного лишь нормального давления интенсивностью q , проекция которого на ось x равна нулю.

Суммируя все вычисленные выше проекции, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} dx a d\varphi + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi dx - N_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\varphi dx - \\ & - N_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx a d\varphi - Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx a d\varphi - Q_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\varphi dx = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом напишутся и два других уравнения равновесия. После упрощения все три уравнения можно будет представить

¹⁾ Эти формулы легко могут быть получены для цилиндрической оболочки из общих формул, выведенных Лявом в его книге «Математическая теория упругости», М.—Л., ОНТИ, 1935.

в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} - a Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a N_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\ - Q_\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) - N_\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) + \\ + N_{\varphi x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_\varphi \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \varphi^2} \right) = 0, \\ \frac{a \partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + N_{x\varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) + a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + N_\varphi \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \varphi^2} \right) + N_{\varphi x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) + qa = 0. \end{aligned} \right\} (298)$$

Переходя теперь к трем уравнениям моментов относительно осей x , y и z (рис. 256, b) и принимая опять в расчет малые угловые смещения сторон BC и AB относительно OA и соответственно OC , получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - a M_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{\varphi x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + a Q_\varphi = 0, \\ \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} + a M_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - a Q_x = 0, \\ M_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) + a M_{x\varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_{\varphi x} \left(1 + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \varphi^2} \right) - \\ - M_\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) + a (N_{x\varphi} - N_{\varphi x}) = 0. \end{aligned} \right\} (299)$$

Пользуясь первыми двумя из этих уравнений¹⁾, мы сможем исключить Q_x и Q_φ из уравнений (298) и прийти таким путем к трем уравнениям, содержащим результирующие силы N_x , N_φ и $N_{x\varphi}$ и моменты M_x , M_φ и $M_{x\varphi}$. С помощью формул (253) и (254) из § 104 все эти величины можно выразить в функции трех компонентов ϵ_x , ϵ_φ и $\gamma_{x\varphi}$ деформации срединной поверхности и трех приращений χ_x , χ_φ и $\chi_{x\varphi}$ кривизны. На основании выводов предыдущего параграфа эти последние величины можно представить в функции смещений u ,

¹⁾ Чтобы удовлетворить третьему из этих уравнений, нужно, как об этом упомянуто в § 104, принять во внимание трапециевидальную форму сторон элемента $AOBC$. Этот вопрос трактуется в книге Флюгге, цит. выше.

v и w , а именно ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_\varphi &= \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a}, & \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial u}{a \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \chi_\varphi &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), & \chi_{x\varphi} &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (300)$$

Таким образом, для определения смещений u , v и w мы получаем окончательно три дифференциальных уравнения.

При выводе уравнений (298) и (299) было принято во внимание изменение кривизны элемента $OABC$. Это является необходимым, если силы N_x , N_y и N_{xy} немалы в сравнении с их критическими значениями, при которых может произойти боковое выпучивание оболочки ²⁾. Если эти силы малы, их влиянием на изгиб можно пренебречь, и мы вправе отбросить в уравнениях (298) и (299) все члены, содержащие произведения результирующих сил или результирующих моментов на производные малых смещений u , v и w . В таком случае три уравнения (298) и первые два уравнения системы (299) можно будет переписать в следующем упрощенном виде:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - Q_\varphi &= 0, \\ a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + N_\varphi + qa &= 0, \\ a \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + a Q_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} - a Q_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (301)$$

Исключая перерезывающие силы Q_x и Q_y , получаем, наконец, следующие три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \\ N_\varphi + \frac{\partial^2 M_{\varphi x}}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + qa &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (302)$$

¹⁾ Это — те же самые выражения для изменения кривизны, что и примененные в предыдущем параграфе, поскольку влиянием линейной деформации в срединной поверхности на кривизну пренебрегались в обоих случаях.

²⁾ Задача о выпучивании цилиндрической оболочки разбирается в книге Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1955 и здесь рассматриваться не будет.

Все входящие в эти уравнения величины можно с помощью формул (253), (254) и (300) выразить в функции смещений u , v и w , в результате чего получим

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\ & \quad + \frac{h^2}{12a} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{a^2 \partial \varphi^3} \right) + \frac{h^2}{12a} \left[(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{a^2 \partial \varphi^2} \right] = 0, \\ & \nu \frac{du}{dx} + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a} - \frac{h^2}{12} \left(a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{a^3 \partial \varphi^4} \right) - \\ & \quad - \frac{h^2}{12} \left(\frac{2-\nu}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 v}{a^3 \partial \varphi^3} \right) = - \frac{aq(1-\nu^2)}{Eh}. \end{aligned} \right\} (303)$$

Более углубленное исследование обнаруживает¹⁾, что два последних члена в левой части второго из этих уравнений и последний член в левой части третьего уравнения являются малыми величинами того же порядка, как и те, которыми мы уже пренебрегали, принимая гипотезу линейного распределения напряжений по толщине оболочки и игнорируя растяжение (провисание) срединной поверхности оболочки (см. стр. 476). В связи с этим представляется логичным опустить и вышеупомянутые члены и принять в расчете цилиндрической оболочки следующую упрощенную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0, \\ & \nu \frac{du}{dx} + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a} - \frac{h^2}{12} \left(a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{a^3 \partial \varphi^4} \right) = \\ & \quad = - \frac{aq(1-\nu^2)}{Eh}. \end{aligned} \right\} (304)$$

Некоторые упрощенные выражения для результирующих напряжений, соответствующие упрощенным соотношениям (304) между перемещениями оболочки, будут даны в § 125.

Из изложенного ясно, что задача о поперечно нагруженной цилиндрической оболочке сводится в каждом частном случае к решению этой системы дифференциальных уравнений. Некоторые применения этих уравнений будут показаны в следующих двух параграфах.

122. Цилиндрическая оболочка, свободно опертая по торцам. Рассмотрим случай цилиндрической оболочки, опертой по торцам

¹⁾ См. В. З. Власов (цит. выше на стр. 503), стр. 316, а также стр. 257 (более точные уравнения).

и подвергающейся, как показано на рис. 257¹⁾, давлению заключенной внутри ее жидкости. Условия опирания и условия симметрии деформации будут удовлетворены, если мы возьмем компоненты смещения в виде следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum \sum A_{mn} \cos n\varphi \cos \frac{m\pi x}{l}, \\ v &= \sum \sum B_{mn} \sin n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ w &= \sum \sum C_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где l — длина цилиндра, а φ — угол, отсчитываемый так, как показано на рис. 257²⁾.

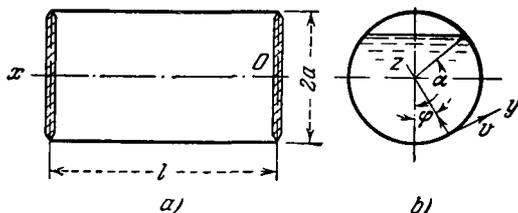


Рис. 257.

Интенсивность нагрузки q представляется следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} q &= -\gamma a (\cos \varphi - \cos \alpha), & \text{если } \varphi < \alpha, \\ q &= 0, & \text{если } \varphi > \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

где γ — удельный вес жидкости, а угол α определяет, как показано на рис. 257, b , уровень жидкости. Нагрузку q можно представить рядом

$$q = \sum \sum D_{mn} \cos n\varphi \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (c)$$

коэффициенты которого D_{mn} легко могут быть вычислены обычным путем из выражений (б). Эти коэффициенты представляются выражениями

$$D_{mn} = -\frac{8\gamma a}{m\pi^2(n^2-1)} (\cos \alpha \sin n\alpha - n \cos n\alpha \sin \alpha), \quad (d)$$

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Теория упругости, т. 2, стр. 385, СПб., 1916.

²⁾ Путем подстановки выражений (а) в уравнения (300) можно показать, что растягивающие силы N_x и моменты M_x обращаются на концах в нуль; однако перерезывающие силы при этом не обращаются в нуль, так как $\gamma_{x\varphi}$ и $M_{x\varphi}$ на концах не равны нулю.

где

$$m = 1, 3, 5, \dots \text{ и } n = 2, 3, 4, \dots,$$

причем

$$D_{n,0} = -\frac{4\gamma a}{m\pi^2} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha), \quad (e)$$

а

$$D_{m1} = -\frac{2\gamma a}{m\pi^2} (2\alpha - \sin 2\alpha). \quad (f)$$

В случае, если цилиндрическая оболочка целиком заполнена жидкостью, то, обозначив давление у оси цилиндра¹⁾ через γd , будем иметь

$$q = -\gamma (d + a \cos \varphi), \quad (g)$$

а вместо выражений (d), (e) и (f) получим

$$D_{mn} = 0, \quad D_{m0} = -\frac{4\gamma d}{m\pi}, \quad D_{m1} = -\frac{4\gamma a}{m\pi}. \quad (h)$$

Чтобы найти деформацию оболочки, внесем выражения (a) и (c) в уравнения (304). При этом для каждой пары значений m и n мы получим систему трех линейных уравнений, из которых можно вычислить²⁾ соответствующие значения коэффициентов A_{mn} , B_{mn} и C_{mn} . Взяв частный случай, когда $d = a$, найдем, что для $n = 0$ и $m = 1, 3, 5, \dots$ эти уравнения особенно просты, причем мы получим

$$B_{m0} = 0, \quad C_{m0} = -\frac{m\pi}{\lambda\nu}, \quad A_{m0} = -\frac{\pi N}{3m \left[\lambda^2 (1 - \nu^2) + \frac{\eta^2}{3} m^4 \pi^4 \right]},$$

где

$$N = \frac{2\gamma a l^2 h}{\pi^2 D}, \quad \lambda = \frac{l}{a}, \quad \eta = \frac{h}{2l}.$$

Для $n = 1$ выражения для коэффициентов получаются более сложными. Чтобы показать, сколь быстро уменьшаются эти коэффициенты с увеличением m , приводим в таблице 87 численные значения этих коэффициентов для частного случая, когда

$$a = 50 \text{ см}, \quad l = 25 \text{ см}, \quad h = 7 \text{ см}, \quad \nu = 0,3 \text{ и } \alpha = \pi.$$

Мы видим, что с возрастанием m коэффициенты быстро уменьшаются. Ограничив поэтому число коэффициентов только теми, которые

¹⁾ В замкнутом цилиндрическом сосуде это давление может быть больше чем $a\gamma$.

²⁾ Такие вычисления были выполнены для некоторых частных случаев Войташаком (Wojtaszak I. A., Phil. Mag., 7-я серия, т. 18, стр. 1099, 1933). См. также статью Рейсснера (Reissner H., Z. angew. Math. Mech., т. 19, стр. 133, 1933).

приведены в таблице, мы получим деформацию оболочки с достаточной точностью.

Таблица 87

Значения коэффициентов в выражениях (а)

m	$A_{m0} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{Nh}$	$C_{m0} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{Nh}$	$A_{m1} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{Nh}$	$B_{m1} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{Nh}$	$C_{m1} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{Nh}$
1	57,88	-1212	49,18	-66,26	-1183
3	0,1073	-6,742	0,1051	-0,0432	-6,704
5	0,00503	-0,526	0,00499	-0,00122	-0,525

123. Изгиб участка цилиндрической оболочки. Метод, использованный в предыдущем параграфе, может быть применен также и к участку цилиндрической оболочки, опертому по краям и подвергающемуся действию равномерно распределенной нагрузки q , нормальной к поверхности (рис. 258)¹⁾. Возьмем компоненты смещения в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum \sum A_{mn} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \cos \frac{m\pi x}{l}, \\ v &= \sum \sum B_{mn} \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ w &= \sum \sum C_{mn} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где α — стягиваемый оболочкой центральный угол, а l — длина оболочки. Посредством подстановки выражения (а) в уравнения (300) можно показать, что мы при этом удовлетворим граничным условиям, требующим, чтобы по краям $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$ прогиб w , сила N_φ и момент M_φ обращались в нуль и чтобы по краям $x=0$ и $x=l$ обращались в нуль прогиб w , силы N_x и момент M_x . Интенсивность нормальной нагрузки q может быть представлена рядом

$$q = \sum \sum D_{mn} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (b)$$

Подставляя ряды (а) и (б) в уравнения (304), мы получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для вычисления коэф-

¹⁾ См. Тимошенко С. П., Теория упругости, т. 2, стр. 386, 1916.

фициентов A_{mn} , B_{mn} и C_{mn} :

$$\left. \begin{aligned} A_{mn}\pi \left[\left(\frac{am}{l} \right)^2 + \frac{(1-\nu)n^2}{2a^2} \right] + B_{mn}\pi \frac{(1+\nu)amn}{2al} + C_{mn} \frac{\nu am}{l} &= 0, \\ A_{mn}\pi \frac{(1+\nu)amn}{2al} + B_{mn}\pi \left[\frac{(1-\nu)a^2m^2}{2l^2} + \frac{n^2}{a^2} \right] + C_{mn} \frac{n}{a} &= 0, \\ A_{mn}\nu\pi \frac{am}{l} + B_{mn} \frac{n\pi}{a} + C_{mn} \left[1 + \frac{\pi^4 h^2}{12a^2} \left(\frac{a^2m^2}{l^2} + \frac{n^2}{a^2} \right) \right] &= \\ &= D_{mn} \frac{a^2(1-\nu^2)}{Eh}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Чтобы иллюстрировать применение этих уравнений, рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки¹⁾, действующей на отрезок цилиндрической оболочки с малым углом α и малой стрелой провисания $f = a[1 - \cos(\alpha/2)]$. В этом частном случае выражение (b) принимает вид

$$q = \sum_{1, 3, 5, \dots} \sum_{1, 3, 5, \dots} \frac{16q}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \varphi}{\alpha}, \quad (d)$$

коэффициенты же D_{mn} определяются выражением

$$D_{mn} = \frac{16q}{mn\pi^3}. \quad (e)$$

Подстановка этих значений в уравнения (c) позволит нам вычислить коэффициенты A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} . Расчеты, выполненные для частного случая, когда $aa = 1$, и для нескольких значений отношения f/h , обнаруживают, что при малых значениях этого отношения ряды (a) быстро сходятся, и уже небольшое число первых членов дает смещения с удовлетворительной точностью. При этом обнаруживается также, что с увеличением f/h быстро уменьшаются и максимальные значения напряжений изгиба, вызываемых моментами M_x и M_φ . Вычисление этих напряжений для сравнительно больших значений f/h весьма кропотливо, так как ряды, выражающие эти моменты, сходятся не так быстро, и потому требуется учитывать большее число членов.

Изложенный в этом параграфе метод напоминает метод Навье для расчета прогибов прямоугольной пластинки, свободно опертой по краям. Если в оболочке, изображенной на рис. 258, свободно опертыми являются лишь прямолинейные края $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, два же других края защемлены или

¹⁾ Предполагается, что нагрузка действует по направлению к оси цилиндра.

свободны, то здесь можно будет применить решение, сходное с методом М. Леви для случая прямоугольной пластинки (см. стр. 133). Примем для компонентов смещения следующие ряды:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum U_m \sin \frac{m\pi\varphi}{\alpha}, \\ v &= \sum V_m \cos \frac{m\pi\varphi}{\alpha}, \\ w &= \sum W_m \sin \frac{m\pi\varphi}{\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

где U_m , V_m и W_m — функции одного лишь x . Подставив эти ряды в уравнения (304), получим для U_m , V_m и W_m три обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами. Эти уравнения можно

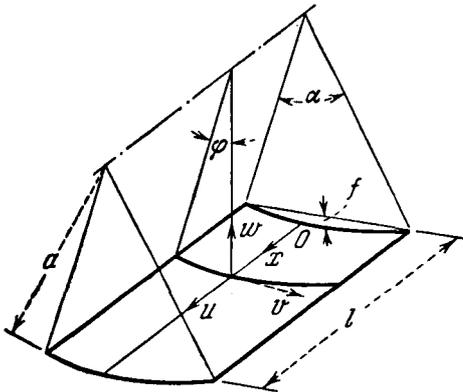


Рис. 258.

интегрировать с помощью показательных функций. Подобного рода расчет, проведенный для замкнутой цилиндрической оболочки¹⁾, показывает, что решение весьма громоздко и что пригодные для практических приложений результаты могут быть получены лишь при введении упрощающих допущений. Можно показать, что каждая система функций U_m , V_m , W_m содержит восемь постоянных интегрирования для каждого принятого значения m . Поэтому для каждого края $x = \text{const}$ в нашем распоряжении должно быть четыре условия. Сформулируем эти условия для нижеследующих трех случаев.

Край защемлен. Обычно такое опирание предполагается абсолютно жестким, чему соответствуют нижеследующие краевые условия:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (g)$$

Если, однако, поверхность оболочки у своего края имеет возможность свободно перемещаться в направлении x , то первое из указанных выше условий следует заменить на другое: $N_x = 0$.

Край свободно оперт. Подобного типа шарнирный край не обладает способностью передавать момент M_x , необходимый для реализации условия $\partial w / \partial x = 0$. Допустив поэтому, что конструкция опоры не оказывает сопротивления в направлении x , приходим к такой системе граничных условий:

$$v = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad N_x = 0, \quad (h)$$

¹⁾ См. статью Мизеля (Miesel K., Ingr.-Arch., т. 1, стр. 29, 1929). В этой статье излагается приложение теории к расчету напряжений в обшивке подводной лодки.

в которой ни смещение и ни результирующие напряжения $N_{x\varphi}$, $M_{x\varphi}$ и Q_x не обращаются у края в нуль.

Опорные реакции у свободно опертого края (рис. 259, а) заслуживают краткого рассмотрения. Действие крутящего момента $M_{x\varphi} ds$, примененного к элементу $ABCD$ края, статически эквивалентно действию трех сил, показанных на рис. 259, б. Приращение радиальных сил $M_{x\varphi}$ по краю приводит, как и в случае пластинки (рис. 56), к возникновению дополнительной

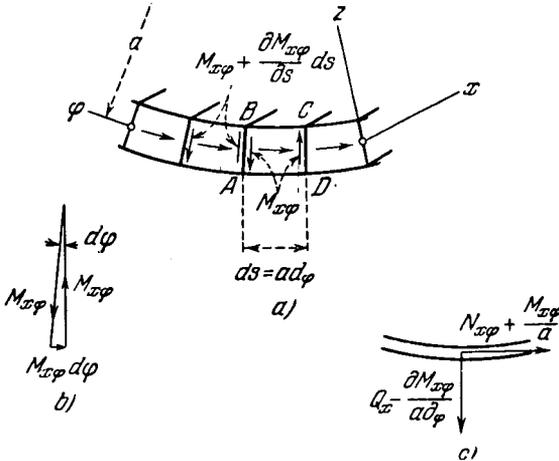


Рис. 259.

перерезывающей силы интенсивностью — $\partial M_{x\varphi}/\partial s$, полная величина которой (рис. 259, с) выражается разностью

$$T_x = Q_x - \frac{\partial M_{x\varphi}}{a \partial \varphi}. \quad (i)$$

Остающийся компонент $M_{x\varphi} d\varphi$ (рис. 259, б) можно рассматривать как дополнительную мембранную силу интенсивностью $M_{x\varphi} d\varphi/ds = M_{x\varphi}/a$. Поэтому результирующая мембранная сила в направлении касательной к краю выражается суммой

$$S_x = N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{a}. \quad (j)$$

Свободный край. Приравняв все результирующие напряжения к нулю для края, находим, что граничные условия, характеризующие свободный край, принимают вид

$$N_x = 0, \quad M_x = 0, \quad S_x = 0, \quad T_x = 0, \quad (k)$$

где S_x и T_x определяются соответственно из выражений (j) и (i)¹⁾.

¹⁾ Решение задачи изгиба, основанное на упрощенных дифференциальных уравнениях Л. Доннелла, см. Hoff N. J., J. Appl. Mech., т. 21, стр. 343, 1954. См. также § 125 настоящей книги.

124. **Приближенное исследование изгиба цилиндрической оболочки.** Соображения предыдущего параграфа приводят нас к выводу, что применение общей теории изгиба цилиндрической оболочки, даже и в простейших случаях, сопряжено с весьма сложными вычислениями. Чтобы сделать теорию применимой к решению практических задач, необходимо внести в нее дальнейшие упрощения. При изложении мембранной теории цилиндрической оболочки было установлено, что эта теория дает удовлетворительные результаты для участков оболочки, находящихся на значительном расстоянии от торцов, но что она не в состоянии удовлетворить всем граничным условиям на торцах. Представляется поэтому логичным принять указываемое мембранной теорией решение как первое приближение, к более же точной теории изгиба обратиться лишь для выполнения граничных условий.

Обращаясь к этой последней теории, мы должны потребовать, чтобы никакой внешней нагрузки на оболочке не было распределено и чтобы по ее торцам были приложены лишь такие силы и моменты, которые являются необходимыми, для того чтобы удовлетворялись граничные условия на торцах. Произведенный такими силами изгиб может быть выражен системой уравнений (303), если для нагрузки q принять в них значение, равное нулю.

В приложениях, встречающихся, например, в строительной технике ¹⁾, торцы $x = 0$ и $x = l$ оболочки (рис. 260) бывают обычно оперты таким образом, что смещения v и w на торцах равны нулю. Испытания обнаруживают, что в таких оболочках изгибом в осевых плоскостях можно пренебречь, и потому в уравнениях равновесия (301) мы можем принять $M_x = 0$ и $Q_x = 0$.

Мы вправе также пренебречь и крутящим моментом $M_{x\varphi}$. При этих допущениях система уравнений (301) может быть значительно упрощена, а результирующие силы и компоненты смещения могут быть выражены в функциях ²⁾ момента M_φ . Четвертое из уравнений (301) дает нам

$$Q_\varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (a)$$

Подставив это в третье уравнение той же системы, получим для $q = 0$

$$N_\varphi = - \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} = - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2}. \quad (b)$$

¹⁾ В последнее время тонкие железобетонные цилиндрические оболочки с успехом применяются в различного рода сооружениях, например, для перекрытия больших залов. Описание некоторых из этих сооружений можно найти в статье Дишингера (Dischinger F., Handbuch f. Eisenbetonbau, т. 12, 3-е изд., Берлин, 1928). См. также статью Дишингера Ф. и Финстервальдера У., Bauingenieur, т. 9, 1928. См. также литературные указания в § 126 настоящей книги.

²⁾ Эта приближенная теория изгиба цилиндрической оболочки была построена Финстервальдером (Finsterwalder U., Ingr.-Arch., т. 4, стр. 43, 1933).

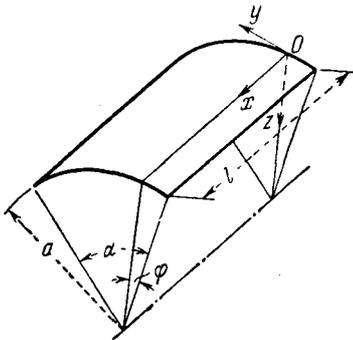


Рис. 260.

Второе и первое уравнения (301) дадут нам тогда

$$\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{a} \left(Q_{\varphi} - \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 M_{\varphi}}{\partial \varphi^3} \right), \quad (c)$$

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2 N_{x\varphi}}{\partial \varphi \partial x} = -\frac{1}{a^3} \left(\frac{\partial^2 M_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 M_{\varphi}}{\partial \varphi^4} \right). \quad (d)$$

Компоненты смещения можно выразить также и в функции от M_{φ} и его производных. Начнем с известных соотношений [см. уравнения (253) и (254)]

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_{\varphi}), \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial u}{a \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{x\varphi}, \\ \epsilon_{\varphi} &= \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a} = \frac{1}{Eh} (N_{\varphi} - \nu N_x). \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Из этих уравнений получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_{\varphi}), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{1}{Eh} \left[2(1+\nu) \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \varphi} - \nu \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{Eh} \left[a \left(\nu \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N_{\varphi}}{\partial x^2} \right) + 2(1+\nu) \frac{\partial^2 N_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 N_x}{\partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^2 N_{\varphi}}{\partial \varphi^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Пользуясь этими выражениями совместно с уравнениями (b), (c) и (d), а также выражением для изгибающего момента

$$M_{\varphi} = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad (g)$$

получаем, наконец, для определения M_{φ} следующее дифференциальное уравнение восьмого порядка:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^8 M_{\varphi}}{\partial \varphi^8} + (2+\nu) a^2 \frac{\partial^8 M_{\varphi}}{\partial x^2 \partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^6 M_{\varphi}}{\partial \varphi^6} + (1+2\nu) a^4 \frac{\partial^6 M_{\varphi}}{\partial x^4 \partial \varphi^4} + \\ &+ 2(2+\nu) a^2 \frac{\partial^6 M_{\varphi}}{\partial x^2 \partial \varphi^4} + \frac{\partial^4 M_{\varphi}}{\partial \varphi^4} + \nu a^6 \frac{\partial^6 M_{\varphi}}{\partial x^6 \partial \varphi^2} + \\ &+ (1+\nu)^2 a^4 \frac{\partial^6 M_{\varphi}}{\partial x^4 \partial \varphi^2} + (2+\nu) a^2 \frac{\partial^4 M_{\varphi}}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + 12(1-\nu^2) \frac{a^6}{h^2} \frac{\partial^4 M_{\varphi}}{\partial x^4} = 0. \end{aligned} \quad (h)$$

Частный интеграл этого уравнения дается выражением

$$M_{\varphi} = A e^{a\varphi} \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (i)$$

Подставляя в уравнение (h) и введя обозначение

$$\frac{m\pi a}{l} = \lambda, \quad (j)$$

придем к следующему алгебраическому уравнению для определения α :

$$\alpha^6 + [2 - (2 + \nu)\lambda^2] \alpha^5 + [(1 + 2\nu)\lambda^4 - 2(2 + \nu)\lambda^2 + 1] \alpha^4 + \\ + [-\nu\lambda^6 + (1 + \nu)^2\lambda^4 - (2 + \nu)\lambda^2] \alpha^2 + 12(1 - \nu^2) \frac{a^2}{h^2} \lambda^4 = 0. \quad (k)$$

Восемь корней уравнения могут быть представлены в виде

$$\alpha_{1, 2, 3, 4} = \pm (\gamma_1 \pm i\beta_1), \quad \alpha_{5, 6, 7, 8} = \pm (\gamma_2 \pm i\beta_2). \quad (l)$$

Начав с края $\varphi = 0$ и положив, что с увеличением φ момент M_φ быстро уменьшается, используем лишь те четыре корня (l), которые удовлетворяют этому требованию. Комбинируя четыре соответствующих решения (l), получим тогда

$$M_\varphi = [e^{-\gamma_1\varphi} (C_1 \cos \beta_1\varphi + C_2 \sin \beta_1\varphi) + \\ + e^{-\gamma_2\varphi} (C_3 \cos \beta_2\varphi + C_4 \sin \beta_2\varphi)] \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (m)$$

что для $\varphi = 0$ дает

$$M_\varphi = (C_1 + C_3) \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Если вместо единственного члена (i) взять тригонометрический ряд

$$M_\varphi = \sum A_m e^{\alpha_m \varphi} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (n)$$

то мы сможем получить любое распределение изгибающего момента M_φ по краю $\varphi = 0$. Располагая выражением для M_φ , из уравнений (a), (b) и (c) получим результирующие силы Q_φ , N_φ и $N_{x\varphi}$.

Если в каком-либо частном случае нам даны распределения моментов и результирующих сил Q_φ , N_φ и $N_{x\varphi}$ по краю $\varphi = 0$, то мы можем представить эти распределения рядами синусов. В таком случае значениями четырех коэффициентов в членах, содержащих $\sin(m\pi x/l)$, в этих четырех рядах можно воспользоваться для вычисления четырех постоянных C_1, \dots, C_4 в решении (m). Таким путем для данного распределения сил можно получить полное решение задачи.

Если при посредстве уравнений (f) мы получили выражения для u , v и w в функции M_φ , то этими выражениями можно воспользоваться для решения задачи, в которой заданы не силы, а вместо них смещения по краю $\varphi = 0$. Примеры такого рода задач можно найти в ранее упомянутой статье Финстервальдера¹⁾, показавшего, что только что описанный приближенный метод может быть с успехом применен при решении важных задач строительной механики.

125. Применение функции деформаций и напряжений. В общем случае изгиба цилиндрической оболочки, для которой отношение l/a (рис. 260) не обязательно должно быть большим, влиянием моментов M_x и M_{xy} пре-

¹⁾ Цит. на стр. 572.

небрежь нельзя. С другой стороны, упрощенная форма [уравнения (304)] соотношений между перемещениями допускает введение функции ¹⁾ $F(x, y)$, определяющей деформированное и напряженное состояния оболочки. Принимая обозначения

$$c_2 = \frac{h^2}{12a^2}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (a)$$

перепишем уравнения (304) нижеследующим образом, включив в них все три компонента X, Y, Z внешней нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} &= - \frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh} X, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= - \frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh} Y, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - c^2 \Delta w &= - \frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh} Z. \end{aligned} \right\} (305)$$

Эту систему уравнений можно привести к одному дифференциальному уравнению, положив

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial^3 F}{\partial \xi \partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + u_0, \\ v &= - \frac{\partial^3 F}{\partial \varphi^3} - (2+\nu) \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + v_0, \\ w &= - \Delta F + w_0, \end{aligned} \right\} (306)$$

где u_0, v_0, w_0 — система частных решений неоднородных уравнений (305). Что касается функции деформаций и напряжений $F(\xi, \varphi)$, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Delta \Delta \Delta F + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} = 0, \quad (307)$$

эквивалентному группе уравнений (305), если ²⁾ $X = Y = Z = 0$. Можно показать, что в этом последнем случае не только функция F , но также и все компоненты смещений и деформаций, равно как и все результирующие напряжения оболочки, удовлетворяют дифференциальному уравнению (307).

Выражения (300) для удлинений, деформаций сдвига и изменений кривизны срединной поверхности оболочки также при этом сохраняют силу. Результирующие напряжения можно представить либо через смещения, либо непосредственно через функцию F . В соответствии с упрощениями, приводящими к уравнениям (304), влияние смещений u и v на изгибающие и

¹⁾ Эта функция была введена В. З. Власовым (цит. на стр. 503); почти эквивалентные результаты, без введения функции напряжений, были получены Доннеллом (Donnell H., NASA rept., 479, 1933). См. также Hoff N. I., J. Appl. Mech., т. 21, стр. 343, 1954.

²⁾ Власовым (в цитированной работе) была введена также и другая функция напряжений F_x, F_y, F_z для представления частного интеграла уравнений (305), если X, Y или соответственно Z не обращаются в нуль.

крутящие моменты допустимо признать пренебрежимо малыми. Учтя все эти соображения и применив обозначения

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (308)$$

получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{K}{a} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \right) \right] = \frac{Eh}{a} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2}, \\ N_\varphi &= \frac{K}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w + \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{Eh}{a} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4}, \\ N_{x\varphi} &= \frac{K(1-\nu)}{2a} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = -\frac{Eh}{a} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^3 \partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (309)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Delta \Delta F, \\ M_\varphi &= -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) = \frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \Delta \Delta F, \\ M_{x\varphi} &= -M_{\varphi x} = \frac{D(1-\nu)}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi} = -\frac{D}{a^2} (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi} \Delta \Delta F, \end{aligned} \right\} \quad (310)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{D}{a^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta w = \frac{D}{a^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \Delta \Delta F, \\ Q_\varphi &= -\frac{D}{a^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta w = \frac{D}{a^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta \Delta \Delta F. \end{aligned} \right\} \quad (311)$$

Представив дифференциальное уравнение (307) в виде

$$(\Delta)^4 F + 4\gamma^4 \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} = 0, \quad (b)$$

где

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)a^2}{h^2}}, \quad (c)$$

убеждаемся, что уравнение (307) эквивалентно группе четырех уравнений

$$\Delta F_n \pm \gamma(1 \pm i) \frac{\partial F_n}{\partial \xi} = 0, \quad (d)$$

где $i = \sqrt{-1}$, а $n = 1, 2, 3, 4$. Приняв, наконец,

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= e^{-\frac{1}{2}\gamma(1+i)\xi} \Phi_1, \\ F_2 &= e^{\frac{1}{2}\gamma(1+i)\xi} \Phi_2, \\ F_3 &= e^{-\frac{1}{2}\gamma(1-i)\xi} \Phi_3, \\ F_4 &= e^{\frac{1}{2}\gamma(1-i)\xi} \Phi_4, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

для четырех новых функций Φ_n получаем систему четырех уравнений

$$\Delta \Phi_n + \mu_n i \Phi_n = 0, \quad (f)$$

в которой для постоянных μ_n допускаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = -\frac{a}{2h} \sqrt{3(1-\nu^2)}, \\ \mu_3 = \mu_4 = \frac{a}{2h} \sqrt{3(1-\nu^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

По своей форме уравнения (f) аналогичны уравнению колебаний мембраны. В сравнении с уравнениями (d) уравнения (f) имеют то преимущество, что они остаются инвариантными относительно преобразования координат цилиндрической поверхности оболочки.

126. Исследование напряжений цилиндрической кровли-оболочки¹⁾. Три типичные схемы цилиндрических покрытий представлены на рис. 261 и 265. Оболочки могут быть либо неразрезными в направлении x , либо опираться лишь в двух плоскостях, например в плоскостях $x=0$ и $x=l$.

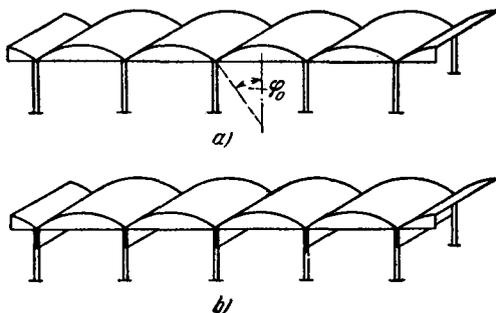


Рис. 261.

Ограничимся последним случаем. Предполагаем, что опорные конструкции обладают жесткостью в отношении сил, действующих в их собственных плоскостях, $x = \text{const}$, и совершенной (идеальной) гибкостью в сопротивлении поперечной нагрузке. На рис. 261, *a* растянутые элементы у $\varphi = \varphi_0$ гибки, между тем как оболочки, показанные схематически на рис. 261, *b* и 265, укреплены балками значительной жесткости, в особенности в вертикальной плоскости.

¹⁾ См. по этому вопросу: Практическое руководство Ам. об-ва гражданских инженеров: Design of cylindrical concrete shell roofs, ASCE manuals of eng. practice, № 31, 1952; Gibson J. E., Cooper D. W., The design of cylindrical shell roofs, Нью-Йорк, 1954; Jenkins R. S., Theory and design of cylindrical shell structures, Лондон, 1947; Aas-Jakobsen A., Die Berechnung der Zylinderschalen, Берлин, 1958. Богатый материал к проектированию кровель-оболочек и интересное сопоставление различных методов исследования напряжений в них можно найти в трудах симпозиума, посвященного этой теме и организованного Лондонской Ассоциацией цемента и бетона в 1954 г. (Proceedings of a Symposium on Concrete shell roof construction, Cement and Concrete Association, London, 1954.)

Произвольное распределение нагрузки по поверхности оболочки может быть представлено значениями трех компонентов, выраженных в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_{m=1}^{\infty} X_m(\varphi) \cos \frac{\lambda_m x}{a}, \\ Y &= \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\varphi) \sin \frac{\lambda_m x}{a}, \\ Z &= \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\varphi) \sin \frac{\lambda_m x}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

где

$$\lambda_m = \frac{m\pi a}{l}. \quad (b)$$

Представим также рядами и частные решения u_0 , v_0 , w_0 в выражениях (306)

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{0m}(\varphi) \cos \frac{\lambda_m x}{a}, \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{0m}(\varphi) \sin \frac{\lambda_m x}{a}, \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{0m}(\varphi) \sin \frac{\lambda_m x}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Полученные из этих рядов при посредстве уравнений (309) и (310), где $\xi = x/a$, выражения для результирующих напряжений N_x и M_x показывают, что условия (h) § 123 для шарнирных краев полностью выполняются на опорах $x = 0$, $x = l$.

Чтобы получить общие выражения для смещений в случае

$$X = Y = Z = 0,$$

воспользуемся разрешающей функцией F (§ 125), придав ей сначала вид

$$F_m = e^{2\tau} \sin \frac{\lambda_m x}{a}. \quad (d)$$

Подстановка этого выражения в дифференциальное уравнение (307) приводит к следующему характеристическому уравнению для α :

$$(\alpha^2 - \lambda_m^2)^4 + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \lambda_m^4 = 0, \quad (e)$$

в котором $c^2 = h^2/12a^2$. Восемь корней этого уравнения могут быть

представлены табличкой:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1 + i\beta_1, & \alpha_3 &= -\alpha_1, \\ \alpha_2 &= \gamma_1 - i\beta_1, & \alpha_6 &= -\alpha_2, \\ \alpha_3 &= \gamma_2 + i\beta_2, & \alpha_7 &= -\alpha_3, \\ \alpha_4 &= \gamma_2 - i\beta_2, & \alpha_8 &= -\alpha_4 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

при вещественных значениях γ и β . Введя обозначения

$$\rho = \sqrt{\lambda_m} \sqrt[3]{\frac{1-v^2}{c^2}}, \quad \sigma = \frac{\lambda_m^2}{\rho^2}, \quad (g)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\rho}{4} \sqrt[3]{\sqrt{(1+\sigma\sqrt{2})^2+1}+1+\rho\sqrt{2}}, \\ \gamma_2 &= \frac{\rho}{4} \sqrt[3]{\sqrt{(1-\sigma\sqrt{2})^2+1}-(1-\rho\sqrt{2})}, \\ \beta_1 &= \frac{1}{\gamma_1} \frac{\rho^2}{\sqrt{8}}, \\ \beta_2 &= \frac{1}{\gamma_2} \frac{\rho^2}{\sqrt{8}}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Возвращаясь к представлению решения в виде ряда, находим, что функции напряжений можно придать следующее общее выражение:

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\varphi) \sin \frac{\lambda_m x}{a}, \quad (i)$$

где

$$f_m(\varphi) = C_{1m} e^{\alpha_1 \varphi} + C_{2m} e^{\alpha_2 \varphi} + \dots + C_{8m} e^{\alpha_8 \varphi}, \quad (j)$$

а C_{1m}, C_{2m}, \dots — произвольные постоянные.

Теперь мы располагаем достаточными данными для того, чтобы из зависимостей (30б) вычислить соответствующие смещения. Прибавив к результату решение (с), приходим к следующим выражениям для полных перемещений срединной поверхности оболочки:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_m f_m'' + \nu \lambda_m^3 f_m + U_{0m}) \cos \frac{\lambda_m x}{a}, \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} [(2+\nu) \lambda_m^2 f_m' - f_m''' + V_{0m}] \sin \frac{\lambda_m x}{a}, \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} (2\lambda_m^2 f_m'' - f_m'''' - \lambda_m^4 f_m + W_{0m}) \sin \frac{\lambda_m x}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по φ .

Компоненты деформаций и напряжений находятся теперь из выражений (300), (309), (310) и (311). В самом общем случае распределения нагрузки для вычисления постоянных C_{m1}, \dots, C_{m8} , отмеченных числами натурального ряда 1, 2, 3, ..., необходимо и достаточно располагать четырьмя граничными условиями по

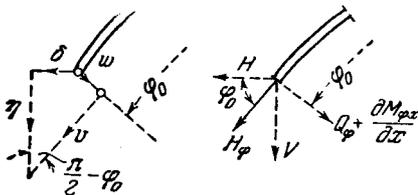


Рис. 262.

каждому краю $\varphi = \pm \varphi_0$.

В качестве примера рассмотрим случай вертикальной нагрузки, равномерно распределенной по поверхности оболочки. Со стр. 507 имеем

$$X = 0, \quad Y = p \sin \varphi, \quad Z = p \cos \varphi. \quad (1)$$

Коэффициенты ряда (а) устанавливаются поэтому из соотношений

$$\left. \begin{aligned} X_m &= \frac{2}{l} \int_0^l X \cos \frac{\lambda_m x}{a} dx = 0, \\ Y_m &= \frac{2}{l} \int_0^l Y \sin \frac{\lambda_m x}{a} dx = \frac{4p}{m\pi} \sin \varphi, \\ Z_m &= \frac{2}{l} \int_0^l Z \sin \frac{\lambda_m x}{a} dx = \frac{4p}{m\pi} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$. Надлежащее частное решение (с) находим из

$$U_{0m} = A_{0m} \cos \varphi, \quad V_{0m} = B_{0m} \sin \varphi, \quad W_{0m} = C_{0m} \cos \varphi. \quad (n)$$

Коэффициенты A_{0m}, B_{0m}, C_{0m} определяем непосредственно подстановкой выражений (с), (n) и (m) в уравнения (305).

Чтобы удовлетворять условиям симметрии относительно плоскости меридиана $\varphi = 0$, функция (j) должна иметь вид

$$f_m(\varphi) = A_{1m} \cos \beta_1 \varphi \operatorname{ch} \gamma_1 \varphi + A_{2m} \sin \beta_1 \varphi \operatorname{sh} \gamma_1 \varphi + A_{3m} \cos \beta_2 \varphi \operatorname{ch} \gamma_2 \varphi + A_{4m} \sin \beta_2 \varphi \operatorname{sh} \gamma_2 \varphi, \quad (o)$$

где $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$ и γ_2 определяются выражениями (h), а $m = 1, 3, 5, \dots$. Для того чтобы простейшим образом сформулировать граничные условия на $\varphi = \pm \varphi_0$, напишем выражения для вертикальных и горизонтальных компонентов смещения по краям, а также и значения по тем же краям мембранных сил (рис. 262):

$$\eta = v \sin \varphi_0 + w \cos \varphi_0, \quad (p_1)$$

$$\delta = v \cos \varphi_0 - w \sin \varphi_0, \quad (p_2)$$

$$V = N_\varphi \sin \varphi_0 + \left(Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} \right) \cos \varphi_0, \quad (p_3)$$

$$H = N_\varphi \cos \varphi_0 - \left(Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} \right) \sin \varphi_0. \quad (p_4)$$

Наконец, угол поворота оболочки относительно края выражается зависимостью

$$\chi = \frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \varphi}. \quad (p_5)$$

В правых частях всех этих выражений нам следует повсюду положить $\varphi = \varphi_0$. Рассмотрим теперь в отдельности три возможных типа граничных условий. *Кровля с идеально гибкими бортовыми элементами* (рис. 261, а). Поскольку покрытие, как предполагается, состоит из нескольких пролетов, деформация его должна быть симметричной относительно вертикальной плоскости, проходящей через промежуточное ребро $\varphi = \pm \varphi_0$, где перемещение δ и поворот (угловая деформация) χ должны обращаться в нуль. Отсюда

$$v \cos \varphi_0 - w \sin \varphi_0 = 0, \quad (q_1)$$

$$v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad (q_2)$$

на $\varphi = \varphi_0$. Положив, что погонный вес борта равен Q_0 , извлекаем из уравнения (p₃) дополнительное условие

$$2V = Q_0, \quad (q_3)$$

где Q_0 , будучи постоянной, может быть представлена рядом

$$Q_0 = \frac{4Q_0}{\pi} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{\lambda_m x}{a}. \quad (p_6)$$

Наконец, удлинение ϵ_x оболочки на краю $\varphi = \varphi_0$ должно быть равно удлинению борта. Если через A_0 обозначить площадь ее поперечного сечения, а через E_0 соответствующий модуль упругости¹⁾, то мы находим для $\varphi = \varphi_0$

$$\frac{1}{E_0 A_0} \int_0^x 2N_{\varphi x} dx = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (q_4)$$

где интеграл представляет растягивающую силу борта.

Дальнейший расчет проводится следующим порядком: из условий (q₁), ..., (q₄) вычисляем четыре коэффициента A_{1m}, \dots, A_{4m} для каждого $m = 1, 3, 5, \dots$. Функция напряжений F определяется тогда из уравнений (o) и (i), перемещения же из выражений (306) или (k). Наконец, из выражений (309) — (311), основываясь на известных перемещениях, или, в общей части решения, непосредственно из функции напряжений F , получаем результирующие полных напряжений.

Многопролетное покрытие, усиленное балками жесткости (рис. 261, б). Условия симметрии

$$v \cos \varphi_0 - w \sin \varphi_0 = 0 \quad (r_1)$$

и

$$v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad (r_2)$$

на $\varphi = \varphi_0$ — те же, что и в предыдущем случае. Чтобы сформулировать

¹⁾ Если борт составлен из различных материалов, например из стальной арматуры и бетона, в расчет вводится площадь приведенного поперечного сечения.

третье условие, положим, что Q_0 — данный погонный вес балки, h_0 — высота ее поперечного сечения, $E_0 I_0$ — жесткость при изгибе в вертикальной плоскости, A_0 — площадь поперечного сечения. Тогда дифференциальное уравнение для прогиба η балки примет вид

$$E_0 I_0 \frac{d^4 \eta}{dx^4} = Q_0 - 2V + 2 \frac{h_0}{2} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x}, \quad (r_3)$$

причем функции η , V и Q_0 даются соответственно выражениями (p₁), (p₃) и (p₆). Последний член в уравнении (r₃) отражает разность уровней для края

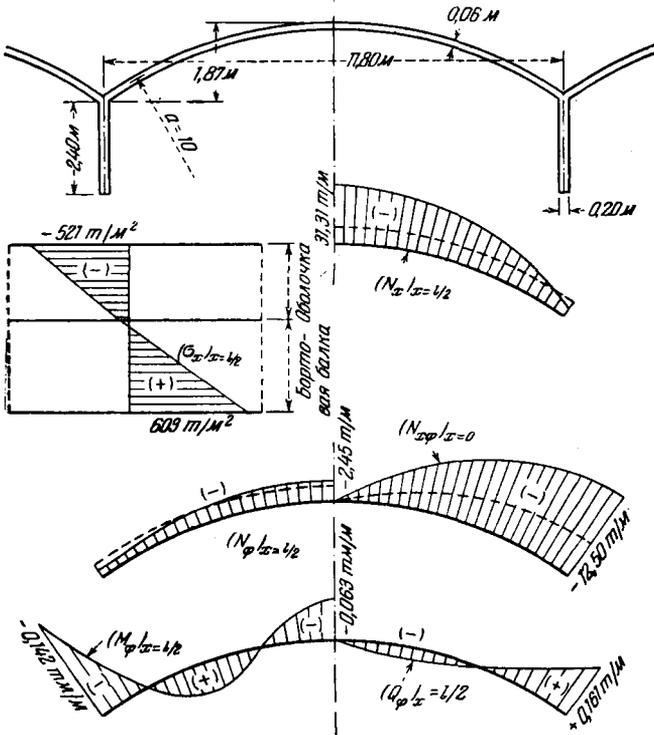


Рис. 263.

оболочки и оси балки. Что касается удлинения ε_x верхних волокон балки, то оно зависит не только от растягивающей силы, но также и от кривизны балки. Учтя влияние кривизны $d^2 \eta / dx^2$, заменяем уравнение (q₄) условием более общего вида

$$\frac{2}{E_0 A_0} \int_0^x N_{\varphi x} dx + \frac{h_0}{2} \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (r_4)$$

Дальнейшая процедура расчета сохраняет в существенном тот же характер, что и в ранее рассмотренном случае.

Распределение мембранных сил и изгибающих моментов M_φ , полученное ¹⁾ таким путем для среднего пролета покрытия, состоящего всего из трех таких пролетов, показано на рис. 263. В направлении x длина оболочки равна $l = 41$ м, поверхностная нагрузка составляет $p = 253$ кг/м², а погонный вес балки $Q_0 = 667$ кг/м. Результирующие напряжений, полученные средствами одной лишь мембранной теории, нанесены штриховыми линиями.

Однопролетная оболочка, усиленная балками жесткости (рис. 265). В этом случае нам следует учесть не только прогиб балки, исходя из смещений η и δ по краю, но также и вращения χ балки (рис. 264). Дифференциальное уравнение для вертикального прогиба принимает на этот раз вид

$$E_0 I'_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} = Q_0 - V + \frac{h_0}{2} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x}, \quad (s_1)$$

в котором обозначения сохраняют прежний смысл. Для горизонтального прогиба получаем аналогично уравнение

$$E_0 I'_0 \frac{d^4}{dx^4} \left(\delta - \chi \frac{h_0}{2} \right) = -H, \quad (s_2)$$

где $E_0 I_0$ обозначает жесткость балки при изгибе в горизонтальной плоскости, значения же δ , χ и H определяются выражениями (p_2) , (p_5) и (p_4) .

Условие равновесия пар, действующих на элемент балки и взятых относительно оси балки (рис. 264), дает следующее уравнение:

$$\frac{dM_t}{dx} - \frac{Hh_0}{2} + M_\varphi = 0, \quad (t)$$

где M_t — момент кручения балки. Но связь между моментом кручения M_t , углом закручивания $\theta = \partial\chi/\partial x$ и жесткостью кручения C_0 балки имеет, как известно, вид

$$M_t = C_0 \frac{d\chi}{dx}. \quad (u)$$

Подставив это в уравнение (t), получаем третье краевое условие

$$C_0 \frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{Hh_0}{2} + M_\varphi = 0, \quad (s_3)$$

в котором χ определяется из (p_5) при $\varphi = \varphi_0$.

Удлинение ϵ_x верхних волокон балки вследствие прогиба δ можно пренебречь, поскольку среднее для всей толщины балки значение ϵ_x равно нулю. Поэтому условие (r_4) предыдущего случая переписывается здесь лишь с изменением коэффициента

$$\frac{1}{E_0 A_0} \int_0^x N_{\varphi x} dx + \frac{h_0}{2} \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (s_4)$$

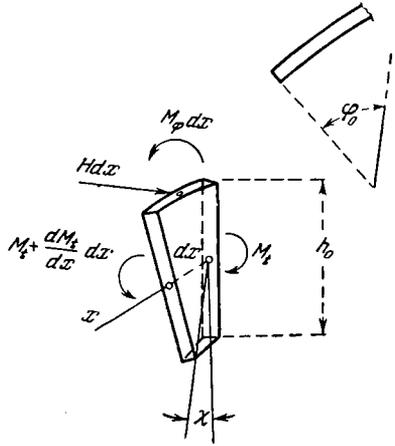


Рис. 264.

¹⁾ Финстервальдер (цит. на стр. 572) применил здесь метод, изложенный в § 124; см. также Proc. Intern. Assoc. Bridge Structural Engrs., т. 1, стр. 127, 1932.

Как и в выше разобранных случаях, дальнейший ход вычисления сводится к определению постоянных A_{1m}, \dots, A_{4m} для каждого значения $m = 1, 3, 5, \dots$ из уравнений $(s_1) - (s_4)$ и к определению напряжений путем суммирования рядов.

Рис. 265 представляет собой эпюру напряжений для оболочки длиной $l = 29,5 \text{ м}$, $\varphi = 45^\circ$. Из нее видно, в частности, что распределение мембранных напряжений σ_x по полной высоте покрытия, состоящего из оболочки

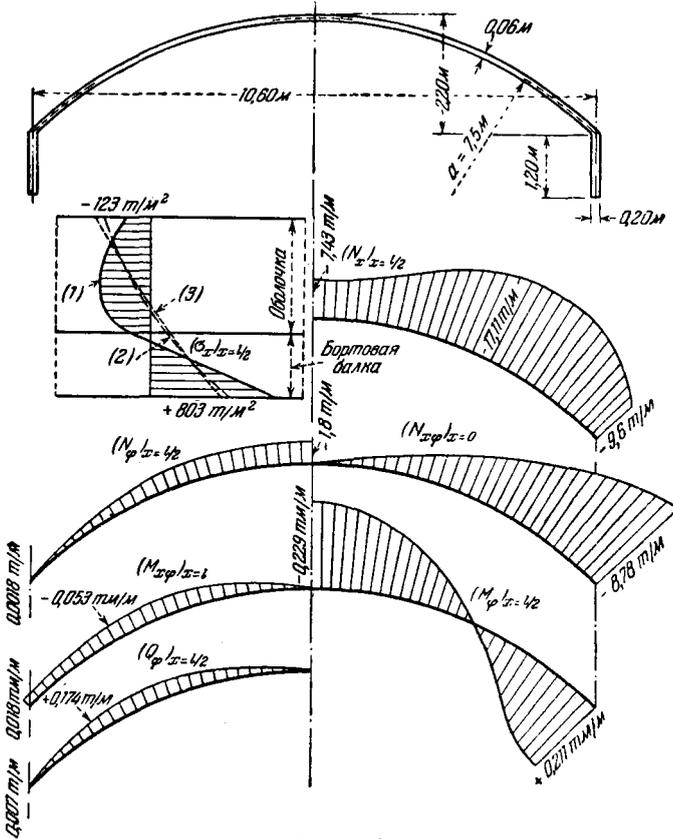


Рис. 265.

и двух балок жесткости, сильно отличается от линейного. Тем не менее если вместо (s_2) в качестве краевого условия принять $\delta = 0$, то можно получить почти линейную эпюру напряжений (2). Если же мы примем вдобавок, что и угловая деформация χ тоже обращается в нуль, то приходим¹⁾ к распределению напряжений, представленному кривой (3).

¹⁾ Подробности вычислений см. в книге Гиркманна (Girkmann K., Flächentragwerke, 4-е изд., стр. 499, Вена, 1956). Диаграммы рис. 263 и 265 воспроизводим из этой книги с разрешения автора и издателя.

В вышеизложенную довольно утомительную процедуру вычисления напряжений могут быть введены те или иные упрощения.

Так, например, если отношение l/a достаточно велико, то, как это было разъяснено в § 124, допустимо пренебречь результирующими напряжениями M_x , Q_x и $M_{x\varphi}$. Далее, частное решение (с) можно заменить решением, полученным непосредственно применением мембранной теории цилиндрических оболочек (§ 112). Перемещения, требующиеся для формулировки граничных условий, можно определить из уравнений (309). Метод, указанный в § 124, упрощается и далее, если из всех производных по φ , необходимых для выражения компонентов деформации и напряжений, оставить только производные наивысшего порядка¹⁾.

С другой стороны, вычислительная работа по определению напряжений в значительной степени облегчается использованием специальных таблиц, содержащих значения компонентов деформаций и напряжений, связанных с воздействием на цилиндрическую оболочку сил, приложенных по ее краям²⁾. Методы итерации³⁾ и конечных разностей⁴⁾ также нашли применение в анализе напряженного состояния оболочки.

Если краевые условия на опорах $x=0$, $x=l$ оболочки отличаются от предположенных на стр. 577, нарушения в распределении напряжений, возникающие в результате воздействия дополнительных краевых сил, требуют специального исследования⁵⁾.

Если отношение l/a не мало, кровлю-оболочку можно рассматривать первоначально как балку⁶⁾. Различные методы расчета такой балки основаны на тех или иных предположках относительно распределения мембранных сил N_x по высоте поперечного сечения балки. Возможным методом, например, будет распределение мембранных сил по контуру оболочки в соответствии с теорией упругости и распределение их по образующим в соответствии с элементарной теорией балки.

Для очень коротких многопролетных кровель-оболочек значение краевых условий на $\varphi = \pm \varphi$ становится второстепенным, и это открывает путь к дальнейшему упрощению анализа напряжений⁷⁾.

До сих пор мы рассматривали цилиндрические оболочки только кругового профиля. Остановимся сейчас на цилиндрической оболочке произвольного симметричного очертания (рис. 266). Если нам дан закон распределения

¹⁾ См. Schoger H., Proc. ASCE, т. 61, стр. 181, 1935.

²⁾ Подобного рода таблицы (для $\nu = 0,2$) были составлены Лундгреном и приводятся в его книге: Lundgren H., Cylindrical shells, т. 1, Копенгаген, 1949. Таблицы, вычисленные на основе упрощенного дифференциального уравнения Доннелла, имеются в книге: Rüdiger D., Urban J., Kreiszyllinderschalen, Лейпциг, 1955. См. также литературные ссылки на стр. 577.

³⁾ Aas-Jakobsen A., Bauingenieur, т. 20, стр. 394, 1939.

⁴⁾ Ненкуну Н., Neuere Verfahren in der Festigkeitslehre, Мюнхен, 1951. Первое применение этого метода к анализу напряжений в оболочках см. Keller H., Schweiz. Bauztg., стр. 111, 1913. Метод релаксации был использован в этих же целях Флюгге (Flügge W., Federhofer-Girkmann-Festschrift, стр. 17, Вена, 1950).

⁵⁾ Здесь находят применение теории Мизеля (цит. выше, стр. 570) или же приближенный метод, предложенный Финстервальдером (цит. выше, стр. 572).

⁶⁾ Этим подходом пользовался в особенности Аас-Якобсен (A. Aas-Jakobsen) (цит. выше, стр. 93).

⁷⁾ См. Thürlimann B., Berenter R. O., Johnston B. G., Proc. I. U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., стр. 347, 1952. О применении метода фотоупругости к цилиндрической оболочке (туннельному тьюннгу) см. Sonntag G., Bauingenieur, т. 31, стр. 408, 1956.

вертикальной нагрузки в функции лишь одного угла φ , мы всегда можем построить цилиндрическую поверхность давления, проходящую через образующие A , C и B . Если, например, нагрузка распределена равномерно по площади основания оболочки, то веревочной кривой ACB будет парабола. Предположим теперь, что срединная поверхность оболочки совпадает с поверхностью давления для заданной нагрузки, тогда вся нагрузка будет передаваться силами N_φ к краям A и B оболочки, и в таком случае по всей длине цилиндра она будет, в конечном счете, поддерживаться бортовыми балками. Если же вместо этого мы хотим, чтобы нагрузка передавалась на торцовые опоры оболочки действием мембранных сил N_x и $N_{x\varphi}$, нам придется выбрать для контура оболочки профиль, который располагался бы над веревочной кривой (или линией давления) (рис. 266).

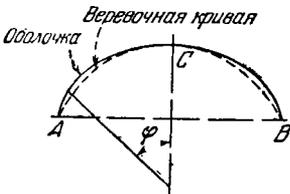


Рис. 266.

Из отношения $N_\varphi = -Za$ [см. уравнения (270)] заключаем также, что для вертикальной нагрузки, т. е. для $Z = p_v \cos \varphi$, имеем $N_\varphi = -p_v a \cos \varphi$, где p_v — интенсивность нагрузки. Следовательно, кольцевые силы N_φ по краю исчезают лишь в том случае, если $\varphi_0 = \pi/2$, т. е. если касательные к линии контура оболочки вертикальны на краях A и B . Это условие выполняется для таких контуров, как полуокружность, полуэллипс или циклоида ¹⁾ — все эти кривые располагаются выше кривой давления для равномерно распределенной нагрузки.

¹⁾ О мембранных напряжениях в оболочках этого типа см., например, Girkman (цит. выше, стр. 584) и Pflüger A., *Elementare Schalenstatik*, Берлин, 1957. Изгиб полуэллиптических оболочек рассмотрен Аас-Якобсеном (Aas-Jakobsen A., *Génie civil.*, стр. 275, 1937). С цилиндрическими кровлями-оболочками иных очертаний можно познакомиться в работе Видемана (Wiedemann E., *Ingr.-Arch.*, т. 8, стр. 301, 1937).

ГЛАВА XVI

ОБОЛОЧКА ВРАЩЕНИЯ ПОД НАГРУЗКОЙ, СИММЕТРИЧНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

127. Уравнения равновесия. Рассмотрим условия равновесия элемента, вырезанного из оболочки двумя смежными меридианными плоскостями и двумя сечениями, перпендикулярными к меридианам (рис. 267)¹⁾. Из условия симметрии можно заключить, что по сторонам элемента, расположенным в меридианных плоскостях, будут при этом действовать одни лишь нормальные напряжения. Эти напряжения можно свести к результирующей силе $N_\theta r_1 d\varphi$ и результирующему моменту $M_\theta r_1 d\varphi$, причем M_θ не зависят от угла θ , определяющего положение меридианов. Перпендикулярная к меридианам сторона элемента, определяемая углом φ (рис. 267), находится под действием нормальных напряжений, дающих результирующую силу $N_\varphi r_2 \sin \varphi d\theta$, момент $M_\varphi r_2 \sin \varphi d\theta$ и перерезывающие силы, сводящиеся к силе $Q_\varphi r_2 \sin \varphi d\theta$, нормальной к оболочке. Приложенную к элементу внешнюю нагрузку можно, как и раньше, разложить на два компонента: касательный к меридианам $Y r_1 r_2 \sin \varphi d\varphi d\theta$ и нормальный

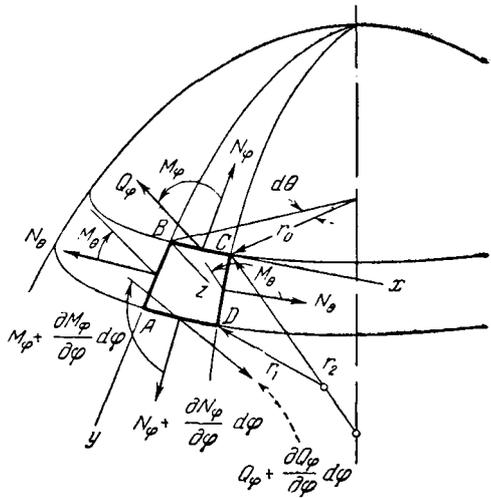


Рис. 267.

¹⁾ Мы пользуемся здесь теми же обозначениями для радиусов кривизны и углов, что и на рис. 213.

к оболочке $Zr_1r_2 \sin \varphi d\varphi d\theta$. Полагая, что мембранные силы N_θ и N_φ далеки от своих критических значений¹⁾, мы пренебрегаем при выводе уравнений равновесия изменением кривизны, следуя в этом отношении пути, намеченному в § 105. В уравнение (f) указанного параграфа, полученное путем проектирования сил на касательную к меридиану, необходимо теперь ввести в левой его части член $-Q_\varphi r_0$. Точно так же в левой части уравнения (j), полученного путем проектирования сил на нормаль к оболочке, должен быть присоединен добавочный член $d(Q_\varphi r_0)/d\varphi$. Третье уравнение получается из рассмотрения равновесия моментов всех приложенных к элементу сил относительно касательной к параллельному кругу. Это дает²⁾

$$\left(M_\varphi + \frac{dM_\varphi}{d\varphi} d\varphi\right) \left(r_0 + \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta - M_\varphi r_0 d\theta - M_\theta r_1 \cos \varphi d\varphi d\theta - Q_\varphi r_2 \sin \varphi r_1 d\varphi d\theta = 0.$$

После упрощения это уравнение вместе с двумя уравнениями § 105, с изменениями, как только что было указано выше, дают следующую систему трех уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (N_\varphi r_0) - N_\theta r_1 \cos \varphi - r_0 Q_\varphi + r_0 r_1 Y &= 0, \\ N_\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin \varphi + \frac{d(Q_\varphi r_0)}{d\varphi} + Z r_1 r_0 &= 0, \\ \frac{d}{d\varphi} (M_\varphi r_0) - M_\theta r_1 \cos \varphi - Q_\varphi r_1 r_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

В эти три уравнения равновесия входят пять неизвестных величин: три результирующие силы N_φ , N_θ и Q_φ и два результирующих момента M_θ и M_φ . Число этих неизвестных можно свести и к трем, если мы выразим мембранные силы N_φ и N_θ и моменты M_φ и M_θ в функциях компонентов v и w смещения. При исследовании в § 108 деформации, вызванной мембранными напряжениями, мы получили для компонентов деформации срединной поверхности выражения

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{w}{r_1}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{v}{r_2} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{w}{r_2},$$

¹⁾ Вопрос о выпучивании сферических оболочек излагается в книге Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, М., Гостехиздат, стр. 371, 1955.

²⁾ При этом выводе мы учитываем, что угол между плоскостями, в которых действуют моменты M_θ , равен $\cos \varphi d\theta$.

из которых на основании закона Гука находим

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} - w \right) + \frac{\nu}{r_2} (v \operatorname{ctg} \varphi - w) \right], \\ N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r_2} (v \operatorname{ctg} \varphi - w) + \frac{\nu}{r_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} - w \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

Для того чтобы получить подобные же выражения для моментов M_φ и M_θ , рассмотрим изменения кривизны изображенного на рис. 267 элемента $DABC$. Обратив внимание на верхнюю и нижнюю стороны этого элемента, заметим, что начальное значение угла между этими двумя сторонами равно $d\varphi$. Вследствие смещения v вдоль по меридиану верхняя сторона элемента повернется относительно перпендикуляра к меридианной плоскости на угол v/r_1 . В результате смещения w эта же сторона повернется, сверх того, относительно той же оси на угол $dw/r_1 d\varphi$. Таким образом, полный поворот верхней стороны элемента будет

$$\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\varphi}. \quad (a)$$

Поворот нижней стороны будет равен

$$\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\varphi} + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\varphi} \right) d\varphi.$$

Отсюда изменение кривизны меридиана¹⁾

$$\chi_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\varphi} \right). \quad (b)$$

Чтобы найти изменение кривизны в плоскости, перпендикулярной к меридиану, заметим, что в силу симметрии деформации каждая из боковых сторон элемента $DABC$ повернется в меридианной плоскости на угол, данный выражением (a). Так как нормаль к боковой стороне AB элемента образует угол $(\pi/2) - \cos \varphi d\theta$ с касательной к меридиану DC (ось y), то поворот стороны AB в ее собственной плоскости будет иметь компонент по оси y , равный

$$- \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\varphi} \right) \cos \varphi d\theta,$$

Это приводит к изменению кривизны, равному

$$\chi_\theta = \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{r_0} = \left(\frac{v}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\varphi} \right) \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{r_2}. \quad (c)$$

¹⁾ Деформацией срединной поверхности мы здесь пренебрегаем, а изменение кривизны получаем путем деления изменения угла на длину $r_1 d\varphi$ дуги.

Пользуясь выражениями (b) и (c), находим тогда

$$\left. \begin{aligned} M_\varphi &= -D \left[\frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{d\omega}{r_1 d\varphi} \right) + \frac{\nu}{r_2} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{d\omega}{r_1 d\varphi} \right) \operatorname{ctg} \varphi \right], \\ M_\theta &= -D \left[\left(\frac{v}{r_1} + \frac{d\omega}{r_1 d\varphi} \right) \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{r_2} + \frac{\nu}{r_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{r_1} + \frac{d\omega}{r_1 d\varphi} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (314)$$

Подставив выражения (313) и (314) в уравнения (312), получим три уравнения с тремя неизвестными величинами v , ω и Q_φ . Решение этих уравнений откладывается до следующего параграфа.

Выражениями (314) мы можем, кроме того, воспользоваться для установления важного вывода относительно точности, изложенной в главе XIV мембранной теории. В § 108 был дан вывод уравнений для вычисления смещений v и ω . Подстановка определенных этими уравнениями смещений в выражении (314) позволяет вычислить изгибающие моменты и напряжения изгиба. Мембранная теория этими напряжениями пренебрегает. Если сравнить эти величины со значениями, указываемыми мембранной теорией, то из этого сравнения можно сделать выводы относительно точности названной теории.

Возьмем в качестве частного примера сферическую оболочку, нагруженную своим собственным весом (стр. 481). Если опоры таковы, что показано на рис. 215, *a*, то смещения, согласно мембранной теории, будут на основании уравнений (f) и (b) § 108 равны

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{a^2 q (1 + \nu)}{Eh} \left(\frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \varphi} + \ln \frac{1 + \cos \varphi}{1 + \cos \alpha} \right) \sin \varphi, \\ \omega &= v \operatorname{ctg} \varphi - \frac{a^2 q}{Eh} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Подставив эти выражения в формулы (314) для изгибающих моментов, получим

$$M_\theta = M_\varphi = \frac{q h^2}{12} \frac{2 + \nu}{1 - \nu} \cos \varphi. \quad (e)$$

Абсолютное значение соответствующего напряжения изгиба на поверхности оболочки будет равно

$$\frac{q}{2} \frac{2 + \nu}{1 - \nu} \cos \varphi.$$

Взяв отношение этого напряжения к напряжению сжатия σ , указываемому мембранной теорией [см. уравнение (257)], находим

$$\frac{q}{2} \frac{2 + \nu}{1 - \nu} \cos \varphi : \frac{aq}{h(1 + \cos \varphi)} = \frac{2 + \nu}{2(1 - \nu)} \frac{h}{a} (1 + \cos \varphi) \cos \varphi.$$

Максимальное значение этого отношения получается в наивысшей точке, т. е. на полюсе оболочки, где $\varphi = 0$, причем для $\nu = 0,3$ оно равно

$$3,29 \frac{h}{a}. \quad (f)$$

Мы видим, что для тонкой оболочки отношение (f) напряжений изгиба к мембранным напряжениям мало и что мембранная теория дает удовлетворительные результаты, если только условия на опорах таковы, что оболочка может свободно расширяться, как показано на рис. 215, а. Если в уравнения (312) подставить выражение (e) для изгибающих моментов, то для мембранных сил N_φ и N_θ можно получить еще и лучшие приближения. Эти результаты будут отличаться от решений (257) лишь на малые величины, в которые в качестве множителя будет входить отношение h^2/a^2 .

Из приведенных соображений следует, что при вычислении напряжений в симметрично нагруженной оболочке мы имеем право в качестве первого приближения принять решение, указываемое мембранной теорией, внося в него поправки, вычисленные из уравнения (312). Эти исправленные значения напряжений будут достаточно точны, если края оболочки могут свободно расширяться. В противном случае по этим краям нужно будет приложить такие силы, чтобы удовлетворялись граничные условия. Вычислением напряжений, вызванных этими последними силами, мы займемся в следующем параграфе.

128. Приведение системы уравнений равновесия к двум дифференциальным уравнениям второго порядка. Из изложенного в предыдущем параграфе выясняется, что с помощью выражений (313) и (314) мы можем получить из уравнений (312) три уравнения с тремя неизвестными ν , ω и Q_φ . Пользуясь третьим из этих уравнений, мы легко можем исключить перерезывающую силу Q_φ , и тогда три уравнения сведутся у нас к двум уравнениям с неизвестными ν и ω . Именно таким способом и были получены уравнения, послужившие инструментом для первых исследований изгиба оболочек¹⁾. Значительного упрощения уравнений можно достигнуть введением новых переменных²⁾. В качестве одной из этих новых переменных мы примем угол поворота касательной к меридиану. Обозначив этот угол через V ,

¹⁾ См. Stodola A., Die Dampfturbinen, 4-е изд., стр. 597, 1910; Kellner H., Mitt. Forschungsarbeiten, т. 124, 1912; Fankhauser E., диссертация, Цюрих, 1913, и VDI., т. 58, стр. 840, 1914.

²⁾ Этот метод исследования напряжений в оболочках был разработан для случая сферической оболочки Рейсснером (Reissner H., Müller-Breslau-Festschrift, стр. 181, Лейпциг, 1912). Мейсснер (E. Meissner) его обобщил и применил к частным случаям: Physik. Zeitschr., т. 14, стр. 343, 1913; Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Ges., Цюрих, т. 60, стр. 23, 1915.

получим из уравнения (а) предыдущего параграфа

$$V = \frac{1}{r_1} \left(v + \frac{d\omega}{d\varphi} \right). \quad (a)$$

Второй переменной u нас будет

$$U = r_2 Q_\varphi. \quad (b)$$

Чтобы упростить преобразование уравнений к этим новым переменным, заменим первое из уравнений (312) другим, аналогичным уравнению (255) (см. стр. 481), которое можно получить при рассмотрении равновесия части оболочки, лежащей выше параллельного круга, определяемого углом φ (рис. 267). Полагая, что никакой временной нагрузки оболочка не несет, получаем уравнение

$$2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi + 2\pi r_0 Q_\varphi \cos \varphi = 0,$$

из которого следует

$$N_\varphi = -Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{r_2} U \operatorname{ctg} \varphi. \quad (c)$$

Подставив это во второе из уравнений (312), находим для $Z=0$

$$r_1 N_\theta \sin \varphi = -N_\varphi r_0 - \frac{d(Q_\varphi r_0)}{d\varphi}$$

и, заметив, что $r_0 = r_2 \sin \varphi$, получаем

$$N_\theta = -\frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} (Q_\varphi r_2) = -\frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi}. \quad (d)$$

Таким образом, обе мембранные силы N_φ и N_θ представлены в функции величины U , зависящей, как видно из обозначения (b), от перерезающей силы Q_φ .

Чтобы вывести первое уравнение, связывающее V и U , воспользуемся уравнениями (313), из которых непосредственно получаем

$$\frac{dv}{d\varphi} - \omega = \frac{r_1}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta), \quad (e)$$

$$v \operatorname{ctg} \varphi - \omega = \frac{r_2}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi), \quad (f)$$

Исключая из этих уравнений ω , находим

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{Eh} [(r_1 + \nu r_2) N_\varphi - (r_2 + \nu r_1) N_\theta]. \quad (g)$$

Дифференцирование уравнения (f) дает ¹⁾

$$\frac{dv}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{v}{\sin^2 \varphi} - \frac{dw}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{r_2}{Eh} (N_3 - \nu N_\varphi) \right]. \quad (h)$$

Производная $dv/d\varphi$ легко исключается из уравнений (g) и (h), после чего мы получаем

$$\begin{aligned} v + \frac{dw}{d\varphi} &= r_1 V = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{Eh} [(r_1 + \nu r_2) N_\varphi - (r_2 + \nu r_1) N_3] - \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{r_2}{Eh} (N_3 - \nu N_\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Подставив сюда вместо N_φ и N_3 выражения (c) и (d), находим следующее уравнение, связывающее U и V :

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \frac{1}{r_1} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{r_2}{r_1 h} \frac{dh}{d\varphi} \right] \frac{dU}{d\varphi} - \\ - \frac{1}{r_1} \left[\frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi - \nu - \frac{\nu}{h} \frac{dh}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi \right] U = EhV. \quad (315) \end{aligned}$$

Второе уравнение относительно U и V получится в результате подстановки выражений (314) для M_φ и M_3 в третье из уравнений (312) и введения обозначений (a) и (b). Таким путем находим

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \frac{1}{r_1} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg} \varphi + 3 \frac{r_2}{r_1 h} \frac{dh}{d\varphi} \right] \frac{dV}{d\varphi} - \\ - \frac{1}{r_1} \left[\nu - \frac{3\nu \operatorname{ctg} \varphi}{h} \frac{dh}{d\varphi} + \frac{r_1}{r_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi \right] V = -\frac{U}{D}. \quad (316) \end{aligned}$$

Таким образом, задача об изгибе оболочки, имеющей форму поверхности вращения, силами и моментами, равномерно распределенными по параллельному кругу, представляющему собой край оболочки, сводится к интегрированию двух уравнений (315) и (316) второго порядка.

Если толщина оболочки постоянна, то члены, содержащие в качестве множителя производную $dh/d\varphi$, обращаются в нуль, а производные от неизвестных U и V получают в обоих уравнениях одинаковые коэффициенты. Обозначение

$$\begin{aligned} L(\dots) = \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2(\dots)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r_1} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg} \varphi \right] \frac{d(\dots)}{d\varphi} - \\ - \frac{r_1 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{r_2 r_1} (\dots) \quad (i) \end{aligned}$$

¹⁾ Мы рассматриваем здесь общий случай и предполагаем при выполнении этой операции дифференцирования, что толщина h оболочки — величина переменная,

позволит нам представить эти уравнения в следующей упрощенной форме:

$$\left. \begin{aligned} L(U) + \frac{\nu}{r_1} U &= EhV, \\ L(V) - \frac{\nu}{r_1} V &= -\frac{U}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (317)$$

Из этой системы двух дифференциальных уравнений второго порядка мы легко получаем для каждого неизвестного уравнение четвертого порядка. С этой целью выполним по отношению к первому из уравнений (317) операцию, обозначенную символом $L(\dots)$, что нам даст

$$LL(U) + \nu L\left(\frac{U}{r_1}\right) = EhL(V).$$

Подстановка второго из системы уравнений (317)

$$L(V) = \frac{\nu}{r_1} V - \frac{U}{D} = \frac{\nu}{r_1 Eh} \left[L(U) + \frac{\nu}{r_1} U \right] - \frac{U}{D}$$

дает нам

$$LL(U) + \nu L\left(\frac{U}{r_1}\right) - \frac{\nu}{r_1} L(U) - \frac{\nu^2}{r_1^2} U = -\frac{Eh}{D} U. \quad (318)$$

Точно таким же образом находим и второе уравнение

$$LL(V) - \nu L\left(\frac{V}{r_1}\right) + \frac{\nu}{r_1} L(V) - \frac{\nu^2}{r_1^2} V = -\frac{Eh}{D} V. \quad (319)$$

Если радиус кривизны r_1 — величина постоянная, как это имеет место в случае сферической или конической оболочки, а также в случае кольцевой оболочки, подобной, например, той, которая изображена на рис. 220, то уравнения (318) и (319) допускают и дальнейшее упрощение. Так как в этом случае

$$L\left(\frac{U}{r_1}\right) = \frac{1}{r_1} L(U),$$

то, введя обозначение

$$\mu^4 = \frac{Eh}{D} - \frac{\nu^2}{r_1^2}, \quad (j)$$

мы можем придать обоим уравнениям форму

$$LL(U) + \mu^4 U = 0, \quad (320)$$

причем они могут быть написаны одним из следующих способов:

$$L[L(U) + \mu^2 U] - \mu^2 [L(U) + \mu^2 U] = 0$$

или

$$L[L(U) - \mu^2 U] + \mu^2 [L(U) - \mu^2 U] = 0.$$

Эти уравнения показывают, что решения уравнения второго порядка

$$L(U) \pm i\mu^2 U = 0 \quad (321)$$

являются также и решениями уравнения (320). Поступая, как было разъяснено в § 118, нетрудно показать, что полное решение уравнения (320) можно получить из решения одного из уравнений (321). В следующих двух параграфах будет освещено применение уравнений (321) к частным случаям.

129. Сферическая оболочка постоянной толщины. В случае, если толщина оболочки постоянна, $r_1 = r_2 = a$ и символ (i) предыдущего параграфа принимает следующий вид:

$$L(\dots) = \frac{1}{a} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2}(\dots) + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi}(\dots) - \operatorname{ctg}^2 \varphi(\dots) \right]. \quad (a)$$

Приняв в качестве одной из неизвестных вместо U величину aQ_φ и введя вместо постоянной μ новую постоянную ρ , определяемую уравнением

$$\rho^2 = \frac{a\mu^2}{2} = \sqrt{\frac{3a^2(1-\nu^2)}{h^2} - \frac{\nu^2}{4}}, \quad (b)$$

мы получаем возможность представить первое из уравнений (321) в следующем виде:

$$\frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - \operatorname{ctg}^2 \varphi Q_\varphi + 2\rho^2 Q_\varphi = 0. \quad (322)$$

Переход к новым переменным ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin^2 \varphi, \\ z &= \frac{Q_\varphi}{\sin \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

приводит к дальнейшему упрощению, в результате чего уравнение (322) в этих новых переменных принимает вид

$$x(x-1) \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{5}{2}x - 2 \right) \frac{dz}{dx} + \frac{1-2\rho^2}{4} z = 0. \quad (d)$$

Это уравнение принадлежит к известному типу дифференциального уравнения второго порядка, имеющего вид

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0. \quad (e)$$

¹⁾ Этот способ решения уравнения был дан Мейсснером (E. Meissner), цит. выше.

Уравнения (d) и (e) совпадут, если мы положим

$$\gamma = 2, \quad \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5 + 8i\rho^2}}{4}, \quad \beta = \frac{3 \mp \sqrt{5 + 8i\rho^2}}{4}. \quad (f)$$

Решение уравнения (e) можно взять в виде степенного ряда

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots \quad (g)$$

Подставив этот ряд в уравнение (e) и приравняв коэффициенты при каждой степени x нулю, получим следующие соотношения между коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} A_0, & A_2 &= \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)} A_1, \\ &\dots & &\dots \\ A_n &= A_{n-1} \frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n(\gamma+n-1)}, \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

При таких соотношениях между коэффициентами ряд (g) принимает вид

$$\begin{aligned} y = A_0 \left[1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \right. \\ \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots \right]. \quad (h) \end{aligned}$$

Это так называемый гипергеометрический ряд. Он сходится при всех значениях x , меньших 1, и может быть применен для представления одного из интегралов уравнения (d). Подставив вместо α , β и γ их значения (f) и введя обозначение

$$\delta^2 = 5 + 8i\rho^2 = 5 + 4i \sqrt{\frac{12a^2(1-v^2)}{h^2} - v^2}, \quad (i)$$

получим в качестве решения уравнения (d) полином

$$z_1 = A_0 \left[1 + \frac{3^2 - \delta^2}{16 \cdot 1 \cdot 2} x + \frac{(3^2 - \delta^2)(7^2 - \delta^2)}{16^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} x^2 + \dots \right], \quad (j)$$

содержащий одну произвольную постоянную A_0 .

Получение второго интеграла уравнения (d) представляет большие трудности¹⁾. Его можно написать в виде

$$z_2 = z_1 \ln x + \frac{1}{x} \varphi(x), \quad (k)$$

¹⁾ Решение дифференциальных уравнений с помощью гипергеометрических рядов излагается в книге Римана - Вебера, Дифференциальные уравнения математической физики, т. 2. См. также Камке Е., *Differentialgleichungen*, т. 1, 2-е изд., стр. 465, Лейпциг, 1943,

где $\varphi(x)$ есть степенной ряд, сходящийся для $|x| < 1$. Это второе решение становится бесконечным при $x = 0$, т. е. на полюсе сферы (рис. 267), и должно быть отброшено, если на этом полюсе нет отверстия.

Если мы ограничим наше исследование этими последними случаями, то нам нужно будет принять во внимание лишь решение (j). Подставив вместо δ^2 его значение (i) и разбив ряд (j) на его действительную и мнимую части, получим

$$z_1 = S_1 + iS_2, \quad (l)$$

где S_1 и S_2 — степенные ряды, сходящиеся при $|x| < 1$. Тогда решением первого из уравнений (321) будет

$$U_1 = a \sin \varphi z_1 = I_1 + iI_2, \quad (m)$$

где I_1 и I_2 — два ряда, получаемых непосредственно из рядов S_1 и S_2 .

Интеграл второго уравнения (321) может быть представлен теми же рядами I_1 и I_2 (см. стр. 539). Таким образом, общее решение дифференциального уравнения четвертого порядка (320) для случая сферической оболочки без отверстия на полюсе может быть представлено в виде

$$U = aQ_\varphi = AI_1 + BI_2, \quad (n)$$

где A и B — постоянные, подлежащие определению из двух условий по краю сферической оболочки.

Имея выражение (n) для U , мы легко можем получить вторую неизвестную V . Начнем с того, что внесем выражение (m) в первое из уравнений (321). Это нам дает

$$L(I_1 + iI_2) = -i\mu^2(I_1 + iI_2).$$

Отсюда

$$L(I_1) = \mu^2 I_2, \quad L(I_2) = -\mu^2 I_1. \quad (o)$$

Подставив выражение (n) в первое из уравнений (317) и используя выражения (o), получим

$$EhaV = aL(U) + \nu U = (A\nu - Ba\mu^2)I_1 + (Aa\mu^2 + B\nu)I_2. \quad (p)$$

Мы видим, что вторая неизвестная V точно так же допускает представление посредством рядов I_1 и I_2 .

Располагая значениями U и V , мы можем получить все силы, моменты и смещения. Силы N_φ и N_θ находятся из уравнений (c) и (d) предыдущего параграфа. Изгибающие моменты M_φ и M_θ определяются из уравнений (314). Заметив, что в случае сферической

оболочки $r_1 = r_2 = a$, получим в обозначениях (а)

$$\left. \begin{aligned} M_\varphi &= -\frac{D}{a} \left(\frac{dV}{d\varphi} + \nu \operatorname{ctg} \varphi V \right), \\ M_\theta &= -\frac{D}{a} \left(\nu \frac{dV}{d\varphi} + \operatorname{ctg} \varphi V \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{q})$$

Для вычисления компонентов ν и w смещения воспользуемся следующими выражениями для линейной деформации в срединной поверхности:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh} (N_\varphi - \nu N_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi).$$

Подставив сюда вместо N_φ и N_θ их выражения в функции U и V , получим выражения для ε_φ и ε_θ , которыми можно будет воспользоваться при вычислении ν и w , как это было разъяснено в § 108.

В практических применениях бывает обычно важно знать смещение δ в плоскостях параллельных кругов. Его можно получить, проектируя компоненты ν и w на такую плоскость. Это дает (рис. 267)

$$\delta = \nu \cos \varphi - w \sin \varphi.$$

Если мы заметим, что δ представляет собой приращение радиуса r_0 параллельного круга, то нам легко будет выразить его в функциях от U и V , а именно

$$\delta = a \sin \varphi \varepsilon_\theta = \frac{a \sin \varphi}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi) = -\frac{\sin \varphi}{Eh} \left(\frac{dU}{d\varphi} - \nu U \operatorname{ctg} \varphi \right). \quad (\text{r})$$

Таким образом, все величины, определяющие изгиб сферической оболочки силами и парами, равномерно распределенными по краю, могут быть представлены с помощью двух рядов I_1 и I_2 .

Легкость, с которой этот расчет может найти применение на практике, определяется быстротой сходимости рядов I_1 и I_2 . Сходимость же эта зависит главным образом от величины

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{3a^2}{h^2} (1 - \nu^2) - \frac{\nu^2}{4}}, \quad (\text{s})$$

которая, если пренебречь малой в сравнении с единицей величиной ν^2 , допускает приблизительное выражение

$$\rho \approx \sqrt[4]{3} \sqrt{\frac{a}{h}}.$$

Вычисления обнаруживают¹⁾, что для $\rho < 10$ сходимость ряда удо-

¹⁾ Такие вычисления были выполнены Боллем (Boile L., Schweiz Bauzeitung, т. 66, стр. 105, 1915).

влетворительна и что все нужные нам величины можно будет при этом находить без больших трудностей для разных условий на краях.

В качестве примера рассмотрим случай сферической оболочки, подвергающейся действию равномерного нормального давления p (рис. 268). Мембранные напряжения в этом случае будут

$$\sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta} = -\frac{pa}{2h}. \quad (t)$$

Соответствующие же мембранные силы, удерживающие оболочку в равновесии,

$$(N_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = -\frac{pa}{2}. \quad (u)$$

Налагая на эти мембранные силы горизонтальные силы

$$H = \frac{pa}{2} \cos \alpha,$$

равномерно распределенные по краю оболочки, мы приходим к случаю, изображенному на рис. 268, а, где нагруженная оболочка поддерживается вертикальными реакциями горизонтальной плоскости. Напряжения в этом случае определяются наложением на мембранные напряжения (t) напряжений, вызываемых горизонтальными силами H . Эти последние напряжения можно получить из общих решений (п) и (р), определяя входящие в эти решения постоянные A и B таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия

$$(N_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = H \cos \alpha, \quad (M_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0.$$

Напряжения, полученные таким путем для частного случая, когда $a = 143$ см, $h = 6$ см, $\alpha = 39^\circ$, $p = 20$ кг/см² и $\nu = 0,2$, показаны на рис. 269.

Налагая на мембранные силы (u) горизонтальные силы H_1 и изгибающие моменты M_2 , равномерно распределенные по краю, мы можем получить также и случай оболочки с заземленными краями (рис. 268, б). Напряжения в этом случае получаются путем изложения на мембранные напряжения (t) напряжений, вызванных в оболочке силами H_1 и моментами M_2 . Эти последние напряжения находятся, как и раньше, из общих решений (п) и (р), причем постоянные A и B определяются так, чтобы удовлетворялись граничные условия

$$(\epsilon_{\theta})_{\varphi=\alpha} = 0, \quad (V)_{\varphi=\alpha} = 0.$$

Полные напряжения, полученные таким путем для вышеприведенного численного примера, показаны на рис. 270.

Вычисления максимальных сжимающих и максимальных растягивающих напряжений для оболочек с различными соотношениями размеров, находящихся под действием равномерного нормального давления p , обнаружил¹⁾, что величина этих напряжений зависит главным образом от величины

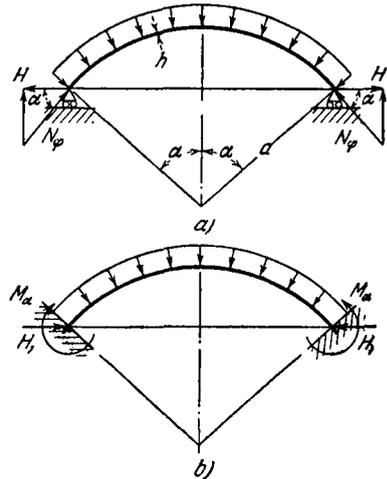


Рис. 268.

¹⁾ См. статью Боля, цит. выше.

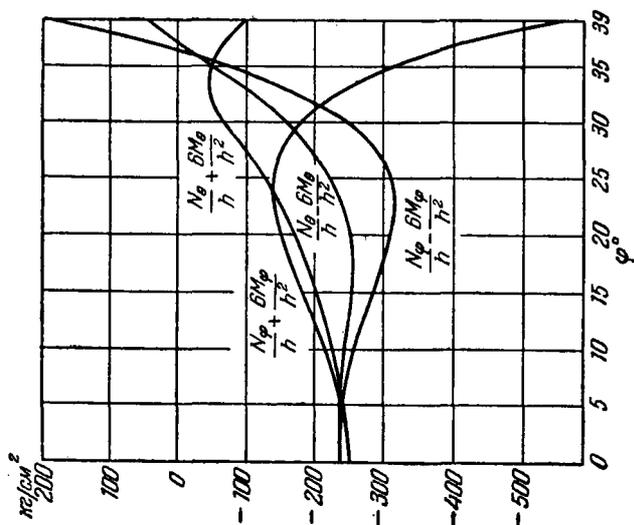


Рис. 270.

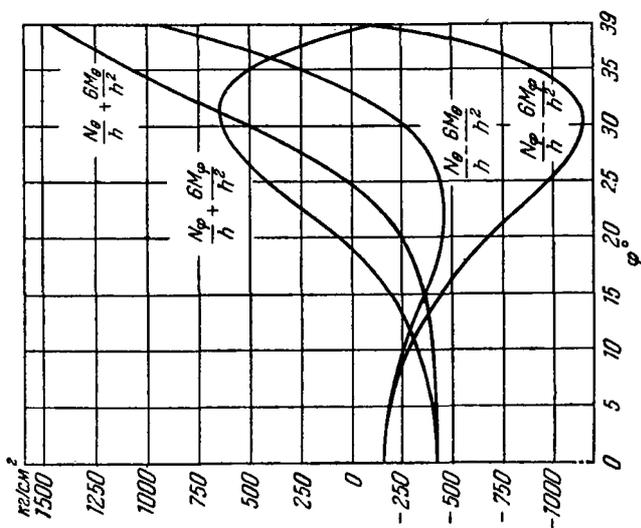


Рис. 269.

отношения

$$\frac{a}{h} \sin^2 \alpha$$

и может быть представлена сравнительно простыми формулами. Для случая, представленного на рис. 268, *a*, эти формулы дают следующие максимумы абсолютных значений напряжений:

$$\text{для } \frac{a}{h} \sin^2 \alpha < 1,2 \quad \sigma = -1,24p \left(\frac{a \sin \alpha}{h} \right)^2 \cos \alpha,$$

$$\text{для } 1,2 < \frac{a}{h} \sin^2 \alpha < 12 \quad \sigma = \frac{ap}{2h} \left[\left(1,6 + 2,44 \sin \alpha \sqrt{\frac{a}{h}} \right) \cos \alpha - 1 \right].$$

Для случая, представленного на рис. 268, *b*, соответствующие формулы будут:

$$\text{для } \frac{a \sin^2 \alpha}{h} < 3 \quad \sigma = -p \left(\frac{a \sin \alpha}{h} \right)^2 \left[0,75 - 0,038 \left(\frac{a \sin \alpha}{h} \right)^2 \sin^2 \alpha \right],$$

$$\text{для } 3 < \frac{a \sin^2 \alpha}{h} < 12, \quad \sigma = -1,2 \frac{ap}{h}.$$

В предыдущем изложении предполагалось, что отверстия у полюса оболочки нет. Если такое отверстие имеется, то мы должны удовлетворить граничным условиям как на нижнем, так и на верхнем ее крае. Для этого нам нужно принять во внимание оба интеграла (j) и (k) уравнения (d) (см. стр. 595), что приведет нас в конечном результате к такому решению уравнения (320), в котором будут содержаться четыре постоянные; в каждом частном случае эти постоянные должны быть подобраны таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия на обоих краях. Соответствующие вычисления обнаруживают¹⁾, что если угол α не мал, то силы, распределенные по верхнему краю, оказывают лишь весьма слабое влияние на величину напряжений на нижнем крае, а так как эти последние напряжения бывают обычно наиболее значительными, то все необходимые данные для расчета оболочки с отверстием мы сможем получить, если при вычислении максимальных напряжений воспользуемся формулами, выведенными для оболочки без отверстия.

Изложенный в настоящем параграфе метод вычисления напряжений в сферической оболочке может быть применен также и для вычисления температурных напряжений. Положим, что температуры на наружной и на внутренней поверхностях сферической оболочки постоянны, но что в радиальном направлении имеет место изменение температуры по линейному закону. Если t есть разность температур на наружной и внутренней поверхностях, то вызванный этой разностью температур изгиб оболочки будет полностью устранен постоянными изгибающими моментами (см. § 14)

$$M_{\varphi} = M_{\theta} = \frac{\alpha t D (1 + \nu)}{h}. \quad (\text{v})$$

В случае полной сферы эти моменты существуют в действительности и приводят к возникновению напряжений изгиба, максимальные значения которых

$$(\sigma_{\varphi})_{\max} = (\sigma_{\theta})_{\max} = \frac{6\alpha t D (1 + \nu)}{h^2} = \frac{\alpha t E}{2(1 - \nu)}. \quad (\text{w})$$

¹⁾ См. статью Боля, цит. на стр. 598.

Если у нас имеется лишь часть сферы, опертой, как показано на рис. 268, *a*, то край ее может свободно поворачиваться и полные температурные напряжения получатся при наложении на напряжения (w) напряжений, вызванных в оболочке моментами

$$M_{\alpha} = - \frac{\alpha t D (1 + \nu)}{h},$$

равномерно распределенными по краю. Эти последние напряжения получаем методом, изложенным в настоящем параграфе ¹). При условиях опирания, показанных на рис. 268, *b*, температурные напряжения определяются по формуле (w), если только температура срединной поверхности остается постоянной. В противном случае на напряжения (w) нужно наложить напряжения, вызываемые силами H и моментами M_{α} ; находят их в каждом частном случае из граничных условий.

130. Приближенные методы вычисления напряжений в сферических оболочках. В предыдущем параграфе было указано, что применимость точного решения для напряжений в сферической оболочке зависит от быстроты сходимости входящих в это решение рядов. Ряды сходятся медленнее, и для вычисления приходится прибегать ко все большему и большему числу членов ряда по мере того, как возрастает отношение a/h , т. е. по мере того, как толщина оболочки уменьшается в сравнении с ее радиусом ²). Для такой оболочки были разработаны приближенные методы, приводящие при больших значениях a/h к решениям весьма высокой точности.

Одним из приближенных методов решения этой задачи является метод асимптотического интегрирования ³). Исходя из уравнения (320) и вводя вместо перерезывающей силы Q_{φ} величину

$$z = Q_{\varphi} \sqrt{\sin \varphi}, \quad (a)$$

получаем уравнение

$$z^{IV} + a_2 z'' + a_1 z' + (\beta^4 + a_0) z = 0, \quad (b)$$

в котором

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= - \frac{63}{16 \sin^4 \varphi} + \frac{9}{8 \sin^2 \varphi} + \frac{9}{16}, & a_1 &= \frac{3 \cos \varphi}{\sin^3 \varphi}, \\ a_2 &= - \frac{3}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{5}{2}, & 4\beta^4 &= (1 - \nu^2) \left(1 + \frac{12a^2}{h^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

¹) Температурные напряжения в оболочках изучались Эйхельбергом (Eichelberg G., Forschungsarbeiten, № 263, 1923). Для оболочки произвольной толщины см. также Mc Dowell E. L., Sternberg E., J. Appl. Mech., т. 24, стр. 376, 1957.

²) Вычисления Экстрёма (Ekström I. E., Ing. Vetensk. Akad., т. 121, Стокгольм, 1933) показывают, что при $a/h = 62,5$ необходимо принять в расчет не менее 18 членов ряда.

³) См. доклад О. Блюментала в Трудах 5-го Международного математического конгресса, Кембридж, 1912 (Repts. V Intern. Cong. Math.), а также его статью в Z. Math. Physik, т. 62, стр. 343, 1914.

Мы видим, что для тонкой оболочки, у которой a/h представляет собой большое число, величина $4\beta^4$ будет весьма значительной в сравнении с коэффициентами a_0 , a_1 и a_2 , если угол φ не мал. Так как в нашем дальнейшем изложении мы будем интересоваться напряжениями близ края, где $\varphi = \alpha$ (рис. 268), причем α не мал, то у нас есть право пренебречь в уравнении (b) членами, содержащими коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 . Таким путем мы приходим к уравнению

$$z^{IV} + 4\beta^4 z = 0. \quad (d)$$

Это уравнение сходно с уравнением (276), которым мы пользовались при исследовании симметричной деформации круглой цилиндрической оболочки. Применяя общее решение уравнения (d) и обозначение (a), получаем

$$Q_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{\beta\varphi} (C_1 \cos \beta\varphi + C_2 \sin \beta\varphi) + e^{-\beta\varphi} (C_3 \cos \beta\varphi + C_4 \sin \beta\varphi). \quad (e)$$

Из приведенного выше анализа изгиба цилиндрической оболочки нам известно, что напряжения изгиба, вызванные равномерно распределенными по краю силами, быстро уменьшаются с увеличением расстояния от края. В подобных же условиях находится также и тонкая сферическая оболочка. Заметив, что с уменьшением угла φ первые два члена в решении (e) уменьшаются, в то время как два следующих увеличиваются, мы приходим к выводу, что в случае сферы без отверстия на полюсе допустимо принять в расчет в решении (e) лишь два первых члена, положив

$$Q_\varphi = \frac{e^{\beta\varphi}}{\sqrt{\sin \varphi}} (C_1 \cos \beta\varphi + C_2 \sin \beta\varphi). \quad (f)$$

Располагая этим выражением для Q_φ и применяя соотношения (b), (c) и (d) из § 128, а также соотношения (p), (q), (r) из § 129, мы получаем возможность вычислить все величины, определяющие изгиб оболочки, а из условий на краях определить постоянные C_1 и C_2 . Этим методом без труда можно пользоваться в различных частных случаях, причем для тонкой оболочки он обеспечивает хорошую точность¹⁾.

Вместо того чтобы оперировать с дифференциальным уравнением (320) четвертого порядка, мы можем положить в основу приближенного исследования изгиба сферической оболочки два уравнения

¹⁾ Пример применения метода асимптотического интегрирования приводится в статье С. П. Тимошенко; см. Бюллетень Об-ва инженеров-технологов, СПб., 1913. В вышеуказанных работах Блюменталя указываются способы дальнейшего уточнения приближенного решения.

(317)¹⁾. В нашем случае эти уравнения можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} - (\operatorname{ctg}^2 \varphi - \nu) Q_\varphi &= EhV, \\ \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{dV}{d\varphi} - (\operatorname{ctg}^2 \varphi + \nu) V &= -\frac{a^2 Q_\varphi}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

где Q_φ — перерезывающая сила, а V — угол поворота касательной к меридиану, определяемые уравнением (а) из § 128. В случае весьма тонкой оболочки, если угол φ не мал, величины Q_φ и V , обладая таким же колебательным характером, как и функция (f), с увеличением расстояния от края оболочки быстро затухают. Так как значение параметра β в случае тонкой оболочки велико, то производная функция (f) будет велика в сравнении с самой функцией, вторая же ее производная будет велика в сравнении с первой производной. Это говорит о том, что, пренебрегая в левой части уравнений (g) членами, содержащими функции Q_φ и V и их первые производные, можно все же достигнуть удовлетворительного приближения; уравнения (g) допустимо поэтому заменить следующей упрощенной системой уравнений²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} &= EhV, \\ \frac{d^2 V}{d\varphi^2} &= -\frac{a^2}{D} Q_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Исключая из этих уравнений V , получаем

$$\frac{d^4 Q_\varphi}{d\varphi^4} + 4\lambda^4 Q_\varphi = 0, \quad (i)$$

где

$$\lambda^4 = 3(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2. \quad (j)$$

Общим решением этого уравнения будет

$$Q_\varphi = C_1 e^{\lambda\varphi} \cos \lambda\varphi + C_2 e^{\lambda\varphi} \sin \lambda\varphi + C_3 e^{-\lambda\varphi} \cos \lambda\varphi + C_4 e^{-\lambda\varphi} \sin \lambda\varphi. \quad (k)$$

¹⁾ Этот метод был предложен Геккелером (G e c k e l e r I. W., Forschungsarbeiten, № 276, Берлин, 1926), а также Штаерманом И. Я., Бюллетень Киевского Политехн. ин-та, 1924; обобщение его см. Работнов Ю. Н., Доклады АН СССР, Новая серия, т. 47, стр. 329, 1945.

²⁾ Это упрощение задачи эквивалентно замене примыкающей к краю части оболочки касательной к ней конической оболочки и применению к этой конической оболочке уравнения, выведенного для круглого цилиндра (§ 114). См. Meissner E., A. Stodola-Festschrift, стр. 406, Цюрих, 1929.

Если у нас имеется оболочка без отверстия на полюсе (рис. 271, а), изгибаемая силами и моментами, равномерно распределенными по краю, то из общего решения (к) нам нужно принять во внимание лишь два первых члена, уменьшающихся с уменьшением угла φ . В таком случае

$$Q_\varphi = C_1 e^{\lambda\varphi} \cos \lambda\varphi + C_2 e^{\lambda\varphi} \sin \lambda\varphi. \quad (1)$$

Две постоянные C_1 и C_2 нужно будет определить в каждом частном случае из условий на крае ($\varphi = \alpha$). При оперировании с граничными условиями выгодно ввести угол $\psi = \alpha - \varphi$ (рис. 271). Подставив в выражение (1) вместо φ разность $\alpha - \psi$ и введя новые постоянные интегрирования C и γ , мы сможем представить решение (1) в виде

$$Q_\varphi = C e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi + \gamma). \quad (m)$$

Пользуясь теперь уравнениями (b), (c) и (d) из § 128, находим

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= -Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi = \\ &= -\operatorname{ctg}(\alpha - \psi) C e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi + \gamma), \\ N_\theta &= -\frac{dQ_\varphi}{d\varphi} = -\lambda \sqrt{2} \times \\ &\times C e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi + \gamma - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (323)$$

Первое из уравнений (h) дает нам выражение для угла поворота

$$V = \frac{1}{Eh} \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} = -\frac{2\lambda^2}{Eh} C e^{-\lambda\psi} \cos(\lambda\psi + \gamma). \quad (324)$$

Изгибающий момент можно определить из уравнений (q) предыдущего параграфа. Пренебрегая в этих уравнениях членами, содержащими V , находим

$$\left. \begin{aligned} M_\varphi &= -\frac{D}{a} \frac{dV}{d\varphi} = \frac{a}{\lambda \sqrt{2}} C e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi + \gamma + \frac{\pi}{4}\right), \\ M_\theta &= \nu M_\varphi = \frac{\nu a}{\lambda \sqrt{2}} C e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi + \gamma + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (325)$$

Наконец, из уравнения (r) предыдущего параграфа определяем горизонтальный компонент смещения

$$\delta \approx -\frac{\sin \varphi}{Eh} \frac{dU}{d\varphi} = -\frac{a}{Eh} \sin(\alpha - \psi) \lambda \sqrt{2} C e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi + \gamma - \frac{\pi}{4}\right). \quad (326)$$

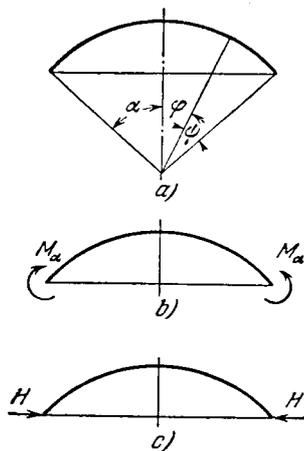


Рис. 271.

С помощью формул (323)—(326) мы легко можем справиться с любым частным случаем.

Возьмем для примера случай, изображенный на рис. 271, *b*. Граничные условия будут

$$(M_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = M_{\alpha}, \quad (N_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0. \quad (\text{п})$$

Подстановка $\psi = 0$ в первое из уравнений (323) убеждает нас в том, что второе из граничных условий (п) удовлетворится, если мы приравняем постоянную γ нулю. При подстановке $\gamma = 0$ и $\psi = 0$ в первое из уравнений (325) обнаруживается, что первое из условий (п) будет удовлетворено, если мы положим

$$M_{\alpha} = \frac{a}{2\lambda} C,$$

что дает

$$C = \frac{M_{\alpha} 2\lambda}{a}.$$

Подставив определенные таким путем значения постоянных γ и C в выражения (324) и (326) и положив $\psi = 0$, найдем поворот и горизонтальное смещение края

$$(V)_{\psi=0} = -\frac{4\lambda^3 M_{\alpha}}{Eah}, \quad (\delta)_{\psi=0} = \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} M_{\alpha}. \quad (327)$$

Для случая, представленного на рис. 271, *c*, граничные условия будут

$$(M_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = 0, \quad (N_{\varphi})_{\varphi=\alpha} = -H \cos \alpha. \quad (\text{о})$$

Чтобы удовлетворить первому из этих условий, мы должны положить $\gamma = -\pi/4$; чтобы удовлетворить второму граничному условию, воспользуемся первым из уравнений (323), которое даст

$$-H \cos \alpha = C \operatorname{ctg} \alpha \sin \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда определяем

$$C = -\frac{2H \sin \alpha}{\sqrt{2}}.$$

Внеся значения постоянных γ и C в уравнения (324) и (326), находим

$$\left. \begin{aligned} (V)_{\psi=0} &= \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} H, \\ (\delta)_{\psi=0} &= -\frac{2\lambda \sin^2 \alpha}{Eh} H. \end{aligned} \right\} \quad (328)$$

Мы видим, что коэффициент при M_{α} во второй из формул (327)— тот же самый, что и коэффициент при H в первой из формул (328). Это должно было следовать непосредственно из теоремы о взаимности.

Формулам (327) и (328) можно непосредственно пользоваться при решении разного рода частных задач. Рассмотрим, например, случай сферической оболочки, защемленной по краям, подвергающейся действию равномерного нормального давления p (рис. 272, *a*). Решая сначала соответствующую мембранную задачу (рис. 272, *b*), найдем, что равномерное сжимающее усилие в оболочке будет равно

$$N_{\varphi} = N_{\theta} = -\frac{pa}{2}.$$

Край такой оболочки не будет подвергаться повороту, горизонтальное же его смещение выразится величиной

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{a \sin \alpha}{Eh} (N_{\theta} - \nu N_{\varphi}) = \\ &= -\frac{pa^2(1-\nu)}{2Eh} \sin \alpha. \quad (p) \end{aligned}$$

Чтобы прийти к решению нашей задачи, на мембранные силы (рис. 272, *b*) налагаем силы и моменты, равномерно распределенные по краю, как на рис. 272, *c*. Эти силы и моменты такой величины, что соответствующее им горизонтальное смещение равно по величине и противоположно по знаку смещению (p); соответствующий же им поворот края равен нулю. Таким путем из формул (327) и (328) мы получаем следующие уравнения для определения M_{α} и H :

$$\begin{aligned} -\frac{4\lambda^3}{Eah} M_{\alpha} + \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} H &= 0, \\ \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} M_{\alpha} - \frac{2a\lambda \sin^2 \alpha}{Eh} H &= \frac{pa^2(1-\nu)}{2Eh} \sin \alpha, \end{aligned}$$

из которых находим

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha} &= -\frac{pa^2(1-\nu)}{4\lambda^2} = -\frac{pah}{4} \sqrt{\frac{1-\nu}{3(1+\nu)}}, \\ H &= \frac{2\lambda}{a \sin \alpha} M_{\alpha} = -\frac{pa(1-\nu)}{2\lambda \sin \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (q)$$

Отрицательные знаки указывают на то, что направления M_{α} и H противоположны указанным на рис. 271.

Приближенные уравнения (h) были получены путем отбрасывания неизвестных функций Q_{φ} и V и их первых производных из точных уравнений (g). Лучшего приближения можно достигнуть, если ввести новые переменные¹⁾

$$Q_1 = Q_{\varphi} \sqrt{\sin \varphi}, \quad V_1 = V \sqrt{\sin \varphi}.$$

¹⁾ Это то же самое преобразование, которое было применено и О. Блюменталем. См. уравнение (a), стр. 602.

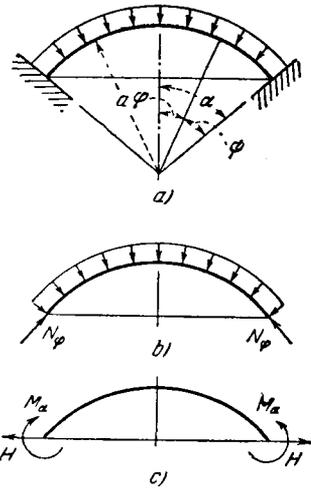


Рис. 272.

Подставив

$$Q_\varphi = \frac{Q_1}{\sqrt{\sin \varphi}}, \quad V = \frac{V_1}{\sqrt{\sin \varphi}}$$

в уравнения (g), найдем, что члены, содержащие первые производные от Q_1 и V_1 , обращаются в нуль. Чтобы получить поэтому упрощенную систему уравнений, аналогичную уравнениям (h), нам следует лишь пренебречь членами, содержащими величины Q_1 и V_1 , как малыми в сравнении с членами, содержащими вторые производные от тех же самых величин. Это дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1}{d\varphi^2} &= EhV_1, \\ \frac{d^2 V_1}{d\varphi^2} &= -\frac{a^2}{D} Q_1. \end{aligned}$$

Эти уравнения решаются точно таким же способом, как и уравнения (h). Возвращаясь к первоначальным переменным Q_φ и V , мы получим тогда вместо выражений (m) и (324) следующие решения ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} Q_\varphi &= C \frac{e^{-\lambda\psi}}{\sqrt{\sin(\alpha-\psi)}} \sin(\lambda\psi + \gamma), \\ V &= -\frac{2\lambda^2}{Eh} C \frac{e^{-\lambda\psi}}{\sqrt{\sin(\alpha-\psi)}} \cos(\lambda\psi + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (329)$$

Поступая теперь в точности так же, как и в нашем предшествующем изложении, получаем вместо формул (323), (325) и (326) следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= -\operatorname{ctg}(\alpha-\psi) C \frac{e^{-\lambda\psi}}{\sqrt{\sin(\alpha-\psi)}} \sin(\lambda\psi + \gamma), \\ N_\theta &= C \frac{\lambda e^{-\lambda\psi}}{2\sqrt{\sin(\alpha-\psi)}} [2\cos(\lambda\psi + \gamma) - (k_1 + k_2) \sin(\lambda\psi + \gamma)], \\ M_\varphi &= \frac{a}{2\lambda} C \frac{e^{-\lambda\psi}}{\sqrt{\sin(\alpha-\psi)}} [k_1 \cos(\lambda\psi + \gamma) + \sin(\lambda\psi + \gamma)], \\ M_\theta &= \frac{a}{4\lambda} C \frac{e^{-\lambda\psi}}{\sqrt{\sin(\alpha-\psi)}} \{ [(1+\nu^2)(k_1 + k_2) - 2k_2] \cos(\lambda\psi + \gamma) + \\ &\quad + 2\nu^2 \sin(\lambda\psi + \gamma) \}, \\ \delta &= \frac{a \sin(\alpha-\psi)}{Eh} C \frac{\lambda e^{-\lambda\psi}}{\sqrt{\sin(\alpha-\psi)}} [\cos(\lambda\psi + \gamma) - k_2 \sin(\lambda\psi + \gamma)], \end{aligned} \right\} \quad (330)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 - \frac{1-2\nu}{2\lambda} \operatorname{ctg}(\alpha-\psi), \\ k_2 &= 1 - \frac{1+2\nu}{2\lambda} \operatorname{ctg}(\alpha-\psi). \end{aligned}$$

¹⁾ Это более точное приближение было получено Хетени (Hetenyi M., Pub. Intern. Assoc. Bridge Struct. Eng., т. 5, стр. 173, 1938). Приводимый ниже численный пример заимствован из названной работы.

Применяя формулы (330) к ранее разобранным и представленным на рис. 271, *b* и 271, *c* частным случаям, получим вместо формул (327) и (328) следующие более точные приближения:

$$(V)_{\psi=0} = -\frac{4\lambda^3 M_\alpha}{Eahk_1}, \quad (\delta)_{\psi=0} = \frac{2\lambda^2 \sin^2 \alpha}{Ehk_1} M_\alpha, \quad (331)$$

$$(V)_{\psi=0} = \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Ehk_1} H, \quad (\delta)_{\psi=0} = -\frac{\lambda a \sin^2 \alpha}{Eh} \left(k_2 + \frac{1}{k_1} \right) H. \quad (332)$$

Применяя эти формулы к частному случаю, представленному на рис. 272 *a*, мы легко получим вторые приближения для опорных моментов M_α и сил реакций H .

Чтобы сравнить первое и второе приближения с точным решением, рассмотрим численный пример, в котором $a = 2280$ мм, $h = 76$ мм, $\alpha = 35^\circ$, $p = 0,07$ кг/см² и $\nu = 1/6$. Первое и второе приближения для M_φ были вычислены с помощью первого из уравнений (325) и третьего из уравнений (330).

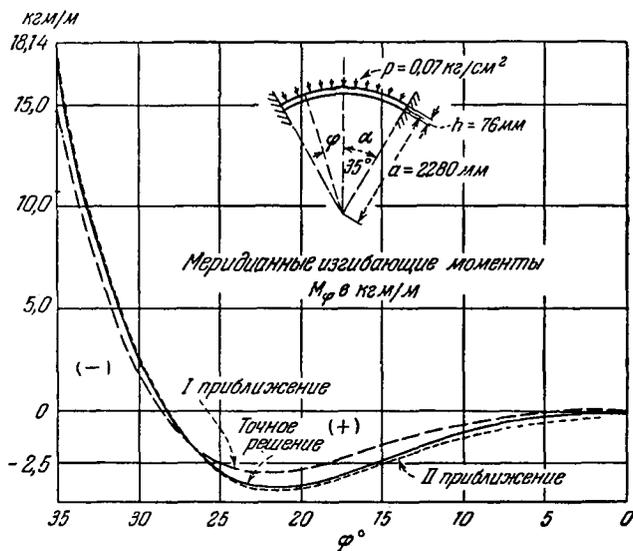


Рис. 273.

Они представлены на рис. 273 штриховыми линиями. Для сравнения посредством рядов предыдущего параграфа было вычислено также и точное решение¹⁾, представленное на рис. 273 сплошной линией. На рис. 274 показана сила N_φ , вычисленная для того же частного примера. Оба эти графика убеждают нас в том, что второе приближение характеризуется весьма удовлетворительной точностью. Заметив, что в нашем примере отношение a/h

¹⁾ Для того чтобы получить в этом случае достаточную точность, потребовалось принять в расчет 10 членов ряда.

равно всего лишь 30, угол же $\alpha = 35^\circ$ сравнительно мал, мы имеем право заключить, что применение второго приближения вполне допустимо

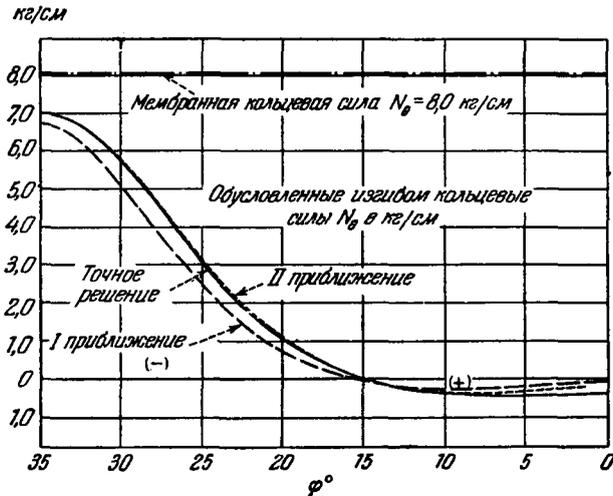


Рис. 274.

с точки зрения требований точности в большинстве случаев, встречающихся в современной инженерной практике ¹⁾.

131. Сферическая оболочка с опорным кольцом. Чтобы несколько уменьшить влияние распирающего действия купола на несущую конструкцию (рис. 275, а и 276, а), иногда применяется кольцевая балка, опертая либо непрерывно по всей своей длине, либо в конечном числе точек. Вертикальными прогибами такой балки в нижеследующем анализе можно будет пренебречь.

Рассмотрим условия по краю $\varphi = \alpha$ купола, несущего какую-либо сплошную симметричную нагрузку. Вызванные этой нагрузкой мембранные силы

¹⁾ Случай, когда угол α мал и решение (329) недостаточно точно, рассмотрен Геккелером (Gesckeler I. W., Ingr.-Arch., т. 1, стр. 255, 1930). Пастернак решил ту же самую задачу с помощью уравнений в конечных разностях (Pasternak P., Z. angew. Math. Mech., т. 6, стр. 1, 1926). Исследование оболочки из анизотропного материала выполнено Штаерманом (Steierman E., Z. angew. Math. Mech., т. 6, стр. 4, 1925). Споттс (Spotts M. F., J. Appl. Mech., Trans. A. S. M. E., т. 61, 1939), а также Тельке (Tölke F., Ingr.-Arch., т. 9, стр. 282, 1938) решили частную задачу о сферической оболочке переменной толщины. Вопрос о влиянии сосредоточенных нагрузок см. Martin F., Ingr.-Arch., т. 17, стр. 107, 1949, и ниже, § 132. Вопросы, связанные с несимметричной деформацией сферической оболочки, разбираются у Хаверса (Havers A., Ingr.-Arch., т. 6, стр. 282, 1935). В более общей постановке эта же задача в связи с расчетом напряжений в сферическом куполе, опирающемся на колонны, освещена Якобсоном (Aas-Jakobsen A., Ingr.-Arch., т. 8, стр. 275, 1937).

N_φ , N_θ повлекут за собой в согласии с уравнением (г) (стр. 558) приращение радиуса $r_0 = a \sin \alpha$ на величину

$$\delta_0 = \frac{r_0}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi)_{\varphi=\alpha} \quad (a)$$

Это перемещение будет сопровождаться поворотом касательной к контуру оболочки у ее края

$$V_0 = \frac{1}{a} \left(\nu + \frac{d\omega}{d\varphi} \right)_{\varphi=\alpha} = \frac{1}{Eh} \left[\operatorname{ctg} \varphi (1 + \nu) (N_\varphi - N_\theta) - \frac{d}{d\varphi} (N_\theta - \nu N_\varphi) \right]_{\varphi=\alpha} \quad (b)$$

в согласии с результатами, полученными на стр. 552, и появлением распора

$$H_0 = -\cos \alpha (N_\varphi)_{\varphi=\alpha} \quad (c)$$

Соответствующая ему растягивающая сила в кольце будет равна $H_0 r_0$, а удлинение $\epsilon_\theta = \frac{H_0 r_0}{Ebd}$, где E — модуль упругости для материала кольца.

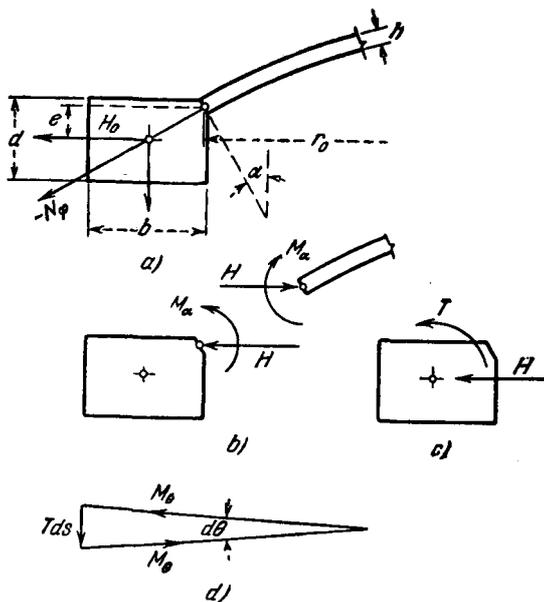


Рис. 275.

Приращение радиуса r_0 в результате действия распора H определится величиной

$$\delta_1 = \epsilon_\theta r_0 = \frac{H_0 r_0^2}{Ebd} \quad (d)$$

С тем чтобы привести в соответствие деформацию оболочки с деформацией кольца, приложим по их контурам равномерно распределенные пары

интенсивностью M_α и радиальные силы интенсивностью H (рис. 275, б). Пользуясь результатами (327) и (328), получаем следующие выражения для горизонтального перемещения края и поворотов V :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} M_\alpha - \frac{2a\lambda \sin^2 \alpha}{Eh} H, \\ V &= -\frac{4\lambda^3}{Eha} M_\alpha + \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} H, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

где

$$\lambda^4 = 3(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2.$$

Действие M_α и H на кольцо статически эквивалентно совместному действию опрокидывающих пар

$$T = M_\alpha + He \quad (f)$$

и сил H , приложенных на уровне центра тяжести поперечного сечения кольца (рис. 275, с). Эти последние, как это следует из уравнения (d), производят радиальное перемещение кольца, равное

$$\delta_2 = \frac{Hr_0^2}{Ebd}, \quad (g)$$

но без его вращения.

Остается учесть деформацию кольца, вызванную моментами T . Элемент кольца длиной $ds = r_0 d\theta$ поддерживается в равновесии действием опрокидывающего момента $T ds$ и двумя изгибающими моментами $M_\theta = T ds/d\theta = Tr_0$ (см. рис. 275, d, где все три момента представлены эквивалентными векторами). Поэтому максимальное окружное напряжение в кольце, обусловленное моментами T , выразится как

$$\sigma = \pm \frac{6M_\theta}{bd^2} = \pm \frac{6Tr_0}{bd^2}.$$

Соответствующие относительные удлинения крайних — верхнего и нижнего — волокон кольца будут равны соответственно $\epsilon = \pm 6Tr_0/Ebd^2$. Отсюда угол поворота поперечного сечения кольца выразится в виде

$$V_2 = \frac{2r_0}{d} |\epsilon| = \frac{12Tr_0^2}{Ebd^3} = \frac{12r_0^2}{Ebd^3} (M_\alpha + He), \quad (h)$$

где $|\epsilon|$ обозначает абсолютное значение наибольшего относительного удлинения.

Но полное горизонтальное перемещение края оболочки должно быть равно полному горизонтальному перемещению кольца; то же равенство должно иметь место и для угловых деформаций. Приходим к следующим зависимостям:

$$\delta_0 + \delta = \delta_1 + \delta_2 + V_2e, \quad (i)$$

$$V_0 + V = V_2; \quad (j)$$

здесь V_2e представляет влияние вращения на радиальное смещение кольца на уровне края оболочки. После подстановки выражений (a) — (h) для смещений и углов поворотов в (i) и (j) получаем два линейных уравнения для

выполненное по указанному выше способу, приводит к следующим значениям краевых сил¹⁾:

$$M_\alpha = -0,11 \text{ т.м/м},$$

$$H = -0,170 \text{ т/м}.$$

Соответствующие значения изгибающего момента M_ϕ показаны на рис. 276, б.

Выше, при определении эффекта краевых сил мы воспользовались упрощенным дифференциальным уравнением (i) § 130. Но ход рассуждений и вычислительная процедура остаются по существу неизменными, если исходить из более точного дифференциального уравнения.

132. Симметричный изгиб пологой сферической оболочки. Пусть срединная поверхность сферической оболочки (рис. 277, а) задана уравнением

$$z = \sqrt{a^2 - r^2} - (a - z_0). \quad (а)$$

Так как мы имеем дело с «пологой» сферической оболочкой, то положим

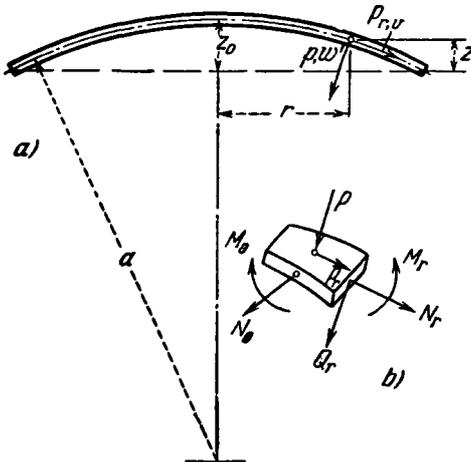


Рис. 277.

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \approx -\frac{r}{a}$$

и примем для симметричного²⁾ распределения нагрузки в качестве единственной независимой переменной радиус r (рис. 277, а). Дифференциальные уравнения равновесия (312) принимают тогда вид

$$\frac{d(rN_r)}{dr} - N_\theta - \frac{r}{a} Q_r + rp_r = 0, \quad (б)$$

$$\frac{d(rQ_r)}{dr} + \frac{r}{a} (N_r + N_\theta) + rp = 0, \quad (в)$$

$$\frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta - rQ_r = 0, \quad (г)$$

где p и p_r обозначают интенсивность нагрузки соответственно в нормальном и в меридианном направлениях. Соотношения между результирующими напряжениями, компонентами деформации и смещениями w и v (в направле-

¹⁾ С подробностями вычисления можно ознакомиться у Гиркманна (Girkmann K., *Flächentragwerke*, 4-е изд., стр. 442, Вена, 1956). Рис. 276, б воспроизведен здесь с любезного разрешения К. Гиркманна и издательства Ю. Шпрингера (Вена).

²⁾ Общая теория пологой сферической оболочки, построенная Э. Рейснером, свободна от этого ограничения; см. *J. Math. and Phys.*, т. 25, стр. 80, 1946; т. 25, стр. 279, 1947.

ниях p и p_r) формулируются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{Eh} (N_r - \nu N_\theta) = \frac{dv}{dr} - \frac{w}{a}, \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{Eh} (N_\theta - \nu N_r) = \frac{v}{r} - \frac{w}{a}, \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D (\chi_r + \nu \chi_\theta) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ M_\theta &= -D (\chi_\theta + \nu \chi_r) = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (g)$$

Учтем теперь то обстоятельство, что в случае пологой оболочки влиянием перерезывающей силы Q_r на мембранные силы в уравнении (b) допустимо пренебречь. Предположим, далее, что грузовой член p_r может быть представлен производной от возможной нагрузки Ω , т. е. что $p_r = -d\Omega/dr$. Тогда условиями, для того чтобы удовлетворялось уравнение (b), будут зависимости

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \Omega, \\ N_\theta &= \frac{d^2 F}{dr^2} + \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

где F — функция напряжений. Легко также установить, что соотношения (e) между компонентами деформации и перемещения удовлетворяют уравнению совместности

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\epsilon_\theta}{dr} \right) - \frac{1}{r} \frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{1}{a} \Delta w = 0, \quad (i)$$

в котором $\Delta = d^2/dr^2 + (1/r)(d/dr)$.

Сопоставляя уравнения (e) и (i), приходим к нижеследующему фундаментальному уравнению для F и w :

$$\Delta \Delta F + \frac{Eh}{a} \Delta w = -(1-\nu) \Delta \Omega. \quad (j)$$

Для получения второго фундаментального соотношения между теми же функциями подставим Q_r из (d) в уравнение (c). Находим

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{d(rM_r)}{dr} - M_\theta \right] + \frac{r}{a} (N_r + N_\theta) + rp = 0. \quad (k)$$

Введем теперь выражения (f) и (h) в уравнение (k), выполнив надлежащие упрощения:

$$\Delta \Delta w - \frac{1}{Da} \Delta F = \frac{p}{D} + \frac{2\Omega}{Da}. \quad (l)$$

Наконец, запишем выражения для вертикальной перерезывающей силы Q_r и для горизонтального перемещения δ ; оба они пригодятся в формулировке граничных условий оболочки

$$Q_v = Q_r + \frac{r}{a} N_r, \quad \delta = v - \frac{r}{a} w. \quad (m)$$

Выражение для перерезывающей силы

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} (\Delta w) \quad (n)$$

имеет здесь тот же вид, что и в теории пластинок.

В случае $p = Q = 0$ интегрирование системы уравнений (j) и (l) можно выполнить путем умножения уравнения (j) на множитель $-\lambda$ и суммирования результата с уравнением (l). Это дает

$$\Delta \Delta (w - \lambda F) - \lambda \left(\frac{Eh}{a} \right) \Delta \left(w + \frac{F}{\alpha h DE} \right) = 0. \quad (o)$$

Из (o) получаем уравнение для одиночной функции $w - \lambda F$, положив $\lambda = -1/\lambda h DE$, т. е.

$$\lambda = \frac{i}{Eh^2} \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad (p)$$

где $i = \sqrt{-1}$. Введем также характеристическую длину l , определив ее отношением $\lambda Eh/a = i/l^2$, так что

$$l = \frac{\sqrt{ah}}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}. \quad (q)$$

Дифференциальное уравнение (o) принимает тогда вид

$$\Delta \Delta (w - \lambda F) - \frac{i}{l^2} \Delta (w - \lambda F) = 0. \quad (r)$$

Положив, далее

$$w - \lambda F = \Phi + \Psi, \quad (s)$$

находим Φ и Ψ как общее решение уравнений

$$\Delta \Phi = 0, \quad \Delta \Psi - \left(\frac{\sqrt{i}}{l} \right)^2 \Psi = 0. \quad (t)$$

Соответствующие решения принимают вид

$$\Phi = A_1 + A_2 \ln x, \quad (u)$$

$$\Psi = A_3 [\psi_1(x) + i\psi_2(x)] + A_4 [\psi_4(x) + i\psi_3(x)], \quad (v)$$

где

$$x = \frac{r}{l}. \quad (w)$$

A_n — произвольные комплексные постоянные, а $\psi_1(x), \dots, \psi_4(x)$ — функции, определенные на стр. 540 и табулированные в таблице 86. Используя решения (u) и (v) вместе с группой вещественных постоянных C_n и разделив затем, после подстановки, в уравнении (s) вещественную и мнимую части, мы приходим к следующим общим выражениям для нормального прогиба w и функции напряжений¹⁾ F :

$$w = C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) + C_3 \psi_3(x) + C_4 \psi_4(x) + C_5, \quad (x)$$

$$F = -\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} [-C_1 \psi_2(x) + C_2 \psi_1(x) - C_3 \psi_4(x) + C_4 \psi_3(x) + C_6 \ln x]. \quad (y)$$

¹⁾ Можно показать, что член $C_7 \ln x$ следует опустить в выражении (x), постоянным же членом C_8 можно пренебречь как малым в выражении (y).

Оценить значение этих результатов можно хотя бы на примере пологой оболочки очень большого радиуса, подвергающейся действию сосредоточенной силы P , приложенной в вершине $r = 0$.

Прежде всего здесь должно удовлетворяться очевидное условие

$$Q_v = -\frac{P}{2\pi r} = -\frac{P}{2\pi l x}, \quad (2)$$

между тем как w , dw/dr , N_r и N_θ должны принимать конечные значения для $r = 0$, а w , M_r , M_θ обращаться в нуль для $r = \infty$. Вводя первое из выражений (м), чтобы удовлетворить уравнению (2), находим

$$C_0 = \frac{Pa}{2\pi} \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2},$$

для остальных же постоянных получаем

$$C_4 = 0, \quad C_3 = \frac{\pi}{2} C_0,$$

$$C_1 = C_2 = C_5 = 0.$$

Окончательно

$$w = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \frac{Pa}{Eh^2} \psi_3(x),$$

$$F = \frac{Pa}{4} \left[\psi_4(x) - \frac{2}{\pi} \ln x \right].$$

Поскольку $\psi_3(0) = 0,5$ для прогиба оболочки в точке приложения нагрузки, находим

$$w_0 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4} \frac{Pa}{Eh^2}.$$

Распределения мембранных напряжений $\sigma_r = N_r/h$ и $\sigma_\theta = N_\theta/h$, а также напряжений изгиба $\sigma'_r = \mp 6M_r/h^2$ и $\sigma'_\theta = \mp 6M_\theta/h^2$ по верхней поверхности оболочки (для нее указаны верхние знаки) нанесены в виде эпюр на рис. 278.

Если центральная нагрузка P распределена равномерно по площади круга малого радиуса c , то для центра загруженной площади $r = 0$ имеют место следующие результаты:

$$w_0 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi} \frac{Pa}{Eh^2} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{\pi}{2\mu} \psi'_4(\mu) \right],$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi} \frac{P}{h^2} \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{\pi}{2\mu} \psi'_4(\mu) \right],$$

$$\sigma'_r = \sigma'_\theta = \pm \frac{3(1+\nu)}{2} \frac{P}{h^2} \frac{\psi'_3(\mu)}{\mu},$$

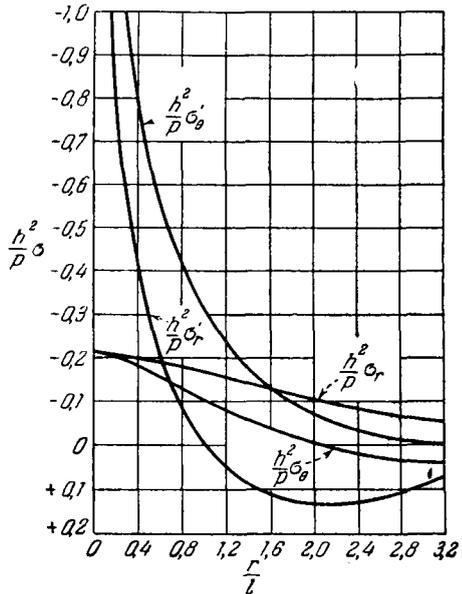


Рис. 278.

где

$$\mu = \frac{c}{l} = \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \frac{c}{\sqrt{ah}}.$$

Так как выражения (x) и (y) содержат всего шесть произвольных постоянных, то все симметричные условия в центре и по внешнему контуру оболочки могут быть выполнены.

Следует обратить внимание также на то, что в отношении изгиба полая сферическая оболочка ведет себя сходно с пластинкой на упругом основании. Лишь характеристическая длина выражается на этот раз уравнением (q), вместо выражения (a), указанного на стр. 291 для пластинки. Поэтому, если l , будучи определена уравнением (q), оказывается малой в сравнении с радиусом контура, то этот случай следует считать эквивалентным случаю пластинки на весьма жестком основании. Прогобы и изгибающие моменты в центре такой оболочки лишь в ничтожной степени зависят от условий на внешнем контуре, влияющих на состояние только краевой зоны оболочки¹⁾.

133. Коническая оболочка. Для того чтобы применить общие уравнения § 128 к частному случаю конической оболочки (рис. 279, a), введем вместо переменной φ новую переменную y , определяющую расстояние от вершины конуса. Длина бесконечно малого элемента меридиана будет теперь не $r_1 d\varphi$, как раньше, а dy . В связи с этим преобразованием переменных нам потребуется произвести следующие преобразования производных по φ :

$$\frac{d}{d\varphi} = r_1 \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(r_1 \frac{d}{dy} \right) = r_1^2 \frac{d^2}{dy^2} + \frac{dr_1}{d\varphi} \frac{d}{dy}.$$

Преобразуется при этом и оператор (i) из § 128

$$L(\dots) = r_2 \frac{d^2(\dots)}{dy^2} + \left(\frac{dr_2}{dy} + \frac{r_2}{r_1} \operatorname{ctg} \varphi \right) \frac{d(\dots)}{dy} - \frac{1}{r_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi (\dots). \quad (a)$$

Заметив, что для конуса угол φ постоянен, и обозначив угол $\pi/2 - \varphi$ через α (рис. 279), получим

$$r_2 = y \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{dr_2}{dy} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Внеся эти выражения в (a) и положив $r_1 = \infty$, получим для оператора $L(\dots)$ такую форму:

$$L(\dots) = \operatorname{tg} \alpha \left[y \frac{d^2(\dots)}{dy^2} + \frac{d(\dots)}{dy} - \frac{1}{y} (\dots) \right].$$

¹⁾ О деформациях нерастяжимой полой упругой оболочки см. Johnson M. W., Reissner E., J. Math. and Phys., т. 34, стр. 335; особые решения были рассмотрены В. Флюгге и Д. Конрадом (Flügge W., Conrad D. A., Stanford Univ. Tech. Rept., 101, 1956); отдельные результаты были получены уже Геккелером (Geckeler J. W., Ingr.-Arch., т. 1, стр. 255, 1930). Общие дифференциальные уравнения для имеющих начальную кривизну пластинок (пологих оболочек) были установлены Маргерром (Marguerre K., Proc. V Intern. Congr. Appl. Mech., 1938, стр. 93). Изгиб пологих линейчатых оболочек см. Graves G. Ae., Österr. Ingr.-Arch., т. 11, стр. 264, 1957. Нелинейный изгиб пологих сферических оболочек: Simons R. M., J. Math. and Phys., т. 35, стр. 164, 1956. Изгиб пологих геликоидальных оболочек: Reissner E., Appl. Mech., т. 22, стр. 31, 1955. Геликоидальным оболочкам посвящены также работы: Malcor R., Travaux, т. 32, стр. 605, декабрь 1948, а также Соломои Л., Прикл. мат. мех., т. 18, стр. 43, 1954. Теория пологих оболочек излагается у Власова В. З., Общая теория оболочек и ее приложения в технике, Гостехиздат, Москва, 1949.

Уравнения (321) из § 128 примут тогда следующий вид:

$$\operatorname{tg} \alpha \left(y \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - \frac{U}{y} \right) \pm i\mu^2 U = 0$$

или при $U = r_2 Q_\varphi = y \operatorname{tg} \alpha Q_y$ ¹⁾

$$y \frac{d^2 (yQ_y)}{dy^2} + \frac{d(yQ_y)}{dy} - Q_y \pm \frac{i\mu^2 y Q_y}{\operatorname{tg} \alpha} = 0.$$

Воспользовавшись обозначением (j) из § 128 и введя новое обозначение

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= \frac{\mu^4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{Eh}{D} \operatorname{ctg}^2 \alpha = \\ &= \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad (b) \end{aligned}$$

получим наконец

$$y \frac{d^2 (yQ_y)}{dy^2} + \frac{d(yQ_y)}{dy} - Q_y \pm i\lambda^2 y Q_y = 0. \quad (c)$$

Обратившись к первому из этих уравнений, преобразуем его путем введения вместо y новой переменной

$$\eta = 2\lambda \sqrt{i} \sqrt{y} \quad (d)$$

в известное уравнение Бесселя. Это нам даст

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (yQ_y)}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d(yQ_y)}{d\eta} + \\ + \left(1 - \frac{4}{\eta^2}\right) (yQ_y) = 0. \quad (e) \end{aligned}$$

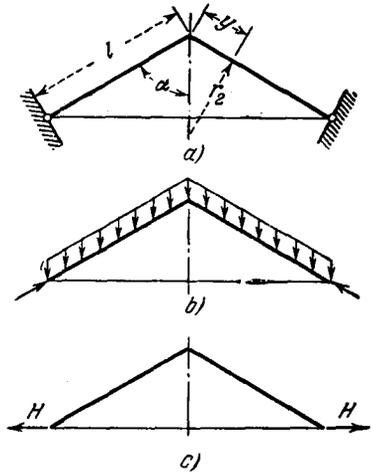


Рис. 279.

Подобное уравнение нам уже встречалось при исследовании цилиндрической оболочки переменной толщины (§ 118). Введенные там функции ψ_1, \dots, ψ_4 , численные значения которых даны в таблице 86, могут быть применены и в настоящем случае. Поэтому общее решение для yQ_y , удовлетворяющее обоим уравнениям (c), можно представить в таком виде ²⁾:

$$\begin{aligned} yQ_y = C_1 \left[\psi_1(\xi) + \frac{2}{\xi} \psi_2'(\xi) \right] + C_2 \left[\psi_2(\xi) - \frac{2}{\xi} \psi_1'(\xi) \right] + \\ + C_3 \left[\psi_3(\xi) + \frac{2}{\xi} \psi_4'(\xi) \right] + C_4 \left[\psi_4(\xi) - \frac{2}{\xi} \psi_3'(\xi) \right], \quad (f) \end{aligned}$$

¹⁾ В дальнейшем изложении теории конической оболочки вместо φ будет употребляться индекс y .

²⁾ Весьма полное исследование конической оболочки имеется в докторской диссертации Дюбуа (Dubois F., Über die Festigkeit der Kegelschale, Цюрих, 1917). В этой работе разбирается также ряд численных примеров и приводятся кривые, иллюстрирующие распределение напряжений в конической оболочке для различных значений угла при вершине. Случай произвольной нагрузки был рассмотрен Хоффом (Hoff N. J., J. Appl. Mech., т. 22, стр. 557, 1955); вопрос же температурных напряжений освещается в работе: Huth J. H., J. aeronaut. sci., т. 20, стр. 613, 1953.

где $\xi = 2\lambda\sqrt{y}$, а значки ' обозначают производные по ξ . Из нашего предыдущего изложения и из значений таблицы 8б нам известно, что функции ψ_1 и ψ_2 , равно как и их производные ψ'_1 и ψ'_2 , обладают колебательным характером, причем колебания их быстро затухают по мере уменьшения расстояния y . Этими функциями и следует воспользоваться при исследовании изгиба конической оболочки, вызванного силами и моментами, равномерно распределенными по краю $y = l$. Функции ψ_3 и ψ_4 с их производными также имеют колебательный характер, но их колебания с уменьшением расстояния y возрастают. Поэтому, если мы имеем дело с полным конусом, то третий и четвертый члены в решении (f), содержащие эти функции и их производные, должны быть отброшены. Остающиеся при этом две постоянные C_1 и C_2 определяются в каждом частном случае из граничных условий у торца $y = l$.

Оболочка в форме усеченного конуса ограничивается верхним и нижним торцами, и для того чтобы удовлетворить всем условиям на обоих этих торцах, нам нужно будет в общем решении (f) принять во внимание все четыре переменные C_1, \dots, C_4 . Подсчеты показывают, что для применяемых обычно в технике тонких оболочек и для значений угла α , достаточно далеких от $\pi/2$, силы и моменты, приложенные на одном торце, оказывают лишь малое влияние на напряжения и смещения у другого торца¹⁾. Это обстоятельство упрощает задачу, поскольку мы и здесь получаем право ограничиться в нашем решении лишь двумя постоянными. Рассматривая условия нижнего края оболочки, мы принимаем во внимание лишь те члены интеграла (f), в которые входят постоянные C_1 и C_2 , рассматривая же условия верхнего края, — члены с постоянными C_3 и C_4 .

Чтобы определить эти постоянные в каждом частном случае, нам нужны выражения для угла поворота V , для сил N_y и N_θ и для моментов M_y , M_θ . Из уравнений (c) и (d) § 128 имеем

$$\left. \begin{aligned} N_y &= -Q_y \operatorname{tg} \alpha, \\ N_\theta &= -\frac{dU}{dy} = -\frac{d(r_2 Q_y)}{dy} = -\frac{d(y Q_y)}{dy} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Первое из уравнений (317) дает угол поворота

$$V = \frac{1}{Eh} L(U) = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{Eh} \left[y \frac{d^2(y Q_y)}{dy^2} + \frac{d(y Q_y)}{dy} - Q_y \right]. \quad (h)$$

Изгибающие моменты в соответствии с формулами (314) будут

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -D \left(\frac{dV}{dy} + \frac{\nu}{y} V \right), \\ M_\theta &= -D \left(\frac{V}{y} + \nu \frac{dV}{dy} \right). \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Путем подстановки $y \operatorname{tg} \alpha$ вместо a в уравнение (r) § 129 находим

$$\delta = \frac{y \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{Eh} \left[-\frac{d(y Q_y)}{dy} + \nu Q_y \right]. \quad (j)$$

Таким образом, все величины, определяющие изгиб конической оболочки оказались выраженными в зависимости от перерезывающей силы Q_y , значе-

¹⁾ Для $\alpha \approx 84^\circ$ Дюбуа (F. Dubois) нашел, что распределение напряжений в усеченном конусе имеет тот же самый характер, что и в круглой пластинке с отверстием в центре. Это указывает на то, что при таких углах приложенные на обоих краях силы и моменты надлежит рассматривать совместно.

ние которой дается общим решением (f). Функции ψ_1, \dots, ψ_4 и их первые производные для $\xi < 6$ приводятся в таблице 86. При больших значениях ξ с достаточной точностью можно пользоваться асимптотическими выражениями (296) (стр. 546) этих функций, обеспечивающими достаточную точность.

Рассмотрим для примера случай, представленный на рис. 279, а. Положим, что оболочка нагружена лишь одним своим собственным весом и что край ее ($y = l$) может свободно поворачиваться, однако лишен возможности смещаться в поперечном направлении. Рассматривая сначала соответствующую мембранную задачу (рис. 279, б), находим

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= -qy \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha, \\ N_y &= -\frac{qy}{2 \cos \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

где q — вес, приходящийся на единицу площади оболочки. Под действием этих сил произойдет сжатие оболочки по окружности края, величина которого

$$\epsilon_\theta = \left(\frac{1}{Eh} N_\theta - \nu N_y \right) = -\frac{ql}{2 \cos \alpha Eh} (2 \sin^2 \alpha - \nu). \quad (l)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям данной задачи (рис. 279, а), нам нужно на мембранные напряжения, определяемые уравнениями (к), наложить напряжения, вызванные в оболочке горизонтальными силами H (рис. 279, с), величина которых рассчитывается так, чтобы при этом было устранено сжатие (l). Для решения этой последней задачи используем два первых члена решения (f), положив

$$yQ_y = C_1 \left[\psi_1(\xi) + \frac{2}{\xi} \psi_2'(\xi) \right] + C_2 \left[\psi_2(\xi) - \frac{2}{\xi} \psi_1'(\xi) \right]. \quad (m)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются теперь из граничных условий

$$(M_y)_{\xi=2\lambda\sqrt{l}} = 0, \quad (\delta)_{\xi=2\lambda\sqrt{l}} = -\epsilon_\theta l \sin \alpha = -\frac{ql^2 \operatorname{tg} \alpha}{2Eh} (2 \sin^2 \alpha - \nu), \quad (n)$$

в которых вместо M_y и δ нужно подставить выражения (i) и (j). После введения выражения (m) вместо yQ_y , формулы (i) и (j) принимают вид

$$M_y = \frac{2}{\xi^2} \left\{ C_1 \left[-\xi \psi_2'(\xi) + 2(1-\nu) \psi_2(\xi) - \frac{4(1-\nu)}{\xi} \psi_1'(\xi) \right] + \right. \\ \left. + C_2 \left[\xi \psi_1'(\xi) - 2(1-\nu) \psi_1(\xi) - \frac{4(1-\nu)}{\xi} \psi_2'(\xi) \right] \right\}, \quad (o)$$

$$\delta = \frac{y \sin \alpha}{Eh} (N_\theta - \nu N_y) = -\frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{2Eh} \left\{ C_1 \left[\xi \psi_1'(\xi) - 2\psi_1(\xi) - \frac{4}{\xi} \psi_2'(\xi) \right] + \right. \\ \left. + C_2 \left[\xi \psi_2'(\xi) - 2\psi_2(\xi) + \frac{4}{\xi} \psi_1'(\xi) \right] \right\} + \\ + \frac{\nu \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{Eh} \left\{ C_1 \left[\psi_1(\xi) + \frac{2}{\xi} \psi_2'(\xi) \right] + C_2 \left[\psi_2(\xi) - \frac{2}{\xi} \psi_1'(\xi) \right] \right\}. \quad (p)$$

Подставив $2\lambda\sqrt{l}$ вместо ξ в выражения (o) и (p) и воспользовавшись таблицей 86 или асимптотическими выражениями (296), получим левые части уравнений (n). Если нагрузка q и размеры оболочки нам даны, то из этих уравнений мы можем вычислить постоянные C_1 и C_2 . Подсчеты показывают, что для оболочек с обычно применяемыми в инженерной практике пропорциями

величина ξ больше шести, и потому для входящих в уравнения (о) и (р) функций следует пользоваться приближенными выражениями (296). Приближенное решение для конической оболочки может быть получено без труда тем же самым способом, который был иллюстрирован в предыдущем параграфе в применении к сферической оболочке.

Точное решение допускает также и задача о конической оболочке, толщина которой изменится пропорционально расстоянию u от вершины. Решение в этом случае проще, чем для случая постоянной толщины ¹⁾.

134. Общий случай оболочки вращения. Изложенный в § 128 общий метод решения задач о тонкой оболочке можно применить также и к кольцевой оболочке типа, изображенного на рис. 220. Таким же путем исследуется и деформация кольцевой оболочки, показанной на рис. 280, a^2). Комбинируя несколько таких колец, мы подходим и к решению задачи о сжатии гофрированной трубы, представленной на рис. 280, b^3). Комбинируя несколько конических оболочек, мы получаем гофрированную трубу (рис. 280, c). Сжатие такой трубы можно исследовать с помощью решения, выведенного в предыдущем параграфе для конических оболочек. Метод § 128 применим также и к поверхности вращения более общего типа, если только толщина стенки изменяется таким образом, что общие уравнения (315) и (316) принимают вид (317)⁴⁾. Решение этих уравнений, если только оно и возможно, бывает обычно весьма сложным и не допускает непосредственно применения в практических задачах.

В то же время все имеющиеся решения свидетельствуют о том, что для тонкой оболочки при достаточном большом угле φ напряжения, вызванные силами и моментами, равномерно распределенными по краю, носят местный характер и быстро уменьшаются до нуля с увеличением расстояния от края. Это обстоятельство подает нам мысль

¹⁾ Meissner E., Vierteljahrshchr. Naturforsch. Ges., Цюрих, т. 60, стр. 23, 1915. См. также Honegger E., Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke, докторская диссертация, Цюрих, 1919. Случай произвольной нагрузки см. Nollau H., Z. angew. Math. Mech., т. 24, стр. 10, 1944.

²⁾ Точное решение такого рода задач дается в труде Висслера (Wissler H., Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen, докторская диссертация, Цюрих, 1916). О применениях к торoidalной оболочке см. также Clark R. A., J. Math. and Phys., т. 29, стр. 146, 1950, в частности, для эллиптического сечения: Clark R. A., Gilroy T. I., Reissner E., J. Appl. Mech., т. 19, стр. 37, 1952. Короткие осесимметричные оболочки, нагруженные по краям, рассматриваются в работе: Hogvaay G., Linkous C., Borg J. S., J. Appl. Mech., т. 23, стр. 68, 1956. Расчет кольцевых, конических и сферических оболочек с плоским дном см. Hogvaay G., Clausen I. M., J. Appl. Mech., т. 22, стр. 25, 1955.

³⁾ Такие гофрированные трубы рассматривались Штанге (Stange K., Ingr.-Arch., т. 2, стр. 47, 1931). Клерк и Рейсснер исследовали гофрированные трубы некоторых типов как «почти цилиндрические» оболочки (Clark R. A., Reissner E., J. Appl. Mech., т. 23, стр. 59, 1956). Теорию таких труб разработал также Бурмистров Е. Ф., Прикл. мат. мех., т. 13, стр. 401, 1949.

⁴⁾ См. статью Мейсснера, цит. выше.

о возможности применения того самого типа приближенных решений, с которыми мы познакомились при исследовании сферической оболочки, также и в более общих случаях. Исходя из общих уравнений (315) и (316) (стр. 593), отбрасываем из левых частей этих уравнений функции U и V и их первые производные, малые в сравнении со вторыми производными¹⁾. Это приводит нас к следующей упрощенной системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} &= EhV, \\ \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} &= -\frac{U}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Дифференцируя дважды первое из этих уравнений, получаем

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right) = \frac{d^2}{d\varphi^2} (EhV). \quad (b)$$

Если после дифференцирования мы сохраним в каждой части уравнения опять лишь по одному члену, содержащему производную наивысшего порядка от функций U и V , то получим

$$\frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^4 U}{d\varphi^4} = Eh \frac{d^2 V}{d\varphi^2} = -\frac{Ehr_1^2}{r^2} \frac{U}{D}. \quad (c)$$

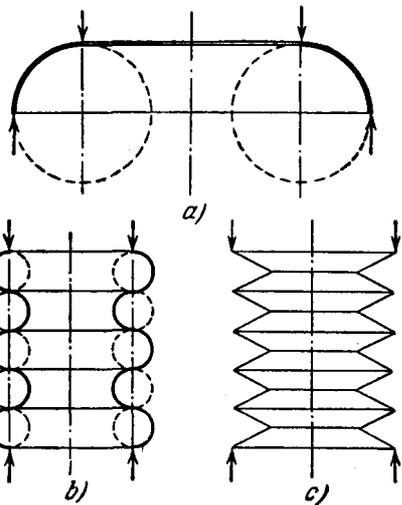


Рис. 280.

¹⁾ Этот метод получения приближенного решения в общем случае мы обязаны Геккелеру (G e c k e l l e r I. W., Forschungsarbeiten, № 276, стр. 21, Берлин, 1926). Распространение метода Блюменталья асимптотического интегрирования на общий случай оболочки, имеющей форму поверхности вращения, было предложено Штаерманом (S t e u e r m a n E., Proc. III Intern. Cong. Appl. Mech., т. 2, стр. 60, 1930). Метод асимптотического интегрирования см. также Hildebrand F. B., Proc. Symposia Appl. Math., т. 3, стр. 53, 1956. Общая теория оболочек и границы ее применимости см. Hildebrand F. B., Reissner E., Thomas G. B., NACA Tech. Note 1833, 1949; Zerna W., Ingr.-Arch., т. 17, стр. 149, 1949; Green A. E., Zerna W., Quart. Mech., Appl. Math., т. 3, стр. 9, 1950; Parkus H., Osterr. Ingr.-Arch., т. 4, стр. 160, 1950; Knowles J. K., Reissner E., J. Math. and Phys., т. 35, стр. 351, 1957; Neuber H., Z. angew. Math. Mech., т. 29, стр. 97, 1949. Влияние поперечной деформации сдвига на оболочки вращения рассматривается в работе Naghdi P. M., Quart. Appl. Math., т. 15, стр. 41, 1957. Успехами в нелинейной теории оболочек мы обязаны в первую очередь Н. А. Алумия, К. З. Галимову и Х. М. Муштари. См. указатель литературы в книге: Вольмир А. С., Гибкие пластинки и оболочки, М.-Л., 1956. См. также Parszewski Z., Proc. IX Intern. Congr. Appl. Mech., т. 6, стр. 280, Брюссель, 1957; Schwarze G., Ingr.-Arch., т. 25, стр. 278, 1957.

После введения обозначения

$$\lambda^4 = \frac{1}{4} \frac{Ehr_1^2}{r_2D} = 3(1 - \nu^2) \frac{r_1^4}{r_2^2h^2} \quad (d)$$

уравнение (с) принимает вид

$$\frac{d^4U}{d\varphi^4} + 4\lambda^4U = 0, \quad (e)$$

аналогичный уравнению (i) § 130, полученному для сферической оболочки. Разница между этими двумя уравнениями сводится лишь к тому, что множитель λ , определяемый выражением (d), в общем случае уже не остается больше постоянной величиной, а изменяется в зависимости от угла φ . Так как функция U с увеличением расстояния от края быстрее падает до нуля, то мы сможем получить удовлетворительное в смысле точности приближенное решение уравнения (e), заменив λ некоторым постоянным средним значением. Здесь можно применить непосредственно полученное выше приближенное решение для сферы.

Чтобы получить более удовлетворительное решение, оболочку можно разбить параллельными кругами на несколько зон и для каждой из них принять некоторое среднее постоянное значение λ . Начав с первой от края оболочки зоны, из условий на краю точно так же, как это было показано для сферической оболочки, находим две постоянные общего решения (329). Тогда все величины, определяющие деформации и напряжения в этой зоне, будут найдены из уравнений (330). Значения этих величин у границы первой зоны дают начальные значения тех же самых величин для второй зоны. Таким образом, изменив численное значение λ для второй зоны, мы можем продолжать вычисления дальше, пользуясь тем же общим решением (329)¹.

Если множитель λ можно представить выражением

$$\lambda = \frac{a}{b + \varphi},$$

где a и b — постоянные, то мы можем получить и точное решение уравнения (e)². Поскольку, однако, уравнение (e) является лишь

¹) Применение этого метода к расчету напряжений в днищах напорных резервуаров дается в работе Котса (C o a t e s W. M., Trans. Am. Soc. Mech. Eng., т. 52, стр. 117, 1930).

²) См. статью Геккелера, цит. на стр. 623. Применение этого решения к расчету напряжений в уступчатых куполах приводится в книге Ф л ю г г е В., Статика и динамика оболочек, М., Госстройиздат, 1961. Оболочки переменной толщины составляют также объект исследования De S i l v a C. N., N a g h d i P. M., Quart. Appl. Math., т. 15, стр. 169, 1957.

приближенным отношением, такое точное решение представляет, по-видимому, мало преимуществ сравнительно с вышеизложенным приближенным расчетом ¹⁾.

¹⁾ Библиография по оболочкам содержится также в книгах: В. Флюгге (цит. выше), К. Girkmann (цит. выше), L'Hermitte R., Résistance des matériaux, théorique et expérimentale, Париж, 1954. Теория призматических (складчатых) и пирамидальных оболочек освещается в вышеуказанных книгах, а также в книге Vogt J., Faltwerke, Штутгарт, 1954. Библиография, в частности, по кровлям-оболочкам имеется в изданиях Aas-Jakobsen A. (цит. выше) и Proc. Symposium on concrete shell roof construction, Cement and concrete association, Лондон, 1954.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- x, y, z — прямоугольные координаты.
 r, θ — полярные координаты.
 r_x, r_y — радиусы кривизны срединной поверхности пластинки в плоскостях xz и соответственно yz .
 h — толщина пластинки или оболочки.
 q — интенсивность непрерывно распределенной нагрузки.
 p — давление.
 P — сосредоточенная нагрузка.
 γ — вес единицы объема.
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — компоненты нормального напряжения, параллельные осям x , y и z .
 σ_n — компонент нормального напряжения, параллельный направлению n .
 σ_r — радиальное напряжение в полярных координатах.
 σ_t, σ_θ — тангенциальное напряжение в полярных координатах.
 τ — касательное напряжение.
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — компоненты касательного напряжения в прямоугольных координатах.
 u, v, w — компоненты смещений.
 ϵ — относительное удлинение.
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — относительные удлинения в направлениях x, y и z .
 ϵ_r — относительное радиальное удлинение в полярных координатах.
 $\epsilon_t, \epsilon_\theta$ — относительное тангенциальное удлинение в полярных координатах.
 $\epsilon_\varphi, \epsilon_\theta$ — относительное удлинение оболочки в меридианном направлении и соответственно в направлении параллельного круга.
 $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ — компоненты деформации сдвига в прямоугольных координатах.
 γ_r — деформация сдвига в полярных координатах.
 E — модуль упругости при растяжении и сжатии.
 G — модуль упругости при сдвиге.
 ν — коэффициент Пуассона.
 V — энергия деформации.
 D — жесткость пластинки при изгибе.
 M_x, M_y — изгибающие моменты, отнесенные к единице длины по сечениям пластинки, перпендикулярным к осям x и соответственно y .
 M_{xy} — крутящий момент на единицу длины по сечению пластинки, перпендикулярному к оси x .
 M_n, M_{nt} — изгибающий и крутящий моменты на единицу длины по сечению пластинки, перпендикулярному к направлению n .

- Q_x, Q_y — перерезывающие силы, параллельные оси z , на единицу длины по сечениям пластинки, перпендикулярным к осям x и соответственно y .
 Q_n — перерезывающая сила, параллельная оси z и отнесенная к единицам длины по сечению пластинки, перпендикулярному к направлению n .
 N_x, N_y — нормальные силы на единицу длины по сечениям пластинки, перпендикулярным к направлениям x и соответственно y .
 N_{xy} — перерезывающая сила в направлении оси y на единицу длины по сечению пластинки, перпендикулярному к оси x .
 M_r, M_t, M_{rt} — радиальный, тангенциальный и крутящий моменты в полярных координатах.
 Q_r, Q_t — радиальная и тангенциальная перерезывающие силы.
 N_r, N_t — нормальные силы на единицу длины в радиальном и тангенциальном направлениях.
 r_1, r_2 — радиусы кривизны оболочки, имеющей форму поверхности вращения, в меридианной плоскости и соответственно в нормальной плоскости, перпендикулярной к меридиану.
 $\chi_\varphi, \chi_\theta$ — изменения кривизны оболочки в меридианной плоскости и соответственно в плоскости, перпендикулярной к меридиану.
 χ_φ — относительное кручение оболочки.
 X, Y, Z — компоненты интенсивности внешней нагрузки на оболочку в направлениях, параллельных осям x, y, z .
 $N_\varphi, N_\theta, N_{\varphi\theta}$ — мембранные силы на единицу длины по главным нормальным сечениям оболочки.
 M_θ, M_φ — изгибающие моменты в оболочке на единицу длины по меридианному сечению и соответственно по сечению, перпендикулярному к меридиану.
 χ_x, χ_φ — изменения кривизны цилиндрической оболочки в осевой плоскости и соответственно в плоскости, перпендикулярной к оси.
 $N_\varphi, N_x, N_{x\varphi}$ — мембранные силы на единицу по осевому сечению и по сечению, перпендикулярному к оси цилиндрической оболочки.
 M_φ, M_x — изгибающие моменты на единицу длины по осевому сечению и соответственно по сечению, перпендикулярному к оси цилиндрической оболочки.
 $M_{x\varphi}$ — крутящий момент на единицу длины по осевому сечению цилиндрической оболочки.
 Q_φ, Q_x — перерезывающие силы, параллельные оси z , на единицу длины по осевому сечению и соответственно по сечению, перпендикулярному к оси цилиндрической оболочки.
-

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аас-Якобсен А. (Aas-Jacobsen A.) 503, 558, 577, 585, 586, 610, 625
 Аггарвала Б. Д. (Aggarwala B. D.) 380
 Адамс (Adams E. H.) 408, 443
 Алблас (Alblas J. B.) 237, 359, 375
 Аллен (Allen I. W.) 366
 Алумяэ Н. А. 623
 Амбарцумян С. А. 8
 Андрэ В. (Andrä W.) 402
 Атанасов (Atanasoff J. V.) 232, 390
 Ашвэлл Д. (Ashwell D. G.) 463
 Бадаруддин С. (Badaruddin S.) 314
 Базант З. (Bazant Z.) 558
 Бай Г. (Bay H.) 211
 Байер К. (Beyer K.) 77
 Байерлай (Byerly W. E.) 190
 Барон Ф. (Baron F. M.) 366
 Барта (Barta J.) 232
 Бартелеми (Barthelemy J.) 531
 Бассали (Bassali W. A.) 328
 Батанеро (Batanero J.) 558
 Башфорт (Bashforth) 443
 Беер Р. (Beer R.) 406
 Белендорф (Behlendorff E.) 482
 Бергер (Berger E. R.) 224, 384, 390
 Бергер (Berger H. M.) 469
 Бергштрессер (Bergsträsser M.) 167
 Берейтер (Bereuter R. O.) 585
 Биркгоф (Birkhoff G. D.) 122
 Бицено К. Б. (Biezeno C. B.) 84, 389
 Блэк Л. Д. (Black L. D.) 308
 Блох В. И. 283
 Блюменталь О. (Blumenthal O.) 602, 607, 623
 Богунувич В. (Bogunovic O.) 235, 238
 Болл Л. (Bolle L.) 191, 598, 599, 601
 Борн (Born J.) 625
 Борн (Born J. S.) 622
 Боровницка (Borowicka H.) 314
 Боуэн (Bowen G.) 403
 Брайэн (Bryan G. H.) 348
 Брандес Г. (Brandes G.) 356
 Бубнов И. Г. 16, 223, 235, 236, 527
 Бурминстров Е. Ф. 622
 Буссинеск Ж. В. (Boussinesq J. V.) 101, 191, 313, 405
 Вайль Н. (Weil N. A.) 461
 Вайнмайстер (Weinmeister J.) 418
 Вайнштейн А. (Weinstein A.) 224, 390
 Валь А. (Wahl A. M.) 77
 Ван дер Эб (Van der Eb W. J.) 241
 Ватсон (Watson) 297
 Вебер (Weber) 596
 Вегнер (Wegner U.) 211
 Вестергорп (Westergaard H. M.) 274, 305, 308, 309, 366
 Вигхардт К. (Wieghardt K.) 404
 Видеманн (Wiedemann E.) 495, 586
 Винт (Vint J.) 310
 Висслер (Wissler H.) 622
 Власов В. З. 8, 503, 558, 565, 575, 618
 Войновский-Кригер С. (Woinowsky-Krieger S.) 8, 86, 87, 88, 89, 112, 122, 133, 184, 187, 247, 264, 280, 288, 313, 333, 351, 375, 413, 418
 Войташак (Wojtaszak I. A.) 223, 567
 Вольмир А. С. 8, 449, 460, 623
 Вольф Ф. (Wolf F.) 402
 Вотруба К. (Wotruba K.) 404
 Вуд М. Р. (Wood M. R.) 403
 Галеркин Б. Г. 122, 145, 157, 239, 246, 262, 275, 330, 349, 350, 353, 386
 Галимов К. З. 8, 623
 Ганкель (Hankel) 377, 378
 Гарабедян (Garabedian C. A.) 122
 Гейлинг Ф. (Geyling F.) 508, 513
 Геккелер (Geckeler I. W.) 481, 604, 610, 618, 623
 Генки (Hencky H.) 199, 223, 448, 464, 465, 585
 Герц Г. (Hertz H.) 290, 313, 314
 Гёттлихер (Göttlicher H.) 353
 Гибсон (Gibson J. E.) 577
 Гильберт Д. (Hilbert D.) 373, 380
 Гильб Б. (Gilg B.) 203, 205
 Гильдебранд Ф. Б. (Hildebrand F. B.) 623
 Гиркман К. (Girkmann K.) 224, 237, 264, 345, 406, 433, 495, 538, 584, 586, 614, 625
 Гиртлер П. (Girtler R.) 353
 Гладвелл (Gladwell G. M.) 328
 Гольденвейзер А. Л. 8, 482
 Голэнд М. (Goland M.) 361
 Горбунов-Посадов М. И. 314
 Гориупп И. (Goriupp K.) 235, 241
 Гофман Р. (Hofmann R.) 345, 346
 Граберт Г. (Grabert G.) 403
 Граммель П. (Grammel R.) 84, 339, 389
 Гран Олссон Р. (Gran Olsson R.) 199, 202, 335, 339, 343, 348
 Грин (Green A. E.) 193, 623
 Гринберг Г. 224
 Грейн К. (Grein K.) 285
 Грэй (Gray W. S.) 539
 Губер М. (Huber M. T.) 181, 407, 408, 414, 418
 Гудир (Gudier J. N.) 86, 89, 110—112, 116, 117, 313, 355, 402, 403, 427, 462, 517
 Гузман (Gusman A. M.) 356
 Гурса Э. (Goursat E.) 379

- Гюйон (Guyon Y.) 413
 Гюнтер К. (Günther K.) 531
- Дантю М. (Dantu M.) 308, 403, 404
 Девералл Л. (Deverall L. I.) 378
 Де Сильва (De Silva C. N.) 624
 Дженкинс Р. (Jenkins R. S.) 577
 Дженс (James W. C.) 314
 Джильрой (Gilroy T. I.) 622
 Джиттлемен (Gittlemen W.) 345
 Джонсон М. (Johnson M. W.) 618
 Джонстон Б. (Johnston B. S.) 585
 Диксон (Dixon A. C.) 333
 Димитров Н. 246
 Дин (Dean W. R.) 333, 488
 Динингер Ф. (Dischinger F.) 495, 572
 Доганов (Doganoff I.) 513
 Доннэлл Л. (Donnell L. H.) 538, 558, 570, 575, 585
 Друкер Д. (Drucker D. C.) 403
 Дэй (Day C. L.) 491
 Дюбуа Ф. (Dubois F.) 618, 620
- Жерар (Gerard F. A.) 513
 Жермен С. (Germen S.) 99
- Зайдель (Seydel E.) 409
 Занден К. (Sanden K.) 531
 Зерна В. (Zerna W.) 623
 Зоннтаг Г. (Sonntag G.) 585
- Ивэнс (Evans T. H.) 229
 Ие Кай-юан (Yeh Kai-Yuan) 466
 Йенсен В. (Jensen V. P.) 245, 264, 356, 400
 Ии Юан-Ю (Yi Yuan-Yu) 361, 379
 Йонезава (Jonesawa H.) 371, 413
 Ишкова А. Г. 314
- Кайзер Р. (Kaiser R.) 464, 472
 Касагранде (Casagrande) 290
 Каминад Р. (Caminade R.) 289
 Камке (Kamke E.) 596
 Канторович Л. В. 387
 Карман Т. (Kármán Th. V.) 462
 Каррьер (Karrier G. F.) 333, 419
 Кастильяно А. (Castigliano A.) 193
 Келлер (Keller H.) 585, 591
 Кельвин (Kelvin, Lord Thomson) 59, 63, 101, 541
 Кёниг (König H.) 489
 Кент (Kent C. H.) 549
 Кёпке В. (Koepercke W.) 252
 Кирхгофф Г. П. (Kirchhoff G.) 101, 106, 539
 Клаузен (Clausen I. M.) 622
 Клебш А. (Clebsch A.) 84, 99, 120, 318, 324, 405, 423
 Клерк Р. (Clark R. A.) 622
 Койтер (Koiter W. T.) 237, 375
 Коллатц Л. (Collatz L.) 443
 Кон (Coan J. M.) 470
 Конвей (Conway N. D.) 234, 333, 339, 343, 424
 Конрад Д. А. (Conrad D. A.) 618
 Коппе (Koppe E.) 123, 462
 Котс (Coates W. M.) 624
 Кояхловнич В. М. 223
 Креттнер (Krettner I.) 356
 Кригер (Krieger R.) 402
 Кромм А. (Kromm A.) 198
 Крылов А. Н. 443
 Кудрявцев Н. В. 334
 Купер Д. (Cooper D. W.) 577
 Курант Р. (Courant R.) 373, 380, 402
- Лагранж Ж. Л. (Lagrange J. L.) 99, 201
 Ландwehr Р. (Landwehr R.) 403
 Ларди П. (Lardy P.) 356
 Лафейль Б. (Laffaille B.) 511
 Леве В. (Lewe V.) 280, 283, 310, 538
 Левн М. (Levy M.) 133, 191, 204, 373, 570
 Левн Р. (Levy R. S.) 556
 Леви С. (Levy S.) 448, 470
 Лейбензон Л. С. 123
 Лейтц Г. (Leitz H.) 224
 Леонхардт Ф. (Leonhardt F.) 402
 Леппер (Lepper H. A.) 107
 Лермит Р. (L'Hermite R.) 289, 625
 Лессельс Д. (Lessels J. M.) 549
 Лехницкий С. Г. 405, 408, 410, 419
 Леш Ф. (Lösch F.) 136
 Ли Г. (Lee G. H.) 403
 Либман Г. (Liebman H.) 402
 Линкоус (Linkous C.) 622
 Лобо Г. (Lobo G.) 77
 Локвуд-Тейлор (Lockwood-Taylor J.) 424
 Лоус Б. (Laws B. C.) 224
 Луизонн (Luisoni C. I.) 356
 Лундгрэн (Lundgren H.) 585
 Лурье А. И. 8, 328, 380
 Лямб (Lamb H.) 558
 Ляв А. (Love A. E. H.) 89, 90, 121, 223, 349, 558, 562
- Магнесс Л. (Magness L. S.) 410
 Магнус (Magnus W.) 170
 Мак-Грегор (Mc Gregor C. W.) 237
 Мак-Доуэлл (Mc Dowell E.) 602
 Мак-Кормик (Mc Kormick F. L.) 314
 Мак-Нил (Mac Neal R. H.) 404
 Максвелл (Maxwell) 84, 133
 Мак-Ферсон (Mc Pherson A.) 448
 Малькор Р. (Malkor R.) 618
 Маргерр К. (Marguerre K.) 123, 313, 315, 618
 Мариотт (Marlotte E.) 130
 Маркус (Marcus H.) 110, 145, 232, 247, 265, 283, 285, 400
 Марген Ф. (Martin F.) 503, 610
 Массоне (Massonnet C.) 413
 Маульбеч (Maulbetch J. L.) 114, 187, 531
 Мейсснер (Meissner E.) 531, 591, 595, 604, 622
 Мелан (Melan E.) 187, 324
 Меллин (Mellin) 375
 Менаже (Mesnager A.) 403
 Мёнх (Mönch E.) 404
 Мизель К. (Miesel K.) 570, 585
 Мичелл (Michell J. H.) 89, 120, 184, 328
 Морзе Р. Ф. (Morse R. F.) 424
 Морковин В. 419
 Морли Л. (Morley L. S. D.) 558
 Мур Р. (Moore R. L.) 232
 Мустер Д. Ф. (Muster D. F.) 333
 Мусхелишвили Н. И. 328, 379
 Мухс (Muhs H.) 311
 Муштарн Х. М. 8, 623
 Мюггенбург Г. (Müggenburg H.) 333
 Мюллер В. (Müller W.) 309, 324
 Мюллер Е. (Müller E.) 245
 Мэнсфилд (Mansfield E. H.) 463
 Мэрфи Г. (Murphy G.) 310
- Навье Л. М. (Navier L. M. H.) 128, 130, 133, 165, 305, 569
 Нагхди П. М. (Naghdí P. M.) 315, 345, 623, 624
 Надаи А. (Nadai A.) 59, 86, 134, 169, 181, 224, 247, 249, 275, 279, 287, 328, 330, 353, 364, 380, 389, 435, 460

- Назитта К. (Nasitta K.) 328
 Наруока М. (Naruoka M.) 413
 Невель Д. (Nevel D. E.) 308
 Нейбер Г. (Neuber H.) 623
 Неш (Nash W. A.) 84, 237
 Нильсен Н. (Nielsen N. J.) 285, 400
 Новацкий В. (Nowacki W.) 187, 418
 Новожилов В. В. 8
 Ноллау Г. (Nollau H.) 622
 Ноулс (Knowles J. K.) 623
 Ньюмарк Н. М. (Newmark N. M.) 167, 233, 234, 274, 461
 Оберхеттингер Ф. (Oberhettinger F.) 170
 Одли (Odley E. G.) 230
 Олиг Р. (Ohlig R.) 123, 245
 Олсен (Olsen H.) 418
 Онеггер (Honegger E.) 622
 Оравас (Oravas G. Ac.) 618
 Охаси И. (Ohasi Y.) 418
 Пажевский (Paszevski Z.) 623
 Паиов Д. Ю. 447
 Папкович П. Ф. 135
 Паркус Г. (Parkus H.) 187, 558, 623
 Пастернак П. 610
 Пашу (Paschoud J.) 345
 Перри (Perry C. L.) 350
 Петтерссон О. (Pettersson O.) 436
 Пижо (Pigeaud G.) 164
 Пиккетт (Pickett G.) 232, 314
 Пирсон К. (Pearson K.) 89, 99, 101, 539
 Пихлер О. (Pichler O.) 335
 Поццати П. (Pozzati P.) 283
 Пуатсон С. Д. (Poisson S. D.) 66, 101, 116
 Пухер А. (Pucher A.) 218, 366, 368, 495, 500, 508
 Пфлюгер А. (Pflüger A.) 410, 411, 586
 Работнов Ю. Н. 558, 604
 Равиль М. (Raville M. E.) 314
 Рамберг (Ramberg W.) 448
 Раули (Rowley J. C.) 315
 Рейницхубер Ф. (Reinitshuber F.) 418
 Рейссман Г. (Reismann H.) 435
 Рейсснер Г. (Reissner H.) 324, 327, 495, 538, 558, 567, 591
 Рейсснер Э. (Reissner E.) 191, 193, 199, 315, 328, 356, 359, 380, 440, 461, 614, 618, 622, 623
 Ритц В. (Ritz W.) 111, 310, 383, 386, 470
 Римаан (Riemann) 596
 Рокк Д. (Rock D. H.) 224
 Рорк Р. (Roark) 323, 328
 Рош М. (Roß M.) 289, 390
 Руинге (Runge C.) 489, 538, 539
 Рэйлей (Lord Rayleigh) 552
 Рюдигер Д. (Rüdiger D.) 585
 Сабо (Szabo I.) 315
 Савин Г. Н. 359, 361, 379—419
 Садовский М. А. (Sadovsky M. A.) 333
 Саид-Юсуф (Syed Yusuff) 466
 Сaito А. (Saito A.) 333
 Сайесс (Siess C. P.) 233, 234, 274, 356
 Сале (Salet G.) 531
 Саттлер К. (Sattler K.) 413
 Саусвэлл (Southwell R. W.) 402
 Свенссон Н. Л. (Svensson N. L.) 531
 Секья Т. (Sekija T.) 333
 Сен Б. (Sen B.) 350
 Сен-Венан Б. (Saint-Venant B.) 59, 84, 89, 99, 120, 405, 433
 Сенгупта (Sengupta H. M.) 350
 Симмонс (Simmons J. C.) 116
 Симмонс Р. (Simmons R. M. F.) 618
 Смотров А. А. 243, 353
 Снеддон (Sneddon J. N.) 123, 373
 Соар М. (Soare M.) 513
 Сокольников Е. С. (Sokolnikoff E. S.) 123
 Сокольников И. С. (Sokolnikoff I. S.) 123
 Соломон Л. 618
 Споттс М. Ф. (Spotts M. F.) 610
 Стайлс (Stiles W. B.) 234
 Стивенсон (Stevenson A. C.) 123, 379
 Стиппс М. (Stippes M.) 453, 470
 Стодола А. (Stodola A.) 591
 Тедоне (Tedone) 223
 Тельке Ф. (Tölke F.) 287, 380, 610
 Терцаги К. (Terzaghi K.) 290
 Тестер К. Г. (Tester K. G.) 511
 Тимошенко С. П. 8, 9, 18, 36, 39, 42, 49, 59, 86, 89, 93, 99, 110—112, 116, 117, 119, 133, 135, 154, 217, 224, 234, 313, 345, 402, 427, 433, 437, 439, 440, 443, 444, 462, 476, 517, 530, 549, 564, 566, 568
 Тимпе (Timpe) 223
 Тодхэнтер (Todhunter I.) 89, 99, 101, 539
 Тома Д. (Thoma D.) 505
 Томас (Thomas G. B.) 623
 Торн (Thorne C. J.) 232, 247, 305, 378, 390
 Торроха Э. (Torroja E.) 513, 558
 Тренкс К. (Trenks K.) 410, 411
 Трусделл (Truetsdell C.) 495
 Тунгль (Tungl E.) 224
 Тэйт П. (Tait P. G.) 59, 63, 101
 Тюрлиманн В. (Thürlimann V.) 585
 Уитрик (Witrick W. H.) 463
 Урбан (Urban J.) 585
 Успенский И. В. 355
 Уфлянд Я. С. 233, 375
 Уэй С. (Way S.) 16, 449, 451, 466
 Фавр (Favre H.) 203, 205, 341, 343, 356, 403
 Фанкхаузер (Fankhauser) 591
 Федерхофер К. Ф. (Federhofer K. F.) 224, 448, 453, 454, 461, 538
 Феодосьев В. И. 447
 Феппл А. (Föppl A.) 39, 290, 324, 464, 465, 468
 Феппл Л. (Föppl L.) 339, 404, 465, 468
 Финстервальдер (Finsterwalder U.) 572, 583, 585
 Флетчер (Fletcher H. J.) 305
 Флюгге В. (Flügge W.) 319, 324, 482, 488, 489, 500, 503, 508, 513, 538, 558, 563, 585, 618, 624, 625
 Фор (Faure H.) 538
 Форххаймер П. (Forchheimer P.) 481
 Фредерик Д. (Frederick D.) 315
 Фридрихс К. О. (Friedrichs K. O.) 448
 Фрэй К. (Frey K.) 280
 Функ П. (Funk P.) 224
 Фын (Fung C.) 463
 Хаас Т. (Haas T.) 289
 Хабель А. (Habel A.) 314
 Хаберланд Г. (Haberland G.) 403
 Хаверс А. (Havers A.) 610
 Хагеман (Hagemann J. G.) 289
 Хайналь-Кония К. (Hainál-Konyi K.) 327
 Хальбриттер Ф. (Halbritter F.) 310
 Хяппель Г. (Happel H.) 310, 350
 Хассе (Hasse H. R.) 333
 Хаусрат (Hausrath A. H.) 453
 Хаффингтон Н. (Huffington N. I.) 410
 Хёланд Г. (Hoeland G.) 368
 Хён (Hönn) 535

- Херси М. (Hersey M.) 449
 Хетени М. (Hetenyi) 531, 608
 Хигдон Р. (Higdon R. A.) 122, 123
 Хирмон (Hearmon R. F. S.) 408
 Хогг (Hogg A. H.) 313, 314
 Холл Д. (Holl D. L.) 122, 123, 245, 311
 Хольгейт С. (Holgate S.) 419
 Хольцер (Holzer H.) 335
 Хомберг Г. (Homberg H.) 418
 Хопман (Hoppmann W. H.) 410
 Хорвай (Horvay G.) 622
 Хофф Н. (Hoff N.) 571, 575, 619
 Хуанг (Huang M. K.) 234, 333
 Хут (Huth J. H.) 619
- Цандман Ф. (Zandman F.) 403
 Циммерманн Г. (Zimmermann H.) 518
 Цурмюль Р. (Zurmühl R.) 402
- Чалышев К. А. 245
 Чанг (Chang C. C.) 424
 Черни Ф. (Czerny F.) 212
 Чини П. Ф. (Chenea P. F.) 345
 Чонка П. (Csonka P.) 558
 Чьен Вей-цанг (Chien Wey Zang) 466
- Шабло (Chabloz E.) 341, 343
 Шаде Т. (Schade H. A.) 414
 Шамбек Г. (Shambeck H.) 356
 Шварце Г. (Schwarze G.) 623
 Шваргер Г. (Schwieger H.) 403
 Шефер (Schaefer H.) 404
 Шефер М. (Schäfer M.) 193
 Шлейхер Ф. (Schleicher F.) 298, 541
- Шмербер Л. (Schmerber L.) 356
 Шмидт Г. (Schmidt H.) 324
 Шнелль В. (Schnell W.) 558
 Шорер Г. (Schorer H.) 585
 Шоу Ф. С. (Shaw F. S.) 333, 402
 Штаерман И. Я. 604
 Штайерман (Steuermann E.) 610, 623
 Штанге К. (Stange K.) 449, 622
 Штермер (Störner) 443
 Штернберг (Sternberg E.) 602
 Штурм (Sturm R. G.) 232
 Шульц-Грунов Ф. (Schultz-Grunow F.) 380, 531, 535
 Шульце (Schultze) 311
- Эггер (Egger H.) 453, 454
 Эйхельберг Г. (Eichelberg G.) 602
 Эйхингер А. (Eichinger A.) 289
 Экк Б. (Eck B.) 448
 Экстрем (Ekström E.) 602
 Эльгуд (Elgood W. N.) 310
 Эль-Хашими (El-Hashimy M.) 359, 366
 Эмде Ф. (Emde F.) 202
 Эмон Ф. (Aimond F.) 511
 Эмпергер Ф. (Emperger F.) 495
 Эсслингер М. (Esslinger M.) 531
 Эстанав (Estanave E.) 133, 145, 531
- Юнг (Young D.) 230, 232, 233
 Юнг (Young D. H.) 133
 Юнг (Jung H.) 123, 314, 373, 378
- Янке Е. (Jahnke E.) 202
 Ярамилло Т. (Jaramillo T. J.) 237, 373
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Анизотропия** 405
Анкеровка пластинок 144
Аппроксимация граничных условий 389
Армирование пластинок перекрестное 410
— ребрами 84, 409
— труб кольцами 528, 556
- Балка жесткости** 581, 583
— на упругом основании 42
Баллоны 531
- Вариация параметров** 201
Включение жесткое 360, 361
— упругое 360
Выпучивание оболочки 564
- Гофрировка листового материала** 409
— труб 622
Грунты, их классификация 291
- Давление ветра** 495
— внутреннее (в резервуарах, трубах) 489, 523
— воздуха 112
— гидростатическое 32, 37, 145
— поперечное, поправка на него 90
Деформация 60, 343
— без растяжения 552
— близ точки приложения силы 88
— несимметричная 552
— оболочки без изгиба 474
— симметричная 514, 516, 521
Диск вращающийся 339
Длина характеристическая 291, 616
Днище бункеров и силосов 352
— резервуаров 345, 531
— плоское 622
— полусферическое 531
— эллипсоидальное 534, 535
- Жесткость защемления пластинок** 29
— изгиба оболочки 477
— пластинок 16, 115, 203
— анизотропной 407
— плиты железобетонной 408
— , различная в различных направлениях 407
— кручения опорных балок 264
— соединения перекрытия с колоннами 287
— сравнительная оболочки и пластинок 13
- Закон Гука** 15, 51, 193, 492, 515
— двойной периодичности 283
— напряжений линейный 191, 192, 199
— параболический касательных напряжений 89, 99, 100, 192
- Защемление** 23
— абсолютно жесткое 29
— , его жесткость 29
Значения собственные 372
Зона краевая 13, 123
- Изгиб в антикластическую поверхность** 59, 60
— в неразвертывающуюся поверхность 60
— в развертывающуюся поверхность 12, 60
— в сферическую поверхность 57, 64, 89
— на упругом основании 41, 290
— , нелинейные задачи 12, 345
— несимметричный 339
— с начальной кривизной 39, 41, 436
— силами в срединной плоскости 11, 421, 430
— симметричный 66
— цилиндрический 12, 15, 463
— чистый 45, 50, 55, 56, 60, 72, 359
— — пластинок произвольного очертания 56
Изотропия 191, 193
Интегрирование асимптотическое 602, 623
Исчисление вариационное 383
- Колесания мембраны** 577
— пластинок поперечные 372
Колонны, круглая и квадратная 287, 289
Кольцо жесткости (опорное) 482, 483, 486, 610
Концентрация напряжений 359
Координаты биполярные 334
— косоугольные 356
— полярные 66, 67, 316
— прямоугольные 356
— треугольные 400
— цилиндрические 508
Корпус корабля, напряжения в нем 32
Коэффициент концентрации напряжений 359, 361
— постели 290, 291
— Пуассона 15, 115, 116, 403
Кривая прогиба 16, 23, 30
Кривизна главная 48
— и изгибающие моменты 50, 88
— , измеренная в отраженном свете 403
— начальная 39, 41
— отрицательная гауссова 13
— пластинок 45
— , плоскость кривизны 48, 49
— слабо изогнутой оси стержня 15
— срединной поверхности 46, 54
— средняя 47
— чистого изгиба 61
Кривая оболочки 577
Круг Мора 49, 53, 54, 55, 399
Кручение поверхности 47, 49, 53, 61

- Купол конический (см. также *оболочка*) 498
 — несферический 503
 — полусферический 501
 —, опертый в отдельных точках 500
 — с опорным кольцом 503
 — сферический 481, 613
- Мембрана 12, 110, 188, 390, 391, 441, 464, 577
 — гофрированная 449
 —, ее колебания 577
 Меридиан оболочки 479, 489
 Метод Адамса 443
 — аппроксимации граничных условий 389
 — бесконечных интегралов 373
 — Вайнштейна 390
 — вариации параметров 201
 — Вестергора 309
 — Ганкеля 377, 378
 — Грина 193
 — двойного тригонометрического ряда 128, 131, 165, 309
 — инверсии 184, 328
 — интерференционный 403
 — комбинированный 387
 — комплексных переменных 378, 419
 — конечных разностей 111, 314, 353, 356, 391, 400, 402, 464
 — Леви 133, 204, 373, 424
 — Маркуса 265
 — Меллина 375
 — Мичелла 184, 328
 — Мора 364
 — Мухелишвили 379
 — Навье 128, 130, 165, 305, 309, 413, 569
 — наложения 84, 151, 345, 358
 — обращения 388
 — оптический 402, 403
 — отражений 181, 182, 183, 351, 353
 — отраженного света 403
 — поверхностей влияния 311, 365
 — поляризационный 403
 — последовательных приближений 402
 — преобразований 373
 — разбиения на концентрические кольца 339
 — распределения моментов 267
 — релаксации 402
 — Ритца 111, 310
 — Фавра — Гильга 202, 205
 — функций влияния 311
 — характеристических функций 372
 — Штермера 443
 — электромеханический 402
 — энергетический 380, 384, 385, 426, 444
 Методы приближенные 111, 333, 362, 387
 — специальные 112, 402, 404
 — экспериментальные 112, 402, 404
 Модуль основания 290, 291
 — сдвига 54, 191, 193
 — упругости 15, 360, 361
 Моменты изгибающие 16, 20, 53
 — — близ точки приложения силы 85, 168
 — — и коэффициент Пуассона 115
 — — оболочки 475
 — — крутящие 53, 98, 113, 145, 475
 — — и коэффициент Пуассона 115
 — — оболочки 475
 Мосты косые 356
- Нагрев неравномерный 64, 114, 187
 Нагрузка антисимметричная 207, 209
 — ветровая 495
 — внецентренная 327
- Нагрузка гидростатическая 32, 37, 145, 216, 221, 229, 352
 — концентрическая 75, 79
 — критическая 432
 — линейная 319
 — моментная 206, 363, 440
 — неравномерная 37, 203
 — несимметричная 83, 493
 — поперечная 11, 14, 66, 96, 123
 —, распределенная неравномерно 37, 203
 —, — по закону треугольника 146, 155
 —, — по закону треугольной призмы 154
 —, — по произвольной площади 186
 —, — по прямоугольной площади 157
 —, — равномерно 27, 43, 69, 212, 219, 224, 282
 —, — по краям 43
 —, — по площади 27
 —, — — — — круга 186
 —, — — — — эллипса 186
 — растягивающая 423
 — силами в срединной плоскости 11, 421, 430
 — симметричная 66, 81, 207
 — синусоидальная 124, 414
 — сосредоточенная 165, 217, 231, 324
 —, — в вершинах углов 59
 —, — в центре 84
 — фиктивная 183, 185, 353, 364, 438
 — центральная 84
 — частичная 157, 284
 Наклон (угол наклона) 29
 — слабо изогнутой пластинки 45
 Напряжения близ края 603
 — близ точки приложения силы 88
 — в корпусе корабля 32
 —, влияние начальной кривизны 39, 41
 — — смещений 31
 — изгиба 20, 26
 — касательные 55, 58, 67, 88, 90, 99, 359
 — локальные 13, 88
 — максимальные 20, 56
 — мембранные 12, 13, 470, 481, 485, 534
 — нормальные 11
 — растягивающие 482
 — температурные 64, 114, 187, 547
- Оболочка апсидная 503
 — вращения 478, 622
 — — под несимметричной нагрузкой 493
 — геликоидальная 618
 — коническая 485, 498
 —, купол (см. *купол*)
 — коноидальная 513
 — линейчатая (переноса) 618
 — неразрезная 577
 — нерастяжимая 552, 618
 — отрицательной гауссовой кривизны 13
 — параболоидальная 541
 — пирамидальная 625
 — пологая 614, 618
 — полусферическая 501
 — почти цилиндрическая 622
 — призматическая 625
 — равного сопротивления 488
 — с затяжкой 581
 — складчатая 625
 — сферическая 481, 483, 500, 595, 618
 — без отверстия 601, 605
 —, опертая в отдельных точках 500
 — с опорным кольцом 610
 — с отверстием 601
 — тор 487, 622
 — цилиндрическая 503, 514, 558, 572, 577
 —, ее сегмент 558, 568
 — — круговая 514

- Оболочка цилиндрическая, общая теория 514
 — —, опертая по торцам 565
 — —, приближенная теория 572
 — — с армирующими кольцами 528, 556
 — —, температурные напряжения 547
 — эллипсоидальная 486
 — параболоидальная 510
 Операторы, их разностные эквиваленты 400
 Опираие абсолютно жестко защемлен-
 ное 29
 — в отдельных точках 328, 500
 — на упругом основании 41, 290
 — по внутреннему контуру 76
 — свободное 16, 26, 29, 43, 71, 124, 252, 257
 — упруго защемленное 27
 — упруго свободное 246
 Ортогонализация по контуру 389
 Основание, классификация 291
 — податливое 43
 — упругое 41, 290
 — полубесконечное 310
 —, характеристики упругие 311
 Особенности при изгибе 362
 Отверстия в круглой пластинке 73
 —, их влияние на изгиб 11, 123, 191, 357
 — некруглые 359
 Параметр растяжения 22, 32, 34, 35
 Перекрытие балочное 257
 — безбалочное 257, 274, 283, 327
 — из девяти панелей 283
 — из косоугольных панелей 398
 — на равноотстоящих колоннах 274
 — «копркинутое» 305
 Перераспределение напряжений местное
 (близ точки приложения нагрузки) 88,
 94
 Пластинка 11
 — анизотропная 405
 — бесконечно большая 283, 289, 314, 357
 — — длинная 14, 167, 174, 181
 — — в виде сектора круга 333
 — волокнистая 410
 — гофрированная 409
 — длинная 14, 167, 174, 181
 — из неоднородного материала 407
 — изотропная 191, 193
 — квадратная 202, 355, 380
 — клинообразная 333
 — кольцевая 73, 89, 339, 461
 — — переменной толщины 339
 — конечной длины 175
 — консольная 403
 — косая (косоугольная) 356, 398
 — круглая 66, 168, 171, 184, 316, 418, 440
 — —, варианты загрузки и опирания 340
 — — на упругом основании 294, 296
 — — — —, нагруженная в центре 85,
 456
 — — переменной толщины 334, 341
 — — под сосредоточенной нагрузкой 324
 — — с отверстием 73
 — —, точное решение 449
 — многоугольная 110, 111, 114, 380
 — на упругом основании 41, 290, 403
 — неразрезная 257
 — — на упругом основании 301
 — —, несущая равноотстоящие колонны 308
 — — равнопролетная 265
 — ортотропная 405, 414, 419
 — переменной толщины 199, 202, 203, 339
 — плавающая 291, 312
 Пластинка полубесконечная 197, 249
 — полукруглая 333
 — произвольного очертания 56
 — прямоугольная 14, 125
 — — анизотропная 413
 — — бесконечной длины 167
 — — переменной толщины 199
 — — под гидростатической нагрузкой 145
 — — под моментной нагрузкой 168
 — — полубесконечная 249, 252
 — — при различных условиях опирания 206
 — — ребристая 410
 — — свободно опертая 16, 124
 — —, частичное заграждение 157, 183
 — с отверстием 357
 — толстая 11, 12, 59, 65, 87, 191, 308, 315
 — тонкая 11, 12, 65, 97, 123, 191, 195
 — — с большими прогибами 11, 12
 — — с малыми прогибами 11
 — треугольная 112, 350, 353, 381
 — эллиптическая 347, 418, 461
 Пластинки, их классификация 11
 — различных очертаний 316
 Плита железобетонная 407
 — ребристая 410
 — фундаментная 343
 Плоскость кривизны главная 48, 49
 — нейтральная 11
 — срединная 45
 Поверхность антикластическая 50, 58
 — влияния 311, 365
 — — моментов 366, 368, 370
 — — напряжений 366
 — изогнутая (прогибов) 96, 383
 — нейтральная 51, 55
 — неразвертывающаяся 60
 — провисания мембраны 112
 — развертывающаяся 12, 13, 62
 — синклатическая 50
 — срединная 13, 45, 54
 — оболочки 474
 — цилиндрическая (изгиба) 12, 15, 463
 Покрытие автодорожное 290
 Полоса бесконечная 184, 417
 Постоянная упругая 115
 — —, ее влияние на моменты 115
 — —, ее значения для оснований 311
 — —, — для фанеры 408
 Преобразование Ганкеля 377
 — Мелдла 375
 Принцип виртуальных перемещений 106,
 382, 384, 446, 465
 — наименьшей работы 193, 345
 — Сен-Венана 59
 Прогиб абсолютно гибкой нити 188, 391
 — балки 14
 — пластинки 11, 17, 45
 — — большой 11, 12, 440, 466, 470
 — —, влияние на него начальной кривиз-
 ны 39
 — —, вызванный сдвигом 91
 — —, его влияние на моменты 16
 — —, максимальный 21, 167
 — —, малый 11, 18, 60, 96
 — —, начальный 41
 — — под нагрузкой 85, 168
 — — симметричный 42, 66
 Резервуар конический 485, 537
 — сферический 483
 — цилиндрический под давлением 531
 — — с полусферическим дном 531
 — — со стенками переменной толщины 538
 — — — — постоянной толщины 535
 Решетка (сетка) балочная 411

- Ряд гипергеометрический 596
 — двойной (тригонометрический) 128, 131, 165, 309, 380, 383
 — —, преобразование в ординарный 133, 165, 355
 — степенной 292
 — Фурье 383, 389
- Сдвиг 54, 91, 145, 198
 —, его влияние на изгиб 91, 190, 191, 198, 199, 361
 Сжатие 432, 434
 Силы капиллярные 489
 — краевые 603, 614
 — мембранные 478, 508, 510, 613, 615
 — перерезывающие (их влияние на изгиб) 11, 13, 68, 88, 91, 96, 97, 99, 141, 149, 282, 505
 — — близ точки приложения сил 85, 168
 — растягивающие 22, 31, 39, 432
 — реактивные 16, 28, 29
 — сжимающие 432, 434
 — фиктивные 183, 185, 352
 Синус-преобразование 378
 Смещения в оболочке вращения 491
 — малые 31, 45, 54
 Состояние напряженное плоское 404
 Сходимость рядов 187, 596, 597, 598, 602
- Текучесть местная 88
 Точка особая напряженного состояния 362
 — приложения сосредоточенной силы, момента 88, 93, 94, 123, 362, 363, 364
 Труба гофрированная 622
 — длинная 517
- Уравнение изгиба пластинки 14
 — — — анизотропной 405
 — — — в полярных координатах 316
 — — — линейное 11, 14
 — — — нелинейное 12
 — — — полное 195, 197
- Уравнение трех моментов 262
 Уравнения в конечных разностях 391
 — Галеркина 386
 Условия граничные 17, 25, 29, 42, 83, 100, 106, 531
 — —, аппроксимация их 389
 — — заземления 100
 — —, их число 107, 191
 — — криволинейного контура 104, 105
 — —, релаксация их 402
 — — свободного края 100
 — — — опирания 100
 — —, симметрия их 83
 — — смешанные 400
 — — упругого защемления 103
 — — — опирания 103
- Фанера 408, 409
 Формула Ламе 93
 Фотоупругость 402
 Фундамент сплошной 502
 Функции Бесселя 296, 311, 378
 — Бласова 575
 — влияния 132, 311, 365, 372, 380
 — Грина 196, 462, 495, 500, 508
 — деформации и напряжений 574
 — Кельвина 541
 — характеристические 372, 380
 — эллиптические 380
 Функция напряжений Эри 404, 471
- Цилиндр круглый, распределение напряжений в нем 86
- Числа характеристические 372
- Эквивалентность загрузения по кругу и по квадрату 187
 Энергия деформации 60, 106, 380, 382, 384, 445
 — — мембраны 464
 — — пластинки 384
 — — упругого основания 384

С. П. Тимошенко и С. Войновский-Кригер

Пластинки и обложки.

М., 1966 г., 636 стр. с илл.

Редактор *И. К. Снитко*.

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*.

Корректор *Э. В. Автонова*.

Печать с матриц. Подписано к печати 9/IV
1966 г. Бумага 60 × 90¹/₁₆. Физ. печ. л. 39,75.
Условн. печ. л. 39,75. Уч.-изд. л. 40,84. Тираж
9000 экз. Цена книги 3 р. 12 к. Заказ № 319.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Главполиграфпром Комитета по печати при
Совете Министров СССР. Отпечатано в Ле-
нинградской типографии № 1 «Печатный Двор»
им. А. М. Горького, Гатчинская, 26 с матриц
Ленинградской типографии имени Евг. Соко-
ловой, Измайловский пр., 29.