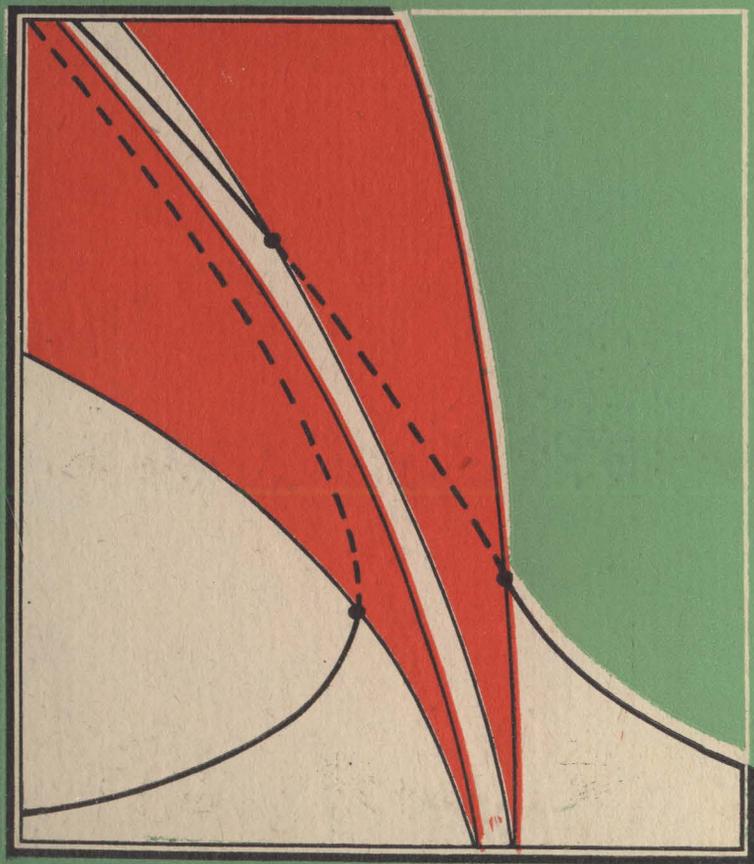


НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В.Д. КУБЕНКО
П.С. КОВАЛЬЧУК
Н.П. ПОДЧАСОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК



В.Д. КУБЕНКО
П.С. КОВАЛЬЧУК
Н.П. ПОДЧАСОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального
образования УССР в качестве
учебного пособия для студентов
университетов*

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВЫЩА ШКОЛА»
1989

ББК 22.213я73
К88
УДК 539.3 : 534.1

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук О. А. Го-
рошко (Киевский государственный уни-
верситет), д-р физ.-мат. наук И. Ю. Баби-
ч (Институт механики АН УССР)

Редакция литературы по математике и физике
Редактор Л. И. Гринь

**Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Под-
часов Н. П.**

К88 **Нелинейные колебания цилиндрических
оболочек: Учеб. пособие.— К.: Выща шк.
Головное изд-во, 1989.— 208 с.: ил.
ISBN 5—11—000178—2.**

Изложены вопросы нелинейного деформирова-
ния цилиндрических оболочек, рассматриваемых
как системы с несколькими степенями свободы,
при действии на них различного рода динами-
ческих нагрузок. Изучены волновые формы дви-
жения оболочек, построены амплитудно-частотные
характеристики вынужденных и параметрически
возбуждаемых колебаний, рассмотрены некоторые
вопросы взаимодействия форм изгибных колеба-
ний оболочек, частично заполненных жидкостью.
Для студентов университетов.

К $\frac{1603030000-873}{M211(04) - 89}$ 126—89

ББК 22.213я73

ISBN 5—11—000178—2

© Издательское объединение
«Выща школа», 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тонкостенные конструкции оболочечного типа составляют обширный класс механических объектов, которые используются в современном машино- и приборостроении, в ракетной и космической технике, а также строительстве. В условиях эксплуатации такие конструкции обычно подвергаются действию интенсивных динамических нагрузок. Это обуславливает появление в элементах конструкций больших циклических напряжений, приводит нередко к колебательной потере устойчивости, возникновению других сложных процессов, нежелательных с точки зрения динамической прочности и надежности машин, приборов, аппаратов. Поэтому понятен тот большой и постоянный интерес многих исследователей, инженеров и конструкторов к задачам динамики оболочек и оболочечных систем, особенно к нелинейным задачам. Это естественно, поскольку учет нелинейных факторов (нелинейных зависимостей деформаций от перемещений и деформаций от усилий, а также нелинейного демпфирования) при колебаниях оболочек позволяет определить их истинные динамические характеристики и, следовательно, получить реальную картину динамического напряженно-деформированного состояния в упругой системе. На ее основании можно надежно решать такие кардинальные задачи, как лучшее использование несущей способности конструкций, уменьшение их массы.

Нелинейные задачи динамики тонкостенных оболочек принадлежат к числу наиболее сложных в современной механике и технике. Для их решения разработаны различные приближенные методы и подходы. Большинство таких задач предполагают предварительное сведение континуальной оболочечной системы к некоторой дискретной модели с одной, реже с двумя степенями свободы, что эквивалентно учету при ее колебаниях соответственно одной-двух форм изгибных колебаний. При одномерной идеализации в качестве форм нелинейных колебаний оболочки используются собственные формы этой оболочки при малых прогибах. Последние находятся из решения соответствующей линейной краевой задачи на собственные значения. В случае двумерной идеа-

лизации одна из форм линейных колебаний рассматривается обычно в сочетании с осесимметричной формой с удвоенным числом полуволн вдоль образующей, которая отражает специфику выпучивания оболочки при немалых прогибах, заключающуюся в несимметрии ее колебаний относительно недеформированной срединной поверхности (размахи колебаний в направлении внутренней нормали превышают размахи колебаний вдоль внешней нормали).

В монографии А. С. Вольмира «Нелинейная динамика пластинок и оболочек» даны основные результаты, полученные по проблеме нелинейных колебаний оболочек различной конфигурации при представлении их указанными одно- и двумерными моделями. Такие модели позволили установить ряд важных закономерностей нелинейного деформирования оболочек, которые впоследствии были подтверждены соответствующими экспериментальными исследованиями. Вместе с тем эти модели принципиально неприемлемы для описания многих нелинейных явлений, в основе которых лежит взаимодействие нескольких форм изгибных колебаний. Взаимосвязанность этих форм создает предпосылки для реализации интенсивного энергообмена между различными модами колебаний, обуславливает качественно новые виды деформированного состояния оболочек, отличные от традиционных движений типа стоячей волны. В научной литературе описаны случаи, когда «скрытый» энергообмен между изгибными формами в некоторых тонкостенных упругих и упруго-жидкостных объектах приводил к аварийным ситуациям. Разрушению конструкций при этом предшествовало их довольно сложное напряженно-деформированное состояние. Наблюдались, в частности, бегущие в окружном и продольном направлениях изгибные волны, нестационарные и циклические процессы перехода от одних изгибных форм к другим и т. п.

Итак, для теоретического обоснования этих и им подобных явлений требуется разработка нелинейной динамической теории оболочек как систем с несколькими степенями свободы, позволяющей описать особенности энергообмена и взаимодействия между различными формами, выявить основные закономерности нелинейного деформирования оболочек при представлении их многомерными моделями. Задачи такого рода, несмотря на их научную и прикладную значимость, практически не отражены в литературе. В монографии [29] впервые были представлены некоторые результаты исследований по данной проблеме.

В пособии с единых методологических позиций (учитывается взаимосвязанность нескольких различных изгибных форм) изложены обобщающие результаты по исследованию нелинейных свободных, вынужденных и параметрических колебаний, наиболее распространенных в технике цилиндрических и квазицилиндрических оболочек.

«Нелинейное» поведение оболочек рассматривается при действии различных динамических нагрузок: поперечных периодически изменяющихся во времени сил, осевых пульсирующих сил, комбинированных нагрузок. Проведено подробное исследование возможных колебательных и волновых форм движений оболочек, построены амплитудно-частотные характеристики их вынужденных и параметрических колебаний, рассмотрены многочастотные колебания. Главное внимание уделено описанию тех нелинейных и резонансных явлений, которые порождены взаимосвязью и взаимодействием различных форм колебаний оболочек.

В книге приведены решения некоторых линейных и нелинейных задач о колебаниях оболочек с жидкостью.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В настоящей главе кратко приводятся необходимые сведения о тонких упругих оболочках, их напряженном и деформированном состояниях, нелинейных уравнениях движения, которые используются в последующих главах при решении конкретных задач. Рассматриваются некоторые упрощенные варианты основных динамических уравнений цилиндрических оболочек, приводятся нелинейные уравнения движения квазицилиндрических оболочек (оболочек с малыми начальными неправильностями геометрической формы).

С различными нелинейными теориями оболочек (классической, скорректированной классической Тимошенко, неклассической) можно ознакомиться в фундаментальных работах В. З. Власова [7], В. В. Новожилова [40], Х. М. Муштари и К. З. Галимова [38], А. С. Вольмира [8, 9], А. Л. Гольденвейзера [16].

§ 1.1. Вводные замечания. Гипотезы Кирхгофа—Лява

В механике сплошных твердых деформируемых сред оболочкой принято называть тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки) мало по сравнению с прочими его размерами.

Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих поверхностей, образующих оболочку, называют срединной поверхностью оболочки.

В дальнейшем будем рассматривать оболочки постоянной толщины h . В этом случае геометрия оболочки полностью определена, если заданы форма срединной поверхности, значение параметра h и граничный контур.

В зависимости от очертания срединной поверхности оболочки бывают цилиндрические, конические, эллиптические, тороидальные и пр. В реальных конструкциях наиболее распространенными являются оболочки, имеющие форму разветвляющихся поверхностей, причем чаще всего встречаются цилиндрические оболочки.

Основной задачей теории упругих оболочек является, как известно, изучение их напряженно-деформированного состояния под действием некоторых заданных статических, динамических или комбинированных нагрузок. В об-

щем случае решение такой задачи сопряжено со значительными математическими трудностями, поскольку оболочка, с точки зрения теории упругости, представляет собой трехмерную конструкцию, и проблема, таким образом, сводится к рассмотрению сложных трехмерных задач механики деформируемого твердого тела. Поэтому исследователи идут обычно по пути введения некоторых априорных предположений относительно напряженного и деформированного состояния оболочки, позволяющих исходную трехмерную задачу свести к двумерной, после решения которой можно приближенно восстановить трехмерные поля смещений, деформаций и напряжений в изучаемой оболочке.

В большинстве случаев проблема сведения уравнений трехмерной теории упругости к уравнениям для двух измерений основывается на гипотезе прямых недеформируемых нормалей, т. е. гипотезе Кирхгофа — Лява. Согласно этой гипотезе любое волокно оболочки, нормальное к срединной поверхности до деформации, остается прямым и нормальным и после деформации. Кроме того, длина волокна вдоль толщины оболочки остается неизменной. Дополнительное допущение состоит в том, что компоненты нормальных напряжений в направлении перпендикуляра к срединной поверхности малы по сравнению с основными напряжениями и ими можно пренебречь. Заметим, что под основными напряжениями в теории оболочек понимают нормальные и касательные напряжения в их срединной поверхности и в слоях оболочки, параллельных ей.

В рамках сформулированной выше гипотезы исследование поведения элемента оболочки сводится по существу к исследованию поведения ее срединной поверхности. Естественно, возникает вопрос о погрешностях такого подхода, о пределах применимости теории оболочек, построенной на основании гипотезы прямых недеформируемых нормалей, иначе, «классической» теории оболочек [7, 22].

Многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями установлено, что классическая теория вполне удовлетворительно описывает статику достаточно тонких оболочек, т. е. оболочек, определяемых соотношением $\left(\frac{h}{R}\right)_{\max} \leq 0,05$, где R — радиус кривизны срединной поверхности. Погрешность обсуждаемой теории в данном случае незначительна, и, как правило, не превышает 5 %.

Что касается задач динамики, то классическая теория позволяет без заметных погрешностей определять, напри-

мер, интегральные характеристики колебаний, в частности, низшие собственные частоты, решать многочисленные нелинейные проблемы теории оболочек (более подробно об этом см. [22]).

Вместе с тем необходимо отметить, что классическая теория оболочек непригодна к изучению явлений вблизи точек приложения сосредоточенных нагрузок. Она приводит к весьма заметным погрешностям также при изучении высокочастотных процессов, нестационарных процессов, быстро протекающих во времени, и пр. Во всех этих случаях необходимо использовать другие уточненные теории оболочек, в частности скорректированную классическую теорию С. П. Тимошенко, различные неклассические теории или их комбинации. С основными принципами построения уравнений оболочек, соответствующих указанным теориям, можно ознакомиться в работах [7, 8, 22, 38, 43, 46, 48].

§ 1.2. Деформации и перемещения

Используя принятое допущение о нерастяжимости и несжимаемости материала оболочки в направлении толщины, приведем основные геометрические и физические соотношения классической теории оболочек.

Рассмотрим вначале деформированное состояние оболочки произвольного очертания, предполагая, что прогибы точек ее срединной поверхности могут быть одного порядка с толщиной оболочки h ($h = \text{const}$).

Будем пользоваться правой декартовой системой координат x, y, z , причем координатные линии x, y условимся совмещать с линиями кривизны срединной поверхности,

а ось z направим вдоль нормали к срединной поверхности к центру кривизны. Отметим, что линии кривизны представляют собой такие линии, касательные к которым в каждой точке срединной поверхности совпадают с главными направлениями [7, 8].

Обозначим компоненты перемещения точек срединной поверхности в направлениях x, y, z соответственно через u, v, w . Тогда, если предста-

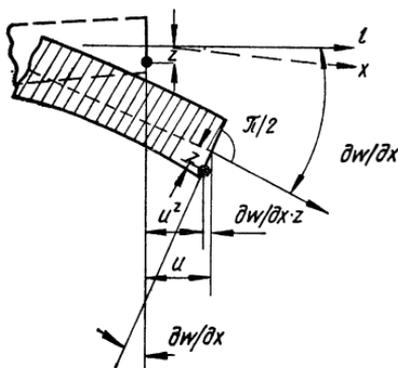


Рис. 1.1

вим себе деформацию элемента в сечении оболочки плоскостью, касательной к линиям x, z (рис. 1.1), то перемещение произвольной точки оболочки с координатой z до деформации $u^z = u^z(x, y, z, t)$ в соответствии с гипотезой Кирхгофа — Лява

$$u^z = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (1.1)$$

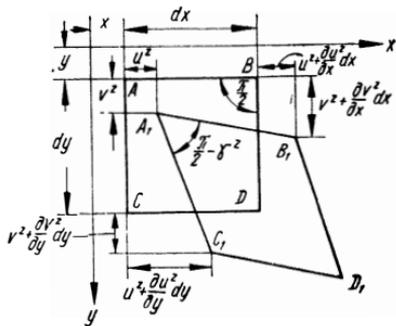


Рис. 1.2

где $\frac{\partial w}{\partial x}$ — угол, на который поворачивается нормаль к линии x в результате деформации элемента.

Аналогично для v^z и w^z получим

$$v^z = v - z \frac{\partial w}{\partial y}; \quad w^z = w. \quad (1.2)$$

Определим деформации удлинения ϵ_x^z и ϵ_y^z в направлении линий x, y и деформацию сдвига γ^z в слое оболочки, удаленном на расстояние z от срединной поверхности.

Полные выражения для деформаций ϵ_x^z и ϵ_y^z [17] представляют наложение трех видов деформаций: обусловленных перемещениями u^z, v^z ; связанных с радиальным перемещением (перемещением к центру кривизны или от него); возникающих вследствие изменения прогиба вдоль координатных линий x, y .

Для определения деформаций удлинения, обусловленных перемещениями u^z и v^z , выделим элемент слоя оболочки $ABCD$, параллельного срединной поверхности, и рассмотрим его деформацию (рис. 1.2). Пусть координаты точки A до деформации (x, y) и эта точка получает перемещения u^z, v^z . Перемещения точки B с координатами $(x + dx, y)$ при этом соответственно равны $(u^z + \frac{\partial u^z}{\partial x} dx, v^z + \frac{\partial v^z}{\partial x} dx)$. Следовательно, новая длина элемента dx после деформации составит

$$ds_1 = \overline{A_1B_1} = \left[\left(dx + \frac{\partial u^z}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v^z}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.3)$$

или после разложения в ряд

$$ds_1 = dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial u^z}{\partial x} + \left(\frac{\partial u^z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^z}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}. \quad (1.4)$$

В выражении (1.4) отброшены нелинейные члены высшего порядка малости. Таким образом, искомая деформация удлинения

$$\varepsilon_x^z = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} \right)^2. \quad (1.5)$$

По аналогии

$$\varepsilon_y^z = \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial y} \right)^2. \quad (1.6)$$

Используя результаты работы [7], приведем без вывода выражения для компонент деформаций ε_x^z , ε_y^z , вызванных радиальными перемещениями оболочки

$$\varepsilon_x^z = -k_x w; \quad \varepsilon_y^z = -k_y w \quad (1.7)$$

и изменением прогиба вдоль координатных линий (x , y)

$$\varepsilon_x^z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y^z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (1.8)$$

В соотношениях (1.7) $k_x = \frac{1}{\rho_x}$; $k_y = \frac{1}{\rho_y}$ — значения кривизны срединной поверхности оболочки; ρ_x , ρ_y — радиусы кривизны линий соответственно вдоль x и y (предполагаются постоянными).

Полное выражение для деформации сдвига γ^z в произвольном слое оболочки имеет следующий вид:

$$\gamma^z = \frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.9)$$

Поскольку оболочка предполагается тонкостенной $\left(\left(\frac{h}{R} \right)_{\max} \ll 1 \right)$, то естественно принять, что углы поворота $\frac{\partial w^2}{\partial x}$, $\frac{\partial w^2}{\partial y}$, связанные с прогибом, значительно превышают значения производных $\frac{\partial u^2}{\partial x}$, $\frac{\partial u^2}{\partial y}$ и т. д., относящихся к деформациям в массиве материала. Будем также считать, что квадраты производных $\left(\frac{\partial w^2}{\partial x} \right)^2$ одного порядка с составляющими $\frac{\partial u^2}{\partial x}$, $\frac{\partial v^2}{\partial y}$ и т. д. В результате на основании выражений (1.5) — (1.9) получаем такие окончательные соотношения для полных деформаций удлинения и сдвига в слое оболочки, удаленном на расстоянии z от срединной по-

верхности

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^z &= \frac{\partial u^z}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 - k_x \omega; \\ \varepsilon_y^z &= \frac{\partial v^z}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 - k_y \omega; \\ \gamma^z &= \frac{\partial u^z}{\partial y} + \frac{\partial v^z}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Воспользуемся далее зависимостями (1.1), (1.2). Подставляя их в (1.10), получаем

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + \varepsilon_{x,u}; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + \varepsilon_{y,u}; \quad \gamma^z = \gamma + \gamma_u, \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - k_x \omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - k_y \omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}\end{aligned}\quad (1.12)$$

— выражения деформаций срединной поверхности оболочки (когда $z = 0$), а

$$\varepsilon_{x,u} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{y,u} = -z \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}; \quad \gamma_u = -2z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (1.13)$$

— деформации изгиба.

Таким образом, для определения полных деформаций произвольной точки по толщине оболочки ε_x^z , ε_y^z , γ^z необходимо «просуммировать» деформации срединной поверхности ε_x , ε_y , γ с соответствующими деформациями изгиба $\varepsilon_{x,u}$, $\varepsilon_{y,u}$, γ_u .

На основании соотношений (1.12) нетрудно получить уравнение совместности или неразрывности деформаций в срединной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \\ &- k_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Подчеркнем, что это уравнение характеризует чисто геометрические свойства оболочки до и после деформации,

поскольку не зависит ни от причин, вызвавших деформацию, ни от закона сопротивления материала внешним нагрузкам.

§ 1.3. Деформации и напряжения

Рассмотрим кратко физические соотношения теории оболочек, устанавливающие взаимосвязь деформаций и напряжений. При этом исходим из того, что деформации лежат в пределах упругости и подчиняются закону Гука.

Если обозначить через σ_x и σ_y — нормальные, а через τ — касательные напряжения в срединной поверхности, то отвечающие этим напряжениям нормальные (N_x , N_y) и касательное (T) усилия, приходящиеся на единицу длины граней (рис. 1.3), запишем так:

$$N_x = \sigma_x h, \quad N_y = \sigma_y h, \quad T = \tau h. \quad (1.15)$$

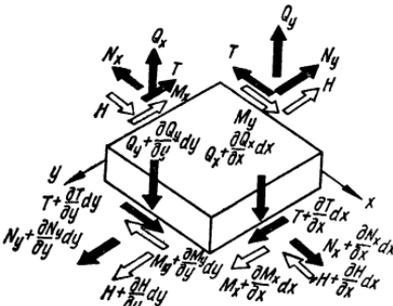
Выражения для изгибающих M_x , M_y и крутящего H моментов (рис. 1.3) имеют вид

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x,n} z dz; \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{y,n} z dz; \quad (1.16)$$

$$H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{n,z} z dz,$$

где $\sigma_{x,n}$, $\sigma_{y,n}$ — нормальные и τ_n — касательное напряжения изгиба.

Приведем также выражения поперечных сил Q_x и Q_y , приходящихся на единицу длины граней (рис. 1.3). Они определяются соотношениями



$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz; \quad (1.17)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz,$$

где τ_{xz} , τ_{yz} — напряжения поперечного сдвига.

Рис. 1.3

В соответствии с введенной статической гипотезой для деформаций в срединной поверхности запишем известные формулы [40]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y); & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x); \\ \gamma &= \frac{\tau}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau,\end{aligned}\tag{1.18}$$

где E — модуль упругости первого рода, G — модуль упругости при сдвиге, μ — коэффициент Пуассона.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x); \\ \tau &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Подставляя зависимости (1.12) в (1.19), а (1.19) в (1.15), получаем связь между усилиями, действующими в срединном слое оболочки, и перемещениями:

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}; \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}; \\ T &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{1.20}$$

В свою очередь, на основании соотношений (1.16) имеем

$$\begin{aligned}M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D (\kappa_x + \mu\kappa_y); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D (\kappa_y + \mu\kappa_x); \\ H &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1-\mu) \chi,\end{aligned}\tag{1.21}$$

где

D — цилиндрическая жесткость оболочки, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$;

κ_x, κ_y — параметры изменения кривизны; χ — кручение срединной поверхности.

Зависимости поперечных сил Q_x и Q_y от перемещений будут приведены несколько позже.

§ 1.4. Вариационное уравнение движения

Представленные в предыдущих параграфах геометрические и физические соотношения теории оболочек являются исходной предпосылкой для вывода дифференциальных уравнений движения оболочки.

Динамические уравнения оболочки могут быть получены с использованием принципа Д'Аламбера или вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. Согласно последнему, истинное движение выделяется из всех возможных движений, переводящих систему из одного и того же начального положения за один и тот же промежуток времени $[t_0, t_1]$ в одно и то же конечное положение тем, что для него выполняется условие

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta' W) dt = 0, \quad (1.22)$$

где K — кинетическая и Π — потенциальная энергии системы; $\delta' W$ — сумма элементарных работ внешних сил.

Воспользуемся в дальнейшем принципом Гамильтона — Остроградского.

Кинетическая энергия оболочки в случае, если не учитывается инерция вращения элемента, определяется следующей формулой:

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (1.23)$$

где ρ — плотность материала оболочки.

Потенциальная энергия Π представляет собой сумму энергий, соответствующих деформации конструкции в срединной поверхности Π_c и деформации изгиба Π_n :

$$\Pi = \Pi_c + \Pi_n. \quad (1.24)$$

Энергия деформации срединной поверхности определяется так:

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \iint_S (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + T \gamma) dx dy, \quad (1.25)$$

или, с учетом выражений (1.12),

$$\begin{aligned} \Pi_{\bullet} = & \frac{1}{2} \iint_S \left\{ N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ & + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & \left. + T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (1.26)$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{н}} = & \frac{1}{2} \iint_S (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2H\chi) dx dy = \\ = & -\frac{1}{2} \iint_S D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Элементарная работа внешних сил

$$\delta' W = \iint_S (p_x \delta u + p_y \delta v + q \delta w) dx dy, \quad (1.28)$$

где p_x , p_y , q — интенсивность заданных внешних нагрузок, приложенных к оболочке по направлениям x , y , z соответственно.

Определяя вариацию кинетической и полной потенциальной энергии и подставляя полученные при этом выражения совместно с (1.28) в условие (1.22), получаем следующие нелинейные дифференциальные уравнения движения элемента оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + p_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} + p_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0; \\ k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \\ + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Уравнения вида (1.29) нетрудно получить и исходя из условий равновесия элемента оболочки, по граням которого действуют усилия в срединной поверхности, моменты и поперечные силы (рис. 1.3). Первые два уравнения (1.29) представляют собой в данном случае не что иное, как уравнения движения элемента в проекциях на направления касательных к линиям x и y соответственно. Уравнение в проекциях всех сил на направление нормали к срединной поверхности с учетом принятых допущений имеет вид

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} + N \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.30)$$

Его следует рассматривать совместно с уравнениями моментов относительно касательных к линиям x , y *:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (1.31)$$

Вводя последние соотношения в (1.30), получим третье уравнение движения оболочки (1.29). Из соотношений (1.31) с учетом (1.21) находим также зависимости поперечных сил от перемещений оболочки:

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \\ \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

К динамическим уравнениям (1.29) должны быть присоединены граничные и начальные условия.

Если края оболочки не получают нормальных перемещений, то на них должно выполняться условие $w = 0$. При шарнирном опирании краев реализуется условие $M_x = 0$ или $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. В случае же жесткого защемления края оболочки не могут смещаться вдоль граничной линии, следовательно, $v = 0$. А в случае свободного сме-

* Третье уравнение моментов, как известно, не выполняется, что является следствием наложения гипотез Кирхгофа — Лява. Вносимая при этом погрешность имеет тот же порядок, что и другие соотношения теории тонких оболочек [22, 40].

щения точек незагруженного края оболочки вдоль нормали к граничной линии следует принять $N_x = 0$.

Если одновременно выполняются условия

$$\omega = 0, v = 0, M_x = 0, N_x = 0 \quad (1.33)$$

при $x = 0, x = l$ (l — длина оболочки), то они соответствуют так называемому «классическому» свободному опиранию оболочек.

Другие виды граничных условий приведены в работах [8, 9, 38].

§ 1.5. Частные случаи динамических уравнений.

Учет начальных несовершенств

Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, радиус срединной поверхности которой равен R . Тогда, если выразить усилия и моменты, входящие в уравнения (1.29) через перемещения u, v, w в соответствии с зависимостями (1.20), (1.21), и положить $k_x = 0, k_y = \frac{1}{R}$, то получим следующие уравнения движения данной оболочки в перемещениях:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & + \frac{1-\mu^2}{Eh} p_x - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\ & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu^2}{Eh} p_y - \\ & - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{12} \nabla^4 w - \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R^2} - \frac{\mu}{2R} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \\ & - \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu}{R} w \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} \omega \right) \right] + \\
& + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1-\mu^2}{Eh} q + \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

При получении уравнений (1.34) были отброшены некоторые члены высшего порядка малости [8].

Из (1.34) следует, что малые (линейные) колебания круговых цилиндрических оболочек описываются системой уравнений вида

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \\
& + \frac{1-\mu^2}{Eh} p_x - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
& \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \\
& + \frac{1-\mu^2}{Eh} p_y - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \tag{1.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{12} \nabla^4 \omega - \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\omega}{R^2} - \frac{1-\mu^2}{Eh} q + \\
& + \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned}$$

В ряде случаев динамические процессы в оболочке можно рассматривать без учета распространения упругих волн, вследствие чего становится возможным отбросить инерционные члены в первых двух уравнениях системы (1.34). Эти уравнения тождественно удовлетворяются, если ввести функцию напряжений в срединной поверхности Φ (при условии $p_x = p_y = 0$) такую, что

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x = \frac{N_x}{h}; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y = \frac{N_y}{h}; \\
& \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau = -\frac{T}{h}. \tag{1.36}
\end{aligned}$$

Основное (третье) уравнение движения (1.34) примет тогда вид

$$\frac{D}{h} \nabla^4 \omega = L(\omega, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}. \tag{1.37}$$

Здесь $L(\omega, \Phi)$ — дифференциальный оператор вида

$$L(\omega, \Phi) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (1.38)$$

Полученное динамическое уравнение (1.37) следует рассматривать совместно с уравнением неразрывности деформаций (1.14), которое с использованием зависимостей (1.20) и (1.36) можно представить в форме

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(\omega, \omega) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad (1.39)$$

где

$$L(\omega, \omega) = 2 \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (1.40)$$

Приведем в заключение систему разрешающих динамических уравнений для цилиндрической оболочки с малой начальной погибью $\omega_0 = \omega_0(x, y)$ (малым отклонением от идеальной цилиндрической формы) в срединной поверхности. В этом случае в выражениях для деформаций (1.12) изменятся лишь составляющие, обусловленные перемещением ω [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\omega_0 + \omega_1)}{\partial x} \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\omega_0 + \omega_1)}{\partial y} \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{\omega_1}{R}; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_0 + \omega_1)}{\partial x} \frac{\partial(\omega_0 + \omega_1)}{\partial y} - \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \frac{\partial \omega_0}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где ω_1 — «дополнительный» упругий прогиб; $\omega = \omega_1 + \omega_0$ — полный прогиб.

Повторяя вывод основных уравнений вместо (1.37) и (1.39), получим соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 (\omega - \omega_0) &= L(\omega, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} [L(\omega, \omega) - L(\omega_0, \omega_0)] - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (\omega - \omega_0)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.42)$$

или с учетом замены $\omega_1 = \omega - \omega_0$

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 \omega_1 &= L(\omega_1 + \omega_0, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h} - \rho \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(\omega_1 + 2\omega_0, \omega_1) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Выписанные выше системы уравнений в форме (1.37), (1.39) и (1.42) являются одними из основных при определении и исследовании нелинейных динамических характеристик цилиндрических и близких к ним по геометрии оболочек. Имеются в виду частоты собственных колебаний при больших (конечных) прогибах, формы колебаний, амплитудно-частотные и фазово-частотные зависимости при действии продольных или поперечных осциллирующих нагрузок и т. п. Эти уравнения, а также уравнения в форме (1.35) будут использоваться нами в дальнейшем при решении соответствующих задач о колебаниях. Отметим, что уравнения типа (1.37), (1.39) являются обобщением на случай криволинейной поверхности уравнений Т. Кармана для плоских упругих пластин, полученных в 1910 г. В научной литературе уравнения (1.42) называют еще уравнениями Донелла — Муштари — Власова.

Г Л А В А 2

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

Исследование системы динамических уравнений оболочек (1.37), (1.39) или (1.43) представляет собой весьма сложную в математическом отношении задачу, поскольку общие методы решения нелинейных дифференциальных уравнений пока отсутствуют. Для приближенного решения указанных задач в настоящее время применяются различные аналитические и численные методы, в частности прямые вариационные методы (Бубнова — Галеркина, Ритца и др.), сводящие решение исходной системы в частных производных к анализу некоторой конечной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. гл. 3), метод возмущений, метод конечных элементов и т. д. Среди аналитических методов чаще всего используется метод Бубнова — Галеркина в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики.

Отметим, что одним из основных вопросов при применении прямых вариационных методов для решения нелинейных задач является вопрос о выборе аппроксимирующих выражений для функций, описывающих динамические перемещения оболочки u , v и w . В качестве таких аппроксимаций обычно используются формы собственных линейных колебаний исследуемых оболочек. Эти формы, как известно, определяются «внутренними» (геометрическими) свойствами оболочки такими, например, как замкнутость контура, круговое поперечное сечение, начальные отклонения от идеальной цилиндрической поверхности и т. п., а также физическими параметрами. В первом приближении они (формы) характеризуют движение оболочки и при немалых (конечных) прогибах, когда деформации становятся нелинейно зависящими от перемещений. В связи с этим большое значение приобретает решение линейных задач теории колебаний оболочек, позволяющих точно определить их основные динамические характеристики.

В настоящей главе рассматриваются собственные формы, а также отвечающие им частоты колебаний цилиндрических и близких к ним оболочек, соответствующие малым перемещениям последних, т. е. линейным колебаниям. Наряду с известными традиционными результатами здесь представлены также решения некоторых новых линейных задач динамики оболочек. Речь идет об определении и аналитическом представлении форм собственных колебаний оболочек с осесимметричной и неосесимметричной начальными погоями, о волновых формах движения оболочек, об особенностях частотного спектра оболочек с «динамической асимметрией» (эффект «расщепления» частот), о влиянии граничных условий на динамические характеристики оболочек с начальными неправильностями формы.

§ 2.1. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки

Рассмотрение задач о линейных колебаниях оболочек начнем с исследования собственных частот и форм оболочки, имеющей идеальную цилиндрическую срединную поверхность с круговым поперечным сечением. Причина выбора такой оболочки в качестве исходного объекта очевидна и обусловлена тем, что, с одной стороны, она является простейшим типом оболочек вообще, с другой — обладает многими свойствами, характерными для оболочек произвольного типа. Кроме того, изучению колебаний таких оболочек посвящено большое количество публикаций (см., например, [4, 7—11, 16, 18, 26, 27, 33, 43, 46] и др.).

Исходные динамические уравнения оболочки выберем в форме (1.35), в которых положим $p_x = 0$, $p_y = 0$, $q = 0$. Вводя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{R}; \quad \varphi = \frac{y}{R} \quad (2.1)$$

и используя обозначения

$$\beta = \frac{h^2}{12R^2}; \quad L^* = \frac{1 - \mu^2}{E} \rho R^2, \quad (2.2)$$

запишем эти уравнения в операторном виде

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= L^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= L^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; & L_{12} &= \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi}; \\
 L_{13} &= -\mu \frac{\partial}{\partial \xi}; & L_{21} &= \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi} = L_{12}; \\
 L_{22} &= \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; & L_{23} &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}; \\
 L_{31} &= \mu \frac{\partial}{\partial \xi} = -L_{13}; & L_{32} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} = -L_{23}; \\
 L_{33} &= -1 - \beta \nabla^4; & \nabla^4 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Как видно, уравнения системы (2.3) связаны между собой, поскольку каждое из них содержит все три неизвестные переменные u , v и w , определяющие перемещения оболочки. Для исследования этих уравнений более удобной является «несвязанная» форма, когда одно из них содержит лишь одну переменную, а два других связывают функции u и v с w . Часто на практике требуется определить лишь решение уравнения относительно компоненты w , поскольку оно выражает самое существенное условие равновесия всех сил (включая силы инерции) в наиболее «слабом» поперечном направлении оболочки.

С целью получения уравнений в несвязанной форме рассмотрим первые два уравнения системы (2.3). Исключая из них поочередно перемещения u и v , получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned}
 [L_{11}^* (L_{22}^*) - L_{12}^2] v &= [L_{13} (L_{21}) - L_{11}^* (L_{23})] w; \\
 [L_{11}^* (L_{22}^*) - L_{12}^2] u &= [L_{12} (L_{23}) - L_{13} (L_{22})] w.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь использованы символические обозначения:

$$\begin{aligned}
 L_{12}^2 &= (L_{12})^2 = \left(\frac{1+\mu}{2} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2}; \\
 L_{11}^* &= L_{11} - L^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}; & L_{22}^* &= L_{22} - L^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \\
 L_{11}^* (L_{22}^*) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - L^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \\
 &\times \left(\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - L^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) =
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \\
&\quad + L^* \frac{\partial^4}{\partial t^4} - L^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{1-\mu}{2} \nabla^4 + L^* \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \\
&\quad - L^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{3-\mu}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \left(\frac{1+\mu}{2} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

и т. д.

Если аналогичным путем исключить перемещения u и v из третьего уравнения (2.3), учитывая (2.5), то получим уравнение относительно прогиба w :

$$\begin{aligned}
&[(L_{11}^* L_{22}^* - L_{12}^2) L_{33} + (L_{13} L_{21} - L_{11}^* L_{23}) L_{32} - \\
&\quad - (L_{22}^* L_{13} - L_{12} L_{23}) L_{31}] w = 0, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

после раскрытия которого имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 w + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 w) = \\
&= \frac{L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + (3+2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3-\mu}{1-\mu} \beta \nabla^6 w + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2L^*}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3-\mu}{2} \nabla^2 w - w - \beta \nabla^4 w - L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right], \quad (2.8)
\end{aligned}$$

где

$$\nabla^6 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^3; \quad \nabla^8 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^4.$$

Уравнения (2.5) примут соответственно вид

$$\begin{aligned}
&\nabla^4 u - \frac{2}{1-\mu} L^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3-\mu}{2} \nabla^2 u - L^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{2\mu}{1-\mu} L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right); \quad (2.9) \\
&\nabla^4 v - \frac{2}{1-\mu} L^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3-\mu}{2} \nabla^2 v - L^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(2+\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{1-\mu} L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, если из уравнения (2.8) найдено значение прогиба w , то, подставляя его в уравнения (2.9), легко можно перейти к определению перемещений u и v . То

обстоятельство, что порядок уравнений (2.8), (2.9) несколько выше, чем порядок исходной системы (2.3), на первый взгляд несколько усложняет математическую сторону задачи, поскольку число краевых условий в обоих случаях остается неизменным, а количество независимых решений может возрасти. В этом случае из числа всевозможных решений (независимых) следует рассматривать лишь те, которые не противоречат физическому содержанию задачи. Остальные решения, лишенные физического смысла, следует опустить, поскольку они обусловлены математическими преобразованиями, которые привели к повышению порядка уравнений.

Общее решение систем уравнений (2.3) или (2.8), (2.9) может быть представлено в виде разложения по формам собственных колебаний:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} e^{\tilde{\lambda}_m \xi} \cos n\varphi e^{i\omega t}; \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} e^{\tilde{\lambda}_m \xi} \sin n\varphi e^{i\omega t}; \\ \omega &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} e^{\tilde{\lambda}_m \xi} \cos n\varphi e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$ — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий на каждом краю оболочки; ω — собственная частота. В случае однородных краевых условий частота ω зависит лишь от некоторого одного параметра n , характеризующего число окружных волн деформаций, и тогда становится возможным в рядах (2.10) не производить суммирование по n . Функцию прогиба w в этом случае можно записать в форме

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{\tilde{\lambda}_m \xi} \cos n\varphi e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Аналогичный вид имеют разложения и для u , v .

Подставляя ряд (2.11) в уравнение (2.8), получим характеристическое уравнение для определения параметра $\tilde{\lambda}_m$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} &\Omega^8 - \Omega^2 \left[1 + \frac{3-\mu}{2} n^2 (1-k^2) + \beta n^4 (1-k^2)^2 \right] + \\ &+ \Omega \left[\frac{3-\mu}{2} n^2 (1-k^2) - n^2 (1-\mu^2 k^2) + \frac{1-\mu}{2} n^4 (1-k^2)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{3-\mu}{2} \beta n^6 (1-k^2)^3 \Big] - \frac{1-\mu}{2} (1-\mu^2) k^2 n^4 - \\ - \frac{1-\mu}{2} \beta n^8 (1-k^2)^4 = 0, \quad (2.12)$$

где

$$k = \frac{\tilde{\lambda}_m}{n}; \quad \Omega = L^* \omega^2. \quad (2.13)$$

Этому уравнению можно придать форму

$$\tilde{\lambda}_m^8 + g_1 \tilde{\lambda}_m^6 + g_2 \tilde{\lambda}_m^4 + g_3 \tilde{\lambda}_m^2 + g_4 = 0, \quad (2.14)$$

где g_i — постоянные коэффициенты, легко определяемые на основании (2.12).

Поскольку корнями уравнения (2.14) обычно являются [7]

$$\tilde{\lambda}_m = \pm p; \quad \tilde{\lambda}_m = \pm iq; \quad \tilde{\lambda}_m = \pm (c \pm id), \quad i = \sqrt{-1} \quad (2.15)$$

(p, q, c, d — действительные числа), то решение (2.11) можно, очевидно, представить так:

$$\omega = [\tilde{C}_1 e^{p\xi} + \tilde{C}_2 e^{-p\xi} + \tilde{C}_3 \cos q\xi + \tilde{C}_4 \sin q\xi + \\ + e^{c\xi} (\tilde{C}_5 \cos d\xi + \tilde{C}_6 \sin d\xi) + \\ + e^{-c\xi} (\tilde{C}_7 \cos d\xi + \tilde{C}_8 \sin d\xi)] \cos n\varphi e^{i\omega t}, \quad (2.16)$$

где $\tilde{C}_j, j = 1 \div 8$, — постоянные, определяемые из граничных условий.

Аналогичный вид имеют выражения для перемещений u и v , причем в качестве постоянных коэффициентов в них входят некоторые комбинации параметров $\tilde{C}_j, j = 1 \div 8$.

Удовлетворяя краевым условиям, получим восемь уравнений относительно неизвестных \tilde{C}_j , содержащих параметры p, q, c, d . Приравнявая определитель системы к нулю, можно найти значения собственных частот ω .

Рассмотрим оболочку с краевыми условиями Навье:

$$v = w = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad \left(\xi = 0, \xi = \frac{l}{R} \right). \quad (2.17)$$

В этом случае для u , v и w получаем точное решение. Каждый член рядов (2.10) будет при этом равен

$$\begin{aligned} u_{n,m} &= A_{n,m} \cos \lambda_m \xi \cos n\varphi \cos \omega t; \\ v_{n,m} &= B_{n,m} \sin \lambda_m \xi \sin n\varphi \cos \omega t; \\ w_{n,m} &= C_{n,m} \sin \lambda_m \xi \cos n\varphi \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\lambda_m = \frac{m\pi R}{l}$ — параметр продольной волны, который характеризует количество продольных полуволн деформаций ($m = 1, 2, 3, \dots$).

Частотное уравнение в данном случае можно получить на основании (2.12), если положить: $\lambda_m = i\tilde{\lambda}_m$. В итоге имеем

$$\Omega^3 - k_2 \Omega^2 + k_1 \Omega - k_0 = 0, \quad (2.19)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{1-\mu}{2} [(1-\mu^2)\lambda_m^4 + \beta(\lambda_m^2 + n^2)^4]; \\ k_1 &= \frac{3-\mu}{2} (\lambda_m^2 + n^2) [1 + \beta(\lambda_m^2 + n^2)^2] + \\ &+ \frac{1-\mu}{2} (\lambda_m^2 + n^2)^2 - \mu^2 \lambda_m^2 - n^2; \\ k_2 &= 1 + \frac{3-\mu}{2} (\lambda_m^2 + n^2) + \beta(\lambda_m^2 + n^2)^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Исследования показывают, что для фиксированных m и n уравнение (2.19) всегда допускает три действительных корня Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , соответствующие различным отношениям амплитуд u , v и w [17]. При этом два из них, как правило, значительно больше третьего, то есть

$$\Omega_1 \ll \Omega_2, \Omega_3. \quad (2.21)$$

Меньшему корню Ω_1 (меньшей частоте) соответствует форма колебаний, при которой нормальное перемещение w значительно превосходит перемещения u и v .

С учетом соотношений (2.21), (2.19) можно определить приближенное значение корня Ω_1 :

$$\Omega_1 \approx \frac{k_0}{k_1} + \left(\frac{k_0}{k_1} \right)^2 \frac{k_2}{k_1}. \quad (2.22)$$

Пример 1. Рассмотрим оболочку с параметрами

$$\frac{l}{R} = 2,5;$$

$$\frac{h}{R} = 3,125 \cdot 10^{-3}; \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \mu = 0,3. \quad (2.23)$$

Для случая $n = 6$, $m = 1$ находим, что корнями уравнения (2.19) являются

$$\Omega_1 = 2,62 \cdot 10^{-3}; \quad \Omega_2 = 13,207; \quad \Omega_3 = 38,523. \quad (2.24)$$

Подставляя (2.18) в уравнения (2.9), нетрудно получить такие зависимости:

$$\frac{A_{n,m}}{C_{n,m}} = \frac{\lambda_m \left[\frac{2}{1-\mu} \Omega_i + n^2 \left(1 - \mu \frac{\lambda_m^2}{n^2} \right) \right]}{\frac{2}{1-\mu} \Omega_i^2 - \frac{3-\mu}{1-\mu} \Omega_i n^2 \left(1 + \frac{\lambda_m^2}{n^2} \right) + n^4 \left(1 + \frac{\lambda_m^2}{n^2} \right)^2},$$

$$i = 1, 2, 3; \quad (2.25)$$

$$\frac{B_{n,m}}{C_{n,m}} = \frac{n \left\{ n^2 \left[1 + (2+\mu) \frac{\lambda_m^2}{n^2} \right] - \frac{2}{1-\mu} \Omega_i \right\}}{\frac{2}{1-\mu} \Omega_i^2 - \frac{3-\mu}{1-\mu} \Omega_i n^2 \left(1 + \frac{\lambda_m^2}{n^2} \right) + n^4 \left(1 + \frac{\lambda_m^2}{n^2} \right)^2}.$$

Отсюда имеем

$$\text{при } \Omega = \Omega_1 \quad \frac{A_{n,m}}{C_{n,m}} = 0,032; \quad \frac{B_{n,m}}{C_{n,m}} = 0,168;$$

$$\text{при } \Omega = \Omega_2 \quad \frac{A_{n,m}}{C_{n,m}} = -24,311; \quad \frac{B_{n,m}}{C_{n,m}} = -3,006;$$

$$\text{при } \Omega = \Omega_3 \quad \frac{A_{n,m}}{C_{n,m}} = 2,673; \quad \frac{B_{n,m}}{C_{n,m}} = -6,175.$$

Следовательно, при $\Omega = \Omega_1$ оболочка совершает преимущественно изгибные колебания, поскольку $\frac{C_{n,m}}{A_{n,m}} \gg 1$ и $\frac{C_{n,m}}{B_{n,m}} \gg 1$.

Если использовать формулу (2.22), то получим

$$\Omega_1 = 2,677 \cdot 10^{-3}. \quad (2.26)$$

Как видно, Ω_1 из выражения (2.26) незначительно отличается от точного значения Ω_1 из выражений (2.24).

Рассмотрим теперь кратко осесимметричные колебания, т. е. колебания, при которых поперечные сечения оболочки остаются круговыми. Уравнения этих колебаний нетрудно получить из уравнений (2.3), отбросив члены, зависящие от φ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} = L^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = L^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (2.27)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - w = L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Подстановка

$$\begin{aligned} u &= A_m \cos \lambda_m \xi \cos \omega t; \\ v &= B_m \sin \lambda_m \xi \cos \omega t; \\ w &= C_m \sin \lambda_m \xi \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2.28)$$

удовлетворяющая краевым условиям Навье, в уравнения (2.27) приводит к двум независимым частотным уравнениям

$$\Omega - \frac{1 - \mu}{2} \lambda_m^2 = 0; \quad (2.29)$$

$$\Omega^2 - [1 + \lambda_m^2 (1 + \beta \lambda_m^2)] \Omega + \lambda_m^2 [1 - \mu^2 + \beta \lambda_m^4] = 0.$$

Из первого уравнения получаем частоту чисто крутильных колебаний оболочки

$$\Omega = \Omega_{кр} = \frac{1 - \mu}{2} \lambda_m^2. \quad (2.30)$$

Второе уравнение позволяет определить частоты осесимметричных колебаний оболочки Ω_1, Ω_2 , соответствующих перемещениям u и w :

$$\Omega_{1,2} = \frac{1 + \beta \lambda_m^4 + \lambda_m^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(1 + \beta \lambda_m^4 - \lambda_m^2)^2}{4} + \mu^2 \lambda_m^2}. \quad (2.31)$$

Значение отношения $\frac{A_m}{C_m}$ дает возможность оценить «вклад» каждой из компонент w и u в «суммарное» движение оболочки. В данном случае

$$\frac{A_m}{C_m} = \frac{\mu \lambda_m}{\Omega^2 - \lambda_m^2}. \quad (2.32)$$

Пример 2. Определим характеристики осесимметричных собственных колебаний оболочки с параметрами (2.23). Полагая $m = 1$, по формуле (2.30) находим низшую частоту крутильных колебаний $\Omega_{кр} = 0,553$. В свою очередь, на основании уравнений (2.31) получаем значения двух других частот, характеризующих осесимметричные колебания $\Omega_1 = 0,814; \Omega_2 = 1,765$. При этом $\frac{A_m}{C_m} = -0,411$, если $\Omega = \Omega_1$, и $\frac{A_m}{C_m} = 0,245$, если $\Omega = \Omega_2$.

Таким образом, как при первой, так и при второй частоте перемещения в продольном и поперечном направлениях будут при прочих равных условиях близки по величине.

В заключение отметим, что аналогично изложенному выше могут быть рассмотрены собственные колебания оболочек, нагруженных постоянными осевыми силами или

внешним давлением. Уравнения движения оболочки в данном случае запишем в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} &= L^* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= L^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (2.33) \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - \beta \nabla^4 w - \frac{1-\mu^2}{E} \frac{N_x}{2\pi R h} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \\ - \frac{1-\mu^2}{E} \frac{pR}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

где N_x — сжимающая осевая статическая нагрузка, p — давление.

Разрешенное относительно w уравнение, полученное на основе (2.33), примет более сложный, чем (2.8), вид, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 w + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 w) &= \\ = \frac{L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + (3+2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{3-\mu}{1-\mu} \beta \nabla^6 w + \right. \\ \left. + \frac{2L^*}{1-\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{3-\mu}{2} \nabla^2 w - w - \beta \nabla^4 w - L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] - \\ - \frac{N_x}{2(1-\mu)\pi R h E} \left[(1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\nabla^4 w) + 2L^{*2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \partial t^4} - \right. \\ \left. - (3-\mu) L^* \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial t^2} (\nabla^2 w) \right] - \frac{pR}{(1-\mu)hE} \left[2L^{*2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2 \partial t^4} + \right. \\ \left. + (1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\nabla^4 w) - (3-\mu) L^* \frac{\partial^4}{\partial \varphi^2 \partial t^2} (\nabla^2 w) \right]. \quad (2.34) \end{aligned}$$

Анализируя это уравнение обычным способом, можно исследовать зависимость частот и форм собственных колебаний от параметров нагружения N_x и p , определить критические значения этих параметров, при которых может произойти потеря устойчивости оболочки.

§ 2.2. Колебания оболочки без учета распространения упругих волн

Во многих случаях динамические процессы в оболочках можно рассматривать, не учитывая волновой характер распространения деформаций. Это означает, что

при решении соответствующих задач о колебаниях могут быть приняты во внимание лишь силы инерции, отвечающие нормальным перемещениям w . Инерционными членами в первых двух уравнениях системы (2.3) можно пренебречь.

Разрешающие уравнения оболочки примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= 0; \quad (2.35) \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - \beta \nabla^4 w &= L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем параграфе, на основании уравнений (2.35), можно получить несвязанные уравнения типа (2.8), (2.9), которые в данном случае существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 w + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 w) &= 0; \\ \nabla^4 u &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right); \quad (2.36) \\ \nabla^4 v &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right]. \end{aligned}$$

Упростится, естественно, и частотное уравнение (2.19), отвечающее системе (2.36). Оно имеет лишь один действительный корень $\Omega = \Omega_1$ (при краевых условиях Навье):

$$\Omega_1 = \frac{(1-\mu^2) \lambda_m^4 + \beta (\lambda_m^2 + n^2)^4}{(\lambda_m^2 + n^2)^2}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi R}{l}. \quad (2.37)$$

Следовательно, круговая собственная частота оболочки ω выразится так:

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \left[\frac{(1-\mu^2) \lambda_m^4}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} + \beta (\lambda_m^2 + n^2)^2 \right]}, \quad (2.38)$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left[\frac{Er^4}{R^2(r^2 + s^2)^2} + \frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 \right]}, \quad (2.38a)$$

где

$$r = \frac{m\pi}{l}, \quad s = \frac{n}{R}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

В задачах динамики и устойчивости оболочек наибольший практический интерес представляет минимальная частота собственных колебаний, часто называемая еще основной или фундаментальной. Ее нетрудно определить из анализа зависимости (2.38) или (2.38а). Эта частота соответствует одной продольной полуволне деформаций, то есть реализуется при $m = 1$. Значение же $n = n_{\min}$ определяется из условия экстремума

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial s^2} = 0. \quad (2.39)$$

Используя его, получаем

$$n_{\min}^2 = \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\beta}} \lambda_m - \lambda_m^2. \quad (2.40)$$

Отсюда непосредственно следует, что при увеличении относительной длины $\frac{l}{R}$ или толщины $\frac{h}{R}$ оболочки значение n_{\min} убывает.

Подставляя (2.40) в (2.37), находим минимальное значение частотного параметра Ω_1 :

$$\Omega_1 = \Omega_{1 \min} = 2\lambda_m^2 \sqrt{\beta(1 - \mu^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{hR}{l^2} \pi^2 \sqrt{1 - \mu^2}. \quad (2.41)$$

Пример 3. Пусть оболочка характеризуется параметрами (2.23). Тогда на основании формул (2.40), (2.41) получаем соответственно

$$n_{\min} = 6; \quad \Omega_1 = \Omega_{1 \min} = 2,756 \cdot 10^{-3}. \quad (2.42)$$

Сравнение найденного значения частоты $\Omega_{1 \min}$ с соответствующими частотами, полученными для общего случая, когда учитываются процессы распространения волн в материале оболочки (см. (2.24), (2.26)), свидетельствует о незначительном их расхождении. Следовательно, можно сделать заключение о слабом влиянии тангенциальных инерционных сил на основную частоту собственных колебаний.

Общий характер зависимости $\Omega_1 = \Omega_1(n)$, построенный по формуле (2.38), приведен на рис. 2.1. Кривая 1 отвечает одной продольной полуволне деформации ($m = 1$), кривая 2 — $m = 2$.

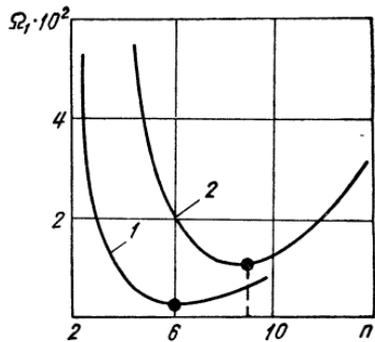


Рис. 2.1

Рассмотрим теперь оболочку, нагруженную осевыми сжимающими усилиями N_x и испытывающую одновременно

радиальное давление p . С учетом принятых выше предположений «несвязанное» уравнение системы (2.36) примет в данном случае вид

$$\frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 \omega + \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^4} + \frac{L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 \omega) + \frac{N_x}{2\pi R h E} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\nabla^4 \omega) + \frac{pR}{hE} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\nabla^4 \omega) = 0. \quad (2.43)$$

Полагая динамический прогиб

$$\omega = C \sin \lambda_m \xi \cos n\varphi \cos \omega t,$$

после подстановки его в (2.43) находим следующее значение частоты собственных колебаний:

$$\Omega = \frac{\lambda_m^4 (1-\mu^2) + \beta (\lambda_m^2 + n^2)^4 - \frac{N_x}{2\pi R h E} \lambda_m^2 (\lambda_m^2 + n^2)^2 (1-\mu^2) \pm \pm \frac{pn^2}{hE} (\lambda_m^2 + n^2) (1-\mu^2)}{(\lambda_m^2 + n^2)^2}. \quad (2.44)$$

Знак «+» перед последним членом в числителе соответствует действию на оболочку внутреннего давления, знак «-» — действию внешнего давления.

Анализируя зависимость (2.44), можно исследовать, как статическое нагружение оболочки сказывается на ее частотном спектре, и в частности на его плотности, значении основной частоты, параметрах волнообразования, соответствующих основной частоте, волновых параметрах, при которых происходит статическая потеря устойчивости оболочки, и т. п. Непосредственно из выражения (2.44) видно, что сжимающие осевые усилия, а также наличие внешнего давления обуславливают уменьшение собственных частот оболочки. Внутреннее же давление, наоборот, увеличивает указанные частоты.

Можно также показать, что осевая нагрузка при изолированном ее действии на оболочку (когда $p = 0$) не влияет на волновые параметры m и n , которые отвечают основной частоте колебаний. Иначе говоря, эти параметры в данном случае для нагруженной и ненагруженной оболочек одни и те же, т. е.

$$m = 1; \quad n^2 = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\beta}} \lambda_m - \lambda_m^2, \quad \lambda_m = \frac{\pi R}{l}. \quad (2.45)$$

В то же время радиальное давление может существенно изменить моду, соответствующую минимальной частоте.

Если принять $\Omega = 0$, то из выражения (2.44) получаем значение критических нагрузок N_x и p (точнее говоря, зависимости между ними), при которых происходит статическая потеря устойчивости оболочки. Так, в случае $p = 0$ имеем

$$\frac{N_x}{2\pi R h E} = \frac{N_{кр}}{2\pi R h E} = \frac{\lambda_m^4 + \frac{\beta}{1-\mu^2} (\lambda_m^2 + n^2)^4}{\lambda_m^2 (\lambda_m^2 + n^2)^2} = 2 \sqrt{\frac{\beta}{1-\mu^2}}. \quad (2.46)$$

Параметры волнообразования при потере устойчивости определяются из условия

$$\frac{\lambda_m^2 + n^2}{\lambda_m^2} = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\beta}}. \quad (2.47)$$

При радиальном нагружении оболочки (когда $N_x = 0$) потеря устойчивости реализуется при

$$\frac{p}{E} = \frac{p_{кр}}{E} = \frac{h}{R} \frac{\lambda_m^4 + \frac{\beta}{1-\mu^2} (\lambda_m^2 + n^2)^4}{n^2 (\lambda_m^2 + n^2)^2}$$

и возможна лишь при наличии внешнего давления. Параметры λ_m и n в этой формуле необходимо выбрать так, чтобы выражение $\frac{p_{кр}}{E}$ было минимальным.

В заключение приведем кратко основные соотношения теории собственных осесимметричных колебаний оболочек. Уравнения для определения динамических перемещений u , v и w имеют вид (при отсутствии статических нагрузок)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} &= 0; \\ \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} - w - \beta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} &= L^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Рассматривая, как обычно, краевые условия Навье, на основании этих уравнений получаем следующее значение параметра собственной частоты оболочки:

$$\Omega_1 = 1 - \mu^2 + \beta \lambda_m^4. \quad (2.49)$$

Поскольку значение параметра β очень мало, то из (2.49) можно сделать заключение, что частоты осесимметричных

колебаний слабо зависят от числа продольных волн деформаций.

При сжатии оболочки осевой нагрузкой N_x вместо (2.49) имеем

$$\Omega = 1 - \mu^2 + \beta \lambda_m^4 - \frac{N_x}{2\pi R h E} \lambda_m^2 (1 - \mu^2). \quad (2.50)$$

Отсюда получаем

$$\frac{N_x}{2\pi R h E} = \frac{N_{кр}}{2\pi R h E} = \min_{\lambda_m} \frac{1 - \mu^2 + \beta \lambda_m^4}{(1 - \mu^2) \lambda_m^2} = 2 \sqrt{\frac{\beta}{1 - \mu^2}}. \quad (2.51)$$

Что касается радиального давления на оболочку, то оно, очевидно, не влияет на значения ее собственных частот (в случае осесимметричных колебаний).

§ 2.3. Волновые формы движения оболочек

Представление решения уравнений (2.3) или (2.8), (2.9) в форме (2.10), т. е. в виде суперпозиции стоячих волн, не является единственным. Можно использовать и другие способы решения указанных уравнений, которые более приспособлены для исследования нестационарных процессов. Наиболее распространенным из них является «волновой» метод, являющийся аналогом метода Д'Аламбера в теории стержней. В соответствии с этим методом решение рассматриваемых уравнений в случае краевых условий Навье ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \cos(n\varphi - \psi_{n,m}^{(1)}) \cos \lambda_m \xi; \\ v &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \sin(n\varphi - \psi_{n,m}^{(2)}) \sin \lambda_m \xi; \\ w &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \cos(n\varphi - \psi_{n,m}^{(3)}) \sin \lambda_m \xi, \end{aligned} \quad (2.52)$$

где $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$, $\psi_{n,m}^{(1)}$, $\psi_{n,m}^{(2)}$, $\psi_{n,m}^{(3)}$ — некоторые функции времени, подлежащие определению, $\lambda_m = \frac{m\pi R}{l}$.

Подставляя разложения (2.52) в уравнения (2.3) и применяя метод Фурье (метод разделения переменных), полу-

чаем следующую систему относительно искомых функций:

$$\begin{aligned}
 & A_{n,m} \left(\lambda_m^2 - \frac{1-\mu^2}{2} n^2 \right) - L^* [\ddot{A}_{n,m} - A_{n,m} (\dot{\psi}_{n,m}^{(1)})^2] + \\
 & \quad + \frac{1+\mu}{2} \lambda_m n B_{n,m} \cos(\psi_{n,m}^{(1)} - \psi_{n,m}^{(2)}) - \\
 & \quad - \mu \lambda_m C_{n,m} \cos(\psi_{n,m}^{(1)} - \psi_{n,m}^{(3)}) = 0; \\
 & L^* (A_{n,m} \ddot{\psi}_{n,m}^{(1)} + 2\dot{A}_{n,m} \dot{\psi}_{n,m}^{(1)}) + \frac{1+\mu}{2} \lambda_m n B_{n,m} \sin(\psi_{n,m}^{(1)} - \psi_{n,m}^{(2)}) - \\
 & \quad - \mu \lambda_m C_{n,m} \sin(\psi_{n,m}^{(1)} - \psi_{n,m}^{(3)}) = 0; \\
 & B_{n,m} \left(n^2 - \frac{1-\mu^2}{2} \lambda_m^2 \right) + L^* [\ddot{B}_{n,m} - B_{n,m} (\dot{\psi}_{n,m}^{(2)})^2] + \\
 & \quad + \frac{1+\mu}{2} \lambda_m n A_{n,m} \cos(\psi_{n,m}^{(1)} - \psi_{n,m}^{(2)}) - \\
 & \quad - n C_{n,m} \cos(\psi_{n,m}^{(2)} - \psi_{n,m}^{(3)}) = 0; \quad (2.53) \\
 & L^* (B_{n,m} \ddot{\psi}_{n,m}^{(2)} + 2\dot{B}_{n,m} \dot{\psi}_{n,m}^{(2)}) + \frac{1+\mu}{2} \lambda_m n A_{n,m} \sin(\psi_{n,m}^{(1)} - \psi_{n,m}^{(2)}) + \\
 & \quad + n C_{n,m} \sin(\psi_{n,m}^{(2)} - \psi_{n,m}^{(3)}) = 0; \\
 & C_{n,m} [\beta (n^2 - \lambda_m^2)^2 + 1] + L^* [\ddot{C}_{n,m} - C_{n,m} (\dot{\psi}_{n,m}^{(3)})^2] - \\
 & \quad - \mu \lambda_m A_{n,m} \cos(\psi_{n,m}^{(1)} - \psi_{n,m}^{(3)}) - n B_{n,m} \cos(\psi_{n,m}^{(2)} - \psi_{n,m}^{(3)}) = 0; \\
 & L^* (C_{n,m} \ddot{\psi}_{n,m}^{(3)} + 2\dot{C}_{n,m} \dot{\psi}_{n,m}^{(3)}) - \mu \lambda_m A_{n,m} \sin(\psi_{n,m}^{(1)} - \psi_{n,m}^{(3)}) - \\
 & \quad - n B_{n,m} \sin(\psi_{n,m}^{(2)} - \psi_{n,m}^{(3)}) = 0.
 \end{aligned}$$

Система (2.53) весьма сложна для исследования, поскольку является нелинейной и связанной. Однако непосредственной подстановкой можно убедиться, что ей тождественно удовлетворяет решение вида

$$\begin{aligned}
 A_{n,m} = A_{n,m}^{(0)} = \text{const}; \quad B_{n,m} = B_{n,m}^{(0)} = \text{const}; \\
 C_{n,m} = C_{n,m}^{(0)} = \text{const}; \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

$$\psi_{n,m}^{(1)} = \psi_{n,m}^{(2)} = \psi_{n,m}^{(3)} = \omega_{n,m} t + \alpha_{n,m}; \quad \alpha_{n,m} = \text{const},$$

где параметр $\omega_{n,m}$ определяется из уравнения (2.19).

Очевидно, что это решение описывает по каждой из координат u , v и w волны, распространяющиеся в окружном направлении с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_{n,m}}$ и соответствующими амплитудами. Это свидетельствует о принципиальной

возможности реализации волновых форм деформирования оболочки, отличающихся от стоячих волн. Для их возбуждения необходимо задать определенные начальные условия $u_0, v_0, \dot{v}_0, \omega_0, \dot{\omega}_0$.

Решение (2.54) системы (2.53) не является единственным. Другие волновые решения более сложные, а, естественно, более сложным будет общее движение оболочки, поскольку бегущие волны могут иметь переменные во времени амплитуды и скорости.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим частный случай уравнений движения оболочки (2.3), принимая во внимание лишь силы инерции, соответствующие нормальным перемещениям. Основное разрешающее уравнение относительно w (2.35) дополним членом, характеризующим конструкционное демпфирование при движении оболочки. Это уравнение примет, таким образом, вид

$$\frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 w + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 w) + \frac{\varepsilon L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 w) = 0, \quad (2.55)$$

где ε — коэффициент конструкционного демпфирования.

Полагая

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \cos(n\varphi - \psi_{n,m}) \sin \lambda_m \xi, \quad (2.56)$$

после подстановки в (2.55) имеем

$$\begin{aligned} \ddot{C}_{n,m} + (\omega_{n,m}^2 - \dot{\psi}_{n,m}^2) C_{n,m} + \varepsilon C_{n,m} &= 0; \\ (\ddot{\psi}_{n,m} + \varepsilon \dot{\psi}_{n,m}) C_{n,m} + 2\dot{C}_{n,m} \dot{\psi}_{n,m} &= 0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где

$$\omega_{n,m}^2 = \frac{\Omega}{L^*}, \quad (2.58)$$

причем Ω выражается по формуле (2.37).

Вводя замену

$$C_{n,m} = E_{n,m} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t}; \quad \psi_{n,m} = \delta_{n,m}, \quad (2.59)$$

преобразуем систему (2.57) к виду

$$\begin{aligned} \ddot{E}_{n,m} + (\omega_{n,m}^{*2} - \delta_{n,m}^2) E_{n,m} &= 0; \\ \ddot{\delta}_{n,m} E_{n,m} + 2\dot{E}_{n,m} \dot{\delta}_{n,m} &= 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

где $\omega_{n,m}^{*2} = \omega_{n,m}^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Одно из решений полученной системы очевидно:

$$E_{n,m} = E_{n,m}^0 \cos(\omega_{n,m}^* t + \alpha_{n,m}^0); \quad \delta_{n,m} = \delta_{n,m}^0 \quad (2.61)$$

($E_{n,m}^0$, $\alpha_{n,m}^0$, $\delta_{n,m}^0$ — постоянные интегрирования) и соответствует стоячей изгибной волне в оболочке.

Для определения других решений представим второе уравнение (2.60) с учетом обозначения

$$\dot{\delta}_{n,m} = F_{n,m} \quad (2.62)$$

в форме

$$\dot{F}_{n,m} F_{n,m}^{-1} = -2\dot{E}_{n,m} E_{n,m}^{-1}. \quad (2.63)$$

(Предполагается $F_{n,m} \neq 0$; $E_{n,m} \neq 0$.)

Интегрируя уравнение (2.63), получаем

$$F_{n,m}^2 = \frac{C_{n,m}^2}{L_{n,m}^2}, \quad (2.64)$$

где $C_{n,m}$ — постоянная интегрирования.

Таким образом, первое уравнение (2.60) можно преобразовать к виду

$$\ddot{E}_{n,m} + \omega_{n,m}^{*2} E_{n,m} = \frac{C_{n,m}^2}{E_{n,m}^3}. \quad (2.65)$$

Отсюда получаем

$$E_{n,m}^2 = \frac{1}{2\omega_{n,m}^{*2}} \left[d_{n,m}^2 \pm \sqrt{d_{n,m}^4 - 4\omega_{n,m}^{*2} C_{n,m}^2} \sin(2\omega_{n,m}^* t + \gamma_{n,m}) \right], \quad (2.66)$$

причем

$$d_{n,m}^2 = \dot{E}_{n,m}^2(0) + \omega_{n,m}^{*2} E_{n,m}^2(0) + \dot{\delta}_{n,m}^2(0) E_{n,m}^2(0);$$

$$\gamma_{n,m} = \arcsin \left(\frac{2E_{n,m}(0) - d_{n,m}^2}{\sqrt{d_{n,m}^4 - 4\omega_{n,m}^{*2} C_{n,m}^2}} \right).$$

Возвращаясь к обозначению (2.62), находим

$$|\dot{\delta}_{n,m}| = 2\omega_{n,m}^{*2} C_{n,m} \left[d_{n,m}^2 \pm \sqrt{d_{n,m}^4 - 4\omega_{n,m}^{*2} C_{n,m}^2} \times \right. \\ \left. \times \sin(2\omega_{n,m}^* t + \gamma_{n,m}) \right]^{-1}. \quad (2.67)$$

В формулах (2.66), (2.67) каждый раз нужно брать верхние или нижние знаки.

Итак, движение оболочки в данном случае представляет собой суперпозицию «обобщенных» затухающих бегущих

ВОЛН ВИДА

$$\omega_{n,m} = E_{n,m} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t} \cos(n\varphi - \delta_{n,m}) \sin \lambda_m \xi, \quad (2.68)$$

где $E_{n,m}$ и $\delta_{n,m}$ — периодические функции времени, определяемые из (2.66), (2.67). Отметим, что режимы бегущих волн являются следствием наложения двух стоячих волн, определенным образом «ориентированных» относительно друг друга, а именно сдвинутых по фазе в окружном направлении на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Действительно, функция $\omega_{n,m}$ (2.68) может быть представлена так:

$$\begin{aligned} \omega_{n,m} &= M_1(t) \cos n\varphi \sin \lambda_m \xi + M_2(t) \sin n\varphi \sin \lambda_m \xi; \\ M_1(t) &= E_{n,m} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t} \cos \psi_{n,m}; \\ M_2(t) &= E_{n,m} e^{-\frac{\varepsilon}{2} t} \sin \psi_{n,m}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

откуда следует это утверждение.

Из выражения (2.66) видно, что если выполняется условие

$$d_{n,m}^2 = 2\omega_{n,m}^* |C_{n,m}|,$$

то получаем важный частный случай: функция $\omega_{n,m}$ описывает бегущую волну с постоянными (при отсутствии затухания) амплитудой и фазовой скоростью:

$$\omega_{n,m} = C_{n,m}^0 \cos(n\varphi - \omega_{n,m} t - \beta_{n,m}^0) \sin \lambda_m \xi. \quad (2.70)$$

Здесь $C_{n,m}^0$, $\beta_{n,m}^0$ — константы, которые выражаются через начальные условия $\omega_{n,m}^0$ и $\dot{\omega}_{n,m}^0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (C_{n,m}^0)^2 &= \left(\omega_{n,m}^{0*} + \frac{\dot{\omega}_{n,m}^{0^2}}{\omega_{n,m}^2} \right) \sin^{-2} \lambda_m \xi; \\ \beta_{n,m}^0 &= n\varphi - \operatorname{arctg} \frac{\dot{\omega}_{n,m}^0}{\omega_{n,m} \omega_{n,m}^0}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Учитывая демпфирование, вместо выражения (2.70) в данном случае имеем

$$\omega_{n,m} = C_{n,m}^0 e^{-\frac{\varepsilon}{2} t} \cos(n\varphi - \omega_{n,m}^* t - \beta_{n,m}^0) \sin \lambda_m \xi. \quad (2.72)$$

Дадим физическую трактовку начальных условий (2.71). С этой целью соотношение (2.70) представим в виде

$$\omega_{n,m} = C_{n,m}^0 \cos(n\varphi - \beta_0) \sin \lambda_m \xi \sin\left(\omega_{n,m}t + \frac{\pi}{2}\right) + C_{n,m}^0 \sin(n\varphi - \beta_0) \sin \lambda_m \xi \sin(\omega_{n,m}t). \quad (2.73)$$

Отсюда следует, что для практической реализации движения (2.73) необходимо в общем случае располагать двумя системами распределенных гармонических сил, прикладываемых к оболочке в начальный момент времени. Первая система должна возбудить изгибную форму $C_{n,m}^0 \cos(n\varphi - \beta_0) \sin \lambda_m \xi$, вторая — форму $C_{n,m}^0 \sin(n\varphi - \beta_0) \sin \lambda_m \xi$, при этом между силовозбудителями обеих систем должен существовать сдвиг по фазе во времени, равный $\frac{\pi}{2}$. Заметим, что если собственные частоты оболочки достаточно «разнесены», то приближенно возбудить в ней бегущую волну (2.70) (реализовать условия (2.71)) можно с помощью лишь двух гармонических силовозбудителей [34, 35]. Амплитуды и частоты обоих силовозбудителей должны быть при этом равными по величине. Если амплитуды первого и второго силовозбудителей различны, то движение оболочки представляет собой «обобщенную» бегущую волну (2.68) с периодически изменяющимися во времени амплитудой и фазовой скоростью.

§ 2.4. Бегущие волны в оболочке при периодическом возбуждении

Волновые формы движения оболочек, описанные в предыдущем параграфе, с течением времени постепенно затухают из-за неизбежных энергетических потерь в упругой системе вследствие влияния сил диссипации. С целью компенсации расхода энергии и поддержания таким образом режима бегущих волн с некоторыми постоянными амплитудами можно использовать внешние, постоянно действующие на оболочку, источники периодического возбуждения. Уравнение, описывающее поведение оболочки в этом случае, имеет вид

$$\frac{\beta}{1-\mu^2} \nabla^8 \omega + \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^4} + \frac{L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 \omega) + \frac{\varepsilon L^*}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^4 \omega) = \frac{L^*}{(1-\mu^2)\rho h} \nabla^4 q, \quad (2.74)$$

где $q = q(\xi, \varphi, t)$ — поперечная периодическая нагрузка.

Поскольку уравнение (2.74) неоднородное, его решение можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \cos(n\varphi - \psi_{n,m}) \sin \lambda_m \xi + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M_{n,m} \cos(n\varphi - \psi_{n,m}^{(1)}) \sin \lambda_m \xi, \end{aligned} \quad (2.75)$$

где первый ряд в правой части представляет собой общее решение однородного уравнения, второй — некоторое частное решение неоднородного уравнения. Для определения неизвестных функций времени $C_{n,m}$, $\psi_{n,m}$, $M_{n,m}$, $\psi_{n,m}^{(1)}$ подставим, как обычно, разложение (2.75) в уравнение (2.74) и применим метод Фурье. В результате получим две системы нелинейно связанных уравнений, одна из которых, очевидно, совпадает с системой (2.57), а вторая имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{n,m} + \varepsilon \dot{M}_{n,m} + [\omega_{n,m}^2 - \dot{\psi}_{n,m}^{(1)2}] M_{n,m} = \\ = \frac{1}{\rho h} [q_{n,m}^{(1)} \cos \psi_{n,m}^{(1)} + q_{n,m}^{(2)} \sin \psi_{n,m}^{(1)}]; \\ [\ddot{\psi}_{n,m}^{(1)} + \varepsilon \dot{\psi}_{n,m}^{(1)}] M_{n,m} + 2\dot{M}_{n,m} \dot{\psi}_{n,m}^{(1)} = \\ = \frac{1}{\rho h} [q_{n,m}^{(2)} \cos \psi_{n,m}^{(1)} - q_{n,m}^{(1)} \sin \psi_{n,m}^{(1)}], \end{aligned} \quad (2.76)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} q_{n,m}^{(1)} = \frac{2}{\pi R l} \int_0^{2\pi R} \int_0^R q(\xi, \varphi, t) \sin \lambda_m \xi \cos n\varphi d\varphi d\xi; \\ q_{n,m}^{(2)} = \frac{2}{\pi R l} \int_0^{2\pi R} \int_0^R q(\xi, \varphi, t) \sin \lambda_m \xi \sin n\varphi d\varphi d\xi. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Для построения частных решений уравнений (2.76) необходимо располагать информацией о законе изменения внешней нагрузки q со временем.

Пусть, например,

$$\begin{aligned} q = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [Q_{n,m}^{(1)} \cos n\varphi + Q_{n,m}^{(2)} \sin n\varphi] \sin \lambda_m \xi \cos vt; \\ Q_{n,m}^{(1)} = \text{const}; \quad Q_{n,m}^{(2)} = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Полагая $\varepsilon = 0$, находим, что уравнениям (2.76) удовлетворяет такое решение:

$$E_{n,m}^{(0)} = \frac{\sqrt{Q_{n,m}^{(1)2} + Q_{n,m}^{(2)2}}}{\rho h (\omega_{n,m}^2 - \nu^2)}; \quad M_{n,m}(t) = E_{n,m}^{(0)} \cos \nu t;$$

$$\psi_{n,m}^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{Q_{n,m}^{(2)}}{Q_{n,m}^{(1)}}.$$
(2.79)

При этом предполагается $\omega_{n,m} \neq \nu$.

Используя результаты предыдущего параграфа, устанавливаем, что общий прогиб оболочки (2.75)

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\omega_{n,m}^{(0)} \cos \omega_{n,m} t + \frac{\dot{\omega}_{n,m}^{(0)}}{\omega_{n,m}} \sin \omega_{n,m} t - \right. \\ \left. - E_{n,m}^{(0)} \cos \omega_{n,m} t \cos (n\varphi - \psi_{n,m}^{(1)}) + \right. \\ \left. + E_{n,m}^{(0)} \cos (n\varphi - \psi_{n,m}^{(1)}) \cos \nu t \right] \sin \lambda_m \xi. \quad (2.80)$$

Здесь первые два слагаемые соответствуют свободным колебаниям оболочки, третье — свободным «сопровождающим»* и, наконец, четвертое — вынужденным колебаниям. Если учесть демпфирование, то свободные и сопровождающие колебания с течением времени затухают. Чисто вынужденные колебания, которые характеризуют движение оболочки по истечении достаточно продолжительного периода времени, обуславливают стоячие изгибные волны в оболочке. «Суммарное» движение оболочки представляет наложение таких волн.

Если $\omega_{n,m} = \nu$, то имеет место резонанс и функция ω (2.75) примет вид

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\omega_{n,m}^{(0)} \cos \omega_{n,m} t + \frac{\dot{\omega}_{n,m}^{(0)}}{\omega_{n,m}} \sin \omega_{n,m} t + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{Q_{n,m}^{(1)2} + Q_{n,m}^{(2)2}}}{2\rho h \omega_{n,m}} t \cos (n\varphi - \psi_{n,m}^{(1)}) \sin \omega_{n,m} t \right] \sin \lambda_m \xi, \quad (2.81)$$

т. е. содержит «прогрессирующие» (с нарастающими амплитудами) стоячие волны. При наличии демпфирования амплитуды этих волн принимают постоянные значения. Соответ-

* См.: Бабаков И. М. Теория колебаний.— М., 1968.— 560 с.

ствующее решение в данном случае нетрудно получить, если использовать замену (2.59).

Рассмотрим такую задачу. Потребуем, чтобы решение уравнения (2.76) имело вид

$$M_{n,m} = M_{n,m}^{(0)} = \text{const}; \quad \psi_{n,m}^{(1)} = \Omega t, \quad (2.82)$$

т. е., как следует из выражения (2.75), отвечало бегущей изгибной волне, обусловленной внешней нагрузкой. Такое решение возможно в случае $\varepsilon = 0$ лишь при условиях

$$\begin{aligned} q_{n,m}^{(2)} \cos \Omega t &= q_{n,m}^{(1)} \sin \Omega t; \\ \frac{q_{n,m}^{(1)}}{\rho h} \cos \Omega t + \frac{q_{n,m}^{(2)}}{\rho h} \sin \Omega t &= M_{n,m}^{(0)} (\omega_{n,m}^2 - \Omega^2), \end{aligned} \quad (2.83)$$

вытекающих из системы (2.76).

Следовательно, функции $q_{n,m}^{(1)}$ и $q_{n,m}^{(2)}$, характеризующие нагрузку q и определяющиеся по формулам (2.77), должны быть представлены так:

$$q_{n,m}^{(1)} = P_{n,m} \cos \Omega t;$$

$$q_{n,m}^{(2)} = P_{n,m} \sin \Omega t,$$

где $P_{n,m}$ — постоянные величины.

Общий динамический прогиб w в данном случае наряду с компонентами, характеризующими стоячую волну, содержит в своем составе бегущие изгибные волны с периодами $T_{n,m}^{(1)} = \frac{2\pi}{\omega_{n,m}}$ и $T^{(2)} = \frac{2\pi}{\Omega}$ соответственно:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[w_{n,m}^{(0)} \cos \omega_{n,m} t + \frac{\dot{w}_{n,m}^{(0)}}{\omega_{n,m}} \sin \omega_{n,m} t \right] + \right. \\ &+ \left[-M_{n,m}^{(0)} \cos(n\varphi - \omega_{n,m} t) + M_{n,m}^{(0)} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega_{n,m}} \right) \times \right. \\ &\left. \left. \times \sin n\varphi \sin \omega_{n,m} t + M_{n,m}^{(0)} \cos(n\varphi - \Omega t) \right] \sin \lambda_m \xi \right\}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Здесь

$$M_{n,m}^{(0)} = \frac{P_{n,m}}{\rho h (\omega_{n,m}^2 - \Omega^2)}; \quad \omega_{n,m} \neq \Omega.$$

Путем предельного перехода из (2.84) нетрудно получить «резонансное» решение, когда $\Omega = \omega_{n,m}$. Оно имеет вид

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\omega_{n,m}^{(0)} \cos \omega_{n,m} t + \frac{\dot{\omega}_{n,m}^{(0)}}{\omega_{n,m}} \sin \omega_{n,m} t \right] + \right. \\ \left. + \left[-\frac{P_{n,m} t}{2\rho h \omega_{n,m}} \sin (n\varphi - \omega_{n,m} t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{P_{n,m}}{2\rho h \omega_{n,m}^2} \sin n\varphi \sin \omega_{n,m} t \right] \sin \lambda_m \xi \right\}.$$

Если $\varepsilon \neq 0$, то в представленном решении амплитуды бегущих волн примут постоянное значение, а собственные и сопровождающие колебания с течением времени постепенно затухают. Установившееся движение оболочки будет следующим:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_{n,m}}{\rho h \sqrt{(\omega_{n,m}^2 - \Omega^2)^2 + \varepsilon^2 \Omega^2}} \sin (n\varphi - \omega_{n,m} t) \sin \lambda_m \xi.$$

Таким образом, в зависимости от вида внешней периодической нагрузки движение оболочки может соответствовать наложению стоячих или бегущих волн, а также комбинации тех и других. При этом необходимо отметить, что бегущие изгибные волны в оболочках представляют собой весьма нежелательные формы движения (с точки зрения динамической прочности этих оболочек). Непрерывная перестройка поверхностной формы оболочки, наложение бегущих и стоячих волн могут обусловить не только появление опасных напряжений, но и привести к быстрому накоплению усталостных трещин, вызывающих преждевременное разрушение. В этой связи следует избегать нагрузок, которые могут возбудить такого рода волновые формы движения оболочек.

Описанные выше формы движения оболочек имеют место и при граничных условиях, отличающихся от условий шарнирного опирания оболочек. Это следует из того, что в формировании тех или иных волновых движений оболочки определяющую роль играют те компоненты изгибных форм, которые зависят от окружной координаты φ . Такое заключение представляется естественным, поскольку для замкнутой оболочки, уравнение колебаний которой имеет вид (2.55), всегда можно записать

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}(t) X_m(\xi) \cos (n\varphi - \psi_{n,m}),$$

где $X_m(\xi)$ — некоторые функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{D}{h} [X_m^{VI} - 4s^2 X_m^{IV} + 6s^4 X_m^{II} - 4s^6 X_m^0 + s^8 X_m] - \omega_{n,m}^2 [X_m^{IV} - 2s^2 X_m^{II} + s^4 X_m] - \frac{E}{R^2} X_m^{IV} = 0, \quad s = \frac{n}{R},$$

а также заданным граничным условиям.

§ 2.5. Формы изгибных колебаний оболочек с осесимметричными неправильностями

Основываясь на линеаризованном варианте уравнений (1.43), рассмотрим теперь вопрос о формах, а также частотах изгибных колебаний оболочек, срединные поверхности которых имеют малые отклонения от кругового поперечного сечения, или, иначе говоря, начальные прогибы. Необходимо отметить, что строгое определение этих форм представляет в общем случае весьма сложную математическую задачу. Их аналитическое представление пока не описано в научной литературе по механике оболочек даже в случае весьма простых выражений начального прогиба $w_0(x, y)$. Правда, в последнее время получены некоторые численные результаты по определению изгибных форм «несовершенных» (с начальным прогибом) цилиндрических оболочек, однако очевидно, что они имеют ограниченную область применения и не обладают той общностью, которая свойственна аналитическим результатам.

В расчетной практике при анализе колебаний и устойчивости цилиндрических оболочек с начальными неправильностями формы функции динамических прогибов аппроксимируют обычно формами собственных колебаний идеальных оболочек, т. е. оболочек без начальных прогибов. При этом ограничиваются, как правило, рассмотрением одной, «резонирующей» с внешним возбуждением формы.

Такой, ставший традиционным, подход не всегда является правомерным и в ряде случаев может привести к существенным погрешностям в определении напряженно-деформированного состояния оболочек, поскольку оболочки с начальными прогибами и соответствующие им круговые оболочки характеризуются различными формами и частотами собственных колебаний. Особенно велика роль началь-

ных неправильностей геометрии оболочек в задачах динамической устойчивости. Это связано с тем, что критические нагрузки, при которых происходит динамическое «прощелкивание» (потеря устойчивости) оболочек, очень «чувствительны» к начальным прогибам, существенно зависят и от «амплитуд» этих прогибов и от характера их распределения по поверхности оболочки.

Проанализируем влияние начальных несовершенств на основные динамические характеристики оболочек — формы и частоты их изгибных колебаний — на примере задачи о колебаниях оболочки с осесимметричным начальным прогибом.

Предположим, что функция начального прогиба ω_0 имеет вид

$$\omega_0 = \omega_0(x) = f_0^k \sin \bar{k}x; \quad \bar{k} = \frac{\pi k}{l}, \quad (2.85)$$

где параметр k может принимать любое целочисленное значение ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Отметим, что полученные результаты могут быть обобщены на случай, когда эта функция представляется в виде соответствующего ряда, где суммирование ведется по индексу k .

Считаем, как обычно, что начальный прогиб не вызывает в оболочке предварительных напряжений.

Линеаризованные уравнения движения оболочки примут в данном случае форму

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 \omega_1 &= \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= - \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Поскольку рассматривается задача о собственных колебаниях, принято $q(x, y, t) \equiv 0$.

Полагая $\omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0$ при $x = 0, x = l$, динамический прогиб ω_1 представим в виде разложения по формам собственных колебаний круговой оболочки, удовлетворяющего условию замкнутости:

$$\omega_1 = \sum_n \sum_m (f_1^{n,m} \cos sy + f_2^{n,m} \sin sy) \sin rx, \quad (2.87)$$

где $s = \frac{n}{R}$; $r = \frac{m\pi}{l}$; $n, m = 1, 2, \dots$

Для определения функций $f_i^{n,m} = f_i^{n,m}(t)$, $i = 1, 2$, используем метод Бубнова — Галеркина (более подробно он изложен в § 3.1). При этом предварительно найдем функцию напряжений Φ в срединной поверхности. С этой целью подставим разложение (2.87) и соотношение (2.85) во второе уравнение системы (2.86). В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_n^{\infty} \sum_m^{\infty} [\Phi_1^{n,m} \cos sy \sin rx + \Phi_2^{n,m} \sin sy \sin rx + \\ & + \Phi_3^{n,m} \cos sy \cos(\bar{k} - r)x + \Phi_4^{n,m} \cos sy \cos(\bar{k} + r)x + \\ & + \Phi_5^{n,m} \sin sy \cos(\bar{k} - r)x + \Phi_6^{n,m} \sin sy \cos(\bar{k} + r)x], \quad (2.88) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^{n,m} &= \frac{Er^2 f_1^{n,m}}{R(r^2 + s^2)^2}; & \Phi_2^{n,m} &= \frac{Er^2 f_2^{n,m}}{R(r^2 + s^2)^2}; \\ \Phi_3^{n,m} &= -\frac{Es^2 \bar{k}^2 f_1^{n,m} f_0^k}{2[s^2 + (\bar{k} - r)^2]^2}; & \Phi_4^{n,m} &= \frac{Es^2 \bar{k}^2 f_1^{n,m} f_0^k}{2[s^2 + (\bar{k} + r)^2]^2}; \\ \Phi_5^{n,m} &= -\frac{Es^2 \bar{k}^2 f_2^{n,m} f_0^k}{2[s^2 + (\bar{k} - r)^2]^2}; & \Phi_6^{n,m} &= \frac{Es^2 \bar{k}^2 f_2^{n,m} f_0^k}{2[s^2 + (\bar{k} + r)^2]^2}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Уравнения Бубнова — Галеркина имеют следующий вид:

$$\int_0^{l/2} \int_0^{2\pi R} X \frac{\partial \omega_1}{\partial f_1^{n,m}} dx dy = 0; \quad \int_0^{l/2} \int_0^{2\pi R} X \frac{\partial \omega_1}{\partial f_2^{n,m}} dx dy = 0; \quad (2.90)$$

$$n, m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\begin{aligned} X \equiv & \frac{D}{h} \nabla^4 \omega_1 - \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2}; \\ & \frac{\partial \omega_1}{\partial f_1^{n,m}} = \cos sy \sin rx; \\ & \frac{\partial \omega_1}{\partial f_2^{n,m}} = \sin sy \sin rx. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Подставляя в равенства (2.90) найденное значение функции напряжений (2.88) и выражения (2.87), (2.85), выводим уравнения для определения искомых временных функций $f_i^{n,m}$:

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{f}_1^{n,m} + \frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 f_1^{n,m} + \frac{r^2}{R} \Phi_1^{n,m} + \\ & + \frac{1}{Rl} \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_3^{n,q} (\bar{k} - \bar{q})^2 \left[\frac{1 - (-1)^{k-q+m}}{\bar{k} - \bar{q} + r} + \frac{1 - (-1)^{m-k+q}}{r - \bar{k} + \bar{q}} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{Rl} \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_4^{n,q} (\bar{k} + \bar{q})^2 \left[\frac{1 - (-1)^{k+q+m}}{\bar{k} + \bar{q} + r} + \frac{1 - (-1)^{m-k-q}}{r - \bar{k} - \bar{q}} \right] - \\
& - \frac{s^2 \bar{k}^2 f_0^k}{2l} \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_1^{n,q} \left[\frac{1 - (-1)^{q+k-m}}{\bar{q} + \bar{k} - r} + \frac{1 - (-1)^{q-k+m}}{\bar{q} - \bar{k} + r} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1 - (-1)^{q+k+m}}{\bar{q} + \bar{k} + r} - \frac{1 - (-1)^{q-k-m}}{\bar{q} - \bar{k} - r} \right] - \\
& - \frac{s^2 \bar{k}^2 f_0^k}{2} (\Phi_3^{n,m} + \Phi_3^{n,2k-m} - \Phi_3^{n,m-2k}) - \\
& - \frac{s^2 \bar{k}^2 f_0^k}{2} (\Phi_4^{n,2k+m} - \Phi_4^{n,m}) = 0; \tag{2.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho \ddot{f}_2^{n,m} + \frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 f_2^{n,m} + \frac{r^2}{R} \Phi_2^{n,m} + \\
& + \frac{1}{Rl} \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_5^{n,q} (\bar{k} - \bar{q})^2 \left[\frac{1 - (-1)^{k-q+m}}{\bar{k} - \bar{q} + r} + \frac{1 - (-1)^{m-k+q}}{r - \bar{k} + \bar{q}} \right] + \\
& + \frac{1}{Rl} \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_6^{n,q} (\bar{k} + \bar{q})^2 \left[\frac{1 - (-1)^{k+q+m}}{\bar{k} + \bar{q} + r} + \frac{1 - (-1)^{m-k-q}}{r - \bar{k} - \bar{q}} \right] - \\
& - \frac{s^2 \bar{k}^2 f_0^k}{2l} \sum_{q=1}^{\infty} \Phi_2^{n,q} \left[\frac{1 - (-1)^{q+k-m}}{\bar{q} + \bar{k} - r} + \frac{1 - (-1)^{q-k+m}}{\bar{q} - \bar{k} + r} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1 - (-1)^{q+k+m}}{\bar{q} + \bar{k} + r} - \frac{1 - (-1)^{q-k-m}}{\bar{q} - \bar{k} - r} \right] - \\
& - \frac{s^2 \bar{k}^2 f_0^k}{2} (\Phi_5^{n,m} + \Phi_5^{n,2k-m} - \Phi_5^{n,m-2k}) - \\
& - \frac{s^2 \bar{k}^2 f_0^k}{2} (\Phi_6^{n,m+2k} - \Phi_6^{n,m}) = 0; \\
& \bar{q} = \frac{q\pi}{l}, \quad n, m, q = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Эти уравнения после соответствующих подстановок представим так:

$$\ddot{f}_1^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 f_1^{n,m} + \omega_{01}^{n,m} f_1^{n,m} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq m}}^{\infty} \alpha_q^{n,m} f_1^{n,q} = 0; \tag{2.93}$$

$$\ddot{f}_2^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 f_2^{n,m} + \omega_{02}^{n,m} f_2^{n,m} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq m}}^{\infty} \alpha_q^{n,m} f_2^{n,q} = 0. \tag{2.93a}$$

Здесь

$$(\omega_0^{n,m})^2 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 + \frac{E}{R^2} \frac{r^4}{(r^2 + s^2)^2} \right] \quad (2.94)$$

— частота собственных колебаний идеальной оболочки, когда $\omega_0 \equiv 0$; $\omega_{0i}^{n,m}$, $\alpha_q^{n,m}$ — коэффициенты, зависящие от параметра начального прогиба f_0^k , причем при $f_0^k = 0$ выполняются соотношения $\omega_{0i}^{n,m} \equiv 0$ и $\alpha_q^{n,m} \equiv 0$.

Пусть параметр k начального прогиба (2.84) является нечетным числом. В этом случае имеем

$$\omega_{01}^{n,m} = \omega_{02}^{n,m} = \beta_1^{n,m} (f_0^k)^2 - \beta_2^{n,m} f_0^k, \quad (2.95)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1^{n,m} &= \frac{E\bar{k}^4 s^4}{4\rho} \left\{ \frac{1 + \delta_{k,m}}{[s^2 + (\bar{k} - r)^2]^2} + \frac{1}{[s^2 + (\bar{k} + r)^2]^2} \right\}; \\ \beta_2^{n,m} &= \frac{2E\bar{k}s^2 r}{Rl\rho} \left\{ \frac{4r^3}{(s^2 + r^2)^2 (4r^2 - \bar{k}^2)} + \right. \\ &\left. + \frac{(\bar{k} - r)^2}{[s^2 + (\bar{k} - r)^2]^2 (2r - \bar{k})} + \frac{(\bar{k} + r)^2}{[s^2 + (\bar{k} + r)^2]^2 (2r + \bar{k})} \right\}; \end{aligned}$$

$\delta_{k,m}$ — символ Кронекера ($\delta_{k,m} = 1$ при $k = m$, $\delta_{k,m} = 0$ при $k \neq m$). В случае четного k соответственно получим

$$\omega_{01}^{n,m} = \omega_{02}^{n,m} = \beta_1^{n,m} (f_0^k)^2, \quad (2.96)$$

где параметр β_1 определяется так же, как и при нечетном k .

Таким образом, наличие осесимметричной неправильности (2.85) обуславливает связанность обобщенных координат оболочки $f_1^{n,m}$ и отдельно координат $f_2^{n,m}$, $n, m = 1, 2, \dots$ Следовательно, системы уравнений (2.93) и (2.93а) можно рассматривать независимо одна от другой. Причем видно, что при одних и тех же начальных условиях эти системы имеют одни и те же решения, поскольку корни характеристических уравнений у них равны. Эти корни определяются из уравнения

$$\left\| \sum_{q=1} \left\{ \alpha_q^{n,m} + [\omega_{01}^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 - \lambda^2] \delta_{q,m} \right\} \right\| = 0. \quad (2.97)$$

Таким образом, собственные колебания с частотами $\lambda_{n,m}$, определяемыми из (2.97), являются «двукратно вырожденными» [29], поскольку существует два класса независи-

мых решений

$$\omega_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_1^{n,m} \cos sy \sin rx; \quad (2.98)$$

$$\omega_1^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_2^{n,m} \sin sy \sin rx, \quad (2.98a)$$

удовлетворяющих и уравнениям движения (2.86) и принятым граничным условиям. Это означает, что осесимметричный начальный прогиб не снимает «вырождения», характеризующего собственные колебания оболочки. Для идеальной оболочки, как уже отмечалось ранее, одной и той же собственной частоте $\omega_0^{n,m}$, определяемой по формуле (2.94), отвечают две различные формы изгибных колебаний: $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \sin sy \sin rx$ ($C_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$; $s = \frac{n}{R}$; $r = \frac{m\pi}{l}$; $n, m = 1, 2, \dots$).

Для определения форм изгибных колебаний оболочки с начальным прогибом, отвечающих собственной частоте $\lambda_{n,m}$, рассмотрим некоторое конечное число членов ряда (2.87). Примем, например, $n, m = 1, 2, \dots, N$ и запишем прогиб ω_1 в виде

$$\omega_1 = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x, y, t); \quad (2.99)$$

$$\varphi_n(x, y, t) = \cos sy \sum_{m=1}^N f_1^{n,m}(t) \sin rx + \sin sy \sum_{m=1}^N f_2^{n,m}(t) \sin rx.$$

Введем вместо обобщенных координат $f_i^{n,m}$ главные координаты $\xi_i^{n,m}$ с помощью линейного преобразования [31, 35]

$$\{f_i\} = [\Psi] \{\xi_i\}, \quad i = 1, 2. \quad (2.100)$$

Здесь

$$\{f_i\} = \begin{Bmatrix} f_i^{n,1} \\ f_i^{n,2} \\ \vdots \\ f_i^{n,N} \end{Bmatrix}; \quad \{\xi_i\} = \begin{Bmatrix} \xi_i^{n,1} \\ \xi_i^{n,2} \\ \vdots \\ \xi_i^{n,N} \end{Bmatrix};$$

$[\Psi]$ — квадратная матрица размерности $(N \times N)$, столбцы которой образованы собственными векторами алгебраической системы, соответствующей уравнениям (2.93) (или (2.93a)). Подставляя (2.100) в исходные уравнения (2.93) и умножая затем их на транспонированную матрицу $[\Psi]'$,

получаем систему независимых уравнений в новых переменных $\xi_i^{n,m}$:

$$\ddot{\xi}_i^{n,m} + (\lambda_i^{n,m})^2 \xi_i^{n,m} = 0, \quad i = 1, 2; \quad n, m = 1, 2, \dots, N, \quad (2.101)$$

где $\lambda_1^{n,m} = \lambda_2^{n,m}$ — частоты собственных колебаний оболочки с начальным прогибом (главные частоты).

Используя соотношения (формулу преобразования)

$$f_i^{n,m} = \sum_{p=1}^N \Psi_m^{n,p} \xi_i^{n,p}, \quad (2.102)$$

где $\Psi_m^{n,p}$ — элементы m -й строки матрицы $[\Psi]$, полученные на основании (2.100), динамический прогиб ω_1 (2.99) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \sum_{n=1}^N \cos sy \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \Psi_m^{n,p} \xi_1^{n,p} \sin rx + \\ & + \sum_{n=1}^N \sin sy \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \Psi_m^{n,p} \xi_2^{n,p} \sin rx, \end{aligned} \quad (2.103)$$

или

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N \xi_1^{n,p} \left[\cos sy \sum_{m=1}^N \Psi_m^{n,p} \sin rx \right] + \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N \xi_2^{n,p} \left[\sin sy \sum_{m=1}^N \Psi_m^{n,p} \sin rx \right]. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Отсюда заключаем, что искомые собственные формы колебаний, соответствующие частоте $\lambda^{n,m}$, определяются такими разложениями:

$$X_1^{n,p}(x, y) = C_1 \cos sy \sum_{m=1}^N \Psi_m^{n,p} \sin rx; \quad (2.105)$$

$$X_2^{n,p}(x, y) = C_2 \sin sy \sum_{m=1}^N \Psi_m^{n,p} \sin rx$$

$$(C_1 = \text{const}, C_2 = \text{const}).$$

Следовательно, для аналитического представления форм изгибных колебаний оболочки с осесимметричным прогибом (2.85) необходимо в соответствии с формулой (2.105) «просуммировать» формы колебаний соответствующей идеальной оболочки, связанные с продольной координатой x , т. е. той координатой, по которой распределена начальная погибь.

Пример 4. Определим частоты и формы собственных колебаний оболочки с начальной погибью (2.85) при представлении динамического прогиба w_1 четырехчленным разложением по формам собственных колебаний идеальной оболочки:

$$w_1 = f_1 \cos sy \sin rx + f_2 \sin sy \sin rx + f_3 \cos sy \sin qx + f_4 \sin sy \sin qx, \quad (2.106)$$

причем $r = \bar{k}$, $q \neq r$ ($q = \frac{\bar{q}\pi}{l}$, \bar{q} — целое число).

Система уравнений (2.93, 2.93а) примет в этом случае форму

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_0^2 f_1 + \omega_{01} f_1 + a_{13} f_3 &= 0; \\ \ddot{f}_2 + \omega_0^2 f_2 + \omega_{02} f_2 + a_{24} f_4 &= 0; \\ \dot{f}_3 + \Omega_0^2 f_3 + \Omega_{01} f_3 + a_{31} f_1 &= 0; \\ \dot{f}_4 + \Omega_0^2 f_4 + \Omega_{02} f_4 + a_{42} f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Здесь

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 + \frac{E}{R^2} \frac{r^4}{(r^2 + s^2)^2} \right];$$

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{D}{h} (q^2 + s^2)^2 + \frac{E}{R^2} \frac{q^4}{(q^2 + s^2)^2} \right];$$

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \beta_1^{n,m} (f_0^k)^2 - \beta_2^{n,m} f_0^k,$$

$$\Omega_{01} = \Omega_{02} = \beta_1^{n,\bar{q}} (f_0^k)^2 - \beta_2^{n,\bar{q}} f_0^k,$$

причем коэффициенты $\beta_i^{\alpha,\beta}$ определяются точно так же, как и в формуле (2.95);

$$a_{13} = a_{24} = - \frac{Es^2 r^3 f_0^k}{\rho R l q} \left\{ \frac{4q^2 r}{(s^2 + q^2)^2 (4q^2 - r^2)} + \frac{(r - q)^2}{[s^2 + (r - q)^2]^2 (2r - q)} + \frac{(r + q)^2}{[s^2 + (r + q)^2]^2 (2r + q)} \right\} A;$$

$$a_{31} = a_{42} = - \frac{4Er^3 s^2 f_0^k A}{l \rho q R (r^2 + s^2)^2 (4r^2 - q^2)};$$

$$A = 1 - (-1)^q.$$

(Предполагается $3r \neq q$, $2r \neq q$.)

Составляя характеристическое уравнение (2.97), находим главные собственные частоты колебаний рассматриваемой оболочки:

$$\lambda_1^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right)^2 + a_{13} a_{31}}; \quad (2.108)$$

$$\lambda_2^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right)^2 + a_{13} a_{31}}.$$

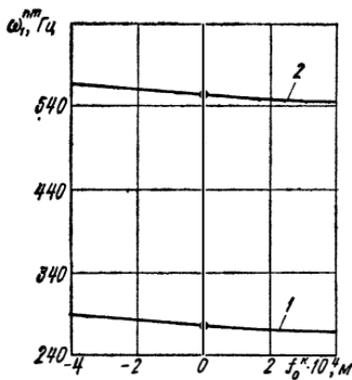


Рис. 2.2

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \omega_{01}^2; \quad \omega_2^2 = \Omega_0^2 + \Omega_{01}^2. \quad (2.109)$$

Соответствующие этим частотам формы изгибных колебаний могут быть представлены так:

$$\begin{aligned} X_{11} &= C_{11} \cos sy (\sin rx + U \sin qx); \\ X_{12} &= C_{12} \sin sy (\sin rx + U \sin qx); \\ X_{21} &= C_{21} \cos sy (\sin rx + V \sin qx); \\ X_{22} &= C_{22} \sin sy (\sin rx + V \sin qx), \end{aligned} \quad (2.110)$$

причем

$$U = \frac{\lambda_1^2 - \omega_1^2}{a_{13}} = \frac{a_{31}}{\lambda_1^2 - \omega_2^2}; \quad V = \frac{a_{31}}{\lambda_2^2 - \omega_2^2} = \frac{\lambda_2^2 - \omega_1^2}{a_{13}};$$

$$C_{\alpha\beta} = \text{const.}$$

Существенно отметить, что частоты собственных колебаний λ_1 , λ_2 (2.108) зависят не только от амплитудного значения начального прогиба ω_0 , но и от того, как «распределяется» этот прогиб по отношению к исходной («невозмущенной») срединной поверхности оболочки, т. е. срединной поверхности идеальной оболочки. Это заключение вытекает из анализа поведения парциальных частот оболочки ω_1 и ω_2 (2.109) при изменении параметра f_0^k . Так, если параметры волнообразования r , s и q таковы, что $\beta_2^{n,m} > 0$ и $\beta_2^{n,\bar{q}} > 0$, то при $f_0^k < 0$ указанные частоты всегда возрастают с увеличением амплитудного значения ω_0 . Ясно, что в этом случае соответственно возрастают и главные частоты. Если же $f_0^k > 0$, то с ростом начального прогиба частоты могут уменьшаться по сравнению с соответствующими частотами идеальной оболочки. Такая ситуация реализуется, в частности, если $f_0^k < \frac{\beta_2^{n,m}}{\beta_1^{n,m}}$

$$\text{или } f_0^k < \frac{\beta_2^{n,\bar{q}}}{\beta_1^{n,\bar{q}}}.$$

На рис. 2.2 изображены графики зависимости $\omega_1 = \omega_1^{n,m}(f_0^k)$, построенные для оболочки с параметрами

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \frac{l}{R} = 2,5; \quad \frac{h}{R} = 3,125 \cdot 10^{-3}; \\ \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \mu = 0,3; \quad R = 0,16 \text{ м}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

причем кривая 1 соответствует волновым числам $m = 1$, $n = 6$, $\bar{k} = 1$, кривая 2 — $m = 2$, $n = 9$, $\bar{k} = 1$. Из представленных кривых видно

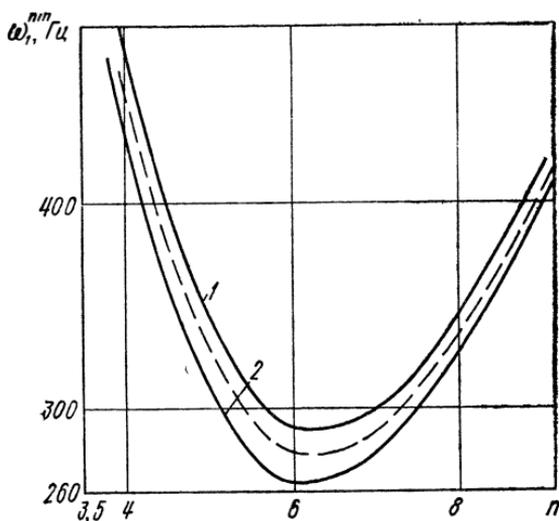


Рис. 2.3

что оболочка с «отрицательной» начальной неправильностью характеризуется более высокими собственными парциальными частотами, чем эта же оболочка, но с «положительной» неправильностью. При этом с ростом f_0^k при $f_0^k > 0$ наблюдается тенденция к замедлению убывания частоты $\omega_1^{n,m}$. Начиная с некоторых относительно больших значений параметра f_0^k , эта частота начнет возрастать.

Соответствующие частотные кривые рассматриваемой оболочки при $m = 1$ представлены на рис. 2.3. Штриховая кривая здесь отвечает случаю $f_0^k = 0$ (идеальная оболочка), кривая 1 — $f_0^k = -5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, кривая 2 — $f_0^k = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для других случаев ($\beta_2^{n,m} < 0$; $\beta_2^{n,\bar{q}} < 0$; $\beta_2^{n,m} > 0$; $\beta_2^{n,\bar{q}} < 0$; $\beta_2^{n,m} < 0$; $\beta_2^{n,\bar{q}} > 0$).

Пример 5. Пусть начальный прогиб ω_0 имеет вид

$$\omega_0 = f_{10}^r \sin rx + f_{20}^q \sin qx, \quad (2.112)$$

а динамический прогиб ω_1 соответствует разложению (2.106). Для упрощения предполагаем параметры $\bar{q} = \frac{lq}{\pi}$ и $m = \frac{lr}{\pi}$ четными числами. В этом случае

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = & \omega_0^2 + \frac{Er^2}{4\rho} \left[2 + \frac{s^4}{(s^2 + 4r^2)^2} \right] (f_{10}^r)^2 + \\ & + \frac{Es^4 q^4}{4\rho} \left\{ \frac{1}{[s^2 + (q-r)^2]^2} + \frac{1}{[s^2 + (q+r)^2]^2} \right\} (f_{20}^q)^2; \end{aligned}$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{Eq^4}{4\rho} \left[2 + \frac{s^4}{(s^2 + 4r^2)^2} \right] (f_{20}^q)^2 + \\ + \frac{Es^4r^4}{4\rho} \left\{ \frac{1}{[s^2 + (q-r)^2]^2} + \frac{1}{[s^2 + (q+r)^2]^2} \right\} (f_{10}^r)^2.$$

Для главных частот получим такие выражения:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right)^2 - \gamma^2}.$$

Здесь

$$\gamma = \frac{Eq^2r^2s^4}{4\rho} \left\{ \frac{1}{[s^2 + (q-r)^2]^2} + \frac{1}{[s^2 + (q+r)^2]^2} \right\} f_{10}^r f_{20}^q + \\ + \frac{E}{2\rho} r^2 q^2 f_{10}^r f_{20}^q.$$

Собственные формы изгибных колебаний имеют такой же вид (2.110), как и в предыдущей задаче, при этом следует положить

$$U = \frac{\gamma}{\lambda_1^2 - \omega_2^2}, \quad V = \frac{\gamma}{\lambda_2^2 - \omega_2^2}.$$

§ 2.6. Оболочки с неосесимметричными неправильностями

Рассмотрим оболочку с начальными неправильностями, предполагая их «распределенными» по обеим координатам x и y :

$$\omega_0 = (f_{10}^{\bar{k}, \bar{q}} \cos ky + f_{20}^{\bar{k}, \bar{q}} \sin ky) \sin qx. \quad (2.113)$$

Динамический прогиб ω_1 , как и прежде, будем представлять разложением (2.87). Линеаризованные уравнения движения оболочки имеют в этом случае вид

$$\frac{D}{h} \nabla^4 \omega_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \quad (2.114)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = - \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y}.$$

Введем обозначения

$$A = f_1^{n,m} f_{10}^{\bar{k}, \bar{q}} + f_2^{n,m} f_{20}^{\bar{k}, \bar{q}};$$

$$\begin{aligned}
 B &= f_1^{n,m} \bar{f}_{10}^{\bar{k},\bar{q}} - f_2^{n,m} \bar{f}_{20}^{\bar{k},\bar{q}}, \\
 C &= f_1^{n,m} \bar{f}_{20}^{\bar{k},\bar{q}} + f_2^{n,m} \bar{f}_{10}^{\bar{k},\bar{q}}, \\
 D &= f_1^{n,m} \bar{f}_{20}^{\bar{k},\bar{q}} - f_2^{n,m} \bar{f}_{10}^{\bar{k},\bar{q}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.115}$$

Тогда функцию напряжений Φ , найденную из второго уравнения (2.114), можно записать так:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_0^{n,m} \cos(k-s)y \cos(q-r)x + \\
 &+ \Phi_1^{n,m} \cos(k+s)y \cos(q-r)x + \Phi_2^{n,m} \sin(k-s)y \times \\
 &\times \cos(q-r)x + \Phi_3^{n,m} \sin(k+s)y \cos(q-r)x + \\
 &+ \Phi_4^{n,m} \cos(k-s)y \cos(q+r)x + \Phi_5^{n,m} \cos(k+s)y \times \\
 &\times \cos(q+r)x + \Phi_6^{n,m} \sin(k-s)y \cos(q+r)x + \\
 &+ \Phi_7^{n,m} \sin(k+s)y \cos(q+r)x + \Phi_8^{n,m} \cos sy \sin rx + \\
 &+ \Phi_9^{n,m} \sin sy \sin rx].
 \end{aligned}
 \tag{2.116}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Phi_0^{n,m} &= -\frac{EA(kr-qs)^2}{4[(s-k)^2+(r-q)^2]^2}; & \Phi_1^{n,m} &= -\frac{EB(kr+qs)^2}{4[(k+s)^2+(r-q)^2]^2}; \\
 \Phi_2^{n,m} &= -\frac{ED(kr-qs)^2}{4[(s-k)^2+(r-q)^2]^2}; & \Phi_3^{n,m} &= -\frac{EC(kr+qs)^2}{4[(k+s)^2+(r-q)^2]^2}; \\
 \Phi_4^{n,m} &= \frac{EA(kr+qs)^2}{4[(s-k)^2+(q+r)^2]^2}; & \Phi_5^{n,m} &= \frac{EB(kr-qs)^2}{4[(k+s)^2+(r+q)^2]^2}; \\
 \Phi_6^{n,m} &= \frac{ED(kr+qs)^2}{4[(k-s)^2+(q+r)^2]^2}; & \Phi_7^{n,m} &= \frac{EC(kr-qs)^2}{4[(k+s)^2+(q+r)^2]^2}; \\
 \Phi_8^{n,m} &= \frac{Er^2 f_1^{n,m}}{R(r^2+s^2)^2}; & \Phi_9^{n,m} &= \frac{Er^2 f_2^{n,m}}{R(r^2+s^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Применяя далее метод Бубнова — Галеркина к первому уравнению (2.114), приходим к следующим дифференциальным уравнениям, описывающим колебания оболочки с рассматриваемым начальным прогибом (2.113):

$$\begin{aligned}
 \ddot{f}_1^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 f_1^{n,m} + \Omega_0^{n,m} f_1^{n,m} + \omega_{01}^{n,m} f_1^{n,m} + \\
 + \gamma^{n,m} f_2^{n,m} + \sum_{\substack{\bar{p}=1 \\ \bar{p} \neq n}} \alpha_1^{\bar{p},m} \bar{f}_1^{\bar{p},m} + \sum_{\substack{\bar{p}=1 \\ \bar{p} \neq m}} \alpha_2^{\bar{p},m} \bar{f}_2^{\bar{p},m} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{f}_2^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 f_2^{n,m} + \Omega_0^{n,m} f_2^{n,m} + \omega_{02}^{n,m} f_2^{n,m} + \quad (2.117) \\ & + \gamma^{n,m} f_1^{n,m} + \sum_{\substack{\bar{p}=1 \\ p \neq n}} \beta_1^{\bar{p},m} f_1^{\bar{p},m} + \sum_{\substack{\bar{p}=1 \\ p \neq n}} \beta_2^{\bar{p},m} f_2^{\bar{p},m} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_0^{n,m}$ — частота собственных колебаний идеальной оболочки (см. (2.94)):

$$\begin{aligned} \Omega_0^{n,m} = & \frac{E}{16\rho} \left\{ (kr + qs)^4 \left[\frac{1}{[(k+s)^2 + (r-q)^2]^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{[(k-s)^2 + (r+q)^2]^2} \right] + (kr - qs)^4 \left[\frac{1}{[(k+s)^2 + (r+q)^2]^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{[(k-s)^2 + (r-q)^2]^2} \right] \right\} [(f_{10}^{\bar{k},\bar{q}})^2 + (f_{20}^{\bar{k},\bar{q}})^2] + \\ & + \frac{Er^4}{8\rho} [(f_{10}^{n,m})^2 + (f_{20}^{n,m})^2] \delta_{k,s} \delta_{q,r} + \frac{Es^4}{16\rho} \left\{ \frac{(q+r)^4}{[4s^2 + (q-r)^2]^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(q-r)^4}{[4s^2 + (q+r)^2]^2} \right\} [(f_{10}^{n,\bar{q}})^2 + (f_{20}^{n,\bar{q}})^2] \delta_{k,s} + \\ & + \frac{Er^4}{16\rho} \left\{ 4 + \frac{(k+s)^4}{[(k-s)^2 + 4r^2]^2} + \frac{(k-s)^4}{[(k+s)^2 + 4r^2]^2} \right\} \times \\ & \quad \times [(f_{10}^{\bar{k},m})^2 + (f_{20}^{\bar{k},m})^2] \delta_{q,r}; \\ \omega_{01}^{n,m} = & \frac{Es^4}{8\rho} (f_{10}^{n,m})^2 \delta_{k,s} \delta_{q,r} + \frac{Es^4}{4\rho} (f_{10}^{n,\bar{q}})^2 \delta_{k,s}; \\ \omega_{02}^{n,m} = & \frac{Es^4}{8\rho} (f_{20}^{n,m})^2 \delta_{k,s} \delta_{q,r} + \frac{Es^4}{4\rho} (f_{20}^{n,\bar{q}})^2 \delta_{k,s}; \\ \gamma^{n,m} = & \frac{Es^4}{8\rho} f_{10}^{\bar{k},\bar{q}} f_{20}^{\bar{k},\bar{q}} \delta_{k,s} \delta_{q,r} + \frac{Es^4}{4\rho} f_{10}^{n,\bar{q}} f_{20}^{n,\bar{q}} \delta_{k,s}; \end{aligned}$$

$\alpha_i^{\bar{p},m}$, $\beta_i^{\bar{p},m}$ — некоторые постоянные коэффициенты, которые отличны от нуля при нечетном m и при одновременном выполнении одного из условий: $\bar{p} \pm \bar{k} \pm n = 0$. Их выражения из-за громоздкости здесь не приводятся.

Структура полученных уравнений свидетельствует о более сложном, чем в случае осесимметричной начальной погиби, зависимости обобщенных координат $f_i^{n,m}$ в процессе колебаний оболочки. Связанными между собой оказываются координаты $f_1^{n,m}$ и $f_2^{n,m}$. При этом парциальные частоты колебаний оболочки, соответствующие обобщенным перемещениям оболочки $f_1^{n,m}$ и $f_2^{n,m}$, являются в общем случае

различными:

$$\begin{aligned}(\omega_1^{n,m})^2 &\neq (\omega_2^{n,m})^2; \\(\omega_1^{n,m})^2 &= (\omega_0^{n,m})^2 + \Omega_0^{n,m} + \omega_{01}^{n,m}; \\(\omega_2^{n,m})^2 &= (\omega_0^{n,m})^2 + \Omega_0^{n,m} + \omega_{02}^{n,m},\end{aligned}\quad (2.118)$$

из-за $\omega_{01}^{n,m} \neq \omega_{02}^{n,m}$ (при $f_{10} \neq f_{20}$). (При осесимметричной начальной погиби эти частоты совпадали.)

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, путем введения нормальных координат можно определить собственные изгибные формы для данного случая. По аналогии они будут представлять собой сумму форм изгибных колебаний идеальной оболочки с коэффициентами, являющимися элементами модальной фундаментальной матрицы.

Рассмотрим некоторые важные частные примеры представления функций динамического ω_1 и начального ω_0 прогибов.

Пример 6. Предположим, что прогиб ω_1 может быть аппроксимирован двучленным разложением по сопряженным формам

$$\omega_1 = (f_1 \cos sy + f_2 \sin sy) \sin rx, \quad (2.119)$$

и функция ω_0 имеет вид

$$\omega_0 = (f_{10} \cos ky + f_{20} \sin ky) \sin qx. \quad (2.120)$$

Здесь возможны различные варианты соотношений между волновыми параметрами s , r и k , q . Исследуем подробно эти варианты.

Пусть $s = k$ и $r = q$. В этом случае начальный прогиб «повторяет» как бы динамический прогиб по обеим координатам x и y . Главные частоты колебаний $\lambda_{1,2}$ определяются так:

$$\lambda_{1,2}^2 = (\omega_0^{n,m})^2 + \frac{E}{16\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2) [2r^4 + s^4 (1 \pm 1)]. \quad (2.121)$$

Из этой формулы следует, что частоты «нечувствительны» к знаку начального прогиба — при $f_{i0} > 0$ и $f_{i0} < 0$ получаем один и тот же результат.

«Расстройка» главных частот, обусловленная влиянием начальных несовершенств,

$$\Delta\lambda^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = \frac{Es^4}{8\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2), \quad (2.122)$$

т. е. существенно зависит от числа волн в окружном направлении n и не зависит от числа волн m по образующей.

Интересно отметить, что «расстройка» соответствующих парциальных частот оболочки

$$\Delta\omega^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{Es^4}{8\rho} (f_{10}^2 - f_{20}^2) \quad (2.123)$$

может быть как положительной величиной, так и отрицательной, в то время как «расстройка» $\Delta\lambda^2$ всегда положительная величина,

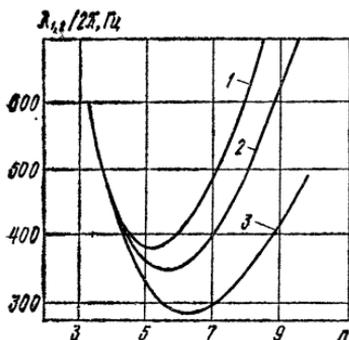


Рис. 2.4

Что касается собственных форм изгибных колебаний, соответствующих частотам λ_1 и λ_2 , то в рассматриваемом случае они характеризуются такими представлениями:

$$\begin{aligned} X_1(x, y) &= \\ &= C_1 \sin rx \left(\cos sy + \frac{f_{20}}{f_{10}} \sin sy \right); \\ X_2(x, y) &= \\ &= C_2 \sin rx \left(\cos sy - \frac{f_{10}}{f_{20}} \sin sy \right); \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$f_{10} \neq 0; \quad f_{20} \neq 0.$$

На рис. 2.4 изображены частотные кривые, построенные по формуле (2.121) для оболочки с параметрами (2.111) при $m = 1$. Вычисления показывают, что частоты колебаний идеальной оболочки (кривая 3) практически совпадают с соответствующими главными частотами $\lambda_1 = \lambda_1(n)$. Частоты $\lambda_2 = \lambda_2(n)$ при этом существенно превышают частоты $\omega_0^{n,m}$. (Кривая 2 построена при $f_{10} = 0, f_{20} = h$, кривая 1 — при $f_{10} = f_{20} = h$.)

Из сопоставления полученных графиков следует также, что введение начальных неправильностей может обусловить изменение основного тона колебаний оболочки. Частота основного тона «несовершенной» оболочки, кроме того, что увеличивается с ростом начального прогиба, отвечает меньшему количеству поперечных волн, чем в случае идеальной оболочки.

Рассмотрим случай, когда $s = h, r \neq q$. Здесь имеет место соответствие динамического и начального прогибов лишь по окружной координате y .

Главные частоты и формы изгибных колебаний определяются при этом такими соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda_{12}^2 &= (\omega_0^{n,m})^2 + \frac{E}{16\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2) \left\{ 4 + \frac{(q+r)^4}{[4s^2 + (q-r)^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q-r)^4}{[4s^2 + (q+r)^2]^2} \right\} \pm \frac{Es^4}{8\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2); \\ X_1(x, y) &= C_1 \sin rx \left(\cos sy + \frac{f_{20}}{f_{10}} \sin sy \right); \\ X_2(x, y) &= C_2 \sin rx \left(\cos sy - \frac{f_{20}}{f_{10}} \sin sy \right). \end{aligned} \quad (2.125)$$

«Расстройки» частот $\Delta\lambda^2$ и $\Delta\omega^2$ равны соответственно

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^2 &= \frac{Es^4}{4\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2); \\ \Delta\omega^2 &= \frac{Es^4}{4\rho} (f_{10}^2 - f_{20}^2). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Если же $s \neq k$, $r = q$, то вместо (2.125) и (2.126) получим соответственно

$$\lambda_{12}^2 = (\omega_0^{n,m})^2 + M(f_{10}^2 + f_{20}^2) \pm N\sqrt{f_{10}^2 + f_{20}^2};$$

$$X_1(x, y) = C_1 \sin rx \left(\cos sy + \frac{\sqrt{f_{10}^2 + f_{20}^2} - f_{10}}{f_{20}} \sin sy \right);$$
(2.127)

$$X_2(x, y) = C_2 \sin rx \left(\cos sy - \frac{\sqrt{f_{10}^2 + f_{20}^2} + f_{10}}{f_{20}} \sin sy \right);$$

$$\Delta\lambda^2 = 2N\sqrt{f_{10}^2 + f_{20}^2}; \quad \Delta\omega^2 = 2Nf_{10}.$$
(2.128)

Здесь

$$M = \frac{Er^4}{16\rho} \left\{ 4 + \frac{(p+s)^4}{[(p-s)^2 + 4r^2]^2} + \frac{(p-s)^4}{[(p+s)^2 + 4r^2]^2} \right\}, \quad p = k,$$

$$N = -\frac{2Er^3s^2}{\rho Rl} \left[\frac{1}{(r^2 + s^2)^2} + \frac{3}{(s^2 + 4r^2)^2} \right] \delta_{2s,k} [1 - (-1)^m].$$

Формулы (2.127), (2.128) имеют место лишь при m нечетном и при одновременном выполнении условия $2s = k$. В противном случае главные частоты совпадут с парциальными, причём

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = (\omega_0^{n,m})^2 + M(f_{10}^2 + f_{20}^2),$$

т. е. расщепления частот не произойдет. Формы колебаний при этом совпадут с формами колебаний соответствующей идеальной оболочки.

Расщепления частот не произойдет ($\Delta\lambda^2 = 0$) и тогда, когда в выражениях (2.119), (2.120) одновременно $s \neq k$ и $r \neq q$.

Для частот λ_i в этом случае получим

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = (\omega_0^{n,m})^2 + \frac{E}{16\rho} \left\{ (pr + qs)^4 \left[\frac{1}{[(s+p)^2 + (r-q)^2]^2} + \frac{1}{[(s-p)^2 + (r+q)^2]^2} \right] + (pr - qs)^4 \left[\frac{1}{[(s+p)^2 + (r+q)^2]^2} + \frac{1}{[(s-p)^2 + (r-q)^2]^2} \right] \right\}.$$

Пример 7. Рассмотрим более сложные аппроксимации динамического и начального прогибов оболочки, а именно:

$$\omega_1 = (f_1 \cos sy + f_2 \sin sy) \sin rx + (f_3 \cos sy + f_4 \sin sy) \sin qx; \quad (2.129)$$

$$\omega_0 = (f_{10} \cos ky + f_{20} \sin ky) \sin rx + (f_{30} \cos ky + f_{40} \sin ky) \sin qx,$$
(2.130)

где $k \neq s$, $q \neq r$, $k \neq 2s$.

Уравнения для определения неизвестных обобщенных перемещений оболочки f_i ($i = 1 \div 4$) имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 + a_{13} f_3 + a_{14} f_4 &= 0; \\ \ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2 + a_{23} f_3 + a_{24} f_4 &= 0; \\ \ddot{f}_3 + \omega_3^2 f_3 + a_{31} f_1 + a_{32} f_2 &= 0; \\ \ddot{f}_4 + \omega_4^2 f_4 + a_{41} f_1 + a_{42} f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.131)$$

причем

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \omega_2^2 &= (\omega_0^{n,m})^2 + \frac{Er^4}{4\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2) + \\ &+ \frac{Er^4}{16\rho} \left\{ \frac{(k+s)^4}{[4r^2 + (k-s)^2]^2} + \frac{(k-s)^4}{[4r^2 + (k+s)^2]^2} \right\} (f_{10}^2 + f_{20}^2) + \\ &+ \frac{E}{16\rho} (P + Q + R + S) (f_{30}^2 + f_{40}^2); \\ \omega_3^2 = \omega_4^2 &= (\omega_0^{n,\bar{q}})^2 + \frac{Eq^4}{4\rho} (f_{30}^2 + f_{40}^2) + \\ &+ \frac{Eq^4}{16\rho} \left\{ \frac{(k+s)^4}{[4r^2 + (k-s)^2]^2} + \frac{(k-s)^4}{[4r^2 + (k+s)^2]^2} \right\} (f_{30}^2 + f_{40}^2) + \\ &+ \frac{E}{16\rho} (P + Q + S + R) (f_{10}^2 + f_{20}^2); \\ a_{13} = a_{31} = a_{24} = a_{42} &= \frac{Er^2 q^2}{4\rho} (f_{10} f_{30} + f_{20} f_{40}) + \\ &+ \frac{Eq^4}{16\rho} \left\{ \frac{(k+s)^4}{[4r^2 + (k-s)^2]^2} + \frac{(k-s)^4}{[4r^2 + (k+s)^2]^2} \right\} (f_{30}^2 + f_{40}^2) + \\ &+ \frac{E}{16\rho} (P + Q + R + S) (f_{10} f_{30} + f_{20} f_{40}); \\ a_{14} = -a_{23} = -a_{32} = a_{41} &= (P - Q + R - S) (f_{20} f_{30} - f_{10} f_{40}); \\ P &= \frac{(kr - qs)^2}{[(k-s)^2 + (r-q)^2]^2}; \quad Q = \frac{(kr + qs)^2}{[(k+s)^2 + (r-q)^2]^2}; \\ R &= \frac{(kr + qs)^2}{[(k-s)^2 + (r+q)^2]^2}; \quad S = \frac{(kr - qs)^2}{[(k+s)^2 + (r+q)^2]^2}. \end{aligned}$$

С целью определения главных частот составим характеристическое уравнение для системы (2.131). После некоторых преобразований оно может быть представлено в виде

$$(\omega_1^2 - \lambda^2)(\omega_2^2 - \lambda^2) = a_{13}^2 + a_{14}^2.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4} + \gamma^2}, \quad (2.132)$$

где

$$\gamma^2 = a_{13}^2 + a_{14}^2.$$

Для нахождения форм изгибных колебаний, соответствующих найденным частотам, в системе (2.131) целесообразно ввести новые переменные

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{14}f_1 + a_{13}f_2; \\ y_3 &= a_{13}f_3 + a_{14}f_4; \\ y_2 &= f_4; \\ y_4 &= f_1. \end{aligned}$$

Система (2.131) примет тогда вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 + \gamma^2 y_2 &= 0; \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 + y_1 &= 0; \\ \ddot{y}_3 + \omega_3^2 y_3 + \gamma^2 y_4 &= 0; \\ \ddot{y}_4 + \omega_4^2 y_4 + y_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Здесь первые два уравнения связывают переменные y_1, y_2 и независимы от других двух уравнений, связывающих y_3, y_4 . Поэтому переход к нормальным координатам в (2.133) не вызывает особых затруднений.

Действительно, полагая

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1 + \eta_1; \\ y_2 &= A_1 \xi_1 + B_1 \eta_1; \\ y_3 &= \xi_2 + \eta_2; \\ y_4 &= A_2 \xi_2 + B_2 \eta_2, \end{aligned} \quad (2.134)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\lambda_1^2 - \omega_1^2}{\gamma^2}; \quad B_1 = \frac{1}{\lambda_2^2 - \omega_2^2}; \\ A_2 &= \frac{\lambda_1^2 - \omega_2^2}{\gamma^2}; \quad B_2 = \frac{1}{\lambda_2^2 - \omega_1^2}, \end{aligned}$$

достигаем указанной цели.

Возвращаясь к введенным ранее обозначениям, находим

$$\begin{aligned} f_1 &= A_2 \xi_2 + B_2 \eta_2; \\ f_2 &= \frac{1}{a_{13}} (\xi_1 + \eta_1 - a_{14} A_2 \xi_2 - a_{14} B_2 \eta_2); \\ f_3 &= \frac{1}{a_{13}} (\xi_2 + \eta_2 - a_{14} A_1 \xi_1 - a_{14} B_1 \eta_1); \\ f_4 &= A_1 \xi_1 + B_1 \eta_1. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Затем на основании (2.129) находим искомые формы:

$$X_{11} = C_{11} \frac{1}{a_{13}} [\sin sy (\sin rx + A_1 a_{13} \sin qx) - a_{14} A_1 \cos sy \sin qx]; \quad (2.136)$$

$$X_{12} = C_{12} \frac{1}{a_{13}} [\sin sy (\sin rx + B_1 a_{13} \sin qx) - a_{14} B_1 \cos sy \sin qx];$$

$$X_{21} = C_{21} \frac{1}{a_{13}} [\cos sy (A_2 a_{13} \sin rx + \sin qx) - a_{14} A_2 \sin sy \sin rx]; \quad (2.137)$$

$$X_{22} = C_{22} \frac{1}{a_{13}} [\cos sy (B_2 a_{13} \sin rx + \sin qx) - a_{14} B_2 \sin sy \sin qx].$$

Г Л А В А 3

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Нелинейные задачи динамики оболочек в общем случае не поддаются точному решению. Для получения приближенного решения приходится пользоваться различного рода приближениями, или численными методами, или комбинацией тех и других. Настоящая глава посвящена описанию некоторых наиболее распространенных в практике методов исследования нелинейных колебаний оболочек, подверженных периодическим возмущениям, или совершающих «свободное» движение. Обсуждаются, в частности, методы сведения исходной „распределенной” оболочечной конструкции к эквивалентной сосредоточенной модели, рассматриваются некоторые асимптотические методы нелинейной механики (Крылова — Боголюбова, усреднения и др.).

§ 3.1. «Линейность» и «нелинейность» колебаний упругих систем. Некоторые особенности нелинейных систем

Реальные механические колебательные системы как с дискретными, так и с распределенными параметрами являются, по существу, нелинейными динамическими системами, поскольку всегда содержат нелинейные зависимости в объективных закономерностях, определяющих их движение. В этой связи используемое обычно на практике деление таких систем на «линейные» и «нелинейные» является чисто

условным и связано непосредственно с процессом перехода от реальных физических явлений к их математическому абстрагированию, выраженному в соответствующих дифференциальных уравнениях, описывающих эти явления.

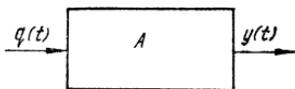


Рис. 3.1

Под «линейными» механическими системами обычно понимают такие системы, колебательные процессы в которых с достаточной для практических исследований точностью описываются линейными дифференциальными уравнениями. К нелинейным системам относят, в свою очередь, системы, колебания которых приходится исследовать по нелинейным дифференциальным уравнениям.

Существует целый ряд характерных признаков, позволяющих практически определить «принадлежность» той или иной колебательной системы соответственно к классу линейных или нелинейных систем. Остановимся кратко на некоторых из них.

Рассмотрим одномерную колебательную систему (рис. 3.1), для которой соответствие между входной функцией (внешним возмущением) $q(t)$ и ее выходной функцией (реакцией системы) $y(t)$ можно записать в виде

$$y(t) = A \{q(t)\}. \quad (3.1)$$

Здесь A — некоторый оператор (дифференциальный, интегральный, интегродифференциальный), определяющий совокупность действий, которые необходимо осуществить над входной функцией, чтобы получить реакцию системы. Программа этих действий обусловлена математической моделью системы.

Очевидно, что динамическая система (3.1) будет «линейной», если ее оператор A линеен. Это следует непосредственно из самого определения линейной колебательной системы. При этом справедливо следующее равенство:

$$A \left\{ \sum_{k=1}^n c_k q_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^n c_k A \{q_k(t)\}, \quad (3.2)$$

называемое принципом суперпозиции (наложения). Оно утверждает, что для произвольной линейной системы сумме двух любых внешних возмущений соответствует сумма соответствующих двух реакций; при любом усилении внешних возмущений без изменения его формы реакция системы

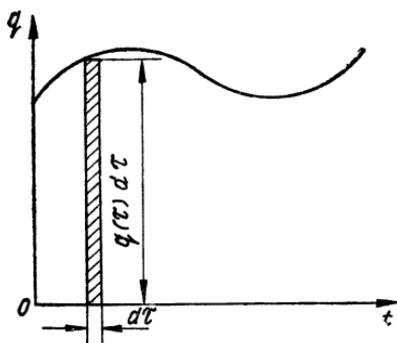


Рис. 3.2

претерпевает точно такое же усиление, также не изменяя своей формы.

Нетрудно видеть, что выполнение принципа суперпозиции является как необходимым, так и достаточным условием того, чтобы колебательная система была линейной динамической системой.

Следует отметить, что принцип суперпозиции не только является глобальным признаком

линейности колебательных систем, а и лежит в основе общих методов решения многочисленных задач линейной теории. Это естественно потому, что с его помощью всегда можно выразить реакцию линейной системы на любое возмущение через ее реакцию на определенный вид элементарных возмущений. Для этого достаточно разложить произвольное возмущение $q(t)$ на элементарные возмущения выбранного типа, определить реакцию системы на эти возмущения и затем просуммировать их.

Например, рассмотрим колебания системы, описываемые уравнением

$$\ddot{y} + \omega^2 y = q(t), \quad (3.3)$$

где $q(t)$ — некоторая заданная возмущающая сила (рис. 3.2). Представим эту силу как последовательность бесконечно малых импульсов $q(\tau) dt$ (на рисунке заштрихован). Тогда перемещение от одного такого импульса при $t > \tau$ будет

$$y_1 = \frac{q(\tau) dt}{\omega} \sin \omega(t - \tau). \quad (3.4)$$

Перемещение же, вызванное всей последовательностью импульсов, расположенных в интервале $(0, t)$, можно найти при помощи интегрирования

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t q(\tau) \sin \omega(t - \tau) dt. \quad (3.5)$$

Если, например, нагрузка возрастает со временем по линейному закону

$$q(t) = \beta t; \quad \beta = \text{const}, \quad (3.6)$$

то на основании (3.5) получаем

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \beta \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{\beta t}{\omega^2} - \frac{\beta}{\omega^3} \sin \omega t. \quad (3.7)$$

В случае

$$q(t) = \beta e^{-\gamma t} \quad (3.8)$$

имеем

$$y(t) = \frac{\beta e^{-\gamma t}}{\gamma^2 + \omega^2} + \frac{\beta}{\omega(\gamma^2 + \omega^2)} (\gamma \sin \omega t - \omega \cos \omega t). \quad (3.9)$$

Если же

$$q(t) = q_0 H(t), \quad (3.10)$$

где $H(t)$ — единичная функция (функция Хевисайда).

$$H(t) = 0 \text{ при } t < 0; \quad H(t) = 1 \text{ при } t > 0, \quad (3.11)$$

то перемещение упругой системы будет равно

$$y(t) = \frac{q_0}{\omega^2} (1 - \cos \omega t). \quad (3.12)$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть нагрузка имеет вид

$$q(t) = \beta t \sin pt. \quad (3.13)$$

В этом случае из (3.5) получаем

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\omega} \int_0^t \beta \tau \sin p\tau \sin \omega(t - \tau) d\tau = \\ &= \beta \left[\frac{t}{\omega^2 - p^2} \sin pt + \frac{p^2 + \omega^2}{\omega(p^2 - \omega^2)^2} \cos pt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2p}{(p^2 - \omega^2)^2} \cos \omega t \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Полагая здесь $p = \omega$, приходим к зависимости

$$y(t) = \frac{\beta}{\omega^2} (t \sin \omega t - t^2 \omega \cos \omega t). \quad (3.15)$$

Что же касается нелинейных колебательных систем, то для них принцип наложения в общем случае * не выполняется. В этом нетрудно убедиться даже в случае простейших видов оператора A из уравнения (3.1). Нелинейным системам присущ при этом целый ряд других специфических

* Для специального класса нелинейных систем справедлив так называемый принцип «слабой» суперпозиции (см.: Блэкбер О, Анализ нелинейных систем.— М., 1969.— 400 с.).

особенностей, не свойственных линейным колебательным системам. В частности, периоды собственных колебаний таких систем могут существенно зависеть от уровня амплитуд колебаний (нарушение изохронности колебаний). В составе как свободных, так и вынужденных колебаний этих систем всегда присутствуют гармоники с частотами, кратными собственным частотам и частотам внешнего воздействия (субгармонические и ультрагармонические колебательные режимы). Для большинства нелинейных систем характерны, кроме того, такие явления, как неоднозначность возможных режимов колебаний, устойчивые и неустойчивые режимы стационарных колебаний, специфические колебательные процессы типа «срывов» амплитуд, «затягивания» частоты, синхронизации колебаний, зависимость характеристик колебаний от свойств источников энергии (эффект ограниченного возбуждения), режимы асинхронного гашения и возбуждения колебаний и многое другое. Если на нелинейную систему действуют одновременно несколько гармонических сил, в составе ее реакции обязательно будут присутствовать гармоники с комбинационными частотами.

К числу специфических явлений, характерных только для многомерных нелинейных систем, в том числе автономных, следует отнести также резонансные режимы колебаний, соответствующие так называемым «внутренним» резонансам, одночастотные режимы колебаний, режимы косвенного возбуждения колебаний и другие.

Перечисленные и другие более «тонкие» особенности динамического поведения нелинейных систем описаны в работах многих советских и зарубежных авторов, рассматривавших самые различные механические колебательные объекты как с дискретными, так и с непрерывными, а также с дискретно-непрерывными параметрами. Эти особенности свойственны, естественно, и колебаниям оболочечных конструкций. Изучение данных особенностей в последнем случае весьма важно, поскольку многие нелинейные явления весьма нежелательны с точки зрения динамической прочности и надежности тонкостенных конструкций. В дальнейшем при решении конкретных задач динамики оболочек на эти моменты будет постоянно обращать внимание читателя.

§ 3.2. Сведение распределенной системы к сосредоточенной модели. Метод Бубнова—Галеркина

Приступая к динамическому расчету реальных оболочечных объектов в нелинейной постановке, неизбежно приходится решать одну из самых ответственных задач в теории колебаний распределенных систем — задачу схематизации объекта исследования. Ее существо заключается в выборе определенной идеализированной дискретной физической модели такой, которая достаточно правильно отображала бы динамические свойства исходного объекта и в то же время была бы в математическом отношении значительно проще его.

Как следует из предыдущей главы, оболочка, как и любая другая тонкостенная конструкция, характеризуется бесконечным набором собственных частот. Следовательно, условно в соответствие ей можно поставить бесконечный набор сосредоточенных колебательных систем с одной степенью свободы, каждая из которых имеет собственную (парциальную) частоту, совпадающую с одной из собственных частот оболочки. Ограничиваясь некоторым конечным числом указанных сосредоточенных систем (равным, например, N), задачу о колебаниях оболочки можно таким образом свести к анализу N связанных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Чем больше при этом число N , которое характеризует число степеней свободы оболочки (число независимых координат), тем выбранная модель лучше описывает колебания оболочки.

Для построения модели с сосредоточенными параметрами в настоящее время используются различные приближенные методы, наибольшее распространение из которых получили прямые вариационные методы, * позволяющие осуществить редукцию от распределенной системы, описываемой уравнениями в частных производных, к системе с конечным числом степеней свободы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Чаще других используются при этом методы Ритца и Бубнова — Галеркина (последний уже применялся нами в предыдущей главе).

* См.: Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике.— М., 1957,— 440 с.

По методу Ритца для осуществления указанного выше перехода динамические перемещения упругой системы аппроксимируют таким образом, чтобы удовлетворялись лишь геометрические граничные условия. Деформации, а по ним напряженное состояние, находят путем дифференцирования приближенного перемещения.

Следствием такого подхода является относительно низкая точность аппроксимации напряженного состояния, а также недостаточная для многих прикладных задач точность первых приближений частот свободных колебаний.

Более общим и в то же время более универсальным методом приближенного решения нелинейных задач динамики упругих тел является метод Бубнова — Галеркина. Он может быть применен как к консервативным системам, так и к системам, в которых действующие силы не обладают потенциалом. Этот метод с успехом применяется к самым различным типам дифференциальных уравнений: эллиптическим, гиперболическим, параболическим.

Основная идея метода состоит в следующем.

Пусть требуется определить решение динамического уравнения

$$L(\omega, t) = 0, \quad (3.16)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям. Здесь L — некоторый вполне непрерывный дифференциальный оператор (в общем случае нелинейный); ω — искомая функция, причем $\omega = \omega(x, y, t)$ (x, y — координаты системы).

Приближенное решение будем искать в форме

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^N f_i(t) \varphi_i(x, y), \quad (3.17)$$

где $\{\varphi_i(x, y)\}$ — некоторая система заранее выбранных функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям, а $f_i(t)$ — неопределенные пока функции времени. Функции $\varphi_i(x, y)$ предполагаются линейно независимыми и представляющими первые N функций некоторой системы функций $\{\varphi_i(x, y)\}$, $i = 1, 2, \dots$, полной в данной области. Для того чтобы выражение (3.17) представляло точное решение уравнения (3.16), необходимо, чтобы

$$L(\bar{\omega}, t) \equiv 0, \quad (3.18)$$

а это требование, если учесть, что оператор $L(\bar{\omega}, t)$ непрерывен, равносильно требованию ортогональности выражения $L(\bar{\omega}, t)$ ко всем функциям системы $\{\varphi_i(x, y)\}$, $i = 1, 2, \dots$ Однако, имея в своем распоряжении только N временных функций $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$, можно, вообще говоря, удовлетворить лишь N условиям ортогональности вида

$$\begin{aligned} & \iint_D L(\bar{\omega}, t) \varphi_i(x, y) dx dy = \\ & = \iint_D L \left[\sum_{j=1}^N f_j(t) \varphi_j(x, y) \right] \varphi_i(x, y) dx dy = 0, \quad (3.19) \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

которые можно записать еще так:

$$\begin{aligned} & \iint_D L \left[\sum_{j=1}^N f_j(t) \varphi_j(x, y) \right] \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial f_i} dx dy = 0, \quad (3.20) \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где D — область определения координат системы x и y .

Физический смысл процедуры метода Бубнова — Галеркина заключается в следующем. Задание формы решения в виде разложения (3.17) эквивалентно наложению на упругую систему некоторых связей. Требуя равенства нулю работы сил реакции данных связей на произвольном виртуальном перемещении, получаем таким образом уравнения (3.20). Их и можно трактовать как уравнения колебаний в некоторой эквивалентной сосредоточенной системе с конечным числом степеней свободы, равным N .

Кроме метода Бубнова — Галеркина для сведения нелинейных распределенных систем к сосредоточенным моделям в настоящее время используются другие методы, в частности метод разложения решения по собственным формам порождающей линейной системы, метод коллокаций (см. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М., 1968) и некоторые другие методы.

§ 3.3. Вывод нелинейных уравнений движения модели оболочки

Как следует из материала, рассмотренного в § 1.4, задача о нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек при достаточно общих предположениях сводится к рассмотре-

нию системы уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h} \nabla^4 \omega - \frac{1}{R\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{1}{\rho} L(\omega, \Phi) + \frac{q}{\rho h}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2} L(\omega, \omega), \end{aligned} \quad (3.21)$$

интегрирование которой должно проводиться при некоторых заданных граничных и начальных условиях. В правых частях этих уравнений находится нелинейный дифференциальный оператор $L(z_1, z_2)$, который «описывает» нелинейные свойства оболочки геометрического происхождения. Прежде чем перейти к выводу на базе системы (3.21) динамических уравнений сосредоточенной модели оболочки, покажем, что все нелинейные члены в системе (3.21) малы по сравнению с линейными членами этой системы. С этой целью введем в (3.21) безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}; \quad \theta = \frac{y}{R}; \quad W = \frac{\omega}{\omega_{\max}}; \quad \tau = \omega_0 t; \\ \bar{\Phi} &= \frac{(1 - \mu^2) \Phi}{EhR\omega_{\max}}; \quad k = \frac{l}{R}; \quad \eta = \frac{h}{\sqrt{12} R}; \\ \bar{q} &= \frac{(1 - \mu^2) R^2}{Eh\omega_{\max}} q; \quad \lambda_0 = \frac{(1 - \mu^2) \rho R^2 \omega_0^2}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где ω_0 — частота линейных колебаний оболочки, которая была определена в предыдущей главе; ω_{\max} — максимальное радиальное перемещение оболочки; μ — коэффициент Пуассона.

Подставим выражения (3.22) в (3.21). Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= \omega_{\max} \omega_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}; \quad \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = \frac{\omega_{\max}}{l^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4}; \\ \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} &= \frac{\omega_{\max}}{R^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4}; \quad \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial \theta^2} = \frac{\omega_{\max}}{l^2 R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \theta^2}; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{EhR\omega_{\max}}{(1 - \mu^2) l^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \xi^2}; \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \frac{EhR\omega_{\max}}{(1 - \mu^2) l^4} \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial \xi^4} \end{aligned} \quad (3.23)$$

и т. д., получим систему уравнений в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \eta^2 \left[\frac{1}{k^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + \frac{2}{k^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} \right] + \lambda_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \\ - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \xi^2} = \frac{(1 - \mu^2) R^2}{Eh\omega_{\max}} q + \frac{\omega_{\max}}{k^2 R} \left[\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \theta \partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \Big]; \quad (3.24) \\
& \frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{k^4} \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial \xi^4} + \frac{2}{k^2} \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial \theta^4} \right] = \\
& = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{w_{\max}}{k^2 R} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right].
\end{aligned}$$

Из уравнений (3.24) следует, что все нелинейные члены пропорциональны коэффициенту $\frac{w_{\max}}{R} = \varepsilon_0$. Поскольку рассматриваются тонкостенные оболочки, для которых $\frac{h}{R} \ll 1$, и так как максимальные амплитуды динамических прогибов оболочки должны быть величинами порядка толщины оболочки h , то очевидно, что коэффициент ε_0 может рассматриваться в данной задаче как малый параметр. Следовательно, система уравнений (3.24) может трактоваться как квазилинейная система [3, 31], т. е. как система, близкая к линейной. Такой же системой является и исходная система (3.21), хотя малый параметр в нее явно не входит.

Сделанное выше замечание относительно малости нелинейных членов в разрешающих динамических уравнениях оболочки очень важно, так как является основанием для применения к анализу системы (3.21) приближенных методов асимптотического интегрирования. Такие методы будут использоваться в дальнейшем.

Пусть на торцевых сечениях оболочки реализуются условия шарнирного опирания. Динамический прогиб такой оболочки представим в виде следующего разложения по формам собственных колебаний соответствующей линейной задачи (см. гл. 2):

$$\omega = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^N \left(f_1^{n,m} \cos \frac{ny}{R} + f_2^{n,m} \sin \frac{ny}{R} \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.25)$$

и применим для определения неизвестных функций времени $f_i^{n,m}(t)$, $i = 1, 2$, метод Бубнова — Галеркина, о котором шла речь в предыдущем параграфе. При этом, используя второе уравнение системы (3.21), найдем предварительно функцию напряжений Φ в срединной поверхности оболочки. С этой целью подставим в это уравнение двойной ряд (3.25). В результате после несложных преобразований приходим к такому соотношению:

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{\pi^2}{4R^2 l^2} \left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^N n^2 k^2 [f_1^{n,m} f_1^{j,k} + f_2^{n,m} f_2^{j,k}] \times
\right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos(s-p)y + (f_1^{n,m} f_1^{j,k} - f_2^{n,m} f_2^{j,k}) \cos(s+p)y + \\
& + (f_2^{n,m} f_1^{j,k} - f_1^{n,m} f_2^{j,k}) \sin(s-p)y + (f_2^{n,m} f_1^{j,k} + f_1^{n,m} f_2^{j,k}) \times \\
& \times \sin(s+p)y [\cos(r-q)x - \cos(r+q)x] - \\
& - \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^N n^2 k^2 [(f_1^{n,m} f_1^{j,k} + f_2^{n,m} f_2^{j,k}) \cos(s-p)y - \\
& - (f_1^{n,m} f_1^{j,k} - f_2^{n,m} f_2^{j,k}) \cos(s+p)y + (f_2^{n,m} f_1^{j,k} - f_1^{n,m} f_2^{j,k}) \times \\
& \times \sin(s-p)y - (f_2^{n,m} f_1^{j,k} + f_1^{n,m} f_2^{j,k}) \sin(s+p)y] \times \\
& \times [\cos(r-q)x + \cos(r+q)x] \Big\} + \frac{\pi^2}{Rl^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^N m^2 (f_1^{n,m} \cos sy + \\
& + f_2^{n,m} \sin sy) \sin rx, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

где

$$r = \frac{m\pi}{l}; \quad s = \frac{n}{R}; \quad q = \frac{\pi k}{l}; \quad p = \frac{j}{R}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\Phi = & \sum_n \sum_m \sum_j \sum_k [\Phi_0^{n,m,j,k} \cos(s-p)y \cos(r-q)x + \\
& + \Phi_1^{n,m,j,k} \cos(s+p)y \cos(r-q)x + \Phi_2^{n,m,j,k} \sin(s-p)y \times \\
& \times \cos(r-q)x + \Phi_3^{n,m,j,k} \sin(s+p)y \cos(r-q)x + \\
& + \Phi_4^{n,m,j,k} \cos(s-p)y \cos(r+q)x + \Phi_5^{n,m,j,k} \cos(s+p)y \times \\
& \times \cos(r+q)x + \Phi_6^{n,m,j,k} \sin(s-p)y \cos(r+q)x + \\
& + \Phi_7^{n,m,j,k} \sin(s+p)y \cos(r+q)x + \\
& + \sum_n \sum_m (\Phi_8^{n,m} \cos sy + \Phi_9^{n,m} \sin sy) \sin rx, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

причем

$$\Phi_0^{n,m,j,k} = -\frac{EA(sq-rp)^2}{4[(s-p)^2 + (r-q)^2]^2};$$

$$\Phi_1^{n,m,j,k} = -\frac{EB(sq+rp)^2}{4[(s+p)^2 + (r-q)^2]^2};$$

$$\Phi_2^{n,m,j,k} = -\frac{ED(sq-rp)^2}{4[(s-p)^2 + (r-q)^2]^2};$$

$$\Phi_3^{n,m,j,k} = -\frac{EC(sq+rp)^2}{4[(s+p)^2 + (r-q)^2]^2};$$

$$\Phi_4^{n,m,j,k} = \frac{EA(sq+rp)^2}{4[(s-p)^2+(r+q)^2]^2}; \quad (3.28)$$

$$\Phi_5^{n,m,j,k} = \frac{EB(sq-rp)^2}{4[(s+p)^2+(r+q)^2]^2};$$

$$\Phi_6^{n,m,j,k} = \frac{ED(sq+rp)^2}{4[(s-p)^2+(r+q)^2]^2};$$

$$\Phi_7^{n,m,j,k} = \frac{EC(sq-rp)^2}{4[(s+p)^2+(r+q)^2]^2};$$

$$\Phi_8^{n,m} = \frac{Er^2 f_1^{n,m}}{R(s^2+r^2)^2}; \quad \Phi_9^{n,m} = \frac{Er^2 f_2^{n,m}}{R(s^2+r^2)^2}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} A &= f_1^{n,m} f_1^{j,k} + f_2^{n,m} f_2^{j,k}; \\ B &= f_1^{n,m} f_1^{j,k} - f_2^{n,m} f_2^{j,k}; \\ C &= f_2^{n,m} f_1^{j,k} + f_1^{n,m} f_2^{j,k}; \\ D &= f_2^{n,m} f_1^{j,k} - f_1^{n,m} f_2^{j,k}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Подставим найденную функцию Φ (3.27) в первое уравнение системы (3.21) и запишем уравнения Бубнова — Галеркина

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^l X \cos \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l} dx dy = 0; \quad (3.30)$$

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^l X \sin \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l} dx dy = 0,$$

где

$$X \equiv \frac{D}{h} \nabla^4 \omega - L(\omega, \Phi) - \frac{1}{R} \frac{q^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{q}{h}. \quad (3.31)$$

После интегрирования на основании (3.30) получим систему уравнений, из которой надлежит определить неизвестные временные функции $f_1^{n,m}$ и $f_2^{n,m}$, входящие в (3.25):

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 f_1^{n,m} + \sum_{c,d,q,p} (\alpha_{c,d,q,p}^{(1)n,m} \gamma_{c,d,q,p}^{f_1} f_1^{n,m} + \beta_{c,d,q,p}^{(1)n,m} \gamma_{c,d,q,p}^{f_2} f_2^{n,m}) + \\ + \sum_{c,d,q,p,k,j} f_1^{k,j} (\gamma_{c,d,q,p,k,j}^{(1)n,m} \gamma_{c,d,q,p}^{f_1} f_1^{n,m} + \delta_{c,d,q,p,k,j}^{(1)n,m} \gamma_{c,d,q,p}^{f_2} f_2^{n,m}) = q_1^{n,m}(t); \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\ddot{f}_2^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 f_2^{n,m} + \sum_{c,d,q,p} (\alpha_{c,d,q,p}^{(2)n,m} \gamma_{c,d,q,p}^{f_1} f_1^{n,m} + \beta_{c,d,q,p}^{(2)n,m} \gamma_{c,d,q,p}^{f_2} f_2^{n,m}) +$$

$$+ \sum_{c,d,q,r,k,j} f_2^{k,j} (\gamma_{c,d,q,r,k,j}^{(2)n,m} f_1^{c,d} f_1^{q,p} + \delta_{c,d,q,r,k,j}^{(2)n,m} f_2^{c,d} f_2^{q,p}) = q_2^{n,m}(t),$$

$$m, n, c, d, q, r, k, j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Здесь $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$, $\delta^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\beta^{(2)}$, $\gamma^{(2)}$, $\delta^{(2)}$ — постоянные коэффициенты, зависящие от геометрических и физических параметров оболочки, а также параметров волнообразования;

$$q_i^{n,m} = \frac{2}{\pi R l \rho h} \int_0^{2\pi} \int_0^{Rl} q(x, y, t) \frac{\partial \omega}{\partial t_i^{n,m}} dx dy, \quad i = 1, 2; \quad (3.33)$$

$$\omega_0^{n,m} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left[\frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 + \frac{E r^4}{R^2 (r^2 + s^2)^2} \right]} \quad (3.34)$$

— собственные частоты линейных колебаний оболочки, соответствующие ее деформированию с параметрами волнообразования n и m в окружном и продольном направлениях соответственно.

Таким образом, исходная задача о колебаниях оболочки с распределенными параметрами (3.21) свелась к исследованию конечной системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (3.32). Из их вида следует, что учет геометрической нелинейности обусловил связанность всех форм малых собственных колебаний (в случае линейной задачи последние формы независимы, их можно определить с точностью до произвольных констант из решения соответствующей задачи на собственные значения). Действительно, если попытаться определить «изолированную» форму собственных нелинейных колебаний оболочки, то она будет выражаться через все формы вида

$$C_1^{n,m} \cos \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad C_2^{n,m} \sin \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l},$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots, N.$$

С подобной ситуацией мы уже встречались при анализе движения оболочки с начальным прогибом (см. гл. 2). Принципиальное отличие состоит в том, что в рассматриваемой задаче связь между формами является существенно нелинейной. Благодаря этой связи можно ожидать наличия ряда специфических явлений резонансного характера, свойственных многомерным нелинейным системам. Это, в частности, появление в резонансных областях неустойчивых вынужденных и параметрических одномодовых (соответствующих

одной из изгибных форм) колебаний, возбуждение в этих же областях многомодовых движений, в том числе нестационарных циклических процессов перехода от одной изгибной формы к другой. Это возникновение качественно новых видов деформирования поверхностной формы оболочки (типа бегущих в окружном направлении волн). Это возбуждение колебаний с комбинационными частотами и специфические эффекты дестабилизации, порождаемые связанностью форм, и многое другое, о чем в конкретном плане будет идти речь в последующих главах книги.

Решая каким-либо из методов систему уравнений (3.32), мы тем самым найдем обобщенные перемещения оболочки $f_i^{n,m}(t)$, подставляя которые в соотношение (3.25), определим функцию динамического прогиба ω . Если известен прогиб, то нетрудно найти динамические напряжения и деформации в оболочке, т. е. восстановить напряженно-деформированное состояние в оболочке, подверженной некоторым заданным динамическим нагрузкам (вибрационным, импульсным, нестационарным и т. п.).

Если оболочка имеет начальный прогиб ω_0 , который не вызывает в ней предварительных напряжений и может быть представлен в виде разложения, аналогичного (3.25),

$$\omega_0 = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^N \left(f_{10}^{n,m} \cos \frac{ny}{R} + f_{20}^{n,m} \sin \frac{ny}{R} \right) \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad (3.35)$$

$$f_{10}^{n,m} = \text{const}; \quad f_{20}^{n,m} = \text{const},$$

то, поступая точно так же, как и в случае идеальной оболочки, можно вывести уравнения для определения неизвестных функций времени $f_i^{n,m}(t)$, $i = 1, 2$, входящих в соотношение (3.25). Эти уравнения имеют вид

$$\ddot{f}_1^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 f_1^{n,m} + \sum_{i,p,q} \chi_{i,n,m}^{p,q,1} f_i^{p,q} + F_1^{n,m} = q_1^{n,m};$$

$$\ddot{f}_2^{n,m} + (\omega_0^{n,m})^2 f_2^{n,m} + \sum_{i,p,q} \chi_{i,n,m}^{p,q,2} f_i^{p,q} + F_2^{n,m} = q_2^{n,m},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N; \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

где $\chi_{i,n,m}^{p,q}$ — коэффициенты, зависящие от параметров начального прогиба, $f_{10}^{n,m}, f_{20}^{n,m}$, $i = 1, 2$; $F_1^{n,m}, F_2^{n,m}$ — нелинейные относительно $f_i^{p,q}$ функции, совпадающие по форме с соответствующими нелинейными функциями в уравнениях (3.32), однако коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в данном случае зависят и от параметров $f_{10}^{n,m}$, и $f_{20}^{n,m}$.

Следовательно, связь между обобщенными координатами оболочки может быть и линейной и нелинейной. Это, естественно, внесет некоторые коррективы в методику построения приближенных аналитических решений по сравнению со случаем идеальной оболочки.

§ 3.4. Асимптотические методы исследования квазилинейных систем

Количество дифференциальных уравнений в системе (3.32) или (3.36), на базе которых проводится анализ движения оболочки, существенно зависит от многих факторов: требуемой точности решения задачи, степени квазилинейности системы, наличия резонансных соотношений в этой системе.

Ранее уже отмечалось, что в основе общих методов решения задач теории линейных колебаний лежит принцип суперпозиции или наложения. Нелинейная теория, к сожалению, не располагает такими мощными и универсальными методами исследования, какими располагает линейная теория. Анализ нелинейных систем нередко оказывается весьма трудной проблемой. Существует лишь несколько типов нелинейных дифференциальных уравнений колебаний, точные интегралы которых могут быть выражены в замкнутой форме элементарными функциями.

В общем случае методы исследования нелинейных колебаний состоят из ряда специализированных приемов, имеющих различную силу и область применения. В их разработке и развитии выдающаяся роль принадлежит советским ученым Л. И. Мандельштаму, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронову, Н. М. Крылову, Н. Н. Боголюбову, Ю. А. Митропольскому, Е. П. Попову и др.

Можно выделить два основных направления в современном развитии методов анализа нелинейных колебаний. Первое направление связано с развитием аналитических методов исследования, второе — с развитием топологических методов графического интегрирования.

Среди аналитических методов в настоящее время наибольшее распространение получили: 1) метод малого параметра Ляпунова — Пуанкаре; 2) методы линеаризации (гармонической, эквивалентной); 3) метод медленно изменяющихся амплитуд (метод Ван дер Поля); 4) асимптотические методы Крылова — Боголюбова и усреднения Боголюбова.

Метод малого параметра берет свое начало от работ Пуанкаре и основан на отыскании решения нелинейных дифференциальных уравнений в виде рядов по степеням малого параметра, первые члены которых представляют «порождающие» решения (периодические решения соответствующих линейных систем). Метод применяется для определения параметров стационарных периодических режимов колебаний.

Методы линеаризации заключаются в замене в уравнениях движения нелинейных зависимостей линейными, при этом оператор преобразования зависит от амплитуд колебаний.

Метод медленно изменяющихся амплитуд пригоден для исследования нелинейных систем, близких к линейным консервативным. Для такого рода систем характерно сравнительно медленное изменение во времени амплитуды и фазы колебаний (малое относительное изменение этих параметров за период колебаний). Использование этой особенности позволяет упростить и понизить порядок исходных нелинейных дифференциальных уравнений.

Асимптотический метод Крылова — Боголюбова. Многие методы исследования нелинейных систем пригодны для построения решения соответствующих задач лишь в первом приближении и не дают возможности рассчитать процессы установления периодических режимов, которые в ряде случаев представляют интерес. Не все методы позволяют находить периодические и непериодические режимы в системах с двумя и большим числом степеней свободы. От этих недостатков свободен асимптотический метод Крылова — Боголюбова, который чаще других методов используется в настоящее время для решения самых разнообразных нелинейных задач теории колебаний. Этот метод является одним из наиболее эффективных и универсальных методов нелинейной механики.

Изложим в общих чертах основные идеи асимптотического метода Крылова — Боголюбова в применении к системе типа (3.32). Последнюю представим в виде

$$\ddot{y}_k + \omega_{k0}^2 y_k = \varepsilon Y_k(y, \dot{y}, \nu t), \quad (3.37)$$

где ε — малый параметр; $y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ — вся совокупность переменных y_k ; p — число нелинейных уравнений (3.32); ν — частота внешнего возбуждения (функция $Y(y, \dot{y}, \nu t)$ предполагается периодической с периодом $T = \frac{2\pi}{\nu}$).

Схема построения асимптотических приближений существенно зависит от того, выполняются ли в системе (3.37) резонансные (в нелинейном смысле) соотношения или не выполняются. Эти соотношения, о которых более подробно будет идти речь в 4—6-й главах книги, связывают частоты собственных колебаний оболочки с частотами внешних возбуждений. В общем случае их можно представить в виде такого приближенного равенства [3, 31]:

$$\sum_{k=1}^p m_k \omega_k + m_0 \nu \approx 0, \quad (3.38)$$

где m_k, m_0 — целые положительные и отрицательные числа, для которых

$$\sum_{k=0}^p |m_k| \leq 4. \quad (3.39)$$

При этом в каждом из соотношений (3.38), по крайней мере, одно из чисел $m_k, k = 1, 2, \dots, p$, отлично от нуля (если $m_0 = 0$, то таких чисел должно быть не менее двух).

Предположим, что все собственные частоты оболочки и частота внешней силы ν не удовлетворяют ни одному из резонансных соотношений (3.38). Решение системы (3.37) в этом случае согласно обсуждаемому методу может быть представлено в виде ряда по степеням малого параметра ε :

$$y_k = a_k \cos \psi_k + \varepsilon U_{1k}(a, \psi, \nu t) + \varepsilon^2 U_{2k}(a, \psi, \nu t) + \dots; \quad (3.40)$$

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}; \quad \psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p\}.$$

Здесь функции U_{1k}, U_{2k}, \dots — периодические по обеим угловым переменным ψ и νt с периодом 2π ; a_k и ψ_k — функции времени, определяемые из дифференциальных уравнений

$$\frac{da_k}{dt} = \varepsilon A_{1k}(a) + \varepsilon^2 A_{2k}(a) + \dots; \quad (3.41)$$

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k + \varepsilon B_{1k}(a) + \varepsilon^2 B_{2k}(a) + \dots$$

Цель метода состоит в том, чтобы определить неизвестные функции $U_{1k}, U_{2k}, \dots, A_{1k}, A_{2k}, \dots, B_{1k}, B_{2k}, \dots$ так, чтобы решение (3.40) удовлетворяло системе (3.37), как только a_k и ψ_k удовлетворяют уравнениям (3.41).

Ограничимся построением первого приближения*. С этой целью вычислим производные \dot{y}_k, \ddot{y}_k с учетом (3.40) и

* Такое приближение для большинства распределенных систем достаточно хорошо описывает их динамическое поведение.

(3.41), отбрасывая члены, пропорциональные ε^2 . В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_k &= -a_k \omega_k \sin \psi_k + \varepsilon \left(A_{1k} \cos \psi_k - a_k B_{1k} \sin \psi_k + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^p \omega_j \frac{\partial U_{1k}}{\partial \psi_j} \right) + \varepsilon \frac{\partial U_{1k}}{\partial t} + \dots; \\ \ddot{y}_k &= -a_k \omega_k^2 \cos \psi_k + \varepsilon \left(-2\omega_k A_{1k} \sin \psi_k - \right. \\ &\quad \left. - 2\omega_k a_k B_{1k} \cos \psi_k + \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \omega_j \omega_l \frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial \psi_j \partial \psi_l} \right) + \\ &\quad + \varepsilon 2 \sum_{j=1}^p \omega_j \frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial \psi_j \partial t} + \dots \end{aligned} \quad (3.42)$$

Правые части уравнений (3.37) разложим в ряд по ε , учитывая (3.40):

$$\varepsilon Y_k(y, vt) = \varepsilon Y_{1k}(y_0, vt) + \dots, \quad (3.43)$$

где $y_0 = \{a \cos \psi_1, a_2 \cos \psi_2, \dots, a_p \cos \psi_p\}$.

Подставляя соотношения (3.43), (3.42) в уравнения (3.37) и приравнявая члены при ε , получаем уравнение для определения неизвестных функций U_{1k}

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^p \omega_j \omega_l \frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial \psi_j \partial \psi_l} + \omega_k^2 U_{1k} + \frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial t^2} + 2 \sum_{j=1}^p \omega_j \frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial \psi_j \partial t} = \\ = 2\omega_k A_{1k} \sin \psi_k + 2\omega_k a_k B_{1k} \cos \psi_k + Y_{1k}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Очевидно, что функции $Y_{1k} = Y_{1k}(a, \psi, vt)$ являются периодическими функциями с периодом 2π по обоим аргументам ψ и vt и, кроме того, зависят от a_1, a_2, \dots, a_p . Явное выражение этих функций станет известным, как только будут найдены величины $A_{1k}(a)$ и $B_{1k}(a)$. Полагая их известными, представим функции Y_{1k} в виде разложения по всевозможным гармоникам и комбинационным частотам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$; ν :

$$Y_{1k} = Y_{1k}^{(0)}(a) \sin \psi_k + Y_{1k}^{(1)}(a) \cos \psi_k + \sum_{\nu_1 \neq \omega_k} e^{i\nu_1 t} Y_{1k}^{(\nu_1)}(a). \quad (3.45)$$

Подставляя (3.45) в уравнение (3.44) и требуя, чтобы функции U_{1k} не содержали резонансных членов, можно найти

неизвестные величины A_{1k} и B_{1k} . При этом

$$A_{1k} = -\frac{1}{2\omega_k} Y_{1k}^{(0)}(a); \quad B_{1k} = -\frac{1}{2\omega_k a_k} Y_{1k}^{(1)}(a), \quad (3.46)$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_k} Y_{1k}^{(0)}(a); \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \omega_k - \frac{1}{2\omega_k} Y_{1k}^{(1)}(a). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Представляя затем функции U_{1k} в виде разложения в ряд, аналогичный (3.45), из (3.44) нетрудно найти неизвестные коэффициенты этого разложения, а значит и сами функции U_{1k} .

Пример 1. Ограничимся в системе (3.37) двумя степенями свободы. Уравнения движения системы запишем (с учетом сил демпфирования) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 + \varepsilon h_1 \dot{y}_1 + \varepsilon (\gamma_{11} y_1^3 + \gamma_{12} y_1 y_2^2) &= q_1(t); \\ \ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 + \varepsilon h_2 \dot{y}_2 + \varepsilon (\gamma_{21} y_1^2 y_2 + \gamma_{22} y_2^3) &= q_2(t), \end{aligned} \quad (3.48)$$

причем для определенности полагаем

$$q_1(t) = E_1 \cos vt; \quad q_2(t) = E_2 \cos vt. \quad (3.49)$$

В уравнениях (3.48) и (3.49) $\omega_1, \omega_2, \gamma_{jk}, E_1, E_2, h_1, h_2$ — некоторые постоянные параметры.

Вводя замену переменных

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{E_1}{\omega_1^2 - v^2} \cos vt + x_1; \\ y_2 &= \frac{E_2}{\omega_2^2 - v^2} \cos vt + x_2, \end{aligned} \quad (3.50)$$

систему (3.48) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon h_1 \dot{x}_1 + \varepsilon (M \cos vt + x_1) [\gamma_{11} (M \cos vt + x_1)^2 + \\ + \gamma_{12} (N \cos vt + x_2)^2] &= \varepsilon h_1 M \sin vt; \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \varepsilon (N \cos vt + x_2) [\gamma_{21} (M \cos vt + x_1)^2 + \\ + \gamma_{22} (N \cos vt + x_2)^2] &= \varepsilon h_2 N \sin vt, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где

$$M = \frac{E_1}{\omega_1^2 - v^2}; \quad N = \frac{E_2}{\omega_2^2 - v^2}.$$

Воспользовавшись формулами (3.47), получаем решение уравнений (3.51) в первом приближении

$$x_1 = a_1 \cos \psi_1; \quad x_2 = a_2 \cos \psi_2, \quad (3.52)$$

причем

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{\varepsilon h_1 a_1}{2}; \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{\varepsilon h_2 a_2}{2};$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \omega_1 + \varepsilon \gamma_{11} \left(\frac{3}{8} a_1^2 + \frac{3}{4} M^2 \right) + \frac{\varepsilon \gamma_{12}}{4} (N^2 + a_2^2); \quad (3.53)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \omega_2 + \varepsilon \gamma_{22} \left(\frac{3}{8} a_2^2 + \frac{3}{4} N^2 \right) + \frac{\varepsilon \gamma_{21}}{4} (M^2 + a_1^2).$$

Отсюда получаем

$$a_1 = a_{10} e^{-\frac{\varepsilon h_1}{2} t}; \quad a_2 = a_{20} e^{-\frac{\varepsilon h_2}{2} t}, \quad (3.54)$$

где a_{10} , a_{20} — начальные значения амплитуд (определяются из начальных условий задачи),

$$\omega_{1e}(t) = \omega_1 + \frac{3}{4} \varepsilon \gamma_{11} \left(\frac{a_{10}^2}{2} e^{-\varepsilon h_1 t} + M^2 \right) +$$

$$+ \varepsilon \frac{\gamma_{12}}{4} (a_{20}^2 e^{-\varepsilon h_2 t} + N^2); \quad (3.55)$$

$$\omega_{2e}(t) = \omega_2 + \frac{3}{4} \varepsilon \gamma_{22} \left(\frac{a_{20}^2}{2} e^{-\varepsilon h_2 t} + N^2 \right) +$$

$$+ \varepsilon \frac{\gamma_{21}}{4} (a_{10}^2 e^{-\varepsilon h_1 t} + M^2),$$

где ω_{1e} , ω_{2e} — «мгновенные» значения частот собственных колебаний системы.

Для функции $x_1(t)$ в первом приближении на основании уравнения (3.44) получаем

$$x_1(t) = a_1 \cos \psi_1 - \varepsilon \left\{ -\frac{h_1 M}{\omega_1^2 - \nu^2} \sin \nu t + \right.$$

$$+ \frac{M(3\gamma_{11}M^2 + 3\gamma_{12}N^2 + 6\gamma_{11}a_1^2 + 2\gamma_{12}a_2^2)}{4(\omega_1^2 - \nu^2)} \cos \nu t +$$

$$+ \frac{M(\gamma_{11}M^2 + \gamma_{12}N^2)}{4(\omega_1^2 - 9\nu^2)} \cos 3\nu t + \frac{a_1(3\gamma_{11}M^2 + \gamma_{12}N^2)}{4[\omega_1^2 - (\omega_1 - 2\nu)^2]} \cos(\psi_1 - 2\nu t) +$$

$$+ \frac{a_1(3\gamma_{11}M^2 + \gamma_{12}N^2)}{4[\omega_1^2 - (\omega_1 + 2\nu)^2]} \cos(\psi_1 + 2\nu t) +$$

$$+ \frac{3\gamma_{11}Ma_1^2}{4[\omega_1^2 - (2\omega_1 - \nu)^2]} \cos(2\psi_1 - \nu t) + \frac{3\gamma_{11}Ma_1^2}{4[\omega_1^2 - (2\omega_1 + \nu)^2]} \times$$

$$\times \cos(2\psi_1 + \nu t) + \frac{\gamma_{12}NM a_2}{2[\omega_1^2 - (\omega_2 - 2\nu)^2]} \cos(\psi_2 - 2\nu t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_{12} N M a_2}{2 [\omega_1^2 - (\omega_2 + 2\nu)^2]} \cos (\psi_2 + 2\nu t) + \frac{\gamma_{12} N M a_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cos \psi_2 + \\
& \quad + \frac{\gamma_{12} M a_2^2}{4 [\omega_1^2 - (2\omega_2 - \nu)^2]} \cos (2\psi_2 - \nu t) + \\
& + \frac{\gamma_{12} M a_2^2}{4 [\omega_1^2 - (2\omega_2 + \nu)^2]} \cos (2\psi_2 + \nu t) - \frac{\gamma_{11} a_1^3}{32 \omega_1^2} \cos 3\psi_1 + \\
& \quad + \frac{\gamma_{12} N a_1 a_2}{2 [\omega_1^2 - (\omega_2 - \omega_1 - \nu)^2]} \cos (\psi_2 - \psi_1 - \nu t) + \\
& \quad + \frac{\gamma_{12} N a_1 a_2}{2 [\omega_1^2 - (\omega_1 + \omega_2 - \nu)^2]} \cos (\psi_1 + \psi_2 - \nu t) + \\
& \quad + \frac{\gamma_{12} N a_1 a_2}{2 [\omega_1^2 - (\omega_2 - \omega_1 + \nu)^2]} \cos (\psi_2 - \psi_1 + \nu t) + \\
& \quad + \frac{\gamma_{12} N a_1 a_2}{2 [\omega_1^2 - (\omega_1 + \omega_2 + \nu)^2]} \cos (\psi_1 + \psi_2 + \nu t) + \\
& \quad + \frac{\gamma_{12} a_1 a_2^2}{4 [\omega_1^2 - (2\omega_2 - \omega_1)^2]} \cos (2\psi_2 - \psi_1) + \\
& \quad + \frac{\gamma_{12} a_1 a_2^2}{4 [\omega_1^2 - (2\omega_2 + \omega_1)^2]} \cos (2\psi_2 + \psi_1). \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Аналогичное разложение можно получить и для другой координаты $x_2(t)$.

Рассмотрим далее случай, когда в системе (3.37) выполняется одно из резонансных соотношений (3.38). Пусть это будет, например, резонанс вида

$$\omega_l \approx \frac{p_l}{q} \nu, \tag{3.57}$$

где p_l и q — некоторые взаимно простые числа, $1 \leq l \leq p$.

Предполагается, что какие-либо другие резонансные соотношения не реализуются. Основная идея построения асимптотического решения системы (3.37) остается прежней. Решение ищем в виде разложения, аналогичного по форме (3.40),

$$\begin{aligned}
y_k = & a_k \cos \psi_k + \varepsilon U_{1k}(a, \psi, \nu t) + \\
& + \varepsilon^2 U_{2k}(a, \psi, \nu t) + \dots, \tag{3.58}
\end{aligned}$$

однако функции a_k и ψ_k определяем из уравнений, вид которых зависит от того, какая из координат рассматривается:

«резонирующая» с внешним возбуждением, т. е. координата y_l , или «не резонирующая» ($y_k, k \neq l, k = 1, 2, \dots$). В частности, для резонирующей координаты эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{da_l}{dt} &= \varepsilon A_{1,l}(a, \theta_l) + \varepsilon^2 A_{2,l}(a, \theta_l) + \dots; \\ \frac{d\psi_l}{dt} &= \frac{p_1}{q} \nu + \varepsilon B_{1,l}(a, \theta_l) + \varepsilon^2 B_{2,l}(a, \theta_l) + \dots, \end{aligned} \quad (3.59)$$

для остальных координат

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \varepsilon A_{1,k}(a) + \varepsilon^2 A_{2,k}(a) + \dots; \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \omega_k + \varepsilon B_{1,k}(a) + \varepsilon^2 B_{2,k}(a) + \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

В уравнениях (3.59) функции $A_{1,l}, A_{2,l}, \dots, B_{1,l}, B_{2,l}, \dots$ являются периодическими функциями угловой переменной θ с периодом 2π . При этом

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}; \quad \theta_l = \psi_l - \frac{p_1}{q} \nu t.$$

Поскольку резонансное соотношение (3.57) выполняется приближенно, то в рассмотрение вводится обычно «расстройка» частот

$$\varepsilon \Delta = \omega^2 - \left(\frac{p_1 \nu}{q} \right)^2, \quad (3.61)$$

которую, ввиду ее малости, относим к возмущающим силам $\varepsilon Y_l(y, \nu t)$.

Как и ранее, функции $A_{1,l}, A_{2,l}, \dots, B_{1,l}, B_{2,l}, \dots, A_{1,k}, A_{2,k}, \dots, B_{1,k}, B_{2,k}, \dots$ из (3.59), (3.60) находятся из условий отсутствия в решениях для $U_{1,k}, U_{2,k}, \dots$ резонансных членов.

Пример 2. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями (3.48), в которой полагаем

$$q_1(t) = \varepsilon E_1 \cos \nu t; \quad q_2(t) = E_2 \cos \nu t. \quad (3.62)$$

Приближенное решение системы (3.48) запишем в этом случае в виде *

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 \cos(\nu t + \theta_1); \\ y_2 &= a_2 \cos \psi_2 + \frac{E_2}{\omega_2^2 - \nu^2} \cos \nu t. \end{aligned} \quad (3.63)$$

* Поскольку нас интересуют вынужденные колебания системы $x_1 = x_1(t)$ в окрестности резонанса, то амплитуда возбуждения $q_1(t)$ должна быть малой величиной из-за малости демпфирования в системе. В противном случае можно получить результаты, не имеющие физического смысла.

Амплитуда и фаза a_1 и θ_1 определяются при этом из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{da_1}{dt} = & \frac{\varepsilon\gamma_{12}a_1a_2E_2}{4\pi(\omega_2^2 - \nu^2)} \left\{ -\frac{2\pi h_1(\omega_2^2 - \nu^2)}{\gamma_{12}a_2E_2} + \frac{\pi E_2}{2a_2\nu} \sin 2\theta_1 - \right. \\
 & - \frac{2\pi E_1(\omega_2^2 - \nu^2)}{\gamma_{12}a_1a_2E_2\nu} \sin \theta_1 + \frac{a_2}{4E_2} \sin \frac{2\pi\omega_2}{\nu} \left[(\omega_2 + \nu) \times \right. \\
 & \times \sin 2\left(\theta_1 - \theta_2 - \frac{\pi\omega_2}{\nu}\right) + (\omega_2 - \nu) \sin 2\left(\theta_1 + \theta_2 + \frac{\pi\omega_2}{\nu}\right) \left. \right] + \\
 & + \sin \frac{\pi\omega_2}{\nu} \left[\left(\frac{1}{\omega_2 + 3\nu} + \frac{1}{\omega_2 + \nu} \right) \sin\left(2\theta_1 + \theta_2 + \frac{\pi\omega_2}{\nu}\right) + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{1}{\omega_2 - 3\nu} + \frac{1}{\omega_2 - \nu} \right) \sin\left(2\theta_1 - \theta_2 - \frac{\pi\omega_2}{\nu}\right) \right] \left. \right\}; \\
 \frac{d\theta_1}{dt} = & \omega_1 - \nu + \frac{\varepsilon}{8\nu} \left\{ 3\gamma_{11}a_1^2 + 2\gamma_{12} \left[a_2^2 + \frac{E_2^2}{(\omega_2^2 - \nu^2)^2} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\varepsilon\gamma_{12}a_2E_2}{4\pi(\omega_2^2 - \nu^2)} \left\{ \frac{\pi E_2}{2a_2\nu} \cos 2\theta_1 - \frac{2\pi E_1(\omega_2^2 - \nu^2)}{\gamma_{12}a_1a_2E_2\nu} \cos \theta_1 + \right. \\
 & + \frac{a_2}{4E_2} \sin \frac{2\pi\omega_2}{\nu} \left[(\omega_2 + \nu) \cos 2\left(\frac{\pi\omega_2}{\nu} + \theta_2 - \theta_1\right) + \right. \\
 & \left. + (\omega_2 - \nu) \cos 2\left(\frac{\pi\omega_2}{\nu} + \theta_1 + \theta_2\right) \right] + \\
 & + \sin \frac{\pi\omega_2}{\nu} \left[\left(\frac{1}{\omega_2 + 3\nu} + \frac{1}{\omega_2 + \nu} \right) \cos\left(\frac{\pi\omega_2}{\nu} + 2\theta_1 + \theta_2\right) + \right. \\
 & + \left(\frac{1}{\omega_2 - 3\nu} + \frac{1}{\omega_2 - \nu} \right) \cos\left(\frac{\pi\omega_2}{\nu} + \theta_2 - 2\theta_1\right) + \\
 & \left. + \left(\frac{8\omega_2}{\omega_2^2 - \nu^2} + \frac{a_2(\omega_2^2 - \nu^2)}{2E_2\omega_2} \right) \cos\left(\frac{\pi\omega_2}{\nu} + \theta_2\right) \right] \left. \right\}. \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

Соответствующие уравнения можно получить и для определения функций a_2 , ψ_2 .

При других резонансных соотношениях, отличных от (3.57), следует поступать аналогичным образом, т. е. для резонирующих координат использовать соответственно уравнения (3.59), записанные с учетом конкретного резонанса, для нерезонирующих — уравнения (3.60).

Метод усреднения разработал Н. Н. Боголюбов и развил Ю. А. Митропольский. Этот метод применим к так называемым уравнениям в стандартной форме (уравнениям для медленных переменных). Если, например, в системе (3.37) вместо переменных y_k, \dot{y}_k ввести переменные a_k и φ_k , которые связаны с y_k и \dot{y}_k соотношениями

$$y_k = a_k \cos(\omega_k t + \varphi_k); \quad \dot{y}_k = -a_k \omega_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (3.66)$$

то на основании (3.37) и (3.66) нетрудно получить такие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{a}_k \cos \varphi_k - a_k \dot{\varphi}_k \sin \varphi_k &= 0; \\ -\dot{a}_k \omega_k \sin \varphi_k - a_k \omega_k \dot{\varphi}_k \cos \varphi_k &= \varepsilon Y_k(a \cos \psi, -a \sin \psi, \nu t); \\ \psi_k &= \omega_k t + \varphi_k. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Отсюда, разрешая относительно \dot{a}_k и $\dot{\varphi}_k$, имеем уравнения в так называемой стандартной форме:

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_k} Y_k(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi, \nu t) \sin \psi_k; \\ \frac{d\varphi_k}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a_k \omega_k} Y_k(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi, \nu t) \cos \psi_k. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Поскольку в правых частях этих уравнений стоит малый параметр ε , то введенные переменные a_k, φ_k являются медленно изменяющимися функциями времени.

Представляя уравнения (3.68) в компактной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (3.69)$$

где символом x обозначена вся совокупность переменных a_k, φ_k , а

$$X(t, x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_{\nu}(x), \quad (3.70)$$

приближенное решение $x = x(t)$ будем искать как суперпозицию плавно изменяющегося члена ξ и суммы малых вибрационных членов $\varepsilon \tilde{X}(t, \xi)$.

В первом приближении имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \quad (3.71)$$

где

$$X_0(\xi) = M_t \{X(t, \xi)\}, \quad (3.72)$$

а M — оператор усреднения при постоянных x , или оператор усреднения по явно содержащемуся времени.

Таким образом, уравнения первого приближения по методу усреднения получаются из точного уравнения (3.69) путем усреднения его правой части по t . Возвращаясь к уравнениям для амплитуд и фаз (3.68), в первом приближении можно записать

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_k} \overline{Y_k(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi, t) \sin \psi_k}; \\ \frac{d\varphi_k}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{a_k \omega_k} \overline{Y_k(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi, t) \cos \psi_k}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Черта означает здесь усреднение по явно входящему времени. Полагая

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon \tilde{X}) \quad (3.74)$$

и выполняя операцию усреднения, можно получить уравнения второго приближения.

Аналогично строятся уравнения более высоких приближений.

Нетрудно показать, что в первом приближении уравнения для определения амплитуд и фаз, полученные методом усреднения, в точности совпадают с соответствующими уравнениями, полученными методом медленно изменяющихся амплитуд и асимптотическим методом Крылова — Боголюбова.

§ 3.5. «Внутренние» резонансы при колебаниях оболочек и метод их исследования

Ранее уже отмечалось, что алгоритм построения приближенных периодических решений многомерной системы (3.37) с помощью асимптотических методов существенно зависит от возможностей реализации в ней тех или иных резонансных соотношений, определяемых формулой (3.38). Если в этой формуле положить $m_0 = 0$, то получим

$$\sum_{k=1}^p m_k \omega_k \approx 0. \quad (3.75)$$

Резонансы, которые определяются последней зависимостью, именуются «внутренними», поскольку в (3.75) входят лишь частоты собственных колебаний оболочки и отсутствует час-

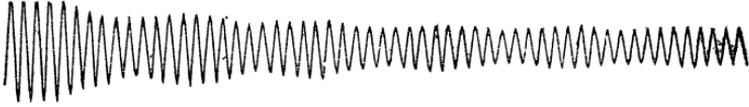


Рис. 3.3

тота внешнего возбуждения. Это очень важные, хотя и нетрадиционные резонансы, если иметь в виду линейные или нелинейные системы с одной степенью свободы. Проявляются они только в многомерных нелинейных системах.

Реализация этих резонансов сказывается прежде всего на характеристиках свободных колебаний оболочек: возникают режимы биений, которыми сопровождается энергообмен (перераспределение энергии) между различными изгибными формами. На рис. 3.3 показана типичная осциллограмма свободных нелинейных затухающих колебаний оболочки, имеющих две близкие собственные частоты, что и предопределяет внутренний резонанс при колебаниях этой оболочки. Осциллограмма характеризует процесс затухания в одной из точек оболочки, которая в момент отключения внешнего возбуждения совпадала с пучностью изгибной формы. Если бы резонансы вида (3.75) отсутствовали, то осциллограмма должна была бы представлять экспоненциально убывающую зависимость.

Итак, обратимся к динамическим уравнениям оболочки, точнее ее модели (3.37), полученным из (3.32). Нетрудно видеть, что эти уравнения всегда можно разбить на пары уравнений колебаний, характеризуемых одними и теми же линейными собственными частотами $\omega_0^{n,m}$. Эта особенность, как было показано во второй главе, является следствием того, что двум различным, хотя и геометрически подобным, изгибным формам $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \sin sy \sin rx$ отвечает одна и та же частота изгибных колебаний $\omega_0^{n,m}$ (в случае идеальной оболочки). Следовательно, независимо от того, действует ли на оболочку внешняя периодическая сила или оболочка является незагруженной, при ее колебаниях всегда реализуется внутренний резонанс

$$\omega_1^{n,m} = \omega_2^{n,m} = \omega_0^{n,m}, \quad (3.76)$$

связывающий две обобщенные координаты $f_1^{n,m}$ и $f_2^{n,m}$. Причем, если $\omega_0 = 0$, этот резонанс выполняется точно.

В случае неидеальной оболочки ($\omega_0 \neq 0$) указанное резонансное соотношение выполняется приближенно:

$$\omega_1^{n,m} \approx \omega_2^{n,m}, \quad (3.77)$$

вследствие чего появляется некоторая расстройка

$$\Delta = |\omega_2^{n_1, m_1} - \omega_1^{n_2, m_2}|, \quad (3.78)$$

которая оказывает существенное влияние на характер движения оболочки, на устойчивость стационарных режимов.

В системе (3.37) возможны также другие типы внутренних резонансов, в частности резонансы

$$\omega_1^{n_1, m_1} \approx \omega_2^{n_2, m_2}, \quad (3.79)$$

где в общем случае $n_1 \neq n_2$; $m_1 \neq m_2$.

Они имеют место при выполнении следующего соотношения:

$$\frac{h}{12(1-\mu^2)} (M_1^2 - M_2^2) = \frac{E(r_2^4 M_1^2 - r_1^4 M_2^2)}{R^2 M_1^2 M_2^2}, \quad (3.80)$$

где $M_i = r_i^2 + s_i^2$; $r_i = \frac{m_i \pi}{l}$; $s_i = \frac{n_i}{R}$; $i = 1, 2$.

Если предположить $r_1 = r_2 = r$, $s_1 \neq s_2$, то формула (3.80) упрощается и принимает вид

$$(s_1^2 + r^2)(s_2^2 + r^2) = \frac{r^2}{hR} \sqrt{12(1-\mu^2)}. \quad (3.81)$$

Отсюда следует, что путем подбора одного из трех геометрических параметров оболочки (толщины, длины или радиуса), не изменяя при этом двух других, всегда можно добиться выполнения условия (3.79).

Среди других внутренних резонансов системы (3.37), имеющих практическое значение, отметим следующие:

$$\omega_1^{n_1, m_1} = k \omega_2^{n_2, m_2}, \quad (3.82)$$

где $k = 2, 3, 1/2, 1/3$, которые легко обнаруживаются из анализа этой системы в первом приближении [3, 31]. На основании (3.82) нетрудно получить расчетную формулу, позволяющую так выбрать параметры оболочки, чтобы последняя имела равные (3.79) и кратные (3.82) частоты:

$$\left(\frac{h}{R}\right)^2 = \frac{\xi^2 \eta^2 \left[\frac{k^2}{(1+n_2^2 \xi \zeta)^2} - \frac{1}{(1+n_1^2 \xi \zeta)^2} \right]}{\eta [(1+n_1^2 \xi \zeta)^2 - k^2 (1+n_2^2 \xi \zeta)^2]}, \quad (3.83)$$

где $\xi = \left(\frac{l}{R}\right)^2$; $\eta = \frac{1}{12(1-\mu^2)}$; $\zeta = \frac{1}{m\pi}$. Формула (3.83) соответствует частному случаю $m_1 = m_2 = m$. На рис. 3.4—3.6 показаны зависимости $z = \frac{h}{R} = F(\xi)$, построенные в со-

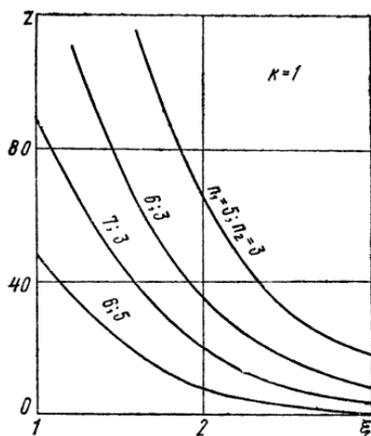


Рис. 3.4

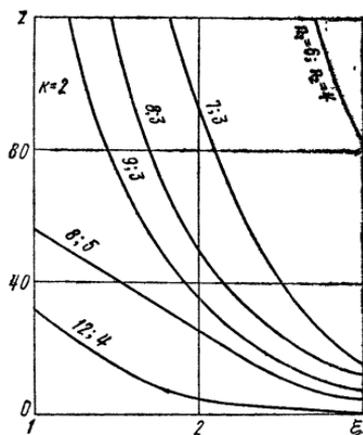


Рис. 3.5

ответствии с формулой (3.83) при $k = 1, 2, 3$ соответственно (предполагалось $m = 1$). Из полученных графиков следует, что многие оболочки при одних и тех же параметрах могут иметь одновременно как близкие, так и кратные частоты.

Что касается метода решения нелинейных задач о колебаниях оболочек при наличии внутренних резонансов (3.75), то он, по существу, содержит элементы, которые характерны для исследования других резонансов (внешних, комбинационных и т. п.), а именно устанавливается конкретный вид исследуемого резонанса, и тем самым фиксируются те обобщенные координаты оболочки, которые характеризуют резонансные колебания. Затем составляется форма решения отдельно для резонирующих и нерезонирующих координат и применяется асимптотический метод Крылова — Боголюбова, метод усреднения или другие методы.

Например, рассмотрим систему (3.48) с учетом (3.49), в которой примем

$$\omega_1 \approx \omega_2, \quad (3.84)$$

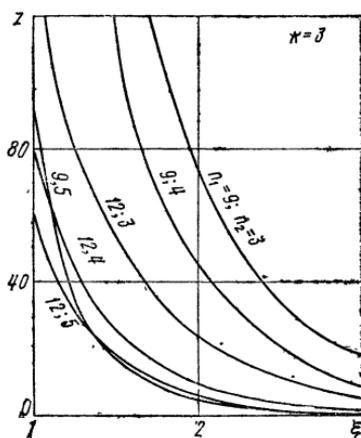


Рис. 3.6

и, кроме того, положим

$$\omega_i \approx \nu, \quad i = 1, 2, \quad (3.85)$$

так что одновременно с внутренним (3.84) выполняется и внешний (3.85) резонанс.

Очевидно, что в данном случае возникает необходимость введения в рассмотрение двух «расстроек» частот: $\Delta_1 = \omega_1^2 - \nu^2$ и $\Delta_2 = \omega_2^2 - \nu^2$, которые являются малыми величинами. Решение уравнений (3.48) ищем при этом в виде (в первом приближении)

$$y_1 = a_1 \cos(\nu t + \theta_1); \quad y_2 = a_2 \cos(\nu t + \theta_2), \quad (3.86)$$

где a_1 , a_2 , θ_1 и θ_2 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \Phi_1(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \sin \psi_1 dt; \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{\Delta_1}{2\nu} + \frac{1}{2\pi\nu a_1} \int_0^{2\pi} \Phi_1(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \cos \psi_1 dt; \\ \frac{da_2}{dt} &= \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \Phi_2(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \sin \psi_2 dt; \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{\Delta_2}{2\nu} + \frac{1}{2\pi\nu a_2} \int_0^{2\pi} \Phi_2(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2) \cos \psi_2 dt. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Здесь

$$\Phi_1(\dots) = \varepsilon h_1 \dot{y}_1 + \varepsilon (\gamma_{11} y_1^2 + \gamma_{12} y_2^2) y_1 - E_1 \cos \nu t;$$

$$\Phi_2(\dots) = \varepsilon h_2 \dot{y}_2 + \varepsilon (\gamma_{21} y_1^2 + \gamma_{22} y_2^2) y_2 - E_2 \cos \nu t;$$

$$y_1 = a_1 \cos \psi_1; \quad y_2 = a_2 \cos \psi_2; \quad \psi_1 = \nu t + \theta_1;$$

$$\psi_2 = \nu t + \theta_2; \quad \dot{y}_1 = -a_1 \nu \sin \psi_1; \quad \dot{y}_2 = -a_2 \nu \sin \psi_2.$$

После интегрирования в (3.87) получим

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -\frac{\varepsilon h_1 a_1}{2} + \frac{\varepsilon \gamma_{12}}{8\nu} a_1 a_2^2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) - \frac{E_1}{2\nu} \sin \theta_1; \\ \frac{d\theta_1}{dt} &= \omega_1 - \nu + \frac{3\varepsilon \gamma_{11} a_1^2}{8\nu} + \frac{\varepsilon \gamma_{12}}{8\nu} a_2^2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2) - \\ &\quad - \frac{E_1}{2\nu a_1} \cos \theta_1 + \frac{\varepsilon \gamma_{12}}{4\nu} a_2^2; \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{\varepsilon h_2 a_2}{2} + \frac{\varepsilon \gamma_{21}}{8\nu} a_1^2 a_2 \sin 2(\theta_2 - \theta_1) - \frac{E_2}{2\nu} \sin \theta_2;$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 - \nu + \frac{3\varepsilon \gamma_{22}}{8\nu} a_2^2 + \frac{\varepsilon \gamma_{21}}{8\nu} a_1^2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2) -$$

$$-\frac{E_2}{2\nu a_2} \cos \theta_2 + \frac{\varepsilon \gamma_{21}}{4\nu} a_1^2,$$

где использованы приближенные соотношения $\frac{\Delta_1}{2\nu} \approx \omega_1 - \nu$;
 $\frac{\Delta_2}{2\nu} \approx \omega_2 - \nu$.

Анализируя уравнения (3.88), можно исследовать как стационарные режимы резонансных колебаний, так и процессы установления этих режимов, изучить явления энепгопереноса между координатами y_1 и y_2 в условиях резонансов. Такого рода задачи рассматриваются в последующих главах книги, где исследуются как собственные, так и вынужденные нелинейные колебания оболочек.

Г Л А В А 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

В настоящей главе рассматриваются нелинейные колебания оболочек, обусловленные заданием некоторых начальных условий (начальных отклонений и скоростей, отличных от нуля). Такие колебания называются свободными (собственными).

Информация о таких колебаниях является весьма ценной для решения многочисленных задач проектирования и оптимизации тонкостенных конструкций. Она позволяет, прежде всего, выявлять возможные «собственные» формы движения оболочек, связанные с «внутренними» геометрическими и физическими свойствами этих оболочек. С другой стороны, на основании этой информации можно надежно прогнозировать резонансные (в том числе нелинейные) ситуации, которые могут возникнуть при воздействии на оболочку внешних периодических, почти периодических, аэродинамических или иных нагрузок. Речь идет, в частности, о субгармонических, комбинационных, «внутренних» и других типах резонансов, которые не проявляются при малых (линейных) колебаниях оболочек, поскольку порождены именно нелинейными факторами: нелинейной упругостью, нелинейной инерционностью или нелинейной диссипацией энергии.

Свободные колебания реальных оболочек, как и любых других физических систем, являются затухающими из-за необратимых потерь, обусловленных внутренним или конструкционным трением, аэродинамическим демпфированием и т. п. Учитывая слабую зависимость колебательных свойств многих оболочечных объектов от величины и характера затухания, в ряде случаев оболочки можно рассматривать как консервативные упругие системы. Основная задача заключается

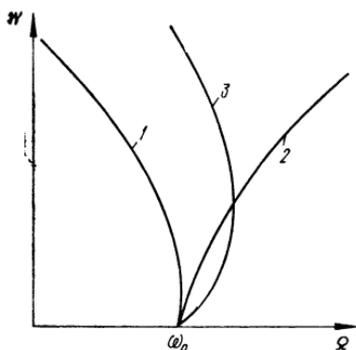


Рис. 4.1

при этом в определении «нелинейных» собственных форм и частот идеализированных (незатухающих) колебаний оболочек.

Необходимо отметить, что понятие собственные формы и частоты оболочек при колебаниях с большими прогибами не имеет пока такого четкого и физически ясного определения, как в случае линейных колебаний. Известно, что в случае линейных колебаний собственные формы и частоты определяются из решения соответствующих линейных краевых задач на собственные значения*. При нелинейных колебаниях под собственными формами обычно понимают форму изогнутой поверхности

оболочки, вызванную действием сил инерции и соответствующую одной из нелинейных собственных частот. Последняя не является постоянной индивидуальной характеристикой оболочек, как при линейных колебаниях, а существенно зависит от амплитуд динамических перемещений оболочек.

«Неизохронность» колебаний оболочек, т. е. изменение частот собственных колебаний с увеличением (уменьшением) амплитуд перемещений является наиболее характерным свойством нелинейных колебаний, обуславливающим «искривление» амплитудно-частотных характеристик этих оболочек при воздействии на них внешних периодических продольных или поперечных нагрузок.

На рис. 4.1 показаны типичные зависимости между поперечным прогибом ω (его амплитудным значением) и частотой собственных нелинейных колебаний оболочек Ω (на рисунке ω_0 — частота собственных линейных колебаний оболочки). Характер нелинейности (точнее, эффективной нелинейной восстанавливающей силы) — «мягкая» (кривая 1), «жесткая» (2), «жестко-мягкая» (3) — зависит при этом от многих факторов: геометрических и физических параметров оболочки, параметров волнообразования, граничных условий, начальных неправильностей формы и т. п.

Зависимость частот колебаний от величин прогиба порождает при этом ряд нелинейных явлений, таких как срывы колебаний в резонансной области, затягивание колебаний по частоте (гистерезис), скачкообразная «неустойчивость» при параметрическом возбуждении и другие (более подробно об этом будет идти речь в последующих главах книги).

Вместе с тем наличие нелинейных факторов может существенно повлиять на «собственные» формы движения оболочек. Эти формы во многих случаях качественно отличаются от традиционных стоячих волн, характерных для колебаний с малыми прогибами, и могут представлять собой бегущие в окружном направлении волны, имеющие как постоянные, так и переменные амплитуды и фазовые скорости. Такого рода волновые движения являются следствием энергообмена между изгибными формами оболочки, обусловленного их нелинейной взаимо-

* См., например, *Неймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М., 1969. — 420 с.

связью при движении оболочки. Наложение взаимодействующих форм и приводит к появлению бегущих волн.

В данной главе обсуждаются подробно как стоячие, так и бегущие волны, возникающие в оболочках при задании некоторых начальных условий. Рассматривается влияние геометрических нелинейностей на собственные частоты и формы изгибных колебаний оболочек, исследуются также вопросы взаимодействия и энергообмена между формами.

§ 4.1. О формах изгибных колебаний оболочек при конечных прогибах

Прежде чем приступить к решению конкретных задач о нелинейных собственных колебательных и волновых формах движения оболочек, рассмотрим кратко вопрос о приближенном аналитическом представлении этих форм, применяемом при теоретических расчетах. С этой целью обратимся к динамическим уравнениям (3.32). Из них следует, что геометрическая нелинейность оболочки, как уже отмечалось, обуславливает в общем случае связанность всех без исключения форм ее малых собственных колебаний $C_1^{n,m} \cos \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l}$ и $C_2^{n,m} \sin \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$ Причем связь является существенно нелинейной. Это весьма усложняет задачу определения в аналитическом виде нелинейных собственных форм изгибных колебаний, представляющих собой некоторую функцию координат (x, y) , описывающую изогнутую поверхность оболочки при ее «нелинейном» движении. Естественно, это побуждает искать пути приближенного решения данной задачи такого, которое, с одной стороны, было бы аналитически достаточно простым, с другой — правильно бы отображало свойства реальных оболочек при больших динамических прогибах.

В большинстве практических случаев производится «укорочение» бесконечной системы нелинейных уравнений (3.32), что равносильно, в свою очередь, удержанию в разложении (3.25) нескольких главных форм колебаний. Такая конечномерная идеализация «нелинейной» оболочки базируется на определенных физических представлениях, сопоставлении результатов теоретических и экспериментальных исследований.

Предположим, что оболочка совершает колебания с некоторой частотой, близкой к резонансной, и демпфирование в оболочке невелико. Тогда, при любом возможном пространственном распределении внешней нагрузки, в общем

движении оболочки, преобладают колебания по «резонирующей» собственной форме. В ряде (3.25), следовательно, можно ограничиться учетом лишь двух резонирующих с внешним возбуждением слагаемых

$$\omega = f_1 \cos \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l} + f_2 \sin \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (4.1)$$

(обе формы $C_1^{n,m} \cos \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l}$ и $C_2^{n,m} \sin \frac{ny}{R} \sin \frac{m\pi x}{l}$ соответствуют одной и той же частоте линейных колебаний ω_0^{nm}).

Одновременно, для отражения специфики деформирования оболочек при больших прогибах («преимущественное выпучивание вовнутрь» [8]), данное слагаемое рассматривается в сочетании с некоторой функцией $\varphi(x, y)$, характеризующей в большинстве случаев осесимметричную форму с кратным (чаще всего удвоенным) числом полуволн вдоль образующей. При расчетах обычно принимается

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi &\equiv \varphi(x) = f_3 \sin^2 rx; \quad r = \frac{m\pi}{l}; \\ \text{б) } \varphi &= \varphi(x) = f_3 \sin^4 rx, \end{aligned} \quad (4.2)$$

причем $f_3 = f_3(t)$ представляет независимую обобщенную координату оболочки (наряду с координатами $f_1(t)$ и $f_2(t)$).

В некоторых случаях функция $\varphi(x, y)$ имеет более сложный вид, а именно:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi &= \varphi(x, y) = f_3 \sin^2 sy \sin^2 rx; \\ \text{б) } \varphi &= \varphi(x, y) = f_3 \sin^4 sy \sin^4 rx; \\ \text{в) } \varphi &= \varphi(x, y) = f_3 \sin^4 sy \sin^2 rx, \quad s = \frac{n}{R}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

г. е. характеризует неосесимметричную форму с кратными гармониками ($\sin 2sy$, $\sin 2rx$, $\sin 4sy$ и т. д.).

Некоторые авторы используют другой способ задания функции φ , заключающийся в установлении связи между обобщенными перемещениями f_1 , f_2 и f_3 путем наложения дополнительных предположений относительно характера деформирования оболочек. Так обычно принимают, например, что контур поперечного сечения срединной поверхности оболочки при колебаниях не изменяет своей длины, т. е.

$$\int_0^{2\pi R} \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy = 0. \quad (4.4)$$

Это предположение несколько «ужесточает» упругие характеристики оболочки при ее колебаниях. Однако, как показывают соответствующие вычисления [8, 12, 66, 67], а также экспериментальные факты [13], на конечных результатах исследований оно мало сказывается. В то же время это предположение существенно упрощает решение динамической задачи, поскольку число независимых переменных уменьшается и становится равным двум. При анализе нелинейных систем очень важно максимально уменьшить число степеней свободы, так как многомерные нелинейные системы трудно поддаются последовательному анализу и не допускают ряда качественных и наглядных приемов, которые возможны для систем с одной степенью свободы. При этом объем вычислений быстро растет с увеличением размерности системы хотя бы на единицу [3, 31, 32, 46, 47].

Итак, представим динамический прогиб w в виде

$$w = f_1 \cos sy \sin rx + f_2 \sin sy \sin rx + \varphi(x, y). \quad (4.5)$$

Учитывая то, что общие выражения для радиального прогиба и углов поворота должны удовлетворять условиям периодичности, должно выполняться условие

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0. \quad (4.6)$$

Из выражения (4.4) получим

$$\varphi(x, y) = \frac{n^2}{8R} (f_1^2 + f_2^2) - \frac{n^2}{8R} (f_1^2 + f_2^2) \cos 2rx. \quad (4.7)$$

Следовательно,

$$w = (f_1 \cos sy + f_2 \sin sy) \sin rx + \frac{n^2}{8R} (f_1^2 + f_2^2) - \frac{n^2}{8R} (f_1^2 + f_2^2) \cos 2rx. \quad (4.8)$$

Возникает естественный вопрос: какой из предложенных подходов, точнее говоря, какая из аппроксимаций динамического прогиба более правильно отражает динамические свойства оболочки при ее колебаниях?

Однозначный ответ на этот вопрос дать, по-видимому, невозможно без проведения соответствующих экспериментальных исследований и тщательного сопоставления этих результатов с теоретическими расчетами. Предпринимаемые некоторыми авторами попытки обойтись без эксперимен-

тов, используя чисто энергетические соображения, не увенчались пока успехом, поскольку строгое математическое описание нелинейной динамики таких сложных конструкций, как замкнутые оболочки, задача весьма трудная.

В преобладающем большинстве случаев при теоретических расчетах собственных колебаний оболочек используются две аппроксимации прогиба:

$$\omega = f_1 \cos sy \sin rx + f_2 \sin sy \sin rx + f_3 \sin^2 rx; \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \omega = f_1 \cos sy \sin rx + f_2 \sin sy \sin rx + \\ + \frac{n^2}{4R} (f_1^2 + f_2^2) \sin^2 rx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Эти аппроксимации приводят к результатам, хорошо согласующимся с опытными данными [8, 21, 28, 54, 56].

Из представлений (4.9), (4.10) видно, что колебания оболочки происходят несимметрично относительно недеформированной срединной поверхности. Прогобы точек в направлении внутренней нормали (положительное направление оси Oz (см. рис. 1.1) превышают прогибы в направлении внешней нормали. Появляется смещение положения динамического равновесия, которое равно: в случае (4.9) — $\left| \frac{f_3}{2} \right|$, в случае (4.10) — $\frac{n^2}{8R} (f_1^2 + f_2^2)$. Вследствие этого смещения узловые (неподвижные) точки на оболочке при ее колебаниях будут «размазанными».

Отметим также, что функции (4.9), (4.10), аппроксимирующие прогиб, удовлетворяют граничным условиям шарнирного опирания на обоих торцах лишь в первой (линейной) аппроксимации. Граничное условие по моменту $M_x = 0$ не выполняется, однако, как показано в ряде работ [8, 66, 67], это обстоятельство не сильно скажется на результатах решения задачи.

Используя разложения (4.9) и (4.10), перейдем к анализу собственных частот колебаний оболочек, имеющих малые начальные неправильности цилиндрической формы.

§ 4.2. Собственные частоты нелинейных колебаний оболочки

Предположим, что оболочка имеет начальные неправильности формы, так что уравнения ее свободных колебаний можно записать в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \nabla^4 \omega_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = L(\omega_1 + \omega_0, \Phi);$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} L(\omega_1 + 2\omega_0, \omega_1). \quad (4.11)$$

Дополнительный динамический прогиб ω_1 аппроксимируем при этом выражением

$$\omega_1 = f_1 \cos sy \sin rx + f_2 \sin sy \sin rx + f_3 \sin^2 rx, \quad (4.12)$$

где, как обычно, $s = \frac{n}{R}$, $r = \frac{m\pi}{l}$ и функция $f_3 = f_3(t)$ рассматривается как независимая обобщенная координата модели оболочки (наряду с координатами f_1 и f_2).

Используя результаты исследований, изложенные во второй главе книги, зададим начальный прогиб ω_0 в аналогичном виде:

$$\omega_0 = f_{10} \cos sy \sin rx + f_{20} \sin sy \sin rx + f_{30} \sin^2 rx;$$

$$f_{10}, f_{20}, f_{30} = \text{const}. \quad (4.13)$$

При таком задании начального прогиба его влияние на динамическое поведение оболочки наиболее существенно (см. § 2.6).

Подставляя (4.12) и (4.13) во второе уравнение системы (4.11), определим функцию напряжений

$$\Phi = \Phi_0 \cos 2rx + \Phi_1 \sin rx \cos sy + \Phi_2 \sin rx \sin sy +$$

$$+ \Phi_3 \cos 2sy + \Phi_4 \sin 2sy + \Phi_5 \sin 3rx \cos sy +$$

$$+ \Phi_6 \sin 3rx \sin sy + \Phi^*. \quad (4.14)$$

Здесь

$$\Phi_0 = \frac{E}{32} \frac{s^2}{r^2} \left(f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_{10} + 2f_2 f_{20} - \frac{4f_3}{R s^2} \right);$$

$$\Phi_1 = \frac{E r^2}{(r^2 + s^2)^2} \left[\frac{f_1}{R} - s^2 (f_3 f_{10} + f_3 f_1 + f_1 f_{30}) \right];$$

$$\Phi_2 = \frac{E r^2}{(r^2 + s^2)^2} \left[\frac{f_2}{R} - s^2 (f_3 f_{20} + f_2 f_3 + f_2 f_{30}) \right];$$

$$\Phi_3 = \frac{E r^2}{32 s^2} (f_2^2 - f_1^2 + 2f_2 f_{20} - 2f_1 f_{10});$$

$$\Phi_4 = -\frac{E}{16} \frac{r^2}{s^2} (f_1 f_{20} + f_2 f_{10} + f_1 f_2); \quad (4.15)$$

$$\Phi_5 = \frac{Er^2s^2}{(s^2 + 9r^2)^2} (f_3f_{10} + f_1f_3 + f_1f_{30});$$

$$\Phi_6 = \frac{Er^2s^2}{(s^2 + 9r^2)^2} (f_3f_{20} + f_2f_3 + f_2f_{30});$$

$$\Phi^* = -\frac{Kx^2}{2}.$$

Последний член в соотношениях (4.15) Φ^* отвечает напряжениям в срединной поверхности, определяемым по безмоментной теории [8]. Для определения параметра K , входящего в Φ^* , используем условие периодичности, имеющее в случае неидеальной (с начальным прогибом) оболочки вид

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{E}{2} \left[\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right] + \frac{E\omega_1}{R} \right\} dy = 0. \quad (4.16)$$

В результате приходим к следующей зависимости:

$$K = -\frac{Es^2}{8} \left(f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_{10} + 2f_2f_{20} - \frac{4f_3}{Rs^2} \right). \quad (4.17)$$

Подставляя затем выражения (4.12) — (4.14) в первое уравнение (4.11) и выполняя известную процедуру метода Бубнова — Галеркина, получаем нелинейную систему для определения неизвестных функций $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} & \dot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 + \gamma f_2 + d_1 f_3 + d_2 f_1^2 + d_3 f_1 f_2 + d_4 f_2^2 + \\ & + d_5 f_1 f_3 + d_6 f_3^2 + d_7 f_1 (f_1^2 + f_2^2) + d_8 f_1 f_3^2 - \\ & - \frac{s^2 K}{\rho} (f_1 + f_{10}) = 0; \\ & \dot{f}_2 + \omega_2^2 f_2 + \gamma f_1 + c_1 f_3 + c_2 f_1^2 + c_3 f_1 f_2 + c_4 f_2^2 + c_5 f_2 f_3 + \\ & + c_6 f_3^2 + c_7 f_2 (f_1^2 + f_2^2) + c_8 f_2 f_3^2 - \frac{s^2 K}{\rho} (f_2 + f_{20}) = 0; \quad (4.18) \\ & \dot{f}_3 + \omega_3^2 f_3 + e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_1^2 + e_4 f_2^2 + e_5 f_1 f_3 + \\ & + e_6 f_2 f_3 + e_7 f_1^2 f_3 + e_8 f_2^2 f_3 + \frac{4K}{3\rho R} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\omega_i^2 = \omega_0^2 + \frac{Er^4}{8\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2) + \frac{Es^4}{8\rho} f_{i0}^2 + A(f_{30});$$

$$\begin{aligned}
\omega_2^2 &= \omega_0^2 + \frac{Er^4}{8\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2) + \frac{Es^4}{8\rho} f_{20}^2 + A(f_{30}); \\
\omega_3^2 &= \frac{16}{3} \frac{Dr^4}{\rho h} + \frac{E}{3\rho R^2} + \frac{2E}{3\rho} \beta (f_{10}^2 + f_{20}^2); \\
A(f_{30}) &= -\frac{2Er^4 s^2 f_{30}}{\rho R (r^2 + s^2)^2} + \frac{E}{\rho} \beta f_{30}^2; \quad \gamma = \frac{Es^4}{8\rho} f_{10} f_{20}; \\
\omega_0^2 &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 + \frac{Er^4}{R^2 (r^2 + s^2)^2} \right]; \\
d_1 &= -\frac{E f_{10} s^2}{\rho R} \left[\frac{1}{4} + \frac{r^4}{(r^2 + s^2)^2} - \frac{\beta f_{30} R}{s^2} \right]; \\
\beta &= r^4 s^4 \left[\frac{1}{(s^2 + r^2)^2} + \frac{1}{(s^2 + 9r^2)^2} \right]; \quad d_2 = \frac{3E}{16\rho} (r^4 + s^4) f_{10}; \\
d_3 &= \frac{E}{8\rho} (r^4 + s^4) f_{20}; \quad d_4 = \frac{E}{16\rho} (r^4 + s^4) f_{10}; \quad (4.19) \\
d_5 &= -\frac{Es^2}{\rho R} \left[\frac{1}{4} + \frac{2r^4}{(r^2 + s^2)^2} - \frac{2\beta f_{30} R}{s^2} \right]; \quad d_6 = \frac{E}{\rho} \beta f_{10}; \\
d_7 &= \frac{E}{16\rho} (r^4 + s^4); \quad d_8 = \frac{E}{\rho} \beta; \quad c_1 = d_1 \frac{f_{20}}{f_{10}}; \quad c_2 = d_4 \frac{f_{20}}{f_{10}}; \\
c_3 &= d_3 \frac{f_{10}}{f_{20}}; \quad c_4 = d_2 \frac{f_{20}}{f_{10}}; \quad c_5 = d_5; \quad c_6 = \frac{E}{\rho} \beta f_{20}; \quad c_7 = d_7; \\
c_8 &= d_8; \quad e_1 = \frac{2}{3} d_1; \quad e_2 = \frac{2}{3} d_1 \frac{f_{20}}{f_{10}}; \\
e_3 &= e_4 = \frac{d_5}{3}; \quad e_5 = \frac{4}{3} d_6; \quad e_6 = \frac{4}{3} d_6 \frac{f_{20}}{f_{10}}; \\
e_7 &= e_8 = \frac{2}{3} d_8.
\end{aligned}$$

Представим полученную систему уравнений в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{f}_1 + \Omega_1^2 f_1 + \gamma_1 f_2 + d_{11} f_3 &= F_1(f_1, f_2, f_3); \\
\ddot{f}_2 + \Omega_2^2 f_2 + \gamma_1 f_1 + c_{11} f_3 &= F_2(f_1, f_2, f_3); \\
\ddot{f}_3 + \Omega_3^2 f_3 + e_{11} f_1 + e_{21} f_2 &= F_3(f_1, f_2, f_3),
\end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega_1^2 &= \omega_1^2 + \frac{Es^4}{4\rho} f_{10}^2; \quad \Omega_2^2 = \omega_2^2 + \frac{Es^4}{4\rho} f_{20}^2; \\
\gamma_1 &= \gamma + \frac{Es^4}{4\rho} f_{10} f_{20}; \quad d_{11} = d_1 - \frac{Es^2}{2\rho R} f_{10};
\end{aligned}$$

$$c_{11} = c_1 - \frac{Es^2}{2\rho R} f_{20}; \quad \Omega_3^2 = \omega_3^2 + \frac{2}{3} \frac{E}{\rho R^2}; \quad (4.21)$$

$$e_{11} = e_1 - \frac{Es^2}{3\rho R} f_{10}; \quad e_{21} = e_2 - \frac{Es^2}{3\rho R} f_{20};$$

f_i (f_1, f_2, f_3), $i = 1, 2, 3$, — нелинейные относительно обобщенных перемещений f_i функции, которые нетрудно получить из выражений (4.18).

Составляя характеристическое уравнение для левой части системы (4.20) и решая его, можно найти собственные частоты линеаризованных колебаний оболочки. Они определяются как корни уравнения

$$p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (4.22)$$

в котором

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2); \\ a_2 &= (\Omega_1^2 \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \Omega_3^2 + \Omega_2^2 \Omega_3^2) - c_{11} e_{21} - \gamma_1^2 - d_{11} e_{11}; \\ a_3 &= -\Omega_1^2 \Omega_2^2 \Omega_3^2 + c_{11} e_{21} \Omega_1^2 + \gamma_1^2 \Omega_3^2 - \gamma_1 c_{11} e_{11} - \\ &\quad - d_{11} \gamma_1 e_{21} + d_{11} e_{11} \Omega_2^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Соответствующие вычисления показывают, что для оболочек «среднего изгиба» (для которых справедливы динамические уравнения (4.11) [8]) один из корней уравнения (4.22) p_3 по величине значительно превышает два его других корня p_1, p_2 , т. е. $p_3 \gg p_1, p_2$. Это связано с тем, что начальные неправильности оболочки предполагаются малыми величинами ($w_0 \sim h$) и, кроме того, выполняются следующие условия: $\omega_3 \gg \omega_1$ и $\omega_1 \approx \omega_2$. В связи с этим можно несколько упростить систему (4.18), определив функцию f_3 , из «статического» варианта рассматриваемой задачи [8]. Полагая $\ddot{f}_3 = 0$, из третьего уравнения (4.18) находим

$$f_3 = - \frac{e_{11} f_1 + e_{21} f_2 + e_{31} f_1^2 + e_{41} f_2^2}{\Omega_3^2 + e_3 f_1 + e_6 f_2 + e_7 f_1^2 + e_8 f_2^2}, \quad (4.24)$$

где

$$e_{31} = e_3 - \frac{Es^2}{6\rho R}; \quad e_{41} = e_4 - \frac{Es^2}{6\rho R}.$$

Поскольку $\Omega_3^2 \gg e_5 f_1 + e_6 f_2 + e_7 f_1^2 + e_8 f_2^2$, то после разложения (4.24) в ряд имеем

$$f_3 = - \frac{e_{11}}{\Omega_3^2} f_1 - \frac{e_{21}}{\Omega_3^2} f_2 - \frac{e_{31}}{\Omega_3^2} f_1^2 - \frac{e_{41}}{\Omega_3^2} f_2^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Omega_3^4} (e_{11}f_1 + e_{21}f_2 + e_{31}f_1^2 + e_{41}f_3^2) (e_5f_1 + e_6f_2 + \\
& + e_7f_1^2 + e_8f_2^2) + \frac{1}{\Omega_3^6} (\dots) + \dots \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Из характеристического уравнения, составленного для (4.20), в данном случае получим

$$\begin{aligned}
p_{12}^2 = & \frac{1}{2} \left[\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \frac{1}{\Omega_3^2} (d_{11}e_{11} + c_{11}e_{21}) \right] \pm \\
& \pm \sqrt{\frac{\left[\Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \frac{1}{\Omega_3^2} (e_{11}d_{11} - c_{11}e_{21}) \right]^2}{4} \dots} \\
& \dots - \left(\gamma_1 - \frac{d_{11}e_{21}}{\Omega_3^2} \right) \left(\gamma_1 - \frac{c_{11}e_{11}}{\Omega_3^2} \right). \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Подставляя сюда значения коэффициентов (4.21), можно исследовать зависимость частот линеаризованных колебаний оболочки от параметров начального прогиба и волновых параметров. Общий анализ соотношений (4.26) при этом показывает, что «расщепление» частот p_i ($p_1 \neq p_2$) имеет место лишь в случае $f_{10} \neq 0$ или $f_{20} \neq 0$, или $f_{10} \neq 0$ и $f_{20} \neq 0$, т. е. при наличии неосесимметричного начального прогиба. Что касается параметра осесимметричного начального прогиба f_{30} , то он не приводит к изменению расстройки $\Delta = |p_1^2 - p_2^2|$, поскольку обе частоты p_1 и p_2 с изменением значения f_{30} увеличиваются или уменьшаются на одну и ту же величину. Если $f_{10} \rightarrow 0$ и $f_{20} \rightarrow 0$, то $p_1 \rightarrow \omega_0$ и $p_2 \rightarrow \omega_0$, т. е. происходит сближение главных частот и в пределе (при $\omega_0 = 0$) эти частоты становятся равными частоте собственных колебаний идеальной оболочки.

Для определения частот нелинейных собственных колебаний следует подставить соотношение (4.25) в первые два уравнения общей системы (4.18). В результате приходим к уравнениям вида

$$\begin{aligned}
\ddot{f}_1 + \Omega_{11}^2 f_1 + \gamma_{11} f_2 &= F_1(f_1, f_2); \\
\ddot{f}_2 + \Omega_{22}^2 f_2 + \gamma_{21} f_1 &= F_2(f_1, f_2), \quad (4.27)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_{11}^2 &= \Omega_1^2 - \frac{d_1 e_{11}}{\Omega_3^2}; & \Omega_{22}^2 &= \Omega_2^2 - \frac{c_1 e_{21}}{\Omega_3^2}; \\ \gamma_{11} &= \gamma_1 - \frac{d_1 e_2}{\Omega_3^2}; & \gamma_{21} &= \gamma - \frac{c_1 e_1}{\Omega_3^2};\end{aligned}\quad (4.28)$$

$F_i(f_1, f_2)$, $i = 1, 2$, — нелинейные относительно обобщенных перемещений f_1 и f_2 функции (из-за громоздкости не приводятся).

С помощью замены

$$f_1 = \xi + \eta; \quad f_2 = A\xi + B\eta, \quad (4.29)$$

где

$$\begin{aligned}A &= \frac{p_1^2 - \Omega_{11}^2}{\gamma_{11}}; & B &= \frac{p_2^2 - \Omega_{11}^2}{\gamma_{21}}; \\ p_{1,2}^2 &= \frac{\Omega_{11}^2 + \Omega_{22}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Omega_{11}^2 - \Omega_{22}^2)^2}{4} + \gamma_{11}\gamma_{21}},\end{aligned}\quad (4.30)$$

систему (4.27) целесообразно представить в квазинормальной форме *

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + p_1^2 \xi &= (F_1 + AF_2)(1 + A^2)^{-1}; \\ \ddot{\eta} + p_2^2 \eta &= (F_1 + BF_2)(1 + B^2)^{-1}.\end{aligned}\quad (4.31)$$

Дальнейший анализ уравнений (4.31) с целью определения параметров собственных колебаний существенно зависит от того, выполняются ли резонансные соотношения (в нелинейном смысле) между собственными линейными частотами p_1 и p_2 или не выполняются.

Если предположить, что эти частоты не равны, не близки и не кратны, то стационарное решение системы (4.31) в первом приближении можно записать в виде

$$\xi = a \cos [p_1(a, b)t + \theta_1]; \quad \eta = b \cos [p_2(a, b)t + \theta_2], \quad (4.32)$$

где a, b, θ_1, θ_2 — постоянные амплитуды и фазы, определяемые из начальных условий задачи:

$$f_1(0) = f_1^{(0)}; \quad f_2(0) = f_2^{(0)}; \quad \dot{f}_1(0) = \dot{f}_1^{(0)}; \quad \dot{f}_2(0) = \dot{f}_2^{(0)}; \quad (4.33)$$

* Разделение переменных осуществлено лишь в «линейной» части системы,

$p_1(a, b)$, $p_2(a, b)$ — значения искомым нелинейных собственных частот оболочки, причем

$$p_1(a, b) = p_1 - \frac{1}{4\pi^2 p_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_1 + AF_2}{1 + A^2} \sin \psi_1 d\psi_1 d\psi_2; \quad (4.34)$$

$$p_2(a, b) = p_2 - \frac{1}{4\pi^2 p_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_1 + BF_2}{1 + B^2} \sin \psi_2 d\psi_2 d\psi_1.$$

В подынтегральные функции F_1 и F_2 в (4.34) следует подставить соотношения

$$\xi = a \cos(p_1 t + \theta_1); \quad \eta = b \cos(p_2 t + \theta_2). \quad (4.35)$$

Частотам $p_1(a, b)$ и $p_2(a, b)$ соответствуют следующие формы:

$$X_1(x, y) = C_1 \sin rx [\gamma_{11} \cos sy + (p_1^2 - \Omega_{11}^2) \sin sy];$$

$$X_2(x, y) = C_2 \sin rx [\gamma_{21} \cos sy + (p_2^2 - \Omega_{11}^2) \sin sy]; \quad (4.36)$$

$C_1, C_2 = \text{const}$.

Поскольку начальные неправильности оболочки малы (не превышают ее толщины), то частоты p_1 и p_2 близки по величине (или могут даже совпадать). В этой связи «собственное» движение оболочки не соответствует стоячим волнам типа (4.36). Это будет более сложное движение типа бегущих в окружном направлении волн (см. § 4.4). Чтобы движение оболочки в рассматриваемом случае представляло стоячую волну, необходимо «зафиксировать» одну из обобщенных координат оболочки f_1 или f_2 путем наложения некоторых дополнительных связей на ее движение. Практически этого можно добиться, используя специальные упоры, которые исключали бы возможность возбуждения сопряженной изгибной формы. Упоры следует ставить в узловых точках исходной (фиксируемой в начальный момент времени) изгибной формы.

Рассмотрим случай, когда начальный прогиб является несимметричным и имеет вид

$$w_0 = f_{10} \cos sy \sin rx. \quad (4.37)$$

Уравнения (4.27) преобразуются при этом так:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \Omega_{11}^2 f_1 + k_1 f_1^2 + k_2 f_2^2 + k_3 f_1^3 + k_4 f_1 f_2^2 + k_5 f_1^4 + \\ + k_6 f_2^4 + k_7 f_1^2 f_2^2 + k_8 f_1 f_2^4 + k_9 f_1^5 = 0; \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} & \bar{f}_2 + \Omega_{22}^2 f_2 + g_1 f_1 f_2 + g_2 f_1^2 f_2 + g_3 f_2^3 + g_4 f_1^3 f_2 + \\ & + g_5 f_1 f_2^3 + g_6 f_1^2 f_2 + g_7 f_2 f_1^4 + g_8 f_1^2 f_2^3 + g_9 f_2^5 = 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_{11}^2 &= \omega_0^2 + \frac{3Er^4 s^4}{8\rho} f_{10}^2 - \frac{d_{11} e_{11}}{\Omega_3^2}; & \Omega_{22}^2 &= \omega_0^2 + \frac{E}{8\rho} r^4 f_{10}^2; \\ k_1 &= d_{21} - \frac{d_{11} e_{31}}{\Omega_3^2} - \frac{d_{51} e_{11}}{\Omega_3^2} + \frac{d_6 e_{11}^2}{\Omega_3^4}; & k_2 &= d_{41} - \frac{d_{11} e_{41}}{\Omega_3^2}; \\ k_3 &= d_{71} - \frac{d_{51} e_{31}}{\Omega_3^2} + 2d_6 \frac{e_{11} e_{41}}{\Omega_3^4} + \frac{d_8}{\Omega_3^4} e_{11}^2; \\ k_4 &= d_{71} - \frac{d_{51} e_{41}}{\Omega_3^2} + 2 \frac{d_6 e_{11} e_{41}}{\Omega_3^4}; & k_5 &= \frac{d_6}{\Omega_3^4} e_{31}^2 + 2e_{11} e_{31} \frac{d_8}{\Omega_3^4}; \\ k_6 &= \frac{d_6}{\Omega_3^4} e_{41}^2; & k_7 &= \frac{2d_6}{\Omega_3^4} e_{31} e_{41} + 2e_{11} e_{41} \frac{d_8}{\Omega_3^4}; & k_8 &= \frac{d_8}{\Omega_3^4} e_{41}^2; \\ k_9 &= \frac{d_8}{\Omega_3^4} e_{31}^2; & g_1 &= c_{31} - \frac{c_{51} e_{11}}{\Omega_3^2}; & g_2 &= c_{71} - \frac{c_{51} e_{31}}{\Omega_3^2} + \frac{c_8 e_{11}^2}{\Omega_3^4}; \\ g_3 &= c_{71} - \frac{e_{51} e_{41}}{\Omega_3^2}; & g_4 &= \frac{2e_{11} e_{31} c_8}{\Omega_3^4}; & g_5 &= \frac{2c_8 e_{11} e_{41}}{\Omega_3^4}; \\ g_6 &= \frac{2c_8 e_{11} e_{41}}{\Omega_3^4}; & g_7 &= \frac{c_8 e_{31}^2}{\Omega_3^4}; & g_8 &= \frac{2e_{31} e_{41} c_8}{\Omega_3^4}; & g_9 &= \frac{c_8 e_{41}^2}{\Omega_3^4}; \\ d_{21} &= d_2 + \frac{3Es^4}{8\rho} f_{10}; & e_{31} &= e_{41} = e_3 - \frac{Es^2}{6\rho R}; \\ d_{41} &= d_4 + \frac{3Es^4}{8\rho} f_{10}; & d_{51} &= d_5 - \frac{Es^2}{2\rho R}; \\ d_{71} &= d_7 + \frac{Es^4}{8\rho}; & c_{31} &= c_3 + \frac{Es^4}{4\rho} f_{10}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

При выводе уравнений (4.38) было принято

$$f_3 = -\frac{1}{\Omega_3^2} (e_{11} f_1 + e_2 f_2 + e_{31} f_1^2 + e_{41} f_2^2). \quad (4.40)$$

Полагая в первом уравнении системы (4.38) $f_2 \equiv 0$, находим, что в первом приближении квадрат собственной частоты нелинейных колебаний оболочки, отвечающей форме $C_1 \cos sy \sin rx$,

$$p_1^2(a) = \Omega_{11}^2 + \frac{3}{4} k_3 a^2 + \frac{5}{8} k_9 a^4. \quad (4.41)$$

Анализируя второе уравнение (4.38), при $f_1 \equiv 0$ соответственно получаем

$$\rho_2^2(b) = \Omega_{22}^2 + \frac{3}{4} g_3 b^2 + \frac{5}{8} g_9 b^4. \quad (4.42)$$

Частота $\rho_2(b)$ характеризует колебания по сопряженной изгибной форме $C_2 \sin sy \sin rx$.

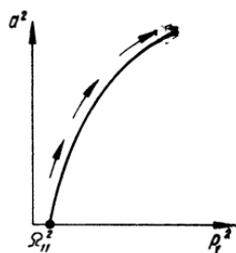


Рис. 4.2

Рассмотрим выражение (4.41). Если учесть обозначения (4.39), то становится очевидным, что при любых параметрах волнообразования выполняется условие $k_9 > 0$. Что касается коэффициента k_3 , то он может быть и больше и меньше нуля, причем $k_3 < 0$ при сравнительно больших числах окружных волн n . Это означает, что скелетные линии оболочки бывают и мягкого, и жесткого типов, т. е. собственные частоты с ростом амплитуд колебаний могут при одних условиях уменьшаться, при других — увеличиваться.

Пусть, например, $k_3 > 0$. В этом случае собственные частоты всегда представляют собой зависимости жесткого типа (рис. 4.2).

Если $k_3 < 0$, то реализуется более сложная картина изменения частот с ростом амплитуд: на начальном участке (при относительно малых амплитудах) имеем скелетную кривую мягкого типа, которая затем (при увеличении амплитуд) переходит в кривую жесткого типа (рис. 4.3, а). На рис. 4.3, а обозначено

$$\Omega_{11}^{*2} = \Omega_{11}^2 - \frac{9}{40} \frac{k_3^2}{k_9}; \quad a_0^2 = -\frac{3}{5} \frac{k_3}{k_9}. \quad (4.43)$$

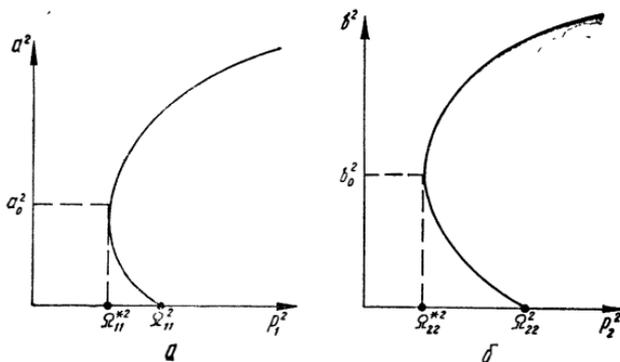


Рис. 4.3

К аналогичному заключению приходим и при анализе одномодовых колебаний по изгибной форме $C_2 \sin sy \sin rx$ (рис. 4.3, б). При этом

$$\Omega_{22}^{*2} = \Omega_{22}^2 - \frac{9}{40} \frac{g_3}{g_9}; \quad b_0^2 = -\frac{3}{5} \frac{g_3}{g_9}. \quad (4.44)$$

Поскольку $k_3 > g_3$, то $b_0^2 > a_0^2$ и $\Delta^{(1)} > \Delta^{(2)}$, где $\Delta^{(1)} = \Omega_{11}^2 - \Omega_{11}^{*2}$, $\Delta^{(2)} = \Omega_{22}^2 - \Omega_{22}^{*2}$ — зоны «затягивания» амплитуд собственных колебаний по частоте.

§ 4.3. Об энергообмене между изгибными формами

Ранее уже отмечалось, что благодаря нелинейным связям между обобщенными координатами оболочки, характеризующими различные формы изгибных колебаний, возбуждение одной из них может привести к «косвенному» возбуждению других, не резонирующих с внешним возбуждением форм. Следовательно, собственные колебания оболочки не соответствуют традиционным движениям типа стоячих волн из-за возможного наложения нескольких изгибных форм колебаний. В одних случаях такое наложение может привести к тому, что процесс деформирования представляет собой некоторый нестационарный циклический процесс перехода от одной изгибной формы к другой. В других случаях это может быть установившаяся бегущая в окружающем направлении изгибная волна, фазовая скорость которой зависит от физических и геометрических параметров оболочки, параметров волнообразования, а также граничных условий.

Для выяснения специфики этих явлений рассмотрим связанные уравнения (4.38), описывающие свободные колебания оболочки с неосесимметричным начальным прогибом вида $w_0 = f_{10} \cos sy \sin rx$. С учетом замечаний, сделанных в предыдущем параграфе, запишем эти уравнения в упрощенном виде

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \Omega_{11}^2 f_1 + k_1 f_1^2 + k_2 f_2^2 + k_3 f_1^3 + k_4 f_1 f_2^2 &= q_1(t); \\ \ddot{f}_2 + \Omega_{22}^2 f_2 + g_1 f_1 f_2 + g_2 f_1^2 f_2 + g_3 f_2^3 &= g_2(t). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Предположим, что внешняя нагрузка в некоторый начальный момент времени t_0 «резонансным» образом возбуждает изгибную форму $C_1 \sin sy \sin rx$. Очевидно, что эта на-

грузка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} q &= E_2 \sin sy \sin rx \cos p_2 t; \\ E_2 &= \text{const}; \quad p_2 = \Omega_{22}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Движение оболочки после «отключения» нагрузки приближенно можно описать так [3]:

$$f_2 = b_0 \cos p_2 t. \quad (4.47)$$

Подставляя (4.47) в первое уравнение системы (4.45), получаем

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \Omega_{11}^2 f_1 + k_1 f_1^2 + k_3 f_1^3 + k_4 \frac{b_0^2}{2} f_1 + \\ + \frac{b_0^2 k_2}{2} (1 + \cos 2p_2 t) + \frac{k_4 b_0^2 f_1}{2} \cos 2p_2 t = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Отсюда видно, что параметры, определяющие значение собственной частоты оболочки по координате f_1 , оказываются периодически изменяющимися во времени, что может обусловить параметрическое возбуждение этой координаты [4]. Такое возбуждение, если оно реализовано, осуществляет энергообмен между сопряженными формами при колебаниях. Из уравнения (4.48) следует, что наиболее интенсивно этот энергообмен реализуется при следующих резонансных соотношениях между собственными частотами:

$$\frac{p_1}{p_2} \approx 1, 2, 3, \dots \quad (p_1 = \Omega_{11}). \quad (4.49)$$

Аналогичную картину можно получить по координате f_2 . Энергия от первой обобщенной координаты f_1 , возбуждаемой непосредственно внешней силой

$$q = E_1 \cos sy \sin rx \cos p_1 t, \quad (4.50)$$

где

$$E_1 = \text{const}; \quad p_1 = \Omega_{11},$$

передается ко второй координате f_2 согласно уравнению

$$\begin{aligned} \ddot{f}_2 + p_2^2 f_2 + g_3 f_2^3 + g_1 a_0 f_2 \cos p_1 t + \frac{g_2}{2} a_0^2 f_2 + \\ + \frac{g_2}{2} a_0^2 f_2 \cos 2p_1 t = 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

если принять

$$f_1 = a_0 \cos p_1 t. \quad (4.52)$$

В этом случае резонансными соотношениями будут

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \approx \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (4.53)$$

Рассмотрим возможность выполнения резонансных соотношений (4.49) и (4.53). Для этого вернемся к формулам (4.28) для частот Ω_{11} и Ω_{22} . Найдем «расстройку» квадратов этих частот

$$\begin{aligned} \Delta &= \Omega_{11}^2 - \Omega_{22}^2 = \frac{Es^4}{4\rho} f_{10}^2 - \frac{d_{11}e_{11}}{\Omega_3^2} = \\ &= \frac{Es^4}{4\rho} f_{10}^2 \left\{ 1 - \frac{4E}{\rho\Omega_3^2 R^2} \left[\frac{3}{4} + \frac{r^4}{(r^2 + s^2)^2} \right] \left[\frac{1}{2} + \frac{2r^4}{3(r^2 + s^2)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Отсюда видно, что при достаточно малом начальном прогибе w_0 и при сравнительно небольших числах окружных волн n частоты ρ_1 и ρ_2 близки по величине.

Следовательно, в этом случае из соотношений (4.49) и (4.53) практически осуществимым является лишь соотношение вида

$$\rho_1 \approx \rho_2, \quad (4.55)$$

определяющее основной «внутренний» резонанс [3, 31]. И поскольку этот резонанс встречается в обоих случаях (4.49) и (4.53), то в оболочке с начальным прогибом при задании некоторых ненулевых начальных условий имеет место попеременная перекачка энергии колебаний от одной изгибной формы к другой, сопряженной с ней.

Этот процесс происходит до тех пор, пока энергия, сообщенная в начальный момент оболочке, полностью не израсходуется на компенсацию работы сил внутреннего и внешнего трения. Отметим, что переход энергии от одной формы к другой осуществляется как бы самопроизвольно, без какого-либо внешнего «вмешательства». Иными словами, процессом энергопереноса «управляет» сама упругая система посредством нелинейных связей между ее подсистемами.

Чтобы определить возможные режимы движения оболочки при резонансе (4.55), вновь вернемся к уравнениям (4.45). Представим приближенное решение этих уравнений при $q_1 = q_2 = 0$ в форме [3]

$$\begin{aligned} f_1 &= a \cos(\Omega_{11}t + \theta_1); \\ f_2 &= b \cos(\Omega_{22}t + \theta_2), \end{aligned} \quad (4.56)$$

где a , b , θ_1 , θ_2 — амплитуды и фазы соответствующих гармоник, которые определяем из системы

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{k_4}{8\Omega_{11}} ab^2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2); \\ a \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{3}{8\Omega_{11}} k_3 a^3 + \frac{k_4}{4\Omega_{11}} ab^2 + \frac{k_4}{8\Omega_{11}} ab^2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2); \\ \frac{db}{dt} &= \frac{g_2}{8\Omega_{22}} a^2 b \sin 2(\theta_2 - \theta_1); \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$b \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{3g_3}{8\Omega_{22}} b^3 + \frac{g_2}{4\Omega_{22}} a^2 b + \frac{g_2}{8\Omega_{22}} a^2 b \cos 2(\theta_1 - \theta_2).$$

Для нахождения возможных стационарных режимов приравняем правые части уравнений (4.57) к нулю. В результате приходим к таким соотношениям:

$$1) \quad a = 0; \quad b = 0, \quad (4.58)$$

$$2) \quad \theta_1 - \theta_2 = \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\frac{3}{2} k_3 a^2 + k_4 b^2 + \frac{k_4}{2} b^2 (-1)^k = 0; \quad (4.59)$$

$$g_2 a^2 + \frac{3}{2} g_3 b^2 + \frac{g_2}{2} a^2 (-1)^k = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Решение (4.58), соответствующее состоянию покоя оболочки ($w \equiv 0$), может быть получено лишь при нулевых начальных условиях.

В свою очередь, система (4.59) допускает нетривиальное стационарное решение при условиях

$$k_4 k_3 < 0; \quad k_4 g_2 = k_3 g_3, \quad (4.60)$$

или

$$k_4 k_3 < 0; \quad 9k_3 g_3 = k_4 g_2. \quad (4.61)$$

Однако из выражений коэффициентов k_3 , k_4 , g_2 , g_3 следует, что эти условия практически невыполнимы. Это означает, что уравнения (4.57) не имеют стационарных решений для амплитуд и фаз. Для определения нестационарных решений необходимо проинтегрировать эти уравнения.

Из первого и третьего уравнений (4.57) нетрудно получить первый интеграл в виде

$$\frac{g_2}{k_4} \frac{\Omega_{11}}{\Omega_{22}} a^2 + b^2 = C_0^2, \quad (4.62)$$

где $C_0 = \text{const}$.

Отсюда следует, что колебания оболочки, характеризуемые обобщенными координатами f_1 и f_2 , всегда связаны, так что сопряженные изгибные формы $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \sin sy \sin rx$ не могут «существовать» в рассматриваемом случае изолированно. Возбуждение какой-либо одной из них неизбежно обусловит возбуждение другой формы, сопряженной ей. При этом увеличение амплитуды колебаний $a(t)$ приведет к соответствующему уменьшению второй амплитуды $b(t)$ и наоборот. Следовательно, можно ожидать попеременной перекачки энергии от одной формы к другой. Наложение обеих форм (если они одновременно возбуждены) обусловит сложное движение типа стоячих или бегущих волн в зависимости от соотношений между фазами θ_1 и θ_2 .

Если учесть демпфирование в системе (4.45) с помощью выражений $\epsilon \dot{f}_1$ и $\epsilon \dot{f}_2$ (матрица коэффициентов демпфирования предполагается диагональной), то уравнения первого приближения (4.89) допускают интеграл вида

$$g_2 \Omega_{11} a^2 + k_4 \Omega_{22} b^2 = C_1^2 e^{-\epsilon t}; \quad C_1 = \text{const}, \quad (4.63)$$

свидетельствующий об асимптотической устойчивости системы по отношению к функциям f_1 и f_2 .

Существенно отметить, что первые интегралы (4.62), (4.63) являются следствием внутреннего резонанса в системе (4.45). Именно соотношение (4.55) создает предпосылки для существенной взаимосвязанности колебаний оболочки, соответствующих сопряженным изгибным формам, и, таким образом, для передачи энергии от одной формы к другой.

§ 4.4. Нелинейные бегущие волны в оболочках

Вернемся к нелинейным динамическим уравнениям оболочки (3.21), дополнив их членом, характеризующим конструкционное трение,

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w = L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \epsilon \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{q}{h}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

и построим их приближенное решение, имеющее непосредственно форму типа бегущих в окружном направлении волн,

т. е. примем

$$\omega = a \cos\left(\frac{n}{R} y - \varphi\right) \sin rx + \omega_0(x), \quad (4.65)$$

где a , φ — некоторые неизвестные функции времени, подлежащие определению; $\omega_0(x)$ — осесимметричная составляющая прогиба, отражающая специфику нелинейного деформирования оболочек, которая заключается в «преимущественном выпучивании вовнутрь» [8, 9]. При этом функцию ω_0 определяем из условия отсутствия деформаций в окружном направлении, т. е. из равенства

$$\int_0^{2\pi R} \epsilon_y dy = 0. \quad (4.66)$$

В результате получим следующую зависимость:

$$\omega_0(x) = \frac{n^2 a^2}{4R} \sin^2 rx. \quad (4.67)$$

Подобно тому, как в задаче о нелинейных свободных колебаниях оболочки (см. § 4.2), определим вначале функцию напряжений в срединной поверхности. С этой целью подставим выражение (4.65) с учетом (4.67) во второе уравнение системы (4.64), откуда получим

$$\Phi = \Phi_0 \cos 2rx + \Phi_1 \sin rx \cos \psi + \Phi_2 \cos 2\psi + \Phi_3 \sin 3rx \cos \psi. \quad (4.68)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi &= sy - \varphi; \quad \Phi_0 = \frac{Es^2 a^2}{32r^2} - \frac{En^2 a^2}{32r^2 R^2}; \\ \Phi_1 &= \frac{Ear^2}{R(r^2 + s^2)^2} - \frac{En^2 r^2 s^2 a^3}{4R(r^2 + s^2)^2}; \\ \Phi_2 &= -\frac{Er^2 a^2}{32s^2}; \quad \Phi_3 = \frac{Er^2 s^2 n^2 a^3}{4R(9r^2 + s^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Вычислим далее производные по времени от функции прогиба ω :

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= (\dot{a} \cos \psi + a \dot{\varphi} \sin \psi) \sin rx + \frac{n^2}{2R} a \dot{a} \sin^2 rx; \\ \ddot{\omega} &= [(\ddot{a} - a \dot{\varphi}^2) \cos \psi + (2\dot{a} \dot{\varphi} + a \ddot{\varphi}) \sin \psi] \sin rx + \\ &+ \frac{n^2}{2R} (\dot{a}^2 + a \ddot{a}) \sin^2 rx. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Подставляя затем выражения (4.65), (4.68) и (4.70) в первое уравнение (4.64), применим метод Бубнова — Галеркина, выбрав в качестве координат Галеркина функции a и φ . Полагая $q = 0$, после выполнения операций интегрирования, получим следующие два уравнения для определения a и φ :

$$a\ddot{\varphi} + 2\dot{a}\dot{\varphi} + \varepsilon a\dot{\varphi} = 0;$$

$$\ddot{a} + (\omega_0^2 - \dot{\varphi}^2)a + \varepsilon a = -\frac{3n^4}{8R^2}(a^2\ddot{a} + \dot{a}^2a) - \varepsilon\frac{3n^4}{8R^2}a^2\dot{a} +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \left[\frac{Er^4s^4}{(r^2 + s^2)^2} - \frac{Er^4}{16} - \frac{Dn^4r^4}{hR^2} \right] a^3 -$$

$$- \frac{3En^2r^4s^6}{16\rho} \left[\frac{1}{(r^2 + s^2)^2} + \frac{1}{(9r^2 + s^2)^2} \right] a^5. \quad (4.71)$$

Здесь

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{D(r^2 + s^2)^2}{h} + \frac{Er^4}{R^2(r^2 + s^2)^2} \right], \quad (4.72)$$

— частота собственных колебаний оболочки.

В качестве первого (линейного) приближения уравнения (4.71) допускают решения, полученные во второй главе, которые соответствуют движению оболочки типа стоячей или бегущей волны (см. § 2.3).

Введем обозначения

$$\kappa = \frac{3}{2} \left(\frac{n^2}{2R} \right)^2; \quad \gamma = \frac{r^4}{\rho} \left[\frac{Es^4}{(r^2 + s^2)^2} - \frac{E}{16} - \frac{Dn^4}{hR^2} \right];$$

$$g = \frac{3En^2r^4s^6}{16\rho} \left[\frac{1}{(r^2 + s^2)^2} + \frac{1}{(9r^2 + s^2)^2} \right]. \quad (4.73)$$

Система (4.73) с учетом замены

$$a = b \exp\left(-\frac{\varepsilon t}{2}\right) \quad (4.74)$$

преобразуется тогда к виду

$$b\ddot{\varphi} + 2\dot{b}\dot{\varphi} = 0; \quad \ddot{b} + \left(\omega_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \dot{\varphi}^2\right)b = b \exp(-\varepsilon t) \times$$

$$\times \left[\kappa \left(\varepsilon b\dot{b} + \frac{\varepsilon^2}{4} b^2 - \dot{b}^2 - b\ddot{b} \right) + \gamma b^2 - g b^4 \exp(-\varepsilon t) \right]. \quad (4.75)$$

Рассмотрим случай, когда диссипация энергии при колебаниях оболочки отсутствует, т. е. $\varepsilon = 0$. При этом предполагаем, что амплитуда бегущей волны a в соотношении (4.65) является постоянной величиной: $a = a_0 = \text{const}$. Из

второго уравнения (4.75) получаем

$$\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 - \gamma a_0^2 + g a_0^4 \quad (4.76)$$

или, учитывая малость нелинейных сил по сравнению с линейными, имеем

$$\dot{\varphi} = \pm \left(\omega_0 - \frac{\gamma a_0^2}{2\omega_0} + \frac{g a_0^4}{2\omega_0} \right) = \pm \omega(a_0). \quad (4.77)$$

Отсюда

$$\varphi = \varphi_0 \pm \omega(a_0)t; \quad \varphi_0 = \text{const.} \quad (4.78)$$

Таким образом, фазовая скорость волны в рассматриваемом случае имеет вид

$$v_\varphi = \pm \frac{\omega(a_0)}{s}, \quad (4.79)$$

т. е. является нелинейной функцией амплитуды этой волны (в линейной задаче v_φ не зависит от амплитуды). При этом с ростом амплитуды a_0 указанная скорость может как увеличиваться (по модулю), так и уменьшаться (из-за $\gamma \geq 0$). Отметим аналогию с «нелинейными» частотами собственных колебаний оболочки, которые также могли с увеличением амплитуд либо возрастать (при одних значениях амплитуд), либо убывать (см. § 4.2). Вместе с тем необходимо иметь в виду, что функция $\omega(a_0)$ не совпадает в данном случае с собственными частотами нелинейных колебаний.

На рис. 4.4 изображены графики зависимости фазовой скорости v_φ от волнового параметра n , построенные для случаев $a_0 = 0$ (кривая 1), $a_0 = 3h$ (кривая 2) и $a_0 = 6h$ (кривая 3). Рассматривалась оболочка с параметрами (2.111). Отсюда видно, что минимальная скорость волны реализуется при $n = 7$. Заметим при этом, что $n = 7$ соответствует не самой минимальной частоте собственных колебаний рассматриваемой оболочки по одной из форм $C_1 \cos sy \sin rx$ или $C_2 \sin sy \sin rx$ (минимальная частота оболочки будет при $n = 6$).

На рис. 4.5 показано влияние амплитуды бегущей волны на фазовую скорость при трех значениях параметра n , отмеченных на графиках. Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что фазовая скорость «нелинейной» бегущей волны в оболочке при увеличении амплитуд уменьшается (в данном конкретном примере), причем степень уменьшения существенно зависит от параметра n . В частности, при $n = 6$ фазовая скорость убывает интенсивнее, чем при $n = 7$ или $n = 8$.

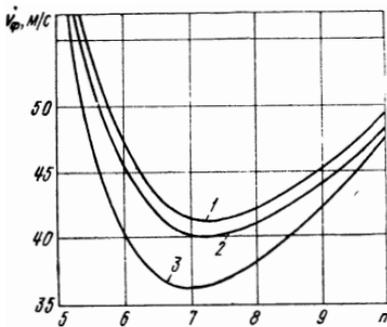


Рис. 4.4

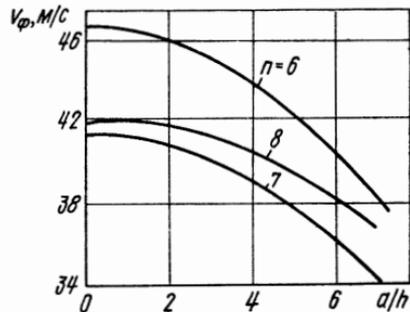


Рис. 4.5

На основании (4.77) можно определить также групповую скорость волны

$$v_{гр} = \pm \frac{d\omega(a_0)}{ds},$$

которая позволяет описать изменение характера волнового процесса. При этом $v_\phi \neq v_{гр}$.

Если начальные условия (начальные амплитуды) подобрать такими, что выполняется соотношение

$$a_0^2 = \frac{\gamma}{2g} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4g^2} - \frac{\omega_0^2}{g}} \quad (4.80)$$

(предполагается $\gamma > 0$, $\gamma^2 > 4g\omega_0^2$), то бегущая волна вырождается, так как в этом случае $v_\phi = 0$. Следовательно, волновое движение отсутствует, а сама оболочка находится в «равновесном» состоянии — начальные условия не приведут к возбуждению каких-либо колебательных или волновых процессов в ней.

Для определения других решений системы (4.75), которые характеризуются переменными во времени параметрами бегущей волны (4.65), необходимо проинтегрировать эту систему, полагая $\dot{a} \neq 0$. Последняя может быть сведена (в случае $\varepsilon = 0$) к одному разрешающему уравнению относительно a . Действительно, из первого уравнения (4.75) получаем

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{C_0^2}{a^4}; \quad C_0 = \text{const.} \quad (4.81)$$

Второе уравнение примет соответственно вид

$$\ddot{a} + \left(\omega_0^2 - \frac{C_0^2}{a^4} \right) a + \kappa a (a^2 + \ddot{a}a) - \gamma a^3 + g a^5 = 0. \quad (4.82)$$

Если пренебречь нелинейной инерционной силой, то на основании (4.82) можно получить первый интеграл вида

$$\dot{a}^2 + F(a) = C_1, \quad (4.83)$$

где

$$F(a) = \omega_0^2 a^2 - \frac{\gamma a^4}{2} + \frac{g a^6}{3} + \frac{C_0^2}{a^2}, \quad C_1 = \text{const.}$$

Отсюда имеем

$$t = \pm \int \frac{da}{\sqrt{C_1 - F(a)}} + C_2, \quad C_2 = \text{const.} \quad (4.84)$$

Соотношение (4.84) позволяет установить зависимость амплитуды бегущей волны в оболочке a от времени. На основании (4.81) находим соответствующее изменение фазы этой волны φ .

В заключение отметим, что учет демпфирования при движении оболочки ($\epsilon \neq 0$) обусловит с течением времени постепенное затухание амплитуд волновых движений оболочки, будь то стоячая или бегущая волны.

Г Л А В А 5

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК

ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Рассмотрим многомерные задачи о нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек, в том числе с начальными неправильностями формы, при воздействии на них внешних периодических нагрузок. Исследуем, в частности, «нелинейное» поведение оболочек при неравномерном радиальном осциллирующем давлении. Такое давление обуславливает возбуждение вынужденных колебаний оболочки в отличие от параметрических, вызываемых продольными пульсирующими силами (или всесторонним давлением), которые будут обсуждаться в шестой главе.

Особенностью вынужденных колебаний является то, что они не затухают со временем, как свободные, поскольку потери на внутреннее, конструктивное и другие виды трения непрерывно восполняются здесь некоторым внешним источником энергии.

Таким образом, свойства этих колебаний зависят не только от параметров оболочки, но и от амплитуды и частоты внешней силы. Очевидно, что и процесс энергообмена между изгибными формами оболочки также в значительной степени определяется параметрами внешнего нагружения, наличием резонансных соотношений между собственными частотами оболочки и частотой внешней силы.

Существование определенных резонансных соотношений между указанными частотами является, как отмечалось ранее, необходимым условием того, чтобы возникла «неустойчивость» традиционных одно-модовых вынужденных колебаний оболочки и возбуждались колебания

по другим модам, не индуцируемым непосредственно внешней силой. Однако в общем случае наличие резонансов недостаточно для реализации перераспределения энергии между формами изгибных колебаний оболочки. Здесь еще очень важно взаимодействие факторов, содействующих возбуждению колебаний в областях неустойчивости одномодовых режимов, и факторов, препятствующих ему [13, 14]. Эти вопросы подробно обсуждаются ниже. При этом значительное внимание уделяется изучению влияния на энергообмен между формами начальных геометрических несовершенств, близости собственных частот и других факторов.

§ 5.1. Постановка задачи. Вывод динамических уравнений

Предполагаем, что шарнирно опертая по обеим торцам оболочка подвергается воздействию неравномерно распределенной по боковой поверхности нагрузки вида

$$q = q(x, y, t) = q_0(x, y) \cos \Omega t, \quad (5.1)$$

где $q_0(x, y)$ — некоторая функция «распределения» нагрузки по поверхности оболочки.

Динамический прогиб w_1 аппроксимируем точно так же, как и при анализе свободных нелинейных колебаний, т. е. положим

$$w_1 = f_1 \cos sy \sin rx + f_2 \sin sy \sin rx + f_3 \sin^2 rx. \quad (5.2)$$

Выражение (5.2), как уже отмечалось, удовлетворяет принятым граничным условиям в первой (линейной) аппроксимации. Это существенно скажется на конечном результате, если по длине оболочки в процессе ее деформации образуется несколько выпуклостей [8].

Задавая начальный прогиб w_0 в виде (4.13) и применяя метод Бубнова — Галеркина к первому уравнению системы (1.43), получим следующую систему для определения неизвестных обобщенных перемещений $f_i(t)$, входящих в (5.2):

$$\begin{aligned} & \ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 + \gamma f_2 + d_1 f_3 + d_2 f_1^2 + d_3 f_1 f_2 + d_4 f_2^2 + \\ & \quad + d_5 f_1 f_3 + d_6 f_3^2 + d_7 f_1 (f_1^2 + f_2^2) + d_8 f_1 f_3^2 + \\ & \quad + \frac{Es^4}{8\rho} (f_1 + f_{10}) \left(f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_{10} + 2f_2 f_{20} - \frac{4f_3}{R^2} \right) = q_1(t); \\ & \ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2 + \gamma f_1 + c_1 f_3 + c_2 f_1^2 + c_3 f_1 f_2 + c_4 f_2^2 + \\ & \quad + c_5 f_2 f_3 + c_6 f_3^2 + c_7 f_2 (f_1^2 + f_2^2) + c_8 f_2 f_3^2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{Es^4}{8\rho} (f_2 + f_{20}) \left(f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_{10} + 2f_2f_{20} - \frac{4f_3}{RS^2} \right) = q_2(t); \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{f}_3 + \omega_3^2 f_3 + e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_1^2 + e_4 f_2^2 + e_5 f_1 f_3 + e_6 f_2 f_3 + \\ & + e_7 f_1^2 f_3 + e_8 f_2^2 f_3 - \frac{Es^2}{6\rho R} \left(f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_{10} + 2f_2f_{20} - \frac{4f_3}{RS^2} \right) = q_3(t). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{2 \cos \Omega t}{\pi R l \rho h} \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_0(x, y) \cos sy \sin rxdxdy; \\ q_2(t) &= \frac{2 \cos \Omega t}{\pi R l \rho h} \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_0(x, y) \sin sy \sin rxdxdy; \\ q_3(t) &= \frac{8 \cos \Omega t}{3\pi R l \rho h} \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_0(x, y) \sin^2 rxdxdy. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Остальные коэффициенты выражаются согласно (4.19).

Дальнейший анализ системы (5.3) может быть проведен по схеме, аналогичной той, которая использовалась при изучении свободных колебаний оболочки (см. § 4.2). Однако здесь необходимо принимать во внимание возможность реализации «внешних» резонансных соотношений, связывающих собственные частоты оболочки с частотой внешнего периодического воздействия Ω .

Для иллюстрации рассмотрим случай идеальной оболочки, когда $\omega_0 \equiv 0$, т. е. $f_{10} = f_{20} = f_{30} \equiv 0$. Уравнения (5.3) примут тогда вид

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_0^2 f_1 + d_{51} f_1 f_3 + d_{71} f_1 (f_1^2 + f_2^2) + d_{s1} f_1^2 f_3 &= \alpha_1 \cos \Omega t; \\ \ddot{f}_2 + \omega_0^2 f_2 + d_{51} f_2 f_3 + d_{71} f_2 (f_1^2 + f_2^2) + d_{s2} f_2^2 f_3 &= \alpha_2 \cos \Omega t; \quad (5.5) \\ \ddot{f}_3 + \omega_3^2 f_3 + e_{31} (f_1^2 + f_2^2) + \frac{2}{3} d_{s3} f_3 (f_1^2 + f_2^2) &= \alpha_3 \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_{51} &= d_5 + \frac{Es^2}{2\rho R}; & d_{71} &= d_7 + \frac{Es^4}{8\rho}; \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 + \frac{Er^4}{R^2 (r^2 + s^2)^2} \right]; \\ e_{31} &= \frac{d_5}{3} + \frac{Es^2}{6\rho R}; & \omega_{31}^2 &= \omega_3^2 + \frac{2E}{3\rho R^2}; \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{\pi R l \rho h} \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_0(x, y) \cos sy \sin rx dx dy;$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\pi R l \rho h} \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_0(x, y) \sin sy \sin rx dx dy; \quad (5.6)$$

$$\alpha_3 = \frac{8}{3\pi R l \rho h} \int_0^l \int_0^{2\pi R} q_0(x, y) \sin^2 rx dx dy.$$

Анализируя структуру нелинейных уравнений (5.5), нетрудно установить, что резонансные режимы движения оболочки имеют место при выполнении одного из следующих соотношений между частотами [31]:

$$\begin{aligned} \omega_0 &\approx \Omega; & \omega_{31} &\approx \Omega; & \omega_0 \pm \omega_{31} &\approx \Omega; \\ \omega_{31} - \omega_0 &\approx \Omega; & 3\omega_0 &\approx \Omega; & \omega_0 \pm 2\omega_{31} &\approx \Omega; \\ 2\omega_{31} - \omega_0 &\approx \Omega; & 2\omega_0 &\approx \Omega; & \omega_{31} \pm 2\omega_0 &\approx \Omega; \\ & & 2\omega_0 - \omega_{31} &\approx \Omega. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь не выписаны чисто «внутренние» резонансы, которые связывают лишь собственные частоты оболочки ω_0 и ω_{31} (о таких резонансах шла речь в предыдущей главе). Нас же интересуют резонансы, которые возникают и поддерживаются за счет вынужденных колебаний, т. е. резонансы вида (5.7), в каждый из которых входит частота внешнего возбуждения Ω . Наибольший интерес при этом представляет резонанс вида

$$\omega_0 \approx \Omega, \quad (5.8)$$

поскольку при его реализации осуществляются наиболее сильная связь и энергообмен между основными изгибными формами оболочки $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \sin sy \sin rx$. Действительно, собственные частоты, отвечающие этим формам, в случае идеальной оболочки тождественно равны ($\omega_{01} \equiv \equiv \omega_{02} = \omega_0$), так что резонансное возбуждение внешней силой неизбежно приведет к немедленному возбуждению другой (сопряженной) формы. Кроме того, резонансная область, в которой реализуются колебания оболочки с частотами $\Omega \approx \omega_0$, значительно шире других резонансных областей оболочки, отвечающих соотношениям (5.7). Для возбуждения этих колебаний требуются меньшие энергетические затраты, чем для возмущения колебаний с другими резонансными частотами.

Приближенное стационарное периодическое решение системы (5.5), соответствующее резонансу $\Omega = \omega_0$, можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_1^* &= a \cos(\Omega t + \theta_1); \\ f_2^* &= b \cos(\Omega t + \theta_2); \\ f_3^* &= \frac{\alpha_3}{\omega_{31}^2 - \Omega^2} \cos \Omega t + c \cos \psi_3; \\ \psi_3 &= \omega_{31} t + \theta_3, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $a, b, c, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ — некоторые неизвестные параметры, для определения которых по асимптотическому методу Крылова — Боголюбова получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\alpha_1}{2\Omega} \sin \theta_1 + \frac{d_{71}}{8\Omega} ab^2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) + \\ &+ \frac{d_8}{8\Omega} a\alpha_{31}^2 \sin 2\theta_1 = 0; \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{\alpha_2}{2\Omega} \sin \theta_2 + \frac{d_{71}}{8\Omega} a^2 b \sin 2(\theta_2 - \theta_1) + \\ &+ \frac{d_8}{8\Omega} b\alpha_{31}^2 \sin 2\theta_2 = 0; \\ a \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} a - \frac{\alpha_1}{2\Omega} \cos \theta_1 + \frac{3}{8\Omega} d_{71} a \left(a^2 + \frac{2}{3} b^2 \right) + \\ &+ \frac{d_{71}}{8\Omega} ab^2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2) + \frac{d_8}{4\Omega} a^2 \left[c^2 + \alpha_{31}^2 \left(1 + \frac{\cos 2\theta_1}{2} \right) \right] = 0; \\ b \frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} b - \frac{\alpha_2}{2\Omega} \cos \theta_2 + \frac{3}{8\Omega} d_{71} b \left(b^2 + \frac{2}{3} a^2 \right) + \\ &+ \frac{d_{71}}{8\Omega} a^2 b \cos 2(\theta_1 - \theta_2) + \\ &+ \frac{d_8}{4\Omega} b^2 \left[c^2 + \alpha_{31}^2 \left(1 + \frac{\cos 2\theta_2}{2} \right) \right] = 0; \quad (5.10) \\ \frac{dc}{dt} &= 0; \quad c = c_0 = \text{const}; \\ \frac{d\psi_3}{dt} &= \omega_{31} + \frac{d_8}{6\omega_{31}} c (a^2 + b^2), \end{aligned}$$

где $\alpha_{31} = \frac{\alpha_3}{\omega_{31}^2 - \Omega^2}$.

Уравнения (5.10) могут иметь несколько различных корней для амплитуд и фаз стационарных колебаний. Это означает, что движение оболочки, определяемое соотношением (5.2), также может быть различным и представлять собой либо движение типа стоячей волны, либо бегущую волну, либо нестационарные процессы перестройки от одного вида движения к другому. Чтобы ответить на вопрос о реализуемости того или иного динамического режима, необходимо исследовать устойчивость каждого из них, используя для этого известные приемы, в частности теорию устойчивости движения Ляпунова [32]. В соответствии с этой теорией добавим к стационарным решениям f_1^* , f_2^* и f_3^* («невозмущенное движение») малые возмущения, т. е. положим

$$f_1 = f_1^* + \xi; \quad f_2 = f_2^* + \eta; \quad f_3 = f_3^* + \zeta. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.11) в (5.5) и учитывая, что f_i^* ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют (5.9) с учетом (5.10), получаем следующую систему уравнений возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi + d_{51}(f_1^* \zeta + f_3^* \xi) + d_{71}(3f_1^{*2} \xi + 2f_1^* f_2^* \eta + f_2^{*2} \xi) + \\ + d_8(2f_1^* f_3^* \zeta + f_3^{*2} \xi) + J_1(\xi, \eta, \zeta) = 0; \\ \ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta + d_{51}(f_2^* \zeta + f_3^* \eta) + d_{71}(3f_2^{*2} \eta + 2f_1^* f_2^* \xi + f_1^{*2} \eta) + \\ + d_8(f_3^{*2} \eta + 2f_3^* f_2^* \zeta) + J_2(\xi, \eta, \zeta) = 0; \\ \ddot{\zeta} + \omega_{31}^2 \zeta + 2e_{31}(f_1^* \xi + f_2^* \eta) + \frac{2}{3} d_8(f_1^{*2} \zeta + 2f_1^* f_3^* \xi + f_2^{*2} \zeta + \\ + 2f_2^* f_3^* \eta) + J_3(\xi, \eta, \zeta) = 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где J_1 , J_2 , J_3 — функции, содержащие возмущения в степенях выше первой. Отбрасывая эти члены и подставляя в уравнения (5.12) значения f_1^* , f_2^* , f_3^* , соответствующие найденным корням уравнений (5.10), получаем систему трех линейных уравнений с периодическими коэффициентами. Известная теория Флоке [31, 32, 48, 49] дает основные сведения о свойствах решений таких уравнений, их устойчивости. Устойчивость тривиальных решений системы и предопределяет устойчивость соответствующих стационарных решений общей системы (5.5).

Для получения в обозримом аналитическом виде критериев устойчивости упростим несколько математическую модель (5.5), сохраняя при этом основные черты исходной за-

дачи. Поступим так, как в предыдущей главе, — определим функцию f_3 из квазистатического варианта задачи, полагая $\dot{f}_3^* = 0$, а также положим $\alpha_3 = 0$. В результате система разрешающих динамических уравнений оболочки примет вид (4.27) (с учетом $\omega_0 \equiv 0$) с неавтономной правой частью:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_0^2 f_1 + k f_1 (f_1^2 + f_2^2) + g f_1 (f_1^2 + f_2^2)^2 &= \alpha_1 \cos \Omega t; \\ \ddot{f}_2 + \omega_0^2 f_2 + k f_2 (f_1^2 + f_2^2) + g f_2 (f_1^2 + f_2^2)^2 &= \alpha_2 \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\text{где } k = d_{71} - \frac{d_{51} e_{31}}{\omega_{31}^2}; \quad g = d_8 - \frac{e_{31}^2}{\omega_{31}^4}.$$

Вместо уравнений (5.9), (5.10) в данном случае имеем соответственно

$$f_1^* = a \cos(\Omega t + \theta_1); \quad f_2^* = b \cos(\Omega t + \theta_2); \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\alpha_1}{2\Omega} \sin \theta_1 + \frac{k}{8\Omega} ab^2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) + \\ &+ \frac{g}{8\Omega} ab^2 (a^2 + b^2) \sin 2(\theta_1 - \theta_2) = 0; \\ a \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} a - \frac{\alpha_1}{2\Omega} \cos \theta_1 + \\ &+ \frac{ak}{8\Omega} [3a^2 + 2b^2 + b^2 \cos 2(\theta_1 - \theta_2)] + \\ &+ \frac{ag}{8\Omega} [(a^2 + b^2)(2a^2 + b^2) + \\ &+ \frac{a^4 + b^4}{2} + b^2(2a^2 + b^2) \cos 2(\theta_2 - \theta_1)] = 0; \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} &= -\frac{\alpha_2}{2\Omega} \sin \theta_2 + \frac{k}{8\Omega} a^2 b \sin 2(\theta_2 - \theta_1) + \\ &+ \frac{g}{8\Omega} a^2 b (a^2 + b^2) \sin 2(\theta_2 - \theta_1) = 0; \\ b \frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} b - \frac{\alpha_2}{2\Omega} \cos \theta_2 + \\ &+ \frac{bk}{8\Omega} [3b^2 + 2a^2 + a^2 \cos 2(\theta_2 - \theta_1)] + \\ &+ \frac{bg}{8\Omega} [(a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2) + \\ &+ \frac{a^4 + b^4}{2} + a^2(2b^2 + a^2) \cos 2(\theta_2 - \theta_1)] = 0. \end{aligned}$$

Что касается уравнений в вариациях, соответствующих системе (5.13) и составленных с учетом (5.14), (5.15), то они примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + p_1^2 \xi + g_{11}(t) \xi + g_{12}(t) \eta &= 0; \\ \ddot{\eta} + p_2^2 \eta + g_{21}(t) \xi + g_{22}(t) \eta &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \omega_0^2 + \frac{3k}{2} a^2 + \frac{kb^2}{2} + \frac{15}{8} ga^4 + \frac{3}{8} gb^4 + \frac{3ga^2b^2}{2}; \\ p_2^2 &= \omega_0^2 + \frac{3k}{2} b^2 + \frac{ka^2}{2} + \frac{15}{8} gb^4 + \frac{3}{8} ga^4 + \frac{3ga^2b^2}{2}; \\ g_{11}(t) &= \frac{3ka^3}{2} \cos 2(\Omega t + \theta_1) + \frac{kb^2}{2} \cos 2(\Omega t + \theta_2) + \\ &+ \frac{5}{8} ga^4 [\cos 4(\Omega t + \theta_1) + 4 \cos 2(\Omega t + \theta_1)] + \\ &+ \frac{gb^4}{8} [\cos 4(\Omega t + \theta_2) + 4 \cos 2(\Omega t + \theta_2)] + \\ &+ \frac{3a^2b^2g}{2} [\cos 2(\Omega t + \theta_1) + \cos 2(\Omega t + \theta_2) + \\ &+ \cos 2(\Omega t + \theta_1) \cos 2(\Omega t + \theta_2)]; \quad (5.17) \\ g_{12}(t) &= kab \cos(\theta_2 - \theta_1) + kab \cos(2\Omega t + \theta_1 + \theta_2) + \\ &+ 4gb^3a \cos^3(\Omega t + \theta_2) \cos(\Omega t + \theta_1) + \\ &+ 4ga^3b \cos^3(\Omega t + \theta_1) \cos(\Omega t + \theta_2); \\ g_{21}(t) &= kab [\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(2\Omega t + \theta_1 + \theta_2)] + \\ &+ 4gab [a^2 \cos^3(\Omega t + \theta_1) \cos(\Omega t + \theta_2) + \\ &+ b^2 \cos(\Omega t + \theta_1) \cos^3(\Omega t + \theta_2)]; \\ g_{22}(t) &= \frac{3kb^3}{2} \cos 2(\Omega t + \theta_2) + \frac{ka^2}{2} \cos 2(\Omega t + \theta_1) + \\ &+ \frac{5}{8} gb^4 [\cos 4(\Omega t + \theta_2) + 4 \cos 2(\Omega t + \theta_2)] + \\ &+ \frac{ga^4}{8} [\cos 4(\Omega t + \theta_1) + 4 \cos 2(\Omega t + \theta_1)] + \\ &+ \frac{3a^2b^2g}{2} [\cos 2(\Omega t + \theta_1) + \cos 2(\Omega t + \theta_2) + \\ &+ \cos 2(\Omega t + \theta_1) \cos 2(\Omega t + \theta_2)], \end{aligned}$$

причем a , b , θ_1 , θ_2 — стационарные значения амплитуд и фаз, определяемые из уравнений (5.15).

Уравнения (5.16) позволяют получить в замкнутой форме критерии неустойчивости тривиального решения $\xi = 0$, $\eta = 0$ и дать, таким образом, заключение об устойчивости или неустойчивости (реализуемости или нереализуемости) стационарных режимов (5.14). Эти критерии обсуждаются в § 5.2—5.5 при анализе конкретных стационарных режимов колебаний оболочки, определяемых на основании уравнений (5.15).

Если $\omega_0 \neq 0$, то разрешающие уравнения (5.13) несколько усложнятся — появятся четные степени обобщенных перемещений f_1 и f_2 , изменятся коэффициенты, а также парциальные частоты ω_0 . Соответственно видоизменятся и уравнения в вариациях (5.16). В дальнейшем подробно будут рассмотрены динамические эффекты, обусловленные влиянием начальных неправильностей формы (§ 5.5).

§ 5.2. Вынужденные колебания оболочки по одной изгибной форме

При относительно малых амплитудах нелинейных колебаний оболочки в уравнениях (5.13) можно пренебречь нелинейными членами выше третьей степени относительно обобщенных перемещений f_1 и f_2 . Уравнения первого приближения (5.15) примут в этом случае более удобный для исследования вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\alpha_1}{2\Omega} \sin \theta_1 + \frac{k}{8\Omega} ab^2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) = 0; \\ a \frac{d\theta_1}{dt} &= (\omega_0 - \Omega) a - \frac{\alpha_1}{2\Omega} \cos 2\theta_1 + \frac{3}{8\Omega} ka^3 + \\ &+ \frac{k}{4\Omega} ab^2 + \frac{k}{8\Omega} ab^2 \cos 2(\theta_2 - \theta_1) = 0; \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{\alpha_2}{2\Omega} \sin \theta_2 + \frac{k}{8\Omega} a^2 b \sin 2(\theta_2 - \theta_1) = 0; \quad (5.18) \\ b \frac{d\theta_2}{dt} &= (\omega_0 - \Omega) b - \frac{\alpha_2}{2\Omega} \cos 2\theta_2 + \frac{k}{4\Omega} a^2 b + \\ &+ \frac{3k}{8\Omega} b^3 + \frac{k}{8\Omega} a^2 b \cos 2(\theta_2 - \theta_1) = 0. \end{aligned}$$

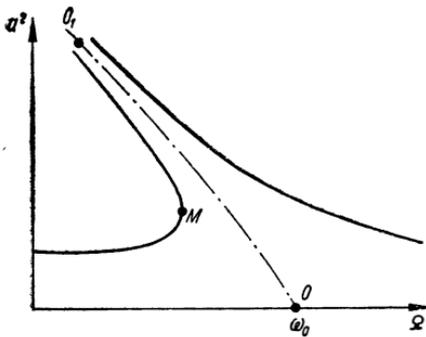


Рис. 5.1

Здесь учтено приближенное равенство

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\Omega} &\approx \\ &\approx \frac{(\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega)}{\Omega + \omega_0} = \\ &= \omega_0 - \Omega. \end{aligned}$$

Основываясь на этих уравнениях, рассмотрим возможные стационарные режимы колебаний оболочки

и исследуем их устойчивость, предполагая, что внешняя нагрузка возбуждает непосредственно лишь одну изгибную форму, а именно форму $C_1 \cos sy \sin rx$. Это значит, что функция «распределения» нагрузки $q_0(x, y)$ в (5.1) должна иметь вид

$$\begin{aligned} q_0(x, y) &= E_1 \cos sy \sin rx; \\ E_1 &= \text{const.} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Коэффициенты α_1 и α_2 в уравнениях (5.18)

$$\alpha_1 = \frac{E_1}{\rho h}; \quad \alpha_2 = 0. \quad (5.20)$$

Система (5.18) допускает в данном случае одно очевидное полутривиальное решение:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\alpha_1^2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{3}{4} ka^2\right)^2}; \quad b = 0; \\ \theta_1 &= k_1 \pi; \quad k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

Это решение соответствует одномодовым колебаниям оболочки, т. е. колебаниям по одной изгибной форме, которая непосредственно возбуждается внешней силой. Поскольку $k < 0$ (см. гл. 4), то очевидно, что общий вид зависимости амплитуды одномодовых колебаний от частоты внешней силы Ω будет таким, как показано на рис. 5.1.

С целью определения областей устойчивости рассматриваемого одномодового режима выпишем уравнения в вариациях, отвечающих решению (5.21):

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \left(\omega_0^2 + \frac{3}{2} ka^2\right) \xi + \frac{3}{2} ka^2 \xi \cos 2\Omega t &= 0; \\ \ddot{\eta} + \left(\omega_0^2 + \frac{ka^2}{2}\right) \eta + \frac{ka^2}{2} \eta \cos 2\Omega t &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Эти уравнения независимы одно от другого, каждое из них характеризует «свою» область неустойчивости. Определим эти области, учитывая условие $\omega_0 \approx \Omega$ и малость нелинейных сил по сравнению с линейными в уравнениях (5.13). С этой целью представим уравнения (5.22) в виде

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + p_1^2 (1 - \mu_1 \cos 2\Omega t) \xi &= 0; \\ \ddot{\eta} + p_2^2 (1 - \mu_2 \cos 2\Omega t) \eta &= 0,\end{aligned}\tag{5.23}$$

где

$$\begin{aligned}p_1^2 &= \omega_0^2 + \frac{3}{2} ka^2; & p_2^2 &= \omega_0^2 + \frac{1}{2} ka^2; \\ \mu_1 &= -\frac{3ka^2}{2\omega_0^2 + 3ka^2}; & \mu_2 &= -\frac{ka^2}{2\omega_0^2 + ka^2}.\end{aligned}$$

Поскольку $\omega_0^2 \gg \frac{3}{2} ka^2$, параметры μ_1 и μ_2 можно приближенно записать так:

$$\mu_1 = -\frac{3ka^2}{2\omega_0^2}; \quad \mu_2 = -\frac{ka^2}{2\omega_0^2}.\tag{5.24}$$

Как известно, каждое из уравнений (5.23) может иметь, в зависимости от параметров, три вида решений [32, 49]: а) неограниченно возрастающее во времени при $t \rightarrow \infty$, иначе «неустойчивое» решение; б) почти периодическое решение, являющееся ограниченным, и наконец, в) периодические решения, имеющие период $T_1 = \frac{\pi}{\Omega}$ или $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega}$, соответствующий границам областей неустойчивости.

При этом два решения одинакового периода ограничивают области неустойчивости, два решения разных периодов — области устойчивости. Таким образом, определение границ областей неустойчивости сводится по существу к отысканию условий, при которых дифференциальные уравнения (5.23) имеют периодические решения с периодами T_1 и T_2 . Для этих целей в настоящее время используются различные методы — метод тригонометрических рядов [4], метод Бубнова — Галеркина, асимптотические методы Крылова — Боголюбова [3], методы численного интегрирования исходных уравнений (см.: *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. — М., 1979. — 336 с.) и др.

Принимая во внимание лишь главные области неустойчивости, лежащие вблизи частот $\Omega \approx p_1$ и $\Omega \approx p_2$, найдем эти области соответственно для первого и второго уравне-

ний (5.23). Для этого используем асимптотический метод, методика применения которого приведена в § 6.2, где рассматриваются задачи динамической неустойчивости при параметрически возбуждаемых колебаниях оболочки.

В первом приближении искомые области определяются следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} p_1^2 \left(1 - \frac{|\mu_1|}{2}\right) &\leq \Omega^2 \leq p_1^2 \left(1 + \frac{|\mu_1|}{2}\right); \\ p_2^2 \left(1 - \frac{|\mu_2|}{2}\right) &\leq \Omega^2 \leq p_2^2 \left(1 + \frac{|\mu_2|}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

или

$$\begin{aligned} \left(\omega_0^2 + \frac{3}{2} ka^2\right) \left(1 - \frac{3|k|a^2}{4\omega_0^2}\right) &\leq \Omega^2 \leq \\ &\leq \left(\omega_0^2 + \frac{3}{2} ka^2\right) \left(1 + \frac{3|k|a^2}{4\omega_0^2}\right); \\ \left(\omega_0^2 + \frac{1}{2} ka^2\right) \left(1 - \frac{|k|a^2}{4\omega_0^2}\right) &\leq \Omega^2 \leq \\ &\leq \left(\omega_0^2 + \frac{1}{2} ka^2\right) \left(1 + \frac{|k|a^2}{4\omega_0^2}\right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Учитывая малость параметра k , а также условие $k < 0$, критерии (5.26) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \frac{9}{4} |k| a^2 &\leq \Omega^2 \leq \omega_0^2 - \frac{3}{4} |k| a^2; \\ \omega_0^2 - \frac{3}{4} |k| a^2 &\leq \Omega^2 \leq \omega_0^2 - \frac{1}{4} |k| a^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Рассмотрим подробнее эти критерии. Вернемся к уравнению амплитудно-частотной кривой $a^2 = a^2(\Omega)$ (5.21). «Скелетная» линия (OO_1 на рис. 5.1) этой кривой соответствует, очевидно, уравнению

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} ka^2. \quad (5.28)$$

Поскольку

$$\omega_0^2 + \frac{3}{4} ka^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4} |k| a^2$$

из-за $k < 0$, то видно, что данная «скелетная» линия совпадает с одной из границ областей неустойчивости, определяемых первым и вторым неравенствами (5.27).

Далее, граничная кривая области неустойчивости, определяемая первым неравенством (5.27),

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{9}{4} |k| a^2$$

пересекает частотную кривую $a^2 = a^2(\Omega^2)$ в точке M (рис. 5.1), в которой касательная к ней является вертикальной [3]. Действительно, в этой точке

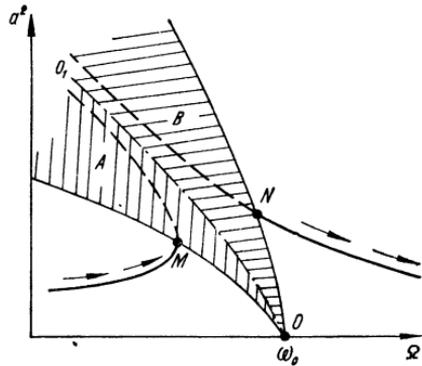


Рис. 5.2

$$\frac{da^2}{d\Omega^2} = \frac{2a^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{9}{4} ka^2} = \infty. \quad (5.29)$$

На рис. 5.2 показаны области неустойчивости A и B , соответствующие первому и второму критериям (5.27). Заметим, что область A является «традиционной» для нелинейных систем с одной степенью свободы с мягкой восстанавливающей силой. Ее нетрудно получить, анализируя первое уравнение системы (5.13) (полагая в нем $g = 0$) и «замораживая» вторую координату f_2 (полагая $\dot{f}_2 \equiv 0$).

Нелинейная связанность изгибных форм, отвечающих координатам f_1 и f_2 , обуславливает появление «дополнительной» области неустойчивости B , в которой, как и в области A , решение (5.21) неустойчиво. Таким образом, при частоте внешнего возбуждения Ω из области

$$\Omega_1^2 \leq \Omega^2 \leq \Omega_2^2; \quad (5.30)$$

$$\Omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{9}{4} |k| a^2; \quad \Omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4} |k| a^2$$

колебания оболочки по непосредственно возбуждаемой изгибной форме $C_1 \cos sy \sin rx$ нереализуемы. Здесь осуществляются некоторые другие формы движения, для определения которых необходимо исследовать нетривиальные решения системы (5.18), отличающиеся от решения (5.21).

В заключение отметим, что если внешняя нагрузка возбуждает непосредственно сопряженную изгибную форму $C_2 \sin sy \sin rx$ ($\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 \neq 0$), то приходим к результатам,

которые в качественном отношении аналогичны изложенным выше. Роль «дополнительно возбуждаемой формы» здесь играет изгибная форма $C_1 \cos sy \sin rx$.

§ 5.3. Двухволновые формы движения оболочек

Вернемся вновь к системе уравнений (5.18) и найдем нетривиальные решения для a и b , т. е. решения $a = a_1 \neq 0$, $b = b_1 \neq 0$. Эти решения характеризуют более сложное, чем стоячая волна, движение оболочки. Это естественно, поскольку в данном случае возбуждаются одновременно обе сопряженные изгибные формы $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \sin sy \sin rx$. Общий вид движения существенно зависит при этом от соотношений между фазами θ_1 и θ_2 , входящими в уравнения (5.14), от того, какие формы возбуждаются непосредственно внешней силой, и от других факторов.

Рассмотрим, как и прежде, случай непосредственного возбуждения лишь одной изгибной формы $C_1 \cos sy \sin rx$, когда выполняются соотношения (5.20). Из третьего уравнения системы (5.18) имеем

$$\sin 2(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (5.31)$$

т. е.

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{k_1 \pi}{2}, \quad k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.32)$$

Поскольку в этом случае $\cos 2(\theta_1 - \theta_2) = \pm 1$ в зависимости от значения параметра k_1 в (5.32), в дальнейшем целесообразно рассмотреть отдельно значения k_1 : нечетные — $k_1 = \pm 1, \pm 3, \dots$ и четные — $k_1 = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$.

Когда k_1 — нечетное число, на основании (5.18) получаем такие зависимости между амплитудами колебаний a_1 и b_1 :

$$\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{k}{4}(3a_1^2 + b_1^2) = \pm \frac{\alpha_1}{a_1}; \quad (5.33)$$

$$b_1^2 = \frac{4}{3k} \left(\Omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{4} a_1^2 \right). \quad (5.34)$$

Отсюда видно, что действительные значения амплитуд b_1 возможны лишь при условии

$$\Omega^2 \leq \omega_0^2 + \frac{k}{4} a_1^2, \quad (5.35)$$

причем при $\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{ka_1^2}{4}$ амплитуда колебаний по форме $C_2 \sin sy \sin rx$ обращается в нуль ($b_1 = 0$).

Подставляя выражение (5.34) в (5.33), получаем уравнение, связывающее амплитуду a_1 с частотой Ω :

$$\omega_0^2 - \Omega^2 + ka_1^2 = \pm \frac{3\alpha_1}{2a_1}. \quad (5.36)$$

Отсюда имеем

$$a_1^2 = \frac{2,25\alpha_1^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + ka_1^2)^2}. \quad (5.37)$$

Сравнивая соотношения (5.37) с (5.21), видим, что амплитудно-частотная характеристика $a_1^2 = a_1^2(\Omega^2)$ по форме совпадает с соответствующей характеристикой, полученной для «изолированного» возбуждения изгибной формы $C_1 \cos sy \sin rx$, когда $a \neq 0$, $b = 0$. Отличие обеих характеристик состоит в том, что наклон характеристики (5.37) влево более выражен, чем наклон характеристики (5.21), поскольку «скелетные» кривые каждой из них имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \Omega_1^2 = \omega_0^2 + ka_1^2; \\ \Omega^2 &= \Omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} ka^2. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Интересно отметить, что пересечение частотных кривых $a = a(\Omega)$ и $a_1 = a_1(\Omega)$ происходит в точке, через которую проходит левая граница области неустойчивости (B) одномодового режима с амплитудой (5.21), т. е. в точке N на рис. 5.2.

Для определения значения частоты внешнего возбуждения Ω_N , отвечающей этой точке, следует обратиться к соотношениям (5.21), (5.27). Полагая в (5.21) $\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{ka^2}{4}$, находим квадрат амплитуды a_N^2 в этой точке:

$$a_N^2 = \sqrt[3]{\frac{4\alpha_1^2}{k^2}}. \quad (5.39)$$

Следовательно,

$$\Omega_N^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{4} \sqrt{\alpha_1^2 k}. \quad (5.40)$$

Если подставить найденные значения Ω_N и a_N в правую часть уравнения (5.34), то получим

$$b_1^2 = 0. \quad (5.41)$$

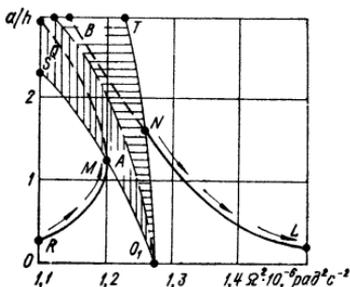


Рис. 5.3

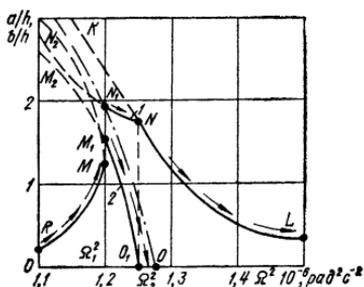


Рис. 5.4

Это значит, что АЧХ $b_1^2 = b_1^2(\Omega)$, определяемая зависимостью (5.34), при $\Omega = \Omega_N$ пересекает ось абсцисс.

Рассмотрим численный пример.

Пример. Пусть оболочка характеризуется следующими параметрами:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \frac{h}{R} = 3,125 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{l}{R} = 2,5; \quad R = 0,16 \text{ м}; \quad \mu = 0,3. \quad (5.42)$$

На рис. 5.3 изображена резонансная кривая этой оболочки, построенная по уравнению (5.21) в случае $m = 1$, $n = 6$, $E_1 = 100$ Па. Здесь же показаны две области неустойчивости A и B рассматриваемого стационарного режима колебаний оболочки, соответствующие критериям (5.27).

Резонансная кривая (5.37), характеризующая двухволновое движение указанной оболочки, показана на рис. 5.4 (кривая 1). На этом же рисунке изображена также зависимость $b_1 = b_1(\Omega)$ (кривая 2), построенная по уравнению (5.34).

Таким образом, в некотором диапазоне частот внешнего возбуждения Ω , где одномодовое движение оболочки ($a \neq 0$, $b = 0$) неустойчиво, возможны двухмодовые движения ($a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$), несмотря на то что внешняя нагрузка возбуждает непосредственно лишь одну изгибную форму $C_1 \cos sy \sin rx$. При этом вторая форма $C_2 \sin sy \sin rx$ «вовлекается» в движение косвенно, благодаря нелинейным связям в уравнениях (5.13). Динамическое перемещение оболочки в радиальном направлении в произвольной ее точке и в произвольный момент времени может быть представлено в данном случае так:

$$\begin{aligned} w = & a_1 \cos(\Omega t + \theta_1) \cos sy \sin rx - \\ & - b_1 \sin(\Omega t + \theta_1) \sin sy \sin rx + f_3(t) \sin^2 rx, \end{aligned} \quad (5.43)$$

причем

$$f_3(t) = - \frac{e_{31}(f_1^2 + f_2^2)}{\omega_{31}^2 + \frac{2}{3}d_8(f_1^2 + f_2^2)} \approx$$

$$\approx - \frac{(f_1^2 + f_2^2)}{\omega_{31}^2} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{d_8}{\omega_{31}^2} (f_1^2 + f_2^2) \right]; \quad (5.44)$$

$$f_1 = a_1 \cos(\Omega t + \theta_1); \quad f_2 = -b_1 \sin(\Omega t + \theta_1); \quad \theta_1 = \text{const.}$$

Если использовать замену

$$a_1 \cos(\Omega t + \theta_1) = A(t) \cos \varphi(t);$$

$$b_1 \sin(\Omega t + \theta_1) = A(t) \sin \varphi(t),$$

то прогиб (5.43) примет вид

$$\omega = A(t) \cos[\varphi(t) - sy] \sin rx + f_3(t) \sin^2 rx, \quad (5.45)$$

где

$$A(t) = \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{2} + \frac{b_1^2 - a_1^2}{2} \cos(2\Omega t + \theta_1)};$$

$$\text{tg } \varphi(t) = \frac{b_1}{a_1} \text{tg}(\Omega t + \theta_1).$$

Отсюда следует, что движение оболочки представляет собой бегущую в окружном направлении изгибную волну с переменными амплитудой $A = A(t)$ и фазовой скоростью. Если при этом $a_1 = b_1$, то обобщенная бегущая волна вырождается в бегущую волну, характеризующуюся постоянными значениями амплитуды и фазовой скорости. Действительно,

$$\omega = a_1 \cos(\Omega t + \theta_1 - sy) \sin rx + \frac{a_1^2}{\omega_{31}^2} \left(\frac{2d_8 a_1^2}{3\omega_{31}^2} - 1 \right) \sin^2 rx. \quad (5.46)$$

В заключение отметим, что если в соотношениях (5.32) положить $k_1 = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$, то уравнения (5.18) в этом случае не имеют действительных корней для амплитуд a_1 и b_1 . Такие корни появятся, если ввести в эти уравнения некоторую «несимметрию» — учесть, например, начальные неправильности геометрической формы оболочки.

§ 5.4. Устойчивость двухволновых форм

Чтобы описанное в предыдущем параграфе динамическое деформирование оболочки типа бегущей волны имело место (было реализовано), необходимо выяснить вопрос

об устойчивости стационарных решений $a_1(\Omega)$ и $b_1(\Omega)$ ($a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$), удовлетворяющих системе уравнений (5.33), (5.34). С этой целью рассмотрим уравнения в вариациях (5.16), полагая в них

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\bar{k}\pi}{2}; \quad \bar{k} = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (5.47)$$

Не ограничивая общности задачи, примем также $\theta_1 = 0$. В результате исследование устойчивости указанных решений сводится к анализу двух связанных уравнений Матье с коэффициентами, зависящими от стационарных амплитуд a_1 , b_1 :

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + p_1^2 \xi + \alpha_{10} \xi \cos 2\Omega t - \beta_1 \eta \sin 2\Omega t &= 0; \\ \ddot{\eta} + p_2^2 \eta + \alpha_{20} \eta \cos 2\Omega t - \beta_2 \xi \sin 2\Omega t &= 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \omega_0^2 + \frac{k}{2} (3a_1^2 + b_1^2); \\ p_2^2 &= \omega_0^2 + \frac{k}{2} (3b_1^2 + a_1^2); \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\alpha_{10} = \frac{k}{2} (3a_1^2 - b_1^2); \quad \alpha_{20} = \frac{k}{2} (a_1^2 - 3b_1^2);$$

$$\beta_1 = \beta_2 = ka_1 b_1.$$

Поскольку параметрические члены в системе (5.48) являются малыми по сравнению с другими членами, для построения ее решений можно применить асимптотический метод. Учитывая соотношение $p_1 \approx p_2$ и принимая во внимание лишь основной параметрический резонанс $p_j \approx \Omega$, $j = 1, 2$, в соответствии с [3] приближенно можно записать

$$\xi = \xi_0 \cos(\Omega t + \varphi_1); \quad \eta = \eta_0 \cos(\Omega t + \varphi_2), \quad (5.50)$$

где ξ_0 , η_0 , φ_1 , φ_2 — функции времени, определяемые из следующих дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_0}{dt} &= \frac{\alpha_{10}\xi_0}{4\Omega} \sin 2\varphi_1 - \frac{\beta_{10}\eta_0}{4\Omega} \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \\ \xi_0 \frac{d\varphi_1}{dt} &= (p_1 - \Omega) \xi_0 + \frac{\alpha_{10}\xi_0}{4\Omega} \cos 2\varphi_1 + \frac{\beta_{10}\eta_0}{4\Omega} \sin(\varphi_1 + \varphi_2); \\ \frac{d\eta_0}{dt} &= \frac{\alpha_{20}\eta_0}{4\Omega} \sin 2\varphi_2 - \frac{\beta_{20}\xi_0}{4\Omega} \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\eta_0 \frac{d\varphi_2}{dt} = (p_2 - \Omega) \eta_0 + \frac{\alpha_{20}\eta_0}{4\Omega} \cos 2\varphi_2 + \frac{\beta_{20}\xi_0}{4\Omega} \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Здесь учтены приближенные равенства $\frac{p_j^2 - \Omega^2}{2\Omega} \approx p_j - \Omega$, $j = 1, 2$.

Введем замену

$$\begin{aligned} u_1 &= \xi_0 \cos \varphi_1; & v_1 &= \xi_0 \sin \varphi_1; \\ u_2 &= \eta_0 \cos \varphi_2; & v_2 &= \eta_0 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Система (5.51) в новых переменных примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= Av_1 + Bu_2; & \frac{du_2}{dt} &= Ev_2 + Fu_1; \\ \frac{dv_1}{dt} &= Cu_1 + Dv_2; & \frac{dv_2}{dt} &= Gu_2 + Hv_1, \end{aligned} \quad (5.53)$$

где обозначено

$$A = \frac{\alpha_{10}}{4\Omega} - \Delta_1; \quad B = -\frac{\beta_{10}}{4\Omega}; \quad C = \frac{\alpha_{10}}{4\Omega} + \Delta_1;$$

$$D = \frac{\beta_{10}}{4\Omega} = -B; \quad E = \frac{\alpha_{20}}{4\Omega} - \Delta_2; \quad F = -\frac{\beta_{20}}{4\Omega};$$

$$G = \frac{\alpha_{20}}{4\Omega} + \Delta_2; \quad H = \frac{\beta_{20}}{4\Omega} = -F; \quad \Delta_j = p_j - \Omega, \quad j = 1, 2.$$

Составим характеристические уравнения для системы (5.53). Положим

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 e^{i\lambda t}; & v_1 &= V_1 e^{i\lambda t}; & u_2 &= U_2 e^{i\lambda t}; \\ v_2 &= V_2 e^{i\lambda t}; & i &= \sqrt{-1}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

где U_1, U_2, V_1, V_2 — постоянные коэффициенты. Подставляя (5.54) в (5.53) для определения λ , получим такое уравнение:

$$\lambda^4 + M\lambda^2 + N = 0, \quad (5.55)$$

где

$$\begin{aligned} M &= AC + FB + GE + HD; \\ N &= AGCE + EBHD - BEHC - ADGF. \end{aligned}$$

Для устойчивости тривиального решения системы (5.53) необходимо, чтобы λ было вещественным числом. Это означает, что λ^2 , которое выражается следующим образом:

$$\lambda^2 = -\frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{M^2}{4} - N}, \quad (5.56)$$

должно быть числом вещественным и положительным. Условие вещественности имеет, очевидно, вид

$$M^2 \geq 4N, \quad (5.57)$$

а условие положительности —

$$M < 0, \quad N > 0. \quad (5.58)$$

Объединяя эти два условия, устанавливаем область устойчивости, характеризуемую двумя неравенствами

$$N > 0; \quad M < -2\sqrt{N}. \quad (5.59)$$

Рассмотрим подробнее каждое из этих неравенств.

Первое из них с учетом принятых ранее обозначений можно представить в форме

$$(AG - BH)(EC - FD) > 0, \quad (5.60)$$

или

$$\Phi(\Omega) = \prod_{j=1}^4 (\Omega^2 - \Omega_j^2) > 0. \quad (5.61)$$

Здесь

$$\Omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}k(a_1^2 + b_1^2) \pm \frac{k}{2}a_1b_1; \quad (5.62)$$

$$\Omega_{3,4}^2 = \omega_0^2 + \frac{5}{4}k(a_1^2 + b_1^2) \pm \frac{ka_1b_1}{2} \sqrt{1 + \frac{4(a_1^2 - b_1^2)^2}{a_1^2b_1^2}}.$$

Учитывая равенство

$$M = (\Omega^2 - \Omega_5^2)(\Omega^2 - \Omega_6^2), \quad (5.63)$$

где

$$\Omega_{5,6}^2 = \omega_0^2 + k(a_1^2 + b_1^2) \pm \frac{k}{4} \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)^2 + 4a_1^2b_1^2}, \quad (5.64)$$

второй критерий устойчивости (5.59) примет соответственно вид

$$(\Omega^2 - \Omega_5^2)(\Omega^2 - \Omega_6^2) \leq -2 \sqrt{\prod_{j=1}^4 (\Omega^2 - \Omega_j^2)}. \quad (5.65)$$

Аналитическое исследование критериев (5.61) и (5.65) в общем случае затруднительно. Их проверку можно осуществить, например, численным путем, подставляя конкретные значения параметров рассматриваемой оболочки, параметров нагружения и соответствующих амплитуд a_1 и b_1 .

Рассмотрим оболочку, амплитудно-частотные характеристики которой $a_1 = a_1(\Omega)$ и $b_1 = b_1(\Omega)$ изображены на рис. 5.4. Численный анализ критериев устойчивости (5.61) и (5.63), проведенный с учетом (5.42) при $E_1 = 100$ Па, $m = 1$, $n = 6$, позволяет заключить, что в данном конкретном случае устойчивые двухволновые движения оболочки с амплитудами a_1 и b_1 возможны лишь при частотах внешнего воздействия из диапазона $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ (см. рис. 5.4). При этом $\Omega_2 = \Omega_N$, где Ω_N определяется согласно (5.40),

$$\Omega_1 = \Omega_{M_1} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3k}{4} \sqrt[3]{36 \frac{E^2}{k^2}}}.$$

Таким образом, движение оболочки при сканировании частоты внешнего возбуждения Ω происходит следующим образом (рис. 5.4). При прямом сканировании частоты, начиная с малых значений, оболочка совершает вынужденные колебания вида

$$\omega = a \cos sy \sin rx \cos(\Omega t + \theta_1) + f_3 \sin^2 rx, \quad (5.66)$$

причем амплитуда a определяется из уравнения (5.21) (функция f_3 выражается согласно (5.44) с учетом равенств $a_1 = a$, $b_1 = 0$). Это соответствует прохождению участка RM . Затем после кратковременного нестационарного процесса с увеличением частоты Ω реализуется движение типа бегущей в окружном направлении волны (5.43). При этом амплитуда a_1 изменяется вдоль кривой N_1N , а амплитуда b_1 — вдоль кривой M_1O_1 . После прохождения частоты, отвечающей точке N , вновь реализуется движение типа стоячей волны вида

$$\omega_1 = -a \cos sy \sin rx \sin(\Omega t + \theta_1) + f_3 \sin^2 rx, \quad (5.67)$$

где a изменяется вдоль линии NL .

Аналогичная картина наблюдается при обратном сканировании частоты внешнего возбуждения Ω . Заметим при этом, что с увеличением нагрузки E_1 возможно некоторое «затягивание» режима бегущей волны левее точки N_1 . Это значит, что в небольшой частотной области $\Omega < \Omega_1$ устойчивыми оказываются два режима: одномодовый (5.66) с амплитудой a , изменяющейся вдоль кривой RM , и двухмодовый (5.67). Для реализации каждого из этих режимов необходимо задание соответствующих начальных условий.

§ 5.5. Влияние начальных несовершенств на резонансные колебания оболочки

Все предыдущие задачи рассматривались в предположении идеальности соответствующих оболочек: считалось что оболочки имеют цилиндрическую форму с круговым поперечным сечением. Наличие начальных неправильностей привнесет некоторую «динамическую асимметрию» [28, 58, 65] в упругую систему, обусловит изменение вида амплитудно-частотных характеристик, трансформирует области неустойчивости стационарных режимов, приведет к появлению качественно новых по сравнению со случаем идеальной оболочки форм динамического деформирования оболочки.

Рассмотрим оболочку с неосесимметричным начальным прогибом

$$\omega_0 = f_{10} \cos sy \sin rx. \quad (5.68)$$

Тогда вместо уравнений (5.13) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 + k_1 f_1^2 + k_2 f_2^2 + k_3 f_1^3 + k_4 f_1 f_2^2 &= \alpha_1 \cos \Omega t; \\ \ddot{f}_2 + p_2^2 f_2 + g_1 f_1 f_2 + g_2 f_1^2 f_2 + g_3 f_2^3 &= \alpha_2 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \omega_1^2 + \frac{Es^4}{4\rho} f_{10}^2 - \frac{d_1 e_1}{\omega_{31}^2}; & \omega_1^2 &= \omega_0^2 + \frac{E f_{10}^2}{8\rho} (r^4 + s^4); \\ p_2^2 &= \omega_2^2; & \omega_2^2 &= \omega_1^2 - \frac{Es^4}{8\rho} f_{10}^2; & k_1 &= d_{21} - \frac{d_{11} e_{31}}{\omega_{31}^2} - \frac{d_{51} e_{11}}{\omega_{31}^2}; \\ k_2 &= d_{41} - \frac{d_{11} e_{41}}{\omega_{31}^2}; & k_3 &= d_{71} - \frac{d_{51} e_{31}}{\omega_{31}^2}; & k_4 &= d_{71} - \frac{d_{51} e_{41}}{\omega_{31}^2}; \\ g_1 &= c_{31} - \frac{c_{51} e_{11}}{\omega_{31}^2}; & g_2 &= d_{71} - \frac{c_{51} e_{31}}{\omega_{31}^2}; & g_3 &= c_{71} - \frac{c_{51} e_{41}}{\omega_{31}^2}; \\ \omega_{31}^2 &= \frac{16Dr^4}{3\rho h} + \frac{E}{\rho R^2} + \frac{2E}{3\rho} \beta f_{10}^2; \\ \beta &= r^4 s^4 \left[\frac{1}{(r^2 + s^2)^2} + \frac{1}{(s^2 + 9r^2)^2} \right]; & d_{11} &= d_1 - \frac{Es^2}{2\rho R} f_{10}; \\ d_{21} &= d_2 + \frac{3Es^4}{8\rho}; & d_{41} &= d_4 + \frac{Es^4}{8\rho}; & d_{51} &= d_5 - \frac{Es^2}{2\rho R}; \\ d_{71} &= d_7 + \frac{Es^4}{8\rho}; & e_{31} &= e_3 - \frac{Es^2}{6\rho R}; & e_{41} &= e_4 - \frac{Es^2}{6\rho R}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{51} = d_{51}; \quad c_{71} = d_{71}; \quad d_1 = -\frac{Es^2 f_{10}}{\rho R} \left[\frac{1}{4} + \frac{r^4}{(r^2 + s^2)^2} \right]; \\
d_2 = \frac{3E}{16\rho} (s^4 + r^4) f_{10}; \quad d_4 = \frac{E}{16\rho} (r^4 + s^4) f_{10}; \\
d_5 = e_5 = -\frac{Es^2}{\rho R} \left[\frac{1}{4} + \frac{2r^4}{(s^2 + r^2)^2} \right]; \\
c_7 = d_7 = \frac{E}{16\rho} (r^4 + s^4); \quad e_3 = e_4 = \frac{d_5}{3}. \quad (5.70)
\end{aligned}$$

При выводе коэффициентов k_i и g_j ($i = 1 \div 4, j = 1 \div 3$) не были учтены члены более высокого порядка малости ($\sim \frac{1}{\omega_3^4}$).

Поскольку $p_1 \approx p_2$, то, рассматривая основной резонанс в системе (5.69), т. е. полагая $p_i \approx \Omega$, приближенное решение этой системы можно представить в виде

$$f_1 = a \cos(\Omega t + \theta_1); \quad f_2 = b \cos(\Omega t + \theta_2), \quad (5.71)$$

где a, b, θ_1 и θ_2 — медленно изменяющиеся функции времени, для определения которых необходимо проинтегрировать уравнения

$$\begin{aligned}
2\Omega \frac{da}{dt} &= \frac{k_4}{4} ab^2 \sin 2\theta - \alpha_1 \sin \theta_1; \\
2\Omega a \frac{d\theta_1}{dt} &= (p_1^2 - \Omega^2) a + \frac{3}{4} k_3 a^3 + \frac{k_4}{2} ab^2 + \\
+ \frac{k_4}{4} ab^2 \cos 2\theta - \alpha_1 \cos \theta_1; \quad 2\Omega \frac{db}{dt} &= -\frac{g_2}{4} a^2 b \sin 2\theta - \alpha_2 \sin \theta_2; \\
2\Omega b \frac{d\theta_2}{dt} &= (p_2^2 - \Omega^2) b + \frac{g_2}{2} a^2 b + \frac{g_2}{4} a^2 b \cos 2\theta + \\
+ \frac{3}{4} g_3 b^3 - \alpha_2 \cos \theta_2, \quad (5.72)
\end{aligned}$$

где $\theta = \theta_1 - \theta_2$.

Приравнявая правые части уравнений (5.72) к нулю, можно определить параметры (амплитуды и фазы) стационарных режимов колебаний оболочки.

Как и в предыдущих параграфах, предполагаем, что внешняя нагрузка q «резонансным» образом возбуждает лишь одну изгибную форму, в частности форму $C_1 \cos sy \sin rx$. Это значит, что функция $q = q(x, y, t)$ имеет вид $q = Q \cos sy \times$

× sin rx cos Ωt . Тогда в (5.72) следует положить

$$\alpha_1 = \frac{Q}{\rho h}; \quad \alpha_2 = 0. \quad (5.73)$$

Стационарные режимы колебаний соответствуют при этом решениями одной из следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \left(p_1^2 - \Omega^2 + \frac{3}{4} k_3 a^2 \right)^2 a^2; \\ b = 0; \end{cases} \quad (5.74)$$

$$\begin{cases} \alpha_1^2 a^2 = \left[\left(p_1^2 - \Omega^2 + \frac{3}{4} k_3 a^2 \right) a^2 - \right. \\ \left. - \frac{k_4}{g_2} b^2 \left(p_2^2 - \Omega^2 + \frac{3}{4} g_3 b^2 \right) \right]^2; \\ \frac{g_2^2 a^4}{16} = \left(p_2^2 - \Omega^2 + \frac{g_2}{2} a^2 + \frac{3}{4} g_3 b^2 \right)^2. \end{cases} \quad (5.75)$$

Рассмотрим подробнее каждую из этих систем.

Первое уравнение (5.74) целесообразно записать в виде, разрешенном относительно частоты внешнего возбуждения Ω :

$$\Omega^2 = p_1^2 + \frac{3}{4} k_3 a^2 \pm \frac{\alpha_1}{a}, \quad (5.76)$$

где знаки « \pm » перед последним членом соответствуют синфазным ($\theta_1 = 0$) или противофазным ($\theta_1 = \pi$) по отношению к вынуждающей силе колебаниям. Следовательно, резонансная кривая $a^2 = a^2(\Omega)$ по форме будет такой же, как изображенная на рис. 5.1, которая соответствует идеальной оболочке.

Однако области неустойчивости рассматриваемого стационарного режима колебаний ($a \neq 0, b = 0$) — традиционная (A) и порожденная взаимосвязью обобщенных координат (B) — не будут иметь в таком случае общей границы (рис. 5.5). Область A определяется при этом неравенствами

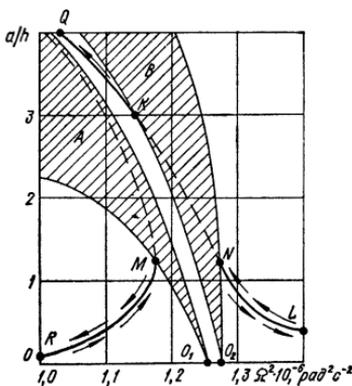


Рис. 5.5

$$p_1^2 + \frac{9}{4} k_4 a^2 \leq \Omega^2 \leq p_1^2 + \frac{3}{4} k_4 a^2, \quad (5.77)$$

а область B — соответственно неравенствами

$$\rho_2^2 + \frac{3}{4} k_4 a^2 \leq \Omega^2 \leq \rho_2^2 + \frac{1}{4} k_4 a^2, \quad (5.78)$$

которые получены из анализа уравнений в вариациях, составленных для системы (5.69). Критерии неустойчивости (5.77) и (5.78) выписаны с учетом условий $k_3 = g_2 = g_3 = k_4 < 0$, вытекающих из выражений (5.70).

Резонансные кривые и области неустойчивости, представленные на рис. 5.5, соответствуют оболочке с параметрами (5.42) при $f_{10} = h$, $E_1 = = 100$ Па, $m = 1$, $n = 6$.

Таким образом, поведение «несовершенной» оболочки при периодическом возбуждении существенно отличается от поведения соответствующей идеальной оболочки, поскольку область нереализуемости одномодового режима колебаний MN в зависимости от величины начального прогиба может располагаться на любом участке верхней резонансной кривой $a = a(\Omega^2)$. Действительно, путем варьирования параметра начального прогиба f_{10} можно «управлять» положением «дополнительной» области неустойчивости B , приближать или удалять ее от традиционной области (A). При этом возможен вариант, когда на верхней резонансной кривой LQ имеются два участка реализуемости одномодовых режимов движения оболочки (см. рис. 5.5 при $a/h \geq 3$).

Если предположить, что внешняя нагрузка $q = q(x, y, t)$ непосредственно возбуждает вторую сопряженную форму $C_2 \sin sy \sin rx$, то области неустойчивости A и B пересекаются, как показано на рис. 5.6, поскольку $\rho_2 > \rho_1$, а критерии неустойчивости имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_2^2 + \frac{9}{4} k_4 b^2 < \Omega^2 < \rho_2^2 + \frac{3}{4} k_4 b^2, \\ \rho_1^2 + \frac{3}{4} k_4 b^2 < \Omega^2 < \rho_1^2 + \frac{1}{4} k_4 b^2. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Рассмотрим теперь уравнения (5.75), описывающие более сложные, двухмодовые движения оболочки, в которых «участвуют» сопряженные формы $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \sin sy \times \times \sin rx$. Эти уравнения имеют два вида решений (в случае

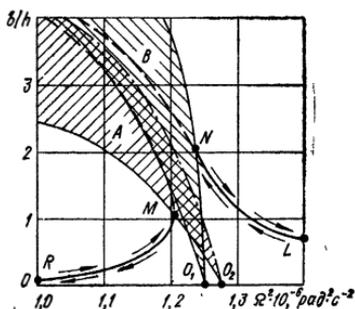


Рис. 5.6

$\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 = 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^2 = p_1^2 + \frac{3}{4} k_4 a_1^2 + \frac{1}{4} k_4 b^2 \pm \frac{\alpha_1}{a_1}; \\ b_1^2 = \frac{4}{3k_4} \left(\Omega^2 - p_2^2 - \frac{1}{4} k_4 a_1^2 \right); \\ \theta_1 - \theta_2 = \frac{k_1 \pi}{2}; \quad k_1 = \pm 1, \pm 3, \dots; \end{array} \right. \quad (5.80)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^2 = p_1^2 + \frac{3}{4} k_4 (a^2 + b^2) \pm \frac{\alpha_1}{a_2}, \\ b_2^2 = \frac{4}{3k_4} \left(\Omega^2 - p_2^2 - \frac{3}{4} k_4 a_2^2 \right); \\ \theta_1 - \theta_2 = k_1 \frac{\pi}{2}; \quad k_1 = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{array} \right. \quad (5.81)$$

Эти решения можно представить еще в таком виде:

$$a_1^2 = \frac{2,25\alpha_1^2}{\left(\frac{3p_1^2 - p_2^2}{2} - \Omega^2 + ka^2 \right)^2}; \quad (5.82)$$

$$b_1^2 = \frac{1}{k_4} \left[2(p_1^2 - p_2^2) + ka^2 \pm 2 \frac{\alpha_1}{a} \right];$$

$$a_2^2 = \frac{\alpha_1^2}{(p_2^2 - p_1^2)^2}; \quad (5.83)$$

$$b_2^2 = \frac{4}{3k_3} (\Omega^2 - p_2^2) - \frac{\alpha_1^2}{(p_2^2 - p_1^2)^2},$$

причем решение (5.83) существует лишь при $p_2 \neq p_1$.

Для выяснения вопроса об устойчивости соответствующих пар корней (a_i, b_i) , определенных зависимостями (5.82) или (5.83), необходимо провести анализ уравнений в вариациях, составленных для исходной системы (5.69) с учетом этих корней. Применительно к соотношениям (5.82) уравнения в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \Omega_1^2 \xi + \alpha_1^1 \xi \cos 2\Omega t - \beta_1^1 \eta \sin 2\Omega t &= 0; \\ \ddot{\eta} + \Omega_2^2 \eta + \alpha_2^1 \eta \cos 2\Omega t - \beta_2^1 \xi \sin 2\Omega t &= 0, \end{aligned} \quad (5.84)$$

где

$$\Omega_1^2 = p_1^2 + \frac{k_4}{2} (3a_1^2 + b_1^2);$$

$$\Omega_2^2 = p_2^2 + \frac{k_4}{2} (3b_1^2 + a_1^2); \quad (5.85)$$

$$\alpha_1^1 = \frac{k_4}{2} (3a_1^2 - b_1^2); \quad \alpha_2^1 = \frac{k_4}{2} (a_1^2 - 3b_1^2); \quad \beta_1^1 = \beta_2^1 = k_4 a_1 b_1.$$

Тривиальное решение $\xi = \eta = 0$ будет при этом устойчиво, если выполняются одновременно следующие два условия:

$$(AG - BH)(EC - FD) > 0; \\ (AC + BF + DH + GE) < -2\sqrt{(AG - BH)(EC - FD)}. \quad (5.86)$$

Здесь

$$A = \frac{\alpha_1^1}{4\Omega} + \Omega - \Omega_1; \quad B = -\frac{\beta_1^1}{4\Omega}; \quad C = \frac{\alpha_1^1}{4\Omega} + \Omega_1 - \Omega; \\ D = \frac{\beta_1^1}{4\Omega}; \quad G = \frac{\alpha_2^1}{4\Omega} + \Omega_2 - \Omega; \quad H = \frac{\beta_2^1}{4\Omega}; \\ E = \frac{\alpha_2^1}{4\Omega} + \Omega - \Omega_2; \quad F = -\frac{\beta_2^1}{4\Omega}. \quad (5.87)$$

Выполнение критериев (5.86) обусловит, очевидно, и устойчивость решения (5.82).

Что касается решения (5.83), то уравнения в вариациях, составленные с его учетом, несколько отличаются от уравнений (5.84):

$$\ddot{\xi} + \Omega_1^2 \xi + \alpha_1^1 \xi \cos 2\Omega t - \beta_1^1 \eta \cos 2\Omega t + \gamma_1^1 \eta = 0; \\ \ddot{\eta} + \Omega_2^2 \eta + \alpha_2^1 \eta \cos 2\Omega t - \beta_2^1 \xi \cos 2\Omega t + \gamma_2^1 \xi = 0. \quad (5.88)$$

Здесь

$$\Omega_1^2 = p_1^2 + \frac{k}{2} (3a_2^2 + b_2^2); \\ \Omega_2^2 = p_2^2 + \frac{k}{2} (3b_2^2 + a_2^2); \\ \alpha_1^1 = \frac{3}{2} k_4 a_2^2 + \frac{k_4 b_2^2}{2}; \quad \alpha_2^1 = \frac{3}{2} k_4 b_2^2 + \frac{k_4 a_2^2}{2}; \quad (5.89) \\ \beta_1^1 = \mp k_4 a_2 b_2; \quad \gamma_1^1 = \pm k_4 a_2 b_2; \\ \beta_2^1 = \mp k_4 a_2 b_2; \quad \gamma_2^1 = \pm k_4 a_2 b_2.$$

Критерии устойчивости указанного решения (a_2 , b_2) по форме совпадают с критериями (5.86), в которых надлежит

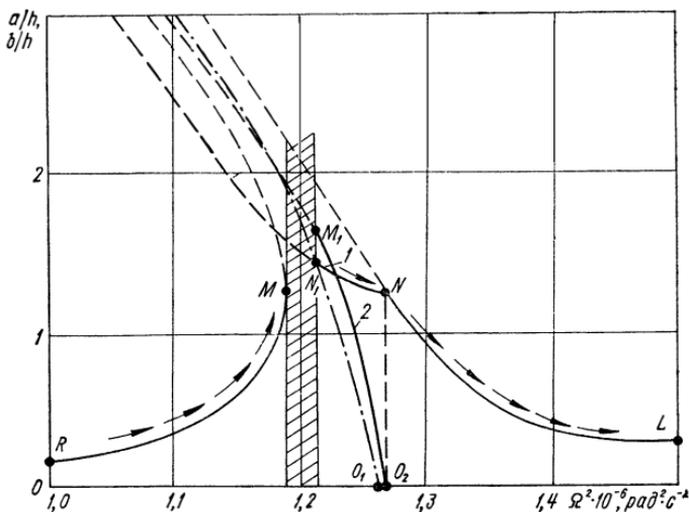


Рис. 5.7

принять

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\alpha_1^1}{4\Omega} - \Delta_1; & \Delta_1 &= \Omega_1 - \Omega; & B &= \frac{1}{2\Omega} \left(\gamma_1^1 - \frac{\beta_1^1}{2} \right) = \frac{\gamma_1^1}{4\Omega}; \\
 C &= \Delta_1 + \frac{\alpha_1^1}{4\Omega}; & D &= -\frac{3\gamma_1^1}{4\Omega}; & E &= \frac{\alpha_2^1}{4\Omega} - \Delta_2; & \Delta_2 &= \Omega_2 - \Omega; \\
 F &= \frac{\gamma_2^1}{4\Omega}; & G &= \Delta_2 + \frac{\alpha_2^1}{4\Omega}; & H &= -\frac{3\gamma_2^1}{4\Omega}. & (5.90)
 \end{aligned}$$

Рассчитаем, например, двухволновые формы движения оболочки с начальным прогибом (5.68). Пусть $f_{10} = h$, а остальные параметры оболочки совпадают с (5.42). На рис. 5.7 приведены амплитудно-частотные зависимости $a_1 = a_1(\Omega^2)$ (кривая 1) и $b_1 = b_1(\Omega^2)$ (кривая 2), построенные на основании уравнений (5.82) при значении амплитуды нагрузки $E_1 = 100$ Па и следующих параметрах волнообразования: $m = 1$, $n = 6$. Сплошные участки АЧХ соответствуют устойчивым режимам колебаний, причем области устойчивости определялись на основании критериев (5.86).

Сравнивая полученные результаты с соответствующими результатами для идеальной оболочки (см. рис. 5.4), можно сделать вывод, что наличие начального прогиба оболочки w_0 существенно сказывается и на форме резонансных кривых $a = a(\Omega^2)$, $b = b(\Omega^2)$, и на областях неустойчиво-

сти режима бегущей волны. Кривые 1 и 2 в случае неидеальной оболочки пересекаются. При этом не во всей зоне неустойчивости одномодового режима движения (зоне MN) режим бегущей волны реализуем. Существует некоторая небольшая частотная область (на рисунке заштрихованная), в которой решения уравнений (5.82) и (5.74) неустойчивы. Численный анализ показывает, что в этой области неустойчивым является также и решение (5.83). Аналоговое моделирование уравнений (5.69) на АВМ ЭМУ-10 при значениях частот Ω из указанной заштрихованной зоны позволило установить зависимость решений системы (5.69) от выбора начальных условий. Динамическое поведение оболочки обнаруживает в этой зоне специфические «странные» свойства, выражающиеся в реализации хаотических движений, для описания которых необходимо использовать либо аппарат теории вероятностей, либо другие приемы исследований «странных аттракторов» *. Следует отметить, что аналогичные аномалии (появление «случайностей» в детерминированной системе) были обнаружены в последнее время в самых разнообразных динамических системах, встречающихся, в частности, в нелинейной оптике, физике плазмы, в задачах биологии и экологии.

Г Л А В А 6

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В данной главе рассматриваются нелинейные колебания оболочек при воздействии на них так называемых параметрических нагрузок. Последний термин означает, что эти нагрузки входят в уравнения движения оболочек в качестве некоторых параметров. Типичными примерами «параметрических» нагрузок являются сжимающие периодические усилия, действующие вдоль образующей оболочки (рис. 6.1), или всестороннее внешнее пульсирующее давление.

С математической точки зрения общим для параметрического возбуждения оболочек является то, что их колебательные режимы описы-

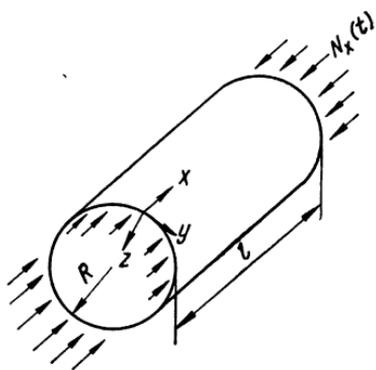


Рис. 6.1

* См.: «Странные аттракторы» Сб. статей (пер. с англ. под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова).— М., 1981.— 253 с.

ваются дифференциальными уравнениями с коэффициентами, явно зависящими от времени (в случае вынужденных колебаний (см. гл. 5) внешние нагрузки обуславливали появление лишь неоднородного члена в разрешающем уравнении). Такие уравнения характеризуются рядом специфических особенностей. В частности, их тривиальное решение при определенных условиях может оказаться неустойчивым по Ляпунову. При этом возникают колебания, амплитуды которых возрастают со временем и могут достигать достаточно больших значений. Ограничение амплитуд происходит благодаря влиянию нелинейных сил (нелинейной упругости, инерционности, демпфирования и т. д.).

Ниже рассматриваются многомерные задачи, связанные как с определением областей динамической неустойчивости оболочек (областей, в которых имеет место интенсивное нарастание амплитуд колебаний оболочки), так и с изучением нелинейных установившихся колебательных и волновых процессов, возникающих после потери устойчивости.

§ 6.1. Постановка задачи и вывод уравнений движения оболочки при параметрическом возбуждении

Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку с малым начальным прогибом ω_0 , сжатую вдоль образующей периодическими усилиями N_x , равномерно распределенными вдоль дуговых кромок (см. рис. 6.1). При этом

$$N_x = N_0 + N_1 \cos \nu t, \quad (6.1)$$

причем $N_0 = \text{const} > 0$, $N_1 = \text{const} > 0$.

Предполагаем, что оболочка по торцам скреплена со шпангоутами, остающимися при деформации оболочки круговыми.

В отличие от задачи о вынужденных колебаниях оболочки, рассмотренной в предыдущей главе, динамический прогиб ω_1 , соответствующий параметрическому возбуждению (6.1), аппроксимируем чегырехчленным разложением

$$\omega_1 = f_1 \cos sy \sin rx + f_2 \sin sy \sin rx + f_3 \sin^2 rx + f_4. \quad (6.2)$$

Здесь первые два слагаемые совпадают с выражениями для прогиба в задаче о статической устойчивости оболочки в «малом» (в линейной задаче [8]), третье слагаемое отражает несимметрию прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным направлением к центру кривизны. Что же касается последнего слагаемого в (6.2), то оно соответствует радиальным перемещениям точек, принадлежащим торцевым сечениям $x = 0$ и $x = l$. Это слагаемое не зависит от окружной координаты y , т. е. предполагается, что указанные торцевые сечения при колебаниях оболочки могут «дышать» [8]. Напомним, что именно такое допущение, по существу, кладется в основу решения нелиней-

ных задач об устойчивости оболочек при осевом сжатии постоянными продольными нагрузками или постоянным внешним давлением [9]. Если этого допущения не сделать, то нельзя считать напряженное состояние оболочки до потери устойчивости безмоментным.

Таким образом, функция динамического прогиба w_1 содержит четыре варьируемых параметра f_1, f_2, f_3, f_4 . Для определения этих параметров используем подход, который применялся при обсуждении вынужденных колебаний.

Зададим начальный прогиб w_0 в виде, аналогичном (6.2):

$$w_0 = f_{10} \cos sy \sin rx + f_{20} \sin sy \sin rx + f_{30} \sin^2 rx. \quad (6.3)$$

При принятых предположениях функция напряжений Φ в срединной поверхности оболочки может быть представлена в форме (4.14), где коэффициенты $\Phi_i, i = 0, 1, \dots, 6$, имеют вид (4.15), а функция

$$\Phi^* = -\frac{Kx^2}{2} - \frac{N_x y^2}{2}, \quad (6.4)$$

причем

$$K = \mu N_x + \frac{E f_4}{R} - 4r^2 \Phi_0, \quad (6.5)$$

$$\Phi_0 = \frac{Es^2}{16r^2} \left(f_{10} f_1 + f_{20} f_2 + \frac{f_1^2}{2} + \frac{f_2^2}{2} - \frac{2}{Rs^2} f_3 \right). \quad (6.6)$$

Равенство (6.5) получено путем подстановки выражений (6.1) — (6.4) в условие периодичности (4.6).

Используя затем метод Бубнова — Галеркина, выводим уравнения для определения неизвестных функций времени $\dot{f}_i(t), i = 1 \div 4$, входящих в (6.2):

$$\ddot{f}_1 + \left(\omega_1^2 - \frac{N_x r^2}{\rho} - \frac{Ks^2}{\rho} \right) f_1 + \gamma f_2 + d_1 f_3 + d_2 f_1^2 + d_3 f_1 f_2 + d_4 f_2^2 + d_5 f_1 f_3 + d_6 f_3^2 + d_7 f_1 (f_1^2 + f_2^2) + d_8 f_1 f_3^2 - \frac{s^2 K + N_x r^2}{\rho} f_{10} = 0;$$

$$\ddot{f}_2 + \left(\omega_2^2 - \frac{N_x r^2}{\rho} - \frac{Ks^2}{\rho} \right) f_2 + c_1 f_3 + c_2 f_1^2 + c_3 f_1 f_2 + c_4 f_2^2 + c_5 f_2 f_3 + c_6 f_3^2 + c_7 f_2 (f_1^2 + f_2^2) + c_8 f_2 f_3^2 - \frac{s^2 K + N_x r^2}{\rho} f_{20} = 0; \quad (6.7)$$

$$\ddot{f}_3 + \frac{4}{3} \ddot{f}_4 + \omega_3^2 f_3 + e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_1^2 + e_4 f_2^2 + e_5 f_1 f_3 + e_6 f_2 f_3 + e_7 f_1^2 f_3 + e_8 f_2^2 f_3 - \frac{4}{3\rho} \left(N_x r^2 f_{30} - \frac{K}{R} \right) = 0;$$

$$\ddot{f}_4 + \frac{\dot{f}_3}{2} + \frac{K}{\rho R} = 0.$$

Все коэффициенты этих уравнений точно такие же, как в уравнениях (4.18).

Таким образом, задача о параметрическом возбуждении колебаний оболочки с начальным прогибом свелась к анализу системы четырех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (6.7). На основании этих уравнений можно найти области динамической неустойчивости оболочки, определить параметры ее изгибных колебаний (амплитуды и частоты), устанавливающихся после потери устойчивости. При этом для нахождения границ областей динамической неустойчивости достаточно воспользоваться линейными частями этих уравнений [1, 4, 37]. С учетом соответствующих подстановок линейные уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + (\Omega_1^2 - \mu_1 \cos vt) f_1 + a_{12} f_2 + a_{13} f_3 + a_{14} f_4 &= \\ &= \alpha_1 (N_0 + N_1 \cos vt); \\ \ddot{f}_2 + (\Omega_2^2 - \mu_2 \cos vt) f_2 + a_{21} f_1 + a_{23} f_3 + a_{24} f_4 &= \\ &= \alpha_2 (N_0 + N_1 \cos vt); \\ \ddot{f}_3 + (\Omega_3^2 - \mu_3 \cos vt) f_3 + a_{31} f_1 + a_{32} f_2 &= \alpha_3 (N_0 + N_1 \cos vt); \\ \ddot{f}_4 + \omega_4^2 f_4 + a_{41} f_1 + a_{42} f_2 + a_{43} f_3 &= \alpha_4 (N_0 + N_1 \cos vt). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \omega_1^2 + \frac{Es^4}{4\rho} f_{10}^2 - \frac{N_0}{\rho} (r^2 + s^2\mu); \\ \Omega_2^2 &= \omega_2^2 + \frac{Es^4}{4\rho} f_{20}^2 - \frac{N_0}{\rho} (r^2 + s^2\mu); \quad \Omega_3^2 = 3 \left(\omega_3^2 - \frac{4}{3} \frac{N_0 r^2}{\rho} \right); \\ \omega_4^2 &= \frac{E}{\rho R^2}; \quad a_{12} = a_{21} = \gamma + \frac{Es^4}{4\rho} f_{10} f_{20}; \quad a_{13} = a_1 - \frac{Es^2}{2\rho R} f_{10}; \\ a_{14} &= -\frac{Es^2}{\rho R} f_{20}; \quad a_{23} = c_1 - \frac{Es^2}{2\rho R} f_{10}; \quad a_{24} = -\frac{Es^2}{\rho R} f_{20}; \\ a_{31} &= 3e_1; \quad a_{32} = 3e_2; \quad \alpha = \frac{\gamma}{\rho} (r^2 + s^2\mu); \quad (6.9) \\ \alpha_2 &= \frac{f_{20}}{\rho} (r^2 + s^2\mu); \quad \alpha_3 = \frac{4r^2}{\rho} f_{30}; \quad \alpha_4 = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu}{R} + 2r^2 f_{30} \right); \\ \mu_1 &= \mu_2 = \frac{N_1}{\rho} (r^2 + s^2\mu); \quad \mu_3 = \frac{4}{3} N_1 \frac{r^2}{\rho}; \\ a_{41} &= -\left(\frac{3e_1}{2} + \frac{Es^2}{4\rho R} f_{10} \right); \quad a_{42} = -\left(\frac{3e_2}{2} + \frac{Es^2}{4\rho R} f_{20} \right); \\ a_{43} &= \frac{E}{2\rho R^2} - \frac{3}{2} (\Omega_3^2 - \mu_3 \cos vt). \end{aligned}$$

Вводя соответствующие замены переменных, систему (6.8) можно представить в виде однородной системы (без правых частей), которая имеет тривиальное решение. Области неустойчивости этих решений (по Ляпунову) и представляют собой области динамической неустойчивости рассматриваемой оболочки. Задачи определения этих областей и анализ поведения оболочки в них будут рассмотрены в § 6.2—6.4.

§ 6.2. Области динамической неустойчивости круговой оболочки и оболочки с начальными неправильностями формы

Практическое определение в общем виде областей неустойчивости системы (6.8) представляет сложную задачу из-за связанности динамических уравнений, обусловленной начальными неправильностями формы оболочки. Если предположить, что оболочка идеальная ($\omega_0 \equiv 0$), то система (6.8) значительно упрощается и сводится к виду

$$\begin{aligned}\ddot{f}_1 + (\Omega_1^2 - \mu_1 \cos \nu t) f_1 &= 0; \\ \ddot{f}_2 + (\Omega_2^2 - \mu_2 \cos \nu t) f_2 &= 0; \\ \ddot{f}_3 + (\Omega_3^2 - \mu_3 \cos \nu t) f_3 &= 0.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Здесь $\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \omega_0^2 - \frac{N_0}{\rho} (r^2 + s^2 \mu)$; ω_0 — частота собственных колебаний незагруженной оболочки

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{D}{h} (r^2 + s^2)^2 + \frac{E}{R^2} \frac{r^4}{(r^2 + s^2)^2} \right]. \quad (6.11)$$

Четвертое уравнение системы (6.8) можно представить так:

$$\ddot{f}_4 + \omega_4^2 f_4 = -a_{43} f_3 - \frac{\mu}{\rho R} (N_0 + N_1 \cos \nu t) \quad (6.12)$$

и оно, очевидно, не будет влиять на области устойчивости оболочки.

Действительно, если принять здесь $f_3 \equiv 0$, то система (6.12) описывает обычные вынужденные резонансные колебания при $\omega_4 = \nu$ или нерезонансные колебания в остальных случаях.

Что касается уравнений (6.10), то каждое из них представляет собой известное уравнение Матье, исследованию которых посвящены многие работы. В дальнейшем при анализе этих уравнений предполагаем «глубину» моду-

ляции параметра μ_i , $i = 1, 2, 3$, малой величиной: $\frac{\mu_i}{\Omega_i^2} \ll 1$.

Тогда в соответствии с идеей асимптотических методов Крылова — Боголюбова приближенное решение каждого из уравнений (6.10), соответствующее демумльтипликационному резонансу, обнаруживаемому в первом приближении * $\Omega_i \approx \frac{\nu}{2}$ [3], можно записать в форме

$$f_i = a_i \cos\left(\frac{\nu t}{2} + \theta_i\right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.13)$$

где a_i , θ_i — должны быть определены из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= -\frac{a_i \mu_i}{2\nu} \sin 2\theta_i; \\ \frac{d\theta_i}{dt} &= \Omega_i - \frac{\nu}{2} - \frac{a_i \mu_i}{2\nu} \cos 2\theta_i. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Чтобы исследовать устойчивость тривиального решения, целесообразно ввести новые переменные

$$u_i = a_i \cos \theta_i; \quad v_i = a_i \sin \theta_i. \quad (6.15)$$

Используя при этом уравнения (6.14), получаем

$$\frac{du_i}{dt} = \xi_i v_i; \quad \frac{dv_i}{dt} = \eta_i u_i, \quad (6.16)$$

где

$$\xi_i = -\frac{\mu_i}{2\nu} - \left(\Omega_i - \frac{\nu}{2}\right); \quad \eta_i = -\frac{\mu_i}{2\nu} + \left(\Omega_i - \frac{\nu}{2}\right). \quad (6.17)$$

Поскольку систему (6.16) можно представить в виде

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} - \xi_i \eta_i u_i = 0; \quad \frac{d^2 v_i}{dt^2} - \xi_i \eta_i v_i = 0, \quad (6.18)$$

то очевидно, что тривиальное решение $u_i = 0$, $v_i = 0$ будет устойчиво, если выполняется условие

$$\xi_i \eta_i < 0. \quad (6.19)$$

В случае $\xi_i \eta_i > 0$ амплитуды a_i в соотношении (6.13) с течением времени также возрастают по экспоненциальному

* Этот резонанс называют еще главным, или основным, параметрическим резонансом. Кроме него возможны другие резонансы, которые можно выявить в системе (6.10) на уровне второго и более высоких приближений.

закону. Это следует из того, что общее решение уравнений (6.16) имеет вид

$$\begin{aligned} u_i &= C_{1i} e^{\lambda_{0i} t} + C_{2i} e^{-\lambda_{0i} t}; \\ v_i &= C_{1i} \frac{\eta_i}{\lambda_{0i}} e^{\lambda_{0i} t} - C_{2i} \frac{\eta_i}{\lambda_{0i}} e^{-\lambda_{0i} t}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

где λ_{0i} — действительное число, а

$$a_i^2 = u_i^2 + v_i^2. \quad (6.21)$$

На рис. 6.2 представлен график зависимости $\alpha_i = \xi_i \eta_i = \alpha_i(v^2)$, где использовано обозначение

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 4\Omega_i^2 - \frac{\mu_i}{2}; \\ v_2^2 &= 4\Omega_i^2 + \frac{\mu_i}{2}; \\ \alpha_{0i} &= \frac{\mu_i^2}{16\Omega_i^2}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Таким образом, если частота внешнего возбуждения v находится в интервале

$$v_1^2 < v^2 < v_2^2, \quad (6.23)$$

то возникает главный параметрический резонанс, при котором амплитуда колебаний оболочки возрастает по экспоненциальному закону. Заметим при этом, что главных областей динамической неустойчивости оболочки будет три, поскольку исходных уравнений также три (см. (6.10)). Первые две области (A, B на рис. 6.3), отвечающие обобщенным перемещениям оболочки f_1 и f_2 по формам $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \times \times \sin sy \sin rx$, совпадают между собой из-за равенства всех коэффициентов в первых двух уравнениях (6.10). Третья область (C), соответствующая координате

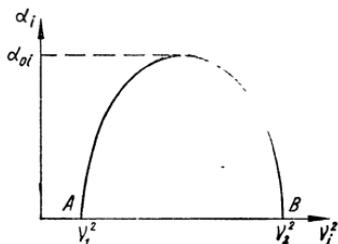


Рис. 6.2

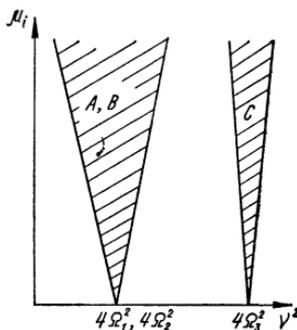


Рис. 6.3

f_3 , находится обычно на значительном удалении от первых двух областей, поскольку $\Omega_3^2 \gg \Omega_{1,2}^2$ (для оболочек средней длины).

Наличие начальных неправильностей геометрической формы оболочки приводит к «расщеплению» областей динамической неустойчивости A и B . С целью приближенного определения этих областей возвратимся к исходным уравнениям (6.7), в которых примем $\dot{f}_3 = 0$ и $\dot{f}_4 = 0$. Такие предположения, как показано во многих работах [17, 21, 66, 67 и др.], несущественно скажутся на окончательных результатах исследований. Уравнения, на основании которых можно найти указанные области, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 + \left(p_1^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) f_1 + \gamma f_2 &= \frac{N_x r^2}{\rho} f_{10}; \\ \dot{f}_2 + \left(p_2^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) f_2 + \gamma f_1 &= \frac{N_x r^2}{\rho} f_{20}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Они получены непосредственно из (6.8) с учетом принятых выше предложений. Здесь обозначено

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \omega_0^2 + \frac{Er^4}{8\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2) + \frac{Es^4}{8\rho} f_{10}^2 + \frac{E}{\rho} f_{30}^2 - \\ &\quad - \frac{2Er^4 s^2 f_{30}}{\rho R (r^2 + s^2)^2} - \frac{d_1 e_1}{\omega_3^2} - \frac{N_0 r^2}{\rho}; \\ p_2^2 &= \omega_0^2 + \frac{Er^4}{8\rho} (f_{10}^2 + f_{20}^2) + \frac{Es^4}{8\rho} f_{20}^2 + \frac{E}{\rho} \beta f_{30}^2 - \\ &\quad - \frac{2Er^4 s^2 f_{30}}{\rho R (r^2 + s^2)^2} - \frac{d_1 e_1}{\omega_3^2} - \frac{N_0 r^2}{\rho}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Если использовать замену

$$f_1 = k_1 + f_{11}; \quad f_2 = k_2 + f_{22}, \quad (6.26)$$

где

$$k_1 = \frac{(p_1^2 f_{10} - \gamma f_{20}) \alpha_0}{p_1^2 p_2^2 - \gamma^2}; \quad k_2 = \frac{(p_2^2 f_{20} - \gamma f_{10}) \alpha_0}{p_1^2 p_2^2 - \gamma^2}; \quad \alpha_0 = \frac{N_0 r^2}{\rho}; \quad (6.27)$$

то в правых частях уравнений (6.24) можно избавиться от постоянных слагаемых, обусловленных начальными неправильностями оболочки. В результате получим такие урав-

нения:

$$\begin{aligned} \dot{f}_{11} + \left(p_1^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) f_{11} + \gamma f_{22} &= \frac{N_1 r^2}{\rho} (f_{10} + k_1) \cos vt \\ \dot{f}_{22} + \left(p_2^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) f_{22} + \gamma f_{11} &= \frac{N_1 r^2}{\rho} (f_{20} + k_2) \cos vt. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Введем затем еще одну замену

$$\xi = \frac{f_{22} - B f_{11}}{A - B}; \quad \eta = \frac{A f_{11} - f_{22}}{A - B}, \quad (6.29)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} + \sqrt{C} \right); \\ B &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_2^2 - p_1^2}{2} - \sqrt{C} \right); \\ C &= \frac{(p_2^2 - p_1^2)^2}{4} + \gamma^2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Система (6.28) может быть представлена тогда в удобной для расчетов «несвязанной» форме

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \left(p_{11}^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) \xi &= E_1 \cos vt; \\ \ddot{\eta} + \left(p_{22}^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) \eta &= E_2 \cos vt. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_{11}^2 &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \sqrt{C}; \\ p_{22}^2 &= \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \sqrt{C}; \\ E_1 &= \frac{N_1 r^2}{\rho (1 + A^2)} [f_{10} + k_1 + A (f_{20} + k_2)]; \\ E_2 &= \frac{N_1 r^2}{\rho (1 + B^2)} [f_{10} + k_1 + B (f_{20} + k_2)]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Полагая $p_{ii} \approx \frac{\nu}{2}$, что соответствует основному демультипликационному резонансу, имеющему, как отмечалось, наибольшее практическое значение, определяем главные области динамической неустойчивости рассматриваемой

оболочки, по предложенной выше методике:

$$\begin{aligned} 4\rho_{11}^2 - \frac{2N_1 r^2}{\rho} < \nu^2 < 4\rho_{11}^2 + \frac{2N_1 r^2}{\rho}; \\ 4\rho_{22}^2 - \frac{2N_1 r^2}{\rho} < \nu^2 < 4\rho_{22}^2 + \frac{2N_1 r^2}{\rho}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Характерной особенностью этих областей является существенная зависимость критических частот параметрического возбуждения ν , т. е. частот, отвечающих границам областей неустойчивости, от параметров начального прогиба ω_0 .

Пусть

$$\frac{\rho_{11}^2}{\rho_{22}^2} = \sigma; \quad \frac{1 - \mu_{20}}{1 + \mu_{10}} = \sigma^*, \quad (6.34)$$

где

$$\mu_{i0} = \frac{N_1 r^2}{2\rho\rho_{ii}^2}, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку $\rho_{22} > \rho_{11}$ (для неидеальной оболочки), то очевидно, что всегда $\sigma < 1$. В то же время параметр $\bar{\sigma} = \frac{\sigma^*}{\sigma}$ может быть как больше, так и меньше единицы. При $\bar{\sigma} > 1$ ($\sigma^* > \sigma$) области динамической неустойчивости (6.33) не пересекаются. При этом в зонах $\nu < \nu_{11}$, $\nu_{12} < \nu < \nu_{21}$ и $\nu > \nu_{22}$ (рис. 6.4, а) оболочка не возбуждается. Значения частот ν_{jk} определяются выражениями

$$\begin{aligned} \nu_{11} &= 2\rho_{11} \sqrt{1 - \mu_{10}}; & \nu_{12} &= 2\rho_{11} \sqrt{1 + \mu_{10}}; \\ \nu_{21} &= 2\rho_{22} \sqrt{1 - \mu_{20}}; & \nu_{22} &= 2\rho_{22} \sqrt{1 + \mu_{20}}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

При $\bar{\sigma} < 1$ ($\sigma^* < \sigma$) существует область частичного перекрытия указанных зон ($\nu_{21} < \nu < \nu_{12}$) (рис. 6.4, б), в которой имеет место потеря устойчивости по обеим координатам ξ и η . Перекрытие областей реализуется при

$$N_1 > N^* = \frac{\rho}{r^2} (\rho_{22}^2 - \rho_{11}^2). \quad (6.36)$$

Отметим, что в случае идеальной оболочки, когда $\omega_0 = 0$, всегда выполняются равенства $\nu_{11} = \nu_{21}$; $\nu_{12} = \nu_{22}$.

В заключение рассмотрим возможные формы потери устойчивости в соответствующих зонах основного параметрического резонанса. Эти формы не обязательно соответствуют описанным в научной литературе традиционным движе-

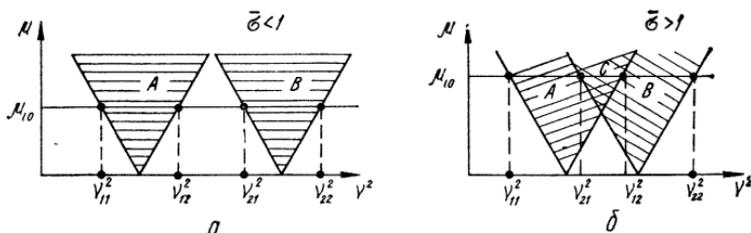


Рис. 6.4

ниям типа «прогрессирующих» (с нарастающими во времени амплитудами) стоячих волн. Это следует из представления функции динамического прогиба ω_1 (6.2), которую, если учесть замену (6.29), можно записать так:

$$\omega_1 = X_1(x, y) \xi + X_2(x, y) \eta, \quad (6.37)$$

где

$$X_1(x, y) = \cos sy \sin rx + A \sin sy \sin rx;$$

$$X_2(x, y) = \sin sy \sin rx + B \sin sy \sin rx.$$

В соотношении (6.37) выписаны лишь «линейные» аппроксимирующие члены из выражения (6.2), поскольку, как отмечалось выше, именно на основании линейных уравнений движения оболочки (6.7) решается вопрос о ее динамической неустойчивости [4]. Функция ω_1 (6.37) характеризует прогрессирующую стоячую волну, если выполняется одно из соотношений

- 1) $\xi \equiv 0; \quad \eta \neq 0;$
- 2) $\xi \neq 0; \quad \eta \equiv 0;$
- 3) $\xi \equiv \eta.$

Во всех остальных случаях эта функция описывает более сложные формы движения, в частности бегущие в окружном направлении волны.

§ 6.3. Поведение оболочки в главной зоне динамической неустойчивости при пульсирующем сжатии

Рассмотрим нелинейную задачу о параметрически возбуждаемых колебаниях оболочки с начальным прогибом. В целях упрощения математических выкладок начальный прогиб ω_0 зададим в «несимметричном» виде

$$\omega_0 = f_{10} \cos sy \sin rx. \quad (6.39)$$

Такое задание указанного прогиба избавляет от необходимости введения нормальных координат, поскольку главные частоты линейных колебаний оболочки совпадают в данном случае с ее парциальными частотами.

Как и ранее учитываем, что вклад параметров f_3 и f_4 в «суммарный» прогиб (6.2) незначителен по сравнению с вкладом основных параметров f_1 и f_2 . Определяя функции f_3 и f_4 из соответствующих «квазистатических» уравнений (6.7) и подставляя их в первые два уравнения системы (6.7), получаем

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \left(p_1^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) f_1 + F_1(f_1, f_2) &= \frac{N_x r^2}{\rho} f_{10}; \\ \ddot{f}_2 + \left(p_2^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) f_2 + F_2(f_1, f_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \omega_0^2 + \frac{E}{8\rho} (r^4 + s^4) f_{10}^2 - \frac{N_0 r^2}{\rho} - \frac{2d_1^2}{3\omega_3^2}; \\ p_2^2 &= \omega_0^2 + \frac{F r^4}{8\rho} f_{10}^2 - \frac{N_0 r^2}{\rho}; \end{aligned} \quad (6.41)$$

F_1, F_2 — нелинейные функции, причем

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 f_1^2 + k_2 f_2^2 + k_3 f_1^3 + k_4 f_1 f_2^2; \\ F_2 &= g_1 f_1 f_2 + g_2 f_1^2 f_2 + g_3 f_2^3; \\ k_1 &= d_2 - \frac{d_1 e_3}{\omega_3^2} - \frac{d_5 e_1}{\omega_3^2}; \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$k_2 = d_4 - \frac{d_1 e_4}{\omega_3^2}; \quad k_3 = k_4 = d_7 - \frac{d_5^2}{3\omega_3^2};$$

$$g_1 = \frac{d_4}{2} - \frac{d_5 e_1}{\omega_3^2}; \quad g_2 = g_3 = d_7 - \frac{d_5^2}{3\omega_3^2}.$$

Отметим, что в коэффициентах k_i, g_i (6.42) не учтены малые члены, пропорциональные величине ω_3^{-4} .

Как и при анализе вынужденных колебаний (см. гл. 5), ограничимся рассмотрением лишь основного (параметрического) резонанса

$$p_1 \approx \frac{\nu}{2}; \quad p_2 \approx \frac{\nu}{2}. \quad (6.43)$$

В этой связи приближенное решение уравнений (6.40) ищем в виде [3]

$$\begin{aligned} f_1 &= a \cos \psi_1; & f_2 &= b \cos \psi_2; \\ \psi_1 &= \frac{vt}{2} + \theta_1; & \psi_2 &= \frac{vt}{2} + \theta_2, \end{aligned} \quad (6.44)$$

где a , b , θ_1 , θ_2 — медленно изменяющиеся функции времени, которые надлежит определить из системы

$$\begin{aligned} v \frac{da}{dt} &= -\alpha a \sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} k_4 ab^2 \sin 2\theta; \\ va \frac{d\theta_1}{dt} &= \left(p_1^2 - \frac{v^2}{4} \right) a - \alpha a \cos 2\theta_1 + \frac{3}{4} k_3 a^3 + \\ &\quad + \frac{k_4}{4} ab^2 (2 + \cos 2\theta); \\ v \frac{db}{dt} &= -\alpha b \sin 2\theta_2 - \frac{g_2}{4} a^2 b \sin 2\theta; \\ vb \frac{d\theta_2}{dt} &= \left(p_2^2 - \frac{v^2}{4} \right) b - \alpha b \cos 2\theta_2 + \frac{3}{4} g_3 b^3 + \\ &\quad + \frac{g_2}{4} a^2 b (2 + \cos 2\theta), \end{aligned} \quad (6.45)$$

где

$$\alpha = \frac{N_1 r^2}{2\rho}; \quad \theta = \theta_1 - \theta_2. \quad (6.46)$$

Приравнивая правые части уравнений (6.45) к нулю, устанавливаем, что стационарные критические режимы колебаний оболочки соответствуют одному из следующих решений:

$$1) \quad a_0 = 0; \quad b_0 = 0, \quad (6.47)$$

$$2) \quad a^2 = -\frac{4}{3k_3} \left(p_1^2 - \frac{v^2}{4} \pm \alpha \right); \quad b = 0, \quad (6.48)$$

$$3) \quad b^2 = -\frac{4}{3g_3} \left(p_2^2 - \frac{v^2}{4} \pm \alpha \right); \quad a = 0, \quad (6.49)$$

$$4) \quad a_1^2 = \frac{4k_4 \left(p_2^2 - \frac{v^2}{4} \mp \alpha \right) - 12g_3 \left(p_1^2 - \frac{v^2}{4} \pm \alpha \right)}{9k_3g_3 - k_4g_2}; \quad (6.50)$$

$$b_1^2 = \frac{4g_2 \left(p_1^2 - \frac{v^2}{4} \pm \alpha \right) - 12k_3 \left(p_2^2 - \frac{v^2}{4} \mp \alpha \right)}{9k_3g_3 - k_4g_2};$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{l_0 \pi}{2}; \quad l_0 = \pm 1, \pm 3, \dots$$

$$5) \quad a_2^2 = \frac{4}{3} \frac{k_4 \left(p_2^2 - \frac{v^2}{4} \mp \alpha \right) - g_3 \left(p_1^2 - \frac{v^2}{4} \mp \alpha \right)}{k_3 g_3 - k_4 g_2}; \quad (6.51)$$

$$b_2^2 = \frac{4}{3} \frac{k_3 \left(p_2^2 - \frac{v^2}{4} \mp \alpha \right) - g_2 \left(p_1^2 - \frac{v^2}{4} \mp \alpha \right)}{g_2 k_4 - g_3 k_3};$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{l_0 \pi}{2}, \quad l_0 = 0, \pm 2, \pm 4, \dots,$$

$$6) \quad a_3^2 = -\frac{4\alpha \sin 2\bar{\theta}_2}{g_2 \sin 2\bar{\theta}}; \quad b_3^2 = \frac{4\alpha \sin 2\bar{\theta}_1}{k_4 \sin 2\bar{\theta}}; \quad (6.52)$$

$$\sin 2\bar{\theta} \neq 0 \quad (\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)$$

($\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ — стационарные значения фаз, определяемые из (6.45)).

Первый режим (6.47) определяет состояние покоя оболочки. Однако этот режим неустойчив в областях

$$4(p_i^2 - \alpha) \leq v^2 \leq 4(p_i^2 + \alpha); \quad i = 1, 2. \quad (6.53)$$

Среди нетривиальных режимов колебаний оболочки наибольший интерес представляют режимы (6.48) — (6.50), которым в дальнейшем уделяется основное внимание. Режим (6.51) при принятых ранее предположениях нереализуем из-за соотношений между коэффициентами k_3, k_4, g_2, g_3 (знаменатель обращается в нуль). Лишь в случае $\omega_0 \equiv 0$ из соотношений (6.51) получаем имеющую смысл зависимость

$$a_2^2 + b_2^2 = -\frac{4}{3k_3} \left(\omega_0^2 - \frac{v^2}{4} \pm \alpha \right), \quad (6.54)$$

идентичную зависимостям $a^2 = a^2(v^2)$ (6.48) и $b^2 = b^2(v^2)$ (6.49), в которых надлежит принять $f_{10} = 0$.

Что касается решений (6.52), то в качественном отношении оно аналогично решению (6.50), которое будет подробно рассматриваться в следующем параграфе. Ниже исследуются решения (6.48) и (6.49). Очевидно, что каждое из них легко получить на основании анализа уравнений (6.40), если поочередно «заморозить», т. е. приравнять к нулю, координаты f_2 и f_1 .

Поскольку обычно $k_3 < 0$, то амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), определенные уравнениями (6.48) и (6.49), наклонены влево, как показано на рис. 6.5. При этом

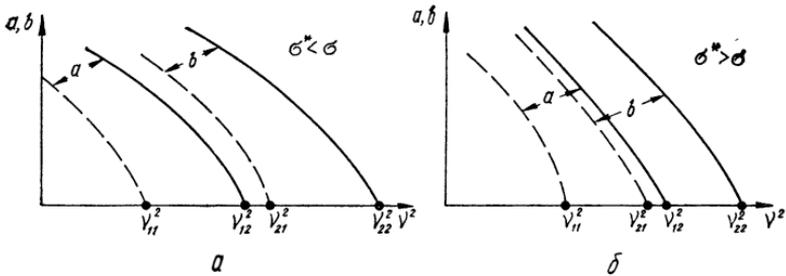


Рис. 6.5

нижние ветви АЧХ $a = a(v)$ и $b \cong b(v)$ при отсутствии нелинейной связанности обобщенных координат оболочки f_1 и f_2 , отвечали бы неустойчивым (нереализуемым) режимам параметрических колебаний, верхние — устойчивым. Наличие связанности координат приведет, как и при вынужденных колебаниях, к появлению дополнительных («нетрадиционных») областей неустойчивости, вследствие чего некоторые участки верхних ветвей АЧХ будут нереализуемы.

Для выяснения этого вопроса составим уравнения в вариациях, используя исходные уравнения оболочки (6.40) и соответствующие решения (6.48) и (6.49). Уравнения в вариациях получаем тем же способом, что и в предыдущей главе, т. е. полагаем

$$f_1 = a \cos\left(\frac{vt}{2} + \theta_1\right) + \xi; \quad f_2 = b \cos\left(\frac{vt}{2} + \theta_2\right) + \eta. \quad (6.55)$$

В результате получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + (p_1^2 - 2\alpha \cos vt) \xi + \left(2k_1 a \cos \psi_1 + \frac{3}{2} k_3 a^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} k_3 a^2 \cos 2\psi_1 + \frac{k_4}{2} b^2 + \frac{k_4}{2} b^2 \cos 2\psi_2\right) \xi + \\ + [2k_2 b \cos \psi_2 + k_4 ab \cos (vt + \theta_2 + \theta_1) + \\ + k_4 ab \cos (\theta_1 - \theta_2)] \eta = 0; \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + (p_2^2 - 2\alpha \cos vt) \eta + [g_1 b \cos \psi_2 + g_2 ab \cos (vt + \theta_1 + \theta_2) + \\ + g_2 ab \cos (\theta_1 - \theta_2)] \xi + \left[g_1 a \cos \psi_1 + \frac{g_2}{2} a^2 + \frac{g_2}{2} a^2 \cos 2\psi_1 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} g_3 b^2 + \frac{3}{2} g_3 b^2 \cos 2\psi_2 \right] \eta = 0; \end{aligned}$$

$$\psi_i = \frac{vt}{2} + \theta_i, \quad i = 1, 2.$$

Если в первом уравнении (6.56) положим $b = 0$, а во втором $a = 0$, то на основании анализа этих уравнений можно получить «традиционные» области неустойчивости, которые обуславливают нереализуемость нижних (штриховых) ветвей АЧХ $a = a(\nu)$ и $b = b(\nu)$, показанных на рис. 6.5.

Аналитически эти области можно записать так:

$$\begin{aligned}
 & p_1^2 + \frac{3k_3 a^2}{2} - \left(\alpha \mp \frac{3k_3 a^2}{4} \right) \leq \\
 & \leq \frac{\nu^2}{4} \leq p_1^2 + \frac{3k_3 a^2}{2} + \left(\alpha \mp \frac{3k_3 a^2}{4} \right); \\
 & p_2^2 + \frac{3g_3 b^2}{2} - \left(\alpha \mp \frac{3g_3 b^2}{4} \right) \leq \\
 & \leq \frac{\nu^2}{4} + p_2^2 + \frac{3g_3 b^2}{2} + \left(\alpha \mp \frac{3g_3 b^2}{4} \right).
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Верхние знаки в круглых скобках в первом и втором неравенствах (6.57) отвечают значениям стационарных фаз θ_1 и θ_2 , для которых $\cos \theta_i = 1$, нижние — $\cos \theta_i = -1$ (заметим, что при $\cos \theta_i = 1$ получаем нижние ветки АЧХ параметрических колебаний, а при $\cos \theta_i = -1$ — верхние).

«Дополнительные» области неустойчивости стационарных режимов параметрических колебаний, обусловленные нелинейной связанностью изгибных форм $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \sin sy \sin rx$, для решений (6.48) и (6.49) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}
 & p_2^2 + \frac{g_2 a^2}{2} - \left(\alpha \mp \frac{g_2 a^2}{4} \right) < \\
 & < \frac{\nu^2}{4} < p_2^2 + \frac{g_2 a^2}{2} + \left(\alpha \mp \frac{g_2 a^2}{4} \right); \\
 & p_1^2 + \frac{k_4 b^2}{2} - \left(\alpha \mp \frac{k_4 b^2}{4} \right) < \\
 & < \frac{\nu^2}{4} < p_1^2 + \frac{k_4 b^2}{2} + \left(\alpha \mp \frac{k_4 b^2}{4} \right).
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Характерной особенностью условий (6.58) является существенная зависимость границ областей неустойчивости стационарных режимов движения оболочки от амплитуд параметрических колебаний a и b . Это и обусловит появление на верхних ветках АЧХ (рис. 6.5) некоторых нереализуемых участков, вследствие чего возможна перестройка

движения оболочки на другой динамический режим. Проиллюстрируем это на таком примере.

Пример. Пусть параметры оболочки и ее нагружение определяются следующим образом:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \frac{l}{R} = 2,5; \quad \frac{h}{R} = 3,125 \cdot 10^{-3};$$

$$R = 0,16 \text{ м}; \quad f_{10} = h; \quad m = 1; \quad n = 6; \quad N_0 = 0; \quad N_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Нетрудно проверить, что в данном случае области неустойчивости тривиального решения (6.47), определяемые критериями (6.54), не пересекаются, поскольку $\sigma^* > \sigma$. На рис. 6.6 представлены амплитудно-частотные кривые $a = a(\nu^2)$ и $b = b(\nu^2)$, построенные по формулам (6.48) и (6.49) с учетом критериев неустойчивости (6.58) (область неустойчивости заштрихована). Устойчивым участкам кривых отвечают сплошные линии.

Как следует из рис. 6.6, при увеличении частоты параметрического возбуждения наблюдается «двойная» потеря устойчивости оболочки — вначале при $\nu = \nu_{11}$, когда возбуждается изгибная форма $C_1 \cos sy \times \sin rx$ с амплитудой $a = a(\nu_{11})$, затем при $\nu = \nu_{21}$, когда возбуждается сопряженная ей форма $C_2 \sin sy \sin rx$ с амплитудой $b = b(\nu_{21})$. Интересно отметить, что в небольшой области значений частот $\nu_{12} < \nu < \nu_{21}$ оболочка находится в покое (если нет каких-либо случайных внешних воздействий, способных «забросить» систему на верхнюю ветку АЧХ, ветку KP).

При обратном прохождении резонансной зоны наблюдается явление «двойного гистерезиса» (затягивания колебаний по частоте возбуждения ν). Вначале при $\nu_1^* < \nu < \nu_{22}$ реализуются колебания по форме $C_2 \sin sy \sin rx$ с амплитудой b , изменяющейся вдоль кривой PK . Затем в точке K амплитуда этих колебаний уменьшается скачком до нуля, и одновременно возбуждаются колебания по другой форме $C_1 \times \cos sy \sin rx$ с амплитудой a на частотной кривой RS . Перестройка

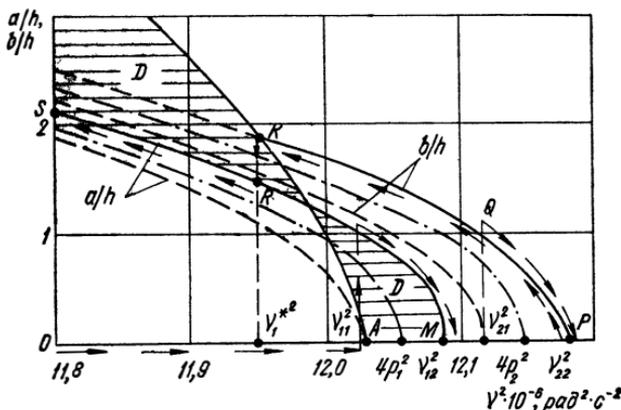


Рис. 6.6

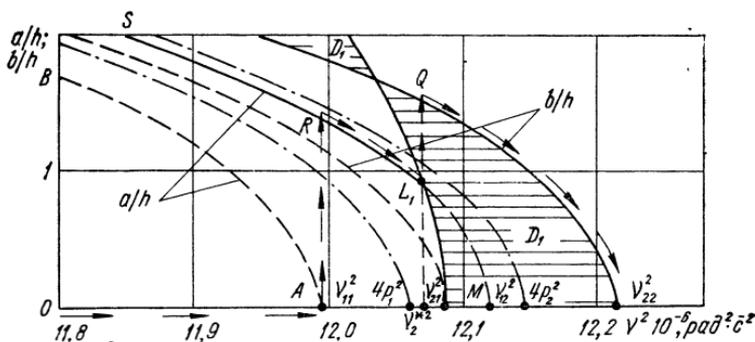


Рис. 6.7

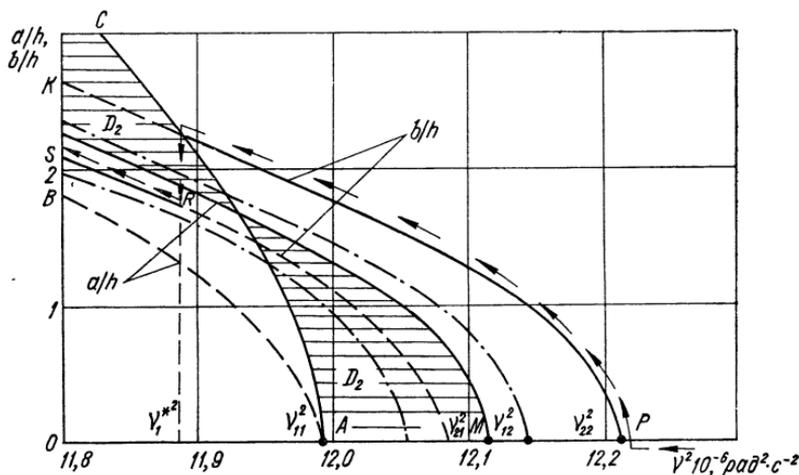


Рис. 6.8

поверхностной формы оболочки от одной изгибной формы к другой реализуется при

$$v^2 = v_1^{*2} = 2(3\rho_1^2 - \rho_2^2) - 8\alpha. \quad (6.60)$$

Рассмотрим случай, когда оболочка с параметрами (6.59) подвержена действию осевой пульсирующей нагрузки с несколько большей амплитудой, т. е. примем $N_1 = 4 \cdot 10^6$ Па. При этом области неустойчивости (6.54) частично пересекаются, что естественно внесет коррективы в расположение областей неустойчивости стационарных режимов. На рис. 6.7 и 6.8 изображены АЧХ и соответствующие области неустойчивости закритических режимов движения оболочки. Область D_1 на рис. 6.7 «лимитирует» неустойчивость колебаний с амплитудой $a = a(v)$, а область D_2 на рис. 6.8 является областью неустойчивости режима колебаний с амплитудой $b = b(v)$. Итак, поведение исследуемой оболочки отличается от предыдущего случая. Так при прямом скакировании частоты v (рис. 6.7) потеря устойчивости, как и прежде, произойдет при $v = v_{11}$, но перестройка оболочки на новый режим движе-

ния (по сопряженной изгибной форме) реализуется не при $\nu = \nu_{21}$, а несколько ранее, при $\nu = \nu_2^*$, причем

$$\nu_2^{*2} = 2(3\rho_2^2 - \rho_1^2) - 8\alpha. \quad (6.61)$$

В этот момент амплитуда a убывает скачком до нуля, возбуждаются одновременно колебания с амплитудой $b = b(\nu_2^*)$.

При обратном сканировании частоты ν (рис. 6.8) гистерезисное затягивание колебаний оболочки по форме $C_2 \sin sy \sin rx$ осуществляется до тех пор, пока частотная кривая KP не пересекается с границей области неустойчивости D_2 . В этот момент при $\nu = \nu_1^*$ (см. соотношение 6.60) происходит нестационарный переход упругой системы на новый динамический режим, амплитуда которого изменяется вдоль ветки RS .

В заключение предположим, что исследуемая оболочка с параметрами (6.59) является идеальной, т. е. $f_{10} = 0$. Поскольку $\rho_1^2 = \rho_2^2 = \omega_0^2$, то очевидно, что частоты ν_1^* (6.60) и ν_2^* (6.61) совпадут, причем

$$\nu_1^{*2} = \nu_2^{*2} = \nu^{*2} = 4\omega_0^2 - 8\alpha.$$

Верхние ветки АЧХ $a = a(\nu)$ и $b = b(\nu)$ кроме того, что совпадут, одновременно являются одной из границ областей неустойчивости обоих режимов (6.48) и (6.49) (рис. 6.9). Вторая граница области неустойчивости AC пройдет через точку Q , отвечающую частоте возбуждения ν^* .

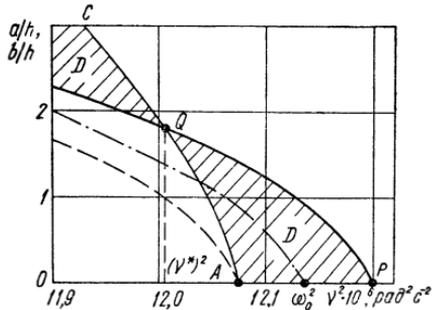


Рис. 6.9

§ 6.4. Движение типа «бегущая волна» при параметрическом резонансе

Исследуем теперь динамическое поведение рассматриваемой оболочки, соответствующее решению (6.50). Последнее может быть представлено еще так:

$$a_1^2 = \frac{2(\rho_2^2 - 3\rho_1^2) + \nu^2 \mp 8\alpha}{4k_3}; \quad (6.62)$$

$$b_1^2 = \frac{2(\rho_1^2 - 3\rho_2^2) + \nu^2 \pm 8\alpha}{4k_3}.$$

Заметим, что здесь каждый раз нужно брать либо верхние, либо нижние знаки.

Устойчивость решений (6.62) обуславливается устойчивостью тривиальных решений уравнений в вариациях, имею-

щих в данном случае вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \left(p_1^2 + \frac{3k_3 a^2}{2} + \frac{k_4 b^2}{2} + \alpha_1 \cos vt \right) \xi - \beta_1 \eta \sin vt &= 0; \\ \ddot{\eta} + \left(p_2^2 + \frac{3g_3 b^2}{2} + \frac{g_2 a^2}{2} + \alpha_2 \cos vt \right) \eta - \beta_2 \xi \sin vt &= 0, \end{aligned} \quad (6.63)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3k_3}{2} a_1^2 - \frac{k_4 b_1^2}{2} - \frac{N_1 r^2}{\rho}; & \beta_1 &= k_4 a_1 b_1; \\ \alpha_2 &= \frac{g_2 a_1^2}{2} - \frac{3g_3}{2} b_1^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho}; & \beta_2 &= g_2 a_1 b_1. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Полагая затем

$$\begin{aligned} \xi &= u_1 \cos \frac{vt}{2} + v_1 \sin \frac{vt}{2}; \\ \eta &= u_2 \cos \frac{vt}{2} + v_2 \sin \frac{vt}{2} \end{aligned} \quad (6.65)$$

и применяя метод усреднения, для определения функций $u_i, v_i, i = 1, 2$, получим следующую систему уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= Av_1 + Bu_2; & \frac{dv_1}{dt} &= Cu_1 + Dv_2; \\ \frac{du_2}{dt} &= Ev_2 + Fu_1; & \frac{dv_2}{dt} &= Gu_2 + Hv_1, \end{aligned} \quad (6.66)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha_1}{2\nu} - \frac{\left(p_{11}^{*2} - \frac{\nu^2}{4} \right)}{\nu}; & B &= -\frac{\beta_1}{2\nu}; \\ C &= \frac{\alpha_1}{2\nu} + \frac{\left(p_{11}^{*2} - \frac{\nu^2}{4} \right)}{\nu}; & D &= \frac{\beta_1}{2\nu}; \\ E &= \frac{\alpha_2}{2\nu} - \frac{\left(p_{22}^{*2} - \frac{\nu^2}{4} \right)}{\nu}; & F &= -\frac{\beta_2}{2\nu}; \\ G &= \frac{\alpha_2}{2\nu} + \frac{\left(p_{22}^{*2} - \frac{\nu^2}{4} \right)}{\nu}; & H &= \frac{\beta_2}{2\nu}; \end{aligned} \quad (6.67)$$

$$p_{11}^{*2} = p_1^2 + \frac{3k_3}{2} a_1^2 + \frac{k_4 b_1^2}{2};$$

$$p_{22}^{*2} = p_2^2 + \frac{3g_3}{2} b_1^2 + \frac{g_2 a_1^2}{2}.$$

Исследование устойчивости системы (6.66) эквивалентно исследованию устойчивости двух уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} = (AC + BF) u_1 + (AD + BE) v_2; \quad (6.68)$$

$$\frac{d^2 v_2}{dt^2} = (GF + HC) u_1 + (GE + HD) v_2.$$

Критерии устойчивости, легко полученные на основании анализа уравнений (6.68), имеют вид

$$N \geq 0; \quad M \leq -2\sqrt{N}, \quad (6.69)$$

где

$$N = (AG - BH)(EC - DF); \quad M = AC + BF + GE + HD. \quad (6.70)$$

Рассмотрим подробнее функциональные зависимости $a_1 = a_1(v)$ и $b_1 = b_1(v)$, определяемые формулами (6.62). Поскольку одновременно должны выполняться условия $a_1^2 \geq 0$ и $b_1^2 \geq 0$, то нетрудно видеть, что это возможно в частотной области

$$\begin{aligned} v^2 &\leq v_1^2 = 2(3p_1^2 - p_2^2) + 8\alpha; \\ v^2 &\leq v_2^2 = 2(3p_2^2 - p_1^2) - 8\alpha. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Пусть внешняя нагрузка N_1 такова, что

$$\alpha = \frac{N_1 r^2}{2\rho} = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2}, \quad (6.72)$$

т. е.

$$N_1 = \frac{\rho}{r^2} (p_2^2 - p_1^2). \quad (6.73)$$

В этом случае $a_1^2 \equiv b_1^2$ (с учетом верхних знаков в (6.62)). Следовательно, обе частотные кривые $a_1^2 = a_1^2(v^2)$ и $b_1^2 = b_1^2(v^2)$ выходят с одной точки M (рис. 6.10)

$$v_M^2 = 4(p_1^2 + \alpha) = 4(p_2^2 - \alpha) = v_{12}^2 = v_{21}^2, \quad (6.74)$$

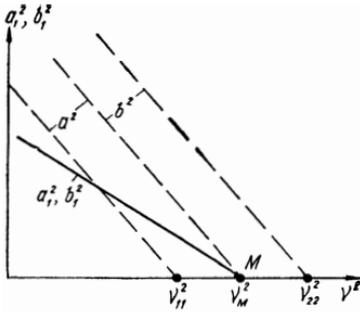


Рис. 6.10

причем

$$\begin{aligned}
 a_1^2 &= b_1^2 = \\
 &= -\frac{1}{k_3} \left(p_1^2 - \frac{v^2}{4} + \alpha \right) = \\
 &= -\frac{1}{g_3} \left(p_2^2 - \frac{v^2}{4} - \alpha \right).
 \end{aligned}
 \tag{6.75}$$

Штриховыми линиями на (рис. 6.10) изображены изолированные решения для

амплитуд a и b , определяемые по соотношениям (6.48), (6.49).

Таким образом, если учесть фазовые соотношения (6.50), движение оболочки представляет собой «идеальную» (с постоянными амплитудой и фазовой скоростью) бегущую в окружном направлении волну, поскольку динамический прогиб ω_1 имеет вид

$$\omega_1 = a \cos \left(sy - \frac{vt}{2} - \theta_1 \right) \sin rx + f_3 \sin^2 rx + f_4. \tag{6.76}$$

Если

$$\alpha \neq \frac{p_2^2 - p_1^2}{2},$$

то происходит «расслоение» указанных частотных кривых $a(v)$ и $b(v)$ ($a \neq b$), причем одновременно действительные значения амплитуд a и b возможны при $v^2 < 2(3p_2^2 - p_1^2) - 8\alpha$, если $(p_2^2 - p_1^2) < 2\alpha$, $\sigma^* < \sigma$; и при $v^2 < 2(3p_1^2 - p_2^2) + 8\alpha$, если $p_2^2 - p_1^2 > 2\alpha$.

Движение оболочки в данном случае представляет собой обобщенную бегущую волну, поскольку из-за $a \neq b$ амплитуда и фазовая скорость этой волны суть периодические функции времени.

К аналогичным результатам приходим и в случае рассмотрения нижних знаков в выражениях (6.62).

В заключение рассмотрим численный пример, полагая что оболочка с параметрами (6.58) является идеальной ($f_{10} = 0$) и подвержена пульсирующему осевому сжатию с амплитудой $N_1 = 2 \cdot 10^6$ Па. Зависимости $a_1 = a_1(v^2)$ и $b_1 = b_1(v^2)$, построенные по формулам (6.62), показаны на рис. 6.11 (штриховой линией изображены частотные кривые

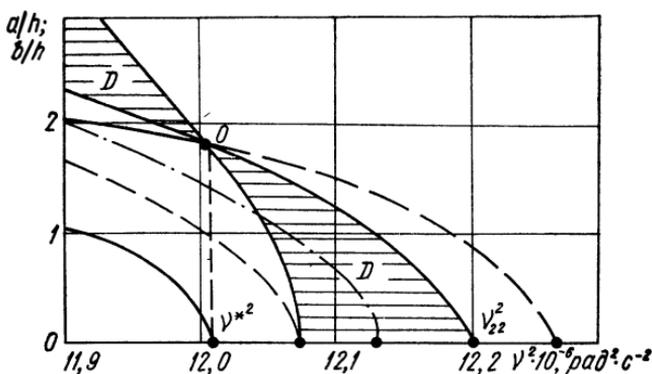


Рис. 6.11

$a = a(v^2)$, $b = b(v^2)$, соответствующие изолированным возбуждениям сопряженных изгибных форм (см. рис. 6.9)).

Проведенное по критериям (6.69) исследование показывает, что движение типа бегущей волны будет устойчиво при

$$v < v^* = \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{4N_1 r^2}{\rho}}. \quad (6.77)$$

т. е. в области существования положительных корней для a_1 и b_1 .

При $v^* < v < v_{22}$ устойчивым движением оболочки будет обобщенная стоячая волна, полученная в результате наложения двух изгибных форм $C_1 \cos sy \sin rx$ и $C_2 \sin sy \times \times \sin rx$ со сдвигом по фазе, равным

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi l}{2},$$

где $l = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

Динамический прогиб ω_1 в этой области математически выражается так:

$$\omega_1 = a_0 \cos(sy - \varphi_0) \sin rx \cos\left(\frac{vt}{2} + \theta_1\right) + f_3 \sin^2 rx + f_4, \quad (6.78)$$

где

$$a_0^2 = a_2^2 + b_2^2 = -\frac{4}{3k_3} \left(\omega_0^2 - \frac{v^2}{4} + \alpha \right); \quad (6.79)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{b_2}{a_2}. \quad (6.80)$$

Как видно из (6.78), функция прогиба ω_1 будет определена, если известен постоянный фазовый сдвиг φ_0 . Его мы будем знать, если в начальный момент времени заданы либо амплитуда a_2 , либо амплитуда b_2 .

§ 6.5. Резонансные колебания оболочки при комбинированном периодическом нагружении

В реальных условиях эксплуатации тонкостенные оболочечные элементы конструкций нередко подвергаются комбинированному нагружению — сочетанию продольных и поперечных периодических усилий. Так, например, корпус летательного аппарата, помимо продольных пульсаций сил тяги, испытывает обычно воздействие интенсивных поперечных вибрационных нагрузок. Последние обусловлены неуравновешенностью силовых установок, аэродинамическим давлением, вызывающим флаттерную (колебательную) неустойчивость, и т. д. Поэтому представляет интерес исследование динамических характеристик оболочек, находящихся в условиях сложного продольно-поперечного нагружения. Рассмотрим такую задачу применительно к замкнутой круговой цилиндрической оболочке, полагая, что она подвержена одновременно действию осевой сжимаемой силы

$$N_x = N_0 + N_1 \cos vt; \quad N_0, N_1 = \text{const} > 0 \quad (6.81)$$

и внешнего поперечного давления

$$q = q_0(x, y) \cos \Omega t. \quad (6.82)$$

Выбирая в качестве исходных уравнений движения оболочки уравнения (4.11) и представляя динамический и начальный прогибы ω_1 и ω_0 соответственно в форме

$$\omega_1 = f_1 \cos sy \sin rx + f_2 \sin sy \sin rx + f_3 \sin^2 rx + f_4; \quad (6.83)$$

$$\omega_0 = f_{10} \cos sy \sin rx \quad (6.84)$$

для определения обобщенных перемещений $f_1(t)$ и $f_2(t)$, входящих в (6.83), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \left(p_1^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) f_1 + k_1 f_1^2 + k_2 f_2^2 + k_3 f_1^3 + k_4 f_1 f_2^2 = \\ = \frac{N_x r^2}{\rho} f_{10} + E_1 \cos \Omega t; \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$\ddot{f}_2 + \left(p_2^2 - \frac{N_1 r^2}{\rho} \cos vt \right) f_2 + g_1 f_1 f_2 + g_3 f_2^3 = E_2 \cos \Omega t,$$

где

$$E_1 = \frac{2}{\pi R l \rho h} \int_0^{2\pi R} \int_0^{2\pi R} q(x, y, t) \cos sy \sin rx \, dx dy; \quad (6.86)$$

$$E_2 = \frac{2}{\pi R l \rho h} \int_0^{2\pi R} \int_0^{2\pi R} q(x, y, t) \sin sy \sin rx \, dx dy.$$

Рассмотрим интересный с практической точки зрения случай, когда частоты внешних воздействий ν и Ω удовлетворяют резонансному соотношению

$$\nu = 2\Omega; \quad \nu \approx p_i, \quad i = 1, 2, \quad (6.87)$$

создающему предпосылки для возбуждения как параметрических колебаний в главной зоне динамической неустойчивости [3], так и резонансных колебаний с частотой Ω .

Полагая

$$f_1 = a \cos \psi_1; \quad f_2 = b \cos \psi_2; \quad \psi_{1,2} = \Omega t + \theta_{1,2}, \quad (6.88)$$

в первом приближении получаем на основании (6.85) следующую систему уравнений относительно амплитуд a , b и фаз θ_1 , θ_2 :

$$\begin{aligned} \nu \frac{da}{dt} &= -\mu_1 p_1^2 a \sin 2\theta_1 + \frac{1}{4} k_4 ab^2 \sin 2\theta - E_1 \sin \theta_1; \\ \nu a \frac{d\theta_1}{dt} &= (p_1^2 - \Omega^2) a - \mu_1 p_1^2 a \cos 2\theta_1 + \frac{3}{4} k_3 a^3 + \\ &+ \frac{1}{2} k_4 ab^2 + \frac{1}{4} k_4 ab^2 \cos 2\theta - E_1 \cos \theta_1; \\ \nu \frac{db}{dt} &= -\mu_2 p_2^2 b \sin 2\theta_2 - \frac{1}{4} g_2 a^2 b \sin 2\theta - E_2 \sin \theta_1; \\ \nu b \frac{d\theta_2}{dt} &= (p_2^2 - \Omega^2) b - \mu_2 p_2^2 b \cos 2\theta_2 + \frac{3}{4} g_3 b^3 + \\ &+ \frac{1}{2} g_2 a^2 b + \frac{1}{4} g_2 a^2 b \cos 2\theta - E_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Здесь

$$\theta = \theta_1 - \theta_2; \quad \mu_1 = \frac{N_1 r^2}{\rho p_1^2}; \quad \mu_2 = \frac{N_1 r^2}{\rho p_2^2}.$$

Пусть $E_2 = 0$, т. е. поперечная нагрузка возбуждает непосредственно лишь одну изгибную форму, а именно $C_1 \cos sy \sin rx$. Приравнявая в этом случае правые части урав-

нений (6.89) к нулю, находим из них амплитудно-частотные соотношения вида

$$[\alpha + G(a)] \{E_1^2 - a^2 [\alpha - G(a)]^2\} = 0; \quad b = 0, \quad (6.90)$$

где

$$\alpha = \frac{N_1 r^2}{\rho}; \quad G(a) = \frac{3}{4} k_3 a^2 + p_1^2 - \Omega^2.$$

Отсюда следует, АЧХ оболочки при комбинированном нагружении соответствует трем независимым уравнениям:

$$\begin{aligned} 1) \quad \alpha - G(a) &= \frac{E_1}{a}; \\ 2) \quad \alpha - G(a) &= -\frac{E_1}{a}; \\ 3) \quad \alpha + G(a) &= 0, \end{aligned} \quad (6.91)$$

причем корни третьего уравнения должны удовлетворять условию

$$a^2 \geq \frac{E_1^2}{4\alpha^2}. \quad (6.92)$$

На рис. 6.12 изображен общий вид амплитудно-частотных кривых (6.91), построенных с учетом (6.59) (номера кривых на рисунке соответствуют номерам уравнений (6.91)). При этом использованы обозначения

$$\Omega_{11}^2 = p_1^2 - \alpha; \quad \Omega_{12}^2 = p_1^2 + \alpha; \quad a_0^2 = \frac{E_1^2}{4\alpha^2}. \quad (6.93)$$

Уравнение «скелетной» кривой TS следующее:

$$\Omega^2 = \Omega_{11}^2 + \frac{3}{4} k_3 a^2. \quad (6.94)$$

Таким образом, АЧХ состоит из участков, характерных как для чисто вынужденных колебаний (CPQ и LDM), так и для параметрических колебаний (VD). Однако в отличие от рассматривавшихся в пятой главе вынужденных колебаний, скелетная кривая TS не проходит через основную «резонансную» частоту $\Omega^2 = p_1^2$, а смещена влево по частотной оси Ω^2 на величину α и совпадает с нижней веткой АЧХ изолированных параметрических колебаний оболочки (когда $E_1 = 0$) (см. рис. 6.6). В то же время верхняя ветка АЧХ параметрических колебаний VK реализуется не при всех

частотах $\Omega^2 \leq \Omega_{12}^2$. Такие колебания возможны лишь при $a^2 \geq a_0^2$, т. е. при

$$\Omega^2 \leq \Omega_D^2 = p_1^2 + \alpha + \frac{3k_3 E_1^2}{16a^2}. \quad (6.95)$$

Для исследования устойчивости стационарных режимов колебаний оболочек, отвечающих частотным кривым 1—3, вернемся к исходным уравнениям (6.85). Составляя для них уравнения в вариациях и анализируя их, устанавливаем, что решения первых двух уравнений (6.91) неустойчивы в двух областях

$$\Omega_{11}^2 + \frac{9}{4} k_3 a^2 < \Omega^2 < \Omega_{12}^2 + \frac{3}{4} k_3 a^2; \quad (6.96)$$

$$\Omega_{21}^2 + \frac{3}{4} g_2 a^2 < \Omega^2 < \Omega_{22}^2 + \frac{9}{4} a^2,$$

причем

$$\Omega_{21}^2 = p_2^2 - \alpha; \quad \Omega_{22}^2 = p_2^2 + \alpha. \quad (6.97)$$

По виду области (6.96) сходны с областями неустойчивости, полученными ранее при исследовании параметрических колебаний, соответствующих основному демультипликационному резонансу (см. § 6.3).

Остановимся несколько подробнее на анализе устойчивости решений третьего уравнения (6.91). Уравнения в вариациях в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + p_1^2 \left[1 - 2\mu_1 \cos vt + \frac{3k_3}{2p_1^2} a^2 + \right. \\ \left. + \frac{3k_3}{2p_1^2} a^2 \cos(vt + 2\theta_1) \right] \xi = 0; \\ \ddot{\eta} + p_2^2 \left[1 - 2\mu_2 \cos vt + \frac{g_2}{2p_2^2} a^2 + \right. \\ \left. + \frac{g_2}{2p_2^2} a^2 \cos(vt + 2\theta_1) \right] \eta = 0, \end{aligned} \quad (6.98)$$

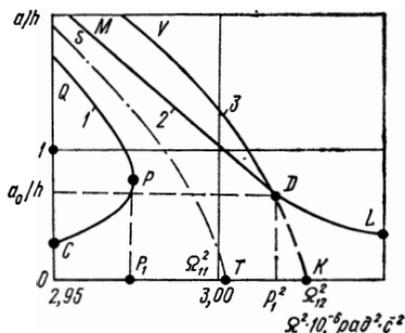


Рис. 6.12

где стационарная фаза θ_1 удовлетворяет условию

$$\cos \theta_1 = -\frac{E_1}{2\alpha a}. \quad (6.99)$$

Систему (6.98) с учетом (6.99) можно преобразовать к такой форме:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + p_1^2 \left[1 + \frac{3k_3}{2p_1^2} a^2 - A \cos(vt + \psi_1) \right] \xi &= 0; \\ \ddot{\eta} + p_2^2 \left[1 + \frac{g_2}{2p_2^2} a^2 - B \cos(vt + \psi_2) \right] \eta &= 0. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{p_1^2} \sqrt{\left(2\alpha + \frac{3}{2} k_3 a^2 \right)^2 - \frac{3k_3 E_1^2}{\alpha}}; \\ B &= \frac{1}{p_2^2} \sqrt{\left(2\alpha + \frac{g_2}{2} a^2 \right)^2 - \frac{g_2 E_1^2}{\alpha}}; \end{aligned} \quad (6.101)$$

ψ_1, ψ_2 — некоторые постоянные фазы, не влияющие на устойчивость тривиальных решений системы (6.98).

Таким образом, критерии неустойчивости стационарных колебаний оболочки, соответствующие кривой 3 на рис. 6.12, имеют вид

$$\begin{aligned} p_1^2 + \frac{3}{2} k_3 a^2 - \frac{1}{2} A p_1^2 < \Omega^2 < p_1^2 + \frac{3}{2} k_3 a^2 + \frac{1}{2} A p_1^2; \\ p_2^2 + \frac{1}{2} g_2 a^2 - \frac{1}{2} B p_2^2 < \Omega^2 < p_2^2 + \frac{1}{2} g_2 a^2 + \frac{1}{2} B p_2^2. \end{aligned} \quad (6.102)$$

Области неустойчивости в этом случае в отличие от областей (6.96) зависят как от величины амплитуды поперечного возбуждения E_1 , так и от уровня параметрического возбуждения N_1 .

На рис. 6.13 изображены АЧХ для оболочки с параметрами (6.59) в случае $Q_1 = 31,1$ Па и $N_1 = 3,4 \cdot 10^6$ Па ($Q_1 = E_1 \rho h$). Устойчивым участкам отвечают сплошные кривые, неустойчивым — штриховые. Кроме того, на рис. 6.13, а показаны области неустойчивости (6.96), обозначенные соответственно A_1, B_1 , а на рис. 6.13, б — области (6.102), обозначенные A_2, B_2 .

Проследим за движением оболочки при медленном прямом и обратном прохождении резонансной зоны. При прямом сканировании частоты Ω , начиная с малых значений,

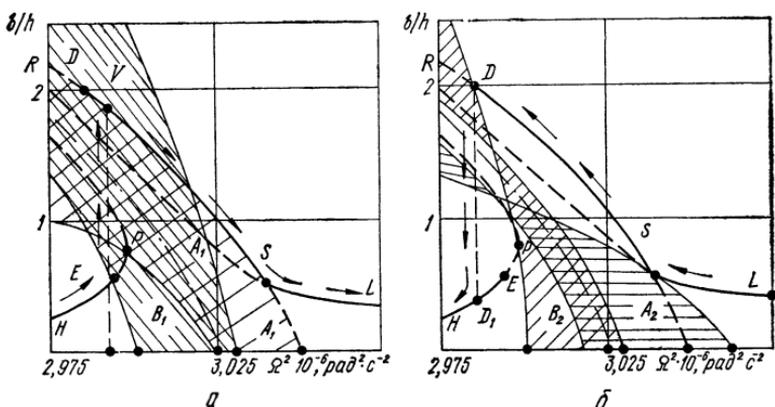


Рис. 6.14

лебаний $a = a_0$, $b = 0$ невозможны. Далее, при $\Omega > \Omega_E$ вновь реализуются вынужденные колебания такого же вида, как и на участке CP , но $\theta_1 = (2k - 1)\pi$.

При обратном медленном прохождении резонансной зоны наблюдается аналогичная картина (рис. 6.13, б) с той лишь разницей, что затягивание колебаний вдоль частотной кривой DR может происходить левее точки V , т. е. при $\Omega < \Omega_V$.

Если принять $E_1 = 0$, $E_2 \neq 0$, т. е. внешняя нагрузка возбуждает вторую сопряженную форму колебаний $C_2 \times \sin sy \sin rx$, то из-за того, что $p_2 > p_1$ области неустойчивости A_1 и B_1 (соответственно A_2 и B_2), изображенные на рис. 6.13, меняются в данном случае местами (рис. 6.14). Срыв вынужденных колебаний с амплитудой b осуществляется при этом в точке E , причем $\Omega_E < \Omega_D$. Участки частотных кривых VS и SL соответствуют устойчивым колебаниям (при построении графиков и областей неустойчивости на рис. 6.14 предполагалось $Q_2 = 31,1$ Па). В точке S происходит перестройка фазы колебаний системы $\theta_1^* = \arccos\left(-\frac{E_2}{2\alpha b}\right)$, реализующейся на кривой VS на стационарную фазу $\theta_2 = (2k - 1)\pi$, которая соответствует амплитудно-частотной кривой SL .

Важно отметить, что обратное затягивание колебаний вдоль частотной кривой SR возможно лишь до частоты $\Omega = \Omega_D$ (рис. 6.14, б), при которой происходит срыв колебаний и переход на установившиеся колебания с фазой $\theta_2 = 2k\pi$ и амплитудой b , отвечающей кривой EH .

Для определения поведения оболочки в зонах неустойчивости одномодовых режимов (когда $a \neq 0$, $b = 0$ либо

$b \neq 0, a = 0$) найдем нетривиальное стационарное решение системы (6.89) вида $a \neq 0, b = 0$. В случае $E_1 \neq 0, E_2 = 0$ оно имеет вид

$$a_1^2 = \frac{E_1^2}{\left(p_1^2 - \alpha - \Omega^2 + \frac{3}{4} k_3 a_1^2 + \frac{1}{4} k_4 b_1^2\right)^2}; \quad (6.104)$$

$$b_1^2 = \frac{4}{3g_2} \left(\Omega^2 - p_2^2 - \alpha - \frac{g_2}{4} a_1^2\right).$$

Соответствующие зависимости $a_1 = a_1(\Omega^2)$ (кривая $E\Phi$) и $b_1 = b_1(\Omega^2)$ (кривая KJG) при $\theta_1 = k\pi$ изображены на рис. 6.15, где для сравнения показаны также АЧХ (6.91). Таким образом, в области $\Omega_D < \Omega < \Omega_E$ движение оболочки представляет собой бегущую волну, наложенную на осесимметричный прогиб, поскольку динамический прогиб w_1 в этом случае можно записать в виде

$$w_1 = C(t) \cos[sy - \varphi(t)] \sin rx + f_3 \sin^2 rx + f_4.$$

Здесь

$$C(t) = \sqrt{a_1^2 \cos^2 \Omega t + b_1^2 \sin^2 \Omega t};$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg} \Omega t.$$

При частоте $\Omega = \Omega_D$ наблюдается «разрыв» решений — переход из одномодового режима на режим бегущей волны происходит скачком. В случае же $\Omega = \Omega_E$ имеет место плавный переход из одного режима в другой.

Режим типа бегущей волны, аналогичный описанному выше, нетрудно найти и для случая $E_1 = 0, E_2 \neq 0$. Ампли-

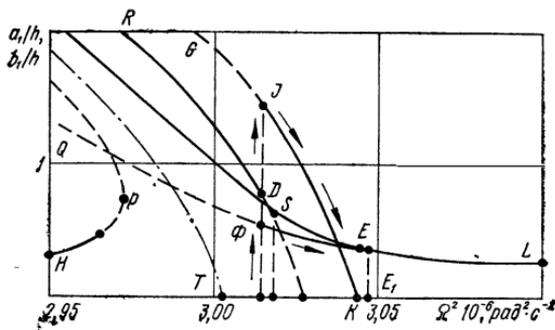


Рис. 6.15

тудные значения a_2 и b_2 составляющих этой волны имеют вид

$$b_2 = \frac{E_2^2}{\left(p_2^2 - \alpha - \Omega^2 + \frac{3}{4} g_3 b_2^2 + \frac{g^2}{4} a_2^2\right)^2}; \quad (6.105)$$

$$a_2^2 = \frac{4}{3k_3} \left(\Omega^2 - p_1^2 - \alpha - \frac{1}{4} k_4 b_2^2\right).$$

Г Л А В А 7

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ

Настоящая глава содержит краткое изложение некоторых новых вопросов динамики цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. Идейная общность рассматриваемых ниже задач заключается в представлении оболочек многомерными моделями, позволяющими, как известно, исследовать взаимодействие изгибных форм при колебаниях и выявить специфические формы движения оболочек, отличающиеся от традиционных движений типа стоячих волн. Наличие жидкого наполнителя может существенно повлиять как на процессы взаимодействия форм, так и на общий характер колебательных и волновых движений несущей оболочки.

Заранее необходимо отметить, что читатель не найдет в главе детального обсуждения проблем, связанных с построением и обоснованием расчетных моделей упруго-жидкостных систем, выбором методов их исследования, анализом имеющихся теоретических и экспериментальных результатов. Все эти проблемы в той или иной мере отражены в известных монографиях советских и зарубежных авторов: В. В. Болотина, Г. Н. Микишева и Б. И. Рабиновича, Н. Н. Моисеева и В. В. Румянцева, К. С. Колесникова, Г. С. Нариманова, Л. В. Докучаева и И. А. Луковского, Абрамсона и в других обобщающих публикациях (соответствующие ссылки на работы перечисленных авторов можно найти, например, в монографиях [10, 11, 34, 35, 39, 45]).

В данной главе при решении конкретных задач используются апробированные и достаточно простые линейные модели систем оболочка — жидкость, полученные с учетом традиционных ограничений и предположений относительно свойств несущего тела и наполнителя, характера деформирования тела и свободной поверхности жидкости и т. д. На основании анализа этих моделей решаются задачи по определению форм и частот свободных колебаний оболочек, частично заполненных жидкостью, рассматриваются волновые формы движений оболочки с жидкостью, обусловленные как заданием некоторых начальных условий, так и периодическим воздействием на оболочку.

При написании этой главы авторами использовались некоторые материалы, представленные Т. С. Краснопольской.

§ 7.1. Формы и частоты свободных колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью

Рассмотрим задачу об аналитическом представлении форм изгибных колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью (рис. 7.1), а также об определении соб-

ственных частот системы оболочка — жидкость. Информация об этих характеристиках представляет существенный интерес не только с точки зрения выявления и прогнозирования возможных резонансных ситуаций в совокупной упруго-жидкостной системе при действии на нее внешних периодических или почти периодических (в том числе параметрического типа) нагрузок. Она необходима также для приближенного решения нелинейных задач динамики оболочек с жидкостью, поскольку позволит выявить возможные формы колебательных движений и оболочки и свободной поверхности жидкости, связанные с «внутренними» свойствами рассматриваемой системы (такими, например, как круговое поперечное сечение несущего тела, несжимаемость жидкого наполнителя и т. д.), а также установить особенности распределения частот, отвечающих указанным формам. В первом приближении эти формы характеризуют движение оболочки и свободной поверхности жидкости при их немалых перемещениях.

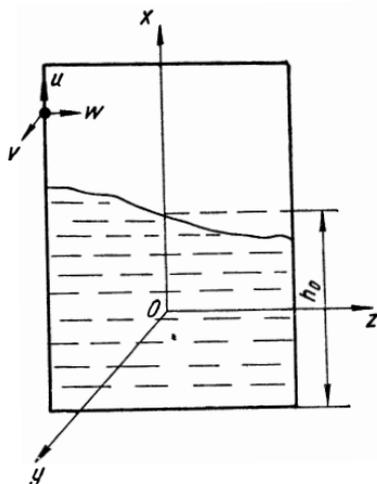


Рис. 7.1

Итак, уравнения движения оболочки, содержащей жидкость, запишем в следующем виде:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 \omega - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{q}{h} - \frac{P(x, y, t)}{h};$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad (7.1)$$

где

$$P(x, y, t) = \sigma(x) p(x, y, t);$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq h_0, \\ 0, & \text{если } h_0 < x; \end{cases} \quad (7.2)$$

$p(x, y, t)$ — поперечное гидродинамическое давление на стенку оболочки; h_0 — уровень заполнения оболочки жидкостью.

Систему (7.1) можно привести к одному разрешающему уравнению восьмого порядка относительно функции

динамического прогиба:

$$\frac{D}{h} \nabla^3 \omega + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{h} \nabla^4 (q - P). \quad (7.3)$$

Предполагая оболочку шарнирно опертой на обоих торцах, прогиб ω представим в виде разложения по формам собственных колебаний соответствующей «сухой» оболочки, т. е. оболочки без жидкости,

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(f_1^{n,m} \cos n\Theta \sin \frac{m\pi x}{l} + f_2^{n,m} \sin n\Theta \sin \frac{m\pi x}{l} \right), \quad (7.4)$$

где $\Theta = \frac{y}{R}$.

Для определения гидродинамического давления $p(x, y, t)$ сформулируем задачу о движении жидкости, заполняющей оболочку. Считая жидкость идеальной и несжимаемой, движение жидкости безвихревым, а поле массовых сил потенциальным, введем в рассмотрение потенциал скоростей частиц жидкости φ , т. е.

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi, \quad (7.5)$$

где \vec{v} — векторное поле скоростей частиц жидкости.

Для потенциала φ задача записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \quad \text{в } Q; \\ 1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= u_\nu \quad \text{на } \Sigma; \\ 2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{на } S_0; \\ 3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= - \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad \text{на } S_1; \\ 4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gx &= 0 \quad \text{на } \Sigma. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Здесь Q — объем, заполняемый жидкостью; S_0 — поверхность дна оболочки; S_1 — смачиваемая боковая поверхность оболочки; ν — орт внешней нормали; u_ν — нормальная к свободной поверхности составляющая скорости жидкости; Σ — свободная возмущенная поверхность жидкости.

ти. Заметим, что положительным полагаем прогиб w , направленный к центру кривизны оболочки.

Кроме того, помимо (7.6) потенциал φ должен удовлетворять внутри области Q интегралу Лагранжа — Коши, а именно:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho_0} + gx = 0, \quad (7.7)$$

где ρ_0 — плотность жидкости; p_0 — давление на свободной поверхности жидкости.

Отыскивать потенциал φ будем в виде суммы двух функций

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (7.8)$$

каждая из которых является решением уравнения Лапласа при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} &= - \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при } r = R; \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0; \\ \varphi_1 &= 0 \quad \text{при } x = h_0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} &= 0 \quad \text{при } r = R; \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } x = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

При этом функция φ_2 должна быть такой, чтобы в сумме с φ_1 выполнялось условие

$$\frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (7.11)$$

Здесь $\xi = \xi(r, \Theta, t)$ — возмущение свободной поверхности жидкости.

Решая краевую задачу и определяя потенциал φ_1 в линейном приближении, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & - \sum_{\substack{k,n=0 \\ m=1}}^{\infty} \frac{2j_1^{n,m} I_n(\alpha_k r) \cos \alpha_k x \cos n\Theta}{h_0 \alpha_k I_n'(\alpha_k R)} \int_0^{h_0} \cos \alpha_k x \sin \frac{m\pi}{l} x dx - \\ & - \sum_{\substack{k=0 \\ n,m=1}}^{\infty} \frac{2j_2^{n,m} I_n(\alpha_k r) \cos \alpha_k x \sin n\Theta}{h_0 \alpha_k I_n'(\alpha_k R)} \int_0^{h_0} \cos \alpha_k x \sin \frac{m\pi}{l} x dx. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Здесь $I_n(\alpha_k r)$ — функция Бесселя I рода n -го порядка мнимого аргумента, $\alpha_k = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{h_0}$. Аналогично отыскиваем значение потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \sum_{\substack{j=1 \\ n=0}} B_{1,j}^{(n)}(t) \operatorname{ch} \beta_{n,j} x J_n(\beta_{n,j} r) \cos n\Theta + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ n=1}}^{\infty} B_{2,j}^{(n)}(t) \operatorname{ch} \beta_{n,j} x J_n(\beta_{n,j} r) \sin n\Theta, \end{aligned} \quad (7.13)$$

где $J_n(\beta_{n,j} r)$ — функции Бесселя n -го порядка; β_{nj} = собственные числа, определяемые как корни уравнения

$$\frac{dJ_n(\beta_{n,j} r)}{dr} = 0 \quad \text{при } r = R. \quad (7.14)$$

Входящие сюда неизвестные функции $B_{1j}^{(n)}$ и $B_{2j}^{(n)}$ следует найти из уравнений

$$\begin{aligned} & \ddot{B}_{1,j}^{(n)} + g\beta_{n,j} \operatorname{th}(\beta_{n,j} h_0) B_{1j}^{(n)} + \\ & + \frac{2(\beta_{n,j})^2 Rg \sum_{m=1}^{h_0} f_1^{n,m} \int_0^{h_0} \operatorname{ch}(\beta_{n,j} x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx}{\operatorname{ch}^2(\beta_{n,j} h_0) (\beta_{n,j}^2 R^2 - n^2) J_n(\beta_{n,j} R)} = 0; \\ & \ddot{B}_{2,j}^{(n)} + g\beta_{n,j} \operatorname{th}(\beta_{n,j} h_0) B_{2j}^{(n)} + \\ & + \frac{2(\beta_{n,j})^2 Rg \sum_{m=1}^{h_0} f_2^{n,m} \int_0^{h_0} \operatorname{ch}(\beta_{n,j} x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx}{\operatorname{ch}^2(\beta_{n,j} h_0) (\beta_{n,j}^2 R^2 - n^2) J_n(\beta_{n,j} R)} = 0, \end{aligned} \quad (7.15)$$

полученных на основании (7.6) и интеграла Лагранжа — Коши (7.7).

Таким образом, если известны параметры движения оболочки $f_1^{n,m}$ и $f_2^{n,m}$, как функции времени, то, используя уравнения (7.15) и соотношения (7.12), можно определить значения потенциалов φ_1 и φ_2 , а значит, найти общий потенциал φ и гидродинамические нагрузки, действующие со стороны жидкости на оболочку. Кроме того, используя условие (7.11), нетрудно найти уравнение самой свободной поверхности ξ .

Основываясь на представленных выше зависимостях, рассмотрим вопрос о формах изгибных колебаний оболоч-

чки, формирующихся в процессе взаимодействия оболочки с жидкостью. При этом, чтобы придать задаче более наглядное физическое содержание, выберем в качестве исходных обобщенных переменных амплитудные значения форм колебаний свободной поверхности жидкости, которые обозначим через $d_1^{n,j}$ и $d_2^{n,j}$. Первое из них соответствует форме $J_n(\beta_{n,j}r) \cos n\Theta$ и определяется так:

$$d_1^{n,j} = -\frac{1}{g} \dot{B}_{1j}^{(n)} \operatorname{ch} \beta_{n,j} h_0. \quad (7.16)$$

Второе $d_2^{n,j}$ характеризует «сопряженную» форму $J_n(\beta_{n,j}r) \times \sin n\Theta$, причем

$$d_2^{n,j} = -\frac{1}{g} \dot{B}_{2j}^{(n)} \operatorname{ch} \beta_{n,j} h_0. \quad (7.17)$$

Зависимости (7.16) и (7.17) получены из уравнений свободной поверхности

$$\begin{aligned} \xi = & -\frac{1}{g} \sum_{n=0, j=1}^{\infty} \dot{B}_{1j}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta_{n,j} h_0) J_n(\beta_{n,j} r) \cos n\Theta - \\ & -\frac{1}{g} \sum_{n=0, j=1}^{\infty} \dot{B}_{2j}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta_{n,j} h_0) J_n(\beta_{n,j} r) \sin n\Theta, \end{aligned} \quad (7.18)$$

выведенной из интеграла Лагранжа — Коши (7.7) с использованием граничного условия (7.11).

Дифференцируя по t (7.18) и учитывая зависимости (7.16) и (7.17), получаем уравнения, связывающие, с одной стороны, обобщенные перемещения оболочки $f_1^{n,m}$ и $f_2^{n,m}$, с другой — обобщенные перемещения свободной поверхности жидкости $d_1^{n,j}$, $d_2^{n,j}$:

$$\begin{aligned} \ddot{d}_1^{n,j} + \omega_{nj}^2 d_1^{n,j} &= \sum_m^{\infty} \gamma_m^{n,j} \ddot{f}_1^{n,m}; \\ \ddot{d}_2^{n,j} + \omega_{nj}^2 d_2^{n,j} &= \sum_m^{\infty} \gamma_m^{n,j} \ddot{f}_2^{n,m}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega_{nj}^2 &= g\beta_{nj} \operatorname{th}(\beta_{nj} h_0); \\ \gamma_m^{n,j} &= \frac{2\beta_{nj}^2 R \int_0^{h_0} \operatorname{ch}(\beta_{nj} x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx}{\operatorname{ch}(\beta_{nj} h_0) (\beta_{nj}^2 R^2 - n^2) J_n(\beta_{nj} R)}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Для «замыкания» системы (7.19) вернемся к уравнению движения оболочки (7.1) и применим к нему метод Бубнова — Галеркина, используя в качестве весовых функций функции $\cos sy \sin rx$ и $\sin sy \sin rx$, предварительно при этом (на основании интеграла Лагранжа — Коши (7.7)) определив величину гидродинамического давления p . В результате получим такие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1^{n,m} + (\omega_1^{n,m})^2 f_1^{n,m} + \sum_{\substack{m_1 \\ m_1 \neq m}}^{\infty} q_{m_1}^{n,m} \ddot{f}_1^{n,m_1} &= - \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{n,m} d_1^{n,j}; \\ \ddot{f}_2^{n,m} + (\omega_2^{n,m})^2 f_2^{n,m} + \sum_{\substack{m_1 \\ m_1 \neq m}}^{\infty} q_{m_1}^{n,m} \ddot{f}_2^{n,m_1} &= - \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{n,m} d_2^{n,j}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_{m_1}^{n,m} &= \frac{4\rho_0}{\beta^{n,m} l h_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_n(\alpha_k R)}{\alpha_k I_n'(\alpha_k R)} p_{km} p_{km_1}; \\ \beta^{n,m} &= 1 + \frac{4\rho_0}{h l h_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_n(\alpha_k R)}{\alpha_k I_n'(\alpha_k R)} p_{km}^2; \\ p_{km} &= \int_0^{h_0} \cos \alpha_k x \sin \frac{m\pi}{l} x dx; \\ (\omega_1^{n,m})^2 &= (\omega_2^{n,m})^2 = \frac{(\omega_0^{n,m})^2}{\beta^{n,m}}; \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$g_j^{n,m} = \frac{2\rho_0 g J_n(\beta_{nj} R)}{\beta^{nm} l h \operatorname{ch}(\beta_{nj} h_0)} \int_0^{h_0} \operatorname{ch}(\beta_{nj} x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx.$$

Итак, системы уравнений (7.21) и (7.19) полностью определяют «свободное» движение связанной системы оболочка — жидкость. Характер движения обуславливается при этом начальными условиями, которые должны быть заданы как для несущей оболочки, так и для свободной поверхности жидкости.

Из общего вида уравнений (7.19) и (7.21) следует, что не все обобщенные координаты оболочечно-жидкостной системы, а значит и соответствующие им формы, связаны между собой при колебаниях. В частности, формы, содержащиеся в качестве координатной собственной функции функцию $\cos n\Theta$ (при каждом конкретном значении n), не связаны с формами, характеризуемыми функцией $\sin n\Theta$. Это

обстоятельство позволяет рассмотреть при анализе движения оболочки с жидкостью две независимые подсистемы уравнений:

$$\ddot{f}_1^{n,m} + (\omega_1^{n,m})^2 f_1^{n,m} + \sum_{\substack{m_1 \\ m_1 \neq m}}^{\infty} q_{m_1}^{n,m} \ddot{f}_1^{n,m_1} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{n,m} d_1^{n,j} = 0; \quad (7.23)$$

$$\ddot{d}_1^{n,j} + (\omega_{nj})^2 d_1^{n,j} = \sum_{m_1}^{\infty} \gamma_{m_1}^{n,j} \ddot{f}_1^{n,m_1}$$

и

$$\ddot{f}_2^{n,m} + (\omega_2^{n,m})^2 f_2^{n,m} + \sum_{\substack{m_1 \\ m_1 \neq m}}^{\infty} q_{m_1}^{n,m} \ddot{f}_2^{n,m_1} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{n,m} d_2^{n,j} = 0; \quad (7.24)$$

$$\ddot{d}_2^{n,j} + (\omega_{n,j})^2 d_2^{n,j} = \sum_m^{\infty} \gamma_m^{n,j} \ddot{f}_2^{n,m}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad m, m_1, j = 1, 2, 3, \dots$$

При одних и тех же начальных условиях эти две подсистемы имеют одинаковые решения, поэтому дальнейшие рассуждения, связанные с определением изгибных форм оболочки, можно провести, исходя из анализа любой из подсистем.

В целях конкретизации аналитического представления искомых форм ограничимся в разложении (7.4) N_1 -й формой изгибных колебаний «сухой» оболочки, приняв $m = 1, 2, \dots, N_1$, и N_2 -й формой колебаний свободной поверхности жидкости. Параметр n предлагается при этом фиксированным $n = n^*$.

Для удобства изложения материала представим систему уравнений (7.23) в форме

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i + \sum_{c=1}^{N_3} \alpha_c^i x_c + \sum_{c=1}^{N_3} \beta_c^i \ddot{x}_c = 0; \quad (7.25)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_3; \quad N_3 = N_1 + N_2.$$

Здесь

$$x_i = f_1^{n^*,m} \quad \text{при } i = m \leq N_1;$$

$$x_i = d_1^{n^*,j} \quad \text{при } i = N_1 + j \leq N_3;$$

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_1^{n^*,m} & \text{при } i = m \leq N_1; \\ \omega_{n^*,j} & \text{при } i = N_1 + j \leq N_3; \end{cases}$$

$$\alpha_c^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i, c \leq N_1; \\ g_c^{n^*,m} & \text{при } i, c = N_1 + j \leq N_3; \end{cases}$$

$$\beta_c^i = \begin{cases} q_c^{n^*,m} & \text{при } i = m; c \leq N_1; \\ -\gamma_c^{n^*,j} & \text{при } i = N_1 + j; c \leq N_1; \\ 0 & \text{при } c > N_1. \end{cases} \quad (7.26)$$

Приведем полученную систему (7.25) к нормальной форме. С этой целью составим ее характеристическое уравнение

$$\left| \sum_{c=1}^{N_3} [\omega_i^2 + \lambda^2 \delta_{i,c} + \alpha_c^i - \lambda^2 \beta_c^i] \right| = 0, \quad (7.27)$$

где $i = 1, 2, \dots, N_3$, δ — символ Кронекера, и обозначим корни этого уравнения через $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{N_3}$.

Используя далее замену

$$x_i = \sum_{k=1}^{N_3} X_{k,i} \zeta_k, \quad (7.28)$$

где $i = 1, 2, \dots, N_3$; $X_{k,i}$ — компоненты собственных векторов системы (7.25), соответствующих каждому из найденных корней Ω_i , уравнения (7.25) можно представить в «развязанной» форме

$$\ddot{\zeta}_k + \Omega_k^2 \zeta_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_3. \quad (7.29)$$

При этом согласно соотношениям (7.26) обобщенные координаты оболочки примут вид

$$f_1^{n^*,m} = \sum_{k=1}^{N_3} X_{k,m} \zeta_k, \quad (7.30)$$

а обобщенные координаты свободной поверхности жидкости — вид

$$d_1^{n^*,j} = \sum_{k=1}^{N_3} X_{k,N_1+j} \zeta_k. \quad (7.31)$$

Систему дифференциальных уравнений (7.24), имеющую такие же коэффициенты, как и система (7.23), можно аналогичным путем преобразовать к нормальной форме

$$\ddot{\eta}_k + \Omega_k^2 \eta_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_3, \quad (7.32)$$

причем обобщенные координаты оболочечно-жидкостной си-

стемы в данном случае таковы:

$$f_2^{n^*,m} = \sum_{k=1}^{N_s} X_{k,m} \eta_k; \quad (7.33)$$

$$d_2^{n^*,j} = \sum_{k=1}^{N_s} X_{k,N_1+j} \eta_k. \quad (7.34)$$

Следовательно, динамический прогиб оболочки ω в новых переменных можно представить так:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_s} [X_{k,m} \zeta_k \cos n\Theta + X_{k,m} \eta_k \sin n\Theta] \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (7.35)$$

или

$$\begin{aligned} \omega = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_s} \zeta_k \cos n\Theta \left(\sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x \right) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_s} \eta_k \sin n\Theta \left(\sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x \right). \quad (7.36) \end{aligned}$$

На основании (7.36) заключаем, что собственные формы изгибных колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью, характеризуются в рамках принятых ранее предположений следующими представлениями:

$$\omega_1^{nk}(x, y) = C_1 \cos sy \sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x; \quad (7.37)$$

$$\omega_2^{nk}(x, y) = C_2 \sin sy \sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad s = \frac{n}{R}. \quad (7.38)$$

⁴ Итак, для определения форм изгибных колебаний оболочки, содержащей жидкость со свободной поверхностью, необходимо в соответствии с (7.34) и (7.38) «просуммировать» формы колебаний соответствующей «сухой» (без жидкости) оболочки, связанные с продольной координатой, т. е. координатой, которая характеризует уровень заполнения оболочки жидкостью. Что же касается форм колебаний свободной поверхности жидкости, то их можно определить, используя вышеизложенную методику применительно к гидродинамической «части» задачи. Так, представив уравнение свободной поверхности жидкости

с учетом (7.31) и (7.34) в виде

$$\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} [X_{k,N_1+j} \zeta_k \cos n\Theta + X_{k,N_1+j} \eta_k \sin n\Theta] J_n(\beta_{nj}r) \quad (7.39)$$

или в виде

$$\begin{aligned} \xi(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_3} \zeta_k \cos n\Theta \left[\sum_{j=1}^{N_2} X_{k,N_1+j} J_n(\beta_{nj}r) \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_3} \eta_k \sin n\Theta \left[\sum_{j=1}^{N_2} X_{k,N_1+j} J_n(\beta_{nj}r) \right], \end{aligned} \quad (7.40)$$

находим эти формы:

$$\xi_{nk}^{(1)}(r, y) = C_3 \cos sy \sum_{j=1}^{N_2} X_{k,N_1+j} J_n(\beta_{nj}r); \quad (7.41)$$

$$\xi_{nk}^{(2)}(r, y) = C_4 \sin sy \sum_{j=1}^{N_2} X_{k,N_1+j} J_n(\beta_{nj}r). \quad (7.42)$$

§ 7.2. Бегущие волны в оболочке, содержащей жидкость со свободной поверхностью

Во второй главе книги было показано, что одной из возможных форм «свободного» движения круговых цилиндрических оболочек являются бегущие в окружном направлении волны перемещений. Целесообразно рассмотреть такого рода волновое движение оболочки, частично заполненной жидкостью. С этой целью представим динамический прогиб оболочки w в виде волнового разложения (см. гл. 2)

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cos\left(\frac{ny}{R} - \psi_{nm}\right) \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad (7.43)$$

где A_{nm} и ψ_{nm} — некоторые неизвестные пока функции времени, которые могут быть интерпретированы как обобщенные координаты этой оболочки. Поскольку разложение (7.43) можно получить из (7.4), полагая

$$f_1^{n,m} = A_{nm} \cos \psi_{nm}; \quad f_2^{n,m} = A_{nm} \sin \psi_{nm}, \quad (7.44)$$

то на основании предыдущего параграфа получаем потен-

циал φ_1 , выражающийся через функции A_{nm} и ψ_{nm} :

$$\varphi_1 = \sum_{\substack{k,n=0 \\ m=1}}^{\infty} \frac{2I_n(\alpha_k r) \cos \alpha_k x}{h_0 \alpha_k I_n'(\alpha_k R)} [A_{nm} \sin(sy - \psi_{nm}) \dot{\psi}_{nm} - \\ - \dot{A}_{nm} \cos(sy - \psi_{nm})] \int_0^{h_0} \cos \alpha_k x \sin \frac{m\pi}{l} x dx. \quad (7.45)$$

Таким образом, данный потенциал в общем случае (когда $A_{nm} \neq 0$, $\dot{\psi}_{nm} \neq 0$) представляет собой наложение своеобразных «бегущих» в окружном направлении волн (их иногда называют круговыми), имеющих постоянные или переменные амплитуды и фазовые скорости.

Что касается второго слагаемого φ_2 общего потенциала скорости (7.8), то с учетом обозначений

$$B_{1j}^{(n)} = C_j^{(n)}(t) \cos \psi_j^{(n)}; \quad B_{2j}^{(n)}(t) = C_j^{(n)}(t) \sin \psi_j^{(n)} \quad (7.46)$$

его можно представить как сумму круговых волн:

$$\varphi_2 = \sum_{\substack{n=0 \\ j=1}}^{\infty} C_j^{(n)}(t) \operatorname{ch} \beta_{nj} x J_n(\beta_{nj} r) \cos(sy - \psi_j^{(n)}). \quad (7.47)$$

Для вывода уравнений, связывающих параметры бегущей волны оболочки и круговой волны свободной поверхности жидкости, вернемся к соотношениям (7.15), которые с учетом (7.46) преобразуются к виду

$$\frac{d^2}{dt^2} [C_j^{(n)} \cos(sy - \psi_j^{(n)})] + g\beta_{nj} \operatorname{th}(\beta_{nj} h_0) [C_j^{(n)} \cos(sy - \psi_j^{(n)})] + \\ + \frac{2(\beta_{nj})^2 Rg}{\operatorname{ch}^2(\beta_{nj} h_0) (\beta_{nj}^2 R^2 - n^2) J_n(\beta_{nj} R)} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^{h_0} \operatorname{ch}(\beta_{nj} x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx \right] \frac{d}{dt} [A_{nm} \cos(sy - \psi_{nm})] = 0. \quad (7.48)$$

Кроме того, используем «волновое» представление свободной поверхности жидкости $\xi(t)$ (7.18), полагая

$$\xi(t) = \sum_{\substack{n=0 \\ j=1}}^{\infty} D_j^{(n)} \cos(sy - \Theta_j^{(n)}) J_n(\beta_{nj} r), \quad (7.49)$$

где функции времени $D_j^{(n)}$ и $\theta_j^{(n)}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dt} [C_j^{(n)} \cos (sy - \psi_j^{(n)})] = -g [\operatorname{ch} (\beta_{nj} h_0)]^{-1} D_j^{(n)} \cos (sy - \theta_j^{(n)}). \quad (7.50)$$

Таким образом, искомые уравнения связи параметров $D_j^{(n)}$, $\theta_j^{(n)}$ и A_{nm} , ψ_{nm} имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} [D_j^{(n)} \cos (sy - \theta_j^{(n)})] + (\omega_{nj})^2 D_j^{(n)} \cos (sy - \theta_j^{(n)}) = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^{nj} \frac{d^2}{dt^2} [A_{nm} \cos (sy - \psi_{nm})]; \\ & \frac{d^2}{dt^2} [A_{nm} \cos (sy - \psi_{nm})] + (\omega_{nm})^2 [A_{nm} \cos (sy - \psi_{nm})] + \\ & + \sum_{\substack{m_1=1 \\ m_1 \neq m}}^{\infty} q_{m_1}^{n,m} \frac{d^2}{dt^2} [A_{nm_1} \cos (sy - \psi_{nm_1})] + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{nm} D_j^{(n)} \cos (sy - \theta_j^{(n)}) = 0. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Из полученной системы следуют такие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{D}_j^{(n)} + [(\omega_{nj})^2 - (\dot{\theta}_j^{(n)})^2] D_j^{(n)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^{nj} \{ (\ddot{A}_{nm} - \dot{\psi}_{nm} \dot{A}_{nm}) \times \\ \times \cos (\theta_j^{(n)} - \psi_{nm}) + (A_{nm} \ddot{\psi}_{nm} + 2\dot{A}_{nm} \dot{\psi}_{nm}) \sin (\theta_j^{(n)} - \psi_{nm}) \}; \\ D_j^{(n)} \ddot{\theta}_j^{(n)} + 2\dot{D}_j^{(n)} \dot{\theta}_j^{(n)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m^{nj} \{ (A_{nm} \ddot{\psi}_{nm} + 2\dot{A}_{nm} \dot{\psi}_{nm}) \times \\ \times \cos (\theta_j^{(n)} - \psi_{nm}) - (\ddot{A}_{nm} - \dot{\psi}_{nm}^2 A_{nm}) \sin (\theta_j^{(n)} - \psi_{nm}) \}; \\ \ddot{A}_{nm} + (\omega_{nm}^2 - \dot{\psi}_{nm}^2) A_{nm} &= \\ = - \sum_{m_1=1}^{\infty} q_{m_1}^{n,m} \{ (\ddot{A}_{nm_1} - \dot{\psi}_{nm_1}^2 A_{nm_1}) \cos (\psi_{nm} - \psi_{nm_1}) + \\ + (A_{nm_1} \ddot{\psi}_{nm_1} + 2\dot{A}_{nm_1} \dot{\psi}_{nm_1}) \sin (\psi_{nm} - \psi_{nm_1}) \} - \\ - \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{nm} D_j^{(n)} \cos (\psi_{nm} - \theta_j^{(n)}); \\ A_{nm} \ddot{\psi}_{nm} + 2\dot{A}_{nm} \dot{\psi}_{nm} &= \sum_{m_1=1}^{\infty} q_{m_1}^{n,m} \{ (\dot{A}_{nm_1} - \dot{\psi}_{nm_1}^2 A_{nm_1}) \times \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\times \sin(\psi_{nm} - \psi_{nm_1}) - (A_{nm_1} \ddot{\psi}_{nm_1} + 2\dot{A}_{nm_1} \dot{\psi}_{nm_1}) \cos(\psi_{nm} - \psi_{nm_1}) - \\ - \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{n,m} D_j^{(n)} \sin(\theta_j^{(n)} - \psi_{nm})$$

которые в качественном отношении сходны с уравнениями (7.23), (7.24). Интегрируя эту систему уравнений, можно найти все параметры, характеризующие поведение упругой оболочки и свободной поверхности жидкости.

Рассмотрим частный случай. Предположим, что при взаимодействии оболочки с жидкостью прогиб оболочки (7.43) и деформация свободной поверхности жидкости (7.49) могут быть описаны с помощью одночленных аппроксимаций вида (индексы у всех параметров опускаем)

$$\omega = A \cos\left(\frac{ny}{R} - \psi\right) \sin \frac{m\pi}{l} x; \\ \xi = D \cos\left(\frac{ny}{R} - \theta\right) J_n(\beta_{nj} r). \quad (7.53)$$

Такое представление справедливо, когда глубина заполнения жидкости либо относительно мала $\left(\frac{h_0}{l} \approx 0 \div 0,25\right)$, либо сравнима $\left(\frac{h_0}{l} \approx 0,75 \div 1\right)$ с длиной оболочки. Уравнения (7.52) примут в данном случае вид

$$\ddot{D} + (\omega_0^2 - \dot{\theta}^2) D = \gamma [(\ddot{A} - \dot{\psi}^2 A) \cos \alpha + (A\ddot{\psi} + 2\dot{A}\dot{\psi}) \sin \alpha]; \\ D\ddot{\theta} + 2\dot{D}\dot{\theta} = \gamma [(A\ddot{\psi} + 2\dot{A}\dot{\psi}) \cos \alpha - (\ddot{A} - \dot{\psi}^2 A) \sin \alpha]; \quad (7.54) \\ \ddot{A} + (\omega^2 - \dot{\psi}^2) A = -\tilde{g}D \cos \alpha; \\ A\ddot{\psi} + 2\dot{A}\dot{\psi} = -\tilde{g}D \sin \alpha.$$

Здесь $\gamma = \gamma_m^{nj}$; $\tilde{g} = g_j^{nm}$; $\omega_0 = \omega_{nj}$, $\omega = \omega_{nm}$ (см. (7.20), (7.22)), $\alpha = \theta - \psi$.

Систему (7.54) можно представить еще так:

$$\ddot{D} + (\omega_0^2 - \dot{\theta}^2) D = -\gamma\tilde{g}D - \gamma\omega^2 A \cos \alpha; \\ D\ddot{\theta} + 2\dot{D}\dot{\theta} = \gamma\omega^2 A \sin \alpha; \quad (7.55) \\ \ddot{A} + (\omega^2 - \dot{\psi}^2) A = -\tilde{g}D \cos \alpha; \\ A\ddot{\psi} + 2\dot{A}\dot{\psi} = -\tilde{g}D \sin \alpha.$$

Исследуем некоторые частные решения последней системы. Предположим, что

$$A = A_0 = \text{const}; \quad \dot{\psi} = \Omega = \text{const}. \quad (7.56)$$

Такое решение соответствует движению оболочки типа бегущей волны с амплитудой A_0 и постоянной фазовой скоростью $v_\phi = \frac{\Omega}{s}$. Поскольку нас интересует случай $D \neq 0$, при $D = 0$ для удовлетворения уравнений (7.55) положим $\gamma = 0$ и, таким образом, приходим к уравнениям, которые рассматривались в гл. 2, то на основании последнего уравнения системы (7.55) следует принять

$$\sin \alpha = 0. \quad (7.57)$$

Отсюда $\theta = \psi + \pi k_1$; $k_1 = 0, 1, 2, \dots$, $\dot{\theta} = \dot{\psi} = \Omega$. Анализируя затем третье уравнение (7.55), находим выражение для амплитуды круговой волны в жидкости

$$D = \frac{(\Omega^2 - \omega^2) A_0}{\tilde{g} \cos \alpha}, \quad (7.58)$$

причем $\cos \alpha = \pm 1$.

На основании первых двух уравнений (7.55) устанавливаем еще одну зависимость между амплитудами D и A_0 :

$$D = \frac{A_0 \gamma \omega^2 \cos \alpha}{\Omega^2 - \omega_0^2 - \gamma \tilde{g}}. \quad (7.59)$$

Из условий совместности уравнений (7.58), (7.59) получаем соотношение

$$(\omega^2 - \Omega^2)(\omega_0^2 - \Omega^2) = \gamma \tilde{g} \Omega^2, \quad (7.60)$$

устанавливающее связь между частотами ω , ω_0 и Ω .

Таким образом, движение оболочки и свободной поверхности жидкости в рассматриваемом случае имеет волновой характер (типа бегущей волны перемещений в оболочке и круговой волны в жидкости), причем фазовые скорости обеих волн одинаковы:

$$v_\phi = \Omega R/n, \quad (7.61)$$

где

$$\Omega^2 = \Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega^2 + \omega_0^2 + \gamma \tilde{g}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_0^2 + \gamma \tilde{g})^2}{2} + \gamma \tilde{g} \omega_0^2}. \quad (7.62)$$

Рассмотрим еще одно решение уравнений (7.55). Предположим, что

$$\psi = \psi_0 = \text{const}; \quad \sin \alpha = 0; \quad \theta = \theta_0 = \text{const}. \quad (7.63)$$

Для определения амплитуд A и D в этом случае получим такие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{D} + \omega_0^2 D &= -\tilde{\gamma} \tilde{g} D - \gamma \omega^2 A \cos \alpha; \\ \ddot{A} + \omega^2 A &= -\tilde{g} D \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.64)$$

решение которых имеет вид

$$D = D_0 \cos(\Omega t + \delta_1); \quad A = A_0 \cos(\Omega t + \delta_2). \quad (7.65)$$

Здесь D_0 , A_0 , δ_1 , δ_2 — постоянные интегрирования, Ω — частота колебаний, определяемая согласно (7.62). Следовательно, движение оболочки и свободной поверхности жидкости представляет собой стоячие волны.

Для получения общего решения системы (7.55) вернемся к исходным переменным

$$f_1 = A \cos \psi; \quad f_2 = A \sin \psi; \quad d_1 = D \cos \theta; \quad d_2 = D \sin \theta. \quad (7.66)$$

На основании уравнений (7.43) и (7.44) имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= C_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\Omega_2 t + \theta_2); \\ f_2 &= C_3 \cos(\Omega_1 t + \theta_3) + C_4 \cos(\Omega_2 t + \theta_4); \\ d_1 &= X_1 C_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + X_2 C_2 \cos(\Omega_2 t + \theta_2); \\ d_2 &= X_1 C_3 \cos(\Omega_1 t + \theta_3) + X_2 C_4 \cos(\Omega_2 t + \theta_4), \end{aligned}$$

где C_1, \dots, C_4 , $\theta_1, \dots, \theta_4$ — постоянные интегрирования; Ω_1, Ω_2 — главные частоты системы (7.62); X_1, X_2 — коэффициенты распределения,

$$X_1 = \frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{\tilde{g}}; \quad X_2 = \frac{\Omega_2^2 - \omega^2}{\tilde{g}}.$$

Тогда очевидно, что искомая функция амплитуды волнового движения оболочки A , входящая в (7.66), имеет вид

$$\begin{aligned} A^2 &= a_0 + a_1 \cos 2\Omega_1 t + a_2 \cos 2\Omega_2 t + a_3 \sin 2\Omega_1 t + \\ &+ a_4 \sin 2\Omega_2 t + a_5 \cos(\Omega_1 + \Omega_2) t + a_6 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) t + \\ &+ a_7 \sin(\Omega_1 + \Omega_2) t + a_8 \sin(\Omega_1 - \Omega_2) t, \end{aligned} \quad (7.67)$$

где $a_0 \div a_8$ — постоянные коэффициенты, выражающиеся через коэффициенты C_i , θ_i , $i = 1 \div 4$. Аналогичный вид имеет также функция D .

Фазовые функции ψ и θ в волновых решениях (7.53) определяются соответственно из уравнений

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{C_3 \cos(\Omega_1 t + \theta_3) + C_4 \cos(\Omega_2 t + \theta_4)}{C_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\Omega_2 t + \theta_2)}; \quad (7.68)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X_1 C_3 \cos(\Omega_1 t + \theta_3) + X_2 C_4 \cos(\Omega_2 t + \theta_4)}{X_1 C_1 \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + X_2 C_2 \cos(\Omega_2 t + \theta_2)}.$$

Из соотношений (7.67), (7.68) следует, что в зависимости от задаваемых начальных условий для оболочки и жидкости могут быть реализованы самые разнообразные волновые формы движения оболочечно-жидкостной системы, в том числе и рассматриваемые выше движения, соответствующие частным решениям (7.56), (7.63), (7.65). Это могут быть движения типа «простой» ($\bar{\psi} = \bar{\theta} = 0$) и со сложным рельефом стоящей волны (как в оболочке, так и в жидкости), движение типа «простой» и «сложной» (с переменными амплитудой и фазой) бегущей волны и т. д.

В качестве иллюстрации на рис. 7.2, 7.3 приведены результаты численного интегрирования уравнений (7.55) методом Рунге — Кутты при различных начальных условиях. В частности, на рис. 7.2, а, в, 7.3 представлены графики функций $\dot{\theta}(t)$, $D(t)$ и $\dot{A}(t)$, когда начальное состояние оболочки с жидкостью соответствует реализации состояния типа «стоячая волна» в жидкости и «бегущая волна» на поверхности оболочки. Для оболочки с параметрами

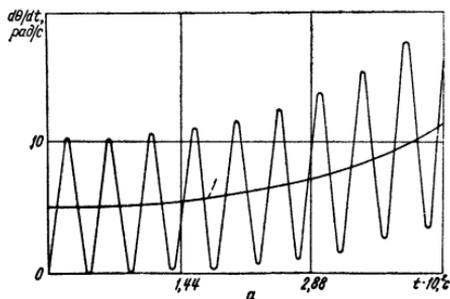
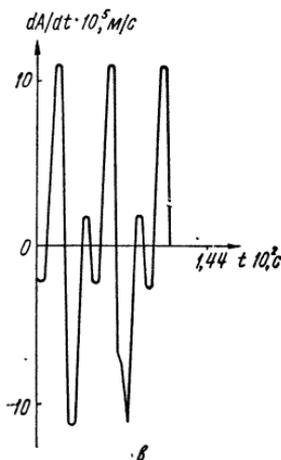
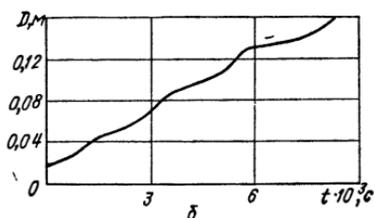


Рис. 7.2

(2.111), заполненной водой на глубину $h_0 = \frac{3}{4}l$, были заданы следующие начальные условия: $A(0) = 0,1667 \cdot 10^{-3}$ м; $\dot{A}(0) = 0$; $\psi(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = 1362,9$ рад/с; $D(0) = 0,533 \times 10^{-1}$ м; $\dot{D}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Согласно полученным численным данным в течение анализируемого интервала времени амплитуда бегущей волны в оболочке $A(t)$

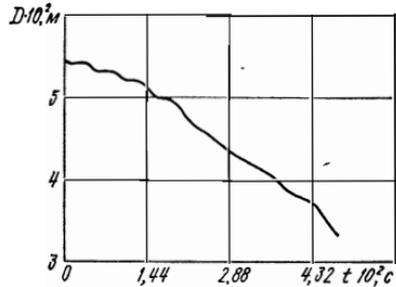


Рис. 7.3

практически остается постоянной, равно как и вид функции $\psi(t)$. При этом, как следует из рис. 7.2, в, функция $\dot{A}(t)$ представляет собой периодическую функцию, однако ее среднее значение равно нулю, что обуславливает практически постоянство $A(t)$. Как видно из графика рис. 7.2, а, на свободной поверхности жидкости бегущая волна в оболочке индуцирует также бегущую волну в жидкости с возрастающей средней скоростью $\dot{v}(t)$ (кривая 1) и уменьшающейся амплитудой $D(t)$, так как $\dot{\theta}(t)$ «черпает» энергию из $D(t)$.

На рис. 7.2, б приведен график функций $D(t)$ для случая, когда начальные условия соответствуют реализации движения типа «бегущая» волна как в оболочке, так и в жидкости: $A(0) = 0,1667 \cdot 10^{-3}$ м; $\dot{A}(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = 1362,9$ рад/с; $D(0) = 0,1667 \cdot 10^{-1}$ м; $\dot{D}(0) = 0$; $\dot{\theta}(0) = 1362,9$ рад/с.

Как следует из графика, амплитуда колебаний свободной поверхности жидкости монотонно возрастает, при этом численное значение $\dot{\theta}(t)$ резко падает от 1362,9 рад/с до 16 рад/с. Таким образом, «бегущая» волна на поверхности жидкости с течением времени характеризуется параметрами, свойственными волновому процессу в жидкости, содержащейся в жестком сосуде. Что же касается «бегущей» волны в оболочке, то в исследуемом интервале времени последняя сохраняет начальные значения амплитуды и фазовой скорости. Поэтому рост амплитуды волны в жидкости $D(t)$ обусловлен уменьшением фазовой скорости $\dot{\theta}(t)$.

§ 7.3. Периодическое воздействие на оболочку с жидкостью

До сих пор волновые формы движения свободной поверхности жидкости и оболочки, в которой она содержится, рассматривались в предположении отсутствия постоянно действующих внешних возмущающих сил, которые могли быть приложены либо к оболочке, либо к свободной поверхности, либо и к оболочке и к жидкости. Иными словами, взаимодействие оболочки и жидкости исследовалось при «свободном» движении совокупной упруго-жидкостной системы, обусловленном заданием некоторых начальных условий.

Представляет интерес задача о «вынужденных» движениях этой системы, когда она подвержена действию периодических нагрузок, частоты которых могут «резонировать» с собственными частотами всей системы. Рассмотрим кратко одну из таких задач, полагая что периодическая нагрузка $q = q(x, y, t)$ приложена непосредственно к оболочке, действуя по нормали к ее боковой поверхности. На торцевых сечениях оболочки реализуются условия шарнирного опирания.

Поскольку исходная постановка краевой гидродинамической задачи, как и ранее, предполагается линейной, для решения этой задачи воспользуемся принципом наложения — суперпозиции. В соответствии с ним представим функцию прогиба оболочки w и возмущенную форму свободной поверхности жидкости ξ в виде

$$w = w_1 + w_2; \quad \xi = \xi_1 + \xi_2, \quad (7.69)$$

где w_1, ξ_1 — общее решение «однородной» системы уравнений в частных производных (7.1) (когда $q \equiv 0$), а w_2, ξ_2 — некоторое частное решение этих уравнений в предположении $q \neq 0$. Для упрощения задачи рассмотрим одночленные аппроксимации функций $w_i, \xi_i, i = 1, 2$, т. е. положим

$$w_1 = a_1(t) \cos [sy - \psi_1(t)] \sin \frac{m\pi}{l} x; \\ \xi_1 = D_1(t) \cos [sy - \theta_1(t)] J_n(\beta_{n,j}r); \quad (7.70)$$

$$w_2 = a_2(t) \cos [sy - \psi_2(t)] \sin \frac{m\pi}{l} x; \quad (7.71)$$

$$\xi_2 = D_2(t) \cos [sy - \theta_2(t)] J_n(\beta_{n,j}r), \quad s = \frac{n}{R}.$$

Тогда неизвестные функции времени a_i , d_i , ψ_i и θ_i надлежит определить из следующих систем нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + (\omega^2 - \dot{\psi}_1^2) a_1 &= -\tilde{g}D_1 \cos \alpha_1; \\ a_1 \ddot{\psi}_1 + 2\dot{a}_1 \dot{\psi}_1 &= -\tilde{g}D_1 \sin \alpha_1; \end{aligned} \quad (7.72)$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}_1 + (\omega_0^2 - \dot{\theta}_1^2) D_1 &= -\gamma \tilde{g}D_1 - \gamma \omega^2 a_1 \cos \alpha_1; \\ D_1 \ddot{\theta}_1 + 2\dot{D}_1 \dot{\theta}_1 &= \gamma \omega^2 a_1 \sin \alpha_1 \quad (\alpha_1 = \theta_1 - \psi_1); \\ \ddot{a}_2 + (\omega^2 - \dot{\psi}_2^2) a_2 &= \\ = -\tilde{g}D_2 \cos \alpha_2 + \frac{1}{\rho h \beta^{n,m}} (q_{n,m}^{(1)} \cos \psi_2 + q_{n,m}^{(2)} \sin \psi_2); \\ a_2 \ddot{\psi}_2 + 2\dot{a}_2 \dot{\psi}_2 &= \\ = -\tilde{g}D_2 \sin \alpha_2 + \frac{1}{\rho h \beta^{n,m}} (q_{n,m}^{(2)} \cos \psi_2 - q_{n,m}^{(1)} \sin \psi_2); \end{aligned} \quad (7.73)$$

$$\begin{aligned} \ddot{D}_2 + (\omega_0^2 - \dot{\theta}_2^2) D_2 + \\ + \gamma [(\ddot{a}_2 - a_2 \dot{\psi}_2^2) \cos \alpha_2 + (a_2 \ddot{\psi}_2 + 2\dot{a}_2 \dot{\psi}_2) \sin \alpha_2] &= 0; \\ D_2 \ddot{\theta}_2 + 2\dot{D}_2 \dot{\theta}_2 &= \\ = \gamma [(a_2 \ddot{\psi}_2 + 2\dot{a}_2 \dot{\psi}_2) \cos \alpha_2 - (\ddot{a}_2 - a_2 \dot{\psi}_2^2) \sin \alpha_2] &= 0 \\ (\alpha_2 = \theta_2 - \psi_2). \end{aligned}$$

Для коэффициентов здесь использованы обозначения § 7.2, а также выражения (7.22).

Система (7.72) и ее возможные решения подробно были исследованы в предыдущем параграфе. Что же касается системы (7.73), то вид ее частных решений определяется законом изменения во времени и «распределения» по поверхности оболочки внешней нагрузки q .

Пусть нагрузка $q = q(x, y, t)$ имеет вид окружной «волновой» функции

$$q = Q \cos(sy - \Omega_0 t) \sin \frac{m\pi}{l} x. \quad (7.74)$$

В этом случае в (7.73) следует принять

$$q_{n,m}^{(1)} = Q \cos \Omega_0 t; \quad q_{n,m}^{(2)} = Q \sin \Omega_0 t. \quad (7.75)$$

При этом из уравнений (7.73) нетрудно получить для амплитуд a_2 и D_2 стационарные решения вида

$$a_2 = \frac{Q(\omega_0^2 - \Omega_0^2)}{\Delta \beta^{n,m} h \rho} ; \quad D_2 = - \frac{Q \gamma \Omega_0}{\Delta \beta^{n,m} h \rho} , \quad (7.76)$$

а для фаз ψ_2 и θ_2 — решение

$$\psi_2 = \theta_2 = \Omega_0 t . \quad (7.77)$$

В решениях (7.76) обозначено

$$\Delta = (\omega^2 - \Omega_0^2)(\omega_0^2 - \Omega_0^2) - \tilde{g} \gamma \Omega_0^2 \quad (7.78)$$

(предполагается $\Delta \neq 0$).

Следовательно, чисто «вынужденное» движение оболочки (не зависящее от начальных условий), представляет собой в данном случае бегущую волну, которая, в свою очередь, индуцирует круговую волну в жидкости. Фазовые скорости обеих волн при этом равны между собой:

$$v_\phi = \frac{\Omega_0 R}{n} . \quad (7.79)$$

«Суммарное» движение оболочки (свободной поверхности жидкости) характеризуется наложением бегущих (круговых) волн со свободными и сопровождающими колебаниями (см. § 2.4).

Из формул (7.76) следует, что если частота внешнего возбуждения Ω_0 подобрана так, что совпадает с частотой собственных колебаний жидкости ω_0 ($\omega_0 = \Omega_0$), то амплитуды a_2 и D_2 получают такие значения:

$$a_2 = 0 ; \quad D_2 = \frac{Q}{\tilde{g} \rho h \beta^{n,m}} . \quad (7.80)$$

Это означает, что оболочка, заполненная жидкостью, остается неподвижной, хотя именно к ней по условиям задачи была приложена внешняя периодическая нагрузка. Вносимая в систему оболочка — жидкость энергия полностью израсходуется на реализацию круговой волны в жидкости, амплитуда которой достигает максимальных значений. Это явление называют «антирезонансом», его принцип положен в основу устройств динамических гасителей колебаний (виброгасителей)*.

Пусть теперь $\Delta = 0$. Как следует из предыдущего параграфа, частота Ω_0 совпадает в данном случае с одной из

* См.: Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле, — М., 1967, — 444 с.

собственных частот системы оболочка — жидкость Ω_1 или Ω_2 , где $\Omega_{1,2}$ определяются формулой (7.62). Это обусловит резонансный режим движения как оболочки, так и свободной поверхности жидкости. Вид решения для ω_2 и ξ_2 зависит от того, с какой из частот Ω_1 или Ω_2 «резонирует» внешнее возмущение.

Пусть $\Omega_0 = \Omega_1$. Поступим точно так же, как и в предыдущем параграфе при построении общего решения. При этом примем во внимание лишь чисто вынужденные, происходящие с частотой Ω_0 колебания, имея в виду, что другие виды колебаний (собственные и сопровождающие) с течением времени постоянно затухают (из-за неизбежных энергетических потерь). В результате получим такие зависимости:

$$a_2^2(t) = \frac{\Phi_1^2 t^2}{4\Omega_1^2} + \frac{\Phi_2^2}{(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)^2};$$

$$D_2^2(t) = \frac{\Phi_1^2 t^2 X_1^2}{4\Omega_1^2} + \frac{\Phi_2^2 X_2^2}{(\Omega_2^2 - \Omega_1^2)^2};$$

$$\Phi_1 = \frac{Q(\gamma - X_2)}{\rho h \beta^{n,m}(X_1 - X_2)}; \quad \Phi_2 = \frac{Q(\gamma - X_1)}{\rho h \beta^{n,m}(X_2 - X_1)}; \quad (7.81)$$

$$\psi_2(t) = \Omega_1 t - \Phi_3(t); \quad X_1 = \frac{\Omega_1^2 - \omega^2}{\tilde{g}};$$

$$\operatorname{tg} \Phi_3(t) = \frac{\Phi_1 t (\Omega_2^2 - \Omega_1^2)}{2\Omega_1 \Phi_2}; \quad X_2 = \frac{\Omega_2^2 - \omega^2}{\tilde{g}}; \quad (7.82)$$

$$\operatorname{tg} \Phi_4(t) = \frac{X_1}{X_2} \operatorname{tg} \Phi_3(t).$$

Динамический прогиб оболочки ω_2 и перемещение свободной поверхности жидкости примут соответственно вид:

$$\omega_2 = \left[\frac{\Phi_2 X_1}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \cos(sy - \Omega_1 t) - \frac{\Phi_1 t}{2\Omega_1} \sin(sy - \Omega_1 t) \right] \sin \frac{m\pi}{l} x;$$

$$\xi_2 = \left[\frac{\Phi_2 X_2}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \cos(sy - \Omega_1 t) - \frac{\Phi_1 t X_1}{2\Omega_1} \sin(sy - \Omega_1 t) \right] J_n(\beta_{n,j} r).$$
(7.83)

Таким образом, амплитудные значения бегущих волн в оболочке и жидкости с течением времени возрастают (режим «прогрессирующей» бегущей волны). Однако, если учесть силы диссипации энергии (конструкционное демпфирование в материале оболочки или силы вязкости в жидкости), то для амплитуд a_2 и D_2 получим некоторые конечные значения, совпадающие по форме с выражениями, приведенными в § 2.4.

В заключение приведем еще частные решения уравнений (7.73) при другом представлении динамической нагрузки q :

$$q = (Q_1 \cos sy + Q_2 \sin sy) \sin \frac{m\pi}{l} x \cos \Omega_0 t.$$

При отсутствии резонансов в системе вместо (7.71), с учетом (7.76) и (7.77), в данном случае имеем

$$\omega_2 = \frac{\omega_0^2 - \Omega_0^2}{\Delta \rho h \beta^{n,m}} (Q_1 \cos sy + Q_2 \sin sy) \sin \frac{m\pi}{l} x \cos \Omega_0 t; \quad (7.84)$$

$$\xi_2 = - \frac{\gamma \Omega_0^2}{\Delta \rho h \beta^{n,m}} (Q_1 \cos sy + Q_2 \sin sy) J_n(\beta_{nj} r) \cos \Omega_0 t \quad (7.85)$$

при $\Delta \neq 0$;

$$\omega_2 = \left[\frac{\Phi_1 t}{2\Omega_1 Q} \sin \Omega_1 t + \frac{\Phi_2}{(\Omega_2^2 - \Omega_1^2) Q} \cos \Omega_1 t \right] \times$$

$$\times (Q_1 \cos sy + Q_2 \sin sy) \sin \frac{m\pi}{l} x;$$

$$\xi_2 = \left[\frac{\Phi_1 X_1 t}{2\Omega_1 Q} \sin \Omega_1 t + \frac{\Phi_2 X_2}{(\Omega_2^2 - \Omega_1^2) Q} \cos \Omega_1 t \right] \times$$

$$\times (Q_1 \cos sy + Q_2 \sin sy) J_n(\beta_{nj} r)$$

при резонансе $\Omega_0 = \Omega_1$.

Постоянные значения Φ_1 , Φ_2 , X_1 , X_2 даны в соотношениях (7.82). Следовательно, «вынужденное» движение оболочки и свободной поверхности жидкости соответствует стоячей волне с постоянной или возрастающей со временем амплитудами в зависимости от того, реализуется ли в системе резонанс или отсутствует.

Не представляет особых трудностей получить соответствующие решения для ω_2 , ξ_2 в случае резонанса $\Omega_0 = \Omega_2$.

§ 7.4. Нелинейное взаимодействие оболочки с жидкостью

Рассмотрим кратко нелинейную задачу о вынужденных колебаниях оболочки с жидкостью, полагая, что «нелинейность» исследуемой упруго-жидкостной системы обусловлена большими градиентами смещений лишь оболочки. Колебания свободной поверхности жидкости будем предполагать соответствующими линейной теории. В рамках линеаризованных представлений формулируем и соответствующие граничные условия для жидкого наполнителя.

Ограничимся анализом нелинейных колебаний системы оболочка — жидкость, соответствующих некоторой одной из собственных частот совокупной системы. Обозначим эту частоту через Ω_k . Очевидно, что она должна быть корнем приведенного в § 7.1 характеристического уравнения (7.27), составленного для конечного числа членов в разложениях функций динамического прогиба w и возмущения свободной поверхности жидкости ξ .

Уравнения движения оболочки примем в виде (7.1), полагая $w_0 = 0$ (рассматривается оболочка идеальной формы). Используя при этом результаты исследований, изложенные в § 7.2, динамический прогиб w аппроксимируем таким разложением:

$$w = w(x, y, t) = \zeta_k(t) w_1^{n,k}(x, y) + \eta_k(t) w_2^{n,k}(x, y), \quad (7.86)$$

где $\zeta_k(t)$, $\eta_k(t)$ — обобщенные перемещения оболочки, отвечающие выбранной собственной частоте Ω_k ; $w_i^{n,k}$, $i = 1, 2$, — соответствующие собственные формы этой оболочки, причем

$$\begin{aligned} w_1^{n,k}(x, y) &= C_1 \cos sy \sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x; \\ w_2^{n,k}(x, y) &= C_2 \sin sy \sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x, \end{aligned} \quad (7.87)$$

где N_1 — количество удерживаемых в ряде (7.4) собственных форм соответствующей «сухой» оболочки; $X_{k,m}$ — элементы фундаментальной матрицы, с помощью которой осуществляется переход к главным координатам в линейной системе уравнений движения оболочечно-жидкостного

объекта (см. выражение (7.36)). Волновой параметр n в (7.87) предполагается фиксированным ($n = n^*$).

Таким образом, прогиб оболочки w выражается непосредственно через формы ее изгибных колебаний, найденных с учетом взаимодействия с жидкостью. Обычно при решении нелинейных задач динамики оболочечно-жидкостных систем используется упрощенный подход, заключающийся в том, что в качестве базисных функций оболочки с жидкостью используются формы собственных колебаний этой оболочки без жидкости, причем рассматривается одна, иногда две формы. Такой подход может в ряде случаев привести к существенным погрешностям в определении нелинейных динамических характеристик совокупной упруго-жидкостной системы.

Подобно разложению (7.86) следует представить и деформацию свободной поверхности жидкости, выражая ее через формы колебаний этой поверхности, найденные с учетом взаимодействия жидкости с упругой оболочкой:

$$\xi = \xi(x, y, t) = \zeta_k(t) \xi_{n,k}^{(1)}(r, y) + \eta_k(t) \xi_{n,k}^{(2)}(r, y). \quad (7.88)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \xi_{n,k}^{(1)}(r, y) &= C_3 \cos sy \sum_{j=1}^{N_2} X_{k, N_1+j} J_n(\beta_{n,j} r); \\ \xi_{n,k}^{(2)}(r, y) &= C_4 \sin sy \sum_{j=1}^{N_2} X_{k, N_1+j} J_n(\beta_{n,j} r), \end{aligned} \quad (7.89)$$

N_2 — количество собственных форм жидкости, удерживаемых в ряде (7.18) при $n = n^*$.

Используем в дальнейшем волновые представления функций w (7.86) и (7.88), полагая

$$\begin{aligned} w &= A(t) \cos[sy - \psi(t)] \sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x; \\ \xi &= A(t) \cos[sy - \psi(t)] \sum_{j=1}^{N_2} X_{k, N_1+j} J_n(\beta_{n,j} r), \end{aligned} \quad (7.90)$$

где

$$A(t) = \sqrt{\zeta_k^2(t) + \eta_k^2(t)}; \quad \operatorname{tg} \psi(t) = \eta_k(t) \zeta_k^{-1}(t). \quad (7.91)$$

Пусть оболочка подвергается воздействию внешней переменной нагрузки, также «волновым» образом распреде-

ленной по боковой поверхности оболочки:

$$q(x, y, t) = Q \sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x \cos (sy - \Omega t); \quad (7.92)$$

$$Q = \text{const}; \quad \Omega = \text{const}.$$

Для определения неизвестных функций A и ψ применим метод Бубнова — Галеркина. С этой целью на основании второго уравнения (7.1) найдем функцию напряжений Φ с учетом (7.90). Подставляя затем ее в первое уравнение (7.1) и выбирая в качестве весовых функций функции

$$\frac{\partial \omega}{\partial A} = \cos (sy - \psi) \sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x; \quad (7.93)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \psi} = A \sin (sy - \psi) \sum_{m=1}^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x, \quad (7.94)$$

выводим уравнения Бубнова — Галеркина:

$$\begin{aligned} & (\ddot{A} - A\dot{\psi}^2) \left[\sum_m^{N_1} X_{k,m}^2 + \sum_m^{N_1} \sum_{m_1}^{N_1} q_{m_1}^{s,m} X_{k,m_1} X_{k,m} \right] + \\ & + A \left[\sum_m^{N_1} (\omega_0^{s,m})^2 X_{k,m}^2 - \sum_m^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} X_{k,m} g_j^{s,m} X_{k,N_1+j} \right] = \\ & = \sum_m^{N_1} X_{k,m}^2 \frac{Q}{\rho h \beta^{n,m}} \cos (\psi - \Omega t) - \\ & - A^3 \sum_m^{N_1} \sum_{c,g,d} X_{k,m} \alpha_{scsgsd}^{s,m} X_{k,c} X_{k,g} X_{k,d}; \\ & (A\ddot{\psi} + 2\dot{A}\dot{\psi}) \sum_m^{N_1} \left[X_{k,m}^2 + X_{k,m} \sum_{m_1}^{N_1} q_{m_1}^{s,m} X_{k,m_1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Здесь $\alpha_{scsgsd}^{s,m}$ — постоянные коэффициенты, обусловленные геометрической нелинейностью оболочки и зависящие от физических и геометрических параметров этой оболочки.

Если использовать обозначения

$$\Omega_*^2 = \frac{1}{\Delta_0} \left[\sum_m^{N_1} (\omega_0^{s,m})^2 X_{k,m}^2 - \sum_m^{N_1} \sum_j^{N_2} X_{k,m} g_j^{s,m} X_{k,N_1+j} \right];$$

$$\gamma = \frac{1}{\Delta_0} \sum_m^{N_1} \sum_{c,g,d} X_{k,m} \alpha_{scsgsd}^{s,m} X_{k,c} X_{k,g} X_{k,d}; \quad (7.96)$$

$$\Delta_0 = \sum_m^{N_1} X_{k,m}^2 + \sum_m^{N_1} \sum_j^{N_2} X_{k,m} q_{m_1}^{s,m} X_{k,m_1} \neq 0; \quad \alpha = \frac{\sum_m^{N_1} \frac{X_{k,m}^2}{\beta^{n,m}}}{\rho h \Delta_0},$$

где параметр $\beta^{n,m}$ определяется согласно (7.22), то уравнения (7.95) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \ddot{A} + (\Omega_*^2 - \dot{\psi}^2) A + \gamma A^3 &= \alpha Q \cos(\psi - \Omega t); \\ A\ddot{\psi} + 2\dot{A}\dot{\psi} &= \alpha Q \sin(\psi - \Omega t). \end{aligned} \quad (7.97)$$

С учетом замен (7.91) на основании (7.97) получаем соответствующие уравнения относительно обобщенных перемещений ζ_k и η_k :

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_k + \Omega_*^2 \zeta_k + \gamma \zeta_k (\zeta_k^2 + \eta_k^2) &= \alpha Q \cos \Omega t; \\ \ddot{\eta}_k + \Omega_*^2 \eta_k + \gamma \eta_k (\zeta_k^2 + \eta_k^2) &= \alpha Q \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Из сопоставления (7.97) и (7.98) становится очевидным, что параметр Ω_* , определяемый соотношением (7.96), представляет собой не что иное, как частоту собственных колебаний системы оболочка — жидкость Ω_k , о которой шла речь выше. Следовательно, в соотношениях (7.97) можно положить $\Omega_* = \Omega_k$.

Рассмотрим вначале случай, когда внешняя нагрузка на оболочку отсутствует, т. е. $q = 0$. Тогда умножение второго уравнения (7.97) на A и последующее его интегрирование приводит к зависимости вида

$$\dot{\psi}^2 = C_0^2 A^{-4}; \quad C_0 = \text{const}. \quad (7.99)$$

Так что первое уравнение (7.97) можно записать в форме

$$\ddot{A} + A(\Omega_k^2 - C_0^2 A^{-4}) + \gamma A^3 = 0. \quad (7.100)$$

Если начальные условия рассматриваемой системы таковы, что $\dot{\psi}(0) = 0$, то уравнение (7.100) упростится:

$$\ddot{A} + \Omega_k^2 A + \gamma A^3 = 0. \quad (7.101)$$

Поскольку нелинейный член здесь мал по сравнению с линейными членами, то стационарное решение этого уравнения можно в соответствии с [3] записать так:

$$A = A_0 \cos[\Omega(A_0)t + \theta_0], \quad (7.102)$$

где A_0 — постоянная начальная амплитуда; θ_0 — начальная фаза;

$$\Omega(A_0) = \Omega_k + \frac{3}{8} \gamma \frac{A_0^2}{\Omega_k} \quad (7.103)$$

— эквивалентная частота нелинейных колебаний оболочки с жидкостью. Таким образом, движение оболочки в данном случае соответствует стоячей волне со сложным рельефом, характеризуемым разложениями (7.87). Функция прогиба w имеет вид

$$w = A_0 \cos [\Omega(A_0)t + \theta_0] \cos(sy - \psi_0) \sum_m^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x. \quad (7.104)$$

В общем случае, когда $\dot{\psi} \neq 0$, уравнение (7.100) допускает следующий интеграл:

$$\dot{A}^2 + \left(\Omega_k^2 A^2 + \frac{\gamma A^4}{2} + \frac{C_0}{A^2} \right) = C_1; \quad C_1 = \text{const.} \quad (7.105)$$

(Для его получения необходимо умножить (7.100) на \dot{A} .)

Деформирование оболочки представляет бегущую окружную волну, амплитуда которой A является функцией времени и определяется из уравнения

$$\frac{dA}{dt} = \pm \sqrt{C_1 - \left(\Omega_k^2 A^2 + \frac{\gamma A^4}{4} + \frac{C_0}{A^2} \right)}. \quad (7.106)$$

Для приближенного определения аналитической зависимости $A = A(t)$ можно применить метод усреднения Боголюбова непосредственно к уравнению (7.100). Это уравнение, как было показано во второй главе книги, допускает при $\gamma = 0$ точное решение вида

$$A = \sqrt{\sqrt{M^2 + Y_1^2} + Y_1 \sin(2\Omega_k t + Y_2)}, \quad (7.107)$$

где M , Y_1 , Y_2 — некоторые постоянные интегрирования. Согласно общей идее асимптотических методов решение общего уравнения (7.100), когда $\gamma \neq 0$, будем искать в виде (7.106), полагая $Y_1 = Y_1(t)$ и $Y_2 = Y_2(t)$. Дифференциальные уравнения для Y_1 и Y_2 , которые могут трактовать как уравнения в стандартной форме, будут такими:

$$\frac{dY_1}{dt} = -\sqrt{M^2 + Y_1^2} \gamma [\sqrt{M^2 + Y_1^2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + Y_1 \sin(2\Omega_k t + Y_2) \cos(2\Omega_k t + Y_2); \\
 \Omega_k \frac{dY_2}{dt} = & \left[1 + \frac{\sqrt{M^2 + Y_1^2}}{Y_1} \sin(2\Omega_k t + Y_2) \right] \gamma \times \\
 & \times [\sqrt{M^2 + Y_1^2} + Y_1 \sin(2\Omega_k t + Y_2)].
 \end{aligned} \tag{7.108}$$

Производя операцию усреднения на основании (7.108), получим

$$\frac{d\bar{Y}_1}{dt} = 0; \quad \frac{d\bar{Y}_2}{dt} = \frac{3\gamma}{2\Omega_k} \sqrt{M^2 + \bar{Y}_1^2}. \tag{7.109}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}_1 = Z_1 = & \text{const}; \\
 \bar{Y}_2 = \frac{3\gamma}{2\Omega_k} \sqrt{M^2 + Z_1^2} t + & Z_2; \quad Z_2 = \text{const}.
 \end{aligned} \tag{7.110}$$

Окончательно для функции динамического прогиба оболочки ω получим следующую зависимость:

$$\begin{aligned}
 \omega = & \sqrt{\sqrt{M^2 + Z_1^2} + \dots} \\
 & \dots + Z_1 \sin \left[\left(2\Omega_k + \frac{3\gamma}{2\Omega_k} \sqrt{M^2 + Z_1^2} \right) t + Z_2 \right] \times \\
 & \times \sum_m^{N_1} X_{k,m} \sin \frac{m\pi}{l} x \cos [sy - \psi_1(t)],
 \end{aligned} \tag{7.111}$$

причем

$$\psi_1(t) = \pm \text{arctg} \frac{\sqrt{M^2 + Z_1^2} \text{tg} \left(\Omega_k t + \frac{Z_2}{2} \right) \pm Z_1}{\sqrt{2} M} + Z_3. \tag{7.112}$$

Аналогично можно исследовать периодическое воздействие на оболочку с резонирующей частотой $\Omega \approx \Omega_k$.

СПИСОК
ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданович А. Е., Фелдмане Э. Г.* О расчете нелинейных параметрических колебаний цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1979.— № 1.— С. 171—177.
2. *Богданович А. Е., Фелдмане Э. Г.* Нелинейные параметрические колебания вязко-упругих цилиндрических оболочек // Прикл. механика.— 1980.— Т. 16, № 4.— С. 49—55.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 503 с.
4. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем.— М. : Гостехиздат, 1956.— 500 с.
5. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— М. : Физматгиз, 1961.— 340 с.
6. *Бояршина Л. Г., Ганиев Р. Ф.* О нелинейных колебаниях деформируемых тел с жидкостью, совершающих движение в пространстве // Прикл. механика.— 1976.— Т. 12, № 1.— С. 62—69.
7. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике.— М.; Л. : Гостехиздат, 1949.— 784 с.
8. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек.— М. : Наука, 1972.— 432 с.
9. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем.— М. : Наука, 1967.— 984 с.
10. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости.— М. : Наука, 1976.— 416 с.
11. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости.— М. : Наука, 1979.— 320 с.
12. *Вольмир А. С., Пономарев А. Т.* Нелинейные параметрические колебания цилиндрических оболочек из композитных материалов // Механика полимеров.— 1973.— № 3.— С. 531—539.
13. *Ганиев Р. Ф., Ковальчук П. С.* Динамика систем твердых и упругих тел.— М. : Машиностроение, 1980.— 208 с.
14. *Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.* Колебания твердых тел.— М. : Наука, 1976.— 432 с.
15. *Гнуни В. Ц.* К теории нелинейной динамической устойчивости оболочек // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение.— 1961.— № 4.— С. 72—80.
16. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.— М. : Гостехиздат, 1953.— 544 с.
17. *Григолюк Э. И.* Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук.— 1955.— № 3.— С. 33—68.
18. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д.* Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек: Методы расчета оболочек.— К. : Наук. думка, 1982.— Т. 5.— 400 с.
19. *Ивенсен Д. А.* Нелинейные колебания тонких круговых колец // Прикл. механика. Тр. амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. Е.— 1966.— № 3.— С. 87—97.

20. Исследование колебаний стеклопластиковых оболочек / В. О. Кононенко, А. А. Бондаренко, П. И. Галака и др.; Под ред. В. О. Кононенко.— К. : Наук. думка, 1974.— 84 с.
21. Кильдибеков И. Г. Исследование собственных нелинейных колебаний цилиндрической оболочки // Прикл. механика.— 1977.— Т. 13, № 11.— С. 46—52.
22. Кильчевский Н. А., Издебская Г. А., Кисилевская Л. И. Лекции по аналитической механике оболочек.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1974.— 232 с.
23. Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. О резонансных явлениях при нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами // Прикл. механика.— 1979.— Т. 15, № 9.— С. 100—107.
24. Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С., Подчасов Н. П. О динамической неустойчивости круговых цилиндрических оболочек, имеющих начальную погибь // Прикл. механика.— 1982.— Т. 18, № 3.— С. 28—33.
25. Кононенко В. О. Нелинейные колебания механических систем: Избр. труды.— К. : Наук. думка, 1980.— 384 с.
26. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость.— К. : Наук. думка, 1981.— 160 с.
27. Кубенко В. Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой.— К. : Наук. думка, 1979.— 184 с.
28. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. О влиянии начальной погиби на собственные нелинейные колебания цилиндрических оболочек // Прикл. механика.— 1982.— Т. 18, № 1.— С. 44—49.
29. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек.— К. : Наук. думка, 1984.— 220 с.
30. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. О волновых формах движения круговых цилиндрических оболочек // Прикл. механика.— 1982.— Т. 18, № 9.— С. 16—22.
31. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М. : Гостехиздат, 1956.— 491 с.
32. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— М. : Наука, 1966.— 532 с.
33. Механика композиционных материалов и элементов конструкций. Т. 2. Механика элементов конструкций / Под общ. ред. А. Н. Гузя.— К. : Наук. думка, 1983.— 464 с.
34. Микшиев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов.— М. : Машиностроение, 1978.— 247 с.
35. Микшиев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость.— М. : Машиностроение, 1971.— 563 с.
36. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— К. : Наук. думка, 1971.— 440 с.
37. Мищенко Г. В. О динамической устойчивости пологих цилиндрических оболочек // Инженерный журн.— 1961.— Т. 1, № 2.— С. 112—118.
38. Муштары Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек.— Казань: Таткиноиздат, 1967.— 431 с.
39. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью.— М. : Машиностроение, 1977.— 208 с.

40. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек.— Л. : Судпромгиз, 1962.— 431 с.
41. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости.— М. : Гостехиздат, 1948.— 211 с.
42. *Образцов И. Ф.* О проблемах статики и динамики современных инженерных конструкций: Состояние вопр., новые пробл. и перспективы // Пробл. прочности.— 1982.— 11.— С. 3—11.
43. *Огибалов П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1963.— 420 с.
44. *Проценко О. П.* Про вплив початкового погину на частоти вільних коливань циліндричної оболонки // Прикл. механіка.— 1964.— Т. 10, № 2.— С. 143—148.
45. *Рапопорт И. М.* Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью.— М. : Машиностроение, 1966.— 394 с.
46. Тонкостенные оболочечные конструкции: Пер. с англ. / Под ред. *Э. И. Григолока*.— М. : Машиностроение, 1980.— 608 с.
47. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах.— М. : Мир, 1968.— 204 с.
48. *Шмидт Г.* Параметрические колебания.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
49. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М. : Наука, 1972.— 718 с.
50. *Bauer H. F.* Nonlinear bending response of a space vehicle on the launching pad due to pulse excitation // Zeitschrift für Flugwissenschaften.— 1968.— N 6.— P. 173—179.
51. *Bauer H. F.* The response of a nonlinear n -degrees of freedom system to pulse excitation // Internat. J. Nonlinear Mech.— 1968.— V. 3, N 2.— P. 157—171.
52. *Chen J. C., Babcock C. D.* Nonlinear vibration of cylindrical shells // AIAA Journ.— 1975.— V 13, N 7.— P. 868—876.
53. *Chu H. N.* Influence of large amplitudes on flexural vibrations of a thin circular cylindrical shells // Journ. Aerospace Sci.— 1961.— N 28.— P. 602—609.
54. *Dowell E. H., Ventres C. S.* Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell // Journ. Sol. and Struct.— 1968.— V. 4, N 6.— P. 975—991.
55. *Dzygadto Z., Nowotarski I., Olejnik A.* Analysis of selfexcited and forced vibration of a cylindrical shell in supersonic flow // Journ. Techn. Phys.— 1976.— V 17, N 1.— P. 37—58.
56. *Evensen D. A., Fulton R. E.* Some studies of the nonlinear dynamic response of shell type structures // Proc. Int. Conf.— Oxford, 1967.— P. 237—254.
57. *Hutton R. E.* An investigation of nonlinear oscillations of fluid in a cylindrical container // Fifth annual structures and materials conference.— Calif., April, 1964.— N 1—3.
58. *Koval L. R.* Note of the effect of dynamic asymmetry of the vibrations of cylindrical shells // Journ. Acoust. Soc. Amer.— 1963.— V. 35, N 2.— P. 57—60.
59. *Kuo Ching-Chiang, Morino L., Dugundji J.* Nonlinear interaction of panel flutter with harmonic forcing excitation // AIAA Journ.— 1973.— V. 11, N 4.— P. 419—420.
60. *Matsuzaky Y., Kobayashi S.* A theoretical and experimental study of the nonlinear flexural vibration of thin circular cylindrical shells with clamped ends // Journ. Japan. Soc. Aeronaut. and Space Sciences.— 1970.— N 12.— P. 308—315.

61. *Matsuzaky J., Kobayashi S.* Nonlinear analysis of supersonic panel flutter of circular cylindrical shells // Journ. of Japan Soc. Aeronaut. Sci.— 1970.— N 18.— P. 103—111.
62. *Olson M. D., Fung Y. C.* Comparing theory and experiment for the supersonic flutter of circular cylindrical shell // AIAA Journ.— 1967.— V 5, N 10.— P. 1849—1856.
63. *Olson M. D., Fung Y. C.* Supersonic flutter of circular shells subjected to internal pressure and axial compression // AIAA Journ.— 1966.— N 4.— P. 858—684.
64. *Reissner E.* Nonlinear effects in the vibrations of cylindrical shells // Report NAM 5—6. Ramo-Wooldridge corp.— Sept., 1955.— P. 169—176.
65. *Tobias S. A.* A theory of imperfection for the vibration of elastic bodies of revolution // Engineering.— 1951.— N 172.— P. 409—420.
66. *Yao I. C.* Nonlinear elastic bucking and parametric excitation of a cylinder under axial loads // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.— 1965.— V. 32, N 1.— P. 109—115.
67. *Yao I. C.* Dynamic stability of cylindrical shells under static and periodic axial and radial loads // AIAA Journ.— 1963.— V, 1, N 6.— P. 1391—1396,

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Основные зависимости и уравнения нелинейной теории оболочек	
§ 1.1. Вводные замечания. Гипотезы Кирхгофа — Лява	6
§ 1.2. Деформации и перемещения	8
§ 1.3. Деформации и напряжения	12
§ 1.4. Вариационное уравнение движения	14
§ 1.5. Частные случаи динамических уравнений. Учет начальных несовершенств	17
Глава 2. Линейные колебания оболочек	
§ 2.1. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки	21
§ 2.2. Колебания оболочки без учета распространения упругих волн	29
§ 2.3. Волновые формы движения оболочек	34
§ 2.4. Бегущие волны в оболочке при периодическом возбуждении	39
§ 2.5. Формы изгибных колебаний оболочек с осесимметричными неправильностями	44
§ 2.6. Оболочки с неосесимметричными неправильностями	54
Глава 3. Методы исследования нелинейных колебаний цилиндрических оболочек	
§ 3.1. «Линейность» и «нелинейность» колебаний упругих систем. Некоторые особенности нелинейных систем	62
§ 3.2. Сведение распределенной системы к сосредоточенной модели. Метод Бубнова — Галеркина	67
§ 3.3. Вывод нелинейных уравнений движения модели оболочки	69
§ 3.4. Асимптотические методы исследования квазилинейных систем	76
§ 3.5. «Внутренние» резонансы при колебаниях оболочек и метод их исследования	86
Глава 4. Нелинейные свободные колебания оболочек	
§ 4.1. О формах изгибных колебаний оболочек при конечных прогибах	93
§ 4.2. Собственные частоты нелинейных колебаний оболочки	96
§ 4.3. Об энергообмене между изгибными формами	106
§ 4.4. Нелинейные бегущие волны в оболочках	110
Глава 5. Колебания оболочек при периодическом возбуждении	
§ 5.1. Постановка задачи. Вывод динамических уравнений	116
§ 5.2. Вынужденные колебания оболочки по одной изгибной форме	123
§ 5.3. Двухволновые формы движения оболочек	128
§ 5.4. Устойчивость двухволновых форм	131

§ 5.5. Влияние начальных несовершенств на резонансные колебания оболочки	136
Глава 6. Нелинейные параметрические колебания	
§ 6.1. Постановка задачи и вывод уравнений движения оболочки при параметрическом возбуждении	144
§ 6.2. Области динамической неустойчивости круговой оболочки и оболочки с начальными неправильностями формы	147
§ 6.3. Поведение оболочки в главной зоне динамической неустойчивости при пульсирующем сжатии	153
§ 6.4. Движение типа «бегущая волна» при параметрическом резонансе	161
§ 6.5. Резонансные колебания оболочки при комбинированном периодическом нагружении	166
Глава 7. Колебания оболочек с жидкостью	
§ 7.1. Формы и частоты свободных колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью	174
§ 7.2. Бегущие волны в оболочке, содержащей жидкость со свободной поверхностью	184
§ 7.3. Периодическое воздействие на оболочку с жидкостью	
§ 7.4. Нелинейное взаимодействие оболочки с жидкостью	197
Список использованной литературы	203

Учебное пособие

Кубенко Вениамин Дмитриевич
Ковальчук Петр Саввич
Подчасов Николай Павлович

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Художественный редактор С. В. Анненков
Технический редактор Н. Ю. Морозова
Корректор И. П. Берус

ИБ № 12710

Сдано в набор 23.06.88. Подписано в печать 06.02.89. БФ 03015. Формат 84×108/32. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 10,92. Усл. кр.-отт. 11,18. Уч.-изд. л. 13,17. Тираж 2000 экз. Изд. № 7741. Заказ № 8—2628. Цена 60 к.

Главное издательство издательского объединения «Выща школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкинга», 252057, Киев, ул. Довженко, 3 в Харьковской городской типографии № 16, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16. Зак. 474.

60 к.

