

539.1

Ш 84

Э. В. ШПОЛЬСКИЙ

АТОМНАЯ  
ФИЗИКА



Э. В. ШПОЛЬСКИЙ

ДАР  
СТОЛЯРОВА Е. Л.

539.1  
Ш 84

# АТОМНАЯ ФИЗИКА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ВВЕДЕНИЕ В АТОМНУЮ ФИЗИКУ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРЕБОТАННОЕ

*Допущено Министерством высшего  
образования СССР в качестве учебного  
пособия для высших учебных заведений*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

539.1 (075)

13-5-2

Редактор В. А. Лешковцев.

Техн. редактор Н. Я. Мурашова

Подписано к печати 8/IX — 15/X 1949 г. 32,75 печ. л. 35,54 уч.-изд. л.  
43 400 тип. зн. в печ. листе. А-11755-7/IX 1949 г. Тираж 20 000 экз.  
Цена книги 12 р. 45 к. Переплёт 2 р. Заказ № 1500.

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.  
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

Всего - 1 шт  
№50 - 1 шт

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию . . . . .	7
Из предисловия к первому изданию . . . . .	8
<b>Глава I. Электрон, его заряд и масса . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Открытие электрона (11). § 2. Определение заряда электрона (12). § 3. Практическое осуществление опыта Милликана (14). § 4. Движение электрона в электрическом и магнитном полях (19). § 5. Электрон в продольном электростатическом поле (24). § 6. Экспериментальные методы определения удельного заряда (25). § 7. Определение удельного заряда электрона по методу двух конденсаторов (27). § 8. Определение удельного заряда электрона по методу фокусировки продольным магнитным полем (29). § 9. Фокусировка и монохроматизация пучков заряженных частиц (32). § 10. Зависимость массы электрона от его скорости (36). § 11. Электромагнитная масса (41).	
<b>Глава II. Атомы. Изотопы . . . . .</b>	<b>46</b>
§ 12. Введение (46). § 13. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева (47). § 14. Определение истинных масс атомов. Метод парабол (54). § 15. Масс-спектрографы (57). § 16. Масс-спектрометры и масс-спектрографы с двойной фокусировкой (65). § 17. Массы и процентное содержание изотопов (70). § 18. Разделение изотопов с помощью методов, основанных на диффузии (71). § 19. Разделение изотопов методом термодиффузии (77). § 20. Разделение изотопов с помощью электромагнитных методов (82). § 21. Разделение изотопов с помощью методов фракционированной перегонки и обменных реакций (86). § 22. Разделение изотопов методом центрифугирования (88). § 23. Получение тяжёлого изотопа водорода (дейтерия) и тяжёлой воды (90).	
<b>Глава III. Ядерное строение атома . . . . .</b>	<b>95</b>
§ 24. Эффективное сечение для рассеяния частиц (95). § 25. Зондирование атомов электронами (98). § 26. Свойства $\alpha$ -частиц (100). § 27. Теория рассеяния $\alpha$ -частиц (104). § 28. Экспериментальная проверка формулы Резерфорда (107). § 29. Определение заряда ядра (109).	
<b>Глава IV. Рентгеновские лучи и их применение к определению атомных констант . . . . .</b>	<b>111</b>
§ 30. Рентгеновские лучи (111). § 31. Поглощение рентгеновских лучей (115). § 32. Рассеяние рентгеновских лучей (119). § 33. Диффракция рентгеновских лучей в кристаллической решётке (121). § 34. Экспериментальное осуществление диффракции рентгеновских	

лучей (127). § 35. Определение длины волны рентгеновских спектральных линий (132). § 36. Спектры рентгеновских лучей (134). § 37. Закон Мозели (136). § 38. Абсолютное определение длины волны рентгеновских лучей (140). § 39. Определение постоянной Авогадро и заряда электрона (143). § 40. Удельный заряд электрона (147).

## Глава V. Строение атома и классическая физика . . . . . 149

### A. Классическая механика и строение атома . . . . . 149

§ 41. Атомные модели (149). § 42. Закон сохранения энергии в механике (150). § 43. Потенциальные кривые (153). § 44. Линейный гармонический осциллятор (156). § 45. Комплексное представление колебаний (160). § 46. Разложение в спектр (162). § 47. Центральные силы. Кинетическая энергия в полярных координатах (167). § 48. Движение в центральном поле (168), § 49. Кеплерова задача (170), § 50.  $\alpha$ -частица в поле ядра (174). § 51. Приведённая масса (176). § 52. Обобщённые координаты. Состояние системы (179). § 53. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа (180). § 54. Применение уравнений Лагранжа к задаче о центральном движении (183). § 55. Обобщённые импульсы (186). § 56. Гамильтоновы канонические уравнения (188). § 57. Физический смысл функции Гамильтона (190). § 58. Циклические координаты (193). § 59. Скобки Пуассона. Законы сохранения (195). § 60. Движение в электромагнитном поле (199). § 61. Механика быстродвижущихся частиц (204).

### B. Классическая теория электромагнитного излучения . . . . . 209

§ 62. Элементарные центры испускания света (209). § 63. Электромагнитное излучение линейного осциллятора (210). § 64. Полное и среднее излучение осциллятора (213). § 65. Электромагнитный спектр негармонического осциллятора (215). § 66. Затухание колебаний (217). § 67. Лучистое трение (220). § 68. Интеграл Фурье и сплошной спектр (224). § 69. Естественная ширина спектральных линий (228). § 70. Другие примеры спектрального разложения неперiodических процессов (230). § 71. Планетарная модель атома (234). § 72. Орбитальный магнитный момент и теорема Лармора (235). § 73. Эффект Зеемана (238). § 74. Эффект Зеемана. Общий случай (242).

## Глава VI. Излучение абсолютно чёрного тела и гипотеза квантов энергии . . . . . 246

§ 75. Классическая физика и проблема теплового излучения (246). § 76. Равновесное излучение в полости (249). § 77. Закон Кирхгофа (251). § 78. Законы излучения абсолютно чёрного тела (253). § 79. Экспериментальное исследование законов теплового излучения (256). § 80. Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы (257). § 81. Формула Рэлея—Джинса (260). § 82. «Ультрафиолетовая катастрофа» (262). § 83. Формула Планка (263). § 84. Гипотеза квантов энергии (265).

## Глава VII. Уровни энергии атомов . . . . . 269

§ 85. Планетарная модель атома и квантовые постулаты Бора (269). § 86. Опыты Франка и Герца (270). § 87. Упругие соударения (274). § 88. Неупругие соударения. Критические потенциалы (276). § 89. Усовершенствование экспериментальной методики (278). § 90. Одновременное определение всех ступеней возбуждения (279). § 91. Определение ионизационных потенциа-

лов (282). § 92. Излучение возбуждённых атомов (285). § 93. Спонтанное излучение (287). § 94. Вынужденное излучение и поглощение (290). § 95. Вывод формулы Планка по Эйнштейну (291).

## Глава VIII. Спектральные серии и уровни энергии водородного атома . . . . .

§ 96. Серия Бальмера (294). § 97. Серии Лаймана, Пашена и др. Обобщённая формула Бальмера (297). § 98. Спектральные термы. Комбинационный принцип (299). § 99. Квантование круговых орбит (301). § 100. Теория Бора (304). § 101. Применение предыдущей теории. Открытие тяжёлого изотопа водорода (308). § 102. Серия Пикеринга и спектры водородоподобных ионов (310). § 103. О спектроскопическом определении удельного заряда электрона (312). § 104. Диаграммы уровней энергии (314). § 105. Граничный сплошной спектр атомного водорода (315). § 106. Квантование водородоподобного атома по Бору—Зоммерфельду (317). § 107. Принцип соответствия (325). § 108. Кризис теории Бора (330).

## Глава IX. Световые кванты . . . . .

§ 109. Флуктуации светового поля (332). § 110. Фотозффект и уравнение Эйнштейна (337). § 111. Экспериментальная проверка уравнения Эйнштейна (340). § 112. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра (343). § 113. Точное определение постоянной Планка (344). § 114. Другие опыты, обнаруживающие корпускулярные свойства света (346). § 115. Флуктуации светового потока (348). § 116. Рассеяние рентгеновских лучей (волновая теория) (351). § 117. Эффект Комптона (356). § 118. Элементарная теория эффекта Комптона (358). § 119. Электроны отдачи (361). § 120. Элементарные акты рассеяния и законы сохранения (365). § 121. Экспериментальное подтверждение применимости законов сохранения к элементарным актам рассеяния (367).

## Глава X. Волны и частицы . . . . .

§ 122. Введение (370). § 123. Плоская монохроматическая волна в однородной среде (371). § 124. Волновое уравнение (373). § 125. Суперпозиция плоских волн (375). § 126. Волновой пакет (377). § 127. Фазовая и групповая скорости (381). § 128. Корпускулярно-волновой параллелизм. Преломление света (384). § 129. Корпускулярно-волновой параллелизм. Эффект Доплера (388). § 130. Корпускулярно-волновой параллелизм. Дифракционная решётка (389). § 131. Гипотеза де-Брогля (391). § 132. Свойства волн де-Брогля (393). § 133. Экспериментальное подтверждение гипотезы де-Брогля. Метод Брэгга (396). § 134. Преломление электронных волн и внутренний потенциал металла (401). § 135. Экспериментальное подтверждение гипотезы де-Брогля. Методы Лауэ и Дебая—Шеррера (403). § 136. Интерференционные явления с молекулярными пучками (409). § 137. Волновой пакет и частица (410). § 138. Статистическое истолкование волн де-Брогля (412). § 139. Соотношения неопределённости (414). § 140. Определение места и импульса микрочастицы (417). § 141. Ошибочные толкования соотношений неопределённости (423). § 142. Соотношения неопределённости и принцип причинности (428).

## Глава XI. Уравнение Шредингера . . . . .

§ 143. Уравнение Шредингера и физический смысл его решений (434). § 144. Отражение и прохождение через потенциальный барьер (441). § 145. Потенциальный барьер конечной ширины (450).

§ 146. Колебания струны (455). § 147. Частица в потенциальном ящике (461). § 148. Электрон в потенциальной яме (466). § 149. Линейный гармонический осциллятор (472). § 150. Нормальное и возбуждённые состояния линейного осциллятора (478). § 151. Связанные осцилляторы. Силы Ван-дер-Ваальса (485). § 152. Частица в трёхмерном потенциальном ящике (494).

<b>Приложения</b> . . . . .	500
I. Вычисление средних значений . . . . .	500
II. Вывод формулы зависимости массы от скорости . . . . .	504
III. К классической теории эффекта Зеемана . . . . .	507
IV. Формула средней квадратичной флуктуации . . . . .	509
V. Частица в прямоугольной потенциальной яме . . . . .	513
VI. Ортогональность и нормирование собственных функций осциллятора . . . . .	516
Предметный указатель . . . . .	520

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени выхода первого издания этой книги прошло уже четыре года. В течение этого периода я имел возможность проверить доступность изложения и целесообразность построения книги, пользуясь ею в преподавании в двух московских высших учебных заведениях. Ценным материалом для меня были также письма читателей, часть которых самостоятельно изучала атомную физику по этой книге или систематизировала ранее приобретённые разрозненные знания. Итог всех этих наблюдений оказался в пользу выбранного характера изложения и плана книги. В частности, общее одобрение вызвало параллельное рассмотрение экспериментальной и теоретической стороны вопроса, а также введение вспомогательных глав или параграфов, излагающих некоторые необходимые сведения из других разделов теоретической физики. Всё это побудило меня полностью сохранить характер книги также и во втором издании.

Тем не менее книга подверглась весьма существенной переработке. Без преувеличения можно сказать, что она в значительной степени написана заново. Я старался прежде всего устранить все замеченные неточности, неясности и, по возможности не расширяя содержания, сделать изложение более отчётливым. Добавления, сделанные в первой половине книги, почти исключительно относятся к экспериментальным основаниям атомной физики, так как изложение некоторых экспериментов в первом издании мне теперь кажется чрезмерно элементарным. Кроме того, необходимо было подробнее осветить те вопросы, которые за истекший период выдвинуты самим развитием науки. Сюда относится, например, вопрос о разделении изотопов, который в первом издании был упомянут в одной фразе, а теперь рассматривается в нескольких параграфах. Особенно существенные изменения испытала вторая половина книги, а её последний раздел, посвящённый атомному ядру, в связи с неизмеримо возросшим значением ядерной физики и открытием большого числа новых фактов по необходимости пришлось значительно расширить. Из-за этого возрос и объём всей книги, и для удобства пользования ею оказалось целесообразным разделить её на два тома.



Выходящий сейчас первый том в основном посвящён экспериментальным основаниям ядерной теории атома и квантовой физики. Он заканчивается рассмотрением волновых свойств материи, а в последней главе, по примеру предыдущего издания, устанавливается уравнение Шредингера и рассматриваются его простейшие применения—почти исключительно к одномерным задачам. Таким образом, этот том представляет собой довольно законченное целое и для некоторых категорий читателей может иметь самостоятельный интерес. Во втором томе даётся более систематическое изложение основ квантовой механики и её применений к строению электронной оболочки атома; около половины второго тома посвящено атомному ядру и космическим лучам. Рукопись второго тома находится в портфеле Издательства, ввиду чего он выйдет непосредственно вслед за первым томом.

Теперь, как и при выходе первого издания, я, конечно, отдаю себе полный отчёт в трудности задачи создать учебное руководство по атомной физике—этой самой молодой, самой важной и вместе с тем самой трудной части современной физики. Первое издание «Атомной физики» быстро приобрело обширный круг друзей. Хочется верить в то, что после выхода второго издания этот круг ещё более расширится. Это будет самой лучшей наградой автору за немалый труд, потраченный на составление книги.

Москва, сентябрь 1948 г.

*Э. Шпольский.*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Современная атомная физика покоится на прочном фундаменте так называемой «классической физики». Безнадёжной была бы попытка уразуметь что-либо в квантовой механике, не имея достаточных сведений из механики Ньютона и Лагранжа, или разобраться в вопросах квантовой теории излучения, не будучи знакомым с электромагнитной теорией Максвелла—Лоренца. С другой стороны, математические методы квантовой механики широко используют приёмы, выработанные при решении задач теории колебаний и других проблем классической математической физики. Хотя тем самым очень определённо намечается характер подготовки, необходимой для сколько-нибудь серьёзного изучения атомной физики, приходится считаться с тем, что в постановке преподавания теоретической физики и в особенности теоретической механики эти потребности атомной физики далеко не всегда учитываются в достаточной степени. Для того чтобы

по возможности избавить читателя от необходимости наводить справки в различных книгах, в которых к тому же требуемое нередко даётся не в том виде, в каком это нужно для данного случая, в книгу введена довольно обширная подготовительная глава «Строение атома и классическая физика». Думается, что для большинства читателей эта глава будет очень полезна, другие же смогут воспользоваться ею для справок. Кроме того, в подстрочных примечаниях даны ссылки на те руководства, где можно получить более подробные сведения по тому или иному вопросу, знакомство с которым необходимо для понимания текста книги.

Другая особенность книги, нуждающаяся в специальной оговорке, состоит в большом внимании, которое в ней уделяется эксперименту. Я нигде не ограничиваюсь сжатой формулировкой экспериментальных данных, как это обычно делается в книгах по теоретической физике, но описываю, каким образом эти данные получены, и везде стараюсь дать понятие о порядках величин, с которыми приходится иметь дело. Остроумие, изящество и точность эксперимента в области атомной физики ничуть не уступают соответствующим качествам, которыми характеризуются современные физические теории. Я старался поэтому равномерно представить в книге ту и другую сторону, так как я хотел, чтобы эта книга знакомила читателей с физикой атома, а не только с его теорией.

Большие трудности пришлось преодолеть в выборе и распределении материала. Как известно, среди специалистов нет единообразия во мнениях по поводу необходимости сохранения связи изложения атомной физики с исторической последовательностью её развития. Среди теоретиков довольно распространён взгляд, что при изложении квантовой механики целесообразно вообще отказаться от исторической последовательности и строить это изложение чисто логически, более или менее догматическим путём. Хотя я и не считаю, что в учебной книге должны быть представлены все детали развития теории, в частности такие, которые уже утратили актуальный интерес, — полный разрыв с историей мне представляется неправильным, во всяком случае с педагогической точки зрения. Поэтому в главе VI, посвящённой излучению абсолютно чёрного тела, разъясняются причины катастрофы классической физики на рубеже XIX и XX вв., а в главе VIII дано краткое изложение теории Бора, которая пока ещё остаётся (вместе с векторной моделью атома) важным подспорьем для экспериментатора, и указано, почему эта теория оказалась несостоятельной. Я полагаю, что только таким путём можно убедить читателя в неизбежности того разрыва с привычными представлениями, к которому приводит квантовая механика.

Изложение многих вопросов атомной физики неизбежно требует применения громоздкого математического аппарата. Вопреки установившемуся обычаю—опускать вычисления, я привожу математические выкладки довольно подробно. Это вызывает необходимость частого повторения одних и тех же фраз вроде «подставим», «продифференцируем» и т. п. и придаёт изложению несколько неуклюжий характер. Однако, думая прежде всего об интересах читателя, я спокойно отказался от чрезмерной заботы об изяществе стиля.

Само собой разумеется, что нет никакой возможности—да и было бы педагогически грубо ошибочным—приводить все вычисления полностью. На долю читателя остаётся достаточное количество работы; но студенты старших курсов имеют уже опыт в изучении подобных книг и знают, что их необходимо читать с карандашом в руках. Впрочем, хорошо известно, что главная трудность для начинающего изучение квантовой физики—не в математике, а в самом существе предмета: в крайнем своеобразии законов явлений, протекающих в микроскопических системах, в их необычности и отсутствии наглядности. Я старался помочь читателю путём рассмотрения конкретных примеров, иллюстраций и числовых данных и не жалел труда на то, чтобы сделать изложение максимально отчётливым, насколько это допускается существом дела и моими собственными возможностями.

Разумеется, я далёк от мысли, что мне удалось преодолеть все дидактические, логические и математические трудности, которые значительно усугубляются новизной предмета и отсутствием уже сложившихся здоровых педагогических традиций. За все указания относительно желательных улучшений я буду поэтому очень признателен.

Москва, 1944 г.

*Э. Шпольский.*

## ГЛАВА I

# ЭЛЕКТРОН, ЕГО ЗАРЯД И МАССА

### § 1. Открытие электрона

Открытие дискретной структуры электрических зарядов было сделано как вывод из законов Фарадея об электролизе. Напомним ход рассуждений, приведший к этому открытию.

Из законов Фарадея следует, что если пропускать одно и то же количество электричества через различные электролиты, то количества вещества, выделяемые в растворах одновалентных ионов, будут пропорциональны атомным весам ионов. Если это количество электричества как раз таково, что оно выделяет один грамм-атом определённых ионов (т. е. количество граммов вещества, равное его атомному весу, например 107,88 г серебра, 35,45 г хлора и т. д.), то в любом другом электролите, содержащем одновалентные ионы, оно выделит тоже один грамм-атом ионов. Так как электрический ток в электролите обусловлен движением ионов, то мы можем формулировать установленный факт, утверждая, что один грамм-атом любых одновалентных ионов несёт с собою всегда одно и то же количество электричества, вне зависимости от природы этих ионов. Это количество электричества, называемое числом Фарадея  $F$ , равно 96 491 кулону, или  $2,892 \cdot 10^{14}$  абсолютных электростатических единиц. Если теперь пропускать ток через растворы двухвалентных ионов, то оказывается, что один фарадеев заряд переносится половиной грамм-атома двухвалентного иона, а в трёхвалентных электролитах — одной третью грамм-атома, или, иначе говоря, один грамм-атом двухвалентных ионов несёт с собою удвоенный фарадеев заряд, а один грамм-атом трёхвалентных ионов — утроенный. Так как, с другой стороны, по закону Авогадро, один грамм-атом любого вещества всегда содержит одно и то же количество частиц  $N$  и так как мы с полным основанием можем предположить, что весь заряд, переносимый одним грамм-атомом, равномерно распределяется на все эти  $N$  частиц, то заряд, переносимый каждым одновалентным ионом, будет иметь совершенно

определённую величину  $e$ , равную

$$e = \frac{F}{N}; \quad (1,1)$$

заряд, переносимый каждым двухвалентным ионом, будет

$$2e = \frac{2F}{N},$$

и вообще  $k$ -валентным ионом

$$ke = \frac{kF}{N}.$$

Итак, мы видим, что различные ионы могут нести на себе заряды, равные  $e$ ,  $2e$ ,  $3e$ , ..., но не встречаются ионы с зарядом, равным  $1,5e$  или  $2,5e$ . Отсюда и вытекает вывод, с особенной отчётливостью формулированный Гельмгольцем в речи, произнесённой в честь Фарадея: «Если мы принимаем существование атомов элементов, то мы не можем избежать и дальнейшего следствия, — что и электричество, как положительное, так и отрицательное, разделено на определённые элементарные количества, которые ведут себя, как атомы электричества».

Особенно существенную роль в познании атомистической природы электричества сыграло изучение прохождения электричества в газах. В частности, исследование разряда в разрежённых газах и изучение свойств возникающих при этом катодных лучей показали, что атомы отрицательного электричества могут быть легко получены в свободном состоянии, несвязанными с обычными атомами вещества. За этими атомами отрицательного электричества исторически утвердилось название электронов, предложенное Стонеем (1891 г.) для обозначения элементарных количеств электричества любого знака.

## § 2. Определение заряда электрона

Определение среднего заряда газового иона было впервые произведено Дж. Дж. Томсоном. Однако прямое доказательство дискретности электрических зарядов и первые точные определения величины заряда электрона путём нахождения зарядов отдельных частиц были выполнены Милликэном в 1911 г. Определение заряда электронов, освобождаемых действием света (фотоэффект) по методу, аналогичному методу Милликэна, было выполнено в 1912 г. А. Ф. Иоффе.

Экспериментальный метод, применённый Милликэном, заключался в непосредственном измерении заряда очень маленьких капелек масла. Представим себе такую капельку между обкладками горизонтально расположенного конденсатора. Если на

пластины конденсатора не наложено поле, то капля будет свободно падать. Вследствие малых размеров капли она будет падать равномерно, так как её вес  $mg$  уравновешивается силой сопротивления воздуха, равной по закону Стокса

$$F = 6\pi\eta av_g, \quad (2,1)$$

где  $v_g$  — скорость падения,  $\eta$  — коэффициент внутреннего трения воздуха и  $a$  — радиус капли. Условие

$$mg = 6\pi\eta av_g \quad (2,2)$$

даёт возможность вычислить радиус капли. В самом деле, обозначим плотность вещества капли через  $\sigma$ , плотность воздуха через  $\rho$ . Тогда, принимая во внимание, что на шарик с весом  $mg = \frac{4}{3}\pi a^3 \sigma g$ , падающий в воздухе, действует по закону Архимеда ещё сила, направленная вверх и равная  $\frac{4}{3}\pi a^3 \rho g$ , мы можем переписать равенство (2,2) в виде

$$\frac{4}{3}\pi a^3 (\sigma - \rho) g = 6\pi\eta av_g,$$

откуда

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\eta^{1/2} v_g^{1/2}}{(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}}. \quad (2,3)$$

Представим себе теперь, что на пластины конденсатора наложена разность потенциалов, величина и направление которой подобраны так, чтобы капелька под действием электрического поля поднималась вверх. Обозначая через  $v_E$  скорость этого подъёма, который, как и падение, будет происходить равномерно, мы можем написать

$$\mathcal{E}e - mg = 6\pi\eta av_E, \quad (2,4)$$

где  $\mathcal{E}$  — напряжённость поля внутри конденсатора. Из (2,2) и (2,4) получаем

$$e = \frac{6\pi\eta a}{\mathcal{E}} (v_g + v_E),$$

или, заменив недоступный непосредственному измерению радиус капли  $a$  его выражением (2,3) через  $v_g$ ,

$$e = 9\sqrt{2} \cdot \frac{\pi v_g^{1/2} \eta^{3/2}}{\mathcal{E}(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}} (v_g + v_E). \quad (2,5)$$

Ионизуя воздух между пластинами конденсатора (например, при помощи рентгеновских лучей), можно изменить заряд капли.

Если при этом величину напряжённости поля оставить прежней, то скорость капли изменится и станет равной  $v'_E$ ; мы имеем

$$e_1 = 9\sqrt{2} \cdot \frac{\pi v_g^{1/2} \eta^{3/2}}{\mathcal{E} (\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}} (v_g + v'_E).$$

Комбинируя это выражение с (2,5), найдём

$$\Delta e = e - e_1 = 9\sqrt{2} \cdot \frac{\pi v_g^{1/2} \eta^{3/2}}{\mathcal{E} (\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}} (v_E - v'_E). \quad (2,6)$$

Изменяя несколько раз заряд, можно с одной и той же каплей произвести большое число измерений.

### § 3. Практическое осуществление опыта Милликэна

Тщательно отшлифованные пластинки конденсатора  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1) удерживаются на определённом расстоянии точно параллельно друг другу при помощи изолирующей прокладки  $JJ$ .

Верхняя пластинка  $P_1$  имеет в середине отверстие  $O$ , через которое внутрь конденсатора попадают испытуемые капельки масла, распыляемого при помощи пульверизатора в цилиндр  $C$ . Известно, что при распылении жидкостей образующиеся капли несут электрический заряд, так что внутрь конденсатора попадают уже заряженные капли. Через окошко  $F_1$  капелька освещается обычно светом дуги; наблюдение же ведётся при помощи микроскопа через окошко  $F_3$ . Так как наблюдение происходит в направлении, перпендикулярном к освещающему пучку света, то выбранная капелька в поле зрения микроскопа видна, как яркая звёздочка на тёмном фоне (как в ультрамикроскопе). Окно  $F_2$  служит для выхода пучка света, так как, поглощаясь стенками камеры, свет вызвал бы внутри неё неравномерное нагревание и потоки воздуха, мешающие наблюдениям. Через то же окошко  $F_2$  внутрь конденсатора могут быть пропущены рентгеновские лучи, создающие ионизацию воздуха, в результате которой заряд капельки может быть изменён. Полная схема установки Милликэна приведена на рис. 2.

Измерение скорости падения или подъёма капельки производилось путём определения промежутка времени, необходимого для прохождения между двумя нитями, расположенными в фокальной плоскости микроскопа; за меру скорости бралась

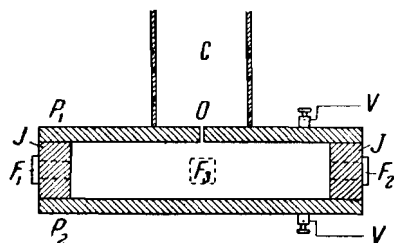


Рис. 1. Схема конденсатора Милликэна.

обратная величина этого промежутка времени. В таблице I приведено несколько результатов измерений Милликэна. Со-

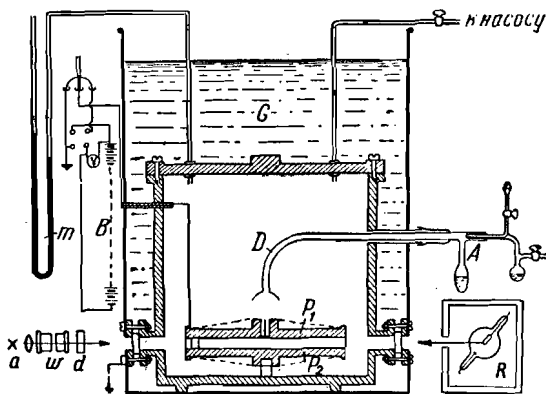


Рис. 2. Схема установки Милликэна: *a*—источник света; *w, d*—фильтры для поглощения тепловых лучей; *P<sub>1</sub>P<sub>2</sub>*—конденсатор; *AD*—пульверизатор для получения капелек масла; *G*—масляная ванна (термостат); *B*—батарея; *m*—манометр; *R*—рентгеновская трубка.

Таблица I

Время подъема в электр. поле $t_E$ (в сек)	Обратное время подъема в электр. поле $\frac{1}{t_E}$	Разность обратных времён подъема после перезарядки $\frac{1}{t'_E} - \frac{1}{t_E}$	Число един. перезарядки $n'$	Относительная величина единицы перезарядки $\frac{1}{n'} \left( \frac{1}{t'_E} - \frac{1}{t_E} \right)$	Сумма обратных времён падения и подъема $\frac{1}{t_g^*} + \frac{1}{t_E}$	Число единиц заряда $n \pm n'$	Относительная величина единицы заряда $\frac{1}{n} \left( \frac{1}{t_g^*} + \frac{1}{t_E} \right)$
80,708	0,01236	0,03234	6	0,005390	0,09655	18 +6	0,005366
22,375	0,04470	0,03751	7	0,005358	0,12887	24 -7	0,005371
140,565	0,00719	0,005348	1	0,005348	0,09138	17 +1	0,005375
79,600	0,01254	0,01616	3	0,005387	0,09673	18 +3	0,005374
34,785	0,02870				0,11289	21	0,005376

\* Среднее  $t_g = 11,880$ , где  $t_g$ —время падения в поле силы тяжести.



гласно (2,6) изменение величины заряда при перезарядке должно быть пропорционально разности скоростей  $v_E - v'_E$ . Если эта разность окажется целым кратным одной и той же величины, то можно утверждать, что изменение заряда происходит не непрерывно, а конечными порциями. Четвёртый и пятый столбцы таблицы показывают, что это имеет место на самом деле: с точностью до нескольких единиц в пятом знаке заряд изменяется на 6, 7, 1, ... единиц, причём сама единица перезарядки (пятый столбец таблицы) имеет достаточно постоянное значение.

Формула (2,5) показывает, что абсолютная величина заряда капли должна быть пропорциональна сумме  $v_g + v_E$  (шестой столбец таблицы).

Если эти суммы окажутся кратными одной и той же величине, то это означает, что заряд складывается из дискретных единиц. Седьмой и восьмой столбцы показывают, что и это имеет место в действительности. Наконец, из сравнения пятого и восьмого столбцов видно, что единица перезарядки и единица заряда между собой совпадают, опять-таки с точностью до нескольких единиц в пятом знаке. Таким образом, анализ таблицы даёт полное и непосредственное доказательство дискретной природы электрического заряда — атомистики электрических явлений.

Для точного определения абсолютной величины заряда электрона в числа, полученные при помощи формулы (2,5), необходимо внести существенную поправку. В самом деле, оказалось, что если определять заряд капелек различного радиуса, то при уменьшении последнего вначале получаются постоянные значения  $e$ , но для очень маленьких капелек  $e$  быстро возрастает с уменьшением радиуса. Таким образом, выходит, что заряд электрона не имеет постоянного значения, а может зависеть от размеров капельки.

Милликэн объяснил этот явно несообразный результат тем, что закон Стокса нельзя применять к движению очень маленьких капелек. Действительно, закон Стокса выводится в предположении, что движущееся тело имеет форму шара и что среда, в которой происходит движение, — непрерывна. Последнее предположение заведомо не оправдывается, когда при движении в газе размеры капельки становятся сравнимыми со средней длиной свободного пути газовых молекул. Таким образом, отношение  $\frac{\lambda}{a}$  средней длины свободного пути к радиусу капли может служить критерием применимости или неприменимости закона Стокса: если это отношение мало ( $\frac{\lambda}{a} \ll 1$ ), то закон Стокса применять можно, в противном случае — закон Стокса неприменим.

Для того чтобы учесть отступления от закона Стокса для очень маленьких капелек, было предложено пользоваться вместо (2,1) следующим исправленным выражением для стоксовой силы:

$$F = \frac{6\pi\eta av_g}{1 + A \frac{\lambda}{a}}, \quad (3,1)$$

где  $A$  — некоторая постоянная. Как видно, это выражение построено так, что при  $A \frac{\lambda}{a} \rightarrow 0$  оно переходит в формулу Стокса (2,1). При помощи этой исправленной формулы мы получаем для абсолютной величины заряда вместо (2,5) следующее выражение:

$$e_0 = \frac{9 \sqrt{2} \pi \eta^{3/2} v_g^{1/2}}{(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}} \frac{(v_E + v_g)}{\mathcal{E} \left(1 + A \frac{\lambda}{a}\right)^{3/2}}. \quad (3,2)$$

Чтобы найти абсолютную величину заряда по этой формуле, надо знать постоянную  $A$ . Однако Милликэн показал, каким образом можно найти истинную величину заряда, не прибегая к определению этой постоянной.

Из сопоставления формул (2,5) и (3,1) легко найти отношение величины  $e_0$  к заряду, вычисленному без поправки:

$$\frac{e_0}{e} = \frac{1}{\left(1 + A \frac{\lambda}{a}\right)^{3/2}};$$

или

$$e_0^{2/3} \left(1 + A \frac{\lambda}{a}\right) = e^{2/3}.$$

Но длина свободного пробега  $\lambda$  обратно пропорциональна давлению газа  $p$ , поэтому

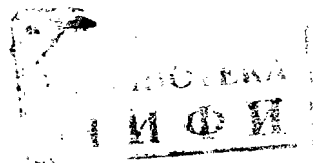
$$e_0^{2/3} \left(1 + \frac{B}{pa}\right) = e^{2/3}, \quad (3,3)$$

где  $B$  — некоторая новая постоянная.

Если изменять давление  $p$  и для каждого значения давления вычислять кажущуюся величину заряда  $e$  (без поправки), то согласно формуле (3,3) между  $e^{2/3}$  и  $1/pa$  должна иметь место линейная зависимость.

При этом, так как член  $B/pa$  в формуле (3,3) играет роль малой поправки, то в качестве радиуса капли  $a$  можно взять величину, вычисляемую по неисправленной формуле Стокса [см. формулу (2,3)]. В самом деле константа  $B$ , согласно измерениям Милликэна, равна

$$B = 0,000617,$$



если  $p$  измерено в сантиметрах ртутного столба и  $a$  — в сантиметрах.

Рис. 3, где на оси абсцисс отложены значения  $1/pa$ , а на оси ординат  $e^{2/3} \cdot 10^8$ , показывает, что требуемая формулой (3,3) линейная зависимость существует в действительности. Полагая в формуле (3,3)  $1/p = 0$  или  $a = \infty$ , т. е. переходя к предельному случаю, когда закон Стокса должен быть справедлив (радиус частицы бесконечно велик по сравнению со средней длиной свободного пути), найдём  $e^{2/3} = e_0^{2/3}$  или  $e = e_0$ . Таким образом, для нахождения истинного значения заряда

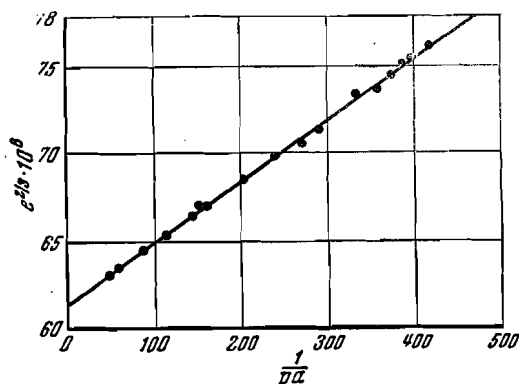


Рис. 3.

ряда электрона  $e_0$  достаточно экстраполировать прямую до пересечения её с осью ординат.

На рис. 4 приведены четыре прямые, построенные таким же способом для частиц различной природы: I — капельки масла в воздухе, II — капельки масла в водороде, III — капельки ртути в воздухе, IV — частицы шеллака в воздухе. Все четыре прямые пересекают ось ординат в одной точке: заряд электрона не зависит ни от природы частиц, ни от природы газа, окружающего частицы.

Опыты Милликэна имеют большое принципиальное значение, так как они с полной очевидностью доказывают атомистическую природу электрического заряда.

До недавнего времени также и абсолютное значение заряда электрона  $e = 4,770 \cdot 10^{-10}$  CGSE, полученное им, считалось наиболее точным. Совершенно неожиданно, однако, выяснилось, что это значение содержит систе-

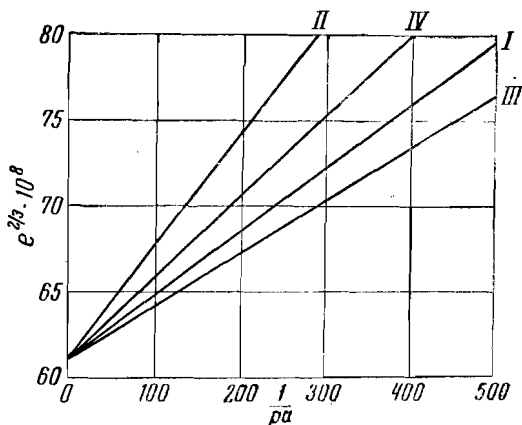


Рис. 4.

матическую погрешность. А именно, косвенное, но чрезвычайно точное определение  $e$  при помощи абсолютных измерений длины волны рентгеновских лучей (§§ 38—39) дало величину элементарного электрического заряда, заметно отличающуюся от найденной Милликэном. После некоторых поисков и дискуссии было установлено, что принятая им величина коэффициента внутреннего трения воздуха  $\eta = 1822,6 \cdot 10^{-7}$  слишком мала. Ряд очень точных определений этой величины, выполненных в последние годы (1936—1940), дал для неё во всех случаях число, значительно превышающее то, которое принято Милликэном. Среднее из этих новых определений, равное  $\eta = 1832 \cdot 10^{-7}$ , даёт величину  $e = 4,805 \cdot 10^{-10}$  CGSE. По поводу наиболее точной величины  $e$  см. далее § 39.

Упражнения: 1. Какую разность потенциалов нужно наложить на пластинки конденсатора, расстояние между которыми равно 5 мм, для того чтобы уравновесить масляную капельку, несущую заряд, равный 5 зарядам электрона? Масса капли равна  $3,119 \cdot 10^{-13}$  г. (Ответ: 19,2 V.)

2. Вычислить скорость падения капли масла плотностью 0,98 с радиусом  $10^{-4}$  см в воздухе при давлении 75 см. Коэффициент внутреннего трения воздуха 0,0001832. (Ответ: 0,0117 см/сек.)

3. Разность потенциалов в 31,5 V, приложенная к пластинкам конденсатора, отстоящим на 1 см, заставляет заряженную каплю масла двигаться вверх со скоростью 10 делений в 10 сек. (50 делений = 1 мм). Скорость падения под действием силы тяжести—10 делений в 100 сек. Коэффициент внутреннего трения воздуха 0,00018. Плотность капли 0,9. Давление воздуха 76 см. Сколько электронов несёт капля? (Ответ: один).

#### § 4. Движение электрона в электрическом и магнитном полях

Наряду с зарядом основной константой, характеризующей электрон, является его масса. Эта масса очень мала, что следует хотя бы из того, что при наблюдениях в конденсаторе Милликэна потеря или приобретение нескольких электронов при перезарядке не оказывает заметного влияния на скорость падения частицы, хотя по формуле (2,2) скорость равномерного падения пропорциональна массе. Наличие инертной массы у электрона сказывается, однако, в тех случаях, когда электрону сообщается ускорение под действием электрического или магнитного поля. Поэтому все методы определения массы электрона основаны на изучении его движения в электрических и магнитных полях, и наша ближайшая задача заключается в том, чтобы рассмотреть влияние того и другого полей на движение электрона.

Как известно\*), сила, действующая со стороны электромагнитного поля на частицу, несущую заряд  $e$  (так называемая

\*) См., например, И. Е. Тамм, Основы теории электричества, стр. 210, Гостехиздат, 1949.

сила Лоренца), выражается формулой

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \quad (4,1)$$

Здесь первый член представляет силу, действующую со стороны электрического поля, второй—со стороны магнитного\*). Предполагается, что заряд  $e$  выражен в электростатической системе единиц. Дальнейшие рассуждения мы произведём для положительно заряженной частицы, однако они применимы и к движению отрицательно заряженных частиц. Надо только помнить, когда речь идёт об электроне, что он несёт отрицательный заряд и направление его отклонения всегда будет противоположно направлению отклонения положительно заряженной частицы.

Согласно второму закону Ньютона, сила  $\mathbf{F}$  равна произведению массы  $m$  на ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$ :

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}. \quad (4,1')$$

Приравняв правые части (4,1) и (4,1'), получаем

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \quad (4,2)$$

Рассмотрим теперь отдельно действие электрического и магнитного полей. Полагая в (4,2)  $\mathcal{E} = 0$ , получаем

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \quad (4,3)$$

Очень часто при рассмотрении движения заряда в магнитном поле пользуются электромагнитной системой единиц. Тогда (4,3) принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e[\mathbf{v}\mathcal{H}],$$

откуда

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \quad (4,4)$$

Так как сила, действующая со стороны магнитного поля, выражается векторным произведением,

то три вектора  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathcal{H}$  образуют правовинтовую систему (рис. 5).

Векторное уравнение (4,4) эквивалентно следующим трём скалярным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m}(v_y\mathcal{H}_z - v_z\mathcal{H}_y), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{e}{m}(v_z\mathcal{H}_x - v_x\mathcal{H}_z), \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{e}{m}(v_x\mathcal{H}_y - v_y\mathcal{H}_x). \end{aligned} \right\} \quad (4,4')$$

\*) В дальнейшем мы будем иногда называть силой Лоренца второй член формулы (4,1), связанный с магнитным полем.

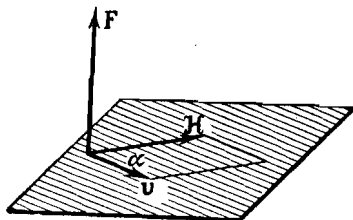


Рис. 5.

Интегрирование этой системы уравнений в большинстве случаев представляет собой трудную математическую задачу. Решение её для ряда случаев было дано С. А. Богуславским. Мы рассмотрим простейший случай, условия которого, однако, отвечают обычной постановке лабораторных экспериментов, и не будем заниматься вычислением траектории, а найдём лишь величину отклонения параллельного пучка заряженных частиц в магнитном поле. Предположим, что в момент  $t=0$  скорость частицы направлена по оси  $x$ , т. е. что при  $t=0$   $v_x=v$ ,  $v_y=v_z=0$ . Относительно магнитного поля мы положим, что оно постоянно во времени, направлено по оси  $y$ , но, вообще говоря, неоднородно, т. е. может быть записано как  $\mathcal{H}=\mathcal{H}(x)$ . Таким образом,  $\mathcal{H}_x=\mathcal{H}_z=0$ ,  $\mathcal{H}_y=\mathcal{H}(x)=\mathcal{H}$ . Допустим, что поле действует на протяжении  $OA=x$  (рис. 6) и что на расстоянии  $OB=l$ , вообще говоря, не равном  $OA$ , помещается флуоресцирующий экран, на котором производится измерение отклонения.

Так как поле на всём протяжении направлено по оси  $y$ , то составляющая силы  $F_y=e(v_z\mathcal{H}_x-v_x\mathcal{H}_z)$  равна нулю, и движение происходит в плоскости  $xz$ . Поскольку нас интересует отклонение частицы, а не её траектория, мы воспользуемся только третьим из уравнений (4,4'). Если отклонение мало, то с точностью до величин второго порядка малости можно на всём протяжении пути положить  $v=v_x=\frac{dx}{dt}$ ; действительно,

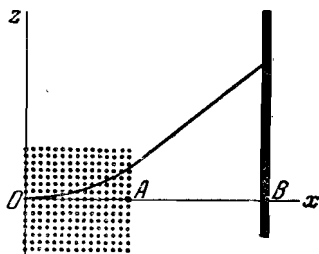


Рис. 6. Положительно заряженная частица в магнитном поле.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = v_x \left[ 1 + \left( \frac{v_z}{v_x} \right)^2 \right]^{1/2} = v_x \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v_z}{v_x} \right)^2 + \dots \right] \approx v_x.$$

Интересующее нас третье из уравнений (4,4'), очевидно, даёт

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m} \frac{dx}{dt} \mathcal{H}, \quad (4,5)$$

так как второй член справа равен нулю.

Далее, принимая во внимание, что  $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ , мы можем переписать (4,5) в виде

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \frac{dx}{dt} \mathcal{H}.$$

Производя сокращения и заменив снова  $\frac{dx}{dt}$  через  $v$ , получим

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dz}{dx} \right) = \frac{e}{mv} \mathcal{H}.$$

Интересующее нас отклонение  $z$  мы найдём отсюда двукратным интегрированием. Первое интегрирование в пределах от 0 до  $x$  даёт

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e}{mv} \int_0^x \mathcal{H} dx.$$

Второе интегрирование от нуля до  $l$  (расстояние от начала поля до экрана) даёт

$$z = \frac{e}{mv} \int_0^l dx \int_0^x \mathcal{H} dx.$$

Выполним интегрирование по частям, полагая  $u = \int_0^x \mathcal{H} dx$  и  $dv = dx$ ; получим

$$z = \frac{e}{mv} \left\{ l \int_0^l \mathcal{H} dx - \int_0^l x \mathcal{H} dx \right\} = \frac{e}{mv} \int_0^l \mathcal{H} (l-x) dx. \quad (4,6)$$

В этой формуле интеграл

$$A = \int_0^l \mathcal{H} (l-x) dx \quad (4,7)$$

есть, очевидно, постоянная прибора, так как его величина зависит только от напряжённости поля  $\mathcal{H}(x)$ , его протяжения  $x$  и расстояния  $l$  от места входа электронов до экрана. Пользуясь обозначением (4,7), находим

$$z = A \frac{e}{mv}. \quad (4,8)$$

В частности, если поле однородно ( $\mathcal{H} = \text{const.}$ ) и простирается от  $x=0$  до  $x=a$ , а в интервале от  $x=a$  до  $x=l$   $\mathcal{H}=0$ , то

$$A = a \left( l - \frac{a}{2} \right) \mathcal{H}.$$

Наконец, если экран расположен вплотную у конца полюсов магнита, то  $l=a$  и

$$A = \frac{a^2}{2} \mathcal{H}.$$

В однородном поле, направленном перпендикулярно к скорости, легко найти и траекторию частицы. В самом деле, так как сила Лоренца всегда перпендикулярна к  $v$ , то она меняет только направление скорости, но не её величину;

поэтому электрон будет двигаться по окружности, радиус которой  $\rho$  мы найдём, приравняв лоренцову силу  $ev\mathcal{H}$  центростремительной силе инерции:

$$ev\mathcal{H} = \frac{mv^2}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{mv}{e} \cdot \frac{1}{\mathcal{H}}. \quad (4,9)$$

Вычислим теперь отклонение заряженной частицы в поперечном электростатическом поле. Пусть поперечную скорость частицы в момент входа её в пространство между пластинами конденсатора будет направлена по оси  $x$ , а поле конденсатора — направлено по оси  $z$ . Все остальные условия мы сохраняем прежними (рис. 7). Так как  $\mathcal{H} = 0$ , то (4.2) даёт

$$m\dot{v}_z = e\mathcal{E}_z.$$

Принимая во внимание, что  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0$ ,  $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}$ , получаем следующие три скалярных уравнения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = e\mathcal{E}.$$

Для малых отклонений, как и раньше, можно приближённо положить, что всё время  $v = \frac{dx}{dt}$ , и для вычисления отклонения воспользоваться только третьим уравнением

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = e\mathcal{E}. \quad (4,10)$$

Замечая, что

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{dt} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} = v^2 \frac{d^2z}{dx^2},$$

мы можем переписать уравнение (4,10) в виде

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{e}{mv^2} \mathcal{E}.$$

Интегрируя два раза, совершенно так же, как и раньше, находим

$$z = \frac{e}{mv^2} \int_0^l dx \int_0^x \mathcal{E} dx = \frac{e}{mv^2} \int_0^l (l-x) \mathcal{E} dx,$$

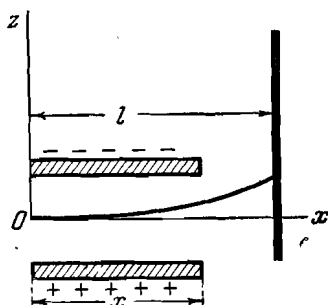


Рис. 7. Положительно заряженная частица в электростатическом поле.



или, обозначая  $\int_0^l (l-x) \mathcal{E} dx = B$  (причём  $B$ , как и ранее введённая постоянная  $A$ , будет постоянной прибора), имеем

$$z = \frac{e}{mv^2} B. \quad (4,11)$$

В частности, если длина пластин конденсатора равна  $b$  и поле однородно ( $\mathcal{E} = \text{const.}$ ), то непосредственное интегрирование даёт

$$B = b \left( l - \frac{b}{2} \right) \mathcal{E},$$

или при  $l = b$

$$B = \frac{b^2}{2} \mathcal{E}. \quad (4,12)$$

### § 5. Электрон в продольном электростатическом поле

Рассмотрим, наконец, движение электрона в электростатическом поле, совпадающем с направлением движения. Пусть это будет направление оси  $x$ . Тогда  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = 0$ . Скалярное уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = e\mathcal{E} \quad (5,1)$$

мы перепишем, заменяя  $\frac{dx}{dt}$  через  $v$ , в виде

$$m \frac{dv}{dt} = e\mathcal{E}. \quad (5,1')$$

Умножим обе части (5,1') на  $v$  и, замечая, что  $v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt}$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = e\mathcal{E}v. \quad (5,2)$$

Если обозначить потенциал электрического поля через  $\varphi$ , то  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x = -\frac{d\varphi}{dx}$ . Поэтому

$$\mathcal{E}v = -\frac{d\varphi}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt},$$

и (5,2) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = -e \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} + e\varphi \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi = \text{const.} \quad (5,3)$$

Уравнение (5,3) выражает закон сохранения энергии, так как  $e\varphi$  есть потенциальная энергия заряда  $e$  в точке поля с потенциалом  $\varphi$ . Если заряд перемещается из точки с потенциалом  $\varphi_1$  в точку с потенциалом  $\varphi_2$  и  $\varphi_1 - \varphi_2 = V$ , то

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = e(\varphi_1 - \varphi_2) \equiv eV.$$

При  $v_1 = 0$  имеем

$$\frac{mv^2}{2} = eV. \quad (5,4)$$

Обычно разность потенциалов измеряется в вольтах; в таком случае

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300}. \quad (5,4')$$

В атомной физике энергию очень часто выражают в электрон-вольтах. 1 eV есть та энергия, которую приобретает электрон, пробегая ускоряющую разность потенциалов в 1 V. Из (5,4') получаем

$$1 \text{ электрон-вольт} = \frac{4,89 \cdot 10^{-10} \cdot 1}{300} = 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ эрг.}$$

Энергия в 1 eV, рассчитанная на  $N = 6,023 \cdot 10^{23}$  (1 моль) электронов, равна

$$\begin{aligned} 1 \text{ электрон-вольт} \cdot \text{моль}^{-1} &= 9,64 \cdot 10^{11} \text{ эрг} \cdot \text{моль}^{-1} = \\ &= 2,304 \cdot 10^4 \text{ кал} \cdot \text{моль}^{-1} = \\ &= 23,04 \text{ ккал} \cdot \text{моль}^{-1}. \end{aligned}$$

Если известна энергия электронов, выраженная в электрон-вольтах, то скорость  $v$  в см/сек можно непосредственно вычислить из (5,4'):

$$v = \sqrt{\frac{e}{m} \frac{V}{150}} = 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{V} \text{ вольт.} \quad (5,5)$$

## § 6. Экспериментальные методы определения удельного заряда

В основе экспериментальных методов определения  $e/m$  лежат результаты исследования движения электрона в электрических и магнитных полях, выполненного нами в предшествующих двух параграфах.

Необходимо, однако, иметь в виду, что как в случае электрического, так и в случае магнитного поля отклонение в поперечном поле зависит не только от  $e/m$ , но и от  $v$ : магнитное отклонение определяется фактором  $e/mv$ , а электрическое — фактором  $e/mv^2$ . Поэтому опыт с отклонением в каком-либо одном поле ещё не даёт возможности найти  $e/m$ .

В первых работах (метод Дж. Дж. Томсона) обычно последовательно измеряли отклонение в том и другом полях и из двух уравнений (4,8) и (4,11) сразу вычисляли  $e/m$  и  $v$ . При этом пучки электронов осуществлялись в виде катодных лучей в трубках с разрежёнными газами (давление порядка нескольких сотых мм Hg). Развитие техники получения вакуума за последние десятилетия позволяет производить эти измерения в более определённых и лучше контролируемых условиях. На рис. 8 представлена схема современного прибора для определения  $e/m$  и  $v$  по методу Томсона. Накаливаемый катод  $K$ , помещённый в трубку, откачанную до предела, допускаемого современной техникой

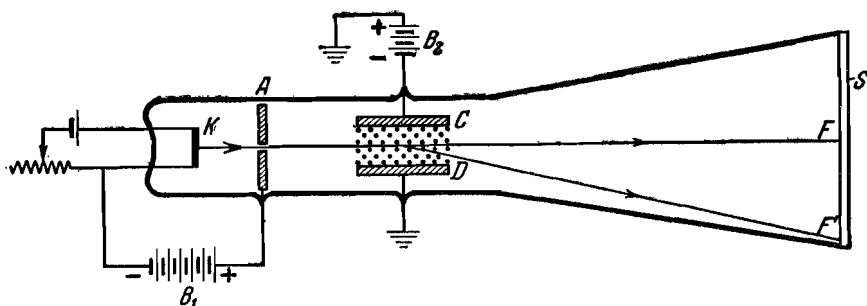


Рис. 8. Схема метода определения удельного заряда по отклонению в электрическом и магнитном полях.

вакуума, является обильным источником электронов. Эти электроны ускоряются батареей  $B_1$ , положительный полюс которой присоединён к металлической пластинке (аноду)  $A$ , в центре которой имеется отверстие. Электроны, прошедшие через это отверстие, двигаясь прямолинейно, дают на стенке трубки  $S$ , покрытой флуоресцирующим веществом, светлое пятнышко  $F$ , расположенное против отверстия в аноде  $A$ . На пути между  $A$  и  $F$  электроны проходят между пластинками конденсатора  $CD$ , к которым может быть приложено напряжение от батареи  $B_2$ . Если включить батарею  $B_2$ , то пучок электронов отклоняется электрическим полем, возникающим между пластинками, и пятнышко перемещается в положение  $F'$ .

Создавая между пластинками конденсатора  $CD$  также и однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости чертежа (на рисунке показано точками), можно вызвать отклонение пятнышка в том же или в обратном направлении. Если измерить оба отклонения, то при помощи уравнений (4,8) и (4,11) можно вычислить  $e/m$  и  $v$ . Практически удобнее просто компенсировать магнитным полем первоначальное электростатическое отклонение. В этом случае необходимые измерения сводятся к точ-

ному определению напряжённостей обоих полей—электрического и магнитного.

Преимущество использования пустотных трубок и горячих катодов перед старыми методами, где измерения производились над катодными лучами в разрежённом газе, состоит в том, что в пустотных трубках мы имеем возможность управлять скоростью электронов. В трубках с разрежённым газом и холодным катодом электроны освобождаются под влиянием бомбардировки катода положительными ионами, и скорость их зависит от сложных условий распределения потенциала в разрежённом газе. Напротив, в пустотных трубках при нагревании катода электроны выделяются с очень малыми скоростями и ускоряются полем батареи  $B_2$ . Таким образом, оба процесса—выделение электронов и их ускорение—не зависят друг от друга и оба они поддаются контролю экспериментатора.

Как сказано выше, начальные скорости электронов, освобождаемых из горячего катода, малы. Например, если катодом служит вольфрамовая спираль, нагретая до  $2400^\circ \text{K}$ , то всего лишь  $0,1\%$  электронов обладают энергией, превосходящей  $1,42$  электрон-вольта, и  $0,0001\%$ —энергией, превосходящей  $2,85$  электрон-вольта. Если поэтому ускоряющее поле не слишком слабо, то можно считать с достаточной точностью, что начальная скорость освобождаемых электронов равна нулю. Пусть разность потенциалов между катодом и анодом (например, между  $K$  и  $A$  на рис. 8) равна  $V$  вольт. Тогда окончательную скорость электронов мы находим из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300} \quad (5,4')$$

Поэтому, зная  $V$ , мы уже знаем и скорость электронов. Это освобождает нас от необходимости использовать и электрическое и магнитное отклонения для нахождения  $e/m$  и  $v$ . Достаточно воспользоваться либо электрическим, либо магнитным полем; второе уравнение всегда даёт формула (5,4').

В следующих параграфах мы приведём из большого числа современных методов определения удельного заряда два наиболее характерных. В первом применяется электрическое поле, во втором—магнитное.

## § 7. Определение удельного заряда электрона по методу двух конденсаторов

Одним из самых точных современных методов определения отношения  $e/m$  является метод двух конденсаторов. Электроны от нити накала  $F$  (рис. 9) ускоряются полем между катодом  $F$  и анодом  $A$ . Пройдя через отверстие в аноде  $A$  и диафрагму  $D_1$ ,

пучок электронов попадает в первый конденсатор  $K_1$ , на который накладывается переменная разность потенциалов от высокочастотного генератора  $B$ . Под влиянием этого перемен-

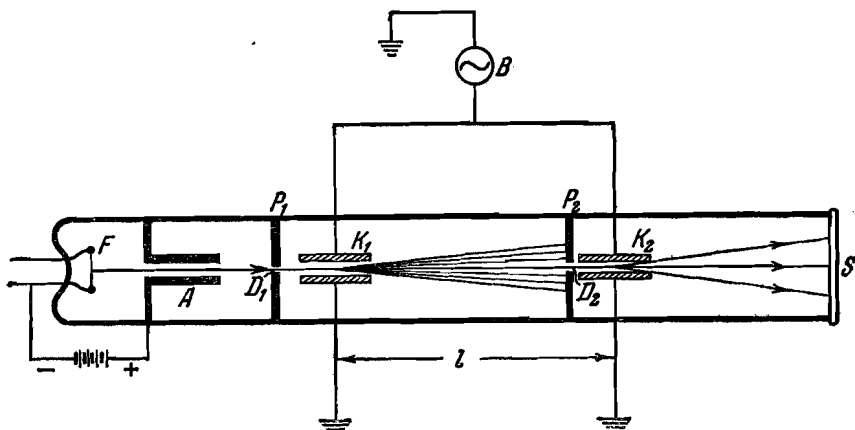


Рис. 9. Схема метода определения удельного заряда при помощи двух конденсаторов.

ного поля периодически изменяется направление пучка и, вообще говоря, пучок задерживается экраном  $P_2$ . Только те электроны, которые пролетают через конденсатор  $K_1$  в момент,

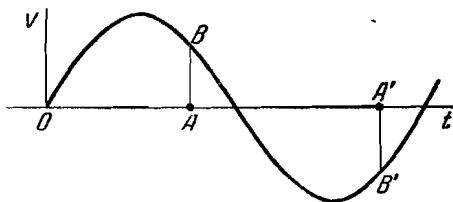


Рис. 10.

когда кривая потенциала проходит через нуль (рис. 10), оказываются способными пройти через малое отверстие  $D_2$  в экране  $P_2$ . Эти электроны попадают затем в конденсатор  $K_2$ , присоединённый к тому же генератору, что и  $K_1$ , вследствие чего поля в обоих

конденсаторах всегда находятся в одинаковой фазе. Таким образом, два раза в течение каждого периода в конденсатор  $K_2$  попадают электроны и отклоняются в большей или меньшей степени вверх или вниз в зависимости от фазы генератора в момент прохождения электронов через конденсатор  $K_2$ . Нетрудно убедиться в том, что имеется только два симметричных направления, в которых могут отклониться электроны при прохождении через этот второй конденсатор  $K_2$ . Если, например, промежуток времени, необходимый электрону, чтобы пролететь от конденсатора  $K_1$  до конденсатора  $K_2$ , равен  $t_1 = OA$  (рис. 10), то во втором конденсаторе  $K_2$  одни электроны застанут потенциал  $AB = +V_1$ ,

а другие — потенциал  $A'B' = -V_1$ . Поэтому на флуоресцирующем экране  $S$  появятся два симметрично расположенных пятна.

Варьируя скорость электронов изменением ускоряющего потенциала, можно добиться того, чтобы время  $t_1$  сделалось равным полупериоду генератора  $T/2$  или вообще  $nT/2$ . При этом условии электроны пролетят и второй конденсатор без отклонения, и два пятна на флуоресцирующем экране сольются в одно. Если расстояние между  $K_1$  и  $K_2$  равно  $l$ , а частота генератора  $f$ , то скорость таких электронов будет  $v = \frac{2l}{T} = 2lf$  или, вообще,

$$v = \frac{2l}{nT} = \frac{2lf}{n}. \quad (7,1)$$

С другой стороны,

$$eV = \frac{mv^2}{2}, \quad (5,4)$$

где  $V$  — ускоряющий потенциал, приложенный между  $F$  и  $A$ . Из (7,1) и (5,4) получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2V} = \frac{2f^2 l^2}{n^2 V}. \quad (7,2)$$

Большое преимущество метода двух конденсаторов состоит в том, что он является своего рода «нулевым» методом и не требует никаких измерений отклонения, обычно связанных с трудно устранимыми ошибками. Величина удельного заряда, полученная таким способом, после внесения всех поправок равна

$$\frac{e}{m} = (1,7590 \pm 0,0015) \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot e^{-1*}.$$

### § 8. Определение удельного заряда электрона по методу фокусировки продольным магнитным полем

Другой точный метод определения  $e/m$  связан с применением продольного магнитного поля.

Рассмотрим прежде всего действие магнитного поля на расходящийся пучок электронов, выходящий из одной точки (отверстие диафрагмы). Сила, действующая на электрон со стороны магнитного поля, равна (предполагается, что  $e$  выражено в электромагнитных единицах)

$$\mathbf{F} = e [\mathbf{v} \mathcal{H}].$$

\*) В соответствии с исторически установившейся практикой мы выражаем удельный заряд электрона  $e/m$  в единицах CGSM  $\cdot e^{-1}$ , тогда как заряд электрона  $e$  обычно выражается в единицах CGSE. В тех случаях, когда обе величины  $e$  и  $e/m$  входят в формулах в каких-нибудь комбинациях, вместо  $e/m$  следует писать  $e/mc$ .

Если электрон летит под углом  $\alpha$ , не равным 0 или  $90^\circ$ , к направлению магнитных силовых линий, то его скорость можно разложить на две компоненты: продольную  $v_l$  и поперечную  $v_p$ :

$$v_l = v \cos \alpha, \quad v_p = v \sin \alpha. \quad (8,1)$$

Рассмотрим влияние магнитного поля на каждую из этих компонент отдельно. На электрон, летящий перпендикулярно к полю со скоростью  $v_p$ , действует сила  $F_p = ev_p \mathcal{H}$ . Так

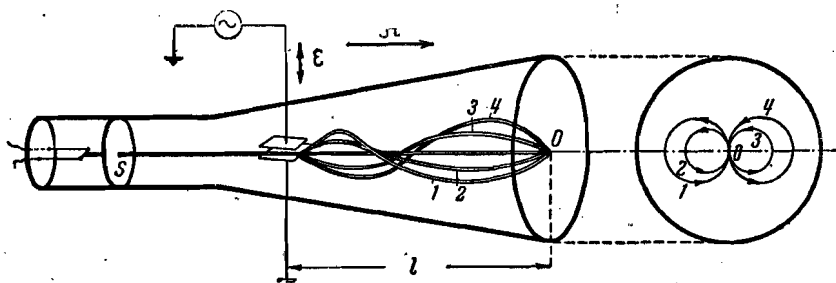


Рис. 11. Схема метода определения удельного заряда с помощью продольного магнитного поля.

как сила  $F_p$  везде перпендикулярна к  $v_p$ , то электрон опишет окружность, радиус которой мы найдём, приравняв  $F_p$  центростремительной силе инерции

$$ev_p \mathcal{H} = \frac{mv_p^2}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{v_p}{\frac{e}{m} \mathcal{H}}, \quad v_p = \frac{e}{m} \mathcal{H} \rho.$$

Время  $t$ , необходимое для того, чтобы электрон описал полную окружность, будет

$$t = \frac{2\pi\rho}{v_p} = \frac{2\pi}{\frac{e}{m} \mathcal{H}}. \quad (8,2)$$

Оказывается, следовательно, что  $t$  не зависит от радиуса  $\rho$ . Таким образом, если представить себе несколько электронов, одновременно выходящих из одной точки с различными скоростями  $v_p$ , перпендикулярными к  $\mathcal{H}$ , то все эти электроны, описав окружности различного радиуса, одновременно вернуться в исходную точку. Это показано на рис. 11 справа, где изображены проекции путей электронов, обладающих различными составляющими скорости  $v_p$ , на плоскость, перпендикулярную к направлению магнитного поля.

На продольную компоненту скорости магнитное поле не оказывает влияния. Поэтому за промежуток времени  $t$  электроны продвинулись вдоль оси соленоида, создающего поле, на расстояние

$$l = v_t t = \frac{2\pi v \cos \alpha}{\frac{e}{m} \mathcal{H}} \quad (8,3)$$

Если угол  $\alpha$  мал, то  $\cos \alpha \approx 1$ , и (8,3) принимает вид

$$l = \frac{2\pi v}{\frac{e}{m} \mathcal{H}}, \quad (8,4)$$

т. е. все электроны, вылетающие из отверстия диафрагмы с одной и той же абсолютной величиной скорости  $v$ , за промежуток времени, в течение которого проекции этих электронов на плоскость, перпендикулярную к оси соленоида, описывают полную окружность, продвигаются вдоль оси соленоида на одно и то же расстояние  $l$ . Отсюда следует, что расходящийся пучок электронов одинаковой энергии под действием продольного магнитного поля фокусируется на расстоянии  $l$ .

Это фокусирующее действие соленоида и лежит в основе метода продольного магнитного поля. Электроны, выходящие из отверстия диафрагмы  $S$  (рис. 11) и развёрнутые предварительно в расходящийся пучок переменным электрическим полем  $\mathcal{E}$ , попадают внутрь соленоида. Подбирая соответствующую величину напряжённости поля  $\mathcal{H}$ , можно добиться того, чтобы пучок электронов фокусировался как раз у противоположной диафрагме конца соленоида, где помещён флуоресцирующий экран. Зная необходимое для этого поле, можно сейчас же вычислить  $e/m$ . Действительно, из (8,4) находим

$$v = \frac{l}{2\pi} \frac{e}{m} \mathcal{H}.$$

Подставляя это выражение для скорости в уравнение энергии

$$\frac{mv^2}{2} = eV, \quad (5,4)$$

легко получим

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{\mathcal{H}^2 l^2}. \quad (8,5)$$

Результат последних (1939 г.) [измерений, выполненных этим методом, таков:

$$\frac{e}{m} = (1,7586 \pm 0,0023) \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot \text{e}^{-1}.$$



Наиболее точное значение удельного заряда электрона, полученное в результате критической оценки измерений, выполненных различными методами, есть

$$\frac{e}{m} = (1,7592 \pm 0,0005) \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot e^{-1}. \quad (8,6)$$

Сравним теперь массу электрона с массой водородного атома. Для этого нужно прежде всего найти величину  $e/m_H$ , т. е. отношение заряда электрона к массе атома водорода. Легко видеть, что это последнее отношение равно отношению числа Фарадея  $F$  к атомному весу водорода  $H^1$ . Действительно, так как  $F = Ne$  ( $N$  — постоянная Авогадро) и  $H^1 = Nm_H$ , то  $\frac{F}{H^1} = \frac{e}{m_H}$ . Из наиболее точных измерений  $F$  и  $H^1$  получается

$$\frac{e}{m_H} = (9573,5 \pm 1) \text{ CGSM} \cdot e^{-1}. \quad (8,7)$$

Комбинируя (8,6) и (8,7), находим

$$\frac{m_H}{m} = 1837,5.$$

Итак, масса электрона в 1837,5 раза меньше массы водородного атома.

### § 9. Фокусировка и монохроматизация пучков заряженных частиц

Рассмотрим здесь попутно методы получения пучков частиц постоянной скорости (монохроматизация, фильтры скоростей) и методы фокусировки пучков заряженных частиц. Знакомство с этими методами понадобится нам в дальнейшем.

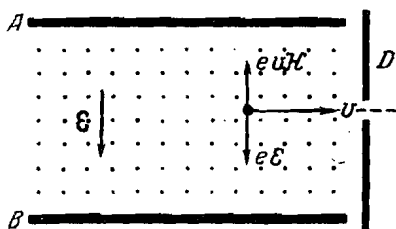


Рис. 12. Схема фильтра скоростей заряженных частиц.

Самый простой фильтр скоростей устроен так: пучок заряженных частиц пропускается одновременно через электрическое и магнитное поля, направленные перпендикулярно друг к другу и притом так, что они

дают отклонения в противоположных направлениях.

На рис. 12 магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости чертежа и действует на положительно заряженную частицу с силой  $evH$ , лежащей в плоскости чертежа. В той же плоскости лежит и сила  $eE$ , с которой действует на заряд

электрическое поле конденсатора  $AB$ . Если выбрать направления полей так, чтобы обе силы были направлены в противоположные стороны, то результирующая сила будет  $ev\mathcal{H} - e\mathcal{E}$ . Под влиянием этой силы частица движется, вообще говоря, по кривой с радиусом кривизны  $\rho$ . Приравнявая силу, действующую на частицу, центробежной силе инерции, получаем

$$ev\mathcal{H} - e\mathcal{E} = \frac{mv^2}{\rho}. \tag{9,1}$$

Очевидно, что через конденсатор пройдут только те частицы, скорость которых такова, что обе силы  $ev\mathcal{H}$  и  $e\mathcal{E}$  друг друга компенсируют. В этом случае

$$ev\mathcal{H} - e\mathcal{E} = 0 \text{ и } v = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}}. \tag{9,2}$$

Частицы со скоростями, не удовлетворяющими соотношению (9,2), будут притянуты пластинками конденсатора и удалены из пучка или, во всяком случае, задержаны диафрагмой  $D$ .

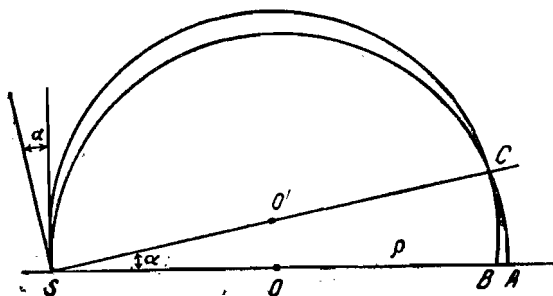


Рис. 13. Фокусировка поперечным однородным магнитным полем.

Для фокусировки частиц очень часто пользуются действием однородного поперечного магнитного поля.

Пусть источник частиц лежит в  $S$  (рис. 13) и пусть все частицы характеризуются одной и той же величиной  $mv/e$ . Частица, вылетающая вертикально вверх, опишет полуокружность диаметром  $SA = 2 \frac{mv}{e\mathcal{H}} = 2\rho$ ; какая-нибудь другая частица, вылетающая под углом  $\alpha$  к первой, тем же радиусом опишет дугу круга, которая пересечёт линию  $SA$  в точке  $B$ . Легко видеть, что

$$AB = 2\rho (1 - \cos \alpha).$$

Если угол  $\alpha$  достаточно мал, то можно воспользоваться разложением косинуса в степенной ряд  $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$  и взять

только первые два члена; тогда

$$AB = \rho \alpha^2.$$

Например, если  $\rho = 5 \text{ см}$ ,  $\alpha = 3^\circ = 0,05$ , то  $AB = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ . Очевидно, что все частицы, направления которых при вылете из  $S$  лежат в пределах угла  $\alpha$ , описав соответствующую дугу, пересекут  $SA$  между  $A$  и  $B$ . Поэтому если источником  $S$  служит щель, через которую проходят частицы, то  $AB$  будет «изображением» этой щели в виде узкой линии; поперечное однородное магнитное поле действует, таким образом, как цилиндрическая линза.

Другой тип фильтров, получивший в последнее время широкое распространение, основан на действии радиального

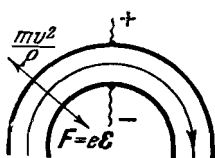


Рис. 14. Положительно заряженная частица в радиальном электрическом поле цилиндрического конденсатора.

электрического поля в цилиндрическом конденсаторе. Рассмотрим частицу с зарядом  $e$ , попадающую в цилиндрический конденсатор (рис. 14). Очевидно, что частица беспрепятственно пройдет через конденсатор в том случае, если действующая на неё со стороны поля сила  $e\mathcal{E}$  будет равна центробежной силе инерции

$$e\mathcal{E} = \frac{mv^2}{\rho}.$$

В цилиндрическом конденсаторе поле обладает радиальной симметрией, и потому

$$|\mathcal{E}| = \frac{dV}{d\rho}.$$

Следовательно, условие беспрепятственного прохождения частицы через конденсатор будет

$$e \frac{dV}{d\rho} = \frac{mv^2}{\rho}. \quad (9,3)$$

Выражая кинетическую энергию  $mv^2$  через ускоряющий потенциал:  $mv^2 = 2eV_0$ , и разделяя переменные в уравнении (9,3), получим

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2V_0} dV.$$

Полагая радиусы внешней и внутренней обкладок равными соответственно  $\rho_2$  и  $\rho_1$ , потенциал внешней обкладки — равным  $V_k$ , а внутренней — равным 0 и интегрируя при этих условиях, получим

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2V_0} \int_0^{V_k} dV,$$

откуда

$$V_k = 2V_0 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (9,4)$$

Мы видим, таким образом, что каждой разности потенциалов  $V_k$  на обкладках конденсатора соответствует энергия электронов  $V_0$ , при которой они могут пройти через конденсатор.

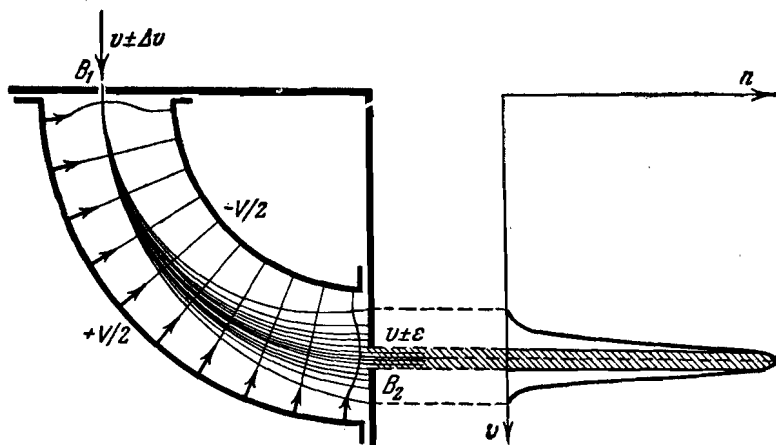


Рис. 15. Цилиндрический конденсатор как фильтр скоростей. (Стрелками обозначены силовые линии электрического поля; справа на графике  $n$  — число частиц,  $v$  — их скорость.)

На рис. 15 изображена схема действия цилиндрического конденсатора как фильтра скоростей. Видно, что если через щель  $B_1$  поступает пучок электронов, скорости которых лежат в интервале  $v \pm \Delta v$ , то через щель  $B_2$  пройдут электроны со скоростями, лежащими в более узком интервале  $v \pm \epsilon$ . В правой части рисунка дано графическое изображение распределения электронов по скоростям до фильтрации и после неё (заштрихованная часть).

Наиболее замечательная особенность рассматриваемого фильтра состоит в том, что он обладает способностью фокусировать расходящиеся пучки. Юз и Рожанский показали теоретическим расчётом и подтвердили экспериментально, что расходящийся пучок, выходящий из щели  $S$ , вновь фокусируется, описав в цилиндрическом конденсаторе дугу  $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 127^\circ, 17'$  (рис. 16).

Таким образом, радиальное электрическое поле цилиндрического конденсатора действует на расходящийся поток заряженных частиц совершенно так же, как поперечное однородное магнитное поле. В некоторых отношениях, однако, применение электрического поля вместо магнитного представляет преимуще-  
ства. Например, при помощи экранов гораздо легче ограничить электрическое поле, чем магнитное.

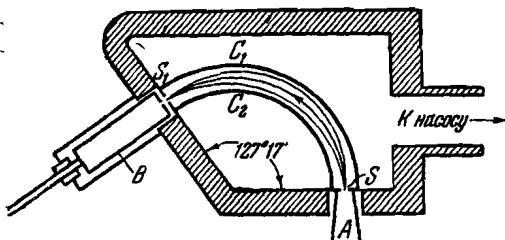


Рис. 16. Фокусирующее действие радиально-го электрического поля. А — источник заряженных частиц; В — фарадеев цилиндр; C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> — пластины цилиндрического конденсатора; S, S<sub>1</sub> — щели.

экспериментальное подтверждение этого важнейшего факта принадлежит Кауфману, работа которого была опубликована в 1901 г., т. е. ещё за четыре года до появления теории относительности.

Сущность его метода состоит в том, что электроны пропускаются одновременно через поперечные электрическое и магнитное поля, расположенные параллельно или антипараллельно, так что отклонения в том и другом полях перпендикулярны друг к другу. Параллельный пучок электронов, обладающих одной и той же скоростью, проходит между пластинками конденсатора, в пространстве между которыми возбуждено также и магнитное поле (рис. 17). Направления полей показаны на рисунке стрелками. Отклонение в электрическом поле будет направлено вправо и равно, например,  $OA = x$ ; отклонение в магнитном поле будет направлено вверх и равно, например,  $OB = z$  (следует помнить, что электроны несут отрицательный заряд; поэтому отклонения положительно заряженных частиц были бы, соответственно, влево и вниз). Формулы § 4 дают

$$z = A \frac{e}{mv}, \quad (4,8)$$

$$x = B \frac{e}{mv^2}, \quad (4,11)$$

где А и В — постоянные прибора. Все электроны, имеющие постоянную скорость, будут попадать после прохождения через

## § 10. Зависимость массы электрона от его скорости

При скоростях электронов, близких к скорости света, обнаруживается зависимость массы от скорости. Первое

оба поля в точку  $C$  фотопластинки. Пусть теперь пучок неоднороден и содержит электроны всевозможных скоростей. В этом случае следы электронов на фотопластинке расположатся по некоторой кривой, форму которой мы найдём, исключив из (4,8) и (4,11) скорость  $v$ . Возведя первое из них в квадрат и разделив на второе, получаем

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2 e}{B m}. \quad (10,1)$$

Если  $e/m$  постоянно и, следовательно,

$$\frac{A^2}{B} \cdot \frac{e}{m} = K = \text{const.},$$

то

$$z^2 = Kx, \quad (10,2)$$

и искомая кривая должна быть отрезком параболы. Переключая электрическое поле то в одну, то в другую сторону, при неизменном направлении магнитного поля мы должны были бы получить два отрезка параболы, расположенных так, что общей касательной их в точке  $O$  служит ось  $z$  (рис. 18, а). В опытах Кауфмана,

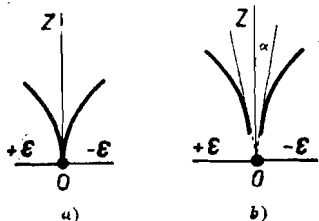


Рис. 18.

выполненных с таким расположением и с препаратом радия в качестве источника электронов, обнаружилось, что отрезки кривых, полученные в результате опыта, не являются отрезками параболы. Уже это показывает, что  $e/m$  в (10,1) не остаётся постоянным, т. е. что масса зависит от скорости. На рис. 18, б схематически представлен вид фотографии, полученной Кауфманом. Пятно, вызванное неотклоняемыми в магнитном и электрическом полях  $\gamma$ -лучами радия, фиксирует начало координат. Видно, однако, что отрезки кривых не доходят до начала координат, несмотря на то, что в пучке присутствовали электроны со скоростями, мало отличающимися от скорости света. Видно также, что касательные, проведённые к продолжениям обоих отрезков в точке  $O$ , не совпадают с осью  $z$ , но образуют с ней угол  $\alpha$ , отличный от нуля. Поэтому

$\frac{z^2}{x}$  имеет конечное значение при  $z = 0$ , а следовательно,  $\frac{z^2}{x} = \frac{z}{x} z = 0$ .

Такие фотографии позволяют найти  $e/m$  для различных скоро-

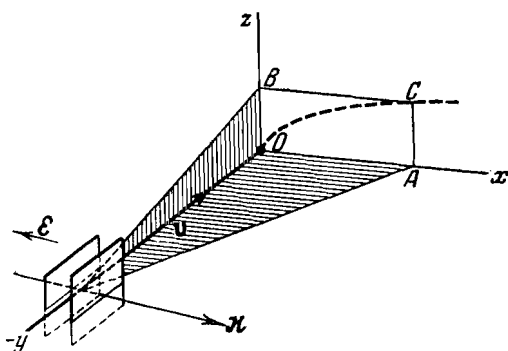


Рис. 17. Электроны в поперечных электрическом и магнитном полях.

стей электронов, какова бы ни была форма следов. В самом деле, измерив координаты какой-либо точки кривой, можно вычислить  $e/m$  и  $v$  при помощи формул (4,8) и (4,11). Ввиду того, что следы, получаемые на фотопластинке, довольно размыты, большой точности такие измерения дать не могут; однако они качественно показывают вне всякого сомнения, что масса возрастает со скоростью. Например, Кауфман получил следующие результаты:

$v$ см/сек	$e/m$ CGSM · $c^{-1}$
$2,36 \cdot 10^{10}$	$1,31 \cdot 10^7$
$2,59 \cdot 10^{10}$	$0,97 \cdot 10^7$
$2,83 \cdot 10^{10}$	$0,63 \cdot 10^7$

Для количественного установления вида зависимости массы от скорости точность опыта Кауфмана недостаточна.

В то время, когда он производил свои опыты, речь могла идти о выборе между двумя формулами: 1) формулой Абрагама, в основе вывода которой лежало представление об электроне как о жёстком и несжимаемом шарике:

$$m = m_0 \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{\beta} \left( \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta} - 1 \right),$$

и 2) формулой Лоренца

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left( \beta = \frac{v}{c} \right),$$

отвечающей представлению об электроне, сжимающемся по направлению движения. Как известно, последняя формула вытекает также из теории относительности. Ввиду большой принципиальной важности решения вопроса о том, какая из этих двух формул ближе отвечает действительности, за работой Кауфмана последовал длинный ряд других работ (Бухерера, Неймана и др.), и возникла полемика. Причина этого заключается в исключительной трудности соответствующих экспериментов и крайне малой разнице в численных результатах, даваемых обеими формулами.

Все упомянутые экспериментаторы интерпретировали свои результаты в пользу формулы Лоренца—Эйнштейна. Однако их опыты не были свободны от возражений. Более убедительные результаты были получены Гюи, Лаванши и Ратновским (1921 г.), но их опыты были выполнены с катодными лучами в ограниченном интервале скоростей от  $\beta = 0,2$  до  $\beta = 0,5$ .

Не останавливаясь на истории вопроса, мы рассмотрим только результаты последних работ, в которых учтены все возражения, сделанные по поводу предшествующих исследований. В опытах Триккера, идея которых принадлежит П. Л. Капице, была использована фокусировка электронов продольным магнитным полем соленоида (см. § 8). Расходящийся пучок электронов, испускаемых радиоактивным препаратом *A* (рис. 19) со скоростями до  $\beta = 0,8$ , ограничивался кольцевой диафрагмой *C*. Магнитное поле соленоида (не показанного на чертеже) собирало этот пучок в фокусе на фотоплёнке *E*, расположенной по оси прибора. Электроны, выбрасываемые радиоактивным препаратом, можно было ускорять или замедлять электрическим полем в 5000 В, прикладываемым между *B* и *D*. При скорости электронов  $\beta = 0,8$ , которой соответствует ускоряющий потенциал  $340,5 \cdot 10^6$  В, отношение  $m/m_0$  по формуле Лоренца—Эйнштейна равно 1,666; изменение ускоряющего потенциала на 5000 В вызывает изменение массы всего на 0,06%, что лежит за пределами погрешностей опыта. Поэтому поле в 5000 В заметно ускоряет или тормозит электроны, но практически не изменяет их массы. Из формулы (8,4) следует, что изменение скорости на  $\Delta v$  смещает фокус на

$$\Delta l = \frac{2\pi\Delta v}{\frac{e}{m} \mathcal{H}}$$

Зная  $\Delta v$  и  $\mathcal{H}$  и измеряя  $\Delta l$  по смещению фокуса на фотоплёнке, можно отсюда вычислить  $e/m$ .

Измерения Триккера показали, что при скоростях электронов вплоть до 0,8 скорости света изменение массы со скоростью следует формуле Лоренца—Эйнштейна с точностью в 1—2%, тогда как разница между результатами, даваемыми формулами Абрагама и Лоренца—Эйнштейна, составляет при этих условиях около 5%.

Другой метод определения зависимости массы от скорости был применён Цаном и Списсом (1938 г.). Идея этого метода состоит в следующем.

Пусть в *A* (рис. 20) расположен источник электронов. Если имеется однородное магнитное поле  $\mathcal{H}$ , перпендикулярное к плоскости чертежа, то щели  $S_1$  и  $S_2$  выделяют из пучка

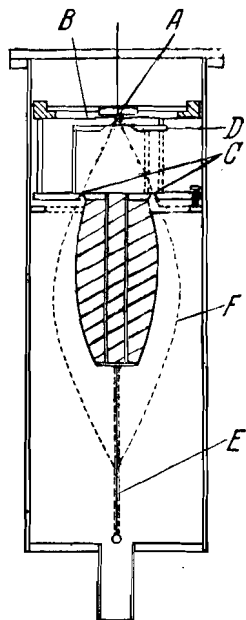


Рис. 19. Схема опыта Капицы — Триккера.



те электроны, скорости которых удовлетворяют условию

$$\frac{mv^2}{\rho} = ev\mathcal{E}, \quad (10,3)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны траектории, определяемой расположением щелей  $S_1, S_2, S_3$ . Электроны, прошедшие через щели  $S_1$  и  $S_2$ , попадают затем в конденсатор  $C$ . Ввиду наличия магнитного поля, перпендикулярного к электрическому, этот конденсатор служит фильтром (см. § 9), который производит более точную монохроматизацию скоростей электронов. В  $G$  расположен воспринимающий прибор (счётчик Гейгера, описание см. в т. II, гл. XVIII), при помощи которого можно считать отдельные электроны, прошедшие через все щели и конденсатор. Опыт

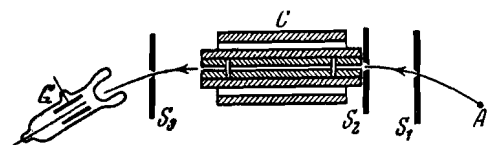


Рис. 20. Схема опыта Цана и Списса.

состоит в том, что при данной величине магнитного поля подбирают разность потенциалов на пластинках конденсатора так, чтобы число электронов, регистрируемых счётчиком  $G$ , было максимальным. Если  $\mathcal{E}$  — напряжённость поля в конденсаторе, то согласно формуле (9,2) через него пройдут только те электроны, скорость которых удовлетворяет требованию

$$v = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}}. \quad (9,2)$$

Комбинируя эту формулу с (10,3), получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{\mathcal{E}}{\rho \mathcal{H}^2}. \quad (10,4)$$

Опыты Цана и Списса, так же как и опыты Капицы — Триккера, показали, что расхождение между результатами, вычисленными по формуле Лоренца — Эйнштейна, не превосходит 1,5% для скоростей электронов  $\beta = 0,745$ .

Таким образом, в настоящее время можно считать, что формула Лоренца — Эйнштейна получила экспериментальное подтверждение в указанных пределах точности и для указанного интервала скоростей. На основании общих соображений ясно, что нет никаких причин сомневаться в правильности этой формулы для любых скоростей, сколь угодно близких к скорости света. Однако, принимая во внимание выдающуюся важность этой формулы как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения (см. в особенности главы об атомном ядре и о космических

лучах), было бы желательно иметь добавочное подтверждение её для более широкого интервала скоростей и с максимальной точностью, доступной на современном уровне экспериментальной техники.

### § 11. Электромагнитная масса

В связи с результатами опытов, установивших зависимость массы электрона от его скорости, мы кратко коснёмся вопроса о так называемой электромагнитной массе. Уже в 1881 г. Дж. Дж. Томсон высказал и теоретически обосновал предположение о том, что вся масса электрона — электромагнитного происхождения. Это предположение было впоследствии целиком принято и развито, в особенности Г. А. Лоренцем, А. Пуанкаре и М. Абрагамом.

Основания для такого предположения состоят в следующем. Покоящийся электрон обладает только электростатическим полем; если же его привести в движение, то возникает ещё и магнитное поле, на создание которого нужно затратить некоторую добавочную работу. Обратно, если остановить движущийся электрон, то магнитное поле должно при этом исчезнуть. Но исчезновение магнитного поля по закону индукции вызовет появление электрического добавочного поля, и легко видеть, что оно будет иметь такое направление, что будет стремиться ускорить тормозящийся электрон. Всё происходит так, как если бы с полем электрона была связана некоторая добавочная инерция. Поэтому мы имеем право рассматривать количество движения электрона как сумму двух слагаемых: «обыкновенного» или механического количества движения  $p_m$  и количества движения, обусловленного инерцией поля  $p_e$ :

$$p = p_m + p_e.$$

По второму закону Ньютона

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dp_m}{dt} + \frac{dp_e}{dt}.$$

Но изменение «механического» количества движения  $\frac{dp_m}{dt}$  есть просто  $m_m \dot{v}$ , где  $m_m$  — «механическая масса». Если мы представим и  $p_e$  как произведение  $m_e \dot{v}$ , то коэффициент  $m_e$  и будет электромагнитной массой:

$$F = (m_m + m_e) \dot{v} = m \dot{v}, \quad (11,1)$$

где  $m = m_m + m_e$ .

Величина добавочной массы  $m_e$  может быть легко вычислена при определённых предположениях относительно структуры электрона. В самом деле электрон, движущийся со скоростью  $v$ , можно рассматривать как электрический ток с плотностью  $ev$ .

Его магнитное поле в точке  $P$ , отстоящей на расстоянии  $r$  от электрона, будет поэтому \*)

$$\mathcal{H} = \frac{ev \sin \vartheta}{cr^2}.$$

Плотность энергии этого поля есть  $\frac{\mathcal{H}^2}{8\pi}$ , а энергия в элементе объема  $d\tau$ , расположенном около точки  $P$ , будет

$$dE = \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} d\tau = \frac{e^2 v^2 \sin^2 \theta}{8\pi c^2 r^4} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (11,2)$$

Для отыскания полной энергии, связанной с магнитным полем, допустим сначала, что электрон есть шарик радиуса  $r_0$  и что электричество равномерно распределено по его поверхности. Тогда поле внутри электрона будет равно нулю, а вне его — распределено со сферической симметрией, и для отыскания полной энергии магнитного поля следует проинтегрировать (11,2) по всем возможным углам  $\vartheta$  и  $\varphi$  и по радиусу-вектору  $r$  — от  $r_0$  до  $\infty$ . Итак, имеем

$$E = \frac{e^2 v^2}{8\pi c^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{e^2 v^2}{4r_0 c^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta.$$

Интеграл по  $\vartheta$  равен  $\frac{4}{3}$  (см. § 64). Окончательно находим

$$E = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2}. \quad (11,3)$$

Если покоящийся электрон под действием некоторой внешней силы привести в движение со скоростью  $v$  (малой по сравнению со скоростью света), то работа, которую при этом необходимо будет затратить, пойдёт не только на увеличение кинетической энергии от 0 до  $\frac{1}{2} m_m v^2$ , но и на создание магнитного поля с энергией (11,3). Результат, следовательно, будет такой, как если бы масса электрона была больше  $m_m$ . Добавочная масса  $m_e$  определится из условия

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2},$$

откуда

$$m_e = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0 c^2}. \quad (11,4)$$

Результат этот, как видно из предыдущего, получен на основании предположения о поверхностном распределении электри-

\*) См., например, Р. Беккер, Теория электричества, т. II, стр. 43, Гостехиздат, 1941.

чества. При других предположениях получаются несколько отличные результаты. Например, в случае допущения объёмного распределения по сфере радиуса  $r_0$  вычисление даёт

$$m_e = \frac{4}{5} \frac{e^2}{r_0 c^2}. \quad (11,5)$$

Как уже было сказано, в начале развития электронной теории получило широкое признание предположение о том, что вся масса электрона — электромагнитного происхождения, т. е. что  $m_m = 0$  и  $m_e = m$ . Это предположение, как казалось, подтверждалось тем, что формула для зависимости массы от скорости, найденная Лоренцем на основании гипотезы о чисто электромагнитной природе массы,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (11,6)$$

даёт результаты, хорошо подтверждаемые опытом. Однако этот аргумент в настоящее время не может считаться убедительным, так как из теории относительности следует, что *любая* масса, независимо от её происхождения, должна зависеть от скорости по формуле (11,6). Поэтому из того факта, что формула (11,6) подтверждается опытом, никаких заключений о происхождении массы электрона сделать нельзя.

Предположение о том, что вся масса электрона обусловлена его электромагнитным полем, позволяет вычислить так называемый «классический радиус» электрона. Формулы (11,4) и (11,5) дают соответственно для поверхностного и объёмного распределения заряда

$$r_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2}, \quad (11,4')$$

$$r_0 = \frac{4}{5} \frac{e^2}{mc^2}. \quad (11,5')$$

Оба выражения мало отличаются друг от друга\*). Поскольку

\*) Нетрудно убедиться в том, что минимальная величина «радиуса» покоящегося электрона, совместимая с гипотезой о чисто электрическом происхождении массы, есть  $\frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2}$ . В самом деле, напряжённость электростатического поля точечного заряда есть

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^2}.$$

Полная энергия поля равна

$$E = \frac{1}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 d\tau.$$

Для вычисления  $E$  допустим опять, что заряд расположен на поверхности сферы радиуса  $a$ . Тогда внутри сферы  $\mathcal{E}$  равно нулю и для вычисления

любые гипотезы о структуре электрона пока ещё совершенно произвольны, можно вообще не считаться с множителями порядка 1 (т. е.  $\frac{2}{3}$  или  $\frac{4}{5}$ ) и получить для  $r_0$  следующее простое выражение:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}. \quad (11,7)$$

Численное значение  $r_0$ , вычисляемое по формуле (11,7), обычно и называется «классическим радиусом» электрона. Найдём его величину

$$r_0 = \frac{e}{c} \cdot \frac{e}{mc} = \frac{4,80 \cdot 10^{-10}}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 1,76 \cdot 10^7 = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Прямого экспериментального метода определения «радиуса электрона» не существует. Имеются, однако, факты, указывающие на то, что «эффективное сечение» электрона, обнаруживаемое им, например, при взаимодействии со светом, — порядка  $r_0^2$ . Так, например, теория рассеяния рентгеновских лучей свободными электронами приводит к выражению для эффективного сечения электрона (см. § 32)

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Тем не менее представление об электроне как об электрическом заряде, занимающем объём радиусом порядка  $r_0$ , явно несостоятельно. Это следует уже из того, что силы, удерживающие этот заряд в конечном объёме, не могут быть только электромагнитными. В самом деле, при отсутствии других сил, помимо электромагнитных, электрон не мог бы сохранять свою устойчивость: взаимное электростатическое отталкивание частей любым образом

полной энергии поля интегрирование по  $r$  следует выполнить (как на стр. 42) от  $a$  до  $\infty$ :

$$E = \frac{e^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2a}.$$

Согласно теории относительности (см. § 61) любой энергии  $E$  соответствует масса  $\frac{E}{c^2}$ . Поэтому, вообще говоря,

$$m = m_m + \frac{E}{c^2} = m_m + \frac{e^2}{2ac^2}.$$

Допуская, что «механическая» масса  $m_m = 0$ , получаем

$$a = \frac{e^2}{2mc^2}.$$

Если  $m_m \neq 0$ , то  $a > \frac{e^2}{2mc^2}$ . Итак,  $\frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2}$  есть действительно нижний предел «радиуса» электрона.

распределённого заряда в объёме порядка  $(10^{-13})^3$  неминуемым образом должно было бы «взорвать» электрон.

Из этого следует, что для равновесия электрона необходимо допустить существование других сил, кроме электромагнитных. А в таком случае и масса электрона не может быть целиком обусловлена энергией электромагнитного поля. Следует заметить вообще, что проблема природы электрона есть одна из труднейших и ещё нерешённых проблем современной теоретической физики. Допущение конечного радиуса электрона не может быть согласовано с требованиями теории относительности, а представление о точечном электроны ведёт к другим серьёзным затруднениям, так как при  $r_0 \rightarrow 0$  собственная энергия электрона  $\frac{e^2}{r_0}$  стремится к бесконечности. Рассмотрение относящихся сюда вопросов выходит за рамки настоящей книги \*).

Хотя, таким образом, сведение *всей* массы электрона к электромагнитной массе не может считаться оправданным, несомненно, что часть его массы — электромагнитного происхождения.

Открытие электрона, установление у него электромагнитной массы и зависимости массы от скорости, наконец, доказательство того, что электроны являются составной частью всех атомов вещества, — все эти новые факты, открытые в конце XIX и в начале XX столетия, произвели на современников впечатление полной ломки самых основных принципов, на которых покоилось здание физики. Этой ломкой немедленно воспользовались философы-идеалисты, объявившие о «кризисе физики», об «исчезновении материи» и «крахе материализма». Ленин в своём гениальном произведении «Материализм и эмпириокритицизм» подверг уничтожающей критике эти утверждения. Он показал, что новые открытия в физике на самом деле являются ярким подтверждением диалектического материализма. «„Материя исчезает“, — пишет Ленин, — это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идёт глубже; исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса и т. п.) и которые теперь обнаруживаются, как относительные, присущие только некоторым состояниям материи. Ибо единственное „свойство“ материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство *быть объективной реальностью*, существовать вне нашего сознания» \*\*).

\*) Подробнее см. Д. И в а н е н к о и А. С о к о л о в, Классическая теория поля (новые проблемы), гл. IV, § 30, Гостехиздат, 1949.

\*\*\*) В. И. Л е н и н, Материализм и эмпириокритицизм, стр. 243, Госполитиздат, 1948.

## ГЛАВА II

### АТОМЫ. ИЗОТОПЫ

#### § 12. Введение

Предыдущая глава была посвящена атому отрицательного электричества — электрону — как одной из важнейших элементарных частиц. Мы рассмотрели доказательства реальности электрона, а также непосредственные определения величины его заряда и массы. В настоящей главе мы переходим к рассмотрению атомов вещества. Доказательства реальности атомов весьма разнообразны и хорошо известны из элементарных курсов физики и химии, поэтому мы не будем останавливаться на этих доказательствах и сосредоточим внимание прежде всего на важнейшей характеристике атома — его массе.

В химии обычно пользуются не абсолютными, а относительными атомными массами или атомными весами, причём за условную единицу берётся  $1/16$  атомного веса кислорода, который считается равным точно 16. Определение атомных весов производится с макроскопическими количествами вещества при посредстве химических анализов. Получаемые таким путём числа имеют огромное практическое значение и лежат в основе всех химических расчётов. Если предположить, как это и делалось до сравнительно недавнего времени, что все атомы данного элемента имеют одинаковую массу, то, пользуясь законом Авогадро, согласно которому в одном моле любого вещества содержится одно и то же количество молекул, можно при помощи химического атомного веса вычислить и абсолютную массу атома.

В этой главе мы увидим, однако, что химические атомные веса не дают возможности вычислять абсолютные массы атомов. Тем не менее исторически знание химических атомных весов было важно не только с практической точки зрения, но и потому, что с их помощью была открыта важнейшая закономерность, связывающая атомы различных элементов между собою. Эта закономерность проявляется в периодической системе элементов Д. И. Менделеева, с рассмотрения которой мы и начнём эту главу.

### § 13. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева

К середине XIX в. было открыто большое количество химических элементов, и, естественно, возник вопрос—связаны ли эти элементы как-нибудь между собой или их свойства совершенно случайны и не зависят друг от друга. Различные частные закономерности были открыты сравнительно рано, но только Д. И. Менделееву удалось впервые найти общий закон, связывающий все элементы в единую систему, которая является наиболее ярким выражением общности в строении атомов. Для того чтобы правильно оценить гениальную интуицию, благодаря которой Менделеев открыл свою систему, необходимо напомнить некоторые факты.

Первая таблица была опубликована Менделеевым в 1869 г. К этому времени было известно около 63 элементов. Однако при расположении их в систему выяснилось, что только 35 элементов можно разместить уверенно в соответствии с их атомными весами. Положение 8 элементов вызывало недоумение. Например, было непонятно, почему Zn, Cd и Hg попадают в одну группу с Mg, Ca, Sr, Ba; ещё большее недоумение вызывало помещение Mn в одну группу с галогенами (т. е. в VII группу периодической системы). Наконец, для остальных 20 элементов Менделееву пришлось изменить либо их атомные веса, либо порядок следования. Нередко эти изменения были весьма существенными: так, например, атомный вес церия считался равным 92; Менделеев приписал ему атомный вес 138 (современное значение 140,13); атомные веса тория и урана, по данным того времени, были соответственно 116 и 120. Менделеев же указал, что эти атомные веса должны быть 232 и 240. Наконец, некоторые места в таблице Менделеев оставил пустыми, указав на то, что эти места должны быть заняты ещё не открытыми элементами. В частности, он предсказал существование трёх элементов, которые он назвал экабором, экаалюминием и экасилицием, и описал их свойства. Вскоре после этого, в 1875 г., был открыт элемент, названный галлием. Менделеев тотчас же указал на то, что галлий и есть предсказанный им экаалюминий и что он должен иметь атомный вес около 68, удельный вес 6,0—5,9 и атомный объём 11,5. На самом деле атомный вес галлия оказался равным 69,9, удельный вес 5,96 и атомный объём 11,7.

Основной факт, из которого исходил Д. И. Менделеев при построении системы элементов, состоит в том, что если расположить элементы в порядке возрастания атомных весов, то элементы с аналогичными свойствами периодически повторяются. Исходя из этого, ему удалось построить «естественную систему элементов», которая оказалась правильной, несмотря на то, что атомный вес, как выяснилось впоследствии,



не может считаться константой, однозначно определяющей индивидуальные свойства атома. Действительно, ниже мы увидим, что существуют вещества, которые в химическом отношении ведут себя практически одинаковым образом, несмотря на то, что их атомные веса различны. Такие вещества называются *изотопами*, так как вследствие их химической тождественности их необходимо помещать на одно и то же место в периодической системе (слово «изотопы» в буквальном переводе с греческого означает «занимающие одно и то же место»). Химические элементы на самом деле являются смесями изотопов, а их атомные веса, определяемые обычными химическими методами, — средними из атомных весов всех образующих их изотопов. Наряду с атомами, обладающими очень близкими свойствами при различных атомных весах, существуют также атомы, обладающие различными свойствами при одинаковых атомных весах (изобары, см. т. II, гл. XVIII).

Так как, однако, периодическая система элементов оказалась правильной, то её следует рассматривать как фундаментальный закон природы, независимо от того, каким путём она была открыта. Поскольку химический атомный вес в действительности не есть существенный признак *атома*, основной характеристикой элемента является его положение в периодической системе, а это положение определяется номером места, занимаемого данным элементом в таблице Менделеева. Глубокая причина важности этого числа, называемого *атомным номером*, состоит в том, что она является на самом деле не просто порядковым номером, но одной из основных *физических* констант атома, как это будет показано в дальнейшем.

Возможность расположения элементов в правильную систему при помощи атомных весов основана на следующем замечательном факте: если характеризовать данный элемент атомным весом, определяемым химическими методами и являющимся средним из атомных весов всех изотопов данного элемента, то между этим средним атомным весом и атомным номером существует простая монотонная зависимость (рис. 21). В немногих случаях, когда это соответствие нарушается (K—Ag, Te—J, Co—Ni), Менделеев с гениальной интуицией расположил элементы правильно, вопреки их атомным весам.

На рис. 22 и 23 приведены некоторые примеры периодического повторения свойств атомов. Рис. 22 представляет кривую атомных объёмов: по оси абсцисс отложены атомные номера, по оси ординат — атомные объёмы ( $= \frac{\text{атомный вес}}{\text{плотность}}$ ); на рис. 23 представлен

на одной диаграмме ход нескольких физических свойств в зависимости от атомного номера, а именно — верхняя кривая даёт ход обратных величин температуры плавления, средняя кривая —

ход коэффициентов линейного расширения и нижняя—сжимаемости. Видно, что все эти свойства не только испытывают периодические изменения при монотонном возрастании атомного номера (среднего атомного веса), но что максимумы и минимумы у всех

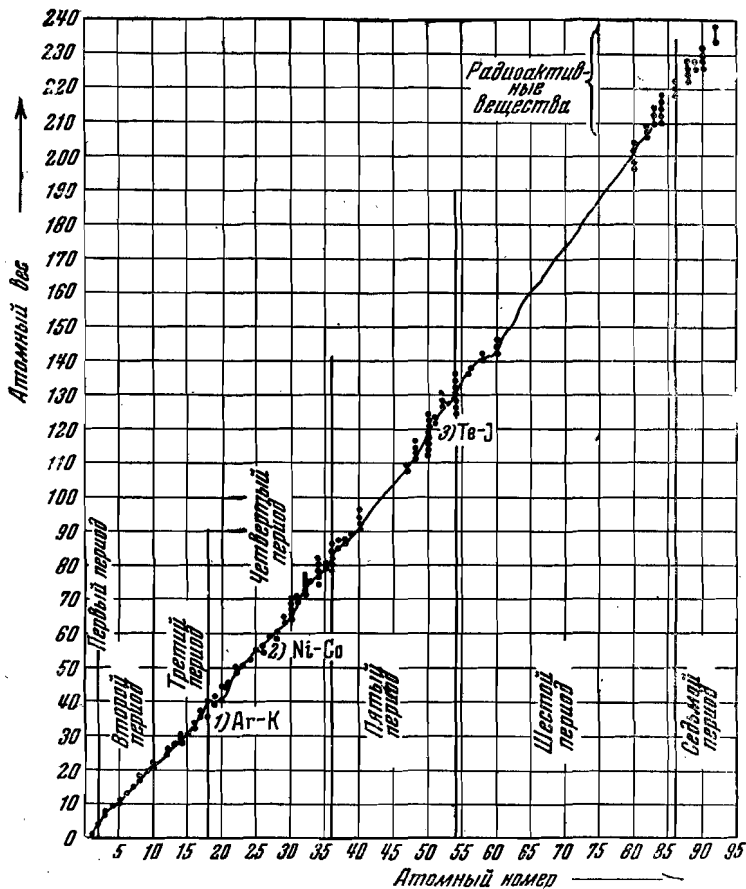


Рис. 21. Атомный вес как функция атомного номера.

кривых приходится на одни и те же значения атомного номера, т. е. что все эти свойства обнаруживают *одинаковую* периодичность.

Внешние формы, которые могут быть приданы естественной системе элементов, весьма разнообразны. Наиболее распространёнными являются таблицы двух видов—с длинными и короткими

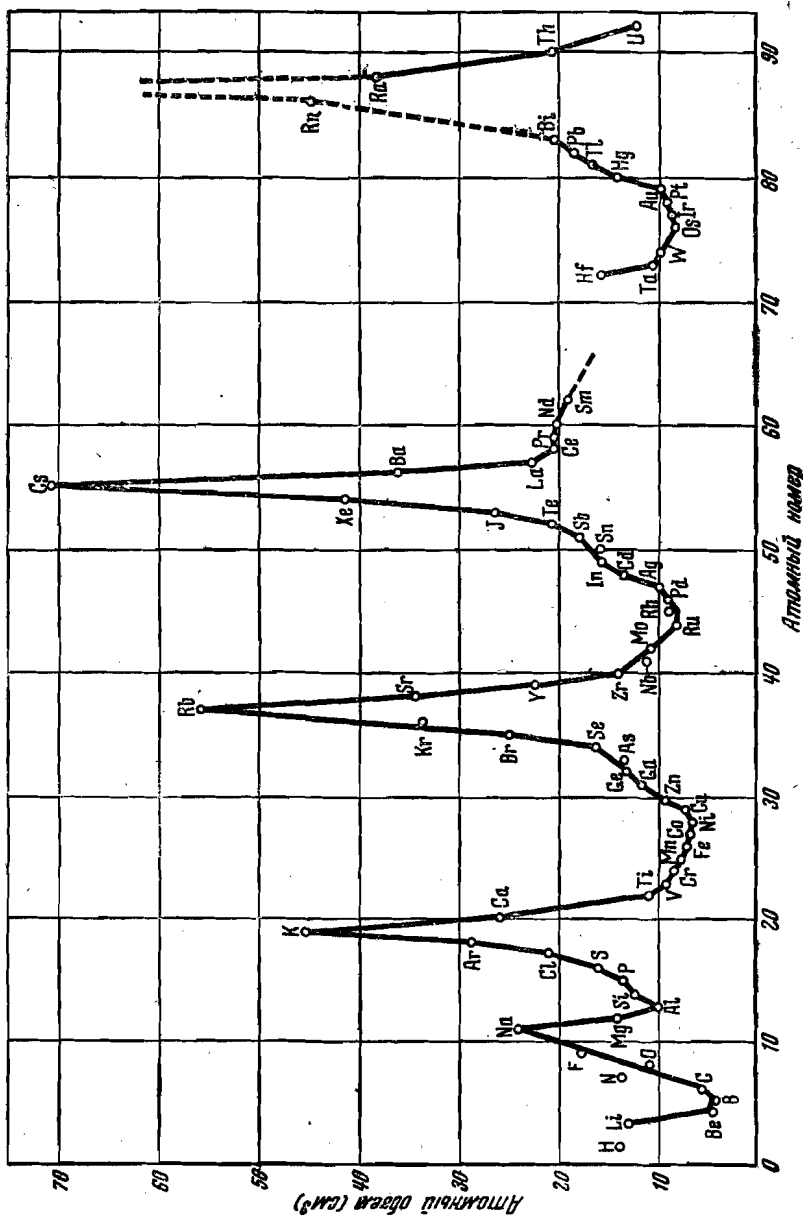


Рис. 22. Периодичность атомных объёмов.

периодами. Теоретически более обоснована таблица с длинными периодами (таблица II на стр. 52).

Рассмотрим последовательные ряды этой таблицы. Первый ряд состоит всего из двух элементов: он начинается одновалентным элементом водородом и заканчивается благородным газом гелием. Третий элемент—литий—снова одновалентен; он является типичным металлом и обладает резко выраженными щелочными свой-

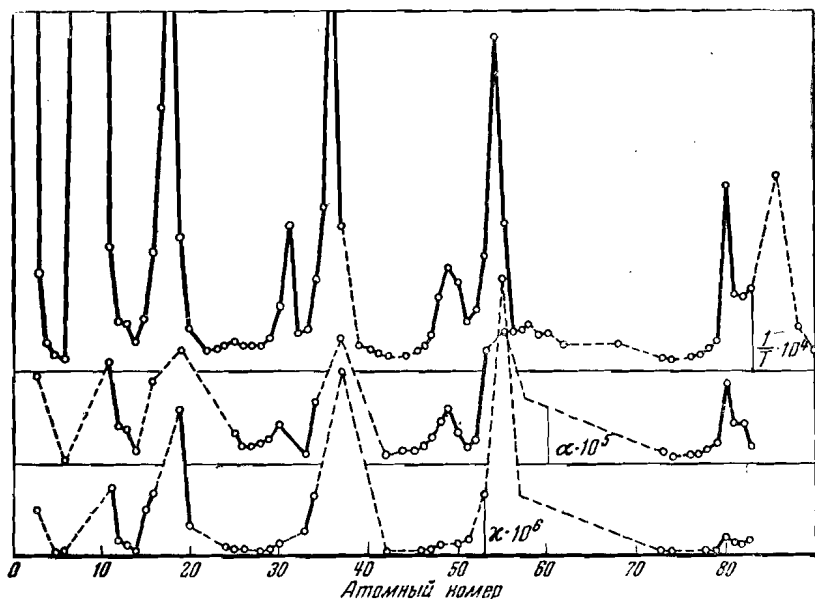


Рис. 23. Периодичность физических свойств. Верхняя кривая—обратные температуры плавления  $\frac{1}{T} \cdot 10^4$ ; средняя кривая—коэффициент линейного расширения  $\alpha \cdot 10^5$ ; нижняя кривая—коэффициент сжимаемости  $\kappa \cdot 10^6$ . В местах, обозначенных пунктиром, достоверных сведений нет.

ствами. По мере продвижения вправо оба эти свойства заметно ослабевают и постепенно проявляются свойства противоположные; наконец, девятый элемент—фтор—оказывается антиподом лития: он является типичным металлоидом и обладает резко выраженными кислотными свойствами. Далее следует благородный газ неон, а за ним щелочной металл натрий (№ 11), и вся картина предыдущего периода повторяется, так что через восемь элементов (считая и натрий) мы вновь встречаем щелочной металл калий, которому предшествует благородный газ аргон (№ 18). Переход от типичных металлов к типичным металлоидам происходит через «амфотерный» элемент—кремний (№ 14), который обладает двумя модификациями: металлической и неметаллической.

Таблица II

1 H 1,0080																2 He 4,003		
3 Li 6,940	4 Be 9,02											5 B 10,82	6 C 12,010	7 N 14,008	8 O 16,000	9 F 19,000	10 Ne 20,183	
11 Na 22,997	12 Mg 24,32											13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 30,98	16 S 32,06	17 Cl 35,457	18 Ar 39,944	
19 K 39,096	20 Ca 40,08	21 Sc 45,10	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,69	29 Cu 63,57	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916	36 Kr 83,7	
37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc 99	44 Ru 101,7	45 Rh 102,91	46 Pd 106,71	47 Ag 107,88	48 Cd 112,41	49 In 114,76	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,92	54 Xe 131,3	
55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57 La 138,92	58—71 см. ряд. La	72 Hf 178,6	73 Ta 180,88	74 W 183,92	75 Re 186,31	76 Os 190,2	77 Ir 193,1	78 Pt 195,23	79 Au 197,2	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po 210	85 At 211	86 Rn 222
87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac 227,05	90—96 см. ряд Ac															

Ряд лантанидов	58 Ce 140,13	59 Pr 140,92	60 Nd 144,27	61 Pm	62 Sm 150,43	63 Eu 152,0	64 Gd 156,9	65 Tb 159,2	66 Dy 162,46	67 Ho 164,94	68 Er 167,2	69 Tu 169,4	70 Yb 173,04	71 Lu 174,99
-------------------	-----------------	-----------------	-----------------	-------	-----------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------

Ряд актиноидов	90 Th 232,12	91 Pa 231	92 U 238,07	93 Np 237	94 Pu 239	95 Am 241	96 Cm 242							
-------------------	-----------------	--------------	----------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--	--	--	--

Таблица III

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	0	
1	1 H 1,0080								2 He 4,003	
2	3 Li 6,940	4 Be 9,02	5 B 10,82	6 C 12,010	7 N 14,008	8 O 16,0000	9 F 19,000		10 Ne 20,183	
3	11 Na 22,997	12 Mg 24,32	13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 30,98	16 S 32,06	17 Cl 35,457		18 Ar 39,944	
4	19 K 39,096	20 Ca 40,08	21 Sc 45,10	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93	26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,69
	29 Cu 63,57	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916			36 Kr 83,7
5	37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	38 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc 99	44 Ru 101,7	45 Rh 102,91	46 Pd 106,71
	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,76	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,92			54 Xe 131,3
6	55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57 La* 138,92	72 Hf 178,6	73 Ta 180,88	74 W 183,92	75 Re 186,31	76 Os 190,2	77 Ir 193,1	78 Pt 195,23
	79 Au 197,2	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po 210	85 At 211			86 Rn 222
7	87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac 227,05	**						

*58—71 Ряд лантанидов	58 Ce 140,13	59 Pr 140,92	60 Nd 144,27	61 Pm	62 Sm 150,43	63 Eu 152,0	64 Gd 156,9	65 Tb 159,2	66 Dy 162,46	67 Ho 164,94	68 Er 167,2	69 Tm 169,4	70 Yb 173,04	71 Lu 174,99
--------------------------	-----------------	-----------------	-----------------	-------	-----------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------

**90—96 Ряд актинидов	90 Th 232,12	91 Pa 231	92 U 238,07	93 Np 237	94 Pu 239	95 Am 241	96 Cm 242							
--------------------------	-----------------	--------------	----------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--	--	--	--	--	--	--

Следующий, четвёртый, период, начинающийся калием, включает уже не 8, а 18 элементов, так как следующий за калием щелочной металл—рубидий—стоит уже на 37-м месте. За рубидием следует новый большой период, также состоящий из 18 элементов и заканчивающийся на 54-м месте благородным газом ксеноном. Далее снова идёт щелочной металл цезий (№ 55), который открывает самый длинный период, содержащий 32 элемента. Среди этих 32 элементов особую группу образуют следующие за лантаном 14 элементов от 58-го до 71-го—редкие земли или «лантаниды»,—обладающие столь близкими химическими свойствами, что разделение их представляет для химика очень трудную задачу. Именно вследствие этой близости химических свойств лантанидов в таблице им уделена одна клетка, а весь ряд приводится отдельно. Последний период, открывающийся 87-м элементом, состоит из неустойчивых естественно-радиоактивных элементов. Самый тяжёлый из встречающихся в природе элементов—уран (№ 92)—до недавнего времени был и последним элементом периодической системы. В последние годы, однако, удалось искусственно получить четыре более тяжёлых—«трансурановых»—элемента №№ 93—96. Исследование их химических свойств и пересмотр химических свойств предшествующих элементов привели к заключению, что следующий за актинием (№ 89) элемент торий (№ 90) открывает группу близких по химическим свойствам элементов—«актинидов», подобную группе редкоземельных металлов—«лантанидов».

Значительно более распространённой является другая форма естественной системы элементов—таблица с короткими периодами (таблица III на стр. 53). Её главным преимуществом является компактность; недостаток в том, что распределение всех элементов в восемь групп осуществляется довольно искусственным путём введения подгрупп и «триад» (в VIII группе).

#### § 14. Определение истинных масс атомов. Метод парабол

Из предыдущего параграфа следует, что определение истинных, а не средних атомных масс является очень важной задачей. Наиболее точные современные определения атомных масс, основанные исключительно на различии масс индивидуальных атомов и не зависящие от каких бы то ни было других их свойств, осуществляются при помощи отклонения ионов различных газов в электрических и магнитных полях. Впервые такой метод был предложен Дж. Дж. Томсоном.

Если в катоде разрядной трубки, работающей при пониженном давлении (сотые доли мм Hg), сделать отверстие, то ионы, направляющиеся к катоду, проходят через это отверстие и образуют за катодом поток лучей, называемых *канальовыми*. Эти кана-

ловые лучи состоят по преимуществу из положительных ионов тех газов, остатки которых находятся в разрядной трубке; в их состав входят в меньшем числе также нейтральные частицы и отрицательные ионы, возникающие при рекомбинациях положительных ионов и электронов в пространстве за катодом.

Метод Томсона позволяет определять относительные массы отдельных частиц, входящих в состав пучка каналовых лучей, следующим образом. Каналовые лучи получают путём прохождения ионов, которые возникают и ускоряются в разрядной

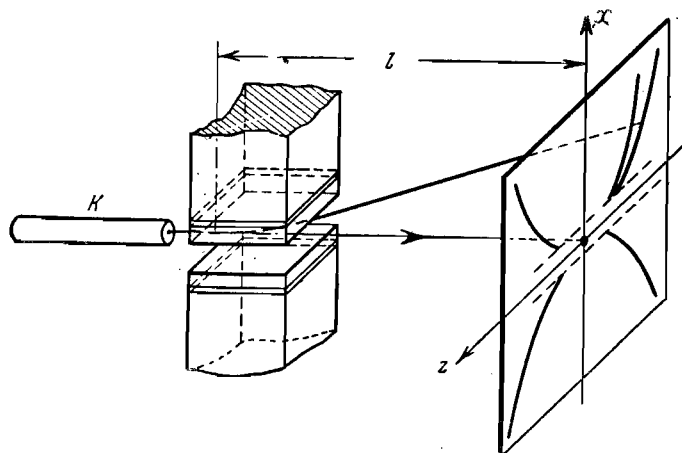


Рис. 24. Схема метода парабол.

трубке, через канал  $K$  (рис. 24) длиной в 2 см и диаметром в 0,1 мм. Благодаря значительной длине канала пучок получается почти параллельным; он содержит частицы различных энергий вплоть до максимальной, определяемой напряжением на трубке. Пучок каналовых частиц подвергается затем действию поперечных полей—электрического и магнитного, направленных параллельно или антипараллельно. При этом заряженные частицы отклоняются электрическим и магнитным полями во взаимно перпендикулярных направлениях, и, как мы видели в § 10, если пучок состоит из частиц одинаковой массы, но различных скоростей, то электрическое и магнитное поля развёртывают его так, что, падая на флуоресцирующий экран, поставленный перпендикулярно к первоначальному направлению пучка или на фотопластинку, он оставляет след в виде отрезка параболы, более подробно изображённой на рис. 25.

Пусть электрическое отклонение будет направлено по оси  $x$ , а магнитное—по оси  $z$ . Тогда, как было показано в § 10, между



$z$  и  $x$  должно иметь место соотношение

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2}{B} \cdot \frac{e}{m}, \quad (10,1)$$

где  $A$  и  $B$ —постоянные прибора (см. § 4). Из (10,1) получаем

$$z^2 \cdot \frac{m}{e} = \frac{A^2}{B} \cdot x. \quad (14,1)$$

Заряд иона может быть только целым кратным заряда электрона (т. е. может быть равен  $+e$ ,  $+2e$ ,...). Если все ионы заряжены однократно, то, как показывает формула (14,1), при постоянном значении абсциссы  $x$  массы ионов обратно пропорциональны квадратам ординат (см. рис. 25).

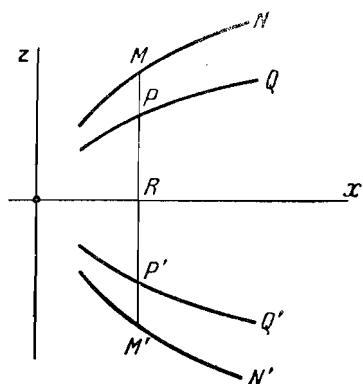


Рис. 25.

Начало координат фиксируется на фотопластинке незаряженными частицами, которые не отклоняются в электрическом и магнитном полях, но никаких осей координат на пластинке, конечно, не имеется. Для того чтобы сделать возможным измерение ординат, необходимый для определения масс, направление магнитного поля в течение опыта меняется (в отличие от опыта по определению зависимости массы электрона от скорости, описанного в § 10, где переключается электрическое поле), и таким путём, кроме отрезков парабол  $MN$ ,  $PQ$ , получают ещё симметричные отрезки  $M'N'$ ,  $P'Q'$ .

Если в пучке наряду с однократно заряженными ионами встречаются и двукратно заряженные (например,  $O^+$  и  $O^{++}$ ), то последние дают параболу, соответствующую половинной массе (например, парабола  $O^{++}$  соответствует массе 8). Однако существуют внешние признаки, при помощи которых можно отличать параболы многократно заряженных частиц от парабол частиц, заряженных однократно.

На рис. 26 приведены две фотографии парабол, полученные этим методом, но с современной усовершенствованной установкой. На левой фотографии отчётливо видны две параболы, образованные однократно заряженными ионами одного и того же вещества — неона, — с очевидностью указывающие на существование у него изотопов с массами 20 и 22. Эти фотографии показывают, что при соответствующей конструкции деталей и правильном расчёте прибора можно получать параболы в виде очень тонких следов, разделённых достаточно большим промежутком при небольшом

различии масс. Максимальная разрешающая способность, которая была получена таким образом, равна  $\frac{1}{600}$ , т. е. две линии, соответствующие массам, различающимся на  $\frac{1}{600}$  своей величины, ещё видны раздельно (при 20-кратном увеличении). Однако существенный недостаток прибора заключается в его крайне малой «светосиле»: для получения резких линий приходится делать очень узкие щели, а электрическое и магнитное поля растягивают, кроме того, поток частиц, вследствие чего интенсивность следа оказывается очень малой. Условия эти несколько напоминают

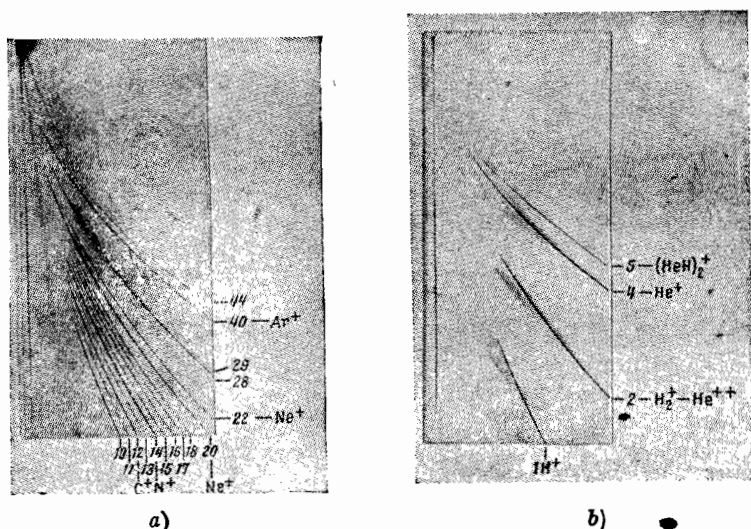


Рис. 26. Параболы ионов различных газов.

то, что имеет место в фотографической камере с малым отверстием без объектива: уменьшая диаметр отверстия, можно получить сколь угодно резкое изображение, но экспозиция при этом увеличивается до практически неприемлемой длительности.

## § 15. Масс-спектрографы

Большим преимуществом перед методом парабол обладают те методы, в которых при помощи различных комбинаций электрических и магнитных полей достигается фокусировка заряженных частиц. Устроенные таким образом приборы называются масс-спектрографами; первый из них был осуществлён Ф. Астоном.

Этот спектрограф имеет следующее устройство. Положительно заряженные ионы получают при разряде в трубке с понижен-

ным давлением. Через отверстие в катоде эти ионы попадают в закатодную часть в виде пучка каналов частиц и подвергаются анализу. С этой целью пучок прежде всего делается параллельным при помощи двух коллиматорных щелей  $B_1$  и  $B_2$  шириной в 0,02 мм (рис. 27). Конденсатор  $P_1P_2$  развёртывает этот пучок, давая частицам отклонение, пропорциональное  $e/mv^2$ . Часть этого развёрнутого пучка, выделенная экраном  $C$  со щелью  $B_3$ , попадает затем в магнитное поле, создаваемое электромагнитом с полюсными наконечниками  $M$ . В отличие от метода Томсона, где магнитное поле направлено параллельно или антипараллельно электрическому, в приборе Астона магнитное поле направлено перпендикулярно к электрическому. Ввиду этого отклонение частиц под действием магнитного поля здесь происходит в той же

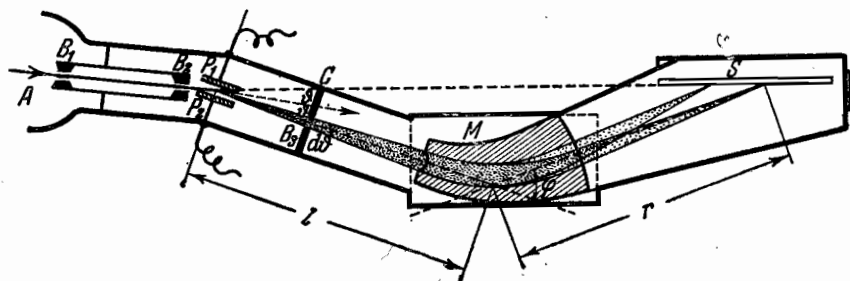


Рис. 27. Схема масс-спектрографа Астона.

плоскости, что и электрическое отклонение, а сторона, в которую направлено магнитное поле, выбирается так, чтобы частицы в нём отклонялись в направлении, противоположном их электрическому отклонению. При таких условиях магнитное поле, в конце концов, собирает частицы, обладающие одинаковой массой (точнее — одинаковой величиной отношения  $e/m$ ), но различными скоростями, в общем фокусе на фотопластинке  $S$ . В самом деле, отклонение, испытываемое ионами в конденсаторе, пропорционально  $e/mv^2$ , а радиус кривизны траектории в магнитном поле по формуле (4,9) пропорционален  $mv/e$ . Поэтому те частицы, которые испытали большее отклонение в электрическом поле, будут описывать в магнитном поле траекторию с меньшим радиусом кривизны (рис. 27). В результате магнитное поле сведёт расходящийся пучок ионов в общем фокусе. Показанная на чертеже специальная форма полюсных наконечников улучшает фокусировку.

Следующая оптическая аналогия позволяет лучше понять действие прибора: параллельный пучок лучей белого света (рис. 28), пройдя через призму  $P_1$ , развёртывается в спектр. Вторая призма  $P_2$ , расположенная вершиной в сторону, противо-

положную первой, и имеющая бóльшую дисперсию, вновь собирает все различно окрашенные лучи в белый «фокус». Здесь первая призма отвечает электрическому полю, вторая — магнитному; лучи различной длины волны — частицам различных скоростей.

Точная теория прибора Астона довольно сложна. Мы приведём здесь только некоторые простые соображения, разъясняющие условия фокусировки частиц. Пусть  $d\vartheta$  будет угловая ширина пучка, развёрнутого электрическим полем и пропущенного щелью  $B_3$ . Если  $l$  есть расстояние от середины конденсатора до центра магнитного поля, а  $r$  — расстояние от центра магнитного поля до фокуса, то в отсутствии магнитного поля пучок, развёрнутый электрическим полем на расстоянии  $l+r$ , приобрёл бы ширину  $(l+r)d\vartheta$ . Для того чтобы осуществилась фокусировка, эта ширина должна быть компенсирована магнитным отклонением, направленным в противоположную сторону. Если  $d\varphi$  есть угловая ширина, которую приобретает пучок вследствие магнитного отклонения, то  $r d\varphi$  будет его линейной шириной на расстоянии  $r$ . Для фокусировки требуется, чтобы отклонение в электрическом поле компенсировалось отклонением в магнитном поле.

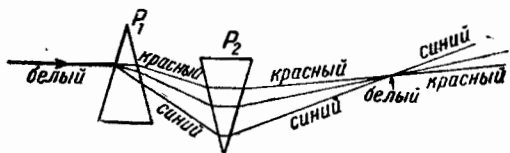


Рис. 28. Оптическая эквивалентная схема масс-спектрографа.

Это даёт условие

$$(l+r)d\vartheta - r d\varphi = 0. \quad (15,1)$$

Рассмотрим сначала пучок, однородный по массам, т. е. положим, что для всех частиц пучка  $e/m = \text{const}$ . Отклонение  $z$  параллельного пучка частиц в однородном электрическом поле по формулам (4,11) и (4,12) будет

$$z = \frac{e}{2mv^2} \mathcal{E} a^2,$$

где  $a$  — длина конденсатора. Отсюда для малых углов отклонения  $\vartheta$  имеем

$$\vartheta \approx \text{tg } \vartheta = \frac{z}{a} = \frac{e}{2mv^2} \mathcal{E} a$$

и, следовательно,

$$\vartheta v^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \mathcal{E} a = \text{const}.$$

Дифференцируя, получаем  $v^2 d\vartheta + 2v\vartheta dv = 0$  или

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -2 \frac{dv}{v}. \quad (15,2)$$

Радиус кривизны траектории в однородном магнитном поле по (4,9) равен

$$\rho = \frac{mv}{e} \frac{1}{\mathcal{H}}.$$

Отсюда угол отклонения  $\varphi$  в магнитном поле

$$\varphi = \frac{L}{\rho} = \frac{e}{mv} L\mathcal{H},$$

где  $L$  — длина пути в магнитном поле. Так же, как и раньше,

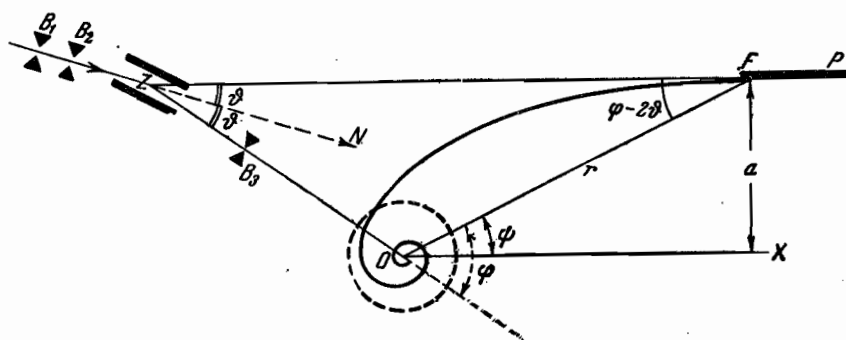


Рис. 29. К условию фокусировки в масс-спектрографе Астона.

получаем  $\varphi v = \frac{e}{m} L\mathcal{H} = \text{const.}$ ,  $\varphi dv + v d\varphi = 0$ ,

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{dv}{v}. \quad (15,3)$$

Подставляя  $d\vartheta$  и  $d\varphi$  из (15,2) и (15,3) в (15,1), находим

$$\frac{dv}{v} [(\varphi - 2\vartheta)r - 2l\vartheta] = 0.$$

Так как  $\frac{dv}{v} \neq 0$ , то это условие будет выполнено, если выражение в скобках равно нулю, т. е.

$$(\varphi - 2\vartheta)r = 2l\vartheta. \quad (15,4)$$

Геометрический смысл этого соотношения можно пояснить при помощи рис. 29. Пусть  $Z$  — середина электрического поля конденсатора,  $O$  — середина магнитного поля,  $F$  — фокус, в котором собираются частицы выбранной нами массы.  $ZN$  есть направление полёта каналовых частиц до того, как они испы-

тали отклонение. Если в треугольнике  $ZOF$  угол при  $Z$  равен  $2\theta$ , как показано на чертеже, то на основании тригонометрической «теоремы синусов» получаем, принимая во внимание, что  $ZO = l$  и  $OF = r$  (см. рис. 27),

$$\frac{r}{\sin 2\theta} = \frac{l}{\sin(\varphi - 2\theta)}. \quad (15,5)$$

Для малых углов соотношение (15,5) сразу даёт (15,4).

До сих пор мы имели в виду частицы с определённым значением  $e/m$ . Формула (15,5) показывает, однако, что если расположить фотопластинку  $FP$  так, чтобы прямая  $ZF$  лежала в её плоскости, то на пластинке одновременно расположатся фокусы для различных  $e/m$ . В самом деле, выберем за полярную ось прямую  $OX$ , параллельную  $ZF$ . Тогда радиус-вектор, проведённый к  $F$ , будет равен  $r$ , а полярный угол  $\psi$ , как видно из чертежа, равен  $\varphi - 2\theta$ . Расстояние  $a$  между  $ZP$  и  $OX$  будет равно

$$a = r \sin(\varphi - 2\theta) = l \sin 2\theta \approx 2l\theta.$$

Но так как угол  $\theta$  фиксирован расположением щели  $B_s$  (рис. 27), то  $a$  есть постоянная величина. Пользуясь обозначениями  $\varphi - 2\theta = \psi$ ,  $2l\theta = a$ , из (15,4) получаем

$$r = \frac{a}{\psi}. \quad (15,6)$$

Ввиду того, что  $a$  — постоянная величина, (15,6) есть уравнение гиперболической спирали\*). Эта спираль делает бесконечное число оборотов, приближаясь к началу координат, но не попадая в него; она имеет асимптоту, параллельную полярной оси и отстоящую от неё на расстоянии  $a$ . Поэтому, если расположить фотопластинку так, чтобы эта асимптота находилась в её плоскости, то все фокусы, которым соответствуют углы  $\psi$ , меньшие некоторой определённой величины, будут лежать в плоскости фотопластинки, чем и обеспечивается резкость линий в масс-спектре.

На рис. 30 приведено несколько масс-спектров, снятых прибором описанного типа. Видно, насколько резки линии этих спектров. Расстояния между ними (дисперсия прибора) настолько велики, что измерения масс и разделение близких масс можно производить с высокой степенью точности. В самом деле, при длине спектра в 16 см на нём укладываются линии атомов, которым соответствуют массы, различающиеся немного более чем в два раза; изменение массы на один процент соответствует расстоянию линий от 1,5 до 3 мм (в разных частях пластинки).

\*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. I, стр. 190, Гостехиздат, 1948.

Для определения масс по этим спектрам поступают следующим образом. Во-первых, нужно выбрать какую-нибудь определённую массу в качестве «стандарта», так как при помощи масс-спектров могут быть определены только *относительные* величины масс. Удобнее всего, конечно, взять за основу массу атома кислорода  $O = 16$ . Во-вторых, для определения неизвестных масс следует построить градуировочную кривую, откладывая на оси абсцисс расстояние линий от одной определённой точки на фотоламине,

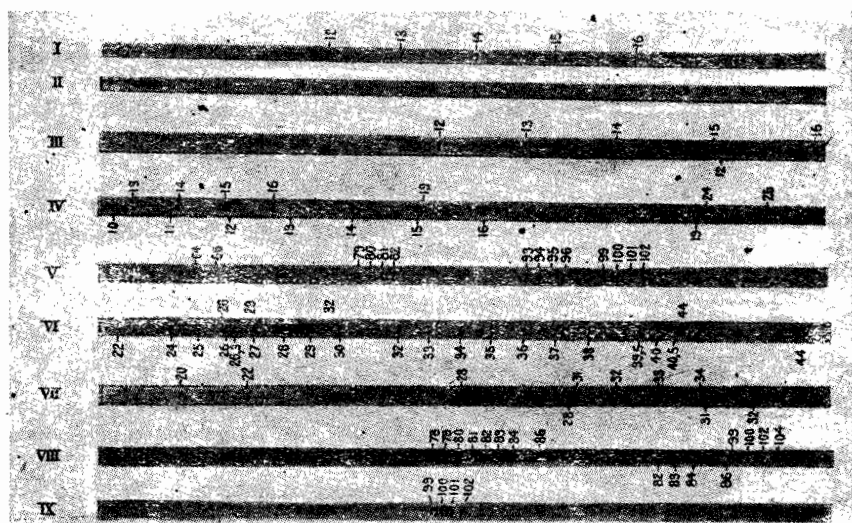


Рис. 30. Несколько типичных масс-спектров.

а на оси ординат — соответствующие массы. Эта шкала масс может быть установлена при помощи линий, связанных с массами, отношение которых точно известно. Например, линиям атома и молекулы кислорода,  $O$  и  $O_2$ , следует приписать массы 16 и 32; одно- и двухзарядным ионам  $O^+$  и  $O^{++}$  надо приписать массы 16 и 8 и т. д.

На рис. 31 приведён пример градуировочной кривой спектрографа Астона. Как видно, она мало отличается от прямой, что облегчает достижение высокой точности. Для получения максимальной точности применяются более сложные методы, на описании которых мы останавливаться не будем\*).

\*) См. Ф. В. Астон, Масс-спектры и изотопы (особенно стр. 56—61 и 86—89), ИЛ, 1948.

Бэйнбридж использовал в своём приборе совершенно иную комбинацию электрического и магнитного полей. Построенный им масс-спектрограф характеризуется чрезвычайной простотой конструкции, но даёт результаты не менее, а в некоторых случаях даже более точные, нежели спектрограф Астона. Схема прибора Бэйнбриджа такова: пучок канальных лучей делается параллельным при помощи двух коллиматорных щелей  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 32). Этот параллельный пучок, содержащий ионы различных масс и различных скоростей, поступает затем в конденсатор  $P_1P_2$ , который находится в поперечном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости чертежа. Такая система, как было показано в § 9, представляет собою фильтр скоростей. Присутствие этого фильтра в огромной степени упрощает дело. Действительно, фильтр пропускает через щель  $S_3$  ионы различных масс, но одной и той же скорости  $v_0$ . Пройдя через щель  $S_3$ , эти ионы описывают круговые траектории в поперечном однородном магнитном поле. Радиусы кривизны этих траекторий по формуле (4,9) пропорциональны количеству движения ионов

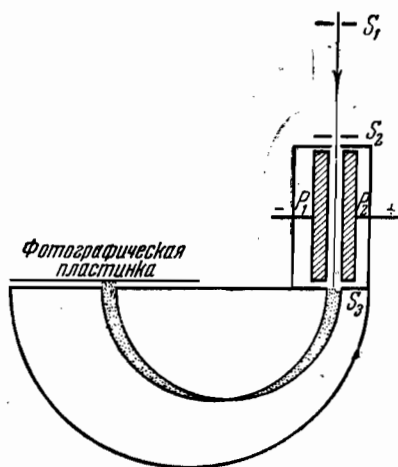


Рис. 32. Схема масс-спектрографа Бэйнбриджа с фильтром скоростей.

Поэтому расстояние линий от некоторой линии, выбранной на фотопластинке за начало отсчёта, будет также строго пропор-

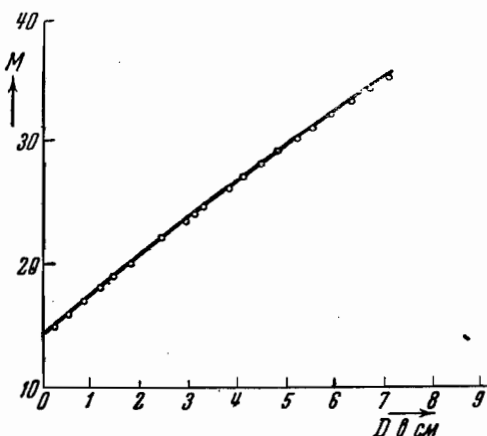


Рис. 31. Градуировочная кривая спектрографа Астона.

циональна количеству движения ионов

$$\rho = \frac{mv_0}{eH} \quad (4,9)$$

а так как скорость  $v_0$  у всех ионов одинакова, то радиусы кривизны ионов различных масс будут пропорциональны массам

$$\rho = \text{const.} \cdot m.$$



ционально массе. Линейность шкалы этого прибора, а также особенно симметричная форма линий, позволяющая производить сравнение линий, даже сильно отличающихся друг от друга по интенсивности, дают этому прибору большие преимущества перед спектрографом Астона.

На рис. 33 приведено несколько масс-спектров, снятых прибором Бэйнбриджа. Высокая разрешающая способность этого

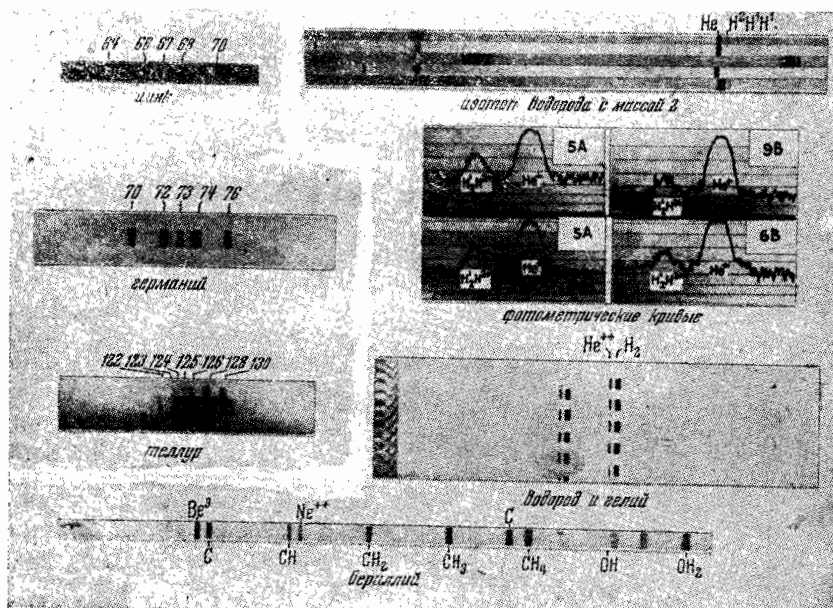


Рис. 33. Примеры масс-спектров, снятых спектрографом Бэйнбриджа. Слева даны изотопы цинка, германия и теллура; справа — спектры, подтверждающие существование изотопа водорода с массой 2. Нижний спектр подтверждает отсутствие изотопов у бериллия.

спектрографа видна из того, что линии молекулы водорода и двухзарядного иона гелия,  $\text{He}^{++}$  далеко отстоят друг от друга.

Простой по идее спектрограф Бэйнбриджа на самом деле представляет собой громоздкое сооружение. Его главная особенность — огромный электромагнит, дающий однородное магнитное поле в 15 000 эрстед на площади полукруга диаметром в 40 см при расстоянии между полюсами в 1,8 см.

## § 16. Масс-спектрометры и масс-спектрографы с двойной фокусировкой

Описанные в предыдущем параграфе масс-спектрографы позволяют производить определения атомных масс индивидуальных типов атомов с огромной степенью точности (с пятью десятичными знаками). Пользуясь методами фотографической фотометрии, можно, конечно, по величине почернения фотопластинки в определённых линиях спектра производить также сравнение процентного содержания масс, соответствующих этим линиям. Однако, во-первых, методы фотографической фотометрии крайне кропотливы и не дают точных результатов, а во-вторых, определение процентного содержания изотопов можно производить гораздо быстрее и точнее с помощью приборов, называемых масс-спектрометрами. В этих приборах регистрация ионов определённой массы производится всегда не фотографически, но электрическим путём — по величине заряда, переносимого ионами определённой массы, или по силе ионного тока. Благодаря этому определение процентного содержания не требует дополнительных измерений: показания электроизмерительного прибора (электрометра или гальванометра) просто пропорциональны числу ионов данного типа.

Масс-спектрометры позволяют определять также и атомные массы, но с меньшей точностью, нежели масс-спектрографы. Они приобрели за последнее время большое практическое значение в связи с развивающимися применениями их для химического газового анализа (например, для анализа углеводов), а также и потому, что установки для электромагнитного разделения изотопов, о которых речь будет ниже (§ 20), представляют собой масс-спектрометры большой мощности.

Одной из существенных особенностей масс-спектрометров является фокусировка расходящихся ионных пучков. При рассмотрении масс-спектрографа Астона мы видели, что под фокусировкой в этом приборе разумеют собирание в фокусе частиц одинаковой массы, но различных скоростей. С этой целью, однако, пучок ионов прежде всего делают параллельным, пропуская его через две узкие щели, расположенные на большом расстоянии друг от друга ( $B_1$  и  $B_2$  на рис. 27). Но это ведёт к потере большого количества ионов; говоря языком оптики, прибор выигрывает в резкости изображения, но проигрывает в светосиле. Для конструкций масс-спектрометров характерно использование самых разнообразных методов фокусировки расходящихся ионных пучков, т. е. методов фокусировки направлений, а не одних только скоростей, как в масс-спектрографе Астона.

Решение этой задачи в настоящее время значительно облегчается благодаря развитию так называемой «электронной геометрии»

ческой оптики», т. е. использованию замечательной аналогии между механикой и геометрической оптикой для расчёта путей заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Метод этот достиг за последнее время большого развития благодаря разнообразным практическим потребностям, в том числе потребностям телевидения, построения электронных микроскопов и т. п.

Наиболее старый и широко применяемый в конструкциях масс-спектрометров метод фокусировки направлений есть фокусировка поперечным магнитным полем на расстоянии  $180^\circ$  (или  $\pi$  радиан). В § 9 мы видели, что слабо расходящийся пучок ионов с определённым значением  $e/m$  фокусируется, описав полукружность в однородном поперечном магнитном поле, действующем на всём протяжении пути ионов.

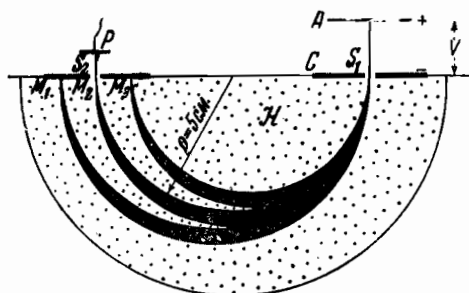


Рис. 34. Схема масс-спектрометра с фокусировкой на  $\pi$  радиан.

На этом основана следующая конструкция масс-спектрометра, впервые построенного Демстером (рис. 34) почти одновременно с масс-спектрографом Астона (в 1918 г.). Ионы, создаваемые источником A

(на самом деле ионы получают путём нагревания соли исследуемого металла\*), приобретают все одинаковую энергию под действием разности потенциалов  $V$ , приложенной между A и C. Через щель  $S_1$  расходящийся пучок ионов попадает в область, где действует поперечное однородное магнитное поле  $\mathcal{H}$ . Ионы, обладающие различными  $e/m$ , фокусируются, как показано на чертеже, в различных местах. Если, как это имеет место в данном случае, энергия ионов одна и та же, то между радиусом кривизны, определяющим положение фокуса, и массой (точнее  $m/e$ ) легко установить простое соотношение. В самом деле, мы имеем

$$\frac{mv^2}{2} = eV, \quad (5,4)$$

$$\rho = \frac{mv}{e\mathcal{H}}, \quad (4,9)$$

\*) Если на анод нанести соль металла и подогреть её, то при разряде в разрежённом газе от анода идёт поток положительных ионов металла в виде так называемых анодных лучей, причём, и это особенно важно, энергия образующихся ионов очень мала; во всяком случае она значительно меньше той, которую ионы приобретают при последующем ускорении, благодаря чему все ионы получают с одинаковой энергией, так как небольшие различия в первоначальной энергии оказываются несущественными.

откуда сразу получается

$$\frac{m}{e} = \frac{\mathcal{H}^2 \rho^2}{2V} \quad \text{или} \quad \rho^2 = \frac{2}{\mathcal{H}^2} \frac{m}{e} V.$$

Подбирая величину ускоряющего потенциала так, чтобы при данном  $m/e$  радиус кривизны  $\rho$  приобретал определённое значение, например 5 см, как на рис. 34, можно выпустить через выходную щель  $S_2$  ионы любой массы. Потенциал, до которого заряжается при этом коллектор  $P$  (или сила тока ионов на этот коллектор), служит мерой количества ионов данной массы.

Усовершенствования, сделанные за последние годы в этом методе, связаны со стремлением получать возможно большие количества ионов. Например, в масс-спектрометре Блэки, который послужил прототипом для ряда позднейших конструкций, это достигается следующим образом. Ионы создаются в пространстве между электродом  $P_1$  и щелью  $P_2$  (рис. 35) потоком электронов, перпендикулярным к плоскости чертежа и пересекающим её в  $S$ . Соленоид  $J$  создаёт поперечное однородное магнитное поле, также перпендикулярное к плоскости чертежа (т. е. параллельное пучку электронов), не позволяющее пучку электронов расширяться. Образовавшиеся ионы вытягиваются слабым электрическим полем между  $P_1$  и  $P_2$  в пространство между щелями  $P_2$  и  $P_3$ , где действует более сильное электрическое поле. Пройдя через щель  $P_3$ , ионы фокусируются магнитным полем на расстоянии  $\pi$  радиан, как это было разъяснено выше. Подбирая соответствующую величину магнитного поля, можно заставить ионы пройти через щель  $P_4$  в цилиндр Фарадея  $F$ , заряд которого служит мерой силы тока ионов данной массы. Все щели имеют большую длину для увеличения числа проходящих через них ионов.

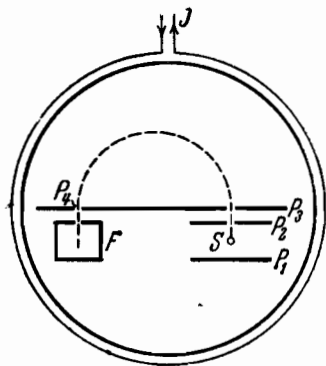


Рис. 35. Схема масс-спектрометра Блэки.

На рис. 36 приведён в качестве примера анализ изотопного состава кадмия, выполненный усовершенствованным спектрометром описанного типа. Цифры на оси абсцисс представляют собой округлённые атомные массы изотопов; резкие максимумы соответствуют изотопам кадмия с массами 106, 108, 110, 111, 112, 113, 114 и 116. Отношения ионных токов, величины которых отсчитываются по оси ординат, сразу дают процентное содержание изотопов. Оно таково:

Массовое число . .	103	108	110	111	112	113	114	116
Процентное содержание . . . . .	1,215	0,875	12,39	12,75	24,07	12,26	28,86	7,58

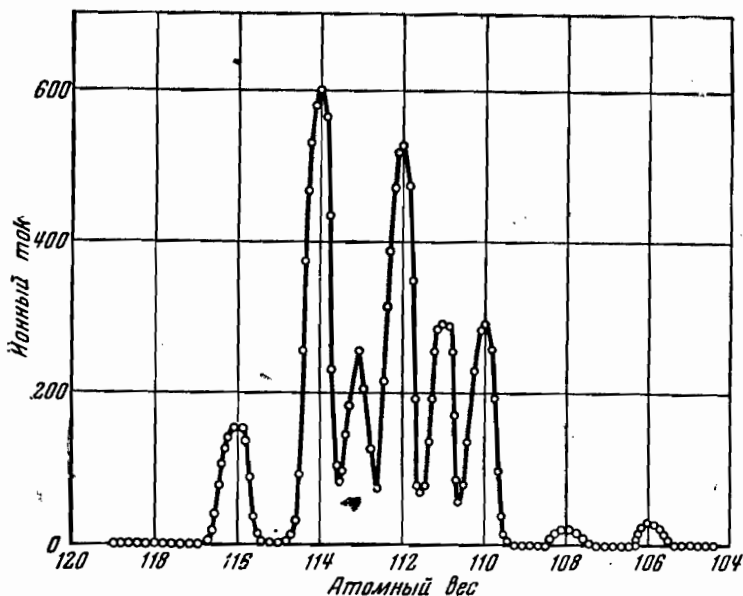


Рис. 36. Изотопный состав кадмия.

Поперечное однородное магнитное поле, действующее на протяжении всей полукруговой траектории ионов, с точки зрения электронной оптики является цилиндрической линзой, дающей «изображение» цели  $S_1$ .

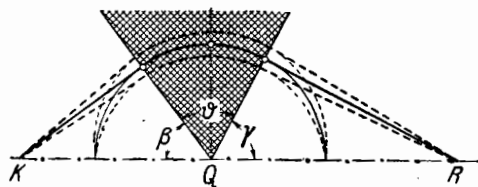


Рис. 37. Фокусировка направлений ограниченным магнитным полем.

оформленной в виде сектора с углом  $\vartheta$ , при условии, если центральный луч расходящегося пучка ионов входит в поле и выходит из него нормально к границам поля (рис. 37). При этом фокуси-

руется цилиндрической линзой, дающей «изображение» цели  $S_1$ . В электронной оптике доказывается, однако, что цилиндрической линзой является также и однородное поперечное магнитное поле, действующее в ограниченной области,

ровка имеет место, каков бы ни был угол сектора, но углы  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\vartheta$  должны быть связаны соотношением  $\beta + \gamma + \vartheta = \pi$ . Это соотношение выполняется, когда источник ионов, вершина сектора и фокус лежат на одной прямой. В частности, когда  $\vartheta = \pi$ , мы получаем уже рассмотренный случай фокусировки круговых траекторий.

Радиальное электрическое поле цилиндрического конденсатора также может быть использовано для фокусировки расходящихся пучков ионов; в этом случае, как мы видели в § 9, фокус отстоит от источника на  $127^{\circ}17'$ , или  $\pi/\sqrt{2}$  радианов. Особенно эффективной является комбинация радиального электрического и поперечного магнитного полей, применяемая в некоторых масс-спектрометрах (рис. 38).

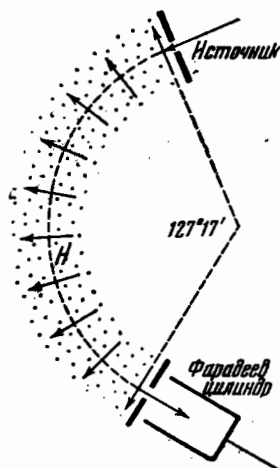


Рис. 38. Масс-спектрометр со скрещёнными электрическим и магнитным полями.

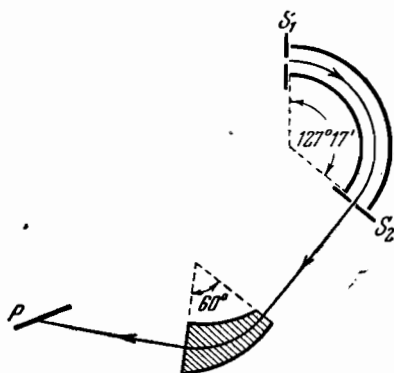


Рис. 39. Схема усовершенствованного масс-спектрографа по Бэйнбриджу и Джордану.

Двойная фокусировка радиальным электрическим и секторным магнитным полями была использована Бэйнбриджем и Джорданом для построения масс-спектрографа большой светосилы и особенно высокой разрешающей способности. В этом приборе (рис. 39) расходящийся пучок ионов сначала фокусируется радиальным электрическим полем, а затем секторное магнитное поле с углом в  $60^{\circ}$  даёт на фотопластинке плоский спектр масс. «Светосила» этого прибора такова, что для ярких линий время экспозиции может быть доведено до 1—5 сек., а для самых слабых — увеличивается до 180 сек. Разрешающая способность, т. е. отношение минимальной разницы масс  $\Delta M$ , при которой линии видны раздельно, к самой массе  $M$  в зависимости от ширины щели колеблется от  $1/6000$  до  $1/13000$ .

### § 17. Массы и процентное содержание изотопов

При изучении химических свойств радиоактивных элементов уже в 1903—1910 гг. было обнаружено, что существуют элементы, которые не могут быть разделены химическим путём, хотя атомные веса их различны. Таковы, например, пары элементов—ионий и торий, мезоторий и радий. Дж. Дж. Томсон, пользуясь открытым им методом парабол, в 1913 г. показал, что нерадиоактивный газ неон представляет собой также смесь двух химически неразличимых, т. е. изотопных, сортов атомов с массами 20 и 22 (см. рис. 26, а), тогда как принятый в химии атомный вес неона есть 20,2. Отсюда следовало заключить, что этот «химический» атомный вес 20,2 на самом деле является средним из атомных весов обоих изотопов 20 и 22. Астон, применяя построенный им масс-спектрограф, обнаружил впоследствии, что элементы, имеющие два или несколько изотопов, вовсе не являются исключением; как раз наоборот—исключениями являются те немногие элементы (натрий, фтор и т. д.), у которых не обнаружено изотопов. Но даже и в этих случаях открытие искусственной радиоактивности (см. т. II, гл. XX) показало, что на самом деле отсутствуют *стабильные* (т. е. нерадиоактивные), но всегда имеются изотопы радиоактивные (радиоактивные  $\text{Na}^{22}$ ,  $\text{Na}^{24}$  наряду со стабильным изотопом  $\text{Na}^{23}$  и т. д.).

Точное определение атомных масс изотопов производится при помощи масс-спектрографов. Пользуясь методами фотографической фотометрии, можно определять также и процентное содержание изотопов по интенсивности почернения фотопластины. Однако точнее и проще производить определения процентного содержания масс-спектрометрами, рассмотренными в предыдущем параграфе. Для всех них характерно то, что процентное содержание определяется с их помощью быстро и с высокой точностью.

Уже первые определения истинных атомных масс, произведённые Астоном с точностью до 0,001, показали, что массы атомов всегда выражаются почти целыми числами по отношению к массе кислорода, принятой за 16,000. Исключением является водород, атомная масса которого в указанных пределах точности резко отличается от единицы и равна 1,008. Химические атомные веса являются средними из масс всех изотопов данного элемента, и этим объясняются значительные отступления химических атомных весов некоторых (впрочем, немногих) элементов от целых чисел. Так, например, магний имеет следующий изотопный состав:

Изотопы . . . . .	24	25	26
Процентное содержание . . . . .	78,60	10,11	11,29

Отсюда получается средняя масса 24,33, в то время как химический атомный вес магния равен 24,32. Аналогичная таблица для кадмия была приведена раньше.

Определение атомных масс производится с помощью усовершенствованных масс-спектрографов с четырьмя или пятью десятичными знаками. При такой точности получающиеся цифры обнаруживают небольшие отступления от целых чисел. Значение и причины этих отступлений будут рассмотрены в гл. XVIII второго тома этой книги.

### § 18. Разделение изотопов с помощью методов, основанных на диффузии

Химические элементы, существующие в природе, представляют собой смеси устойчивых изотопов. При этом, за очень немногими исключениями, состав этих смесей строго постоянен. Конечно, существенный интерес представляет получение отдельных изотопов в чистом виде. Эта задача имеет в настоящее время очень важное научное и техническое значение. Её значение особенно возросло в самые последние годы, когда выяснилось, что разделение изотопов тяжёлых элементов (а именно, изотопов урана) является одним из этапов в процессе освобождения внутриатомной энергии (см. т. II, гл. XXII).

Задача получения чистых изотопов или даже существенного обогащения смеси изотопов одним из них очень трудна. В самом деле, для разделения изотопов приходится пользоваться теми свойствами их, которые зависят от массы. Но процентная разница в массах имеет заметные значения только для изотопов самых лёгких элементов. Например, для водорода разница в массах тяжёлого ( $H^2$  или  $D$ ) и лёгкого ( $H^1$ ) изотопа составляет 100%, но уже для изотопов углерода  $C^{12}$  и  $C^{13}$  эта разница равна 8,35%, а для изотопов урана  $U^{238}$  и  $U^{235}$  — всего 1,2%.

Прежде чем переходить к рассмотрению различных методов разделения изотопов, условимся о терминах, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Пусть разделению подвергается смесь двух изотопов различной массы и пусть  $\sigma$  будет часть всего числа атомов, которая приходится на долю одного из изотопов до разделения, а  $\lambda=1-\sigma$  — доля другого изотопа также до разделения; соответственно, пусть будут  $\Sigma$  и  $\Delta=1-\Sigma$  те же доли после разделения. Величину  $q$ , определяемую равенством

$$q = \frac{\Sigma/\Delta}{\sigma/\lambda}, \quad (18,1)$$

мы будем называть коэффициентом разделения. Например, неон, встречающийся в природе, состоит из 90% атомов с массой 20 и 10% — с массой 22. Если мы хотим обогатить эту смесь тяжёлой



компонентой так, чтобы её доля в смеси стала равной 50%, то коэффициент разделения должен быть равен

$$q = \frac{0,5/0,5}{0,1/0,9} = 9.$$

Из процессов, зависящих от массы, а потому пригодных для разделения изотопов, рассмотрим прежде всего диффузию. Пусть мы имеем газ, представляющий собою смесь частиц двух сортов, различающихся своей массой. Так как газ находится в температурном равновесии, то средние кинетические энергии частиц обоих сортов одинаковы  $\overline{m_1 v_1^2} = \overline{m_2 v_2^2}$ , а потому средние скорости обратно пропорциональны корням квадратным из масс

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Ввиду этого более лёгкие частицы при диффузии будут забегать вперёд, а более тяжёлые — отставать.

Возможность разделения смеси двух газов путём диффузии через пористую перегородку теоретически рассматривалась Рэлеем уже в 1896 г. Пусть в начальный момент по одну сторону перегородки находится газ, состоящий из молекул двух сортов, различающихся массой, а по другую сторону — вакуум. В результате диффузии газ будет обогащаться лёгкой компонентой по одну сторону перегородки и тяжёлой — по другую. Условия, при которых достигается наибольшее разделение, по Рэлею, состоят в том, чтобы, во-первых, величина пор была значительно меньше средней длины свободного пробега молекул, и, во-вторых, чтобы медленнее диффундирующая компонента не скоплялась на поверхности пористой перегородки.

Кроме того, следует иметь в виду, что состав продиффундировавшей смеси зависит не только от соотношения скоростей тяжёлых и лёгких молекул, но и от относительной концентрации этих молекул в первоначальной смеси. Это обстоятельство очень существенно, так как в процессе диффузии исходная смесь будет постепенно обедняться лёгкими молекулами, и потому состав газа, проходящего через пористую перегородку, будет всё меньше отличаться от исходного.

Пусть теперь диффундирующий газ представляет собой смесь двух изотопов, различающихся по массе незначительно (как это и бывает на самом деле); тогда, по Рэлею, коэффициент обогащения тяжёлой компонентой непродиффундировавшего газа выражается формулой

$$q = \sqrt{\frac{\text{начальный объём}}{\text{конечный объём}}}, \quad (18,1')$$

где  $\nu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}$  ( $m_1$  и  $m_2$  — массы атомов обоих изотопов). Применим эту формулу к случаю неона. Массы его изотопов  $m_2 = 20$  и  $m_1 = 22$ ; следовательно,  $\nu = 21$ . В ранних опытах по разделению изотопов неона, выполненных Астоном, отношение объёмов было, наверно, больше 500 и меньше 10 000. По формуле (18,1') для коэффициента разделения получается число между 1,3 и 1,5, т. е. в 6—7 раз меньше того, какое необходимо, чтобы смесь обогатилась тяжёлой компонентой до 50%. В случае изотопов хлора с массами 36 и 38 диффузия подвергается HCl; для этого случая показатель  $\nu$  в формуле (18,1') равен уже 37, и при изменении объёма в  $10^4$  раз коэффициент обогащения получается равным 1,3.

Рассмотренные примеры показывают, что путём однократной диффузии можно осуществить лишь небольшое изменение состава смеси изотопов. Совершенно иной результат получается при использовании многоступенчатого или каскадного метода, впервые разработанного Г. Герцем. Аппаратура, применённая им, состоит из ряда последовательно соединённых звеньев, из которых каждое разлагает входящий в него поток газа на две части, немного различающиеся по составу. Для того чтобы понять устройство и работу этого каскада, необходимо сначала рассмотреть его отдельное разделительное звено.

Простейшее устройство такого звена изображено на рис. 40. Оно состоит из внутренней трубки, сделанной из пористого материала и помещённой внутрь более широкой стеклянной трубки. Если справа в  $A$  подтекает газ, состоящий из двух сортов частиц различной массы, то часть его, продиффундировавшая во внешнюю трубку, будет слегка обогащена лёгкой компонентой; эту часть можно при помощи насоса перекачать через  $B$  в соседнее правое звено, а оставшая часть, обогащённая тяжёлой компонентой, поступит через  $D$  в соседнее левое звено. Таким образом, отдельное звено действительно будет разлагать поток газа на две части, немного различающиеся по составу: влево будет подаваться газ, обогащённый тяжёлой компонентой, а вправо — лёгкой. Недостаток этого устройства состоит, однако, в следующем. Газ, текущий внутри пористой трубки, по мере продвижения вперёд обогащается тяжёлой компонентой. Поэтому газ, диффундирующий в левом конце звена (вблизи  $D$ ), будет по составу уже мало отличаться от газа, поступающего через  $A$ .

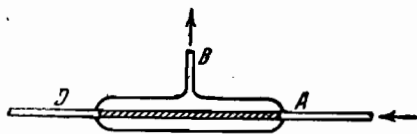


Рис. 40. Простейшая схема разделительной ячейки.

Для того чтобы преодолеть этот недостаток, Герц разделил каждое звено на две части, как показано на рис. 41. Только та часть газа, которая диффундирует через  $R$  и обогащается лёгкой компонентой, откачивается через  $B$  в соседнее правое звено. Остальная часть поступает в  $T$ , и так как согласно сказанному диффундирующая здесь часть обладает примерно тем же составом, что и поступающая в звено, то она откачивается насосом  $P$  через  $C$  и вновь подаётся у  $A$  к началу звена с тем, чтобы вновь подвергнуться диффузии и соответствующему обогащению.

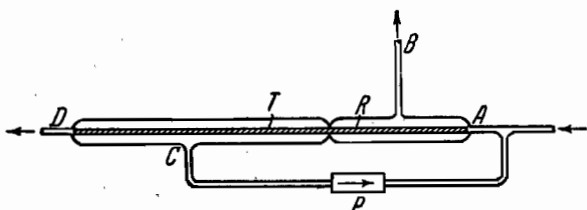


Рис. 41. Усовершенствованная разделительная ячейка.

На рис. 42 изображён небольшой каскад, состоящий из трёх разделительных ячеек.  $V_1$  и  $V_2$  — баллоны, в которых скапливается газ с преобладанием соответственно лёгкой или тяжёлой компоненты. Через эти баллоны газ снова возвращается в разделительные ячейки, благодаря чему, в конце концов, устанавливается стационарное состояние. Небольшая глиняная трубка слева

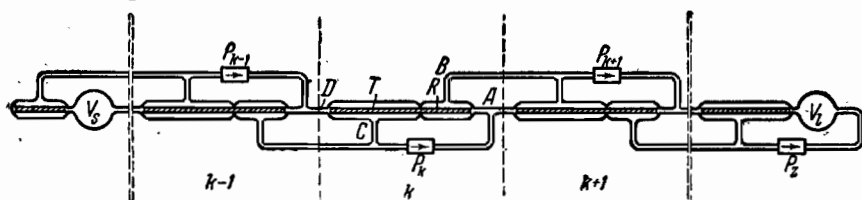


Рис. 42. Каскад диффузионных ячеек.

от баллона  $V_1$  действует не как разделительная ячейка, но служит для регулирования скорости газа, циркулирующего через баллон и поступающего обратно в соседнюю разделительную ячейку.

Действие установки поясняется схематическим рис. 43. Здесь каждая ячейка обозначена квадратиком. В начальном состоянии весь каскад заполнен смесью нормального состава. В результате диффузии каждая ячейка будет подавать направо газ, обогащённый лёгкой компонентой, а налево — газ, обогащённый тяжёлой компонентой. На рис. 43 поток смеси, обогащённый лёгкой компонентой, обозначен пунктиром, а поток смеси, обогащённой тяжёлой компонентой, — сплошной линией. Из рис. 43, а, изобра-

жающего начальное состояние, видно, что вследствие работы разделительных ячеек в системе устанавливается два потока: вправо — поток, обогащённый лёгкой компонентой, влево — поток, обогащённый тяжёлой компонентой. В результате этого движения состав газа в баллонах  $V_1$  и  $V_2$  соответственным образом изменяется. Изменение состава смеси будет происходить до тех пор, пока не установится стационарное состояние, при котором состав газа, получаемого каждой ячейкой от соседних, становится одинаковым с составами смесей, передаваемых этой ячейкой обоим соседним. Но так как при этом оба потока, передаваемых каждой ячейкой вправо и влево, попрежнему отличаются по содержанию лёгкой и тяжёлой компонент на некоторый коэффициент  $q$ , то в стационарном состоянии состав газа, циркулирующего между парами последовательных звеньев, отличается от соседнего именно на этот коэффициент  $q$ . Это показано на рис. 43, *b* различной густотой штрихов: справа смесь, циркулирующая между последней ячейкой и баллоном  $V_1$ , в наибольшей степени

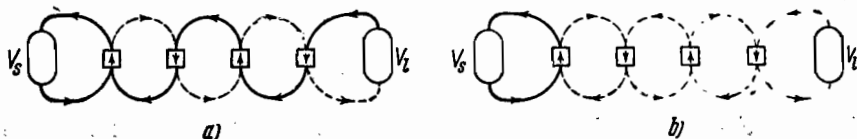


Рис. 43. Схема работы каскада диффузионных ячеек: *a*) начальное состояние; *b*) установившееся состояние.

обогащена лёгкой компонентой — штриховка самая редкая; относительная концентрация тяжёлой компоненты в составе смеси, циркулирующей между последней и предпоследней ячейками справа, в  $q$  раз больше

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n$$

— штриховка более густая; для следующей пары

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-2} = q \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q^2 \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n$$

и т. д. Очевидно, что если каскад содержит  $z$  звеньев, то состав смеси в левом баллоне  $V_2$  будет отличаться от состава смеси в правом баллоне  $V_1$  уже на коэффициент  $q^z$ . Таким образом, полный коэффициент разделения всего каскада  $Q$  равен

$$Q = q^z. \quad (18,2)$$

Для вычисления  $q$  необходимо знать, какая доля  $f$  потока, поступающего в разделительную ячейку, диффундирует через пористую трубку  $R$  (рис. 41). Вообще говоря, поток, поступа-

ющий в разделительное звено, разделится на три части: одна диффундирует через  $R$  и откачивается через  $B$  в соседнее правое звено, другая — диффундирует через  $T$  и откачивается насосом  $P$  для рециркуляции в той же ячейке и третья — через  $D$  поступает в соседнюю левую ячейку. Если длины  $R$  и  $T$  одинаковы, то все три части потока между собой равны и  $f = 1/3$ . Если же  $R$  и  $T$  неодинаковы, то  $f$  зависит от соотношения их длин  $l_R$  и  $l_T$ . Именно, в общем случае, как показывает простой расчёт,

$$f = \frac{1}{2 + \frac{l_R}{l_T}} \quad (18,3)$$

(при  $l_T = l_R$ , очевидно, получается попрежнему  $f = 1/3$ ). Выведенная Герцем формула для коэффициента разделения отдельного звена такова:

$$q = \frac{f^\mu}{1 - (1 - f)^\mu}, \quad (18,4)$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (m_1 < m_2),$$

а потому полный коэффициент разделения каскада по (18,2) будет

$$Q = \left\{ \frac{f^\mu}{1 - (1 - f)^\mu} \right\}^z \quad (18,5)$$

где  $z$  — число звеньев в каскаде.

Для пояснения рассмотрим вновь пример неона. В первой установке Герца длины трубок  $R$  и  $T$  были одинаковы, ввиду чего  $f = 1/3$ . Так как  $\mu = \sqrt{\frac{20}{22}} = 0,954$ , то по формуле (18,4) находим  $q = 1,089$ . Если каскад состоит из 24 звеньев, то для  $Q$  уже получается

$$Q = (1,089)^{24} = 7,73,$$

а для каскада из 48 звеньев

$$Q = (1,089)^{48} = 59,75.$$

Мы видим, таким образом, что благодаря использованию каскада коэффициент разделения возрастает настолько, что становится возможным далеко идущее разделение изотопов.

Описанный метод был с самого начала применён к разделению изотопов ряда лёгких элементов. Для разделения изотопов неона был использован каскад из 24 звеньев. Равновесие уста-

новилось через 4 часа. При этом вместо нормального состава  $\text{Ne}^{20}:\text{Ne}^{22}=9:1$  в резервуаре на «тяжёлом конце» установки скопилось смесь состава  $\text{Ne}^{20}:\text{Ne}^{22}=1,25:1$ . Количество этого конечного продукта при атмосферном давлении составляло  $4 \text{ см}^3$ . С каскадом из 48 звеньев был получен чистый  $\text{Ne}^{22}$ . Были полностью разделены также изотопы водорода и произведено обогащение тяжёлыми компонентами углерода и азота (изотопами  $\text{C}^{13}$  и  $\text{N}^{15}$ ).

Для работы каскада очень важное значение имеет пористая перегородка, через которую идёт диффузия. Как уже указывалось, наиболее благоприятные для разделения условия требуют специального выбора пористой перегородки. Герц пользовался особо приготовленными глиняными трубками. Однако они не вполне удовлетворяли требованиям, ввиду чего он видоизменил метод таким образом, что диффузия происходила не через пористую перегородку, но в струю паров ртути, которые уносили с собой газ, обогащённый лёгкой компонентой. Разделительное звено этого второго метода можно охарактеризовать как диффузионный насос, откачивающий преимущественно одну компоненту смеси. Из подобных звеньев также составляются каскады, содержащие несколько десятков звеньев (до 50). Преимущество этого метода перед первым состоит в более быстром установлении равновесия. При его помощи Герц и ряд других исследователей произвели разделение или обогащение ряда изотопов лёгких элементов (неон, кислород, аргон и углерод).

У п р а ж н е н и е. Вычислить полные коэффициенты разделения установки Герца, состоящей из 24 звеньев, полагая  $f=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ , и построить кривую зависимости  $Q$  от  $f$ .

## § 19. Разделение изотопов методом термодиффузии

Один из наиболее эффективных методов разделения изотопов связан со своеобразным явлением, называемым термодиффузией. Для того чтобы понять, в чём заключается это явление, необходимо прежде всего уяснить себе его отличие от обычной диффузии. Классический опыт, демонстрирующий диффузию, состоит, как известно, в следующем. Представим себе замкнутое пространство, в которое в начальный момент введены два газа с различными молекулярными весами и притом так, чтобы более тяжёлый газ находился внизу, а более лёгкий — наверху. В таком случае вследствие диффузии молекулы более тяжёлого газа будут перемещаться вверх (т. е. против действия силы тяжести), а молекулы более лёгкого — вниз. Через некоторый промежуток времени получится совершенно однородная смесь обоих газов. Таким образом, действие обычной диффузии сводится к смешиванию газов, которые в начальный момент были разделены.

Явление термодиффузии оказывает *обратное действие*: вследствие термодиффузии при наличии в смеси газов градиента температуры происходит частичное разделение смеси. Это можно пояснить примером, представленным на рис. 44. Представим себе ящик, в котором находится совершенно однородная смесь молекул кислорода и азота:  $50\% \text{O}_2 + 50\% \text{N}_2$ . Если теперь поддерживать нижнюю стенку ящика при температуре  $0^\circ \text{C}$ , а верхнюю — при  $500^\circ \text{C}$ , то, как показывает опыт, у верхней, т. е. более нагретой, стенки состав газа будет  $50,27\% \text{N}_2 + 49,73\% \text{O}_2$ , а у нижней, более холодной, стенки  $49,73\% \text{N}_2 + 50,27\% \text{O}_2$ . Таким образом, вследствие термодиффузии у более нагретой стенки оказывается избыток лёгких молекул, а у холодной — избыток тяжёлых: термодиффузия нарушает однородность смеси и вызывает частичное разделение её тяжёлой и лёгкой компонент.

Обозначим концентрацию одной из компонент смеси (например, более лёгкой) через  $c$ . Тогда избыток этой концентрации у более нагретой стенки связан с температурами обеих стенок  $T_2$  и  $T_1$  следующим соотношением:

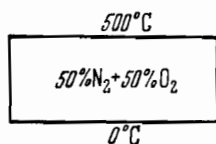


Рис. 44.

$$\Delta c = \kappa \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (19,1)$$

где коэффициент  $\kappa$  называется *коэффициентом термодиффузии*.

Существование термодиффузии было сначала предсказано теоретически, а затем и подтверждено экспериментально. Теория этого явления вскрыла следующее интересное обстоятельство. В кинетической теории газов соударения между молекулами газа иногда рассматриваются просто как удар идеально упругих шаров. Однако такое представление заведомо страдает чрезмерной упрощённостью. Гораздо правильнее вместо простых «ударов» рассматривать взаимодействия между молекулами, которые проявляются в отталкивании при их сближении на очень малые расстояния. Закон этого взаимодействия можно представить в виде  $\frac{\text{const.}}{r^\nu}$ , где  $r$  — расстояние

и  $\nu$  — некоторый показатель степени. Оказывается, что для термодиффузии теоретически получаются существенно различные результаты в зависимости от величины показателя  $\nu$ . В частности, при  $\nu = 5$  термодиффузия вообще равна нулю. Этот результат интересен с исторической точки зрения, так как Максвелл, развивая кинетическую теорию газов, воспользовался гипотезой, согласно которой отталкивание между молекулами подчиняется именно закону  $\text{const.}/r^5$ , и поэтому не обнаружил необходимости термодиффузии. Замечательно также, что путём изучения

термодиффузии можно найти правильную величину  $\nu$ . Она оказывается для большинства смесей газов около 8 или 9.

Из сказанного при описании процесса термодиффузии уже ясно, что это явление можно использовать для разделения изотопов. В случае, когда температурное поле устанавливается в кубическом ящике, противоположные стенки которого поддерживаются при температурах  $T_2$  и  $T_1$ , для коэффициента разделения получается следующая простая формула:

$$q = 1 + \frac{2}{3} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Применяя эту формулу к случаю неона  $m_1 = 22$ ,  $m_2 = 20$  и полагая  $T_1 = 900^\circ$  и  $T_2 = 300^\circ$ , получаем

$$q = 1,035.$$

Эта величина того же порядка, что и для одного звена в каскаде Герца, откуда следует, что термодиффузия может быть использована для разделения изотопов. Пользуясь каскадом из  $z$  звеньев, получаем, как всегда, полный коэффициент разделения  $Q = q^z$ .

Клузиус и Диккель для усиления эффекта разделения использовали наряду с термодиффузией ещё и конвекцию. Рассмотрим узкий прямоугольный ящик (рис. 45), стенки которого имеют различную температуру, как показано на рисунке. У более тёплой стенки газ будет расширяться и подниматься вверх; у более холодной — опускаться вниз. То же самое можно осуществить, если вместо прямоугольного ящика воспользоваться цилиндром радиуса  $R_a$ , внутри которого коаксиально помещён другой цилиндр радиуса  $R_i$ , нагретый до более высокой температуры (провода, нагреваемая электрическим током, рис. 46).



Рис. 46.

Итак, в результате конвекции создаются два потока, идущие в противоположных направлениях. Если в ящике или в трубке имеется смесь двух газов различного молекулярного веса, то термодиффузия вызывает, кроме того, поток, направленный перпендикулярно к конвекционному так, чтобы концентрация более лёгких молекул у нагретой стенки была больше, нежели у холодной. Совместное действие обоих эффектов приводит к тому, что между верхом и низом возникает значительная разность концентраций.

Разберём это явление несколько подробнее. Представим себе вновь прямоугольный ящик (рис. 47), противоположные стенки



Рис. 45.



которого поддерживаются при различных температурах ( $T_2 > T_1$ ). Расположение осей координат возьмём такое, как показано на рис. 47, и будем рассматривать сначала только поток, обусловленный термодиффузией и обыкновенной диффузией. Если в ящике находится смесь двух газов различного молекулярного веса и если  $c$ , как и раньше, будет концентрацией более лёгкой компоненты, то термодиффузия вызовет перенос вещества, причём количество переносимого вещества будет пропорционально  $\frac{\partial \ln T}{\partial x}$

[см. формулу (19,1)]. Сила термодиффузионного тока, т. е. количество вещества, переносимого в единицу времени через площадь, перпендикулярную к потоку, будет равна

$$\rho D \kappa \frac{\partial \ln T}{\partial x}, \quad (19,2)$$

где  $\rho$  — плотность газа и  $D$  — коэффициент диффузии. В результате термодиффузии между нагретой и холодной стенками возникает разность концентраций тяжёлой и лёгкой компонент. Эта разность концентраций вызовет появление направленного в обратную сторону тока обыкновенной диффузии, стремящейся выравнять концентрации во всей массе газа.

Сила этого последнего тока, очевидно, равна

$$-\rho D \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (19,3)$$

Полную силу тока  $J$  получим, учитывая оба процесса, т. е. пользуясь формулами (19,2) и (19,3):

$$J = \rho D \left( \kappa \frac{\partial \ln T}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x} \right). \quad (19,4)$$

В установившемся состоянии полная сила тока, обусловленного термодиффузией и диффузией, равна нулю, и мы получаем из (19,4)

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \kappa \frac{\partial \ln T}{\partial x}. \quad (19,5)$$

Итак, совместное действие термодиффузии и обыкновенной диффузии при наличии градиента температуры между стенками вызывает появление *градиента концентрации* компонент смеси. Пусть теперь в ящике каким-либо образом вызвана циркуляция газа в направлении, показанном на рис. 47 стрелками. При этом количество газа, поднимающегося вверх у правой стенки, будет равно количеству газа, опускающегося вниз у левой стенки. Ввиду этого полный поток *вещества* через любое горизонтальное

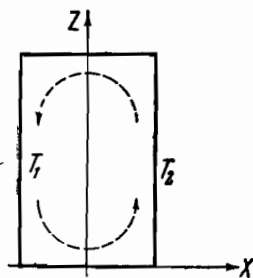


Рис. 47.

сечение будет равен нулю. Однако поток различных компонент смеси газов будет *отличен от нуля*, так как согласно формуле (19,5) вследствие термодиффузии в стационарном состоянии должен существовать градиент концентрации лёгкой компоненты, направленный в сторону нагретой стенки. Поэтому циркуляция поднимает вверх большее количество лёгкой компоненты у нагретой стенки, нежели опускает вниз у холодной стенки. Это ведёт к тому, что постепенно устанавливается *вертикальный* градиент концентрации, причём вверху получается избыток лёгкой компоненты, а внизу — избыток тяжёлой.

Ценность описанного метода состоит в том, что циркуляция газа, значение которой выяснено изложенными соображениями, устанавливается сама собой под действием силы тяжести. Разумеется, всё сказанное до сих пор о смеси газов с различными молекулярными весами относится и к смеси изотопов с различными массами.

На рис. 48 показано устройство трубки, применявшейся для разделения изотопов хлора. Трубка действует по принципу цилиндрической разделительной ячейки, поясняемому рис. 46. Внутренним цилиндром служит нагреваемая током платиновая проволока толщиной 0,4 мм; диаметр внешней трубки равен 8,4 мм. Всего для разделения изотопов хлора было использовано 5 соединённых каскадом трубок. Длина их была 7 м, 8 м, 2 трубки по 6 м и одна в 9 м. Общая длина трубок составляет, таким образом, 36 м. Для разделения был использован хлористый водород, представляющий собой смесь молекул  $\text{HCl}^{35}$  и  $\text{HCl}^{37}$ . При этом на тяжёлом конце получалось ежедневно 8 см<sup>3</sup>  $\text{HCl}$  с содержанием 99,4%  $\text{Cl}^{37}$ , а на лёгком — 25 см<sup>3</sup>  $\text{HCl}$  с содержанием 96,6%  $\text{Cl}^{35}$ . Впоследствии удалось получить  $\text{HCl}$  с содержанием в 99,6%  $\text{Cl}^{35}$  при общей длине труб в 20 м.

Тот же метод был применён к разделению изотопов неона, причём удалось получить несколько литров чистого  $\text{Ne}^{20}$ . Было достигнуто также обогащение углерода тяжёлой компонентой  $\text{C}^{13}$  до 6,6% (нормальный состав углерода  $\text{C}^{12} : \text{C}^{13} = 99,1$ ) с выходом в несколько мг продукта в день.

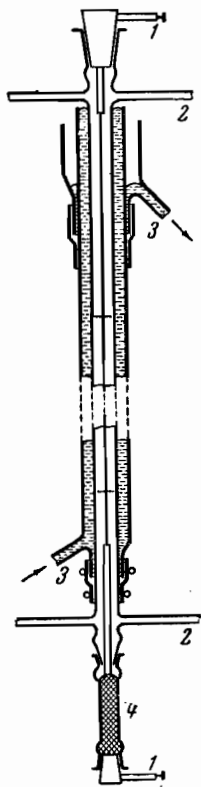


Рис. 48. Термодиффузионная разделительная трубка. 1—подвод тока; 2—подача газа; 3—охлаждение; 4—ртуть.

Метод термодиффузии оказался также пригодным для разделения жидких смесей изотопов. Так, например, был подвергнут термодиффузии раствор  $ZnSO_4$ , причём раствор помещался между двумя пластинками длиной в 90 см, расположенными на расстоянии 0,025 см; между пластинками поддерживалась разность температур в 50°. Нормально отношение содержаний изотопов цинка 64 и 68 равно 2,93; после термодиффузии на тяжёлом конце оказалось  $Zn^{64} : Zn^{68} = 2,7$ , на лёгком  $Zn^{64} : Zn^{68} = 3,2$ .

Процесс установления равновесия в случае жидких систем идёт медленно, но для разделения требуются колонки меньшей длины, нежели в случае газов.

Несмотря на крайнюю простоту описанного устройства, оно оказалось чрезвычайно эффективным для разделения изотопов. Для сравнения этого метода с диффузионным методом были произведены опыты с разделением изотопов тяжёлого газа ксенона при помощи разделительной трубки длиной в 2,5 м и диаметром в 5 мм с центральной проволокой, нагретой до 1200—1750°С, и одновременно при помощи каскада из 12 диффузионных ячеек. Оказалось, что эффективность трубки длиной в 1 м такая же, как у 12 диффузионных ячеек.

## § 20. Разделение изотопов с помощью электромагнитных методов

Весьма эффективным средством для разделения изотопов являются электромагнитные методы. В самом деле, каждый масс-спектрограф или, в особенности, масс-спектрометр в сущности является прибором для полного разделения изотопов. Если представить себе на рис. 34 в местах, соответствующих положениям фокусов для нужных масс, щели, за которыми расположены приёмники, то в этих приёмниках будут собираться чистые изотопы.

Вследствие малой силы ионного тока количество вещества, которое может быть собрано таким приёмником, ничтожно: в обычных масс-спектрометрах скорость накопления вещества — порядка тысячных долей микрограмма ( $10^{-9}$  г) в час.

Таким образом, метод масс-спектрографа является идеальным в тех случаях, когда достаточно получать очень малые количества разделённых изотопов, но для получения больших количеств при помощи этого метода встречается два главных затруднения. Во-первых, поскольку вещество в масс-спектрографе переносится ионным током, для получения больших количеств изотопов токи должны быть очень сильными. Это выдвигает проблему построения мощного источника ионов. Во-вторых, даже в том случае, когда имеется достаточно мощный источник ионов, увеличение силы тока выше некоторого предельного значения оказывается

нецелесообразным, так как пространственный заряд, возникающий при сильном ионном токе, резко понижает разрешающую способность масс-спектрографа, и увеличение силы тока не даёт выигрыша в скорости накопления разделённых изотопов.

Разберём этот вопрос несколько подробнее. Пусть мы имеем поток, состоящий из ионов двух изотопов с массами (в граммах)  $M_1$  и  $M_2$ . Однородное поперечное магнитное поле, как мы знаем (§ 16), будет фокусировать каждый из изотопов в своём фокусе, причём положение этого фокуса определяется радиусом кривизны круговой траектории, описываемой ионом данного сорта. Для вычисления этого радиуса кривизны мы пользовались в § 16 формулой (4,9), вытекающей из условия равенства между лоренцевой силой  $\mathcal{H}ev$  и центробежной силой инерции  $mv^2/\rho$ :

$$\frac{mv^2}{\rho} = \mathcal{H}ev. \quad (20,1)$$

Посмотрим теперь, какое влияние на остроту фокуса оказывает пространственный заряд. На рис. 49 воспроизведены сплошными и пунктирными линиями

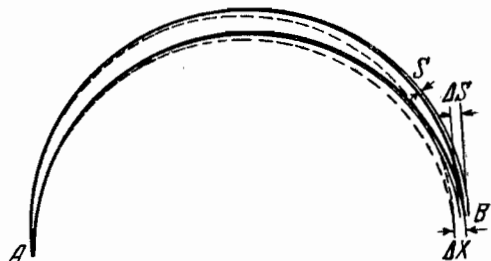


Рис. 49. Пути ионов двух изотопов с мало-различающимися массами в электромагнитном сепараторе.

пути ионов с мало различающимися массами в поперечном однородном магнитном поле. Для упрощения расчётов мы предположим, что протяжение ионных пучков в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, очень велико. Если полная сила ионного тока на единицу длины перпендикулярно к плоскости чертежа равна  $J$ , то количество электричества, приходящееся на единицу длины перпендикулярно к плоскости чертежа, будет, очевидно,  $\frac{J}{v}$ , где  $v$ —скорость ионов. Создаваемый таким путём пространственный заряд, в свою очередь, действует на ионы.

Рассмотрим теперь два крайних пути ионов в каждом из пучков. Предполагая, что изменение кривизны пути невелико при переходе от одного пучка к другому, получим, применяя теорему Гаусса—Остроградского, следующее выражение для силы, действующей на ионы на том и другом пути со стороны пространственного заряда:

$$F = 2\pi \frac{J}{v} e, \quad (20,2)$$

где  $e$ —заряд иона. Эта сила всегда будет направлена наружу по отношению к пучку, т. е. на ион, движущийся по верхнему пути, будет действовать сила, направленная от центра траектории

(окружности), а на ион, движущийся по нижнему пути, — к центру. Именно поэтому пространственный заряд будет размывать фокус, получаемый в его отсутствии. Для вычисления ширины пучка в фокусе нужно вместо соотношения (20,1) написать условие равенства между центробежной силой инерции и силой Лоренца *плоская, действующая со стороны пространственного заряда*. Принимая во внимание сказанное относительно направления этой силы, получим следующие уравнения для ионов, движущихся по крайним траекториям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Mv^2}{\rho_1} &= \mathcal{H}ev + 2\pi \frac{Je}{v}, \\ \frac{Mv^2}{\rho_2} &= \mathcal{H}ev - 2\pi \frac{Je}{v}, \end{aligned} \right\} \quad (20,3)$$

откуда получаем

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{4\pi Je}{Mv^3}.$$

Обозначая через  $\rho$  радиус пути в отсутствии пространственного заряда и полагая  $\rho_1 \rho_2 \approx \rho^2$ , получим для ширины пучка на расстоянии  $180^\circ$

$$\Delta s \equiv 2(\rho_2 - \rho_1) = \frac{8\pi e}{M} \cdot \frac{J\rho^2}{v^3}. \quad (20,4)$$

Так как разница масс рассматриваемых двух изотопов мала, то соответствующие им фокусы у  $B$  (рис. 49) лежат очень близко друг к другу. Поэтому можно считать, что пути их ионов почти на всём протяжении совпадают, а потому и считать также, что ширина пучков около  $B$  для обоих сортов ионов будет одинакова и равна  $\Delta s$ .

В отсутствие пространственного заряда расстояние между фокусами ионов с массами  $M_1$  и  $M_2$  будет

$$\Delta x = \frac{|M_2 - M_1|}{M_1} \rho. \quad (20,5)$$

Очевидно, что эффективность устройства для получения чистых изотопов определяется соотношением между  $\Delta x$  и  $\Delta s$ . Можно показать, что наиболее благоприятные условия будут в том случае, если  $\Delta x = \Delta s$ . В самом деле, для увеличения скорости накопления вещества естественно повышать силу тока  $J$ . Но и ширина фокуса  $\Delta s$  будет одновременно увеличиваться пропорционально  $J$ . Если  $\Delta s$  станет больше  $\Delta x$ , то скорость накопления чистых изотопов на единицу ширины пучка в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, будет пропорциональна  $\frac{\Delta x}{\Delta s} J$ . Так как ширина  $\Delta s$ , в свою очередь,

пропорциональна  $J$ , то, очевидно, мы ничего не выиграем, увеличивая  $J$  так, чтобы  $\Delta s$  стала больше  $\Delta x$ . Из условия  $\Delta x = \Delta s'$  при помощи (20,4) и (20,5) получаем

$$J = \frac{M_1 v^3}{8\pi e r} \frac{|M_2 - M_1|}{M_1}. \quad (20,6)$$

Воспользовавшись теперь соотношениями  $\frac{M_1 v^2}{\rho} = \frac{\mathcal{H} e v}{c}$  ( $e$  — в электростатических единицах) и  $\frac{M_1 v^2}{2} = eV$ , где  $V$  — ускоряющий потенциал ионов, после некоторых преобразований получим для количества накапливаемого вещества

$$\mu \left[ \frac{мг}{час} \right] = 3,19 \cdot 10^{-8} \eta \frac{|A_2 - A_1|}{A_1} V \mathcal{H}, \quad (20,7)$$

где  $\eta$  — отношение концентраций изотопов в веществе,  $A_2$  и  $A_1$  — округлённые до целых чисел их атомные массы;  $V$  — в вольтах и  $\mathcal{H}$  — в гауссах. Выбрав для примера случай разделения изотопов кальция  $Ca^{43}$  и  $Ca^{40}$ , где  $\eta = \frac{1}{20}$ , получим даже при очень высоких значениях  $V$  и  $\mathcal{H}$ , например при  $V = 50\,000$  V,  $\mathcal{H} = 15\,000$  гаусс

$$\mu = 0,12 \frac{мг}{час},$$

а соответствующая полная сила тока оказывается равной всего 1,6 мА на см; дальнейшее её повышение, по сказанному, нецелесообразно. Из этого следует, что метод масс-спектрографа для получения чистых изотопов в больших количествах может стать практически пригодным лишь при условии нейтрализации пространственного заряда, до крайности снижающего эффективность этого метода.

Возможность нейтрализации пространственного заряда, однако, имеется. Представим себе, что внутри ионного пучка введено некоторое количество электронов. Легко видеть, что эти электроны будут оставаться внутри пучка и своим отрицательным зарядом нейтрализовать часть положительного заряда ионов. В самом деле, пространственный заряд, как уже указывалось, создаёт поле, направленное наружу по отношению к ионному пучку. Поэтому на отрицательные электроны будет действовать сила, направленная внутрь пучка, которая не позволит электро-

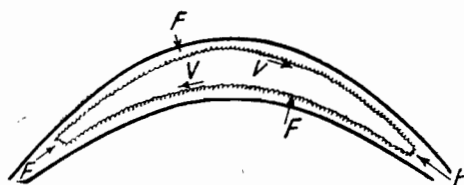


Рис. 50. Пути электронов внутри ионного пучка. ( $F$  — сила, действующая на [электрон].)

нам покидать пучок в поперечном направлении. Электроны могут двигаться только вдоль оси пучка. Однако потенциалы электродов могут быть выбраны так, чтобы не позволять электронам уходить и в этом направлении. Так как, кроме того, имеется ещё поперечное магнитное поле, то электроны будут двигаться по замкнутым циклоидообразным траекториям, как показано на рис. 50, и при этом будут весьма эффективно компенсировать пространственный заряд ионов\*).

### § 21. Разделение изотопов с помощью методов фракционированной перегонки и обменных реакций

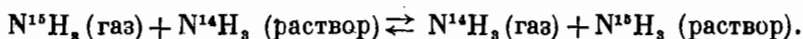
Разделение смесей двух жидкостей путём фракционированной перегонки—процесс, давно известный и широко применяемый в лабораторной и заводской практике. При перегонке в первую очередь дистиллируется та жидкость, у которой температура кипения ниже (упругость пара выше); поэтому дистиллат будет обогащаться более легко кипящей жидкостью, а остаток—жидкостью с меньшей упругостью пара. Повторяя эту операцию несколько раз, можно разделить обе жидкости.

Упругость пара изотопов зависит от их массы, поэтому метод фракционированной перегонки в принципе применим для разделения изотопов. Однако различие в упругости пара в данном случае настолько мало, что применение этого метода обычным способом совершенно нецелесообразно. На практике лучшие результаты даёт «метод противотока», который состоит в том, что в разделительной колонке идут навстречу друг другу: снизу вверх—пар, а сверху вниз—жидкость; при этом принимаются меры к тому, чтобы поверхность соприкосновения жидкости и пара была возможно большей. При обмене молекулами между жидкостью и паром молекулы жидкости, имеющей большую упругость пара, обнаруживают большую тенденцию концентрироваться в газовой фазе. Метод этот применим только к тем изотопам, которые обладают не слишком малой разницей в температурах кипения.

По существу близок к методу фракционирования, но значительно эффективнее метод обменных реакций, который состоит в следующем. Рассмотрим двухфазную систему: жидкость и над ней газ. Пусть, например, это будет газообразный аммиак  $\text{NH}_3$  и раствор аммиака в воде или в алкоголе или, наконец, раствор азотнокислого аммония  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  (диссоциированный в растворе

\*) Рассмотрение роли пространственного заряда в электромагнитных сепараторах изотопов дано в статье Л. Смита, В. Паркинса и А. Форрестера, на основании которой составлен настоящий параграф. Перевод этой статьи см. *Успехи физических наук*, т. XXXV, вып. 4, 1948.

на  $\text{NH}_4^+$  и  $\text{NO}_3^-$ ). В таком случае будет происходить обменная реакция: азот газообразного аммиака будет меняться местами с азотом аммиака в растворе. Эта реакция может идти в ту и другую сторону и даёт равновесие. Если меняются местами изотопы одинаковой массы, то реакцию вообще никак обнаружить нельзя. Но может случиться, что  $\text{N}^{14}$  будет становиться на место  $\text{N}^{15}$  или наоборот, так что реакция будет идти по уравнению



Теория и опыт показывают, что в этом случае лёгкий изотоп будет иметь тенденцию концентрироваться в газовой фазе, а тяжёлый — в жидкой. Это скажется в том, что константа равновесия реакции, определяемая по закону действующих масс

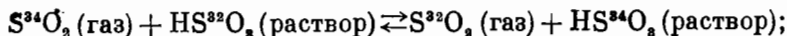
$$K = \frac{[\text{N}^{14}\text{H}_3]_{\text{газ}} [\text{N}^{15}\text{H}_3]_{\text{раствор}}}{[\text{N}^{15}\text{H}_3]_{\text{газ}} [\text{N}^{14}\text{H}_3]_{\text{раствор}}},$$

будет отличаться от единицы, тогда как в случае обмена атомами одинаковой массы она должна быть в точности равна 1. В случае равновесия аммиака  $K = 1,033$ . Легко видеть, что это и будет коэффициентом разделения данного процесса. В самом деле,  $K$  может быть записано в виде

$$K = \frac{\frac{[\text{N}^{15}\text{H}_3]}{[\text{N}^{14}\text{H}_3]}_{\text{раствор}}}{\frac{[\text{N}^{15}\text{H}_3]}{[\text{N}^{14}\text{H}_3]}_{\text{газ}}},$$

т. е. по определению  $K = q$ , а поскольку  $K > 1$ , это и означает, что тяжёлый изотоп будет иметь тенденцию концентрироваться в жидкой фазе.

Существуют и другие обменные реакции, пригодные для разделения изотопов, например



для этой реакции  $q = K = 1,012$ .

Как и в случае газовой диффузии, коэффициент разделения очень мал, однако и тут он может быть значительно повышен путём использования каскада: если каскад состоит из  $z$  звеньев, то полный коэффициент разделения, как и в случае диффузии, будет  $Q = q^z$ .

В колонке, использованной Юри для концентрирования изотопов кислорода  $\text{O}^{18}$  и азота  $\text{N}^{15}$ , было 621 звено. Вся колонка представляла собою стальную трубу с внутренним диаметром



в 15 см и высотой 10,7 м. Был использован метод противотока — жидкость падала вниз, а пар направлялся вверх.

Оказалось, что этот метод может давать концентраты изотопов  $C^{13}$ ,  $N^{15}$ ,  $O^{18}$ ,  $S^{34}$  в количестве порядка одного грамма в сутки.

## § 22. Разделение изотопов методом центрифугирования

Для разделения изотопов можно воспользоваться тем фактом, что сила тяготения пропорциональна массе. Поэтому в газе, являющемся смесью изотопов, при равновесии концентрация атомов с большей массой будет относительно большей внизу. Правда, напряжённость земного поля тяготения слишком мала для того, чтобы можно было как-нибудь практически использовать это различие. Однако можно воспользоваться искусственными полями, в которых напряжённость в сотни тысяч раз больше, нежели в земном гравитационном поле. Так как центробежные силы, как и силы тяготения, пропорциональны массе, то искомые искусственные или псевдогравитационные поля осуществляются в центрифуге.

Найдём распределение частиц в центрифуге на различных расстояниях от оси. Пусть  $\rho$  будет плотность газа,  $r$  — расстояние от оси,  $\omega$  — угловая скорость вращения. Рассчитаем давление на расстоянии  $r$  от оси. Центробежное ускорение равно  $r\omega^2$ , а масса слоя газа сечением в  $1 \text{ см}^2$  и толщиной  $dr$  будет  $\rho dr$ . Поэтому давление слоя с радиусами  $r$  и  $r + dr$  будет

$$dp = \rho dr \cdot r\omega^2. \quad (22,1)$$

С другой стороны, по законам идеальных газов

$$p = \frac{RT}{M} \rho, \quad (22,2)$$

где  $M$  — молекулярный (атомный) вес. Из (22,1) и (22,2) получаем

$$\frac{dp}{p} = \frac{M\omega^2}{RT} r dr,$$

или, интегрируя,

$$p = p_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}},$$

а так как, с другой стороны, давление пропорционально числу частиц в  $1 \text{ см}^3$ , то для распределения числа частиц на различных расстояниях получаем

$$n = n_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}}. \quad (22,3)$$

Предположим теперь, что наш газ является смесью частиц лёгких  $M_L$ ,  $n_L$  и тяжёлых  $M_S$ ,  $n_S$ . При равновесии соотношение (22,3) будет иметь место для частиц каждого сорта, а потому на расстоянии  $r$  от оси отношение чисел частиц будет

$$\frac{n_L}{n_S} = \left(\frac{n_L}{n_S}\right)_0 e^{\frac{(M_L - M_S) \omega^2 r^2}{2RT}}, \quad (22,4)$$

где  $(n_L)_0$  и  $(n_S)_0$  — числа частиц того и другого сорта на оси. Коэффициентом разделения будет служить отношение чисел  $n_S/n_L$  на границе поля ( $r = R_0$ ) и на оси ( $r = 0$ ), т. е.

$$q = \frac{(n_S/n_L)R_0}{(n_S/n_L)_0} = e^{\frac{(M_S - M_L) R_0^2 \omega^2}{2RT}}. \quad (22,5)$$

Замечательно, что в отличие от других методов, где коэффициент разделения зависит в той или иной форме от *отношения* масс (например, в методе диффузии — от  $\sqrt{\frac{M_S}{M_L}}$ ), в данном случае он определяется *разностью* масс  $M_S - M_L$ . Это является большим преимуществом метода центрифугирования. Во-первых, коэффициент разделения, очевидно, будет одинаков вне зависимости от того, в какое соединение входят изучаемые изотопы, ввиду чего всегда можно подобрать такое соединение, работа с которым всего удобнее. Во-вторых, в случае тяжёлых элементов это свойство благоприятно сказывается и на величине коэффициента разделения. Например, при разделении изотопов урана, газообразным соединением является шестифтористый уран  $UF_6$ ; квадратный корень из отношения молекулярных весов  $U^{238}F_6$  и  $U^{235}F_6$  равен  $\sqrt{\frac{352}{349}} = 1,0043$ , в то время как для метода центрифугирования в случае, когда разность  $M_S - M_L = 3$  при линейной скорости на периферии центрифуги в  $5 \cdot 10^4$  см/сек и при температуре  $300^\circ$  К, коэффициент разделения равен 1,16.

Далее, как видно из формулы (22,5),  $q$  сильно зависит от температуры и возрастает при понижении температуры. Например, при  $v = 5 \cdot 10^4$  см/сек и  $M_S - M_L = 3$ ,  $q$  имеет следующие значения при разных температурах:

$T^\circ$ К	300	200	90	20
$q$	1,16	1,25	1,65	9,68

Бимс построил быстроходные центрифуги специально для разделения изотопов. Центрифуга представляет собой цилиндр из хромомолибденовой стали; внешний диаметр цилиндра 10 см, толщина стенок 12 мм. Цилиндр приводится во вращение сжатым воздухом. Максимальная скорость вращения, допускаемая прочностью материала, соответствует линейной скорости  $v = 8 \cdot 10^4$  см/сек.

Эффективность центрифуги для разделения изотопов может быть повышена путём комбинирования её псевдогравитационного поля с диффузией. С этой целью поток пара направляется во внешней части цилиндра вниз, а в аксиальной — вверх. На границе между двумя потоками происходит непрерывная диффузия молекул из одного потока в другой. Центробежное поле усиливает переход более тяжёлых молекул по направлению к периферии. Поэтому концентрация тяжёлого изотопа на периферии будет больше, чем в центре. Для лёгкого изотопа имеет место обратная картина.

У п р а ж н е н и е. Рассчитать коэффициенты разделения для центрифуги при следующих условиях: линейная скорость  $v = 5 \cdot 10^4$  см/сек; разности масс изотопов  $M_S - M_L = 1, 2, 3, 4$ . Температуры 300, 200, 90°С (для разности  $M_S - M_L = 3$  проверить цифры, приведённые в тексте).

### § 23. Получение тяжёлого изотопа водорода (дейтерия) и тяжёлой воды

Тяжёлый изотоп водорода — дейтерий (D) — играет такую большую роль в современной физике и химии, что на его получении следует остановиться отдельно. Особое значение тяжёлого изотопа водорода связано, между прочим, с тем, что он является единственным изотопом, масса которого отличается от массы основного изотопа на 100%, ввиду чего эти две разновидности водорода в различных химических и физических процессах ведут себя существенно неодинаковым образом.

В обычном водороде, встречающемся в природе, процентное содержание тяжёлого водорода составляет всего 0,02%. В концентрированном виде дейтерий получается в виде *тяжёлой воды*. Так как не только водород, но и кислород имеет изотопы ( $O^{16}$ ,  $O^{17}$ ,  $O^{18}$ ), то среди молекул воды встречаются различные комбинации изотопов, например  $D_2O^{16}$ ,  $HDO^{16}$ ,  $H_2O^{18}$ ,  $D_2O^{18}$  и т. д. Однако под именем тяжёлой воды разумеют воду, молекулы которой имеют состав  $D_2O^{16}$ .

Физические свойства тяжёлой воды отличаются от свойств обыкновенной, или лёгкой, воды, как это видно из таблицы IV на стр. 91.

Вскоре после открытия тяжёлого водорода Уошборн и Юри обнаружили, что при электролизе водных растворов вода обогащается дейтерием, тогда как освобождаемый газообразный водород обогащается лёгким изотопом. На этом был основан метод получения практически чистой тяжёлой воды (с содержанием  $D_2O$  в 99,9%) путём электролиза.

В настоящее время тяжёлая вода изготавливается в больших количествах заводским способом, причём используется комбини-

Т а б л и ц а IV. Некоторые физические свойства тяжёлой ( $D_2O$ ) и лёгкой ( $H_2O$ ) воды

Свойства	$D_2O$	$H_2O$
Плотность $d_4^{20}$ . . . . .	1,1059	0,9982
Температура замерзания . . . . .	3,82° C	0,00° C
Температура кипения . . . . .	101,42° C	100,00° C
Максимум плотности . . . . .	11,60° C	4,00° C
Вязкость $10^3$ CGS . . . . .	12,60	10,09
Поверхностное натяжение в <i>дин/см</i>	67,8	72,75
Показатель преломления $n_D^{20}$ . . . .	1,32844	1,33300

рованный процесс электролиза и обменной реакции (см. § 21). Если обменная реакция, при которой водород воды обменивается на дейтерий из газообразного водорода, ведётся в присутствии катализатора, то при равновесии концентрация дейтерия в воде примерно в три раза больше, нежели в газовой фазе.

Схема процесса получения тяжёлой воды такова: вода подаётся на верх колонки и стекает вниз навстречу поднимающемуся пару, смешанному с водородом. В присутствии катализатора между водородом и паром происходит обменная реакция, при которой часть дейтерия концентрируется в паре и затем переходит в воду. Внизу колонки вода разлагается электрическим током, причём в неразложившейся воде происходит дальнейшая концентрация дейтерия, а водород вместе с паром поднимается вверх навстречу потоку воды. Подобного рода колонки располагаются каскадом.

Получение тяжёлой воды связано с потреблением больших количеств электричества, ввиду чего заводы для получения тяжёлой воды располагаются в местах, где имеется дешёвая электроэнергия (гидроэлектрические установки).

В заключение мы приводим полную таблицу изотопов с указанием их распространённости.

Таблица V. Изотопы и их распространённость

(Таблица составлена по данным на октябрь 1948 г.)

Сим-вол	Атом-ный номер	Массовое число	Относитель-ная распро-странённость	Сим-вол	Атом-ный номер	Массовое число	Относитель-ная распро-странённость
H	1	1	99,9844	Ca	20	46	0,0033
D		2	0,0156			48	0,19
He	2	3	$1,3 \cdot 10^{-4}$	Sc	21	45	100
		4	99,9999	Ti	22	46	7,95
Li	3	6	7,39			47	7,75
		7	92,61			48	73,45
Be	4	9	100			49	5,51
B	5	10	18,83	V	23	50	5,34
		11	81,17	Cr	24	51	100
C	6	12	98,9			50	4,49
		13	1,1			52	83,78
N	7	14	99,62			53	9,43
		15	0,38			54	2,30
O	8	16	99,757	Mn	25	55	100
		17	0,039	Fe	26	54	5,81
		18	0,204			56	91,64
F	9	19	100			57	2,21
Ne	10	20	90,51			58	0,34
		21	0,28	Co	27	59	100
		22	9,21	Ni	28	58	67,76
Na	11	23	100			60	26,16
Mg	12	24	78,60			61	1,25
		25	10,11			62	3,66
		26	11,29			64	1,16
Al	13	27	100	Cu	29	63	69,09
Si	14	28	92,28			65	30,91
		29	4,67	Zn	30	64	48,89
		30	3,05			66	27,81
P	15	31	100			67	4,07
S	16	32	95,06			68	18,61
		33	0,74			70	0,620
		34	4,18	Ga	31	69	60,2
		36	0,016			71	39,8
Cl	17	35	75,4	Ge	32	70	20,55
		37	24,6			72	27,37
Ar	18	36	0,307			73	7,61
		38	0,060			74	36,74
		40	99,633			76	7,67
K	19	39	93,3	As	33	75	100
		40	0,011	Se	34	74	0,87
		41	6,7			76	9,02
Ca	20	40	96,96			77	7,58
		42	0,64			78	23,52
		43	0,15			80	49,82
		44	2,06			82	9,19

Т а б л и ц а V

(Продолжение)

Сим-вол	Атом-ный номер	Массовое число	Относитель-ная распро-странённость	Сим-вол	Атом-ный номер	Массовое число	Относитель-ная распро-странённость		
Br	35	79	50,5	Cd	48	113	12,26		
		81	49,5			114	28,86		
Kr	36	78	0,342	In	49	116	7,58		
		80	2,223			113	4,23		
		82	11,50			115	95,77		
		83	11,48			Sn	50	112	0,90
		84	57,02				114	0,61	
Rb	37	86	17,43	115	0,35				
		85	72,8	116	14,07				
Sr	38	87	27,2	117	7,54				
		84	0,56	118	23,98				
		86	9,86	119	8,62				
		87	7,02	120	33,03				
Y	39	88	82,56	122	4,78				
		89	100	124	6,11				
Zr	40	90	51,46	Sb	51	121	57,25		
		91	11,23			123	42,75		
		92	17,11			Te	52	120	0,091
		94	17,40				122	2,49	
		96	2,80				123	0,89	
Nb	41	93	100	124	4,63				
		92	15,86	125	7,01				
Mo	42	94	9,12	126	18,72				
		95	15,7	128	31,72				
		96	16,5	130	34,46				
		97	9,45	J	53	127	100		
		98	23,75		Xe	54	124	0,094	
		100	9,62	126		0,088			
		Ru	44	96	5,68	128	1,90		
				98	2,22	129	26,23		
99	12,81			130	4,07				
100	12,70			131	21,17				
101	16,98			132	26,96				
102	31,34			134	10,54				
104	18,27			136	8,95				
Rh	45			103	100	Cs	55	133	100
Pd	46	102	0,8	Ba	56	130	0,101		
		104	9,3			132	0,097		
		105	22,6			134	2,42		
		106	27,2			135	6,59		
		108	26,8			136	7,81		
		110	13,5			137	11,32		
		107	51,35			138	71,66		
Ag	47	109	48,65	La	57	138	0,089		
Cd	48	106	1,215	Ce	58	139	99,911		
		108	0,875			136	0,193		
		110	12,39			138	0,250		
		111	12,75			140	88,48		
		112	24,07			142	11,07		

Таблица V

(Продолжение)

Сим-вол	Атомный номер	Массовое число	Относительная распространённость	Сим-вол	Атомный номер	Массовое число	Относительная распространённость		
Pr	59	141	100	Lu	71	176	2,5		
Nd	60	142	27,13	Hf	72	174	0,18		
		143	12,20			176	5,30		
		144	23,87			177	18,47		
		145	8,30			178	27,10		
		146	17,18			179	13,84		
		148	5,72			180	35,11		
		150	5,60			181	100		
Sm	62	144	3,16	Ta	73	180	0,122		
		147	15,07			182	25,77		
		148	11,27			183	14,24		
		149	13,84			184	30,68		
		150	7,47			186	29,17		
		152	23,63			Re	75	185	37,07
		154	22,53					187	62,93
Eu	63	151	47,77	Os	76	184	0,018		
153	52,23	186	1,59						
Gd	64	152	0,20	Ir	77	187	1,64		
		154	2,15			188	13,3		
		155	14,78			189	16,1		
		156	20,59			190	26,4		
		157	15,71			192	41,0		
		158	24,78			Pt	78	191	38,5
		160	21,79					193	61,5
Tb	65	159	100	Au	79	192	0,78		
Dy	66	156	0,0524			194	32,8		
		158	0,0902			195	33,7		
		160	2,294			196	25,4		
		161	18,88			198	7,28		
		162	25,53			197	100		
		163	24,97			Hg	80	193	0,15
		164	28,18	198	10,1				
Ho	67	165	100	199	17,0				
Er	68	162	0,1	200	23,3				
		164	1,5	201	13,2				
		166	32,9	202	29,6				
		167	24,4	204	6,7				
		168	26,9	Tl	81	203	29,1		
		170	14,2			205	70,9		
		Tu	69	169	100	Pb	82	204	1,5
Yb	70	168	0,06	206	23,6				
		170	4,21	207	22,6				
		171	14,26	208	52,3				
		172	21,49	Bi	83			209	100
		173	17,02					232	100
		174	29,58	Th	90			234	0,0051
		176	13,38			235	0,71		
Lu	71	175	97,5	U	92	238	99,28		

## ГЛАВА III

### ЯДЕРНОЕ СТРОЕНИЕ АТОМА

#### § 24. Эффективное сечение для рассеяния частиц

До сих пор мы рассматривали атом как целое. Теперь мы сопоставим те факты, на которых основаны современные представления об атоме как о системе, состоящей из тяжёлого ядра и окружающих его электронов.

Один из лучших способов исследования структуры атома заключается в «зондировании» его быстрыми частицами — электронами больших скоростей или  $\alpha$ -частицами радиоактивных веществ. Процессы, которые происходят при прохождении потоков быстрых частиц через вещество, вообще говоря, разнообразны и сложны. Нас будут интересовать в этом и в ближайших следующих параграфах только явления рассеяния частиц, т. е. явления, обусловленные отклонением частиц от их первоначального пути. Рассмотрение этих явлений позволит нам судить о степени заполнения веществом пространства, занятого атомом, и о распределении в нём положительного и отрицательного электричества. Однако прежде всего мы рассмотрим некоторые общие вопросы, связанные с рассеянием частиц.

Рассмотрим частицу, движущуюся среди неподвижных хаотически распределённых шаров, с которыми она может испытывать соударения. Соударение движущейся частицы с каким-либо шаром есть явление случайное. Очевидно, однако, что вероятность пройти расстояние  $x$ , не испытав соударения, есть какая-то функция этого расстояния  $f(x)$ . С другой стороны, мы можем считать, что вероятность испытать соударение на бесконечно малом отрезке  $dx$  пропорциональна  $dx$ , т. е. равна  $a dx$ , а вероятность пройти без соударения этот отрезок равна поэтому  $1 - a dx$ . Вероятность пройти без соударения расстояние  $x + dx$  мы можем теперь выразить двумя способами: с одной стороны, это есть функция  $f(x + dx)$ ; с другой стороны, можно рассматривать прохождение отрезка длины  $x + dx$  как событие сложное, состоящее из двух этапов:



прохождения расстояния  $x$  и дальнейшего расстояния от  $x$  до  $x + dx$ . Вероятность такого сложного события равна произведению вероятностей обоих элементарных событий, т. е. равна  $f(x) \cdot (1 - a dx)$ . Мы имеем, таким образом,

$$f(x + dx) = f(x)(1 - a dx),$$

или с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$f(x) + \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) - af(x) dx,$$

откуда после небольших преобразований

$$\frac{df}{f} = -a dx,$$

или, интегрируя,

$$f = ce^{-ax}.$$

Постоянную интегрирования найдём из очевидного условия, что вероятность пройти без соударения путь  $x=0$  есть достоверность, т. е. 1. Это даёт  $c=1$  и окончательно

$$f(x) = e^{-ax}. \quad (24,1)$$

Итак, вероятность пройти какой-либо слой вещества без соударения убывает экспоненциально с увеличением толщины слоя.

Выясним теперь физический смысл постоянной  $a$ . Заметим прежде всего, что эта величина имеет размерность обратной длины, так как показатель степени  $ax$  должен быть безразмерной величиной. Для установления физического смысла  $a$  мы вычислим среднюю длину свободного пробега частицы, пользуясь формулой (24,1). Частицы, которые испытывают соударение на отрезке между  $x$  и  $x + dx$ , прошли без соударения отрезок  $x$ . Вероятность пройти без соударения путь  $x$  есть по предыдущему  $e^{-ax}$ , а вероятность испытать соударение между  $x$  и  $x + dx$  есть  $a dx$ . Поэтому вероятность того, что длина свободного пути есть  $x$ , равна произведению

$$ae^{-ax} dx.$$

Средняя длина свободного пути  $\lambda$  по формуле для средних значений\*) равна

$$\lambda \equiv \bar{x} = \int_0^{\infty} xae^{-ax} dx = a \int_0^{\infty} xe^{-ax} dx. \quad (24,2)$$

Интегрированием по частям найдём

$$\lambda = a \left[ \left( -\frac{1}{a} xe^{-ax} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \right] = \frac{1}{a}.$$

\*) См. приложение I в конце книги.

Таким образом, постоянную  $a$  мы можем истолковать как обратную величину средней длины свободного пути

$$a = \frac{1}{\lambda} \quad (24,3)$$

и формулу (24,1) переписать в виде

$$f(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (24,4)$$

Мы можем дать постоянной  $a$  ещё одно, особенно интересное для нас сейчас истолкование. Размерность  $a$ , как мы знаем, есть  $см^{-1}$ ; её можно представить ещё и так:

$$[a] = \frac{см^2}{см^3} \equiv см^{-1}.$$

На этом замечании основано следующее толкование. Представим себе, что каждый неподвижный рассеивающий центр заменён кружком радиуса  $\sigma$ , выбранным таким образом, что каждая частица, которая пройдёт внутри этого кружка, испытает отклонение («соударение»). Площадь этого кружка  $\pi\sigma^2$  называется «эффективным сечением» для рассеяния. Если  $\nu$  есть число рассеивающих центров в единице объёма, то  $\nu\pi\sigma^2$  также имеет размерность  $см^{-1}$  и  $a$  можно представить в виде

$$a см^{-1} = \nu\pi\sigma^2 \frac{см^2}{см^3}$$

и истолковать как сумму эффективных сечений в единице объёма рассеивающего вещества.

От этих формальных соображений обратимся к рассмотрению параллельного пучка частиц одинаковой скорости, проходящего сквозь слой рассеивающего вещества (например, сквозь слой газа или сквозь тонкий листочек твёрдого вещества). Будем регистрировать интенсивность проходящего пучка, т. е. число частиц, пересекающих в 1 сек. сечение в  $1 см^2$  после прохождения слоя толщины  $x$  (если частицы — заряженные, то регистрацию можно осуществить при помощи фарадеева цилиндра, присоединённого к электрометру). При этом те частицы, которые испытывают «соударение», выходят из параллельного пучка и не регистрируются приёмником. Ввиду этого пучок, проходящий слой  $x$ , испытывает ослабление. Это ослабление — кажущееся, так как частицы не поглощаются, а только меняют направление своего полёта. Однако интенсивность рассеяния часто характеризуется этим кажущимся ослаблением. После сказанного ясно, что если интенсивность потока, падающего на переднюю поверхность слоя, характеризуется числом частиц  $N_0$ , то после прохождения слоя  $x$  интенсивность параллельного пучка будет характеризоваться числом частиц  $N$ , причём

$$N = N_0 e^{-ax} = N_0 e^{-\nu\pi\sigma^2 x}. \quad (24,5)$$

### § 25. Зондирование атомов электронами

Обратимся теперь к рассмотрению рассеяния электронов. При прохождении пучка электронов через вещество пучок ослабляется, т. е. число электронов в нём убывает, по двум причинам. Во-первых, электроны могут терять свою энергию, расходуя её на различные процессы, возникающие при прохождении быстрого электрона через атом (ионизация и возбуждение, см. гл. VII); во-вторых, они могут испытывать упругие соударения, в результате которых энергия не теряется, но электрон в некоторый момент резко изменяет своё направление и выбывает из пучка. Ослабление пучков электронов вследствие рассеяния изучалось ещё в начале 90-х годов прошлого столетия Ленардом, который показал, что при прохождении через слой вещества толщины  $x$  интенсивность потока электронов уменьшается с увеличением  $x$  по экспоненциальному закону:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\alpha x},$$

где  $N_0$  — интенсивность падающего пучка,  $N$  — интенсивность пучка, прошедшего слой  $x$ , а коэффициент  $\alpha$  характеризует ослабление пучка вследствие рассеяния на единице длины пути.

Легко видеть, что коэффициент  $\alpha$  имеет тот же смысл, что и коэффициент  $a$  предыдущего параграфа: его можно истолковать как сумму эффективных сечений атомов вещества для рассеяния электронов.

Изучение свойств этого коэффициента при всевозможном варьировании условий опыта обнаружило замечательный факт: оказалось, что при определённой скорости электронов  $\alpha$  не зависит ни от индивидуальных свойств рассеивающего вещества, ни от его агрегатного состояния, а зависит только от его плотности  $\rho$ ; при этом  $\alpha$  с большой точностью пропорционально  $\rho$ , так что отношение  $\frac{\alpha}{\rho}$  при данной скорости электронов остаётся постоянным. Однако  $\frac{\alpha}{\rho}$  не остаётся постоянным при изменении скорости электронов, а быстро *уменьшается* при увеличении скорости электронов (грубо говоря, обратно пропорционально четвёртой степени скорости).

В таблице VI приведено несколько цифр, иллюстрирующих это резкое увеличение прозрачности вещества для электронов при возрастании их скорости.

Пользуясь таблицей VI, можно подсчитать величину  $\alpha$  для различных скоростей электронов. Для  $\beta = \frac{v}{c} = 0,04$ , т. е. для  $v = \beta c = 1,2 \cdot 10^9$  см/сек, из таблицы находим  $\frac{\alpha}{\rho} = 58 \cdot 10^5$ . Так

как это отношение не зависит от природы поглощающего вещества, то по величине  $\alpha/\rho$  можно вычислить сумму эффек-

Таблица VI

$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\rho}$ (в $e^{-1} \cdot \text{см}^2$ )	$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\rho}$ (в $e^{-1} \cdot \text{см}^2$ )
0,90	6	0,40	$7,4 \cdot 10^2$
0,80	13	0,20	$350 \cdot 10^2$
0,70	29	0,10	$8 \cdot 10^5$
0,60	83	0,04	$58 \cdot 10^5$
0,50	$2,2 \cdot 10^2$		

тивных сечений молекул воздуха при нормальных условиях ( $0^\circ\text{C}$  и  $760 \text{ мм Нг}$ ). В этом случае  $\rho = 0,00129$  и, следовательно,

$$\alpha = 58 \cdot 10^5 \cdot 1,29 \cdot 10^{-3} = 7,5 \cdot 10^8 \text{ см}^2/\text{см}^3.$$

Эта величина близка к сумме сечений газовых молекул в  $1 \text{ см}^3$  газа при нормальных условиях, вычисленной из данных кинетической теории газов (диффузия, теплопроводность). Если положить  $\sigma = 10^{-8} \text{ см}$ , то для  $v\sigma^2$  получается приблизительно  $8 \cdot 10^3$ .

При больших скоростях электронов  $\alpha/\rho$  резко падает, например, для  $\frac{v}{c} = 0,9$ , т. е.  $v = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}$ ,  $\frac{\alpha}{\rho} = 6$ , откуда  $\alpha = 6 \cdot 1,29 \cdot 10^{-3} = 7,7 \cdot 10^{-3}$ , т. е. приблизительно в  $10^6$  раз меньше, чем в рассмотренном ранее случае.

Это означает, что истинный объём, занятый веществом, т. е. электронами и положительно заряженными частицами, в сфере радиуса  $r_0 = 10^{-8} \text{ см}$  (сфера атома по кинетической теории газов) совершенно ничтожен.

В начале этого параграфа было указано, что рассмотренные результаты имеют место для не слишком быстрых и не слишком медленных электронов. В этих крайних случаях сказывается целый ряд факторов, существенно меняющих картину прохождения электронов через вещество. Именно, в случае очень медленных электронов (энергия порядка долей электрон-вольта) на первый план выступают явления, обусловленные волновой природой электрона, с которой мы ознакомимся в главе X (в частности — так называемый эффект Рамзауэра, состоящий в увеличении прозрачности атома для медленных электронов). Напротив, в случае очень быстрых электронов (с энергией порядка  $10^7 - 10^{10} \text{ eV}$ ) преобладающее значение имеет целый ряд весьма сложных процессов, связанных с большими потерями энергии электронов при прохождении через вещество. С ними мы ознакомимся в т. II, главе XXIII.

## § 26. Свойства $\alpha$ -частиц

Ещё более определённые результаты относительно роли положительного электричества в атоме были получены при «зондировании» атомов  $\alpha$ -частицами. Свойства  $\alpha$ -частиц будут рассмотрены в т. II, глава XIX. Здесь мы приведём только некоторые основные данные, касающиеся их природы.

$\alpha$ -частицы испускаются многими естественно-радиоактивными веществами (например, радием). То, что они представляют собою поток *частиц*, непосредственно видно на photographиях их путей в камере Вильсона, пример которых приведён на рис. 51.

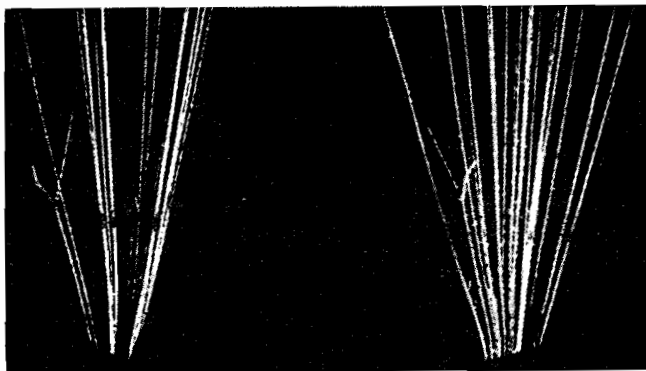


Рис. 51. Пути  $\alpha$ -частиц в камере Вильсона.

$\alpha$ -частицы отклоняются в электрических и магнитных полях, откуда следует, что они несут электрический заряд. Направление, в котором происходит это отклонение, указывает на то, что заряд этот *положителен*. Однако поля, которые вызывают заметное отклонение электронов, не оказывают влияния на траекторию  $\alpha$ -частиц, откуда следует, что они обладают большой массой по сравнению с массой электрона. Действительно, для того чтобы сфотографировать траектории  $\alpha$ -частиц, искривлённые магнитным полем, понадобилось поместить камеру Вильсона в очень сильное магнитное поле. Впервые это удалось сделать П. Л. Капице; одна из photographий, полученных им с магнитным полем в 43 000 эрстед, приведена на рис. 52.

Количество  $\alpha$ -частиц, испускаемых радиоактивными веществами, было измерено путём непосредственного подсчёта числа вспышек на флуоресцирующем экране (сцинтилляций), вызываемых пучком  $\alpha$ -частиц с очень малым телесным углом. Полное число  $\alpha$ -частиц, испускаемых 1 г радия в 1 сек.,

оказалось равным  $Q = 3,7 \cdot 10^{10}$ . Заряд, переносимый одной  $\alpha$ -частицей, был измерен Резерфордом и Гейгером также самым непосредственным образом:  $\alpha$ -частицы препарата определённой силы попадали в металлический коллектор (Фарадеев цилиндр), заряд которого определялся с помощью электрометра. Число  $\alpha$ -частиц можно было определить, зная  $Q$  и геометрию расположения опыта (расстояние между источником и круглой диафрагмой, расположенной перед коллектором, размеры диафрагмы). Эти опыты показали, что *заряд, переносимый  $\alpha$ -частицей, равен  $+2e$* , т. е. удвоенной абсолютной величине заряда электрона. Наконец, из опытов с магнитным отклонением (пропорциональным  $\epsilon/mv$ ) и электрическим (пропорциональным  $\epsilon/mv^2$ , где  $\epsilon$  — заряд  $\alpha$ -частицы) можно было определить массу и скорость  $\alpha$ -частиц.

Для скорости  $\alpha$ -частиц радия  $C$  при этом получилось

$$v = 1,992 \cdot 10^9 \text{ см/сек},$$

а для  $\epsilon/m_\alpha$

$$\frac{\epsilon}{m_\alpha} = 1,446 \cdot 10^{14} \text{ CGSE} \cdot e^{-1}.$$

Сравним эту величину с отношением  $\frac{F}{H^2}$ , т. е. с отношением заряда Фарадея к массе грамм-атома водорода:

$$\frac{F}{H^2} = 2,88 \cdot 10^{14} \text{ CGSE} \cdot e^{-1}.$$

С другой стороны, принимая во внимание, что  $\epsilon = 2e$  и умножая числитель и знаменатель отношения  $2e/m_\alpha$  на постоянную Авогадро  $N_0$ , получаем

$$\frac{\epsilon}{m_\alpha} = \frac{2e}{m_\alpha} = \frac{2F}{M_\alpha} = 1,44 \cdot 10^{14} \text{ CGSE} \cdot e^{-1}.$$

(где  $M_\alpha = m_\alpha \cdot N_0$  — масса грамм-атома  $\alpha$ -частиц). Поэтому

$$\frac{F}{H^2} \cdot \frac{2F}{M_\alpha} = \frac{M_\alpha}{2H^2} = \frac{2,88 \cdot 10^{14}}{1,44 \cdot 10^{14}} = 2,$$

откуда

$$\frac{M_\alpha}{H^2} = 4,$$

т. е.  $\alpha$ -частица имеет массу атома гелия.

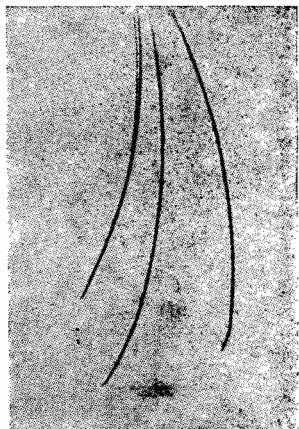


Рис. 52. Пути  $\alpha$ -частиц в камере Вильсона, помещённой в сильное магнитное поле.

То, что  $\alpha$ -частицы по своей природе тождественны с гелием, было показано также следующим опытом Резерфорда и Ройдса (рис. 53).

Большое количество радиоактивного газа радона было введено в тонкостенную стеклянную трубочку *A*, толщина стенок которой была такова, что большинство  $\alpha$ -частиц проходило сквозь них. Эта трубочка была окружена более широкой трубкой *T*, к которой была припаяна разрядная трубочка *V* со впаянными электродами. Трубка *T* была перед началом опыта тща-

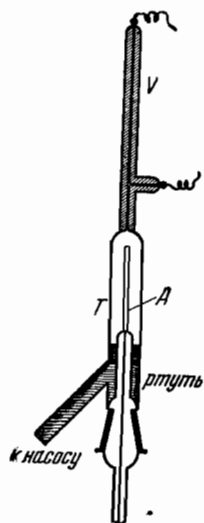


Рис. 53. Опыт Резерфорда и Ройдса.

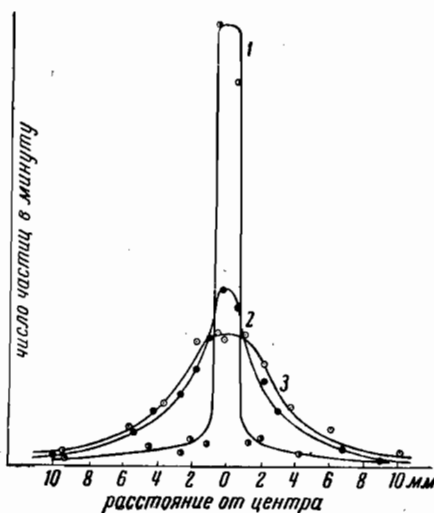


Рис. 54. Частота рассеяния  $\alpha$ -частиц на малые углы. Для характеристики рассеяния подсчитывалось число частиц, попадающих в разные точки флуоресцирующего экрана: 1 — рассеяние  $\alpha$ -частиц в воздухе; 2 — рассеяние  $\alpha$ -частиц тонким золотым листочком; 3 — рассеяние двумя золотыми листочками.

тельно откачана.  $\alpha$ -частицы, скопившиеся в *T*, образовывали газ, который путём поднятия уровня ртути мог быть сжат и переведён в капилляр *V*. Пропуская разряд через *V*, можно было через два дня после начала опыта обнаружить в испускаемом свете жёлтую линию гелия, а через шесть дней — полный спектр гелия.

Параллельный пучок  $\alpha$ -частиц, пройдя сквозь слой вещества, рассеивается:  $\alpha$ -частицы несколько изменяют своё направление. Исследование рассеяния тонкими металлическими листочками показало, что очень часто наблюдается отклонение  $\alpha$ -час-

тиц на небольшие углы, в среднем  $2-3^\circ$ , и распределение  $\alpha$ -частиц по углам в точности следует статистической кривой случайных явлений (рис. 54). Наряду с таким рассеянием на малые углы сотрудники Резерфорда Гейгер и Марден обнаружили, что некоторое число  $\alpha$ -частиц (приблизительно 1 на 8000) рассеивается на очень большие углы, иногда превышающие  $90^\circ$  и доходящие в некоторых случаях почти до  $180^\circ$ . Объяснить эти большие углы рассеяния накоплением случайных малых отклонений оказалось невозможным, так как из статистической кривой рассеяния следует, что число частиц, которые могли бы испытать столь значительное отклонение, должно быть во много раз меньше, чем 1 на 8000.

Большие углы рассеяния наблюдаются как при прохождении  $\alpha$ -частиц через металлические листочки, так и в газах, и их можно обнаружить на вильсоновских фотографиях. Одна из таких фотографий приведена на рис. 55, где изображён след  $\alpha$ -частицы в кислороде: короткий след принадлежит атому кислорода, приведённому в быстрое движение, более длинный —  $\alpha$ -частице, отклонённой от первоначального направления на угол около  $90^\circ$ . Эта фотография ясно показывает, что большие углы отклонения получаются отнюдь не в результате накопления малых отклонений, но в результате одного единственного соударения.

Резерфорд указал на то, что это возможно только в том случае, если внутри атома имеется чрезвычайно сильное электрическое поле, которое создаётся положительным зарядом, связанным с большой массой и сконцентрированным в очень малом объёме (радиус порядка  $10^{-13}$  см). Отсюда и возникла «ядерная» модель атома, согласно которой атом устроен наподобие планетной системы: малое по размерам, положительно заряженное ядро, в котором сосредоточена почти вся масса атома, и отрицательные электроны, обращающиеся около этого ядра по замкнутым орбитам.

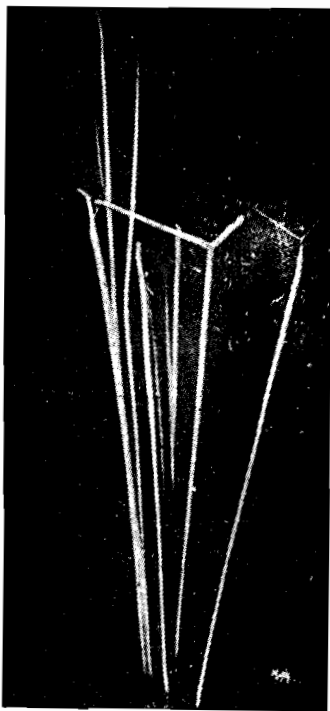


Рис. 55. Рассеяние  $\alpha$ -частиц в кислороде.



### § 27. Теория рассеяния $\alpha$ -частиц

На основании этих представлений Резерфорд разработал количественную теорию рассеяния  $\alpha$ -частиц.

Пусть в  $O$  (рис. 56) помещается рассеивающее ядро. Очевидно, что заряд его по абсолютной величине должен быть равен целому кратному заряду электрона, так как в нейтральном атоме положительный заряд ядра должен в точности компенсироваться суммой отрицательных зарядов электронов.

Обозначим заряд ядра, помещающегося в  $O$ , через  $+Ze$ , где  $Z$  — целое число, и предположим, что масса его настолько больше массы  $\alpha$ -частицы, что при взаимодействии с последней ядро можно считать неподвижным.

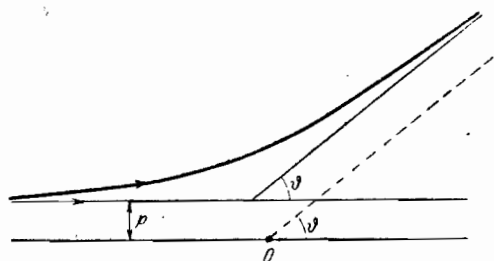


Рис. 56.

Предположим, наконец, что сила взаимодействия между ядром и  $\alpha$ -частицей подчиняется закону Кулона, т. е. что эта сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между обеими частицами. Необходимо дать себе ясный отчёт в том, что это последнее предположение на первых порах является только гипотезой и оправ-

дывается лишь последующим согласием теории с экспериментом. В самом деле, у нас ведь нет никаких оснований заранее считать, что взаимодействие очень малых частиц, сближающихся на ничтожно малые расстояния, должно управляться законом, справедливость которого безупречно установлена только для макроскопических тел.

Классическая механика показывает, что при всех этих предположениях  $\alpha$ -частица должна описывать относительно ядра  $O$  гиперболу. Обозначим массу  $\alpha$ -частицы через  $M$ , её скорость на большом расстоянии от рассеивающего ядра — через  $v$ . Если бы  $\alpha$ -частица не взаимодействовала с ядром, то она прошла бы на расстоянии  $p$  (рис. 56) от ядра (так называемое «прицельное расстояние»). Вычисление, которое мы отложим до § 50, показывает, что угол —  $\theta$  отклонения  $\alpha$ -частицы, отталкивающейся от ядра по закону Кулона, выражается через указанные параметры следующим образом:

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{Mv^2 p}{2Ze^2}. \quad (27,1)$$

Было бы бесполезно пытаться проверить эту формулу непосредственно экспериментом, так как в неё входит недоступное измерению прицельное расстояние  $p$ .

Мы можем, однако, положить формулу (27,1) в основу статистической теории, которая даст нам выражение для эффективного сечения рассеяния в зависимости от параметров, доступных экспериментальному определению.

Представим себе сферу, в центре которой расположен рассеивающий листок  $F$  (рис. 57). Пусть на этот листок в единицу времени падает  $N_0$   $\alpha$ -частиц. При наиболее детальном изучении рассеяния определяется среднее число частиц,  $N(\vartheta)$ , рассеянных в пределах телесного угла  $d\Omega^{(2)}$  в направлении, характеризуемом углами  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Величина телесного угла  $d\Omega^{(2)}$  равна отношению элемента поверхности сферы к квадрату радиуса

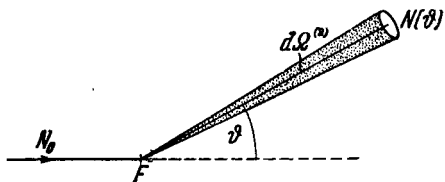


Рис. 57.

$$d\Omega^{(2)} = \frac{R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{R^2} = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (27,2)$$

В опытах Резерфорда и его сотрудников чаще изучалось среднее число частиц, рассеиваемых в пределах области, лежащей между двумя телесными углами, характеризуемыми отверстиями  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$  (рис. 58). Очевидно, что соответствующий этому случаю телесный угол  $d\Omega^{(1)}$  (или просто  $d\Omega$ ) получится путём интегрирования (27,2) по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ :

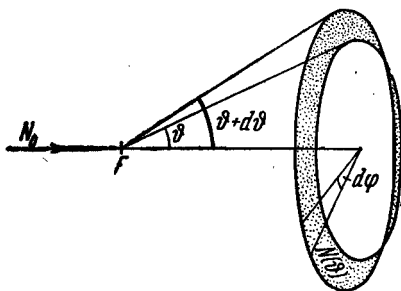


Рис. 58.

$$d\Omega = d\Omega^{(1)} = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta. \quad (27,3)$$

Эффективное сечение для рассеяния в пределах  $d\Omega$  мы и будем вычислять.

Положим, что  $\alpha$ -частицы до рассеяния летят параллельным потоком. Так как при прочих равных условиях угол отклонения  $\alpha$ -частицы по формуле (27,1) определяется прицельным расстоянием  $p$ , то, очевидно, на угол, лежащий в пределах между  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$ , отклонятся  $\alpha$ -частицы, у которых прицельное расстояние лежит между  $p$  и  $p + dp$ , т. е.  $\alpha$ -частицы, пролетающие внутри колец между кругами с радиусами, заключёнными между  $p$  и  $p + dp$ , описанными около каждого из рассеивающих центров (рис. 59). Площадь каждого такого кольца равна  $2\pi p dp$ , и мы можем утверждать, что число  $\alpha$ -частиц,

отклонённых на угол между  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$ , т. е. летящих после рассеяния внутри телесного угла  $d\Omega$ , пропорционально  $2\pi p dp \cdot n$ , где  $n$  — число рассеивающих ядер, приходящихся на  $1 \text{ см}^2$  поверхности. Далее очевидно, что число рассеянных  $\alpha$ -частиц  $dN$  пропорционально плотности пучка падающих  $\alpha$ -частиц, т. е. числу  $\alpha$ -частиц  $N$ , проходящих в 1 сек. через площадку в  $1 \text{ см}^2$ , расположенную перпендикулярно к скорости  $\alpha$ -частиц. Обозначим через  $d\sigma$  отношение  $dN/N$  (оно имеет размерность  $[\text{см}^2]$ ):

$$d\sigma = \frac{dN}{N}. \quad (27,4)$$

На основании сказанного

$$d\sigma = 2\pi n p dp. \quad (27,5)$$

Если мы теперь найдём  $p$  из (27,4) и возведём в квадрат, то получим

$$p^2 = \left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \text{ctg}^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

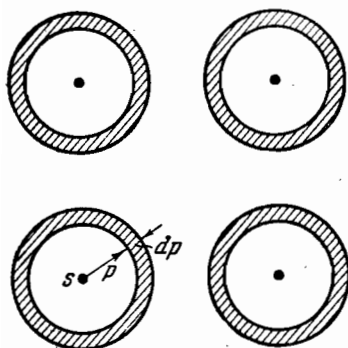


Рис. 59.

Дифференцируя, находим следующее выражение:

$$p dp = -\frac{1}{2} \left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \cdot \frac{\text{ctg} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

и, подставляя в (27,5)\*), получаем

$$d\sigma = 2\pi n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \cdot \frac{\text{ctg} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Введём ещё сюда телесный угол  $d\Omega$  по формуле (27,3):

$$d\sigma = n \left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}. \quad (27,6)$$

Это и есть формула Резерфорда для рассеяния  $\alpha$ -частиц. Как мы видим, относительное число  $\alpha$ -частиц, рассеянных в пределах телесного угла  $d\Omega$ , очень сильно зависит от угла  $\vartheta$  и быстро возрастает с уменьшением  $\vartheta$ .

\*) Знак минус не имеет существенного значения: он указывает лишь на то, что с увеличением прицельного расстояния  $p$  угол  $\vartheta$  уменьшается (и наоборот). Поэтому в дальнейшем используется только абсолютное значение  $p dp$ .

### § 28. Экспериментальная проверка формулы Резерфорда

Формула Резерфорда была подвергнута тщательной экспериментальной проверке. Из (27,6), принимая во внимание (27,4), следует

$$dN \cdot \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = nN \left( \frac{Ze^2}{Mv^2} \right)^2 d\Omega.$$

Таким образом, если, сохраняя все остальные условия, изменять только угол  $\vartheta$ , то должно быть

$$dN \cdot \sin^4 \frac{\vartheta}{2} = \text{const.}$$

Этот вывод и был проверен в первую очередь. С этой целью применялся следующий прибор (рис. 60). Металлическая коробка *B* в форме цилиндра укреплялась на круге *A*, снабжённом делениями. Коробка вместе с кругом могла вращаться на шлифе *C*. Радиоактивный препарат *R* и рассеивающий листок *F* устанавливались на особой трубке *T* независимо от коробки; этим достигалась неизменяемость положения *R* и *F* при поворотах остальной системы. Экран *S* (прозрачный) устанавливался перед микроскопом *M*, неподвижно скреплённым с коробкой *B*. Поворачивая круг *A*, можно было устанавливать микроскоп для измерения числа рассеянных  $\alpha$ -частиц при любом угле рассеяния. Коробка закрывалась сверху стеклянной пластинкой *P* и откачивалась через трубку *T* для того, чтобы избежать дополнительного рассеяния в воздухе.

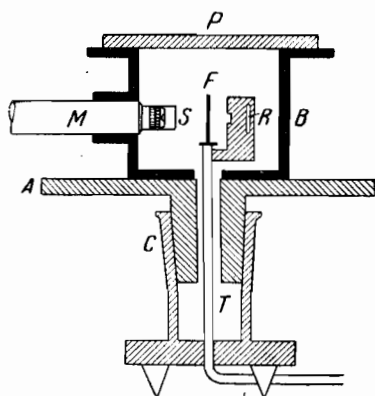


Рис. 60. Прибор для изучения зависимости числа рассеянных  $\alpha$ -частиц от угла рассеяния.

В течение всей работы было подсчитано свыше 100 000 сцинтилляций.

Полученные результаты для рассеяния в золоте приведены в таблице VII, из которой видно, что, несмотря на то, что величина  $1/\sin^4 \left( \frac{\vartheta}{2} \right)$  и число сцинтилляций изменялись в очень

широких пределах, произведение  $dN \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$  оставалось постоянным в согласии с требованием теории.

Таблица VII. Рассеяние  $\alpha$ -частиц  
золотыми листочками

Угол отклонения (в °)	$\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$	Число сцинтилляций	$dN \sin^4 \frac{\theta}{2}$
150	1,15	33,1	28,8
135	1,38	43,0	31,2
120	1,79	51,9	23,0
105	2,53	69,5	27,5
75	7,25	211	29,1
60	16,0	477	29,8
45	46,6	1 435	30,8
30	223	7 800	35,0
15	3445	132 000	33,4

Аналогичным образом была изучена зависимость рассеяния от толщины листков и от скорости  $\alpha$ -частиц. Во всех случаях для рассеяния в листочках из тяжёлых металлов установлено хорошее согласие экспериментальных результатов с требованиями теории.

Это согласие одновременно является доказательством применимости закона Кулона к взаимодействию между  $\alpha$ -частицами и исследованными рассеивающими ядрами.

Другой способ экспериментальной проверки теории специально для случая рассеяния в газах состоит в том, что производится большое количество вильсоновских фотографий путей  $\alpha$ -частиц в газе, измеряются углы отклонения и подсчитывается, как часто встречаются определённые углы рассеяния. Такой метод был применён Блэкетом главным образом с целью изучения границ применимости закона Кулона. Оказалось, что для аргона в пределах расстояний между центрами ядра и  $\alpha$ -частицы от  $7 \cdot 10^{-12}$  до  $10^{-9}$  см и для воздуха в пределах от  $3 \cdot 10^{-12}$  до  $5 \cdot 10^{-10}$  см закон Кулона имеет место.

Из этого, однако, не следует делать вывода об универсальной применимости закона Кулона для ядерных взаимодействий.

\*; Таблица показывает, что в то время как  $1/\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$  изменяется примерно в 350 раз,  $dN \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)$  изменяется только на 30%.

Напротив, изучение рассеяния  $\alpha$ -частиц лёгкими ядрами показало, что когда расстояния между взаимодействующими частицами уменьшается до  $10^{-11}$  см, наблюдаются резкие отклонения от закона Кулона, а на расстояниях, меньших  $10^{-12}$  см, обнаруживается действие быстро убывающих с расстоянием сил притяжения, перекрывающих действие кулоновских сил отталкивания между одинаково заряженными частицами. Этот вопрос будет подробнее рассмотрен во втором томе (см., например, гл. XVIII, §§ 245 и 246).

### § 29. Определение заряда ядра

Формула Резерфорда позволяет экспериментальным путём найти число  $Z$ , т. е. число элементарных положительных зарядов ядра. В самом деле, подсчитывая на флуоресцирующем экране число сцинтилляций  $N$ , создаваемых падающими  $\alpha$ -частицами, и число сцинтилляций  $dN$ , создаваемых  $\alpha$ -частицами, рассеянными на угол  $\vartheta$ , мы будем знать величину  $d\sigma = dN/N$ . В правую же часть формулы Резерфорда входят, кроме искомой величины  $Z$ , либо величины известные ( $n$ ,  $e$ ), либо величины, доступные экспериментальному определению

( $Mv^2$ ,  $\vartheta$ ). Таким образом, для отыскания  $Z$  нужно произвести подсчёт числа сцинтилляций  $N$  и  $dN$ . Главная трудность эксперимента обусловлена тем, что эти числа очень сильно различаются между собой. В первых опытах числа  $N$  и  $dN$  измерялись на разных установках, т. е. в разных условиях, что являлось источником значительных ошибок.

Чадвик использовал расположение опыта, при котором оба числа  $N$  и  $dN$  могут быть измерены на одной и той же установке, вследствие чего ему удалось определить  $Z$  с большей точностью. Идея опыта Чадвика заключается в следующем. Рассеивающая фольга имеет вид кольца  $AA'$  (рис. 61); препарат  $R$  и экран  $S$  из  $ZnS$  устанавливаются на одинаковом расстоянии  $r$  от  $AA'$ . Измеряется число  $\alpha$ -частиц, рассеянных на один определённый угол  $\vartheta$ , выбранный (для упрощения расчёта) так, чтобы он был вдвое больше угла между осью  $RS$  и направлением лучей, идущих от  $R$  к фольге (рис. 61). Располагая внутри кольца между  $R$  и  $S$  экран, непрозрачный для  $\alpha$ -частиц, можно было считать одни только рассеянные  $\alpha$ -частицы; наоборот,

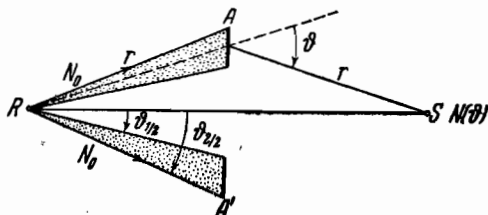


Рис. 61. Схема опыта Чадвика.

закрывая экраном кольцо  $AA'$ , можно было считать число частиц  $N$  в падающем пучке. Так как это число слишком велико для того, чтобы можно было непосредственно подсчитывать сцинтилляции первичных  $\alpha$ -частиц на экране (например, для того, чтобы число сцинтилляций от рассеянных  $\alpha$ -частиц составляло 30 в минуту,  $N$  должно быть равно 20 000 в минуту), то перед  $S$  располагался вращающийся диск с узким вырезом, при помощи которого число сцинтилляций можно было произвольно уменьшать в любое число раз.

Таким путём Чадвик нашёл следующие значения  $Z$  для платины, серебра и меди: Pt (78) — 77,4; Ag (47) — 46,3; Cu (29) — 29,3. Числа, стоящие в скобках после химических символов элементов, означают номер места соответствующего элемента в периодической системе Менделеева или атомный номер. Таким образом, опыты Чадвика показывают, что число элементарных положительных зарядов ядра равно атомному номеру соответствующего элемента. Это правило, подтверждённое другими исследователями для целого ряда элементов, сводит задачу об определении заряда ядра к точной фиксации атомных номеров всех элементов. Средство для этого дают нам рентгеновские спектры, с которыми мы и познакомимся в следующей главе.

---

## РЕНТГЕНОВСКИЕ ЛУЧИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ АТОМНЫХ КОНСТАНТ

Рентгеновские лучи играют важную роль в изучении атома. В § 29 уже указывалось, например, что спектры рентгеновских лучей позволяют точно фиксировать атомные номера всех элементов, т. е. определять заряды их ядер. Кроме того, за последние годы методы рентгеновской спектроскопии с большим успехом применялись для получения наиболее точных значений постоянной Авогадро, заряда электрона  $e$ , а также удельного заряда электрона  $e/m$ . В дальнейших главах мы нередко будем обращаться также к рассмотрению различных явлений, связанных с рентгеновскими лучами. Ввиду этого нам необходимо с самого начала ознакомиться с их природой и свойствами.

### § 30. Рентгеновские лучи

Рентгеновские лучи возникают под действием быстрых электронов. В так называемых рентгеновских трубках против катода располагается металлическая пластинка (в трубках, применяемых в медицине и для технических просвечиваний, — вольфрамовая), при бомбардировке которой электронами и возникают рентгеновские лучи. Энергия возбуждающих электронов в обычных технических установках порядка 100 000 eV. Существуют также установки, дающие рентгеновские лучи при энергии электронов в миллион электрон-вольт, а для целей ядерной физики в последнее время построены специальные ускорители электронов (бетатроны и синхротроны, см. т. II, гл. XX), позволяющие получать рентгеновские лучи при торможении электронов с энергией до 100 миллионов электрон-вольт.

Рентгеновские лучи, невидимые для глаза, обладают способностью вызывать яркую видимую флуоресценцию в некоторых естественных кристаллических веществах (платиносиноеродистый барий, цинковая обманка и др.) и в искусственно изготовляемых порошках (люминофорах). Они действуют на фотографическую пластинку и вызывают ионизацию в газах. Всеми этими явле-



ниями пользуются для обнаружения и исследования рентгеновских лучей.

По своей природе рентгеновские лучи тождественны со светом и отличаются от него только тем, что имеют меньшие длины волн. Так же как и свет, рентгеновские лучи обладают волновыми свойствами, которые обнаруживаются опытами с интерференцией и диффракцией. Впервые интерференционный опыт, аналогичный опыту с зеркалами Френеля, с рентгеновскими лучами был осуществлён советским физиком

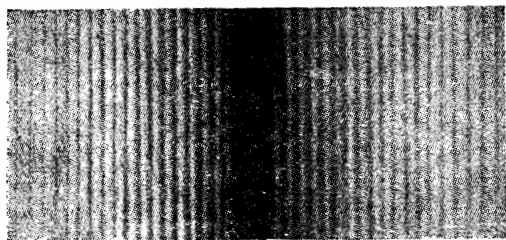


Рис. 62. Диффракция рентгеновских лучей при прохождении через узкую щель (ширина щели 0,006 мм; увеличение в 26 раз).

В. П. Линником. На рис. 62 приведена фотография диффракционной картины, полученной при прохождении рентгеновских лучей через узкую щель. Эти опыты очень трудны, так как вследствие малой длины волны щель должна быть очень узкой и фотографию, кроме того, приходится подвергать последующему увеличению для того, что-

бы выявить светлые и тёмные полосы. Фотография, приведённая на рис. 62, была получена со щелью шириной в 6  $\mu$  и подвергнута 26-кратному увеличению. Зная геометрические условия опыта (расстояние от щели до фотопластинки) и измеряя расстояние между последовательными светлыми полосами, можно вычислить длину волны рентгеновских лучей совершенно так же, как это делается в оптике\*). Из фотографии, приведённой на рис. 62, для длины волны получилось 8,33  $\text{Å}$  с точностью в 0,5% (напоминаем, что длина волны крайних ещё видимых глазу фиолетовых лучей — 4000  $\text{Å}$ ). Это — случай длинноволнового рентгеновского излучения. Длины волн рентгеновских лучей, которыми пользуются для медицинских просвечиваний, — порядка единицы ангстрема.

Различают два типа рентгеновских лучей. Если энергия электронов, испытывающих торможение на антикатоде, не превышает определённой, характерной для вещества антикатады величины, то возникающее излучение называется *тормозным*. Оно разлагается в сплошной спектр наподобие белого света, ввиду чего тормозное излучение называют иногда «белым» рентгеновским излучением. Сплошной спектр тормозного излучения имеет сле-

\*) См., например, Г. С. Л а н д с б е р г, Оптика, § 11, Гостехиздат, 1947.

дующие характерные особенности. Распределение интенсивности в зависимости от длины волны в этом спектре представляется кривой, имеющей максимум при определённой длине волны (см. рис. 158, стр. 344). Спадание интенсивности от этого максимума в сторону длинных и в сторону коротких волн происходит различным образом: в сторону длинных волн кривая спадает полого, асимптотически приближаясь к нулю по мере увеличения длины волны; напротив, спадание в сторону коротких волн происходит круто, и спектр резко обрывается при некоторой определённой длине волны. Эта критическая длина волны — коротковолновая граница сплошного спектра — зависит от ускоряющего потенциала электронов. Именно, если этот потенциал равен  $V$  киловольтам, то длина волны границы, выраженная в единицах ангстрема, равна

$$\lambda = \frac{12,345}{\sqrt{V}} \text{ \AA}. \quad (30,1)$$

Таким образом, при  $V = 100 \text{ kV}$  наиболее короткая длина волны в сплошном спектре есть  $1,23 \text{ \AA}$ . Соотношение (30,1) имеет важное теоретическое истолкование, которое будет рассмотрено в § 112. Здесь для нас существенно, что характер сплошного спектра не зависит от природы антикатада, но определяется только ускоряющим потенциалом.

Как уже сказано, сплошной спектр возникает в тех случаях, когда энергия возбуждающих электронов не превосходит некоторой критической величины. Если же энергия электронов равна или больше этой критической величины, то возникает излучение, называемое *характеристическим*, так как оно характеризует вещество антикатада в такой же степени, в какой оптический спектр испускания газа или пара характерен для вещества. Спектр характеристического излучения — линейный. Замечательно при этом, что каждый элемент даёт определённый, присущий ему спектр независимо от того, возбуждается ли этот элемент к рентгеновскому излучению в свободном состоянии или входит в химическое соединение. Этим рентгеновские спектры существенно отличаются от оптических, так как одно и то же вещество даёт различные оптические спектры в атомном и в молекулярном состояниях (например, оптические спектры атома  $O$ , молекулы  $O_2$  и молекулы  $H_2O$  совершенно различны и отнюдь не складываются аддитивно из спектров атомов, входящих в состав молекулы).

На рис. 63 приведён интересный пример изменения рентгеновского спектра при возникновении характеристического излучения. Здесь по оси абсцисс нанесены длины волн, по оси ординат — интенсивности; различные кривые сняты при разных энергиях возбуждающих электронов. Антикато́д во всех случаях — родиевый. Видно, что при  $23,2 \text{ kV}$  спектр ещё сплошной. Но при

31,8 kV на сплошной спектр накладывается линейный, состоящий из резко выраженных спектральных линий; при 40,0 kV характер спектра остаётся без изменения, но интенсивность линий воз-

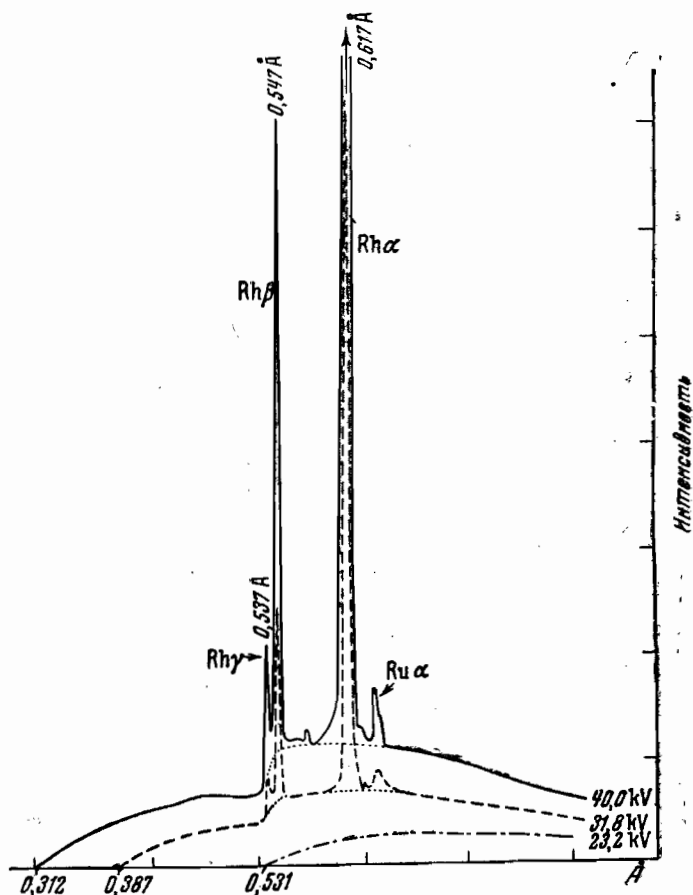


Рис. 63. Возникновение *K*-серии характеристического излучения родиевого антикатада. По оси абсцисе отложена длина волны рентгеновского излучения и указаны длины волн коротковолновой границы каждого спектра. (Линия *Ru α* принадлежит рутению, находящемуся в образце родия в виде примеси.)

растает настолько, что самая яркая из них не укладывается на чертеже в принятом масштабе.

Этот линейный спектр и принадлежит характеристическому излучению вещества антикатада, в данном случае — родия.

Спектральные линии характеристического излучения образуют закономерные последовательности или серии, расположенные в различных частях рентгеновского спектра. По историческим причинам эти серии обозначаются буквами *K*, *L*, *M*, *N*. Серия *K*—самая коротковолновая, следующая в сторону длинных волн—серия *L*, далее идут серии *M* и *N*, наблюдаемые, впрочем, только у тяжёлых элементов. Подробнее эти серии будут рассмотрены в § 36.

### § 31. Поглощение рентгеновских лучей

К числу наиболее замечательных особенностей рентгеновских лучей относится их своеобразный закон поглощения. Оказывается, прежде всего, что поглощение рентгеновских лучей веществом совершенно не зависит от его оптических свойств. Так, например, бесцветное и прозрачное для света свинцовое стекло практически полностью поглощает рентгеновские лучи и потому используется для защиты персонала, обслуживающего рентгеновские установки. Напротив, тонкий листок алюминия, непрозрачный для света, очень мало поглощает рентгеновские лучи и для лучей, испускаемых техническими рентгеновскими трубками (при потенциалах порядка 100 кВ), почти совершенно прозрачен.

Применение рентгеновских лучей для медицинских или технических просвечиваний основано на законах поглощения рентгеновских лучей, с которыми мы сейчас и ознакомимся. Если параллельный пучок рентгеновских лучей проходит через слой вещества, то пучок испытывает ослабление, т. е. интенсивность его уменьшается. Это ослабление является результатом двух процессов: 1) рассеяния и 2) поглощения. Эти два процесса существенно различны:

1) Ослабление вследствие рассеяния обусловлено тем, что часть лучей отклоняется в сторону (рис. 64) и потому выводится из параллельного пучка. Явление это совершенно аналогично рассеянию, которое испытывает свет при прохождении через мутную среду. Разница только в том, что мутность среды для света обусловлена взвешенными в ней достаточно крупными частицами с показателем преломления, отличным от показателя преломления среды. Для рентгеновских же лучей вследствие их малой длины волны любая прозрачная для света среда является «мутной». В этом случае рассеивающими центрами являются сами атомы или молекулы вещества. Аналогичное молекулярное

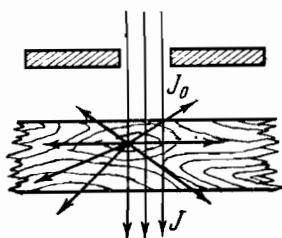


Рис. 64. Рассеяние рентгеновских лучей при прохождении через вещество.

рассеяние наблюдается и для света. Но оно представляет собой в случае света очень слабый эффект. Для сравнения можно привести следующие цифры. Параллельный пучок света вследствие рассеяния ослабляется в  $e$  ( $\approx 2,7$ ) раз слоем чистой воды толщиной в 1 км; пучок рентгеновских лучей ослабляется в то же число раз путём одного только рассеяния (т. е. исключая поглощение) слоем воды в 5 см. Для того чтобы молекулярное рассеяние света стало легко заметным, необходимо, чтобы в среде возникали в большом количестве местные уплотнения и разрежения (флуктуации плотности), как это имеет место, например, для всякого вещества вблизи его критической температуры (так называемая «критическая опалесценция»).

2) Ослабление вследствие поглощения или абсорбции обусловлено тем, что часть энергии рентгеновских лучей испытывает истинное поглощение в веществе.

Если параллельный пучок рентгеновских лучей монохроматичен, т. е. состоит из лучей одной определённой длины волны, то ослабление его бесконечно тонким слоем вещества толщиной  $dx$  подчиняется простому закону

$$-dJ = \mu J dx,$$

где  $J$  — интенсивность пучка, падающего на слой, а  $\mu$  — коэффициент, характеризующий ослабление. Интегрируя это уравнение (см. аналогичное уравнение в § 24), получаем закон ослабления рентгеновских лучей слоем конечной толщины  $d$ :

$$J = J_0 e^{-\mu d}, \quad (31,1)$$

где  $J_0$  — интенсивность параллельного пучка при  $d=0$ . Размерность коэффициента поглощения  $\mu$  есть  $[см^{-1}]$ , так как  $\mu d$  — безразмерная величина.

Поскольку ослабление пучка происходит как за счёт истинного поглощения, так и за счёт рассеяния, — коэффициент ослабления  $\mu$  является суммой двух коэффициентов: коэффициента истинного поглощения  $\tau$  и коэффициента рассеяния  $\sigma$ :

$$\mu = \tau + \sigma \quad (31,2)$$

Оба коэффициента  $\tau$  и  $\sigma$ , а следовательно, и  $\mu$  пропорциональны массе вещества. Ввиду этого удобнее пользоваться так называемыми «массовыми коэффициентами», т. е. отношениями  $\mu/\rho$ ,  $\tau/\rho$  и  $\sigma/\rho$ , где  $\rho$  — плотность вещества. Очевидно, что формула (31,1) может быть переписана в виде

$$J = J_0 e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho d}. \quad (31,3)$$

Произведение  $\rho d$  есть масса вещества в столбе сечением в 1 см<sup>2</sup> и толщиной  $d$ ;  $\mu/\rho$  имеет размерность  $[г^{-1} \cdot см^2]$ .

Если  $\rho d = 1$ , то  $J = J_0 e^{-\frac{\mu}{\rho}}$ , откуда следует, что  $\mu/\rho$  характеризует ослабление рентгеновских лучей слоем, содержащим 1 г вещества на каждый квадратный сантиметр.

Для теоретических расчётов ещё удобнее пользоваться так называемыми *атомными коэффициентами*  $\mu_a$ ,  $\tau_a$ ,  $\sigma_a$ , которые получаются из значений  $\mu/\rho$ ,  $\tau/\rho$  и  $\sigma/\rho$  для определённого элемента путём умножения на абсолютную массу атома, т. е. на отношение грамм-атома данного элемента  $A$  к постоянной Авогадро  $N$ :

$$\mu_a = \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{A}{N}, \quad \tau_a = \frac{\tau}{\rho} \cdot \frac{A}{N}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{A}{N}. \quad (31,4)$$

Таким образом, например,  $\mu_a$  характеризует ослабление в слое, содержащем 1 атом на  $\text{см}^2$ . Стоит отметить также, что размерность атомных коэффициентов  $\mu_a$ ,  $\tau_a$  и  $\sigma_a$ , как легко убедиться, есть  $[\text{см}^2]$ . Поэтому их можно истолковать как эффективные сечения атома соответственно для ослабления, поглощения или рассеяния.

Эмпирически установлено и довольно точно соблюдается следующее соотношение:

$$\tau_a = cZ^4\lambda^3, \quad (31,5)$$

где  $c$  — некоторая постоянная,  $Z$  — атомный номер вещества и  $\lambda$  — длина волны. Отсюда при помощи определений (31,4) для массового коэффициента поглощения получается

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_a N}{A} = \frac{cN}{A} Z^4\lambda^3 \quad (31,6)$$

или

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{c'}{A} Z^4\lambda^3 \quad (c' = cN). \quad (31,6')$$

Из этих формул видно, что поглощение лучей определённой длины волны очень быстро возрастает с увеличением атомного номера (пропорционально *четвёртой* степени  $Z$ ).

Вторая замечательная особенность поглощения рентгеновских лучей состоит в том, что оно является чисто атомным свойством: поэтому *молекулярный коэффициент* поглощения аддитивно складывается из атомных коэффициентов элементов, входящих в состав молекулы. Благодаря этому для вычисления молекулярных коэффициентов всего бесконечного многообразия химических соединений достаточно знать атомные коэффициенты поглощения элементов.

Формулы (31,6) и (31,6') и аддитивность поглощения рентгеновских лучей лежат в основе их применения для просвечивания. Сравним, например, коэффициенты поглощения костей и тканей человеческого тела. Вещество кости есть фосфорнокислый кальций  $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ ; поглощение ткани главным образом

обусловлено входящей в её состав водой ( $H_2O$ ). Учитывая, что атомные номера Ca, P, O и H соответственно равны 20, 15, 8 и 1, находим, что отношение атомных коэффициентов поглощения обоих веществ будет равно

$$\frac{3 \cdot 20^4 + 2 \cdot 15^4 + 8 \cdot 8^4}{2 + 8^4} \approx 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{15}{8}\right)^4 + 8,$$

т. е. коэффициент поглощения  $Ca_3(PO_4)_2$  примерно в 150 раз больше атомного коэффициента поглощения воды (ткани). Для

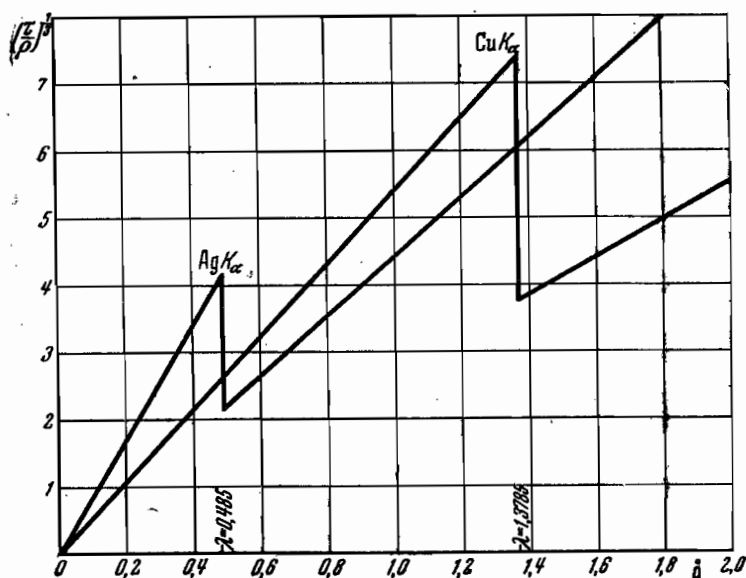


Рис. 65. Зависимость поглощения рентгеновских лучей от длины волны ( $K_{\alpha}$ -линии серебра и меди).

практических целей, однако, важнее отношение *массовых* коэффициентов. Если применить к интересующему нас случаю формулу (31,6), то отношение получится равным примерно 68, что уже вполне объясняет, почему на рентгенограммах тень от костей так резко выделяется.

Формулы (31,5) и (31,6) показывают также, что поглощение рентгеновских лучей быстро возрастает при увеличении длины волны. Наоборот, чем меньше длина волны, тем больше проникающая способность рентгеновских лучей, тем больше их жёсткость. Если отложить по оси абсцисс длину волн, а по оси ординат  $\sqrt[3]{\frac{Z}{\rho}}$ , то в соответствии с формулами (31,5) и (31,6) для данного элемента ход поглощения в зависимости от  $\lambda$  изобразится прямой (рис. 65). Однако при определённой длине волны погло-

чение испытывает резкий скачок, а затем снова изменяется линейно. Как видно из рис. 65, для меди такой скачок наблюдается при  $\lambda = 1,3785 \text{ \AA}$ , для серебра — при  $\lambda = 0,485 \text{ \AA}$ . Эти критические длины волн имеют следующее значение. Если освещать какой-либо элемент (например, Cu или Ag) монохроматическими рентгеновскими лучами убывающей длины волны, то, начиная со строго определённой длины волны возбуждающих рентгеновских лучей, элемент начинает испускать своё собственное характеристическое излучение в виде *излучения флуоресценции*. Критические длины волн, при которых наблюдается скачок поглощения, как раз совпадают с критическими длинами волн для возбуждения характеристического излучения флуоресценции данной длины волны. Возникновение скачка поглощения учитывается в формулах (31,5) и (31,6) тем, что коэффициент  $c$  имеет разные значения по ту и другую стороны критической длины волны.

### § 32. Рассеяние рентгеновских лучей

Рассеяние рентгеновских лучей обнаруживает закономерности, отличные от закономерностей рассеяния света в оптической части спектра (т. е. в области видимых или ультрафиолетовых лучей). Как известно, в оптической части спектра, где длина волны порядка  $10^{-5} \text{ см}$ , т. е. значительно больше атомных размеров (порядка  $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$ ), рассеяние обратно пропорционально четвёртой степени длины волны (закон Рэлея, объясняющий голубой цвет неба). В области рентгеновских лучей длина волны того же порядка величины, что и размеры атома. Соответственно и закон рассеяния здесь иной. Именно, *рассеяние рентгеновских лучей не зависит от длины волны*. Рассматривая рассеяние как результат вынужденных колебаний электронов под действием электромагнитного поля падающей рентгеновской волны, Дж. Дж. Томсон ещё в ранний период изучения рентгеновских лучей вывел следующую формулу для атомного коэффициента рассеяния:

$$\sigma_a = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2 c^4} Z, \quad (32,1)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $c$  — скорость света. Атомный номер элемента  $Z$ , входящий в эту формулу, равен числу электронов в нейтральном атоме. С другой стороны,  $\sigma_a$ , как уже указывалось, имеет размерность площади. Таким образом,  $\frac{\sigma_a}{Z} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2 c^4}$  можно рассматривать как эффективное сечение одного электрона для рассеяния рентгеновских лучей.

Подставляя сюда известные значения

$$e = 4,80 \cdot 10^{-10}, \quad \frac{e}{mc} = 1,760 \cdot 10^7, \quad c = 2,997 \cdot 10^{10},$$



получаем

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2 c^4} = 6,57 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2. \quad (32,2)$$

Радиус этого эффективного сечения равен

$$r_0 = 4,57 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (32,3)$$

Эта величина того же порядка, что и так называемый «классический радиус электрона», т. е. радиус сферы, равномерно заполненной зарядом  $e^*$ ). Эти замечания будут нам полезны впоследствии при рассмотрении корпускулярных свойств света.

Формула (32,1) была использована Томсоном для определения числа электронов в атоме (равного заряду ядра  $Z$ ) следующим интересным способом.

Так как по определению атомных коэффициентов (31,4)

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{A}{N},$$

то для массового коэффициента рассеяния формула (32,1) даёт

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2 c^4} \cdot \frac{NZ}{A}; \quad (32,4)$$

пользуясь результатом вычислений (32,2), имеем

$$\frac{\sigma}{\rho} = 6,57 \cdot 10^{-25} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{Z}{A} \approx 0,40 \cdot \frac{Z}{A}. \quad (32,5)$$

Экспериментальная проверка формулы Томсона показала, что для лёгких элементов она довольно хорошо оправдывается.

Найденная из опыта величина  $\frac{\sigma}{\rho}$  оказалась не зависящей от длины волны и равной 0,20. Подставляя это значение в (32,5), получаем

$$0,20 = 0,40 \cdot \frac{Z}{A}$$

или

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2}, \quad (32,6)$$

т. е. у лёгких элементов (за исключением водорода) атомный номер должен быть равен половине атомного веса. Это соотношение на самом деле приблизительно оправдывается в начале периодической системы [He ( $Z=2$ ,  $A=4$ ), Li ( $Z=3$ ,  $A=7$ ), ..., C ( $Z=6$ ,  $A=12$ ), и т. д.]. Физические причины, ведущие к соотношению (32,6), связаны с природой ядерных сил (см. т. II, гл. XVIII). К рассмотрению интересных и важных свойств рассеянного рентгеновского излучения мы ещё вернёмся в §§ 116 и 117.

Упражнение. Пользуясь формулой (32,1) и экспериментальным значением  $\sigma/\rho$ , вычислить число электронов в 1 г кислорода, азота и углерода. При помощи этого числа определить, далее, число электронов в 1 атоме каждого из перечисленных элементов.

\*) См. § 11.

### § 33. Диффракция рентгеновских лучей в кристаллической решётке

В § 30 мы видели, что с рентгеновскими лучами можно осуществлять те же диффракционные явления, что и со светом. Однако наиболее простой и практически наиболее важный способ получения диффракции рентгеновских лучей основан на применении *кристалла* в качестве диффракционной решётки. Причина лёгкости осуществления диффракции рентгеновских лучей с помощью кристаллов состоит в том, что порядок величины межузельных расстояний в кристалле — тот же, что

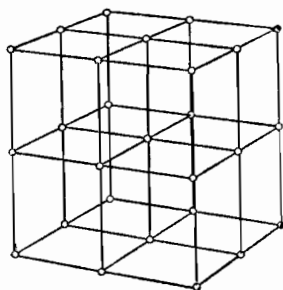


Рис. 66. Кубическая решётка.

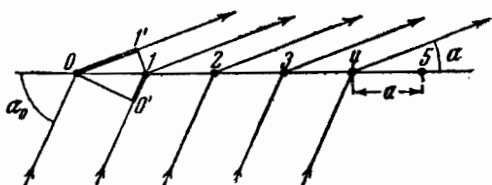


Рис. 67. Диффракция в линейной решётке.

и порядок длины волны рентгеновских лучей ( $1 \text{ \AA}$ ). Как известно, именно при прохождении рентгеновских лучей через кристаллы была впервые обнаружена диффракция рентгеновских лучей (Лауэ, 1912 г.), окончательно доказавшая тождество их природы со светом.

Кристалл представляет собой совокупность закономерно распределённых в пространстве атомов, групп атомов или ионов («пространственная решётка», например, рис. 66, где изображена простейшая кристаллическая решётка). Для того чтобы найти условия диффракции на таких правильных трёхмерных структурах, мы рассмотрим последовательно одномерную (линейную), двумерную и трёхмерную решётку.

Пусть мы имеем ряд рассеивающих центров  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  (атомов), расположенных на одной прямой (рис. 67), и пусть на эту линейную решётку падает плоская волна под углом  $\alpha_0$ . Каждый из рассеивающих центров  $0, 1, 2, 3, \dots$  является источником новой сферической волны, и эти когерентные сферические волны расходятся во всех направлениях. Рассмотрим какое-нибудь произвольное направление, характеризуемое углом  $\alpha$ . Разность хода двух лучей, проходящих через каждую пару соседних атомов ( $0, 1; 1, 2; \dots$ ), как видно из рис. 67, равна  $a(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$ . Для того чтобы в направлении  $\alpha$  получился диффракционный

максимум, необходимо выполнение условия

$$a (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = h\lambda, \quad (33,1)$$

где  $h$  — целое число. Из (33,1) следует

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 + h \cdot \frac{\lambda}{a}. \quad (33,2)$$

Это показывает, что линейная решётка действует как спектральный прибор, так как для каждой длины волны  $\lambda$  получается своё значение угла  $\alpha$ . При  $h = 1$  возникает, таким образом, спектр

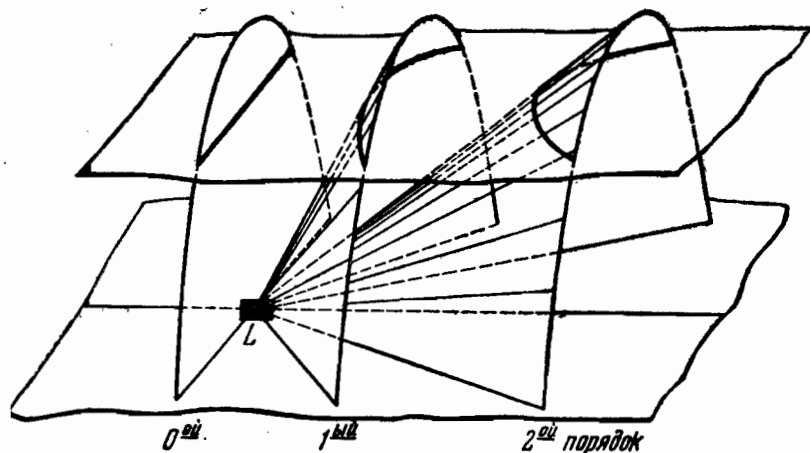


Рис. 68. Интерференционные полосы линейной решётки.

первого порядка, при  $h = 2$  — второго порядка и т. д. В симметричных направлениях при  $h = -1, -2$  и т. д. возникают также спектры —1-го, —2-го и т. д. порядков. Совокупность их образует, таким образом, одномерное многообразие.

Если мы теперь примем во внимание, что каждый рассеивающий центр является источником сферической волны, то направления, соответствующие максимуму интерференции определённого (например, первого) порядка для данной длины волны, в пространстве лежат на поверхности конуса с углом при вершине  $\alpha$ . На рис. 68 буквой  $L$  обозначена линейная решётка. Очевидно, что если расположить флуоресцирующий экран или фотопластику на некотором расстоянии от решётки, то следы интерференционных конусов дадут на этом экране гиперболы, по которым будут расположены максимумы интерференции для определённой длины волны.

Рассмотрим теперь плоскую, т. е. двумерную решётку (рис. 69). Ясно, что эту решётку можно рассматривать как двойное

многообразие линейных решёток, расположенных параллельно осям  $x$  и  $y$ . Пусть теперь на эту решётку падает плоская волна, нормаль к которой образует с осями  $x$  и  $y$  углы  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ . Рассматривая, как и раньше, каждый центр решётки как источник сферической волны, мы видим, что направления, в которых получатся интерференционные максимумы, будут характеризоваться углами  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющими двум условиям:

$$\left. \begin{aligned} a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= h_1 \lambda, \\ a(\cos \beta - \cos \beta_0) &= h_2 \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (33,3)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  — целые числа. Первое из этих условий есть, очевидно, условие максимума интерференции для линейных решёток, параллельных оси  $x$ , второе — то же условие для решёток, параллельных оси  $y$ . Если расположить на некотором расстоянии от плоской решётки флуоресцирующий экран, то каждая из систем линейных решёток, на которые мы разбиваем плоскую

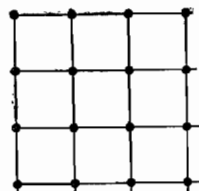


Рис. 69. Плоская решётка.

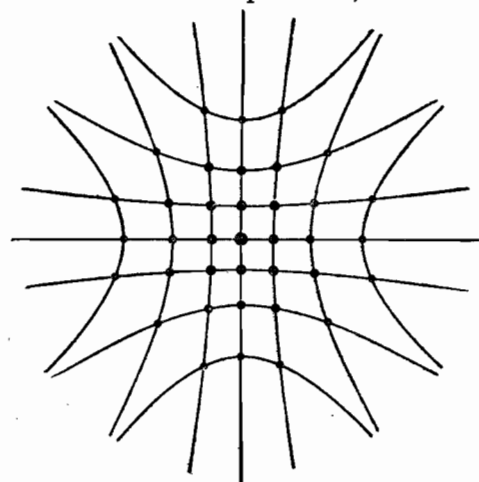


Рис. 70. Спектры, получающиеся от плоской решётки.

решётку, даст на экране свою систему гипербол и, очевидно, оба условия (33,3) будут удовлетворены для точек, лежащих на пересечении этих гипербол (рис. 70). Определяя из (33,3)  $\cos \alpha$  и  $\cos \beta$ , находим

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \alpha_0 + h_1 \cdot \frac{\lambda}{a}, \\ \cos \beta &= \cos \beta_0 + h_2 \cdot \frac{\lambda}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (33,4)$$

Отсюда следует, что для каждой длины волны  $\lambda$  получаются свои значения  $\alpha$  и  $\beta$ , т. е. и плоская решётка разлагает излучение в спектр. При этом, однако, в отличие от линейной решётки получается не простое, но двойное многообразие спектров. В самом деле, определённый спектр характеризуется парой чисел  $(h_1, h_2)$ . Таким образом, получаются, например, спектры порядков  $(+1, +1)$ ,  $(+1, +2)$  ..., а также порядков  $(+1, -1)$ ,  $(+1, -2)$  и т. д. Это хорошо видно на рис. 70.

Рассмотрим, наконец, пространственную решётку. Её можно разбить на три системы линейных решёток, параллельных

осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Интерференционные максимумы в этом случае получаются в направлениях, характеризуемых углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , которые должны удовлетворять одновременно трём условиям:

$$\left. \begin{aligned} a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) &= h_1 \lambda, \\ a(\cos \beta - \cos \beta_0) &= h_2 \lambda, \\ a(\cos \gamma - \cos \gamma_0) &= h_3 \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (33,5)$$

Определим из этих условий направляющие косинусы для интерференционных максимумов

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \alpha_0 + h_1 \frac{\lambda}{a}, \\ \cos \beta &= \cos \beta_0 + h_2 \frac{\lambda}{a}, \\ \cos \gamma &= \cos \gamma_0 + h_3 \frac{\lambda}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (33,6)$$

Здесь, как видно, порядок интерференции определяется уже тремя числами ( $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ). Вместе с тем обнаруживается и новое обстоятельство, а именно, что интерференционные максимумы возможны не для любых длин волн, а только для некоторых, совершенно определённых. В самом деле, наряду с условиями (33,5) для *любого* направления в пространстве автоматически удовлетворяются ещё условия

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \gamma_0 &= 1, \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (33,7)$$

Поэтому из (33,5) определяются не только направляющие косинусы максимума интерференции, но и *длина волны*, для которой эта интерференция имеет место. Действительно, возводя в квадрат равенства (33,6), складывая их, и принимая во внимание формулы (33,7), найдём

$$1 = 1 + \frac{\lambda^2}{a^2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + 2 \cdot \frac{\lambda}{a} (h_1 \cos \alpha_0 + h_2 \cos \beta_0 + h_3 \cos \gamma_0),$$

откуда

$$\lambda = -2a \cdot \frac{h_1 \cos \alpha_0 + h_2 \cos \beta_0 + h_3 \cos \gamma_0}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}. \quad (33,8)$$

Это и означает, что при данном направлении падающей плоской волны (заданные  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ ) максимум интерференции определённого порядка ( $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ) получается *только* для длины волны, удовлетворяющей равенству (33,8).

Геометрическая иллюстрация, которой мы пользовались при рассмотрении линейной и плоской решёток, позволяет легко

понять причину этого ограничения. Предположим для простоты, что нормаль к падающей плоской волне направлена по оси  $z$  и что экран расположен также нормально к оси  $z$ . Тогда направления максимумов интерференции для линейных решёток, параллельных оси  $z$ , расположатся по поверхности конусов, которые дадут на экране систему определённой длины волны  $\lambda$  и определённому порядку интерференции  $h_z = \text{const.}$  С другой стороны, каждая из плоских решёток, параллельных плоскости  $xy$ ,

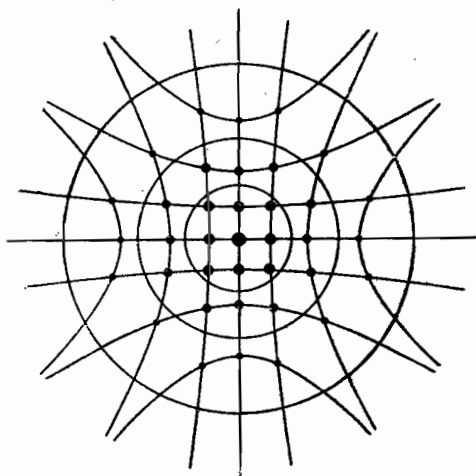


Рис. 71. Геометрическая иллюстрация условия интерференции в пространственной решётке.

даст для данной длины волны совокупность интерференционных максимумов, лежащих на пересечении двух систем гипербол (см. рис. 70). Для того чтобы при  $\lambda = \text{const.}$  были удовлетворены все три условия (33,6), нужно, чтобы круги рис. 71 прошли через точки пересечения гипербол, что при наличии одной определённой длины волны крайне маловероятно. Таким образом, при освещении пространственной решётки монохроматическим излучением или излучением с линейным спектром возникновение интерференции крайне маловероятно. Напротив, при освещении решётки излучением со сплошным спектром всегда найдётся подходящая длина волны, удовлетворяющая всем условиям интерференции. Таким образом, после прохождения через пространственную решётку волна, обладающая сплошным спектром, разбивается на систему монохроматических интерференционных лучей, дающих на экране (фотопластинке) совокупность симметрично расположенных интерференционных пятен, и если бы мы могли их непосредственно воспринимать глазом, то они представились бы нам различно окрашенными.

Заметим в заключение, что предыдущие рассуждения применимы для любой длины волны и для решёток с любым расстоянием

\*) Если бы направление решёток не совпадало с осью  $z$  или экран был расположен под любым углом к этой оси, то вместо кругов получились бы эллипсы, но все рассуждения остаются в силе и для этих случаев.

между центрами со следующим ограничением: длина волны  $\lambda$  должна быть меньше параметра решётки  $a$ , так как при  $\lambda \geq a$   $n \frac{\lambda}{a} > 1$ , и условия (33,2), (33,7) и (33,6) не могут быть удовлетворены ни для какой длины волны (косинус не может быть больше 1). С другой стороны, если  $\lambda \ll a$ , то условия интерференции могут быть удовлетворены, но углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  оказываются очень малыми и наблюдение интерференции становится затруднительным. Именно поэтому для интерференции рентгеновских лучей в *кристаллах* особенно благоприятно то, что длина волны рентгеновских лучей — того же порядка величины, что и междуатомные расстояния в кристалле.

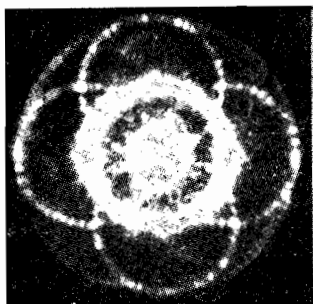


Рис. 72. Диффракция света на пространственной решётке, образованной в ксилоле тремя ультразвуковыми волнами, направленными под углом  $90^\circ$ .

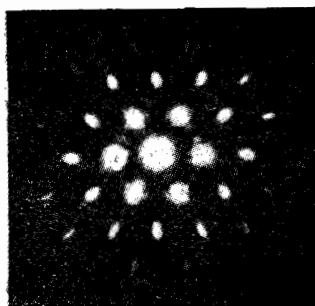


Рис. 73. То же, но ультразвуковые волны направлены под углом  $120^\circ$ .

Для получения пространственной решётки с периодом  $a$ , подходящим для диффракции видимого света, пользуются ультразвуковыми волнами. Ультразвуковые волны в жидкостях и твёрдых телах могут быть получены с длиной волны порядка  $10^{-4}$ — $10^{-5}$  см, близкой к длинам волн видимого спектра ( $7 \cdot 10^{-5}$ — $4 \cdot 10^{-5}$  см). Поэтому, если образовать стоячие плоские ультразвуковые волны в жидкости или в твёрдом теле, то возникающая система уплотнений и разрежений создаёт прекрасную диффракционную решётку для света. Естественно ожидать, что три ультразвуковые волны, направленные взаимно перпендикулярно или под какими-нибудь другими углами, дадут пространственную решётку с периодом, подходящим для диффракции видимого света. Это ожидание действительно оправдывается. На рис. 72—73 приведены два примера фотографий, полученных при пропускании света через жидкость (ксилол), в которой возбуждались три ультразвуковые волны одинакового периода. Диффракционные пятна видны

здесь очень хорошо. Сравнение с рис. 75, где приведена так называемая диффракционная картина Лауэ, полученная при пропускании рентгеновских лучей через кристалл кварца, показывает, что диффракция света на искусственной пространственной решётке кристалла ( $a$  — порядка  $10^{-8}$  см, т. е. порядка длины волны рентгеновских лучей) даёт совершенно аналогичные картины.

### § 34. Экспериментальное осуществление диффракции рентгеновских лучей

В предыдущем параграфе мы рассмотрели диффракцию рентгеновских лучей при помощи метода Лауэ. Экспериментальная установка для наблюдения

диффракции по этому методу очень проста. Узкий пучок рентгеновских лучей, выделяемый круглым отверстием в толстом свинцовом экране  $B$  (рис. 74), проходит через кристалл  $K$ . Возникающие при этом диффракционные пучки фиксируются в виде пятен на фотопластинке  $P$ , расположенной перпендикулярно к пучку лучей. В качестве примера фотографий, получаемых по этому методу, на рис. 75 приведена картина

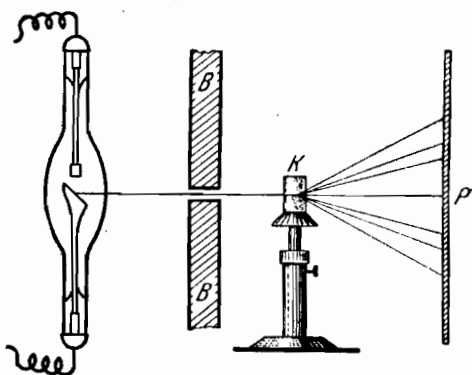


Рис. 74. Схема получения диффракции рентгеновских лучей по методу Лауэ.

диффракции в кристалле кварца. На основании сказанного в предыдущем параграфе для получения диффракции по методу Лауэ необходимо пользоваться тормозным рентгеновским излучением, имеющим сплошной спектр.

У. Г. Брэгг и У. Л. Брэгг (отец и сын), а также, независимо от них, русский физик-кристаллограф Ю. В. Вульф предложили другой метод рассмотрения и расчёта диффракции рентгеновских лучей. Коротко говоря, этот метод состоит в том, что каждое пятно рентгенограммы Лауэ рассматривается как результат *интерференционного отражения* рентгеновских лучей. Для того чтобы пояснить это, мы обратимся к простейшему случаю кубической кристаллической решётки, изображённой на рис. 66.

Представим себе оси координат, проведённые так, чтобы оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  были направлены вдоль рёбер куба; тогда расположение атомов в плоскости  $xu$  представится рис. 76. Любая плоскость, пересекающая кристалл перпендикулярно к плоскости  $xu$ , оставит в этой плоскости след в виде прямой (например,  $l$  или  $l'$ ).



2 или 2'). Очевидно, прежде всего, что мы можем разбить весь кристалл на ряд плоскостей  $1, 1', \dots$  или  $2, 2', \dots$ , параллельных

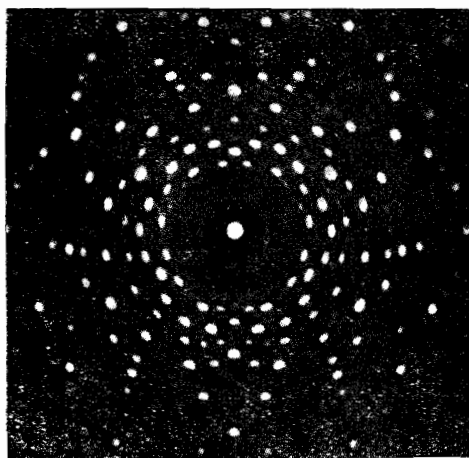


Рис. 75. Диффракция рентгеновских лучей в кристалле кварца.

его естественным граням. Эти плоскости будут одинаково густо усеяны атомами и будут отстоять друг от друга на одинаковое расстояние  $d$ , равное ребру элементарной кубической ячейки. Однако из того же рисунка видно, что аналогичное разбиение можно осуществить множеством других способов. Таковы, например, плоскости  $3, 3', \dots$ ;  $4, 4', \dots$ ; они отличаются от плоскостей  $1, 1', \dots$  и  $2, 2', \dots$  только густотой заполнения атомами и межплоскостным расстоянием.

Рассмотрим теперь одну из таких систем плоскостей, например плоскости, параллельные естественной грани (т. е.  $1, 1', \dots$  или  $2, 2', \dots$ ). Пусть на них падает параллельный пучок монохроматических лучей с длиной волны  $\lambda$ . Рассматривая атомы как центры новых когерентных элементарных волн, мы получаем для каждой из плоскостей отражение нулевого порядка под углом, равным углу падения. При этом отражение для одной единственной плоскости будет происходить совершенно одинаково для любой длины волны, так как длины путей для всех лучей между собой равны, а следовательно, и разности хода всегда равны нулю. Примем теперь во внимание, что отражение происходит не от одной плоскости, но от системы равноотстоящих плоскостей. В этом случае картина осложняется интерференцией когерентных лучей, отражённых от различных плоскостей, и отражение на самом деле получится не для любой

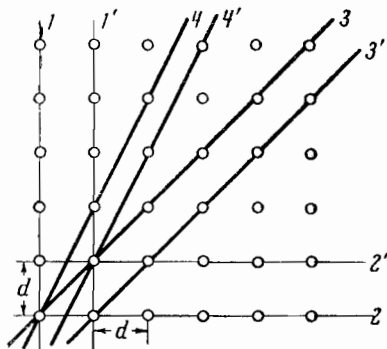


Рис. 76. Сетчатые плоскости.

длины волны, а только для некоторых, вполне определённых. Действительно, лучи 1 и 2 (рис. 77), отражённые от плоскостей I и II, имеют разность хода, равную, как легко усмотреть из чертежа,  $2d \sin \vartheta$ , где  $\vartheta$  — угол скольжения, т. е. дополнение до  $90^\circ$  к углу падения. Поэтому отражение будет иметь место только для тех волн, для которых эта разность хода равна целому числу длин волн. Итак, для интерференционного отражения рентгеновских лучей должно быть соблюдено условие

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (34,1)$$

Это и есть *формула Брэгга—Вульфа*, лежащая в основе всей спектроскопии рентгеновских лучей.

В действительности отражение происходит от многих плоскостей, т. е. интерферируют между собой не два пучка, но много пучков. Однако влияние этих многократных отражений не меняет условия максимума интерференции, а совершенно так же, как в оптике \*), сказывается только в том, что вместо широких интерференционных полос получаются узкие линии, т. е. оказывается очень благоприятным для применения этого метода в спектроскопии рентгеновских лучей. Условие же (34,1) для отражения остаётся без изменения.

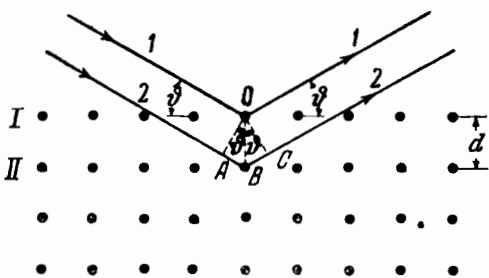


Рис. 77. К выводу уравнения Брэгга—Вульфа.

Мы рассматривали до сих пор отражение от системы плоскостей, параллельных естественной грани кристалла. Ничто не мешает нам, однако, рассматривать с теми же результатами и отражения от других систем плоскостей, вроде  $3, 3', \dots; 4, 4', \dots$  и т. д. Можно показать совершенно строго \*\*), что каждое пятно рентгенограммы Лауэ является результатом интерференционного отражения от определённой системы сетчатых плоскостей. Таким образом, как способ рассмотрения, метод Брэгга—Вульфа эквивалентен методу Лауэ. Однако метод Брэгга—Вульфа имеет и большое самостоятельное значение ввиду того, что он, как уже указывалось, лежит в основе спектроскопии рентгеновских лучей,

\*) См., например, теорию интерферометра Фабри—Перо или пластинки Луммера—Герке в книге Г. С. Ландсберга, Оптика, § 27, Гостехиздат, 1947.

\*\*) Доказательство дается в курсах рентгеноструктурного анализа (см., например, Г. С. Жданов, Основы рентгеновского структурного анализа, Гостехиздат, 1940).

а также — одного из наиболее плодотворных методов анализа кристаллов.

Простейшая схема рентгеновского спектрографа изображена на рис. 78. Параллельный пучок рентгеновских лучей падает

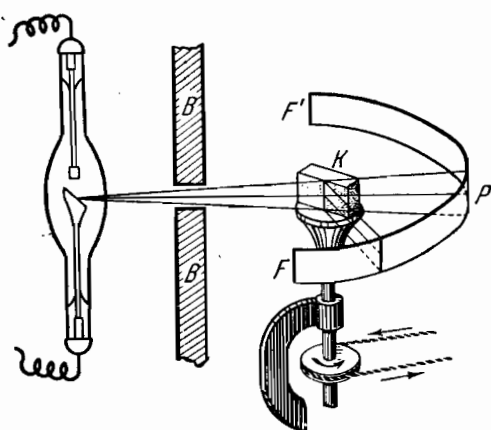


Рис. 78. Схема рентгеновского спектрографа.

на кристалл  $K$ , расположенный на вращающемся столике;  $FPF'$  — фотоплёнка. Вместо фотоплёнки иногда применяется ионизационная камера, поворачивающаяся одновременно с кристаллом на двойной угол (объяснить почему!). Сила ионизационного тока, возникающего в камере под действием рентгеновских лучей, является мерой интенсивности этих лучей. Если излучение обладает линейным спектром и состоит из нескольких длин волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , то каждая длина вол-

ны будет отражаться при своём угле  $\vartheta$ , определяемом формулой Брэгга—Вульфа. Таким образом, кривая интенсивности рентгеновских лучей в зависи-

мости от угла поворота кристалла будет иметь ряд максимумов, которые должны повторяться в различных порядках отражения. На рис. 79 приведён пример такой кривой, полученной при отражении от кристалла NaCl излучения рентгеновской трубки с платиновым антикатодом. Три резких максимума этой кривой  $A_1, B_1, C_1$ , последовательно повторяющихся в трёх порядках отражения, соответствуют трём спектральным линиям платины  $K_\alpha, K_\beta$  и  $K_\gamma$ . То обстоятельство, что интенсивность отражения вне линий не равна нулю, но систематически возрастает при уменьшении угла отражения, имеет

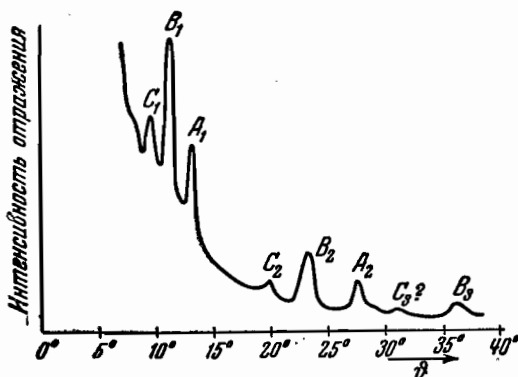


Рис. 79. Кривая отражения рентгеновских лучей от кристалла NaCl.

следующую простую причину: при бомбардировке платинового антикатада электронами, кроме характеристического излучения, возникает ещё и тормозное излучение, которое имеет сплошной спектр. Благодаря этому спектральные линии платины накладываются на сплошной фон. Примеры фотографий рентгеновских спектров приведены на рис. 85 и 86.

Кроме рассмотренных двух методов изучения диффракции рентгеновских лучей, существует ещё третий метод — метод кристаллических порошков, получивший весьма широкие применения в анализе строения

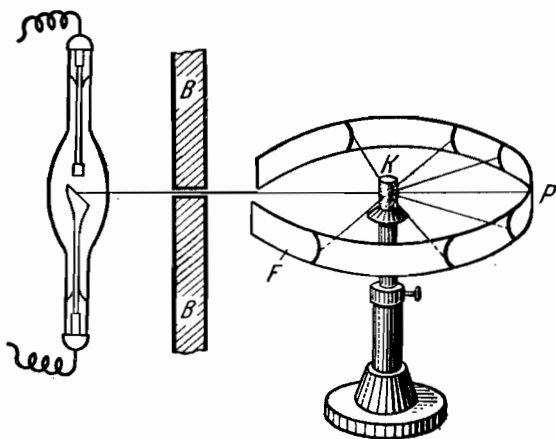


Рис. 80. Схема получения диффракции рентгеновских лучей по методу кристаллических порошков.

твёрдых тел при помощи рентгеновских лучей. В этом методе, предложенном Дебаем и Шеррером, вместо больших кристаллов, необходимых для применения методов Лауэ и Брэгга — Вульфа, используется по возможности мелко растёртый кристаллический порошок, спрессованный в цилиндрический столбик (K на рис. 80). Если пропустить через такой столбик монохроматическое рентгеновское излучение, то вследствие полной хаотичности в ориентировке микрористаллов порошка в столбике всегда найдутся кристаллики, расположенные по отношению к лучу под углом, удовлетворяющим условию Брэгга — Вульфа для данной длины

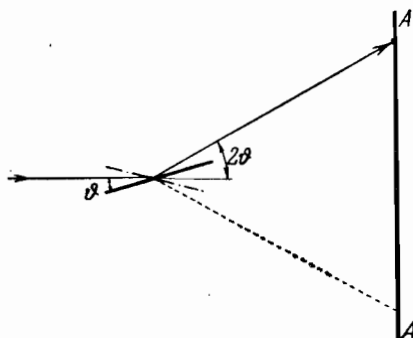


Рис. 81.

волны. При этом отражённые лучи идут по поверхности конуса с углом при вершине, равным  $2\theta$  (рис. 81). Если окружить столбик фотоплёнкой, как показано на рис. 80, то эти конусы оставят на плёнке следы в виде кривых линий, каждая из которых соответствует определённой длине волны и определён-

ному порядку отражения. Пример такой фотографии, полученной по методу кристаллических порошков, приведён на рис. 82.

Огромное преимущество метода кристаллических порошков состоит именно в том, что он не требует больших кристаллов безукоризненного качества. Лишь немногие вещества в природе



Рис. 82. Диффракция рентгеновских лучей в кристаллическом порошке NaCl.

встречаются в виде таких кристаллов, а выращивание кристаллов удаётся далеко не во всех случаях.

**У п р а ж н е н и е.** Отражение первого порядка спектральной линии меди с длиной волны  $1,542 \text{ \AA}$  (линия  $K_\alpha$  меди) от естественной грани кристалла каменной соли происходит при угле скольжения  $15^\circ 59'$ . Определить величину  $d$  для NaCl.

### § 35. Определение длины волны рентгеновских спектральных линий

Уравнение Брэгга—Вульфа (34,1) позволяет определить длину волны рентгеновских лучей по углу отражения  $\vartheta$ , если известна величина  $d$  — расстояние между соседними атомными плоскостями в кристалле. Эта величина может быть вычислена независимым путём следующим образом. Пусть мы имеем кристалл правильной системы, т. е. такой, элементарная ячейка которого имеет форму куба. Примером может служить кристалл каменной соли (NaCl). Одна грамм-молекула NaCl имеет массу  $M = 58,454 \text{ г}$  и в ней заключается число молекул NaCl, равное постоянной Авогадро  $N$ ; поэтому число ионов  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  в ней будет равно  $2N$ .

Рассмотрим элементарную ячейку кристалла NaCl. Изучение структуры этого кристалла\*) показало, что в вершинах элементарного куба располагаются не молекулы NaCl, но ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  (рис. 83). Таким образом, в 8 вершинах кубической ячейки

\*) В этой книге мы не касаемся изучения структуры кристаллов при помощи рентгеновских лучей. Желающих ознакомиться с этим вопросом мы отсылаем к книгам: Г. С. Жданов, Основы рентгеновского структурного анализа, Гостехиздат, 1940 и У. Г. Брэгг и У. Л. Брэгг, Кристаллическое состояние, ОНТИ, 1938.

помещаются 8 ионов, но так как каждая из вершин является общей для 8 соседних ячеек (это хорошо видно на рис. 83 для центрального иона  $O$ ), то на каждую ячейку приходится по одному иону. Если длина ребра ячейки равна  $d$ , то объём её будет  $d^3$ , а весь объём одной грамм-молекулы, заключающей  $2N$  ионов, будет  $2Nd^3$ . С другой стороны, тот же объём равен отношению массы  $M$  к плотности кристалла  $\rho$ , и мы получаем  $2Nd^3 = \frac{M}{\rho}$  или

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{N\rho}}. \quad (35,1)$$

Из этой формулы видно, что правильность определения  $d$ , а следовательно, и  $\lambda$  существенно зависит от достоверности знания постоянной Авогадро. Вопрос этот имеет большое значение для атомной физики, и мы к нему ещё вернёмся в § 39. Пока же заметим, что если принять для  $d_{\text{NaCl}}$  стандартное значение

$$d = 2,81400 \text{ \AA},$$

то для длины волны линии  $K_{\alpha_1}$  меди получается

$$\lambda = (1,537302 \pm 0,000031) \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Как видно, точность настолько высока, что  $1 \text{ \AA} (=10^{-8} \text{ см})$  оказывается здесь неудобной единицей, так как число достоверных десятичных знаков получается слишком большим\*). Поэтому в спектроскопии рентгеновских лучей в большинстве случаев применяется другая единица, называемая X-единицей:

$$1X = 10^{-8} \text{ \AA} = 10^{-11} \text{ см.} \quad (35,2)$$

В этих единицах написанная выше длина волны изобразится числом

$$\lambda = (1537,302 \pm 0,031) X.$$

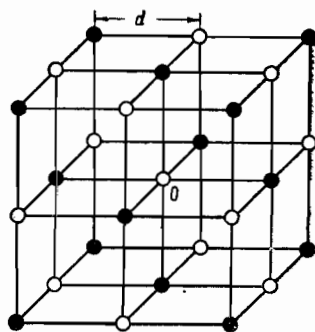


Рис. 83. Кристаллическая решётка хлористого натрия. Светлые кружки—ионы хлора ( $\text{Cl}^-$ ); чёрные кружки—ионы натрия ( $\text{Na}^+$ ).

\*) Следует, однако, заметить, что приведённое число заключает в себе некоторую систематическую погрешность, о которой речь будет в § 38. Здесь длина волны  $K_{\alpha_1}$  линии меди приводится лишь для характеристики числа знаков, с которыми могут быть указаны длины волн в спектроскопии рентгеновских лучей.

### § 36. Спектры рентгеновских лучей

На рис. 84 дана схема рентгеновских спектров элементов от кислорода до урана. Уже беглый взгляд на этот рисунок обнаруживает замечательную особенность рентгеновских спектров — их простоту и единообразие. В то время как оптические спектры нередко очень сложны и иногда состоят из сотен или даже тысяч

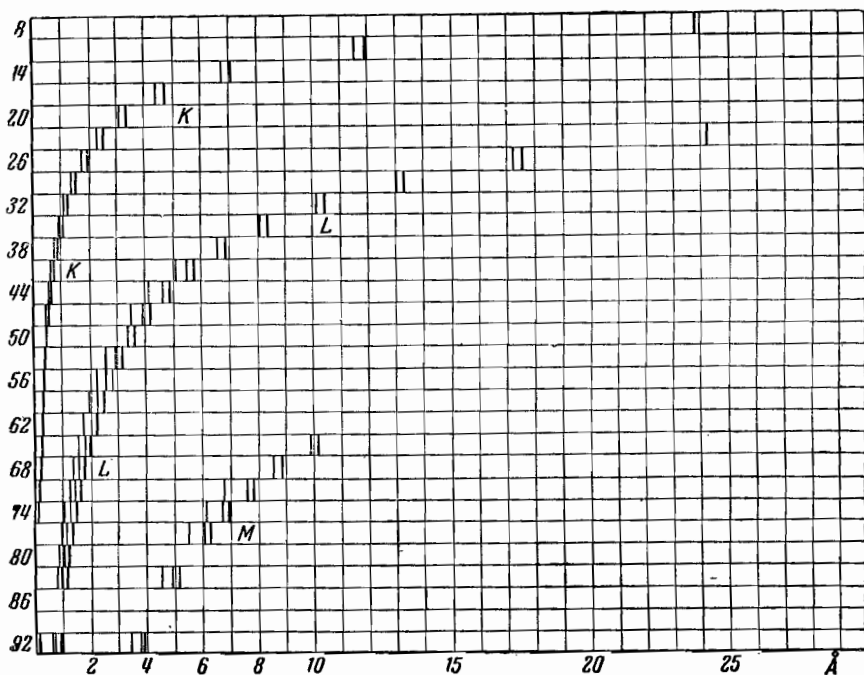


Рис. 84. Схема рентгеновских спектров различных элементов. (По оси ординат отложены атомные номера элементов.)

линий (например, спектр железа), рентгеновские спектры характеризуются малым числом линий. При переходе от элемента к элементу оптические спектры резко изменяются, обнаруживая в своей структуре периодичность, идущую параллельно с периодичностью остальных свойств элементов; напротив, рентгеновские спектры построены совершенно однотипно, никакой периодичности не показывают и единственное изменение, которое наблюдается при переходе от лёгких элементов к тяжёлым, заключается в монотонном смещении линий в сторону коротких волн. Наконец, как уже было указано на стр. 117, рентгеновские спектры

являются чисто атомным свойством и в первом приближении вовсе не меняются, когда атом вступает в какое-либо соединение.

Как мы увидим далее, эта резкая разница в характере оптических и рентгеновских спектров обусловлена тем, что те и другие спектры возникают в разных частях атома: оптические спектры обусловлены движениями периферических электронов, в то время как рентгеновские спектры возникают во внутренних частях атома.

Рис. 84 показывает также, что линии в рентгеновских спектрах собраны в несколько групп или серий. По историческим причинам самая коротковолновая из этих серий называется серией *K*, следующая в сторону длинных волн — серией *L*, далее идут серии *M* и *N*, наблюдаемые, впрочем, только у тяжёлых элементов. В действительности оказывается, что все эти серии имеют естественное продолжение в оптической части спектра, однако соответствующие линии возбуждаются лишь при совершенно особых условиях (спектры высокоионизованных атомов, см. т. II, гл. XVI).

Из всех серий рентгеновских спектров наиболее простой структурой характеризуется серия *K*. Она состоит вообще из трёх линий, которые принято называть  $K_\alpha$ ,  $K_\beta$  и  $K_\gamma$ . Линия  $K_\alpha$  — самая длинноволновая и вместе с тем наиболее яркая. Она является отчётливо разделяющимся дублетом и состоит из двух компонент  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Линия  $K_\beta$  — следующая по длине волны и по интенсивности; она также является дублетом, но очень тесным и не во всех случаях разрешённым. Линия  $K_\gamma$  — самая коротковолновая.

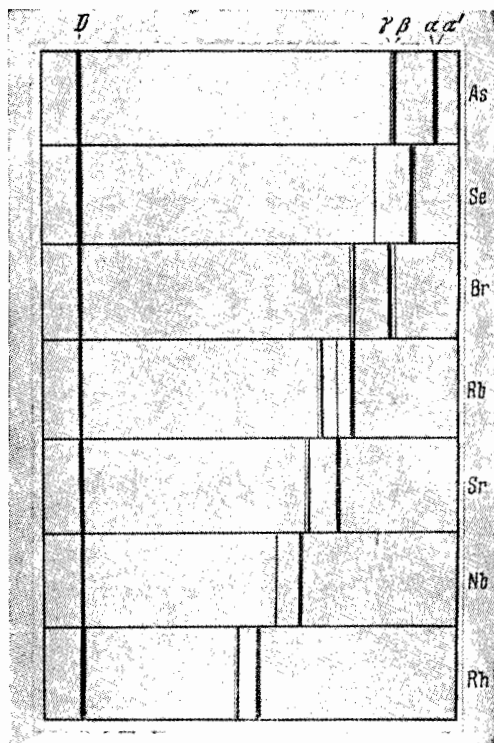


Рис. 85. Фотографии спектров серии *K* некоторых элементов.



Типичным примером серии *K* может служить спектр родия, изображённый на рис. 63. Здесь видно, что эта серия состоит из трёх линий —  $K_\alpha$ ,  $K_\beta$ ,  $K_\gamma$ . Как уже было сказано, линия  $K_\alpha$  является дублетом, т. е. состоит из двух тесно расположенных и закономерно связанных между собой линий. Однако на рис. 63 эта «тонкая структура» линий не видна вследствие малой разре-

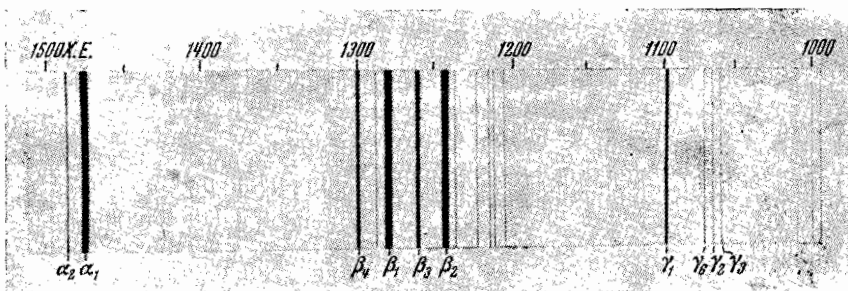


Рис. 86. Фотография спектра серии *L* вольфрама.

шающей способности прибора. На рис. 85 приведено несколько фотографий серии *K* различных элементов. На рис. 86 в качестве примера приведена фотография серии *L* вольфрама. Видно, что эта серия имеет значительно более сложную структуру, нежели серия *K*, хотя всё ещё состоит из небольшого числа линий.

### § 37. Закон Мозели

При исследовании рентгеновских спектров элементов Мозели (1913—1914 гг.) установил простой закон, связывающий частоту спектральных линий с атомным номером испускающего их элемента.

Эта закономерность бросается в глаза при простом рассмотрении рис. 84. Здесь спектры расположены по шкале длин волн, которые нанесены на горизонтальной оси, а по вертикальной оси отмечены атомные номера. Так как все спектры совершенно однотипны, то можно проследить смещение какой-нибудь определённой линии (например, одной из линий серии *K*) при увеличении атомного номера. При этом легко заметить, что кривая, представляющая зависимость длины волны от атомного номера, имеет вид параболы. Более простая закономерность получается, если вместо длин волн рассматривать частоты  $\left(\frac{c}{\lambda}\right)$  или просто обратные длины волн  $\frac{1}{\lambda}$ . Тогда оказывается, что квадратный

корень из обратной длины волны,  $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ , связан с атомным номером *линейной* зависимостью. Особенно интересный и теоретически важный вид приобретает эта закономерность, если ввести в рассмотрение ещё универсальную константу, входящую во все спектральные законы, — так называемую постоянную Ридберга  $R$ , равную  $109\,737,42\text{ см}^{-1}$  (см. гл. VIII). Мозели показал, что, например, для линии  $K_\alpha$  число  $Q_{K_\alpha}$ , построенное следующим образом:

$$Q_{K_\alpha} = \sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{\frac{3}{4}R}}, \quad (37,1)$$

где  $\nu_{K_\alpha} = \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}}$  на единицу меньше атомного номера

$$Q_{K_\alpha} = Z - 1. \quad (37,2)$$

Это видно из таблицы VIII.

Таблица VIII

Элемент	$\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{\frac{3}{4}R}}$	$Z$	Элемент	$\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{\frac{3}{4}R}}$	$Z$
Ca	19,00	20	Fe	24,99	26
Ti	20,99	22	Co	26,00	27
V	21,96	23	Ni	27,04	28
Cr	22,98	24	Cu	28,01	29
Mn	23,99	25	Zn	29,01	30

Из (37,1) и (37,2) получаем

$$\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{\frac{3}{4}R}} = Z - 1,$$

что можно представить в виде

$$\nu_{K_\alpha} = R(Z - 1)^2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right). \quad (37,3)$$

Аналогичные соотношения имеют место и для линий других серий рентгеновского спектра. Например, для серии  $L$  соотношение Мозели имеет вид

$$\nu_L = R(Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right), \quad (37,4)$$

где  $\sigma$  — некоторое постоянное число.

Формулы (37,3) и (37,4) уже своим симметричным видом показывают, что мы имеем дело с какой-то существенной закономерностью принципиального характера. В дальнейшем мы увидим, что эти формулы являются частными случаями общих формул спектральных серий, имеющих ясное теоретическое истолкование. Здесь же важно отметить, что закон Мозели для всех серий рентгеновского спектра устанавливает линейную связь между квадратным корнем из обратной длины волны спектральных линий

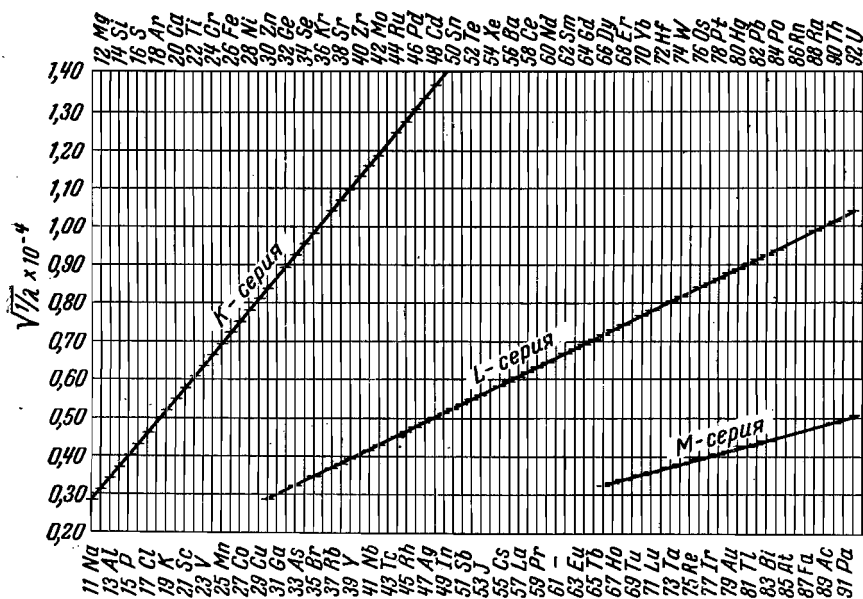


Рис. 87. Диаграмма Мозели.

и атомным номером (рис. 87). Эта связь позволяет по измеренной длине волны точно установить атомный номер данного элемента, а следовательно, — заряд его ядра.

Значение этого закона делается особенно ясным, если принять во внимание, что расположение элементов в периодической системе, основанное на атомных весах и химических свойствах элементов, далеко не во всех случаях было сделано с полной уверенностью. В различных частях периодической таблицы были пустые места, отвечающие неоткрытым элементам; далее, участок от  $Z=58$  до  $Z=71$  (во время Мозели считалось до  $Z=72$ ) занят элементами редких земель, химические свойства которых различаются настолько мало и атомные веса которых нередко были настолько недостоверны, что правильность их расположения по



порядку возбуждала большие сомнения. Закон Мозели устранил все эти затруднения. Он показал с полной определённости, что между водородом и ураном должно существовать ровно 92 типа атомов с различными атомными номерами, и тем самым точно указал число ещё неоткрытых элементов. Кроме этого, он устранил также всякие сомнения в правильности размещения тех атомов, которые были расположены Менделеевым в порядке, противоречившем значениям их атомных весов (Co—Ni, Ar—K, Te—J). Вместе с тем этот закон впервые показал, что не атомный вес, но атомный номер, равный заряду ядра, определяет химическую индивидуальность атома. Этот вывод нашёл замечательное подтверждение в открытии изотопов.

Заметим в заключение, что в этом законе очень отчётливо выражена одна существенная особенность, характерная для рентгеновских лучей: рентгеновские спектры изменяются *монотонно* при изменении атомного номера  $Z$ . С этим следует сопоставить тот факт, что многие свойства атома, как, например, химическая валентность, удельный объём и ряд других свойств, указанных в § 13, изменяются *периодически* с увеличением  $Z$ . Рис. 88, где на одном чертеже представлены прямые, выражающие закон Мозели, и кривая атомных объёмов, имеющая ряд резких максимумов и минимумов, подчёркивает эту особенность рентгеновских лучей особенно ярко.

Объяснение этого различия состоит в том, что рентгеновские спектры, как мы увидим в главе XVI второго тома, возникают во внутренних частях атома и показывают, таким образом, что эти внутренние, ближайшие к ядру области атома обладают у различных атомов *одинаковой структурой*, в то время как внешние, периферические части атома характеризуются периодически повторяющейся структурой.

### § 38. Абсолютное определение длины волны рентгеновских лучей

Показатель преломления рентгеновских лучей очень мало отличается от 1. Долгое время думали даже, что рентгеновские лучи вообще не преломляются. Однако было замечено, что для рентгеновских лучей большой длины волны (2—3 Å) наблюдаются систематические отступления от формулы Брэгга—Вульфа, которые были истолкованы как следствие того, что рентгеновские лучи испытывают преломление в кристалле (при выводе формулы Брэгга—Вульфа показатель преломления принимается равным 1!). Характер этих отступлений указывал на то, что показатель преломления рентгеновских лучей при переходе из воздуха в кристалл *меньше* 1. Из этого следовало, что рентгеновские лучи при переходе из воздуха в твёрдое тело могут испытывать *полное*

отражение совершенно аналогично тому, как свет при переходе из стекла в воздух при углах падения, больших критического, испытывает полное отражение, называемое обычно внутренним. А. Комптон в 1923 г. показал, что полное отражение рентгеновских лучей при переходе из воздуха в твёрдое тело действительно наблюдается, и, определив критический угол, нашёл показатель преломления. Для длины волны  $1,279 \text{ \AA}$  критический угол в случае кронгласа с плотностью  $2,52$  оказался равным  $11'$ , что соответствует показателю преломления, меньшему  $1$  на  $5 \cdot 10^{-6}$  (т. е.  $\mu = 0,999995$ ).

Это открытие показало, что возможно получение спектров рентгеновских лучей от обыкновенной дифракционной решётки, если ею пользоваться как отражательной решёткой при углах падения, больших критического, т. е. при очень малых углах скольжения. Так как максимальный угол полного отражения для различных длин волн и различных веществ меняется в пределах от  $10'$  до  $3^\circ$ , то дифракционные решётки, которыми надлежит пользоваться в случае рентгеновских лучей, должны быть грубее, нежели решётки, обычно применяемые в оптике. Это может показаться на первый взгляд парадоксальным, однако следует иметь в виду, что при малых углах скольжения  $\vartheta$  решётка с периодом  $d$  действует как решётка с периодом  $d \sin \vartheta$  при нормальном падении лучей\*). Так как синус  $10'$  равен  $3 \cdot 10^{-3}$ , то эффективный период даже очень грубой решётки при таких углах скольжения становится настолько малым, что получается возможность наблюдать дифракцию рентгеновских лучей. Так, например, при таком угле решётка всего с  $50$  линиями на  $\text{мм}$  действует, как решётка с  $17\,000$  линиями на  $\text{мм}$ , а лучшие современные решётки имеют  $30\,000$  линий на дюйм, т. е.  $1200$  линий на  $\text{мм}$ !

На рис. 89 изображена схема расположения опыта для получения дифракционных спектров от оптической решётки, а на рис. 90 приведены фотографии спектров серии  $K$  меди (длины волн

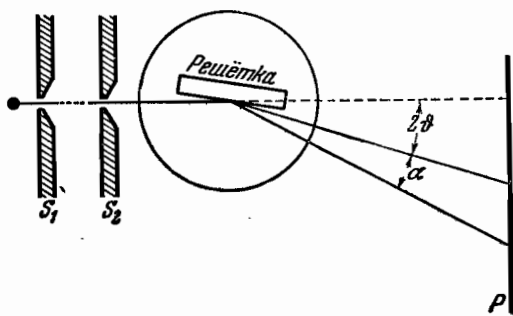


Рис. 89. Схема опыта для получения спектров рентгеновских лучей от дифракционной решётки. (Ширина щелей  $S_1$  и  $S_2$  равна  $0,01 \text{ мм}$ ; расстояние между ними— $42 \text{ см}$ .)

\*) См., например, Г. С. Ландсберг, Оптика, § 42, Гостехиздат. 1947.

1,392 Å и 1,542 Å) и хрома (длины волн 2,084 Å и 2,291 Å), полученные с решётками с числом линий, указанных в подписи (наибольшее число линий — 287 на мм). Цифры 1, 2, 3, ... означают порядок спектра.

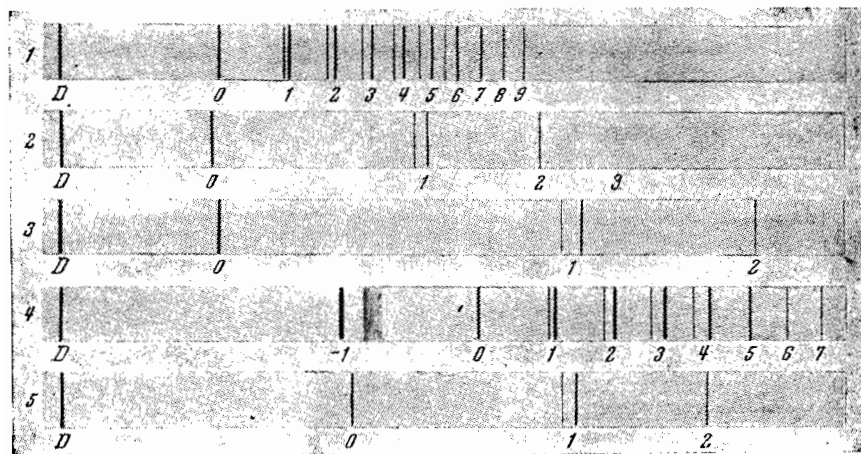


Рис. 90. Типичные рентгеновские спектры от диффракционной решётки (увеличенные примерно в 2 раза). *D* — прямой луч; 0 — нулевого порядка (луч, испытавший полное отражение). Фотографии 1—4 — рентгеновские спектры *K*-серии меди, полученные с помощью решёток, имеющих 51, 287, 60 и 143 линии на мм. Фотография 5 — *K*-серия хрома; решётка — 387 линий на мм.

Для определения длин волн по этим спектрам пользуются уравнением диффракционной решётки при косом падении лучей \*)

$$d (\sin i - \sin r) = n\lambda,$$

где  $i$  — угол падения, а  $r$  — угол диффракции. Заменяя углы  $i$  и  $r$  углами скольжения  $\vartheta$  и  $\alpha$ , показанными на рис. 89, получаем уравнение решётки в том виде, в каком им практически пользуются в спектроскопии рентгеновских лучей,

$$d [\cos \vartheta - \cos (\vartheta + \alpha)] = n\lambda,$$

или

$$2d \sin \frac{2\vartheta + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = n\lambda. \quad (38,1)$$

Это уравнение позволяет производить абсолютное определение длины волны рентгеновских лучей, т. е. определение, не завися-

\*) Г. С. Ландсберг, Оптика, § 42, Гостехиздат, 1947.

щее от знания каких-либо констант, получаемых косвенным образом (ср. § 35). Действительно, постоянная диффракционной решётки  $d$  может быть либо измерена непосредственно компаратором, либо определена обычным в оптике способом, т. е. путём градуировки решётки по одному из спектроскопических стандартов, а углы  $\vartheta$  и  $\alpha$  непосредственно измеряются с высокой степенью точности. Практически для определения  $d$  пользовались зелёной линией спектра паров меди  $\lambda = 5153,25 \text{ \AA}$ . Точность таких абсолютных измерений длин волн рентгеновских лучей была оценена в 0,002—0,004%.

К изумлению исследователей, оказалось, что для одних и тех же спектральных линий длины волн, измеренные с помощью кристаллов, отличаются от длин волн, измеренных абсолютно, в одну и ту же сторону в среднем на 0,15%, т. е. на величину, превосходящую ошибку измерения почти в 100 раз!

После длительных безуспешных попыток отыскать источник ошибки в измерениях длин волн по методу кристаллов, рентгено-спектроскописты пришли к заключению, что источник этот — не в измерениях, а в принятом в то время (1931—1935 гг.) значении постоянной Авогадро, знание которой необходимо для вычисления постоянной кристалла  $d$  по формуле (35,1). Целесообразно поэтому рассмотреть методы определения постоянной Авогадро, что и будет сделано в следующем параграфе.

### § 39. Определение постоянной Авогадро и заряда электрона

Прямой метод определения постоянной Авогадро  $N$  основан на изучении брауновского движения\*). При этом обычно либо находится распределение по высоте микроскопических частиц эмульсии, либо измеряется средний квадрат смещения частицы, совершающей брауновское движение в жидкости или в газе (в частности, такие определения производились с масляными капельками в конденсаторе Милликэна). Однако точность этих определений невелика: значение  $N$ , полученное в классических работах Перрена, отличается от современного стандартного значения на 25%. Гораздо более точные результаты были получены при изучении вращательного брауновского движения. Если подвесить очень лёгкое зеркальце на тонкой кварцевой нити и наблюдать на достаточно удалённой шкале за отражённым от зеркальца лучом света (рис. 91), то зайчик не остаётся на месте, но совершает нерегулярные колебания около положения равновесия. Это

\*) См., например, Ж. Перрен, Атомч, Гостехиздат, 1924, или Гарнвелл и Ливингуд, Экспериментальная атомная физика, гл. III, ОНТИ, 1936, а также М. А. Леонович, Статистическая физика, гл. III, Гостехиздат, 1944.



«непостоянство нуля» подвешенной системы есть результат вращательного брауновского движения под действием ударов со стороны молекул воздуха. Так, например, с зеркальцем размером  $0,8 \times 1,6$  мм, подвешенным на кварцевой нити толщиной в несколько десятых микрона, на шкале, отстоящей от зеркальца всего на 1,5 м, наблюдались смещения зайчика в несколько сантиметров.

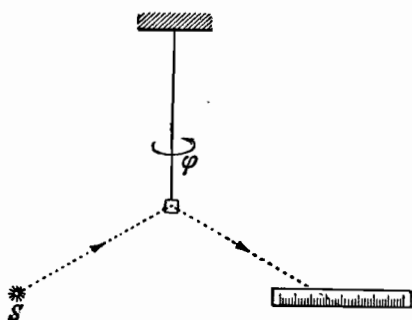
Согласно одной из важнейших теорем классической статистической механики — так называемой теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы (см. § 80) — средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы, равна  $\frac{1}{2} kT$ ,

где  $k$  — постоянная Больцмана, равная универсальной газовой постоянной  $R$ , делённой на постоянную Авогадро  $N$ :

$$k = \frac{R}{N}. \quad (39,1)$$

При этом совершенно безразлично, какова именно эта степень свободы: для одноатомной молекулы газа, совершающей поступательное движение, степени свободы суть декартовы координаты центра тяжести молекулы, а для системы, способной совершать вращательные колебания около неподвижной оси, единственная степень свободы характеризуется углом закручивания  $\varphi$ .

Рис. 91. Наблюдение непостоянства нуля подвешенного зеркальца вследствие брауновского вращательного движения.



При тепловом равновесии при температуре  $T$  средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы воздуха, приходящаяся на одну степень свободы, и средняя энергия брауновских вращательных колебаний зеркальца, подвешенного в воздухе, одна и та же и равна  $\frac{1}{2} kT$ . Кинетическая энергия этих вращательных колебаний равна  $\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$ , где  $J$  — момент инерции. При закручивании нити на угол  $\varphi$  возникает потенциальная энергия, равная  $\frac{1}{2} A \varphi^2$ , где  $A$  — некоторая упругая константа нити. Для малых колебаний средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной (см. § 44), так что

$$\frac{1}{2} J \overline{\dot{\varphi}^2} = \frac{1}{2} A \overline{\varphi^2}. \quad (39,2)$$

По теореме о равномерном распределении энергии

$$\frac{1}{2} A \overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} kT. \quad (39,3)$$

Таким образом, зная упругую константу  $A$  и среднее значение  $\overline{\varphi^2}$ , можно непосредственно найти  $k$ , а отсюда по (39,1) вычислить  $N$ .

Опыты с вращательным брауновским движением для точного определения  $N$  были произведены с большой тщательностью Капплером. Отклонения зеркала регистрировались фотографически на движущейся фотоплёнке. Примеры таких регистрационных кривых, полученных в различных условиях, приведены на рис. 92. Интересно отметить, что при атмосферном давлении (кривая 92, *a*) колебания зеркала совершенно хаотичны, но по мере понижения давления (кривые 92, *b* и 92, *c*) колебания всё более приближаются к синусоидальным с периодом, соответствующим собственным колебаниям крутильного маятника, каковым является зеркальце. Существенно, однако, что во всех случаях средняя величина  $\overline{\varphi^2}$  остаётся одной и той же.

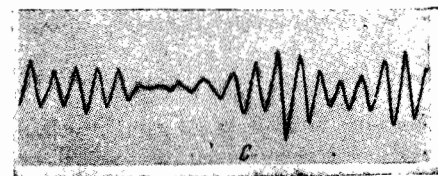
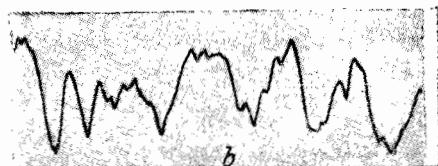
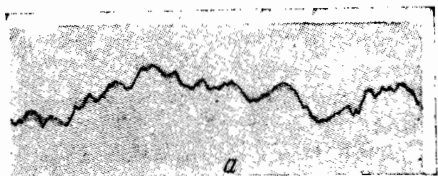


Рис. 92. Брауновские флуктуации подвешенного зеркала: *a*—атмосферное давление; *b*—давление  $4 \cdot 10^{-3}$  мм.; *c*—давление  $10^{-4}$  мм.

Регистрируя подобным образом колебания зеркала в течение 101 часа при температуре  $287^\circ K$ , Капплер нашёл, что  $\overline{\varphi^2}$  при этих условиях равен  $4,178 \cdot 10^{-6}$  радиан. Постоянная кручения нити  $A$  была определена в отдельном опыте с точностью до  $\pm 0,2\%$ . В результате было получено для  $N$  значение  $N = 6,059 \cdot 10^{23}$  с точностью, которая была оценена в  $\pm 1\%$ .

Эта точность, однако, не удовлетворяет тем высоким требованиям, которые предъявляются в настоящее время к значениям основных универсальных констант. Более точное стандартное значение  $N$  находится, однако, косвенным путём. Заряд электрона может быть выражен как частное от деления заряда Фарадея  $F$  на постоянную Авогадро  $N$  (см. § 1):

$$e = \frac{F}{N}.$$

Так как из опытов Милликэна заряд  $e$  считался известным с достаточной точностью, то  $N$  находилось по данным  $e$  и  $F$ :

$$N = \frac{F}{e}.$$

Таким образом, точность определения  $N$  зависела от точности, с какой известен заряд электрона. Систематическое расхождение величин  $\lambda$ , найденных при помощи диффракционной решётки и при помощи кристалла, дало толчок к проверке результатов Милликэна, так как в формулу (35,1), при помощи которой вычисляется постоянная кристалла  $d$ , входит  $N$ . Оказалось, как уже было указано в § 3, что результаты Милликэна испорчены недостаточно точным значением вязкости воздуха  $\eta$ , которое он использовал при своих расчётах.

Единственный выход из затруднения состоял в том, чтобы постоянную кристалла  $d$  определить экспериментально по абсолютному значению длины волны, подобно тому как в оптике градуируются диффракционные решётки.

В самом деле, если известна абсолютная длина волны  $\lambda$ , найденная при помощи отражательной решётки, и если определить при помощи рентгеновского спектрографа с кристаллом угол  $\varphi$ , при котором получается отражение этой длины волны в первом порядке, то по формуле Брэгга — Вульфа

$$\lambda = 2d \sin \varphi$$

можно определить постоянную кристалла  $d$ . Подобное определение постоянной решётки кальцита ( $\text{CaCO}_3$ ), обычно применяемого в рентгеновской спектроскопии, после внесения необходимых поправок (в том числе поправки на показатель преломления рентгеновских лучей) дало величину  $d$  для  $18^\circ \text{C}$ :

$$d = 3,03560 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Зная эту величину, можно найти постоянную Авогадро следующим образом: из формулы (35,1) следует, что для кристалла правильной системы ( $\text{NaCl}$ )

$$N = \frac{M}{2d^3 \rho}. \quad (39,4)$$

В случае кальцита, у которого элементарной ячейкой является не куб, а ромбоэдр, формулу (39,4) следует немного изменить. Если  $\beta$  есть тупой угол между рёбрами ромбоэдра,  $\beta \approx 101^\circ 54'$ , то объём элементарной ячейки будет  $d^3 \Phi(\beta)$ , где

$$\Phi(\beta) = \frac{(1 + \cos \beta)^2}{\sin \beta (1 + 2 \cos \beta)},$$

и формула (39,4) примет вид

$$N = \frac{M}{2d^3\Phi(\beta)\rho} \quad (39,5)$$

Если подставить сюда точные данные для всех величин:  $M = 100,090$  (по химической шкале);  $d_{18^\circ} = 3,0356 \cdot 10^{-8}$  см;  $\rho_{20^\circ} = 2,71025$  и  $\Phi(\beta) = 1,00595$ , то для  $N$  получается

$$N = (6,0228 \pm 0,0011) \cdot 10^{23} \quad (39,6)$$

— величина, существенно отличающаяся от принятого ранее стандартного значения ( $6,06 \cdot 10^{23}$ ).

Зная постоянную Авогадро, можно вычислить и заряд электрона по формуле  $e = \frac{F}{N}$ . Заряд Фарадея, т. е. количество электричества, переносимое при электролизе одним грамм-эквивалентом любых ионов, по наиболее точным определениям равен (по химической шкале)

$$F = (2,89247 \pm 0,00030) \cdot 10^{14} \text{ CGSE} \cdot \text{г. экв.}^{-1}.$$

Комбинируя это число со значением  $N$  (39,6), получаем точное значение заряда электрона

$$e = (4,8025 \pm 0,0010) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}.$$

Заметим, что если в основу расчёта молекулярного веса положить не химическую, но физическую шкалу ( $O^{16} = 16$ ), то обе константы,  $N$  и  $e$ , получатся в 1,000272 раза большими.

## § 40. Удельный заряд электрона

Изучение рентгеновских спектров открывает новую возможность и для точного определения удельного заряда электрона  $e/m$ . Электронная теория дисперсии приводит к следующему выражению для показателя преломления в случае слабо связанных электронов и достаточно жёстких рентгеновских лучей:

$$\mu = 1 - \frac{ne^2}{2\pi m \nu^2}, \quad (40,1)$$

где  $n$  — число электронов в  $1 \text{ см}^3$  и  $\nu$  — частота рентгеновских лучей. Число электронов  $n$  можно выразить следующим образом: число электронов в одном моле вещества с атомным номером  $Z$  равно  $NZ$ , а в  $1 \text{ см}^3$

$$n = \frac{NZ}{M} \rho, \quad (40,2)$$

где  $M$  — атомный вес. Если  $e$  выражено в электростатических, а  $F$  — в электромагнитных единицах, то  $Ne = Fc$ ; заменяя  $\nu$  через  $\frac{c}{\lambda}$ , получаем из (40,1) и (40,2)

$$\mu = 1 - \frac{FZ\rho\lambda^2}{2\pi M} \cdot \frac{e}{mc},$$

откуда, обозначая  $\delta = 1 - \mu$ , находим

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi M}{FZ\rho} \cdot \frac{\delta}{\lambda^2} \text{ CGSM} \cdot e^{-1}. \quad (40,3)$$

Отсюда следует, что для определения  $e/m$  (т. е. удельного заряда в электромагнитных единицах) достаточно определить

точно  $\delta$  и абсолютную длину волны рентгеновских лучей. Бэрден воспользовался для этой цели спектром рентгеновских лучей, полученным с помощью призмы, причём призмой служил большой алмаз (весом 13 карат). На рис. 93 приведён спектр



Рис. 93. Призматический спектр  $K$ -серии меди.

излучения  $K$ -серии меди, полученный с такой призмой. Определение длин волн по этим спектрам дало результаты, хорошо согласующиеся с найденными из измерений с диффракционной решёткой. Определив, кроме того, точнейшим образом плотность алмаза [при этом получилось  $\rho = (3,5154 \pm 0,0001) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ] и воспользовавшись формулой (40,3), Бэрден нашёл для  $e/m$

$$\frac{e}{mc} = (1,7601 \pm 0,0003) \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot e^{-1}$$

— число, близкое к полученному из непосредственных определений (см. §§ 7, 8).

## ГЛАВА V

### СТРОЕНИЕ АТОМА И КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

#### А. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И СТРОЕНИЕ АТОМА

##### § 41. Атомные модели

В предыдущих главах мы привели доказательства того, что атом представляет собою сложную систему, состоящую из положительного электричества и  $Z$  электронов. На первых стадиях развития теории строения атома предполагалось, что вся эта система является статической. Для того чтобы можно было рассматривать электроны как частицы, находящиеся в равновесии, пришлось допустить, что положительное электричество распределено сплошным образом и занимает сферу с радиусом порядка радиуса всего атома, т. е.  $10^{-8}$  см, а электроны как бы плавают в «облаке» положительного электричества. Испускание света атомом рассматривалось как результат малых колебаний электронов около их положений равновесия (модель Дж. Дж. Томсона). Однако опыты с рассеянием  $\alpha$ -частиц, для объяснения которых потребовалось введение гипотезы о существовании очень малого положительного ядра (порядка  $10^{-12}$ — $10^{-13}$  см), где сосредоточена почти вся масса атома, заставили совершенно отказаться от статической модели и перейти к модели планетарной, т. е. рассматривать электроны как частицы, обращающиеся вокруг ядра по определённым орбитам.

В этой главе мы займёмся рассмотрением того формального аппарата, который даёт классическая физика, — а именно, классическая механика и электродинамика, — для теоретического изучения проблемы строения атома, и, кроме того, рассмотрим основные выводы, к которым она приводит. При этом вместо того, чтобы рассматривать атомные системы во всей их сложности, мы будем пользоваться простейшими механическими моделями. Образцом системы, совершающей колебания, будет для нас служить частица, колеблющаяся по прямой — *линейный осциллятор*; образцом системы, в которой происходит обращение около неподвижного центра, будет служить электрон, обращающийся около положительного ядра.

### § 42. Закон сохранения энергии в механике

В основе классической механики лежат ньютоновы «аксиомы или законы движения». Математическая формулировка в виде уравнений движения вытекает, как известно, из второго закона, согласно которому производная по времени от количества движения равна приложенной силе. Для одной частицы этот закон даёт три дифференциальных уравнения

$$\frac{dp_x}{dt} = X, \quad \frac{dp_y}{dt} = Y, \quad \frac{dp_z}{dt} = Z, \quad (42,1)$$

где  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — проекции силы на оси координат. Эти три скалярных уравнения можно заменить одним векторным

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (42,2)$$

(производную по времени мы будем обозначать точкой).

Уравнение движения, написанное в форме (42,2) с производной количества движения в левой части, пригодно как для случая малых скоростей (по сравнению со скоростью света); так и для больших ( $\frac{v}{c} \sim 1$ ). Но только в том случае, когда

$\frac{v}{c} \ll 1$ , массу можно считать не зависящей от скорости, и производная  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$  в этом случае есть просто  $m\dot{\mathbf{v}}$  или  $m\ddot{\mathbf{r}}$ ,

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, определяющий положение частицы. При этом условии для малых скоростей три скалярных уравнения (42,1) можно написать в обычном виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z, \quad (42,1')$$

а векторное уравнение (42,2) — в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (42,2')$$

Умножим теперь уравнение (42,2') скалярно на скорость  $\dot{\mathbf{r}}$ :

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}. \quad (42,3)$$

Левую часть полученного равенства преобразуем так:

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right).$$

Величина

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (42,4)$$

называется *кинетической энергией*. Итак, в левой части (42,3)

мы имеем производную по времени от кинетической энергии

$$m\ddot{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}} = \frac{dT}{dt}. \quad (42,5)$$

Из (42,3) и (42,5) получаем

$$dT = \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} dt = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (42,6)$$

Но  $\mathbf{F} d\mathbf{r}$  есть работа силы на элементарном перемещении  $d\mathbf{r}$ , следовательно, работа силы равна приращению кинетической энергии.

Во многих случаях составляющие силы могут быть выражены как частные производные по координатам некоторой функции  $U$ , взятые со знаком минус\*):

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (42,7)$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U. \quad (42,7')$$

В этом случае

$$\mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right). \quad (42,8)$$

Если  $U$  есть функция одних только координат, то в правой части (42,8) мы имеем полный дифференциал

$$\mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dt}. \quad (42,9)$$

Работа силы на элементарном перемещении  $d\mathbf{r}$  будет тогда

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{r}} dt = -\frac{dU}{dt} dt = -dU,$$

а работа силы на конечном пути от точки  $A$  до точки  $B$

$$\int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\int_A^B dU = U_A - U_B.$$

Если  $U$  есть, кроме того, функция однозначная, то работа силы, как видно, не зависит от пути и равна разности значений  $U$  в начальной и конечной точках пути. Функция  $U$ , обладающая свойством, выраженным равенствами (42,7), вообще называется потенциальной функцией. Если она не зависит

\*) Простейшим примером может служить сила тяжести, равная  $mg$ . В этом случае  $U = -mgz$ , и составляющие будут  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -\frac{\partial U}{\partial z} = mg$ .



явно от времени и является однозначной функцией координат \*), то она называется потенциальной энергией.

Из (42,3), (42,5) и (42,9) следует

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(T + U) = 0, \quad (42,10)$$

откуда

$$T + U = \text{const.} \equiv E. \quad (42,11)$$

Это и есть механический закон сохранения энергии: сумма кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная. Поле сил, имеющих потенциал  $U$ , не зависящий явно от времени, называется консервативным.

Бывают, однако, случаи, когда функция  $U$ , обладающая свойством (42,7), существует, но она зависит от времени. Рассмотрим, например, движение заряженной частицы внутри конденсатора, между пластинами которого имеется разность электрических потенциалов  $V$ , периодически меняющаяся со временем, например по закону косинуса

$$V = V_0 \cos \omega t,$$

Произведение заряда  $e$  на  $V$

$$U = eV = eV_0 \cos \omega t$$

обладает тем свойством, что сила, действующая на частицу со стороны поля, есть градиент  $U$ :

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U,$$

но функция  $U$ , а вместе с ней и сила  $\mathbf{F}$  явно зависят от времени. Сумма  $T + U$  в этом случае не имеет постоянного значения. В самом деле,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right).$$

Следовательно, (42,8) теперь даёт

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t},$$

и вместо (42,10) мы получаем

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Это показывает, что система «незамкнута», т. е. что она представляет только часть большей системы, для которой в целом закон сохранения энергии, конечно, имеет место.

\*) Пример многозначного потенциала рассмотрен в книге Т. Леви-Чивита и У. Амальди, Курс теоретической механики, т. I, ч. I, стр. 326, ОНТИ, 1935.

Встречаются случаи, когда силы зависят от скорости. Примером может служить сопротивление среды движущимся телам: такова стоксова сила сопротивления воздуха  $F = 6\pi\eta av$ , с которой мы встретились в § 2 при рассмотрении падения масляных капелек. Обозначив коэффициент при  $v$  через  $k$  и принимая во внимание, что сила сопротивления  $R$  всегда направлена противоположно скорости, можно написать вообще

$$R = -kv.$$

Уравнение движения частицы под действием силы  $F$  в среде с сопротивлением  $R$  будет

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

Умножая обе части на  $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v}$ , получаем

$$m\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{r}}.$$

На основании формул (42,1) и (42,2) и принимая во внимание, что  $\mathbf{R}\dot{\mathbf{r}} = -kv^2$ , получаем  $\frac{d}{dt}(T + U) = -kv^2$ .

Мы видим, что, как и в предыдущем случае, сумма  $T + U$  не остаётся постоянной; так как, далее,  $v^2$  всегда  $> 0$ , то  $-kv^2 < 0$  и, следовательно,  $T + U$  со временем убывает: силы трения неконсервативны.

Важным случаем сил, зависящих от скорости, является сила, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу. Это сила, выражающаяся векторным произведением

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

*перпендикулярна к скорости и потому не производит никакой работы.*

В заключение напомним, что так как потенциал определяется через свои производные [формулы (42,7)], — только разность потенциалов имеет определённую величину. Абсолютное же значение потенциала включает некоторую произвольную постоянную, вследствие чего нуль потенциала может быть выбран произвольно.

### § 43, Потенциальные кривые

Закон сохранения энергии даёт соотношение между первыми производными координат по времени, которое может быть использовано при решении механических задач. Особенно удобно пользоваться им в случае одномерного движения частицы, когда этого одного соотношения и достаточно,

Положим, что частица движется по прямой. Если мы выберем эту прямую за ось  $x$ , то потенциальная энергия будет функцией только одной координаты  $U = U(x)$ . Закон сохранения энергии даёт тогда

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}, \\ t &= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}} + t_0, \end{aligned} \quad (43,1)$$

где  $t_0$  — произвольная постоянная.

Зная явное выражение потенциальной энергии, мы можем при помощи формулы (43,1) найти закон движения. Положим, например, что  $U = \frac{1}{2} f x^2$ , где  $f$  — некоторая положительная постоянная. Тогда формула (43,1) даёт

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2} f x^2)}} = \sqrt{\frac{m}{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{f} - x^2}}. \quad (43,1')$$

Положительное число  $\frac{2E}{f}$  мы можем обозначить через  $a^2$  (легко видеть, что  $a$  имеет размерность длины), и тогда

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{f}} \arcsin \frac{x}{a},$$

откуда

$$x = a \sin \left( \sqrt{\frac{f}{m}} t - \sqrt{\frac{f}{m}} t_0 \right)$$

или, обозначая постоянную  $\sqrt{\frac{f}{m}} t_0$  через  $\delta$ ,

$$x = a \sin \left( \sqrt{\frac{f}{m}} t - \delta \right).$$

Итак, при  $U = \frac{f x^2}{2}$  движение представляет собой гармоническое колебание.

Знание потенциальной энергии в случае одномерного движения позволяет установить качественный характер движения, совсем не пользуясь аналитическими средствами. Для этого достаточно построить кривую, изображающую потенциаль-

ную энергию в зависимости от координаты. Такие кривые коротко называются потенциальными кривыми.

Пусть, например, потенциальная кривая имеет вид, изображённый на рис. 94. Тогда мы можем, не вычисляя интеграла, стоящего в правой части (43,1) (и даже не зная точного аналитического выражения потенциальной энергии), установить некоторые важные особенности движения. Возьмём какое-нибудь значение полной энергии, например  $E_1$ , и проведём на чертеже прямую, параллельную оси абсцисс, на расстоянии  $E_1$  от неё. Эта прямая пересекает нашу потенциальную кривую в точках  $B, C, D$  с абсциссами  $x_1, x_2, x_3$ . Очевидно, что формула (43,1) имеет физический смысл (с точки зрения классической механики) только в том случае, когда

радикал  $\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}$  действителен, т. е. когда  $E \geq U$ . Из рисунка мы видим, что это осуществляется при условии, если

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad (I)$$

или при условии

$$x \geq x_3. \quad (II)$$

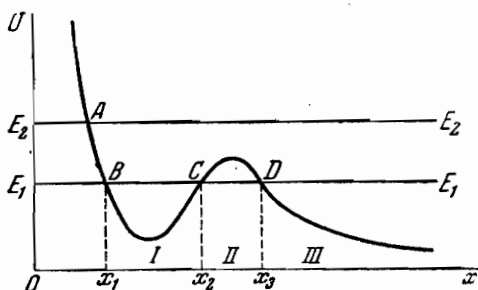


Рис. 94. Пример потенциальной кривой.

Таким образом, когда частица находится в области I, — её движение таково, что она не может выйти за пределы этой области. В самом деле, её абсцисса не может стать меньше  $x_1$  и больше  $x_2$ , так как в этом случае её потенциальная энергия стала бы больше полной, а скорость  $\dot{x}$  сделалась бы мнимой. Из этого следует, что движение частицы в области I есть колебание. Крайние положения достигаются при  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , когда  $U$  становится равным  $E$ . Период колебания, очевидно, равен

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}.$$

В область II частица проникнуть не может. Но если, обладая полной энергией  $E_1$ , она находится в точке  $x = x_3$ , то её абсцисса может возрастать до бесконечности, так как при всех значениях  $x \geq x_3$  потенциальная энергия меньше полной.

Пусть теперь частица обладает запасом энергии  $E_2 > E_1$ . Проводя, как раньше, на чертеже прямую на высоте  $E_2$ , мы видим, что вправо от  $A$  частица может перемещаться до бесконечности,

так как там её полная энергия всюду больше потенциальной. Влево же от  $A$  движению частицы препятствует непреодолимый барьер (область  $E < U$ ).

Качественный характер движения можно установить при помощи потенциальной кривой, пользуясь следующей наглядной иллюстрацией. Представим себе идеально гладкую дорожку, сделанную так, что её профиль как раз совпадает с потенциальной кривой. В случае кривой рис. 94 это будет спуск, сменяющийся небольшим подъёмом и затем снова продолжающийся. Положим на эту дорожку тяжёлый шарик на высоте  $E$  и предоставим его самому себе. Шарик покатится вниз, и его движение будет почти точно представлять движение интересующей нас частицы. Если поднять его на высоту  $E_1$ , то он будет кататься взад и вперёд в углублении I и не сможет «перескочить» через бугор II; если поднять его выше до уровня  $E_2$ , то он свободно перекатится через бугор II и уйдёт в бесконечность.

Причина, позволяющая нам пользоваться этой иллюстрацией, состоит в том, что потенциальная энергия тяжёлого шарика пропорциональна его высоте. Небольшая неточность иллюстрации обусловлена тем, что часть энергии шарика расходуется на создание его вращения.

#### § 44. Линейный гармонический осциллятор

Пусть частица с массой  $m$  движется по прямой под действием силы, пропорциональной отклонению частицы от положения равновесия и направленной всегда к положению равновесия. Такая колебательная система называется линейным гармоническим осциллятором. Образцом её может служить тяжёлый шарик, подвешенный на упругой пружине (рис. 95). Электрон, совершающий колебания под действием электрического поля, также является линейным гармоническим осциллятором при условии, что сила, действующая на электрон со стороны поля, пропорциональна первой степени его удаления от положения равновесия и направлена к этому положению. По аналогии с упругой силой все силы, удовлетворяющие указанному выше требованию, называются *квазиупругими*.

Рис. 95.  
Модель линейного гармонического осциллятора.

Так как движение частицы в линейном осцилляторе происходит по прямой, то мы всегда можем взять эту прямую за ось координат. Пусть это будет ось  $x$  и пусть начало координат совпадает с положением равновесия частицы (рис. 96). Уравнение движения в этом случае таково:

$$m\ddot{x} = -fx, \quad (44,1)$$

где  $f$  — постоянный коэффициент пропорциональности, равный силе, возникающей при отклонении  $x=1$ ; он называется «постоянной квазиупругой силы». Перепишем уравнение (44,1) следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{f}{m} x = 0, \quad (44,2)$$

или, вводя обозначение

$$\frac{f}{m} = \omega^2, \quad (44,3)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (44,4)$$

Частными решениями уравнения (44,4) будут

$$x_1 = \cos \omega t, \quad x_2 = \sin \omega t, \quad (44,5)$$

в чём можно убедиться непосредственной подстановкой их в (44,4).

По известному свойству линейных дифференциальных уравнений общее решение будет линейной комбинацией частных решений (44,5):

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad (44,6)$$

с двумя произвольными постоянными  $c_1$  и  $c_2$ . Эти постоянные можно найти из начальных условий: если, например, при  $t=0$   $x=x_0$ ,  $\dot{x}=v_0$ , то, как легко убедиться,  $c_1 = x_0$ ,  $c_2 = v_0/\omega$ , и поэтому (44,6) принимает вид

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (44,7)$$

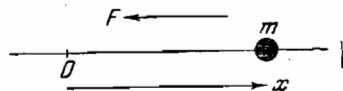


Рис. 96.

Для наших целей общее решение (44,6) удобнее представить в несколько ином виде. Перепишем (44,6), вынеся за скобки  $c_1$ :

$$x = c_1 \left( \cos \omega t + \frac{c_2}{c_1} \sin \omega t \right).$$

Полагая  $\frac{c_2}{c_1} = \operatorname{tg} \delta$ , получим

$$\begin{aligned} x &= c_1 (\cos \omega t + \operatorname{tg} \delta \cdot \sin \omega t) = \frac{c_1}{\cos \delta} \cos (\omega t - \delta) = \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \cos (\omega t - \delta), \end{aligned}$$

или, пользуясь обозначением  $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = a$ , получим окончательно

$$x = a \cos (\omega t - \delta), \quad (44,8)$$

где  $a$  и  $\delta$  — новые произвольные постоянные.

Движение, описываемое формулой (44,8), будет, очевидно, периодическим, так как время входит в (44,8) через периодическую функцию. Это значит, что существует такой промежуток времени  $T$ , что

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos[\omega(t + T) - \delta].$$

Из этого следует, что

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{T};$$

$\omega$  называется угловой частотой, а обратная величина периода  $T$  — линейной частотой  $\nu$ :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Согласно (44,3)

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}, \quad (44,9)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}}. \quad (44,10)$$

Вычислим теперь энергию осциллятора. Кинетическая энергия равна  $E_k = \frac{m}{2} \dot{x}^2$ , или, так как  $\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t - \delta)$ , то

$$E_k = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \delta). \quad (44,11)$$

Если за нулевое значение потенциальной энергии принять её величину в тот момент, когда частица находится в положении равновесия, то потенциальная энергия в некотором положении с координатой  $x$  будет

$$E_p = - \int_0^x F dx = f \int_0^x x dx = \frac{fx^2}{2}. \quad (44,12)$$

Подставив сюда  $x$  из (44,8) и приняв во внимание, что по (44,9)  $f = m\omega^2$ , найдём

$$E_p = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \delta). \quad (44,13)$$

При помощи (44,11) и (44,13) находим полную энергию:

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p = \\ &= \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t - \delta) + \cos^2(\omega t - \delta)] = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (44,14)$$

Формулы (44,11) и (44,13) показывают, что кинетическая и потенциальная энергии меняются во времени как квадраты

синуса и косинуса. Поэтому для отыскания средних значений энергии за полный период достаточно вычислить средние квадратов косинуса и синуса. При этом наличие фазовой постоянной  $\delta$ , не зависящей от времени, очевидно, не играет никакой роли. По определению среднего значения за период  $T$  мы имеем

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2}, \quad (44,15)$$

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2}. \quad (44,16)$$

Заметим ещё, что средние значения  $\cos^2 \omega t$  и  $\sin^2 \omega t$  за промежуток времени, очень большой по сравнению с периодом, также равны половине. Пусть  $t_1$  будет таким промежутком времени:  $t_1 \gg T$ . Мы имеем

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega t_1} \sin 2\omega t.$$

Но  $\omega t_1 = 2\pi \frac{t_1}{T}$ , и если  $t_1 \gg T$ , то  $\omega t_1$  есть очень большое число, а потому второй член очень мал и им можно пренебречь. Итак, для достаточно большого промежутка времени

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}.$$

Точно так же

$$\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для средней кинетической энергии за период или за промежуток времени, достаточно большой по сравнению с периодом, из (44,11) и (44,15) получаем

$$\overline{E}_k = \frac{1}{4} a^2 m \omega^2 \quad (44,17)$$

и для средней потенциальной энергии

$$\overline{E}_p = \frac{1}{4} a^2 m \omega^2. \quad (44,18)$$

Сравнение (44,17), (44,18) и (44,14) даёт

$$\overline{E}_k = \overline{E}_p = \frac{1}{2} E, \quad (44,19)$$



т. е. для линейного гармонического осциллятора средняя за большой промежуток времени кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии, и обе равны половине полной энергии.

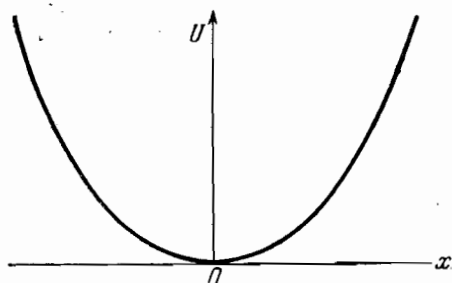


Рис. 97. Потенциальная кривая гармонического осциллятора.

Так как потенциальная энергия  $U$  пропорциональна квадрату смещения  $U = fx^2/2$ , то потенциальная кривая гармонического осциллятора есть парабола (рис. 97).

#### § 45. Комплексное представление колебаний

Общее решение уравнения колебаний гармонического осциллятора

$$x = a \cos(\omega t - \delta) \quad (44,8)$$

мы можем написать в несколько ином виде, представляющем большие преимущества с формальной точки зрения. Для этого мы прежде всего вспомним, что по известной теореме анализа всякое комплексное число

$$u = a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (45,1)$$

можно представить в виде экспоненциальной функции с мнимым показателем

$$u = re^{i\varphi}, \quad (45,2)$$

где  $r$  называется модулем комплексного числа и обозначается также через  $|u|$ ,  $\varphi$  — аргумент или фаза. Если мы заменим в (45,1) и (45,2)  $i$  на  $-i$ , то получим комплексное число

$$u^* = r (\cos \varphi - i \sin \varphi) = re^{-i\varphi}, \quad (45,3)$$

которое называется комплексно сопряженным с  $u$ . Произведение двух комплексно сопряженных чисел равно квадрату их общего модуля, так как

$$uu^* = re^{i\varphi} \cdot re^{-i\varphi} = r^2 = |u|^2.$$

Легко видеть, что комплексное выражение

$$x = a (\cos \omega t + i \sin \omega t) = ae^{i\omega t} \quad (45,4)$$

и с ним комплексно сопряженное

$$x^* = a (\cos \omega t - i \sin \omega t) = ae^{-i\omega t} \quad (45,5)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению гармонического осциллятора (45,4), так как они содержат линейные комби-

нации его частных решений. Поэтому *формально* мы имеем право писать формулу колебаний не только в тригонометрическом, но и в экспоненциальном виде (45,4) или (45,5). Такая замена целесообразна потому, что во многих случаях математические операции с экспоненциальными функциями выполняются значительно проще, чем с тригонометрическими. Однако с физической точки зрения формула  $x = ae^{i\omega t}$  содержит противоречие, потому что в левой части её стоит действительная величина (координата), а в правой — комплексная. Для того чтобы, несмотря на это, сохранить возможность оперирования с экспоненциальными функциями, ставится условие — пользоваться этими функциями, но в окончательном результате брать только действительную часть полученного комплексного числа. Эта действительная часть в тех случаях, когда может возникнуть сомнение, обозначается символом  $\text{Re}$ , поставленным перед комплексным числом:

$$\text{Re } e^{i\varphi} = \cos \varphi.$$

Очевидно,

$$\text{Re } e^{i\omega t} = \text{Re } e^{-i\omega t} = \cos \omega t,$$

вследствие чего с одинаковым правом можно пользоваться любым из двух комплексно сопряжённых чисел.

Общий интеграл уравнения линейного осциллятора

$$x = a \cos(\omega t - \delta)$$

напишется при этом условии в виде

$$x = \text{Re } ae^{i(\omega t - \delta)}.$$

Ещё большее упрощение достигается введением *комплексной амплитуды*. Заметив, что  $ae^{i(\omega t - \delta)} = ae^{-i\delta} \cdot e^{i\omega t}$ , введём комплексную амплитуду  $A = ae^{-i\delta}$ . Комплексно сопряжённая амплитуда будет  $A^* = ae^{i\delta}$ , а квадрат действительной амплитуды  $a$  найдётся как произведение

$$AA^* = ae^{-i\delta} \cdot ae^{i\delta} = a^2 = |A|^2.$$

Пользуясь комплексными амплитудами, формулу гармонических колебаний можно всегда писать в виде

$$x = \text{Re } Ae^{i\omega t}$$

или просто

$$x = Ae^{i\omega t},$$

помня, что начальная фаза  $\delta$  включается в комплексную амплитуду.

Указанный в этом параграфе способ комплексного представления колебаний даёт правильные результаты лишь до тех

пор, пока мы имеем дело с линейными выражениями. Если же периодически меняющаяся величина входит в квадрате или в более высокой степени, или, наконец, если мы имеем дело с произведениями таких величин, то необходимо вновь переходить к тригонометрическим функциям. Это следует из того, что действительная часть квадрата комплексного числа не равна квадрату его действительной части:

$$(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + i2ab,$$

так что

$$\operatorname{Re}(a + bi)^2 \neq a^2.$$

Точно так же действительная часть произведения комплексных чисел не равна произведению их действительных частей. Если, однако, желательно и в этом случае пользоваться экспоненциальными функциями, то необходимо заменять косинусы полусуммой комплексно сопряжённых функций по известной формуле Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}).$$

## § 46. Разложение в спектр

Колебания линейного гармонического осциллятора представляют собою простейший случай периодического процесса. Очень часто встречаются процессы, которые являются периодическими, но не гармоническими. Так, например, процесс, изображаемый неограниченным повторением влево и вправо сплошной кривой рис. 98, есть, несомненно, процесс периодический, но он не является гармоническим. На рис. 98, однако, показано, что сплошная кривая может быть получена путём суммирования двух синусоид с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ , а именно,

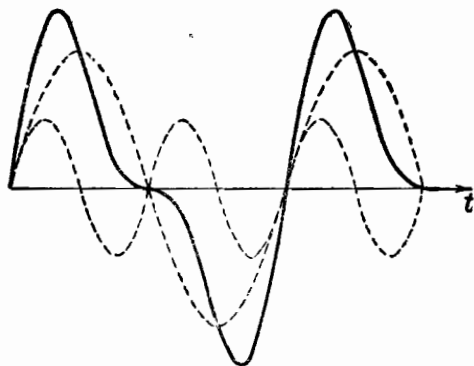


Рис. 98. Пример негармонического периодического процесса.

$$x = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2\omega t.$$

Можно также сказать, что колебание, изображённое на рис. 98, разлагается в *спектр*, в котором имеется две спектраль-

ные линии с частотами  $\omega$  и  $2\omega$  (или  $\nu$  и  $2\nu$ , если предпочтительно пользоваться линейными, а не угловыми частотами).

В математическом анализе доказывается, что *любая* кривая\*), изображающая периодический процесс частоты  $\omega$ , может быть представлена как результат наложения бесконечного числа синусоид и косинусоид с частотами  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ... Подобное разложение периодических, но не гармонических процессов на чисто гармонические есть известное разложение в ряд Фурье. Условия сходимости этих рядов исследуются в математических руководствах\*\*). Мы здесь заметим только, что для функций, интересующих нас в этой книге, ряды Фурье сходятся повсюду равномерно, так что их можно почленно перемножать, дифференцировать и интегрировать. Для определённости будем предполагать, что нашей функцией является смещение  $x(t)$ . Тогда

$$x(t) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \quad (46,1)$$

Коэффициент  $1/2$  в первом члене введён из соображений удобства и симметрии формул, как это будет видно из дальнейшего.

Напомним простой способ вычисления коэффициентов ряда Фурье. Он основан на следующих формулах, легко оправдываемых непосредственным вычислением:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{2} T & \text{при } m = n; \end{cases} \quad (46,2)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{2} T & \text{при } m = n; \end{cases} \quad (46,3)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t dt = 0. \quad (46,4)$$

Для отыскания коэффициента  $b_m$  умножим обе части (46,1) на  $\cos m\omega_0 t$  и проинтегрируем от  $-T/2$  до  $+T/2$ . Тогда все интегралы правой части на основании формул (46,2) и (46,4)

\*) Условия, которым должна удовлетворять функция, изображающая периодический процесс, для того чтобы её можно было подвергнуть разложению в ряд Фурье, настолько широки, что им практически удовлетворяет любая функция, изображающая реальный физический процесс.

\*\*) См. И. И. Привалов, Ряды Фурье, Госиздат, 1937, или любой учебник математического анализа, например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, гл. VI, Гостехиздат, 1948.

будут равны нулю, за исключением интеграла, умножающегося на коэффициент  $b_m$ , который равен  $T/2$ . Таким образом, получаем

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos m\omega_0 t dt. \quad (46,5)$$

Точно так же для отыскания коэффициента  $c_m$  умножаем обе части (46,1) на  $\sin m\omega_0 t$  и интегрируем от  $-T/2$  до  $+T/2$ . В результате получаем

$$c_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin m\omega_0 t dt. \quad (46,6)$$

Наконец, для отыскания  $b_0$  интегрируем (46,1) от  $-T/2$  до  $+T/2$  и получаем

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt.$$

Очевидно, что постоянный член разложения

$$\frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt$$

есть среднее значение функции  $x(t)$  за период, и если кривая  $x(t)$  симметрична относительно оси  $t$  (как, например, кривая рис. 98), то  $\frac{1}{2} b_0 = 0$ .

Отметим здесь ещё две другие формы ряда Фурье. Объединяя попарно члены с синусами и косинусами  $b_k \cos k\omega_0 t + c_k \sin k\omega_0 t$  в члены вида  $a_k \cos(k\omega_0 t + \delta_k)$  (см. § 44) и обозначая свободный член через  $\frac{1}{2} a_0$ , получим

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t + \delta_1) + a_2 \cos(2\omega_0 t + \delta_2) + \\ + a_3 \cos(3\omega_0 t + \delta_3) + \dots \quad (46,7)$$

Особенно удобна для наших целей комплексная форма ряда Фурье. Заменяем в (46,7) косинусы полусуммами комплексно сопряжённых экспоненциальных функций

$$\cos(s\omega_0 t + \delta_s) = \frac{1}{2} [e^{i(s\omega_0 t + \delta_s)} + e^{-i(s\omega_0 t + \delta_s)}] = \\ = \frac{1}{2} (e^{is\omega_0 t} \cdot e^{i\delta_s} + e^{-is\omega_0 t} \cdot e^{-i\delta_s})$$

и введём комплексные амплитуды, обозначая их, соответственно, через  $A_1$  и  $A_{-1}$ ,  $A_2$  и  $A_{-2}$  и т. д.:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} a_1 e^{i\delta_1}, & A_{-1} &= \frac{1}{2} a_1 e^{-i\delta_1}, \\ A_2 &= \frac{1}{2} a_2 e^{i\delta_2}, & A_{-2} &= \frac{1}{2} a_2 e^{-i\delta_2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_s &= \frac{1}{2} a_s e^{i\delta_s}, & A_{-s} &= \frac{1}{2} a_s e^{-i\delta_s}, \end{aligned} \right\} \quad (46,8)$$

$$A_0 = \frac{1}{2} a_0.$$

Тогда ряд (46,7) примет вид

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{i2\omega_0 t} + \dots + A_{-1} e^{-i\omega_0 t} + \\ + A_{-2} e^{-i2\omega_0 t} + \dots = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{is\omega_0 t} \quad (46,9)$$

или, если с помощью соотношения  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  заменить угловые частоты линейными:

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i2\pi\nu_0 t} + A_2 e^{i4\pi\nu_0 t} + \dots + A_{-1} e^{-i2\pi\nu_0 t} + \\ + A_{-2} e^{-i4\pi\nu_0 t} + \dots = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi s\nu_0 t}. \quad (46,10)$$

Для отыскания коэффициентов поступаем следующим образом: умножим обе части (46,10) на  $e^{-i2\pi r\nu_0 t}$  и проинтегрируем от  $-T/2$  до  $+T/2$ :

$$\int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-i2\pi r\nu_0 t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t} dt.$$

Легко убедиться в том, что в правой части все члены обращаются в нуль, за исключением члена номер  $r$ . Действительно,

а) при  $s \neq r$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} A_s e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t} dt = \frac{A_s}{i2\pi(s-r)\nu_0} (e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t}) \Big|_{-T/2}^{+T/2} = \\ = \frac{A_s}{i2\pi(s-r)\nu_0} [e^{i\pi(s-r)} - e^{-i\pi(s-r)}] = 0,$$

б) при  $s = r$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} A_r dt = A_r T.$$

Из этого следует, что

$$A_r = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i2\pi r\nu_0 t} dt. \quad (46,11)$$

Аналогично этому для отыскания коэффициента  $A_{-r}$  умножаем обе части (46,10) на  $e^{i2\pi r\nu_0 t}$  и интегрируем от  $-T/2$  до  $+T/2$ . В результате получаем

$$A_{-r} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{i2\pi r\nu_0 t} dt. \quad (46,12)$$

При  $r=0$  получаем

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) dt. \quad (46,13)$$

Заметим ещё, что если  $x(t)$  — функция действительная, то коэффициенты Фурье  $A_m$  и  $A_{-m}$  обязательно комплексно сопряжены:

$$A_m^* = A_{-m}$$

[см. формулы (46,10)], так как только в этом случае и правая часть (46,10) будет действительна.

Мы видим, таким образом, что если функция  $x(t)$  представляет периодический процесс, то её всегда можно разложить на гармонические составляющие. На языке физики это означает, что периодический процесс можно *разложить в спектр*. Этот спектр будет дискретным, т. е. он будет состоять из отдельных идеально тонких линий, частоты которых образуют арифметический ряд  $\nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots$ . Очень часто пользуются терминологией акустики и называют  $\nu_0$  *основной частотой*, а  $2\nu_0, 3\nu_0, \dots$  — её *обертонами*.

Очевидно, что коэффициенты Фурье представляют амплитуды соответствующих обертонов. В то время как амплитуда может быть положительной или отрицательной, *интенсивность* есть величина существенно положительная; она измеряется квадратом амплитуды. Таким образом, квадраты коэффициентов Фурье представляют интенсивности гармонических составляющих периодического процесса или, что то же самое, интенсивности спектральных линий.

В заключение заметим, что разложение Фурье может быть применено также и к непериодическому процессу, заданному, однако, в *ограниченном интервале* (например, в ограниченном интервале времени от  $t_0$  до  $t_1$ ). В этом случае мы можем кривую, изображающую процесс, рассматривать как один период

периодической функции. Так как, однако, разложение Фурье будет представлять функцию периодическую, то оно будет правильно изображать ход процесса только в пределах заданного интервала\*).

### § 47. Центральные силы.

#### Кинетическая энергия в полярных координатах

Изучив свойства линейного осциллятора, мы переходим к рассмотрению модели, состоящей из электрона, обращающегося около неподвижного центра. Такое движение является частным случаем движения в поле центральных сил, т. е. сил, направление которых всё время проходит через одну точку, а величина является функцией только расстояния от этой точки.

При решении всякой механической задачи очень большое значение имеет рациональный выбор системы координат. Обычно задача легче всего решается в такой системе координат, которая отвечает симметрии самой задачи. Поэтому следует ожидать, что для движения в центральном поле наиболее подходящей будет полярная система координат.

При рассмотрении планетарной модели атома (§ 49) мы воспользуемся законами сохранения энергии и момента количества движения. В качестве подготовки к этому рассмотрению мы выведем выражение для энергии в полярных координатах.

Положение точки на плоскости определяется двумя полярными координатами  $r$  и  $\varphi$ , связанными с декартовыми соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (47,1)$$

Кинетическая энергия в декартовых координатах выражается в виде

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (47,2)$$

Но из (47,1) следует, что

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}. \quad (47,3)$$

Подставляя это в (47,2), найдём после простых вычислений

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (47,4)$$

Это и есть выражение кинетической энергии в полярных координатах на плоскости.

Комбинируя формулы (47,1) и (47,3), легко получим

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2 \dot{\varphi}. \quad (47,5)$$

Это соотношение нам понадобится впоследствии.

\*) См., однако, § 68.



Сферическими полярными координатами точки  $P$  в пространстве служат (рис. 99): радиус-вектор  $r$ , полюсное расстояние  $\vartheta$  (дополнение к широте до  $90^\circ$ ) и долгота  $\varphi$ , отсчитываемая от какого-нибудь первого меридиана. Соотношение между декартовыми и полярными координатами видно непосредственно из чертежа:

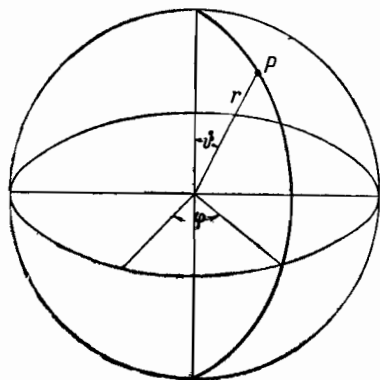


Рис. 99.

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = r \cos \vartheta.$$

Отсюда получаем

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - \\ - r \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \varphi + \\ + r \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \dot{z} = \dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta.$$

Подставляя это в выражение кинетической энергии через декартовы координаты в пространстве

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (47,6)$$

найдем после упрощений

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) \quad (47,7)$$

— выражение для кинетической энергии в сферической полярной системе координат.

#### § 48. Движение в центральном поле

Для описания центрального движения большое значение имеет динамическая величина, называемая моментом количества движения. Возьмём ньютоново уравнение движения в векторной форме

$$\dot{\mathbf{p}} \equiv m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$$

и умножим его векторно слева на радиус-вектор  $\mathbf{r}$ :

$$[\mathbf{r} m \dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{r} \mathbf{F}]. \quad (48,1)$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \mathbf{p}] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r} m \mathbf{v}] = m [\dot{\mathbf{r}} \mathbf{v}] + m [\mathbf{r} \dot{\mathbf{v}}] = m [\mathbf{v} \mathbf{v}] + [\mathbf{r} m \dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{r} m \dot{\mathbf{v}}]$$

( $[\mathbf{v}\mathbf{v}] = 0$  как произведение коллинеарных векторов!), можем переписать (48,1) в виде

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}\mathbf{F}]. \quad (48,2)$$

Вектор

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] \quad (48,3)$$

называется моментом количества движения относительно точки  $O$  (рис. 100). Его составляющие по декартовым осям координат таковы:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= (yp_z - zp_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \\ L_y &= (zp_x - xp_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \\ L_z &= (xp_y - yp_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \right\} (48,4)$$

Уравнение (48,2) теперь принимает вид

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]. \quad (48,5)$$

Если, однако, движение — *центрально*, то  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{F}$  направлены одинаково или прямо противоположно, так что в этом случае  $[\mathbf{r}\mathbf{F}] = 0$ , и уравнение (48,5) даёт

$$\mathbf{L} = \text{const.}, \quad (48,6)$$

т. е. при центральном движении момент количества движения как *вектор* сохраняется. Из этого следует, в частности, что траектория частицы при центральном движении лежит в одной плоскости, так как только в этом случае вектор  $\mathbf{L}$  будет сохранять одно и то же направление во всё время движения.

Если плоскость орбиты выбрать за плоскость  $xy$ , то очевидно, что вектор  $\mathbf{L}$  будет направлен по оси  $z$ , и тогда

$$L_x = L_y = 0, \quad L_z = L,$$

так что

$$L = L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (48,7)$$

Во многих случаях при рассмотрении центральных движений удобнее пользоваться полярными координатами. Принимая во внимание, что [см. (47,5)]

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi}, \quad (47,5)$$

можем представить выражение момента количества движения (48,7) в виде

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (48,8)$$

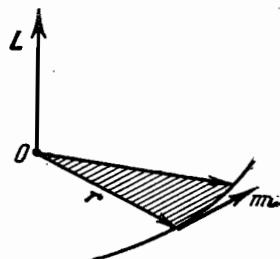


Рис. 100.

Момент количества движения может быть выражен через кинематическую величину  $c$ , называемую секториальной скоростью. По определению

$$c = \frac{1}{2} [rv]$$

и, следовательно,

$$L = 2mc.$$

Из закона сохранения момента количества движения непосредственно следует второй закон Кеплера. В самом деле, если  $L = \text{const.}$ , то очевидно, и  $c = \text{const.}$ , а это и есть второй закон Кеплера.

### § 49. Кеплерова задача

Рассмотрим движение электрона, обращающегося около ядра с зарядом  $+Ze$  и массой, настолько большой по сравнению с массой электрона, что само ядро можно считать неподвижным центром. Так как опыты Резерфорда с рассеянием  $\alpha$ -частиц показали, что вплоть до расстояния порядка  $10^{-12}$  см закон Кулона имеет место, то сила взаимодействия между ядром и электроном будет  $Ze^2/r^2$ , а потенциальная энергия

$$U = -\frac{Ze^2}{r}. \quad (49,1)$$

Очевидно, что при таких условиях наша задача тождественна с задачей о движении планеты вокруг солнца, почему её и называют кеплеровой задачей. Для решения этой задачи мы воспользуемся законами сохранения энергии и момента количества движения. В полярных координатах [см. формулы (47,4) и (48,8)] эти законы дают

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r} = E, \quad (49,2)$$

$$mr^2 \dot{\varphi} = P, \quad (49,3)$$

где  $E$  и  $P$  — постоянные; из (49,3) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}. \quad (49,4)$$

Далее мы перейдём от производных по времени к производным по углу  $\varphi$  и с этой целью воспользуемся соотношением

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P}{mr^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi}. \quad (49,5)$$

Подставляя (49,4) и (49,5) в (49,2), найдём

$$\frac{m}{2} \left\{ \frac{P^2}{m^2 r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{P^2}{m^2 r^2} \right\} = E + \frac{Ze^2}{r}$$

или, после небольших преобразований,

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mE}{P^2} + \frac{2mZe^2}{P^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}. \quad (49,6)$$

Введём новую переменную, положив  $\rho = \frac{1}{r}$ . Так как  $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$ , то (49,6) примет вид

$$\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mE}{P^2} + \frac{2mZe^2}{P^2} \rho - \rho^2. \quad (49,7)$$

Для интегрирования уравнения (49,7) удобно его ещё раз продифференцировать:

$$2 \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{2mZe^2}{P^2} \frac{d\rho}{d\varphi} - 2\rho \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Это уравнение мы перепишем в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi} \left( \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho - \frac{mZe^2}{P^2} \right) = 0.$$

Так как  $\frac{d\rho}{d\varphi}$ , вообще говоря,  $\neq 0$ , то должно быть равно нулю выражение в скобках \*). Мы получаем таким образом для  $\rho$  следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{mZe^2}{P^2}. \quad (49,$$

Общий интеграл его, как известно, равен частному решению неоднородного уравнения плюс общий интеграл соответствующего однородного. Сразу видно, что частным решением неоднородного уравнения будет

$$\rho_1 = \frac{mZe^2}{P^2};$$

\*) Как будет видно из дальнейшего [см. формулу (49,14) и следующий за ней текст]  $\frac{d\rho}{d\varphi}$  обращается в нуль, вообще говоря, только в двух точках траектории, соответствующих (при  $E < 0$ ) афелию и перигелию орбиты. Уравнение же  $\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$  дало бы решение  $\rho = \text{const}$  для любых значений  $\varphi$ . Это, очевидно, имеет место только в случае круговой орбиты. Нетрудно, однако, убедиться в том, что в случае круговой орбиты (т. е. при условии  $\rho = \text{const}$  во всех точках орбиты) для  $\rho$  получается выражение

$$\rho = \frac{mZe^2}{P^2}.$$

Но, как видно из текста, это — частное решение  $\rho_1$  неоднородного уравнения, получаемого приравнением нулю выражения в скобках. Таким образом, условие  $\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$  не даёт нового решения по сравнению с решениями уравнения (49,8).

общий же интеграл однородного уравнения

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0$$

есть

$$\rho_2 = A \cos \varphi + B \sin \varphi,$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Итак,

$$\rho = \frac{mZe^2}{p^2} + A \cos \varphi + B \sin \varphi. \quad (49,9)$$

Если мы условимся отсчитывать угол  $\varphi$  от того положения радиуса-вектора, при котором  $r$  имеет минимальное значение:  $r = r_{\min}$ , а следовательно,  $\rho = \frac{1}{r} = \rho_{\max}$ , то мы получим

$$\text{для } \varphi = 0 \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = 0, \quad (49,10)$$

и так как

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -A \sin \varphi + B \cos \varphi,$$

то условие (49,10) даёт  $B = 0$ . Решение (49,9) при этом принимает вид

$$\rho = \frac{mZe^2}{p^2} + A \cos \varphi. \quad (49,11)$$

Это и есть уравнение орбиты электрона. Сравним его с уравнением конических сечений в полярных координатах относительно фокуса:

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (49,12)$$

где  $a$  — большая полуось и  $\varepsilon$  — эксцентриситет. Мы находим отсюда для  $\rho = \frac{1}{r}$  выражение

$$\rho = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (49,13)$$

Очевидно, что (49,11) и (49,13) совпадают, если положить

$$\frac{mZe^2}{p^2} = \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)}.$$

Это означает, что траекторией электрона является коническое сечение (первый закон Кеплера).

Для того чтобы найти условие, при котором это коническое сечение будет эллипсом, отыщем условие максимума и мини-

муна  $\rho$ . Необходимое условие максимума или минимума  $\rho$  есть

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0.$$

Полагая в (49,7)  $\frac{d\rho}{d\varphi} = 0$ , получим квадратное уравнение

$$\rho^2 - 2 \frac{mZe^2}{P^2} \rho - \frac{2mE}{P^2} = 0. \quad (49,14)$$

По свойству корней квадратного уравнения из (49,14) находим

$$\rho_{\max} + \rho_{\min} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \quad \rho_{\max} \cdot \rho_{\min} = -\frac{2mE}{P^2}. \quad (49,15)$$

Если энергия  $E$  отрицательна ( $E < 0$ ), то  $\rho_{\max} \cdot \rho_{\min} > 0$  и, следовательно, существуют два положительных значения  $\rho$  (а значит, и  $r$ ), при которых  $\frac{d\rho}{d\varphi}$  обращается в нуль; из них одно соответствует максимуму  $\rho$  (минимуму  $r$ , перигелий), а другое — минимуму  $\rho$  (максимуму  $r$ , афелий). Итак, при  $E < 0$  орбитой будет *эллипс*.

Напротив, при  $E > 0$   $\rho_{\max} \cdot \rho_{\min} < 0$ . Это значит, что двух положительных значений  $\rho$ , соответствующих максимуму и минимуму  $r$ , не существует, но одно из них положительно, а другое отрицательно. Положительные и отрицательные значения радиуса-вектора соответствуют двум различным ветвям *гиперболы*. Итак, при  $E > 0$  орбитой будет гипербола.

Найдём ещё полезное соотношение, связывающее энергию с большой полуосью. Из (49,13), принимая во внимание, что при  $\varphi = 0$   $\rho = \rho_{\max}$ , а при  $\varphi = \pi$   $\rho = \rho_{\min}$ , получаем

$$\rho_{\max} = \frac{1 + \varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} = \frac{1}{a(1 - \varepsilon)}, \quad \rho_{\min} = \frac{1 - \varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} = \frac{1}{a(1 + \varepsilon)}.$$

Подставляя это в левую часть (49,15), находим

$$\frac{2}{a(1 - \varepsilon^2)} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \quad (49,16)$$

$$\frac{1}{a^2(1 - \varepsilon^2)} = -\frac{2mE}{P^2}; \quad (49,17)$$

из (49,16) и (49,17), следует:

$$E = -\frac{mZ^2e^4(1 - \varepsilon^2)}{2P^2}; \quad (49,18)$$

Разделив (49,16) на (49,17), найдём:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}. \quad (49,19)$$

Соотношение (49,19) показывает, что энергия электрона при данном заряде зависит только от большой полуоси его орбиты,

по не зависит от эксцентриситета: всем орбитам с одинаковой большой полуосью соответствует и одинаковая энергия.

Выведем, наконец, при помощи найденных соотношений третий закон Кеплера. Если секториальная скорость электрона равна  $c$ , то за полный период обращения  $T$  радиус-вектор опишет площадь

$$S = cT.$$

Но так как секториальная скорость может быть выражена через момент количества движения  $c = \frac{L}{2m}$  (см. § 48), то, полагая  $L = P$ , получаем

$$S = \frac{1}{2} \frac{P}{m} T, \quad (49,20)$$

С другой стороны,  $S$  как площадь эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  выразится в виде

$$S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (49,21)$$

так как  $b = a \sqrt{1 - \epsilon^2}$ . Сравнивая (49,20) и (49,21), получаем

$$PT = 2\pi m a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (49,22)$$

Соотношение (49,16) даёт возможность выразить  $P^2$ :

$$P^2 = mZe^2 a (1 - \epsilon^2). \quad (49,23)$$

Возводя в квадрат (49,22) и подставляя (49,23), получим после простых сокращений и преобразований

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}, \quad (49,24)$$

или, так как  $1/T$  равно числу обращений  $\nu$ ,

$$a^3 \nu^2 = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}. \quad (49,25)$$

Поскольку в правой части (49,24) стоит величина, постоянная при данном заряде ядра  $Ze$ , мы находим

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const.}$$

Это и есть третий закон Кеплера.

### § 50. $\alpha$ -частица в поле ядра

Рассмотрим теперь движение  $\alpha$ -частицы в поле неподвижного ядра в случае, когда *отталкивающая* сила подчиняется закону Кулона. Пусть заряд ядра будет попрежнему  $+Ze$ ; заряд  $\alpha$ -ча-

стицы, как мы знаем, равен  $+2e$ , и потенциальная энергия будет поэтому

$$U = \frac{2Ze^2}{r}. \quad (50,1)$$

Законы сохранения энергии и момента количества движения дают

$$\frac{M}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{2Ze^2}{r} = E, \quad (50,2)$$

$$Mr^2 \dot{\varphi} = P, \quad (50,3)$$

где  $M$  — масса  $\alpha$ -частицы. Схема дальнейшего решения задачи полностью совпадает со схемой, использованной в предыдущем параграфе, так как исходные уравнения с точностью до знака потенциальной энергии в том и другом случаях одинаковы [см. формулы (49,1—3)]. Поэтому мы не будем повторять деталей вычислений и сразу напомним результат, к которому приводят уравнения (50,2) и (50,3) после преобразований и введения новой переменной  $\rho = \frac{1}{r}$ :

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2ME}{P^2} - 2 \frac{2MZe^2}{P^2} \rho - \rho^2.$$

Дифференцируя это уравнение ещё раз, производя различные сокращения и перестановки, получаем

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = C, \quad (50,4)$$

где

$$C = -\frac{2MZe^2}{P^2}. \quad (50,5)$$

Общее решение уравнения (50,4) таково:

$$\rho = C + A \cos \varphi + B \sin \varphi. \quad (50,6)$$

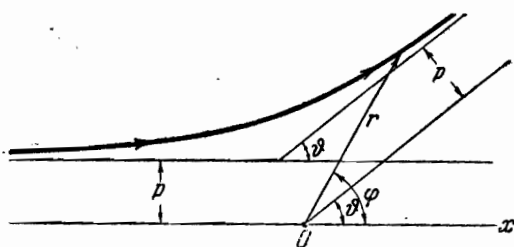


Рис. 101. Путь  $\alpha$ -частицы в поле ядра, находящегося в точке  $O$ .

Используем теперь начальные условия. Очевидно (рис. 101), что при  $\varphi = \pi$   $r = \infty$  и, следовательно,  $\rho = 0$ . Это даёт при подстановке в (50,6)

$$A = C. \quad (50,7)$$

Второе условие мы получим следующим образом. Ордината любой точки траектории связана с  $r$  и  $\varphi$  очевидным соотношением  $y = r \sin \varphi$  или

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{r \sin \varphi} = \frac{\rho}{\sin \varphi}.$$



Воспользовавшись (50,6) и (50,7), найдём

$$\frac{1}{y} = \frac{C(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} + B.$$

При  $\varphi = \pi$  ордината  $y$  равна «прицельному расстоянию»  $\rho$ , а первый член в правой части обращается в нуль. Мы получаем, таким образом,  $B = \frac{1}{\rho}$ , и решение (50,6) принимает окончательный вид

$$\rho = C(1 + \cos \varphi) + \frac{1}{\rho} \sin \varphi. \quad (50,8)$$

Отклонение  $\alpha$ -частицы,  $\varphi$ , очевидно, равно углу  $\vartheta$  между асимптотами гиперболы, а для направления полёта после отклонения  $\rho = 0$ . Поэтому из (50,8) мы получаем

$$-\frac{1}{C\rho} = \frac{1 + \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \quad (50,9)$$

или, принимая во внимание значение  $C$  из (50,5),

$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{P^2}{2MZe^2\rho}. \quad (50,10)$$

Наконец, момент количества движения  $P$  можно выразить через прицельное расстояние  $\rho$  и скорость  $v$ :

$$P = M\rho v.$$

Подставив это в (50,10), получим

$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{Mv^2\rho}{2Ze^2}. \quad (50,11)$$

Это и есть формула для угла отклонения  $\alpha$ -частицы, которой мы уже воспользовались в § 27.

### § 51. Приведённая масса

В предыдущих двух параграфах мы рассматривали движение частицы (электрона или  $\alpha$ -частицы) около ядра, которое мы считали неподвижным. Это рассмотрение, однако, не вполне точно, так как необходимо учитывать движение *обеих* взаимодействующих частиц.

Пусть массы ядра и движущейся около него частицы будут, соответственно,  $m_1$  и  $m_2$ , а радиусы-векторы, определяющие их положение относительно произвольного начала  $O$ , пусть будут  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  (рис. 102). Закон взаимодействия частиц пусть выражается функцией расстояния  $f(R)$ . Если частицы

находятся только под действием связывающей их силы взаимодействия, то уравнения движения их будут

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = f(R) \mathbf{r}_0, \quad (51,1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -f(R) \mathbf{r}_0, \quad (51,2)$$

где  $\mathbf{r}_0$  — единичный вектор, направленный от  $m_2$  к  $m_1$ . Складывая (51,1) и (51,2), получаем

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const.}, \quad (51,3)$$

или, что то же самое,

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{const.} \quad (51,3')$$

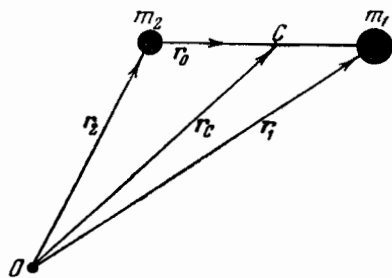


Рис. 102.

Итак, в системе двух частиц полное количество движения сохраняет постоянную величину. Это — закон сохранения количества движения для частного случая системы двух частиц.

Закон этот приобретает особенно наглядную форму, если ввести понятие о центре масс или центре инерции системы. Центром инерции системы двух частиц называется точка, положение которой определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (51,4)$$

Легко убедиться в том, что центр инерции лежит на прямой, соединяющей обе частицы, и делит эту прямую в отношении, обратном массам. В самом деле, из (51,4) непосредственно следует, что

$$m_1 (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_1) = m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_C). \quad (51,5)$$

Но это означает, что векторы  $\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_C$  параллельны, а так как, кроме того, они имеют общую точку в  $C$ , то три точки  $m_1$ ,  $C$  и  $m_2$  лежат на одной прямой. Таким образом, первая половина нашего утверждения доказана. Для доказательства второй половины заметим, что из (51,5) следует

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_C|}, \quad (51,6)$$

что и требовалось доказать.

Сравнивая (51,4) и (51,3), мы видим, что

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \text{const.}$$

Это значит, что центр инерции двух частиц, находящихся только под действием сил взаимодействия, движется прямолинейно и равномерно или покоится. В этом и заключается иная формулировка закона сохранения количества движения, о которой было сказано выше.

Поскольку нас интересует лишь движение частиц *относительно друг друга*, мы выберем такую систему координат, в которой центр инерции покоится, и поместим начало координат в самом центре инерции. В этой системе координат частицы описывают около неподвижного центра инерции орбиты, которые друг другу подобны, но их линейные размеры обратно пропорциональны массам.

Оказывается, однако, что изучение движения системы двух частиц можно заменить рассмотрением движения одной фиктивной частицы, расположенной от неподвижного центра инерции на расстоянии, равном расстоянию частиц между собой, но обладающей массой

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (51,7)$$

Для того чтобы в этом убедиться, перепишем (51,1) и (51,2) в виде

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{1}{m_1} f(R) \mathbf{r}_0, \quad (51,1')$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{1}{m_2} f(R) \mathbf{r}_0 \quad (51,2')$$

и вычтем (51,2') из (51,1')

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f(R) \mathbf{r}_0$$

или, полагая

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

и принимая во внимание, что разность векторов  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  есть вектор, направленный от  $m_2$  к  $m_1$ , получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} f(R) \mathbf{r}_0$$

или

$$m \ddot{\mathbf{r}} = f(R) \mathbf{r}_0, \quad (51,8)$$

т. е. как раз то, что требовалось доказать. Масса  $m$ , которую следует приписать фиктивной частице, заменяющей систему частиц, называется *приведённой массой*.

Ясно, что все выводы, к которым мы пришли в предыдущих параграфах, рассматривая ядро как неподвижное, были неточ-

ными, потому что мы не учитывали собственного движения ядра. Однако уравнение (51,8) показывает, что они сделаются вполне точными, если мы в окончательных результатах заменим массу обращающейся частицы приведённой массой  $m$  обеих частиц.

Посмотрим теперь, как велика будет ошибка, которая вносится пренебрежением собственного движения ядра. Полагая массы ядра и электрона соответственно равными  $m_1 = M$  и  $m_2 = \mu$ , напишем их приведённую массу по формуле (51,7):

$$m = \frac{M\mu}{M + \mu} = \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{M}}. \quad (51,9)$$

Если, например, речь идёт о движении электрона в атоме водорода, то, поскольку отношение массы электрона к массе водородного ядра равно  $\frac{\mu}{M} = \frac{1}{1836,5}$ , ошибка, которую мы делаем, не учитывая поправки на собственное движение ядра, будет

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1836,5}}.$$

Как мы увидим впоследствии (§ 100), в вопросах спектроскопии, где точность измерений очень велика, эта ошибка сказывается на результатах заметным образом.

## § 52. Обобщённые координаты. Состояние системы

До сих пор мы имели дело с двумя системами координат: декартовой и полярной. В механике, однако, большую пользу приносит пользование так называемыми *обобщёнными координатами*, под которыми разумеются любые параметры, полностью определяющие «конфигурацию» системы. Так, например, система из двух взаимодействующих частиц может быть охарактеризована тремя декартовыми координатами их общего центра инерции, расстоянием частиц и двумя углами, определяющими положение прямой, соединяющей частицы.

Выбранные обобщённые координаты обыкновенно обозначаются одной и той же буквой  $q$  с различными индексами:  $q_1, q_2, q_3, \dots$ . Преимущество такого способа, помимо его общности, заключается, между прочим, в том, что число обобщённых координат в некоторых случаях может быть и меньше полного числа декартовых или полярных координат. Например, если мы имеем систему из двух частиц, находящихся на неизменном расстоянии  $d$  друг от друга, то между шестью декартовыми

координатами этих частиц имеется одно соотношение (условие связи)

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d^2,$$

из которого может быть определена одна координата в функции пяти остальных. Таким образом, в этом случае конфигурация системы полностью определяется пятью *независимыми* параметрами, а потому и достаточно пяти обобщённых координат. Вообще, если система из  $n$  частиц подчинена  $k$  условиям связи *между координатами* частиц, то из  $3n$  координат независимыми будут

$$f = 3n - k$$

координат; остальные  $k$  координат определятся из условий связи. Это число  $f$  независимых параметров, необходимое для полного определения мгновенной конфигурации системы, называется *числом степеней свободы*. Если заданы все обобщённые координаты  $q_1, q_2, \dots, q_f$  и все обобщённые скорости, т. е. производные от обобщённых координат по времени  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$ , то тем самым полностью определено состояние системы. В классической механике, таким образом, *мгновенное состояние системы* определяется  $2f$  независимыми параметрами.

### § 53. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа

Поскольку мы вводим обобщённые координаты, целесообразно отыскать уравнения движения, которые имеют место в любых системах координат. Таким свойством обладают уравнения, открытые Лагранжем и называемые лагранжевыми уравнениями движения; часто их называют также уравнениями Лагранжа второго рода. С ними мы и ознакомимся теперь.

Пусть мы имеем свободную частицу. Положение её характеризуется вообще тремя координатами. Это могут быть декартовы координаты  $x, y, z$ , но могут быть и любые другие координаты  $q_1, q_2, q_3$ . Допустим, что нам известны формулы, выражающие  $x, y, z$  через  $q_1, q_2, q_3$ :

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (53,1)$$

(ср., например, формулы (§ 47) для перехода от декартовых координат к полярным). Напишем уравнения движения в декартовых координатах

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z.$$

Умножим теперь первое из этих уравнений на  $\frac{\partial x}{\partial q_1}$ , второе на  $\frac{\partial y}{\partial q_1}$ , третье на  $\frac{\partial z}{\partial q_1}$  и сложим их:

$$m \left( \ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1}. \quad (53,2)$$

Правую часть полученного уравнения обозначим для краткости через  $Q_1$ :

$$X \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z \frac{\partial z}{\partial q_1} = Q_1. \quad (53,3)$$

Заметив, что, например,

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) \text{ и т. д.,}$$

мы можем переписать уравнение (53,2) в виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ m \left( \dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \right\} - m \left\{ \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) + \dot{y} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) + \dot{z} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \right\} = Q_1. \quad (53,4)$$

Дифференцируя формулы (53,1), мы получим выражения для полных производных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  по времени, рассматривая  $x$ ,  $y$ ,  $z$  как сложные функции времени. Например,

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \dot{q}_3. \quad (53,5)$$

Отсюда сразу находим

$$\frac{\dot{\partial x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\dot{\partial y}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\dot{\partial z}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial z}{\partial q_1}. \quad (53,6)$$

Далее, принимая во внимание, что результат дифференцирования не зависит от порядка, в котором производится два последовательных дифференцирования, имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \right) = \frac{\dot{\partial x}}{\partial \dot{q}_1}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} \right) = \frac{\dot{\partial y}}{\partial \dot{q}_1}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \frac{\dot{\partial z}}{\partial \dot{q}_1}. \quad (53,7)$$

Имея в виду соотношения (53,6) и (53,7), мы можем переписать уравнение (53,4) в виде

$$\frac{d}{dt} \left\{ m \left( \dot{x} \frac{\dot{\partial x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y} \frac{\dot{\partial y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z} \frac{\dot{\partial z}}{\partial \dot{q}_1} \right) \right\} - m \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1} \right) = Q_1. \quad (53,8)$$

Вспомним теперь, что кинетическая энергия  $T$  нашей частицы выражается через составляющие скоростей  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  сле-

дующим образом:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Мы имеем поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = m \left( \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1} \right).$$

Уравнение (53,8) принимает теперь вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1. \quad (53,9)$$

Если сила, под действием которой происходит движение, имеет потенциал  $U(x, y, z)$ , так что

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

то выражение (53,3) для  $Q_1$  можно написать так:

$$Q_1 = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Теперь уравнение (53,9) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1}. \quad (53,10)$$

Введём, наконец, новую функцию  $L$ , равную разности между кинетической и потенциальной энергиями (не смешивать с полной энергией, которая равна сумме кинетической и потенциальной энергий!):

$$L = T - U. \quad (53,11)$$

Эта функция называется *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*. Так как потенциальная энергия не зависит от скоростей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ , то  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$ , и уравнение (53,10) приобретает простой вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0. \quad (53,12)$$

Это и есть первое из уравнений Лагранжа. Два других получаются совершенно аналогичными преобразованиями:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0. \quad (53,12')$$

Преимущество уравнений Лагранжа перед ньютоновыми с особенной ясностью выступает в том случае, когда движение частиц подчинено связям. В этом случае число *независимых* параметров, характеризующих конфигурацию системы, будет уже не  $3n$ , но меньше этого числа, а именно, их будет столько, сколько степеней свободы у системы (см. § 52):  $q_1, q_2, \dots, q_f$ ,  $f = 3n - k$ . Столько же будет и уравнений Лагранжа. Если, например, речь идёт о движении одной частицы по заданной поверхности (одно уравнение связи), то достаточно двух уравнений Лагранжа; для отыскания движения частицы по заданной кривой достаточно одного уравнения Лагранжа.

### § 54. Применение уравнений Лагранжа к задаче о центральном движении

В качестве примера применения уравнений Лагранжа рассмотрим вновь задачу о движении электрона в поле положительно заряженного ядра. Симметрия задачи указывает на то, что наиболее удобными будут здесь полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ , связанные с декартовыми соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Уравнения Лагранжа будут ( $q_1 = r$ ,  $q_2 = \varphi$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (54,1)$$

Для отыскания функции Лагранжа для этого случая вспомним выражения кинетической и потенциальной энергий в полярных координатах \*)

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2); \quad U = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Функция Лагранжа будет поэтому

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{Ze^2}{r}. \quad (54,2)$$

Напишем её частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{Ze^2}{r^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

\*) Если мы хотим учесть собственное движение ядра, то в формулу для кинетической энергии нужно ввести вместо массы электрона приведённую массу электрона и ядра (§ 51).



подставляя это в (54,1), получим

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m\dot{r}\dot{\varphi}^2 + \frac{Ze^2}{r^3} = 0, \quad (54,3)$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (54,4)$$

Второе уравнение сразу даёт

$$mr^2\dot{\varphi} = P, \quad (54,5)$$

где  $P$  — постоянная интегрирования. Это — не что иное, как закон сохранения момента количества движения. Первое же уравнение можно переписать в виде

$$m\ddot{r} = -\frac{Ze^2}{r^2} + m\dot{\varphi}^2. \quad (54,6)$$

Это уравнение описывает составляющую движения по радиусу-вектору. Справа написана сила, действующая на электрон вдоль радиуса-вектора. Её выражение состоит из двух членов: первый представляет собой кулоновскую силу; появление же второго на первый взгляд кажется неожиданным. Однако при ближайшем рассмотрении этот член  $m\dot{\varphi}^2$  оказывается просто центробежной силой инерции.

Теперь мы можем перейти к интегрированию уравнения (54,6). Для этого подставим в него выражение  $\dot{\varphi}$  из (54,5)

$$\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}$$

и разделим обе части на  $m$ :

$$\ddot{r} = -\frac{Ze^2}{mr^2} + \frac{P^2}{m^2r^3}.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\ddot{r} = \frac{d}{dr} \left( \frac{Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{2m^2r^2} \right). \quad (54,7)$$

Умножив обе части этого уравнения на  $2\dot{r}$ , получим

$$\frac{d}{dt} \dot{r}^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2r^2} \right),$$

откуда после интегрирования имеем

$$\dot{r}^2 = c + \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2r^2}, \quad (54,8)$$

где  $c$  — постоянная интегрирования. В этом уравнении мы заменим  $\dot{r}$  через

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi},$$

что после небольших преобразований даёт

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + C,$$

где  $C = \frac{cm^2}{P^2}$ ; или, вводя новую переменную  $\rho = \frac{1}{r}$ ,

$$\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2} \rho - \rho^2 + C. \quad (54,9)$$

Но уравнение (54,9), очевидно, совпадает с (49,7) и интегрируется одинаковым с ним образом. Поэтому мы здесь не будем повторять вычислений, выполненных в § 49 и приводящих в конечном результате к уравнению конических сечений.

В заключение мы дадим полезную качественную иллюстрацию уравнения (54,6). Для этого мы приведём его к виду (54,7) и перепишем так:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left( -\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2} \right). \quad (54,7')$$

Это уравнение, очевидно, соответствует одномерному движению в поле с потенциалом

$$U = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2}. \quad (54,10)$$

Здесь первый член представляет собой потенциал кулоновской силы, второй — некоторый фиктивный потенциал, обусловленный наличием центростремительной силы.

Построим теперь потенциальную кривую, откладывая  $r$  по оси абсцисс и  $U$  — по оси ординат. Эта кривая должна иметь вид кривой  $I$ , изображённой на рис. 103.

Действительно, для больших значений  $r$  вторым членом в (54,10) можно пренебречь по сравнению с первым, и  $U$  отрицательно. Наоборот, для малых  $r$  второй член преобладает над первым, и потенциальная энергия становится положительной. Поэтому при определённой величине  $r$  кривая проходит через минимум, быстро поднимаясь вверх при дальнейшем уменьшении  $r$ .

Эта кривая наглядно показывает, почему при положительной полной энергии орбита гиперболическая, а при отрицательной — эллиптическая. Для этого удобнее всего воспользоваться иллюстрацией с тяжёлым шариком (см. стр. 156). Очевидно, что шарик, поднятый на высоту  $E_1 > 0$ , скатится в «яму»  $ABC$  и уйдёт в бесконечность. Наоборот, при отрицательной энергии ( $E_2 < 0$ ) шарик будет кататься туда и сюда в углублении  $DBF$ , и соответствующая ему частица всё время будет оставаться на конечном расстоянии от притягивающего центра, совершая относительно него периодическое движение.

Если имеет место не притяжение, но отталкивание, то первый член в (54,10) положителен и потенциальная энергия при

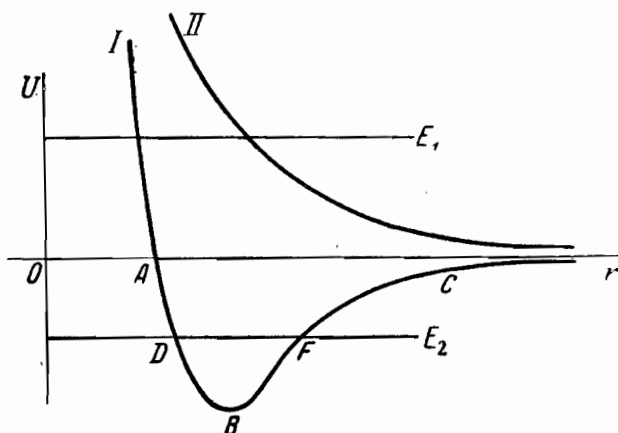


Рис. 103. Потенциальная кривая для радиальной составляющей кеплерова движения: *I* — случай притяжения, *II* — случай отталкивания.

любом  $r$  положительна. Потенциальная кривая теперь имеет вид кривой *II* рис. 103. В этом случае шарик, поднятый на любую высоту, укатится в бесконечность.

### § 55. Обобщённые импульсы

Уравнения Лагранжа всегда приводят решение задачи к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Во многих случаях, однако, удобно пользоваться вместо уравнений второго порядка удвоенным числом уравнений первого порядка. Для того чтобы написать такие уравнения, мы должны прежде всего ввести новое понятие — *обобщённый импульс*. Каждой из обобщённых координат мы будем сопоставлять отвечающий ей обобщённый импульс, который мы определим формально (в духе механики Лагранжа) как частную производную от функции Лагранжа по соответствующей обобщённой скорости:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (55,1)$$

Для случая сил, имеющих потенциал  $U$ , который зависит от координат, но не от скоростей,  $L = T - U(q_1, \dots, q_k, \dots)$  и

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (55,2)$$

Для того чтобы уяснить себе физический смысл обобщённых импульсов, полезно вычислить их явные выражения в различных координатах. Для точки, отнесённой к декартовой системе координат,

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

поэтому

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad (55,3)$$

т. е. в этом случае обобщённые импульсы просто являются проекциями количества движения  $m\mathbf{v}$  на декартовы оси координат.

В других координатах обобщённые импульсы могут иметь другой смысл и иную размерность. Найдём, например, импульсы, отвечающие полярным координатам  $r$  и  $\varphi$ . Кинетическая энергия в полярных координатах

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2);$$

соответствующие обобщённые импульсы будут

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad (55,4)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \quad (55,5)$$

Как видно, радиальный импульс  $p_r$  имеет размерность количества движения, тогда как азимутальный  $p_\varphi$  — размерность момента количества движения.

Воспользовавшись понятием обобщённого импульса, можно придать уравнениям Лагранжа новую форму. Напишем эти уравнения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, f)$$

и, заменив в них по определению (55,1)  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  через  $p_k$ , имеем

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, f). \quad (55,6)$$

Присоединяя сюда определение обобщённого импульса

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \dots, f), \quad (55,7)$$

получим систему  $2f$  уравнений *первого порядка*.

### § 56. Гамильтоновы канонические уравнения

Уравнения (55,6) и (55,7), полученные в конце предыдущего параграфа, отвечают нашему желанию заменить уравнения второго порядка уравнениями первого порядка. Однако они очень несимметричны. На практике обычно пользуются другой формой уравнений первого порядка, именно, так называемыми *гамильтоновыми каноническими уравнениями*, которые отличаются особой простотой и изяществом.

Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть мы имеем дело с одной частицей, движущейся прямолинейно. Траекторию этой частицы мы можем выбрать за ось  $x$ , и тогда положение частицы определится одной координатой  $q = x$ , а соответствующим ей обобщённым импульсом будет  $p = m\dot{x}$  [см. (55,3)]. Введём теперь новую функцию  $H$ , которую мы определим как *сумму кинетической и потенциальной энергий, причём кинетическую энергию мы выразим не через скорость, а через импульс*  $p$ :

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + U. \quad (56,1)$$

Эту функцию  $H$  мы можем связать с функцией Лагранжа  $L$ . Для этого заметим прежде всего, что кинетическая энергия может быть представлена в виде

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{(m\dot{x})^2}{2m} = \frac{1}{2} p\dot{x}.$$

Теперь легко проверить, что

$$\begin{aligned} p\dot{x} - L &= p\dot{x} - T + U = p\dot{x} - \frac{1}{2} p\dot{x} + U = \\ &= \frac{1}{2} p\dot{x} + U = T + U = H. \end{aligned} \quad (56,2)$$

Возьмём полный дифференциал от обеих частей (56,2):

$$dH = p dx + \dot{x} dp - \frac{\partial L}{\partial x} dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\dot{x}. \quad (56,3)$$

Но согласно (55,2)  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p$ . Поэтому первый член в правой части (56,3) сокращается с четвёртым, и мы получаем

$$dH = \dot{x} dp - \frac{\partial L}{\partial x} dx. \quad (56,4)$$

Напишем теперь полный дифференциал  $H$ , имея в виду, что  $H$  есть функция  $x$  и  $p$  (но не  $\dot{x}$ ):

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial x} dx.$$

Сравнивая это выражение с (56,4) и вспоминая, что по (55,6)  $\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{p}$ , находим

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (56,5)$$

Эти два уравнения первого порядка и являются *гамильтоновыми каноническими уравнениями* для рассматриваемого простейшего случая. Легко видеть, что в этом случае канонические уравнения (56,5) ведут к хорошо знакомым результатам.

Так как  $H = \frac{p^2}{2m} + U$ , то  $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ , и уравнения (56,5) дают

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Первое из этих соотношений даёт  $p = mx$ , т. е. определение количества движения, второе представляет собой ньютоновское уравнение движения для частицы, движущейся по оси  $x$ .

Мы сейчас покажем, что и в общем случае системы с  $f$  степенями свободы канонические уравнения имеют такой же вид, как и (56,5), только число уравнений соответственно больше. Пусть конфигурация системы определяется  $f$  обобщёнными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_f$ . Функция Лагранжа  $L$  зависит от обобщённых координат, обобщённых скоростей  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f$ , а также, вообще говоря, и от времени:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

причём через  $q_k$  обозначена совокупность всех обобщённых координат, а через  $\dot{q}_k$  — совокупность всех обобщённых скоростей. От функции Лагранжа мы теперь перейдём к функции Гамильтона  $H$ , воспользовавшись преобразованием (56,2), распространённым на  $f$  степеней свободы:

$$H = \sum_{k=1}^f \dot{q}_k p_k - L. \quad (56,6)$$

Возьмём полный дифференциал правой и левой частей (56,6):

$$dH = \sum p_k d\dot{q}_k + \sum \dot{q}_k dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Так как по (55,7)  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$ , то первая и четвёртая суммы сокращаются, и мы получаем

$$dH = \sum \dot{q}_k dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (56,7)$$

С другой стороны, полный дифференциал  $H$ -функции  $q_k, p_k$  (но не  $\dot{q}_k$ ) и  $t$  должен иметь вид

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Сравнивая с (56,7) и принимая во внимание, что по (55,6)  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{dp_k}{dt}$ , получаем

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, f). \quad (56,8)$$

Эти дифференциальные уравнения первого порядка и являются каноническими уравнениями для систем с  $f$  степенями свободы. Их общее число равно  $2f$ , т. е. в два раза больше числа уравнений второго порядка. Обобщённая координата  $q_k$  и соответствующий ей обобщённый импульс  $p_k$  называются *канонически сопряжёнными*.

Для системы с тремя степенями свободы (например, для одной частицы, движение которой не ограничено связями) канонических уравнений будет всего шесть. Так как мы имеем дело здесь с шестью уравнениями первого порядка, то в окончательный результат войдут ещё шесть произвольных постоянных. Зная начальное состояние системы (§ 52), т. е. совокупность значений  $q_k$  и  $p_k$  для  $t=0$ , и проинтегрировав уравнения (56,8), мы можем предсказать её состояние для любого будущего момента времени. Таким образом, гамильтоновы канонические уравнения по своей форме являются наиболее отчётливым выражением классического принципа причинности.

## § 57. Физический смысл функции Гамильтона

В начале предыдущего параграфа мы определили функцию Гамильтона для случая одномерного движения, отнесённого к декартовым координатам, как сумму кинетической и потенциальной энергий, выраженных через координаты и импульсы. Затем мы показали, что это определение тождественно с определением через функцию Лагранжа

$$H = \dot{x}p_x - L,$$

и это последнее определение мы обобщили на случай  $f$  любых обобщённых координат, полагая в этом случае

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_k, \dot{q}_k, t). \quad (56,6)$$

Выясним теперь, каков смысл функции Гамильтона в этом более общем случае.

Оказывается, что в тех случаях, когда функция Лагранжа, а также функция Гамильтона  $H$  не зависят явно от времени,  $H$  есть так же, как и в простейшем случае, сумма кинетической и потенциальной энергий. Докажем прежде всего, что, когда  $H$  от времени явно не зависит, она равна постоянной:

$$H = H(q_k, p_k) = \text{const.}$$

Для доказательства найдём полную производную  $H$  по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_1} \dot{p}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \dot{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_3} \dot{p}_3 + \cdots \equiv \\ &\equiv \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\dot{q}_k$  и  $\dot{p}_k$  из (56,8), получим

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \equiv 0, \quad (57,1)$$

откуда

$$H = \text{const.} \quad (57,2)$$

Теперь мы обратимся к выяснению физического смысла  $H$ . По определению

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + p_3 \dot{q}_3 + \cdots - L = \sum_k p_k \dot{q}_k - L. \quad (57,3)$$

Для консервативной системы

$$L = T - U, \quad (57,4)$$

и так как  $U$  зависит только от координат, то

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (57,5)$$

Таким образом, получаем

$$\sum_k p_k \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \quad (57,6)$$

и, следовательно,

$$H = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \quad (57,7)$$

Теперь необходимо принять во внимание, что в любых координатах кинетическая энергия есть *однородная* функция скоростей  $\dot{q}_k$  *второго измерения*. Для декартовых и полярных координат мы в этом убедились непосредственно (см. §§ 42 и 47);



то же можно показать и в самом общем случае любых обобщённых координат\*). По теореме Эйлера об однородных функциях, если  $f(x, y, \dots, u, v)$  — однородная функция  $n$ -го измерения, то

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + \dots + u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} = n f. \quad (57,8)$$

Применяя эту теорему к сумме (57,6), получаем

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \equiv \dot{q}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} + \dots = 2T, \quad (57,9)$$

и (57,7) даёт

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - T + U = T + U. \quad (57,10)$$

Итак, для консервативных систем  $H$  есть просто сумма кинетической и потенциальной энергий, выраженная через координаты и импульсы, а соотношение

$$H = E$$

есть интеграл энергии.

Приведём несколько примеров функции Гамильтона.

а) Частица в поле с потенциалом  $U$ :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z).$$

Согласно § 55  $p_x = m\dot{x}$ ,  $p_y = m\dot{y}$ ,  $p_z = m\dot{z}$ . Следовательно,

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z). \quad (57,11)$$

б) Линейный осциллятор:  $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ ,  $U = \frac{1}{2} f x^2$ ,

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} f x^2. \quad (57,12)$$

в) Электрон в кулоновском поле:  $T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$ ,

$$U = -\frac{Ze^2}{r};$$

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi},$$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) - \frac{Ze^2}{r}. \quad (57,13)$$

\*) См., например, Н. Н. Бухгольц, Основной курс теоретической механики, ч. II, стр. 45—47, Гостехиздат, 1939; Г. К. Суслев, Теоретическая механика, § 189, Гостехиздат, 1944; А. Г. Вебстер, Механика материальных точек, твёрдых, уругих и жидких тел, § 36, ГТТИ, 1933.

## § 58. Циклические координаты

Функция Гамильтона  $H$  в общем случае зависит от всех координат и обобщённых импульсов. Однако в некоторых частных случаях оказывается, что одна или несколько координат могут и не входить в выражение  $H$ . Такие координаты называются *циклическими*. Возьмём, например, гамильтонову функцию электрона, движущегося в кулоновском поле ядра:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) - \frac{Ze^2}{r}. \quad (57,13)$$

Мы видим, что из двух координат  $r$  и  $\varphi$  только  $r$  входит в выражение  $H$ ; следовательно,  $\varphi$  есть координата циклическая.

В качестве второго примера рассмотрим функцию Гамильтона для движения частицы в поле тяготения земли. Здесь потенциальная энергия зависит только от расстояния частицы от земли:  $U = mgz$ . Следовательно [см. (57,11)],

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz. \quad (58,1)$$

Как мы видим, в выражение  $H$  не входят координаты  $x$  и  $y$ ; они также являются циклическими координатами.

Если какая-нибудь из координат является циклической, то соответствующий ей обобщённый импульс должен быть постоянным. Пусть, например, координата  $q_1$  не входит в  $H$ :

$$H = H(q_2, q_3, \dots, q_f; p_1, p_2, \dots, p_f).$$

Тогда из канонических уравнений (56,8) следует  $\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$ , откуда  $p_1 = \text{const.}$  Таким образом, поскольку в гамильтонову функцию (57,13) не входит координата  $\varphi$ ,

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (58,2)$$

В функцию  $H$  Гамильтона (58,1) не входят координаты  $y$  и  $x$ , вследствие чего

$$p_x = m\dot{x} = \text{const.}, \quad p_y = m\dot{y} = \text{const.} \quad (58,3)$$

Особенно важен тот случай, когда *все* координаты — циклические. В этом случае, как мы сейчас покажем, все импульсы являются постоянными, а все координаты — линейными функциями времени. Наиболее простым примером подобного случая может служить ротатор, т. е. частица, обращающаяся по кругу около неподвижного центра. Кинетическая энергия такой частицы, как известно, равна

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2, \quad (58,4)$$

где  $A = mr^2$ ; её потенциальная энергия равна нулю. Обобщённый импульс, соответствующий  $\varphi$ , будет

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} \quad (58,5)$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} A\dot{\varphi}^2 = \frac{(A\dot{\varphi})^2}{2A} = \frac{p_\varphi^2}{2A}$$

и

$$H = T + U = \frac{p_\varphi^2}{2A}. \quad (58,6)$$

Так как единственная координата  $\varphi$  — циклическая, то  $p_\varphi = \text{const.}$  и, согласно каноническим уравнениям,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial}{\partial p_\varphi} \left( \frac{p_\varphi^2}{2A} \right) = \frac{p_\varphi}{A} = \text{const.}$$

Обозначив  $\text{const.}$  через  $\omega$ , получим после интегрирования

$$\varphi = \omega t + \alpha,$$

где  $\alpha$  — постоянная интегрирования.

Если система имеет  $f$  степеней свободы и все координаты циклические, то  $H = H(p_1, p_2, \dots, p_f)$ , и для любого импульса  $p_k$  имеем

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0.$$

Канонические уравнения тогда дают

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \text{const.} = \omega_1,$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \text{const.} = \omega_2,$$

.....

$$\frac{dq_f}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_f} = \text{const.} = \omega_f,$$

откуда

$$q_1 = \omega_1 t + \alpha_1, \quad q_2 = \omega_2 t + \alpha_2, \quad \dots, \quad q_f = \omega_f t + \alpha_f.$$

Мы видим, что, действительно, в случае, когда все координаты циклические, все импульсы являются постоянными, а координаты — линейными функциями времени.

## § 59. Скобки Пуассона. Законы сохранения

Положим, что мы имеем какую-нибудь функцию координат, импульсов и времени:  $F(q, p, t)$ , где  $q$  и  $p$  — совокупности *всех* координат и импульсов; найдём полную производную  $F$  по времени

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dt} + \dots \equiv \\ &\equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right). \end{aligned}$$

Заменяя в правой части производные по времени от координат и импульсов через производные  $H$  из канонических уравнений

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \text{получаем}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right).$$

Второй член в правой части называется скобками Пуассона и обозначается через  $(H, F)$ :

$$(H, F) = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, f. \quad (59,1)$$

Итак, полную производную по времени всякой функции  $F(q_k, p_k, t)$  мы можем написать в виде

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (H, F). \quad (59,2)$$

Если  $F$  явно не зависит от времени, то  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$  и

$$\frac{dF}{dt} = (H, F). \quad (59,3)$$

Можно сказать, таким образом, что для всякой функции координат и импульсов  $F(q_k, p_k)$  скобки Пуассона дают выражение её производной по времени. Пользуясь этим замечанием, мы представим канонические уравнения

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

при помощи скобок Пуассона в новом виде.

Согласно (59,3) мы имеем

$$\frac{dq_k}{dt} = (H, q_k), \quad \frac{dp_k}{dt} = (H, p_k). \quad (59,4)$$

Отыщем теперь скобки  $(H, q_k)$  и  $(H, p_k)$ :

$$(H, q_k) = \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial q_k}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$$(H, p_k) = \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial p_k}{\partial p_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Мы видим, что уравнения (59,4) действительно совпадают с каноническими уравнениями.

Если для  $F(q_k, p_k)$  скобки Пуассона  $(H, F)$  равны нулю,

$$(H, F) = 0, \quad (59,4')$$

то

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad F(q_k, p_k) = \text{const.}$$

Этим можно воспользоваться для отыскания законов сохранения или первых интегралов уравнений движения, под которыми разумеют такие соотношения между координатами и их *первыми* производными по времени, которые сохраняют своё значение во всё время движения при любых начальных условиях. Найдём, например, скобки  $(H, H)$ :

$$(H, H) = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = 0,$$

откуда

$$H = \text{const.}$$

или, в раскрытом виде,

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) = \text{const.} \quad (59,5)$$

Это соотношение, выражающее закон сохранения энергии, и есть один из первых интегралов движения — именно интеграл энергии. Заметим здесь, что, отыскивая производную  $\frac{dH}{dt}$  в § 57, мы уже воспользовались частным случаем скобок Пуассона [см. (57,1)].

В качестве второго примера рассмотрим движение частицы в поле центральной силы. Найдём скобки Пуассона  $(H, L_z)$ , где  $L_z$  — момент количества движения относительно оси  $z$ :

$$L_z = xp_y - yp_x. \quad (59,6)$$

Искомые скобки Пуассона по (59,1) будут

$$(H, L_z) = \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial L_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial L_z}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial L_z}{\partial p_y}$$

Принимая во внимание (59,5) и (59,6), получаем

$$(H, L_z) = y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Для вычисления правой части перейдём к полярным координатам, воспользовавшись формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \\ &= -r \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial y} = x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x}, \end{aligned}$$

получаем

$$(H, L_z) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Но так как в случае центральной силы потенциальная энергия не зависит от  $\varphi$ , а зависит только от  $r$ , то

$$(H, L_z) = 0 \quad \text{и} \quad L_z = \text{const.}$$

В качестве упражнения предлагается доказать с помощью скобок Пуассона, что  $L_x = \text{const.}$  и  $L_y = \text{const.}$  Мы получаем три закона сохранения, а именно, законы сохранения составляющих момента количества движения.

Законы сохранения полного момента количества движения имеют место также и для изолированной системы частиц. В этом случае

$$L_z = \sum_k (x_k p_{y_k} - y_k p_{x_k}),$$

где суммирование распространяется на все частицы. Вычисление, аналогичное проделанному для одной частицы, даёт

$$\frac{dL_z}{dt} = (H, L_z) = \sum_k \frac{1}{m} (p_{y_k} p_{x_k} - p_{x_k} p_{y_k}) + \sum_k \left( y_k \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial y_k} \right).$$

В первой сумме все члены попарно сокращаются, а вторая при переходе к полярным координатам  $x_k = r_k \cos \varphi_k$ ,  $y_k = r_k \sin \varphi_k$  даёт

$$\frac{dL_z}{dt} = - \sum_k \frac{\partial U}{\partial \varphi_k}.$$

Но так как для изолированной консервативной системы при повороте всей системы на один и тот же угол потенциальная энергия не меняется, то

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L_z = \text{const.}$$

Применяя аналогичный приём, можно доказать, что для изолированной системы  $k$  частиц имеют место законы сохранения слагающих полного количества движения  $P_x, P_y, P_z$ , причём

$$P_x = \sum_k P_{xk}, \quad P_y = \sum_k P_{yk}, \quad P_z = \sum_k P_{zk}.$$

Действительно,

$$\frac{dP_x}{dt} = (H, P_x) = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial p_{xk}} \frac{\partial P_x}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial P_x}{\partial p_{xk}} \right) = - \sum_k \frac{\partial H}{\partial x_k} = - \sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k}$$

(суммирование распространяется на все частицы). Но так как потенциальная энергия системы частиц зависит только от их взаимных расстояний и не меняется, если все они сместятся на одинаковое расстояние по оси  $x$ , то

$$\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0 \quad \text{и} \quad P_x = \text{const.} \quad \text{Аналогично доказывается, что}$$

$$P_y = \text{const.}, \quad P_z = \text{const.}$$

Если мы присоединим сюда ещё закон сохранения энергии (59,5), то получим семь законов сохранения или первых интегралов уравнений движения.

Скобки Пуассона можно определить не только для пары функций  $H$  и  $F$ , но и для любой пары функций координат и импульсов  $f$  и  $g$ . В этом случае определение таково:

$$(f, g) = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (59,7)$$

Пусть  $f = p$  и  $g = q$ ; тогда, очевидно,

$$(p, q) = \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} - \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} = 1; \quad (59,8)$$

при  $f = q$  и  $g = p$

$$(q, p) = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} - \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} = 0. \quad (59,9)$$

Точно так же и  $(p, p) = 0$ . Тот факт, что для пары канонически сопряжённых координат и импульсов скобки Пуассона

равны 1, можно рассматривать как определение канонически сопряжённых величин: две величины  $p_k$  и  $q_k$  мы будем называть канонически сопряжёнными, если

$$(q_k, q_k) = 0, \quad (p_k, p_k) = 0, \quad (p_k, q_k) = 1.$$

### § 60. Движение в электромагнитном поле

В предшествующих параграфах этой главы мы интересовались исключительно случаями, когда движение происходит в потенциальном поле, т. е. в поле, в котором сила, действующая на частицу, может быть представлена как градиент некоторой скалярной функции  $\varphi$ . Примером такого поля является постоянное электростатическое поле. Работа при перемещении заряженной частицы в таком поле не зависит от формы пути, а зависит только от положения начальной и конечной точек.

Важным случаем движения является движение под действием электромагнитного поля. Сила, действующая на заряженную частицу в таком поле, как известно, выражается формулой Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathcal{H}].$$

Второй член этой формулы выражает силу, действующую со стороны магнитного поля. Как уже было указано (стр. 153), сила

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathcal{H}]$$

работы не совершает, так как она направлена перпендикулярно к скорости. Важным свойством магнитного поля является то, что это поле не имеет источников. Это обстоятельство выражается условием

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0.$$

Вследствие этого условия напряжённость магнитного поля  $\mathcal{H}$  может быть представлена как вихрь некоторого вектора  $\mathbf{A}$ , называемого векторным потенциалом

$$\mathcal{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

[как известно из векторного анализа, для любого вектора  $\mathbf{a}$  имеет место тождество:  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$ ; поэтому  $\operatorname{div} \mathcal{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ , т. е. указанное условие выполняется].

Наиболее общим является случай переменного во времени электромагнитного поля. Для вычисления такого поля в электродинамике вводятся так называемые электродинамические потен-



циалы — скалярный  $\varphi$  и векторный  $\mathbf{A}^*$ ), и напряжённости полей — электрического  $\mathfrak{E}$  и магнитного  $\mathfrak{H}$  — вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathfrak{H} &= \text{rot } \mathbf{A}, \end{aligned} \right\} \quad (60,1)$$

или в составляющих по осям координат

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}, & \mathcal{H}_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ \mathcal{E}_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t}, & \mathcal{H}_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ \mathcal{E}_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}, & \mathcal{H}_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (60,2)$$

Следует заметить, что вектор-потенциал  $\mathbf{A}$  не является однозначно определённым. Так как для любой скалярной функции  $f$  имеет место соотношение  $\text{rot grad } f = 0$  (см. учебники векторного анализа), то к  $\mathbf{A}$  можно прибавить  $\text{grad } f$ , при этом по второй из формул (60,1) \*\*)

$$\text{rot}(\mathbf{A} + \text{grad } f) = \text{rot } \mathbf{A} = \mathfrak{H}.$$

Этим свойством вектора-потенциала нам придётся воспользоваться в дальнейшем (см. т. II, § 195).

Ньютоновы уравнения движения частицы с массой  $m$  и положительным зарядом  $e$  в электромагнитном поле таковы:

$$m\ddot{x} = e\mathcal{E}_x + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathfrak{H}]_x \equiv e\mathcal{E}_x + \frac{e}{c} (\dot{y}\mathcal{H}_z - \dot{z}\mathcal{H}_y), \quad (60,3)$$

и ещё два аналогичных уравнения для осей  $y$  и  $z$ . Покажем

\*) См., например, И. Е. Тамм, Основы теории электричества, § 46, Гостехиздат, 1946; Я. И. Френкель, Курс теоретической механики, стр. 212, Гостехиздат, 1940.

\*\*) Если скаляр  $f$  зависит от времени, то при замене векторного потенциала  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f$  напряжённость поля  $\mathfrak{E}$ , как следует из первой формулы (60,2), также меняется. Напряжённость  $\mathfrak{E}$  остаётся неизменной лишь в том случае, если одновременно с заменой  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}'$  скалярный потенциал  $\varphi$  заменяется на  $\varphi'$  по формуле

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{df}{dt}$$

[в этом легко убедиться, подставляя в первую формулу (60,2)  $\varphi'$  вместо  $\varphi$  и  $\mathbf{A}'$  вместо  $\mathbf{A}$ ]. Неизменность поля по отношению к преобразованию  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{A}'$  и  $\varphi$  на  $\varphi'$  называется калибровочной или градиентной инвариантностью; см. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, § 96, Гостехиздат, 1946.

теперь, что эти уравнения могут быть получены из функции Лагранжа, выбранной следующим образом:

$$L = T - e\varphi + \frac{e}{c} (\mathbf{v}\mathbf{A}), \quad (60,4)$$

или в раскрытом виде в декартовых координатах

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + \frac{e}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \quad (60,5)$$

Для доказательства мы прежде всего найдём обобщённые импульсы, соответствующие координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . По определению  $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$  и т. д., что даёт, если воспользоваться функцией  $L$  (60,5),

$$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x, \quad p_y = m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y, \quad p_z = m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z \quad (60,6)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (60,7)$$

Мы видим, что обобщённые импульсы  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  не равны просто составляющим количества движения  $m\dot{x}$  и т. д., но содержат ещё добавочные слагаемые  $\frac{e}{c} A_x$  и т. д. Обобщённые импульсы (60,6) называют иногда кинетическими. Количество движения частицы  $m\mathbf{v}$  выражается через кинетический импульс формулой, получаемой из (60,7),

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (60,8)$$

откуда непосредственно следует

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{m} \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right), \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right), \\ \dot{z} &= \frac{1}{m} \left( p_z - \frac{e}{c} A_z \right). \end{aligned} \right\} \quad (60,9)$$

Напишем теперь лагранжевы уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Полагая  $q_1 = x$  и заметив, что  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x$ , получим

$$\frac{dp_x}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (60,10)$$

Для вычисления производной  $p_x$  воспользуемся первой из формул (60,6)

$$\frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c} \frac{dA_x}{dt}.$$

Важно иметь в виду, что при вычислении производной  $\frac{dA_x}{dt}$  следует брать *полную* производную или производную вдоль траектории движущейся частицы \*):

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Принимая это во внимание, имеем

$$\frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \right). \quad (60,11)$$

Далее, продифференцировав (60,5) по  $x$ , находим

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{c} \left( \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right). \quad (60,12)$$

Подставляя (60,11) и (60,12) в (60,10), получаем

$$m\ddot{x} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c} \left\{ \dot{y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right\}.$$

Но, принимая во внимание (60,2), очевидно, имеем

$$\begin{aligned} -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} &= e\mathcal{E}_x, \\ \dot{y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) &= \\ &= \dot{y} \operatorname{rot}_z \mathbf{A} - \dot{z} \operatorname{rot}_y \mathbf{A} = \dot{y} \mathcal{H}_x - \dot{z} \mathcal{H}_y = [\mathbf{v} \mathcal{H}]_x. \end{aligned}$$

Итак, мы получаем

$$m\ddot{x} = e\mathcal{E}_x + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathcal{H}]_x.$$

Но это и есть уравнение (60,3).

Функция Гамильтона согласно общему определению есть

$$H = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y + \dot{z} p_z - L. \quad (60,13)$$

Если мы сюда подставим вместо  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  выражения кине-

\*) Полная (или субстанциальная) производная по  $t$  характеризует изменение  $\mathbf{A}$  для *данной частицы*, тогда как частная (или локальная) производная характеризует изменение  $\mathbf{A}$  в данном месте. По поводу различия этих производных см. Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, стр. 152 и след., ГОНТИ, 1939.

*тически* импульсов (60,6) и функцию Лагранжа (60,4), то получим

$$H = \dot{x} \left( m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x \right) + \dot{y} \left( m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y \right) + \dot{z} \left( m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z \right) - \\ - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi - \frac{e}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z).$$

Выполнив простые алгебраические преобразования и приведения, мы увидим, что члены, содержащие составляющие вектора-потенциала, сокращаются и результат таков:

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + e\varphi,$$

т. е.  $H$  попрежнему является суммой кинетической и потенциальной энергий, а какие-либо члены, соответствующие магнитному полю, отсутствуют. Этого и следовало ожидать, так как сила Лоренца никакой работы не совершает (см. § 42).

Найдём теперь явное выражение функции Гамильтона через координаты и соответствующие им обобщённые импульсы. Для этого в (60,13), а также в выражении функции Лагранжа (60,5) следует заменить  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  их выражениями через  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  по формулам (60,9). Преобразуем сначала функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + \frac{e}{c} (\mathbf{v}\mathbf{A}) = \\ = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - e\varphi + \frac{1}{m} \frac{e}{c} \mathbf{A} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right),$$

где под  $\mathbf{p}$  разумеется кинетический импульс. Функцию Гамильтона напомним для краткости также в векторной форме

$$H = \frac{1}{m} \mathbf{p} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi - \frac{1}{m} \frac{e}{c} \mathbf{A} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right).$$

Легко убедиться в том, что первый и последний члены вместе дают  $\frac{1}{m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2$ . В самом деле, например,

$$p_x \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right) - \frac{e}{c} A_x \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right) = \\ = p_x^2 - 2 \frac{e}{c} p_x A_x + \frac{e^2}{c^2} A_x^2 = \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2.$$

Поэтому мы получаем после приведения

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\varphi = \\ = \frac{1}{2m} \left[ \left( p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \left( p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 + \left( p_z - \frac{e}{c} A_z \right)^2 \right] + e\varphi. \quad (60,14)$$

Это и есть искомая функция Гамильтона.

Сравнивая (60,14) с выражением функции Гамильтона для случая электростатического поля

$$H = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + e\varphi, \quad (60,15)$$

где через  $P_x, P_y, P_z$  обозначены составляющие количества движения ( $P_x = mx$  и т. д.), мы видим, что переход к случаю *электромагнитного* поля осуществляется при помощи весьма простого приёма: надо в (60,15) заменить составляющие обыкновенного импульса  $P_x, P_y, P_z$  соответствующими составляющими кинетического импульса [см. (60,8)]

$$P_x = p_x - \frac{e}{c} A_x \text{ и т. д.}$$

### § 61. Механика быстродвижущихся частиц

В тех случаях, когда скорость частицы сравнима со скоростью света в пустоте, уравнения механики Ньютона становятся неточными, и следует пользоваться законами теории относительности. Как уже было указано в § 42, основной закон классической механики

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (42,2)$$

сохраняет силу и здесь, но в выражении количества движения

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (61,1)$$

необходимо учитывать зависимость массы от скорости согласно формуле \*)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (61,2)$$

Из основного закона движения (42,2) непосредственно следует закон сохранения энергии (см. § 42). Сначала, так же как в § 42, получаем

$$dT = \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (42,6)$$

— приращение кинетической энергии равно работе действующей силы. Вычислим теперь правую часть (42,6), принимая во внимание зависимость массы от скорости. Согласно (42,2) сила есть производная количества движения по времени, но

\*) Вывод см. приложение II в конце книги.

эта производная в случае больших скоростей *не равна* просто  $m\mathbf{v}$ , как в § 42, но

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt}.$$

Подставляя это в (42,6), находим

$$\begin{aligned} dT &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} + \frac{dm}{dt} \mathbf{v} d\mathbf{r} = m d\mathbf{v} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + dm \mathbf{v} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \\ &= m d\mathbf{v}\mathbf{v} + dm\mathbf{v}\mathbf{v} = mv dv + v^2 dm. \end{aligned} \quad (61,3)$$

Из (61,2) находим

$$dm = \frac{m_0 \frac{v}{c^2} dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}; \quad (61,4)$$

подставляя (61,2) и (61,4) в (61,3), получаем

$$dT = \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_0 \frac{v^3}{c^2} dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 v dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (61,5)$$

Из сравнения (61,5) с (61,4) находим

$$dT = c^2 dm. \quad (61,6)$$

Мы видим, таким образом, что приращение кинетической энергии, выраженное в эргах, равно приращению массы, выраженному в граммах, умноженному на квадрат скорости света.

С другой стороны, из (42,6) следует

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{r}$$

и в случае, когда сила  $\mathbf{F}$  имеет потенциал  $U$ , так же как в § 42, получается

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}. \quad (42,10)$$

Но из (61,5) находим

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

(в справедливости последнего можно убедиться непосредственной проверкой). Формула (42,10) теперь даёт

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U \right) = 0,$$

или, принимая во внимание, что  $\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$  есть масса  $m$  частицы, движущейся со скоростью  $v$ ,

$$\frac{d}{dt}(mc^2 + U) = 0,$$

откуда

$$mc^2 + U = \text{const.} \quad (61,7)$$

Это соотношение и выражает закон сохранения энергии. Из него видно, что  $mc^2$  играет роль кинетической энергии. Если мы, однако, разложим  $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  в ряд по формуле бинома, то получим

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right).$$

В так называемом «нерелятивистском приближении», т. е. при  $v \ll c$ , можно пренебречь членами разложения, начиная с третьего, и мы находим

$$mc^2 \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2. \quad (61,7')$$

Второй член справа есть обычное выражение кинетической энергии ньютоновой механики. Если скорость частицы возрастает от 0 до  $v$ , то (в случае  $v \ll c$ ) частица приобретает кинетическую энергию

$$mc^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m v^2.$$

Однако *полная энергия* [входящая в выражение закона сохранения (61,7)] и в этом случае содержит постоянный член  $m_0 c^2$ , которому соответствует огромная энергия (так как  $c^2 = 9 \cdot 10^{20}$ ), по сравнению с которой обычная кинетическая энергия — ничтожно малая величина.

Соотношение между массой [и энергией, вытекающее из формулы (61,6),

$$E = mc^2$$

играет в современной атомной физике выдающуюся роль, как мы увидим впоследствии, особенно в главах, посвящённых атомному ядру.

Умножая векторное уравнение движения (42,2) векторно слева на  $\mathbf{r}$ , получаем

$$[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}] = [\mathbf{r}\mathbf{F}]. \quad (61,8)$$

Но так как

$$[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{p}]$$

(см. § 48, стр. 168), то (61,8) можно написать в виде

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}m\mathbf{v}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}\mathbf{F}]. \quad (61,9)$$

Для центрального движения момент силы  $[\mathbf{r}\mathbf{F}]$  относительно точки  $O$  равен нулю, а векторное произведение  $[\mathbf{r}\mathbf{p}]$  есть момент количества движения  $L$  относительно той же точки. Таким образом, (61,9) даёт

$$L = \text{const.}, \quad (61,10)$$

т. е. момент количества движения сохраняется и в случае релятивистского движения. Так как, однако, в данном случае зависимостью массы от скорости пренебрегать нельзя, то при вычислении производной по времени в (61,9)  $m$  нельзя считать постоянной. Поэтому здесь в отличие от случая медленных движений (см. § 48) из уравнения

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}m\mathbf{v}] = 0$$

не следует постоянства секториальной скорости.

Найдём ещё необходимое нам для дальнейшего соотношение между энергией и импульсом, имеющее место для релятивистских движений. Так как

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (61,11)$$

где  $\beta = \frac{v}{c}$ , то

$$\begin{aligned} p^2 &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m_0^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2v^2}{1-\beta^2} = \\ &= m_0^2c^2 \cdot \frac{v^2/c^2}{1-\beta^2} = m_0^2c^2 \frac{\beta^2}{1-\beta^2}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-\beta^2} - 1,$$

получим

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{m_0^2c^2}{1-\beta^2} - m_0^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2,$$

или

$$E^2 = c^2p^2 + m_0^2c^4 = c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m_0^2c^4. \quad (61,12)$$

Это и есть искомое соотношение.



Из (61,11) находим также

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v}{c^2} = E \cdot \frac{v}{c^2} \quad (61,13)$$

Все найденные соотношения могут быть получены также из релятивистской функции Лагранжа, в качестве которой следует выбрать

$$L = T^* - U, \quad (61,14)$$

где

$$T^* = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1-\beta^2}).$$

Очевидно, что  $T^*$  отличается от кинетической энергии

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Но для малых скоростей  $\frac{v}{c} \ll 1$  находим

$$T^* = m_0 c^2 \left( 1 - 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right) = \frac{1}{2} m v^2.$$

Из функции Лагранжа (61,14) по определению обобщённых импульсов находим

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{\partial T^*}{\partial v_x} = \frac{\partial T^*}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial v_x} = m_0 c^2 \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial v_x}. \quad (61,15)$$

Принимая во внимание, что

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2},$$

находим

$$\beta \frac{\partial \beta}{\partial v_x} = \frac{v_x}{c^2}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v_x} = \frac{v_x}{\beta c^2}.$$

Подставляя в (61,15), получаем

$$p_x = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v_x}{c^2} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

таким же образом находим

$$p_y = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v_y}{c^2} = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$p_z = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v_z}{c^2} = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Те же формулы, однако, могут быть написаны в виде

$$p_x = E \frac{v_x}{c^2}, \quad p_y = E \frac{v_y}{c^2}, \quad p_z = E \frac{v_z}{c^2}.$$

Возводя в квадрат и складывая, получаем

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = E^2 \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^4} \quad (61,16)$$

или

$$p^2 = E^2 \frac{v^2}{c^4}, \quad (61,17)$$

откуда

$$p = E \frac{v}{c^2}$$

(знак минус в левой части отбрасываем, так как отрицательная полная энергия в классической физике не имеет смысла; см., однако, т. II, § 202).

Формулу (61,17) можно написать также в виде

$$p^2 = E^2 \frac{\beta^2}{c^2}$$

или

$$c^2 p^2 = m_0^2 c^4 \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = m_0^2 c^4 \left( \frac{1}{1-\beta^2} - 1 \right) = E^2 - m_0^2 c^4,$$

откуда

$$E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2.$$

Функция Гамильтона по общему определению (56,6) есть

$$\begin{aligned} H &= xp_x + yp_y + zp_z - L = \\ &= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 (1 - \sqrt{1-\beta^2}) + U = \\ &= m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) + U = T + U, \end{aligned}$$

т. е. в релятивистской механике, как и в ньютоновой,

$$H = T + U.$$

## В. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

### • § 62. Элементарные центры испускания света

Проблема излучения света занимает центральное место в теории строения атома, так как свет доставляет нам наибольшее количество сведений о внутреннем устройстве атома. Рассмотрению этой проблемы, которая будет занимать нас почти во всей книге, мы предположим краткий обзор некоторых вопросов классической теории электромагнитного излучения, знакомство с которой необходимо для понимания современных представлений.

После открытия электронов стало ясно, что именно их движениями обусловлено испускание света. С особенной убедитель-

ностью это вытекало из открытого в 1896 г. Зееманом влияния *магнитного* поля на испускание света (эффект Зеемана). Теория этого явления, разработанная Лоренцом, позволила вычислить величину  $e/m$  для элементарных центров излучения, и оказалось, что она удовлетворительно совпадает с величиной удельного заряда для свободных электронов.

Мы должны рассмотреть, таким образом, механизм испускания света согласно классической физике. Оказалось, что, несмотря на общую несостоятельность статической модели атома, большой круг оптических явлений можно удовлетворительно объяснить, рассматривая электроны как микроскопические *вибраторы*, посылающие электромагнитные волны. Простейшей моделью элементарного центра, пригодной в некоторой степени для объяснения ряда фактов испускания света, может служить, таким образом, линейный осциллятор, с механическими свойствами которого мы познакомимся в § 44.

### § 63. Электромагнитное излучение линейного осциллятора

Представим себе, что положительный заряд связан с настолько большой массой, что его можно считать неподвижным, а отрицательный заряд, по абсолютной величине равный положительному, совершает колебания относительно этого неподвижного положительного заряда; такая система и будет линейным осциллятором. С электрической точки зрения эта система является диполем. Электрические свойства диполя характеризуются величиной, называемой *дипольным моментом*. Дипольный момент это — вектор, равный

$$\mathbf{p} = e\mathbf{r}, \quad (63,1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному. Так как дипольный момент не зависит от выбора начала координат \*), то удобнее всего поместить положительный заряд в начало координат; тогда составляющими  $\mathbf{p}$  будут

$$p_x = ex, \quad p_y = ey, \quad p_z = ez. \quad (63,2)$$

Вычисление электромагнитного поля диполя, совершающего колебания, можно выполнить при помощи уравнений Максвелла.

Не повторяя здесь довольно длинных и несколько утомительных вычислений, приведём их результат \*\*). Электрическое

\*) См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, стр. 191, Гостехиздат, 1916.

\*\*) См., например, И. Е. Тамм, Основы теории электричества, § 99, Гостехиздат, 1916, или Я. И. Френкель, Электродинамика, т. I, стр. 151, ОНТИ, 1934.

и магнитное поля колеблющегося диполя на достаточно больших расстояниях от него (так называемая волновая зона) характеризуются напряжённостями  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ , равными по абсолютной величине и взаимно перпендикулярными по направлению. Для случая скоростей, малых по сравнению со скоростью света ( $v \ll c$ ), абсолютные значения напряжённостей  $|\mathcal{E}|$  и  $|\mathcal{H}|$  в точке  $M$  (рис. 104), отстоящей от диполя на расстоянии  $R$ , выражаются формулой

$$|\mathcal{E}| = |\mathcal{H}| = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{R}{c} \right)}{c^2 R} \sin \vartheta^* \quad (63,3)$$

Здесь  $c$  — скорость света в пустоте,  $\vartheta$  — угол между прямой, вдоль которой совершаются колебания, и направлением в точку  $M$ ; символ  $\ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{R}{c} \right)$  имеет следующий смысл: это вторая производная дипольного момента, взятая, однако, не для времени  $t$ , а

для предшествующего момента  $t - \frac{R}{c}$ . Очевидно, что  $\frac{R}{c}$  есть время, которое требуется для того, чтобы процесс, распространяющийся со скоростью  $c$ , дошёл от  $O$  до точки наблюдения  $M$ . Таким образом, появление в формуле (63,3) заштрихованного значения  $\ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{R}{c} \right)$  указывает на конечную скорость распространения электромагнитного поля: колеблющийся электрический диполь посылает электромагнитные волны, которые перемещаются со скоростью  $c$ .

Принимая во внимание, что  $\ddot{\mathbf{p}} = e\ddot{\mathbf{x}}$ , мы видим, что при прочих равных условиях  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  на больших расстояниях от  $O$  зависят от ускорения электрона  $\ddot{\mathbf{x}}$ .

Направления  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  определяются следующим образом: представим себе сферу, описанную из  $O$  радиусом  $R$ . Примем за полярную ось направление прямой, вдоль которой совершаются колебания диполя, и наметим на сфере меридианы и параллели. Тогда вектор  $\mathcal{E}$  будет направлен по касательной к меридиану, проходящему через  $M$ , а вектор  $\mathcal{H}$  — по касательной к параллели, проходящей через ту же точку и при этом так, как это показано на рис. 104.

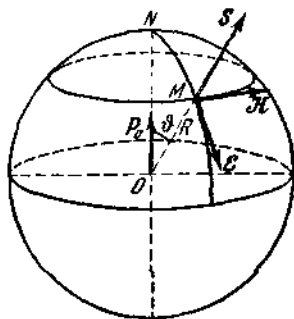


Рис. 104. Излучение диполя.

\*) Скобки в формуле (63,3) применяются только для удобства набора: они указывают на то, что  $\dot{\mathbf{p}}$  есть функция  $t - \frac{R}{c}$ .

Плотность энергии электромагнитного поля равна

$$\rho = \frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)$$

или, если принять во внимание, что в данном случае  $\mathcal{E} = \mathcal{H}$ ,

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \mathcal{E}^2 \frac{\partial \rho z}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}} \quad (63,4)$$

Так как поле колеблющегося диполя распространяется со скоростью  $c$ , то через каждый квадратный сантиметр в направлении нормали  $R$  (рис. 104) ежесекундно проходит количество энергии  $S$ , равное

$$S = \rho c = c \frac{\mathcal{E}^2}{4\pi \text{см}^3 \cdot \text{сек}} \quad (63,5)$$

Величина  $S$  есть, очевидно, не что иное, как численное значение потока энергии, проходящего через данную точку. Она, конечно, может быть вычислена так же, как численное значение вектора Умова — Пойнтинга  $\mathbf{S}$  в данной точке

$$S = |\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |[\mathcal{E} \mathcal{H}]| = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E} \mathcal{H} \sin(\mathcal{E} \mathcal{H}).$$

В волновой зоне  $\mathcal{E} = \mathcal{H}$  и  $\mathcal{E} \perp \mathcal{H}$ , что даёт сразу

$$S = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}^2,$$

т. е. формулу (63,5).

Подставляя сюда значение  $\mathcal{E}$  из (63,3), находим

$$S = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \vartheta = \frac{e^2 \ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \vartheta \quad (63,6)$$

(значения  $\ddot{p}$  или  $\ddot{r}$  относятся к моменту  $t - \frac{R}{c}$ !).

Из этой формулы видно, что интенсивность излучения прямо пропорциональна квадрату ускорения и обратно пропорциональна квадрату расстояния, как и следовало ожидать, потому что полный поток энергии через сферу вокруг  $O$  остаётся постоянным, а поверхность сферы растёт пропорционально квадрату радиуса. Далее, присутствие в формуле (63,6)  $\sin^2 \vartheta$  влечёт за собой неравномерность в распределении интенсивности по различным направлениям: в направлении прямой, вдоль которой происходят колебания ( $\vartheta = 0$  и  $\pi$ ), она равна нулю, а максимальной величины достигает в направлении, перпендикулярном к этой прямой ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ). На рис. 105 при-

ведена полярная диаграмма распределения интенсивности излучения по углам. Опыт подтверждает такое распределение интенсивности. Одним из наиболее наглядных относящихся сюда примеров является возникновение рентгеновских лучей при торможении (отрицательном ускорении) электронов на антикатоде. На рис. 106 приведены результаты экспериментального исследования зависимости интенсивности тормозного рентгеновского излучения от угла  $\vartheta$  при различных скоростях электронов. Как видно, во всех случаях при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  интенсив-

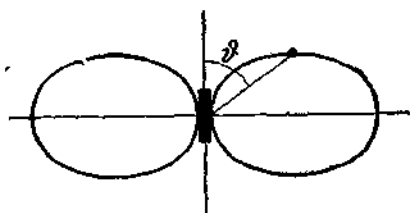


Рис. 105. Полярная диаграмма распределения интенсивности излучения диполя.

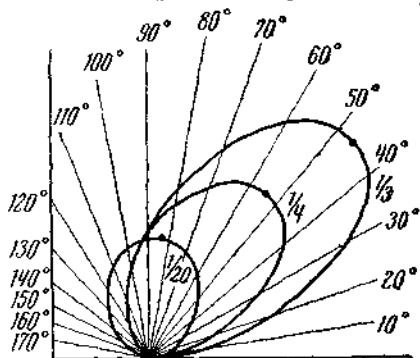


Рис. 106. Угловое распределение интенсивности тормозного рентгеновского излучения.

ность равна нулю; для электронов малых скоростей ( $\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{20}$ ) максимум интенсивности получается вблизи  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ; для больших скоростей ( $\beta = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ) направление максимума смещено в сторону движения электронов. Это несоответствие с формулой (63,6) объясняется тем, что формула эта выведена для случая малых скоростей без учёта релятивистских эффектов. Для больших скоростей Зоммерфельд получил формулу

$$S = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right),$$

хорошо согласующуюся с опытом при любых значениях  $\beta$ .

### § 64. Полное и среднее излучение осциллятора

Формула (63,6) даёт выражение для потока энергии, проходящего в данный момент через выбранную точку в направлении, характеризуемом углом  $\vartheta$ , или, иначе, мгновенную интенсивность электромагнитной волны в определённом направлении.

Если нужно вычислить полное количество энергии, излучаемой осциллятором в единицу времени, то достаточно найти величину интеграла

$$I = \int S d\sigma, \quad (64,1)$$

распространив интегрирование на поверхность сферы, описанной из  $O$  (рис. 104).

Принимая во внимание, что элемент поверхности в сферических полярных координатах равен

$$d\sigma = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

напишем интеграл (64,1) в явном виде, подставив вместо потока  $S$  его величину из (63,6):

$$\begin{aligned} I &= \iint \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \vartheta R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{\ddot{p}^2}{2c^3} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (64,2)$$

Для вычисления последнего интеграла введём новую переменную  $\xi = \cos \vartheta$  и примем во внимание, что пределы интегрирования по этой переменной будут  $+1$  и  $-1$ :

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) d\xi = \frac{4}{3}.$$

Возвращаясь к (64,2), получаем окончательно

$$I = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} = \frac{2e^2 \ddot{r}^2}{3c^3}. \quad (64,3)$$

Полученная формула даёт, очевидно, величину полной энергии в данный момент. Так как  $\ddot{r}$  периодически меняется со временем, то изменяется и полная энергия  $I$ . С практической точки зрения основной интерес представляет знание *средней*, а не мгновенной энергии, потому что вследствие высокой частоты колебаний света (для видимой части спектра  $\nu$  порядка  $10^{15}$  сек.<sup>-1</sup>) все приборы, в том числе и глаз, не успевают следовать за колебаниями и реагируют на среднюю энергию. Вычислим теперь эту *среднюю энергию* за достаточно большой

промежуток времени, например за 1 сек. Она равна среднему за один период

$$I = \frac{\overline{2\dot{p}^2}}{3c^3}. \quad (64,4)$$

Если дипольный момент изменяется по закону гармонических колебаний:  $p = p_0 \cos \omega t = p_0 \cos 2\pi\nu t$ , то

$$\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos \omega t = -4\pi^2\nu^2 p_0 \cos 2\pi\nu t. \quad (64,4')$$

Подставляя это значение  $\ddot{p}$  в (64,3), получаем

$$I = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2 \cos^2 2\pi\nu t.$$

Среднее значение  $I$  будет

$$\bar{I} = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 2\pi\nu t}$$

или, так как  $\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\cos^2 2\pi\nu t} = \frac{1}{2}$

$$\bar{I} = \frac{\omega^4}{3c^3} p_0^2 = \frac{16\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2. \quad (64,5)$$

Пусть теперь положительный заряд диполя покоится в начале координат, а отрицательный совершает колебания по оси  $x$ . Тогда  $p = ex$ ; среднее излучение за один период на основании (64,4) выразится в виде

$$\bar{I} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\dot{x}^2}. \quad (64,6')$$

Если колебания гармонические, то  $x = a \cos \omega t = a \cos 2\pi\nu t$ , и вместо (64,5) мы получаем

$$\bar{I} = \frac{\omega^4 e^2 a^2}{3c^3} = \frac{16\pi^4\nu^4 e^2 a^2}{3c^3}. \quad (64,6)$$

## § 65. Электромагнитный спектр негармонического осциллятора

Строго гармонические синусоидальные колебания являются математической абстракцией и в природе никогда не осуществляются. В случае механических колебаний квазиупругий закон силы имеет место только для малых отклонений. При больших отклонениях в выражении силы появляются члены с высшими степенями смещения, а в механическом спектре наряду с основной частотой — её обертоны. Рассмотрим теперь, каков спектр электромагнитной волны, возникающей при колебаниях, которые не являются гармоническими, но происходят



по какому-нибудь более сложному закону. Эти колебания мы пока ещё будем считать строго периодическими в математическом смысле.

Среднюю энергию осциллятора, колеблющегося по негармоническому закону, мы будем вычислять по формуле (64,6'):

$$\bar{I} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\dot{x}^2}. \quad (65,1)$$

Поскольку смещение  $x$  представляет собою периодическую функцию времени, мы можем разложить её в ряд Фурье

$$x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i s \omega_0 t}. \quad (65,2)$$

Вычислим теперь вторую производную от  $x$ , произведём усреднение по времени и подставим затем результат в (65,1). Вторая производная по  $t$  будет

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -\{A_1 \omega_0^2 e^{i \omega_0 t} + A_2 (2\omega_0)^2 e^{i 2\omega_0 t} + \dots \\ & \dots + A_{-1} \omega_0^2 e^{-i \omega_0 t} + A_{-2} (2\omega_0)^2 e^{-i 2\omega_0 t} + \dots\}. \end{aligned} \quad (65,3)$$

Для вычисления среднего за большой промежуток времени достаточно найти среднее за один период  $T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Среднее квадрата  $\ddot{x}^2$  будет поэтому

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{x}^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \ddot{x}^2 dt. \quad (65,4)$$

Подставим сюда  $\ddot{x}^2$ , которое найдём путём возведения в квадрат (65,3), и будем интегрировать почленно. При этом нам придётся находить интегралы вида

$$A_k A_l \int_0^{2\pi/\omega_0} e^{i(k+l)\omega_0 t} dt.$$

Легко убедиться непосредственным вычислением, что все эти интегралы равны нулю, за исключением тех случаев, когда  $l = -k$ . Окончательно найдём

$$\overline{\ddot{x}^2} = 2 \{A_1 A_{-1} \omega_0^4 + A_2 A_{-2} (2\omega_0)^4 + \dots + A_k A_{-k} (k\omega_0)^4 + \dots\}, \quad (65,5)$$

или, так как по § 46  $2A_k A_{-k} = \frac{a_k^2}{2}$ ,

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{1}{2} \{a_1^2 \omega_0^4 + a_2^2 (2\omega_0)^4 + \dots + a_k^2 (k\omega_0)^4 + \dots\}.$$

Подставляя это в формулу (65,4) для среднего излучения, будем иметь

$$\bar{I} = \frac{e^2 a_1^2}{3c^3} \omega_0^4 + \frac{e^2 a_2^2}{3c^3} (2\omega_0)^4 + \frac{e^2 a_3^2}{3c^3} (3\omega_0)^4 + \dots \quad (65,6)$$

или, переходя от угловых частот к линейным  $\omega = 2\pi\nu$ ,

$$\bar{I} = \frac{16\pi^4 \nu_0^4}{3c^3} e^2 a_1^2 + \frac{16\pi^4 (2\nu_0)^4}{3c^3} e^2 a_2^2 + \frac{16\pi^4 (3\nu_0)^4}{3c^3} e^2 a_3^2 + \dots \quad (65,6')$$

Сравнивая этот результат с (64,6), мы видим, что среднее излучение осциллятора, совершающего периодическое, но негармоническое движение, состоит из суммы членов, каждый из которых представляет собою среднее излучения гармонического осциллятора, причём частоты этих осцилляторов образуют ряд  $\nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots$ . Это означает, что *электромагнитный спектр негармонического осциллятора содержит те же частоты, что и его механический спектр.*

Характерная особенность этого спектра состоит в том, что в него входят основная частота  $\nu_0$  и её *гармонические обертоны*, т. е. если изобразить спектр в шкале частот, получится ряд *равноотстоящих линий*. Оказывается, что именно такой спектр дают электромагнитные волны, излучаемые антенной радиотелеграфа; инфракрасные колебания ионов в молекулах дают спектр, составленный из линий, приблизительно подчиняющихся этому закону, но немного сближающихся по мере увеличения порядка обертона. Наконец, спектры, обусловленные движениями электронов (видимые и ультрафиолетовые), уже совершенно не следуют этому закону: в них линии довольно быстро сближаются по мере перехода ко всё более высоким частотам вплоть до полного слияния (см. гл. VIII). Как мы увидим в дальнейшем, линии в видимых и ультрафиолетовых спектрах подчиняются совершенно другим законам, объяснение которых могло быть дано только на основе теории квантов.

### § 66. Затухание колебаний

До сих пор мы молчаливо предполагали, что энергия осциллятора остаётся постоянной, т. е. что осциллятор неограниченно долгое время испускает незатухающие электромагнитные волны. Такое предположение, строго говоря, не отвечает действительности, так как при свободных колебаниях осциллятора электромагнитная волна уносит энергию. Ввиду этого запас энергии осциллятора постепенно убывает, и колебания затухают.

Найдём прежде всего закон убывания энергии со временем. Различные экспериментальные данные указывают на то, что

затухание излучающих атомов мало. Например, изучение интерференции света при больших разностях хода привело к выводу, что длина ряда волн, испускаемых атомом без затухания, соответствует более чем 100 миллионам длин волн. Принимая во внимание это обстоятельство, мы можем считать, что колебания электрона мало отличаются от гармонических. Но для случая гармонических колебаний, как мы знаем, средняя энергия, уносимая электромагнитной волной в единицу времени, равна

$$\bar{I} = \frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}. \quad (64,6)$$

Убыль энергии самого осциллятора за единицу времени будет равна как раз этой величине  $I$ , т. е.

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}$$

или

$$dE = -\frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3} dt. \quad (66,1)$$

Полная энергия гармонического осциллятора равна

$$E = \frac{ma_0^2 \omega^2}{2}. \quad (44,14)$$

Разделив (66,1) на (44,14), получаем

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3} dt. \quad (66,2)$$

Введём обозначение

$$\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3} = \gamma; \quad (66,3)$$

тогда (66,2) переписется в виде

$$\frac{dE}{E} = -\gamma dt.$$

Отсюда интегрированием находим

$$E = E_0 e^{-\gamma t}. \quad (66,4)$$

Мы видим, что энергия осциллятора должна убывать со временем по экспоненциальному закону.

Постоянная  $\gamma$ , введённая нами соотношением (66,3), имеет определённый физический смысл. Заметим прежде всего, что размерность этой постоянной есть [сек.<sup>-1</sup>]. В этом можно убедиться, замечая, что произведение  $\gamma t$ , стоящее в показателе (66,4), должно быть безразмерной величиной. Величина,

обратная  $\gamma$ , должна поэтому представлять собой некоторый промежуток времени. Обозначим его через  $\tau$ ; тогда

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{2\omega^2 e^2} = \frac{3mc^3}{8\pi^2 \nu^2 e^2} \quad (66,5)$$

Соотношение (66,4) можно теперь написать в виде

$$E = E_0 e^{-t/\tau}, \quad (66,4')$$

Отсюда видно, что при  $t = \tau$   $E = \frac{E_0}{e}$ , т. е. что  $\tau$  есть промежуток времени, в течение которого энергия осциллятора убывает в  $e = 2,718$  раза. Так как по (66,4') с возрастанием  $t$  энергия приближается к нулю асимптотически, то никакой определенной величины времени, в течение которого ещё продолжаться колебания, указать нельзя. В качестве условной меры этого времени удобно пользоваться величиной  $\tau$ , которая называется *временем релаксации*. Итак, постоянная затухания  $\gamma$  есть обратная величина времени релаксации.

Для того чтобы составить представление о порядке величины этого времени, вычислим его численное значение для испускания голубой линии водородного спектра (так называемая линия  $H\beta$ ), которой соответствует длина волны  $\lambda = 4861,33 \cdot 10^{-8}$  см. В этом случае

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4861,33 \cdot 10^{-8}} = 3,87 \cdot 10^{18} \text{ сек.}^{-1}.$$

Подставляя это значение  $\omega$ , а также значения универсальных констант  $e$ ,  $e/m$  и  $c$  в формулу (66,5), найдём

$$\tau \approx 10^{-7} \text{ сек.}$$

Это показывает, что *абсолютная* величина времени свечения очень мала, но *относительная* величина его, а именно отношение  $\tau$  к периоду колебаний, приблизительно равна  $6 \cdot 10^7$ , т. е. очень большой величине: электрон должен совершить 60 миллионов колебаний, прежде чем его энергия уменьшится в  $e$  раз.

Непосредственное экспериментальное определение величины времени релаксации было впервые осуществлено при помощи канальных лучей. Пучок светящихся водородных канальных лучей через отверстие в катоде выпускался в пространство, где поддерживался столь высокий вакуум, что атомы могли «высвечиваться» практически без соударений. По убыванию интенсивности вдоль светящегося пучка при известной скорости канальных частиц можно было определить  $\tau$ . Оказалось, что порядок величины этого времени совпадает с указанным выше ( $10^{-8}$  сек. для  $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-8}$  см).

### § 67. Лучистое трение

Мы установили, таким образом, что энергия диполя, совершающего колебания, убывает со временем по закону (66,4) или (66,4'). Если сила, под действием которой происходят колебания, — квазиупругая, то можно вычислить сумму потенциальной и кинетической энергий осциллятора. Эта сумма, однако, не будет постоянной ввиду наличия затухания. В механике мы встречаемся с аналогичным случаем: когда колебания механического осциллятора происходят в вязкой среде, то запас его механической энергии (кинетическая + потенциальная) с течением времени убывает. Поэтому в балансе энергии появляется дефицит: энергия расходуется необратимым образом и в конечном счёте превращается в тепло. Мы видели, однако, в § 42, что этот дефицит можно учесть, введя некоторую диссипативную силу  $R$  (т. е. силу, ведущую к рассеянию энергии) — силу трения. Соответственно, в правой части уравнения колебаний наряду с квазиупругой силой —  $f\dot{x}$  появляется ещё сила трения.

Аналогичным образом можно восстановить баланс энергии также и в случае затухающих *электромагнитных* колебаний осциллятора: мы можем себе представить, что эти колебания тормозятся диссипативной силой, которую целесообразно назвать «силой лучистого трения». Очевидно, что эта сила появляется в результате обратного воздействия поля излучения осциллятора на самый осциллятор.

Займёмся теперь установлением явного выражения для этой силы. В механике обычно принимается, что сила трения зависит от скорости, т. е. от первой производной  $\dot{x}$  (при не слишком больших скоростях сила трения  $R$  просто пропорциональна  $\dot{x}$ ). Конечно, у нас нет никаких оснований без предварительного исследования переносить эту зависимость и на силу *лучистого* трения. Для отыскания выражения этой силы проще всего поступить следующим образом. Вычислим среднее значение работы силы лучистого трения за промежуток времени, достаточно большой по сравнению с периодом колебаний. Работа силы  $R$  за промежуток времени  $dt$  равна  $R dx = R\dot{x} dt$ ; среднее значение работы за промежуток времени от 0 до  $t$  будет поэтому

$$\frac{1}{t} \int_0^t R\dot{x} dt.$$

Поскольку мы ввели силу лучистого трения для описания убыли энергии, очевидно, что среднее значение работы этой силы

должно быть равно среднему значению энергии, испущенной осциллятором за тот же промежуток времени. Последнее по формуле (64,6') будет

$$\frac{2e^2}{3c^3} \bar{\ddot{x}^2} = \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \ddot{x}^2 dt.$$

Итак, мы имеем

$$\frac{1}{t} \int_0^t R \dot{x} dt = -\frac{2e^2}{3c^3 t} \int_0^t \ddot{x}^2 dt. \quad (67,1)$$

Простыми преобразованиями и интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \ddot{x}^2 dt &= \frac{1}{t} \int_0^t \ddot{x} \dot{x} dt = \frac{1}{t} \int_0^t \ddot{x} dx = \\ &= \frac{1}{t} (\dot{x}\dot{x}) \Big|_0^t - \frac{1}{t} \int_0^t \dot{x} d\dot{x} = \frac{(\dot{x}\dot{x})_t - (\dot{x}\dot{x})_0}{t} - \frac{1}{t} \int_0^t \dot{x} \ddot{x} dt. \end{aligned}$$

Так как скорость  $\dot{x}$  и ускорение  $\ddot{x}$  меняются в конечных пределах, то, выбрав достаточно большой промежуток времени, мы можем первый член сделать сколь угодно малым. Поэтому уравнение (67,1) даёт

$$\frac{1}{t} \int_0^t R \dot{x} dt = \frac{2e^2}{3c^3 t} \int_0^t \dot{x} \ddot{x} dt.$$

Для того чтобы это равенство было удовлетворено, достаточно положить

$$R = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{x} \ddot{x}. \quad (67,2)$$

Это и есть интересующее нас выражение силы лучистого трения\*). Заметим, что мы здесь впервые встречаемся с силой, зависящей от *третьей* производной смещения по времени. В механике такие силы не известны.

\*) Очевидно, что это заключение имеет только достаточный, но не необходимый характер. Однако более строгий вывод, основанный на рассмотрении реакции поля, приводит к тому же выражению. Интересующихся этим вопросом и связанными с ним принципиальными проблемами электродинамики мы отсылаем к книге В. Гайтлера, Квантовая теория излучения, стр. 40 и след., Гостехиздат, 1949.

Поскольку мы теперь знаем выражение для силы лучистого трения, мы должны учесть эту силу при составлении уравнения колебаний электромагнитного осциллятора. Это уравнение в общем виде пишется так:

$$m\ddot{x} = -fx + R;$$

подставляя для  $R$  выражение (67,2), получаем уравнение колебаний с учётом лучистого трения

$$m\ddot{x} = -fx + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\dot{x}}. \quad (67,3)$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение третьего порядка. Отыскивая его решение в виде  $x = e^{i\omega t}$ , мы придём к характеристическому уравнению третьей степени. Однако мы можем воспользоваться методом последовательных приближений и рассуждать следующим образом. В нулевом приближении можно в уравнении (67,3) отбросить малый второй член в правой части. Мы вернёмся тогда к уравнению колебаний осциллятора без учёта трения

$$m\ddot{x} + fx = 0, \quad (67,4)$$

решение которого есть  $x = e^{i\omega_0 t}$ , где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{m}}$ . Это решение мы подставим в (67,3) и, замечая, что  $\ddot{\dot{x}} = -i\omega_0^3 e^{i\omega_0 t} = -\omega_0^2 \dot{x}$ , получим

$$m\ddot{x} = -fx - \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3} \dot{x}. \quad (67,5)$$

Полагая, как и раньше

$$\frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} = \gamma, \quad (66,3)$$

перепишем уравнение (67,5) в виде

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (67,6)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{f}{m}$ , причём  $\omega_0$  — частота незатухающих колебаний осциллятора.

Решение уравнения (67,6) ищем в виде

$$x = e^{int}.$$

Подставляя это решение в (67,6), получаем после сокращения на  $e^{int}$

$$-n^2 + i\gamma n + \omega_0^2 = 0.$$

Отсюда получаем для  $n$

$$n = i \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Обозначим

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \equiv \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2}. \quad (67,7)$$

Так как  $\gamma$  — малое число, а  $\omega_0$  — большое, то

$$\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} \ll 1 \quad (67,8)$$

и потому с достаточной точностью

$$\omega_f = \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0^2}\right). \quad (67,9)$$

$\omega_f$  есть частота *затухающих* колебаний. Очевидно, что  $\omega_f$  тем меньше отличается от  $\omega_0$ , чем меньше постоянная затухания  $\gamma$ . В случае оптических частот затухание настолько мало, что можно даже положить  $\omega_f \approx \omega_0$ . Поэтому в данном случае с достаточным приближением можно положить

$$n = i \frac{\gamma}{2} \pm \omega_0$$

и решение  $x = e^{nt}$  принимает вид

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\pm i\omega_0 t}.$$

Общее решение уравнения (67,3) поэтому таково:

$$x = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}). \quad (67,10)$$

Здесь в левой части стоит действительная величина (смещение  $x$ ); для того чтобы и правая часть была действительна, коэффициенты  $A$  и  $B$ , вообще говоря, комплексные, должны быть комплексно сопряжёнными:

$$B^* = A.$$

Если обозначить общий модуль  $A$  и  $B$  через  $\frac{a}{2}$ , а фазу через  $\delta$ , то

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\delta}, \quad B = \frac{1}{2} a e^{-i\delta}$$

и (67,10) даёт

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \{e^{i(\omega_0 t + \delta)} + e^{-i(\omega_0 t + \delta)}\} = a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t + \delta) = \\ &= a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(2\pi\nu_0 t + \delta). \end{aligned} \quad (67,11)$$

Эта формула описывает колебательное движение, при котором амплитуда убывает со временем по экспоненциальному



закону  $e^{-\frac{\pi t}{2}}$ . Очевидно, что этот закон соответствует закону убывания энергии

$$E = E_0 e^{-\pi t},$$

так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды.

### § 68. Интеграл Фурье и сплошной спектр

Затухающие колебания осциллятора представляют собой процесс, который мы уже не можем назвать периодическим, так как он не удовлетворяет основному условию периодичности — неограниченному повторению одних и тех же амплитуд через одинаковые промежутки времени. В самом деле, при

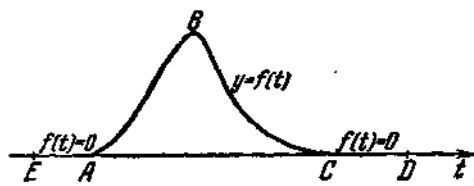


Рис. 107.

затухающих колебаниях одинаковые амплитуды вообще не встречаются и, кроме того, весь процесс начинается в определённый момент, а следовательно, простирается не от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а только от 0 до  $+\infty$ . Таким образом, затухающие колебания являются примером непериодического процесса.

Рассмотрим теперь важный вопрос о спектральном разложении непериодических процессов. Выше мы видели, что любую функцию, представляющую периодический процесс, можно разложить в ряд Фурье, т. е. представить как результат суперпозиции строго гармонических колебаний с частотами

$\nu_0 = \frac{1}{T}$ ,  $2\nu_0$ ,  $3\nu_0$ , ..., где  $T$  — основной период разложения. То, что математически выполняется при помощи ряда Фурье, на опыте может быть осуществлено при помощи соответствующего анализатора, например дифракционной решётки, если речь идёт о световых колебаниях. Итак, спектральное разложение периодического процесса, каким бы путём оно ни было выполнено, даёт *линейный спектр*.

Пусть теперь мы имеем некоторую функцию  $f(t)$ , которая на интервале  $AC$  (рис. 107) изображается кривой  $ABC$ , а на границах интервала, т. е. в точках  $A$  и  $C$ , обращается в нуль. Эта функция, очевидно, представляет непериодический процесс. Мы можем разложить её в интервале  $A...C$  в ряд Фурье, считая  $T=AC$ , и, взяв достаточное число членов этого ряда, получить правильный ход функции, *однако только в пределах интервала  $AC$* ; влево от  $A$  и вправо от  $C$  наш ряд даст перио-

дическое повторение кривой  $ABC$ . Теперь мы можем расширить интервал, например влево до  $E$  и вправо до  $D$ , приписав нашей функции значение нуль на участках  $AE$  и  $CD$ . В этом расширенном интервале можно вновь выполнить разложение Фурье, причём основным периодом разложения будет уже  $T = ED$ . Очевидно, что интервал разложения  $E \dots D$  можно расширять безгранично, отодвигая точки  $E$  и  $D$  в бесконечность. При этом основной период разложения  $T$  будет безгранично возрастать, а соответствующая основная частота  $\nu_0 = \frac{1}{T}$  безгранично убывать.

Вследствие этого аргументы последовательных членов ряда Фурье  $e^{\pm i2\pi s \nu_0 t}$  при увеличении  $s$  будут становиться всё ближе друг к другу, и можно показать, что при таком безграничном расширении основного интервала разложения ряд в конце концов перейдёт в интеграл, взятый от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Эти соображения станут ещё яснее, если мы их повторим на формулах. Итак, пусть дана непериодическая функция  $f(t)$ ; разложим её в конечном интервале от  $-T/2$  до  $+T/2$  в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi s \nu_0 t}, \quad \nu_0 = \frac{1}{T}. \quad (68,1)$$

По известной формуле для коэффициентов разложения

$$A_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-i2\pi s \nu_0 t} dt. \quad (68,2)$$

Заменив здесь временно обозначение  $t$  на  $\alpha$  и приняв во внимание, что основная частота  $\nu_0 = \frac{1}{T}$ , перепишем формулу (68,2) в виде

$$A_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha) e^{-i2\pi \frac{s}{T} \alpha} d\alpha. \quad (68,3)$$

Это выражение для  $A_s$  мы можем подставить в ряд (68,1), который при этом примет вид

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_s \left\{ \int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha) e^{-i\frac{2\pi s \alpha}{T}} d\alpha \right\} e^{i\frac{2\pi s t}{T}}. \quad (68,4)$$

Обозначим теперь  $\frac{s}{T}$  через  $\nu$ . Так как  $s$  — целое число, то частоты  $\frac{s}{T} = \nu$ , входящие в разложение (68,4), изменяются

при последовательном изменении  $s$  конечными ступенями

$$\Delta\nu = \frac{s+1}{T} - \frac{s}{T} = \frac{1}{T}.$$

Принимая это во внимание, ряд (68,4) можно представить в виде

$$f(t) = \sum \left\{ \int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha) e^{-i2\pi\nu\alpha} d\alpha \right\} e^{i2\pi\nu t \Delta\nu}. \quad (68,5)$$

Теперь мы произведём указанный переход к пределу, а именно, мы предположим, что интервал  $-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}$  расширяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тогда, как это строго доказывается в математических руководствах\*), сумма в правой части (68,5) обращается в интеграл

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-i2\pi\nu\alpha} d\alpha \right\} e^{i2\pi\nu t} d\nu.$$

Это можно записать в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad (68,6)$$

где

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-i2\pi\nu\alpha} d\alpha$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям, т. е. вновь заменяя  $\alpha$  через  $t$ ,

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt. \quad (68,7)$$

Это и есть формула, выражающая зависимость коэффициента разложения непериодической функции от частоты.

Формулы (68,6) и (68,7) позволяют производить спектральное разложение непериодических процессов, в частности затухающих колебаний.

С физической точки зрения между разложением периодической функции в ряд Фурье и разложением непериодической функции в интеграл Фурье имеется существенное различие.

\*) См. Курант—Гильберт, Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1933 и И. И. Привалов, Ряды Фурье, Госиздат, 1930.

Ряд Фурье состоит из членов, содержащих простые периодические функции с дискретно изменяющимися частотами  $\nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \dots$ ; в интеграле Фурье интегрирование производится по частотам, т. е. предполагается, что частоты изменяются непрерывно. В первом случае мы имеем дело с разложением

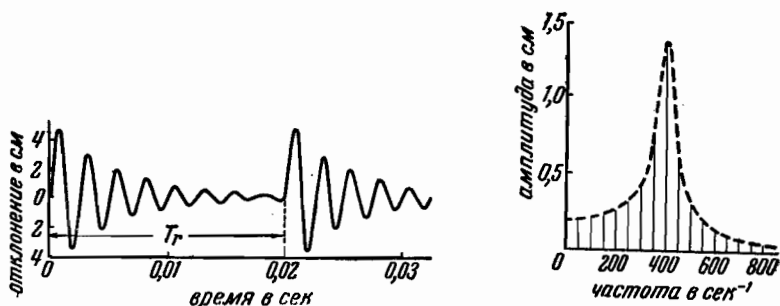


Рис. 108. Периодический процесс разлагается в линейный спектр.

в линейный спектр, во втором — в сплошной. Это различие очень хорошо иллюстрируется рис. 108 и 109, где слева представлены две кривые колебаний, а справа — их спектры (по оси абсцисс отложены частоты в  $\text{сек}^{-1}$ , а по оси ординат — амплитуды, т. е. коэффициенты Фурье). Верхняя кривая изображает

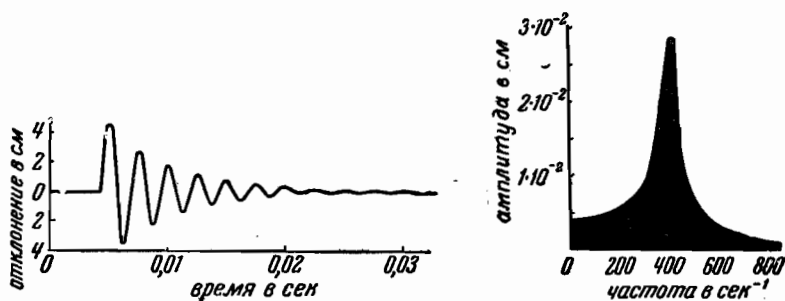


Рис. 109. Непериодический процесс разлагается в сплошной спектр.

процесс не синусоидальный, но периодический; её спектр — линейный. Нижняя кривая представляет одно звено предыдущей кривой; это звено не является периодической кривой, так как мы здесь не имеем неограниченного повторения равных амплитуд через одинаковые промежутки времени. Справа показано, что при этом отдельные линии настолько сближаются, что разложение даёт сплошную полосу, охватывающую целый интервал частот — участок сплошного спектра.

### § 69. Естественная ширина спектральных линий

Затухающие колебания осциллятора

$$x = ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(2\pi\nu_0 t + \delta)$$

представляют собой на основании сказанного в предыдущих параграфах процесс не только негармонический, но и неперiodический.

Поэтому для математического разложения его в спектр следует воспользоваться не рядом, а интегралом Фурье. Отсюда следует, что спектр будет *сплошной*. Точнее говоря, вычисление показывает, что вследствие затухания колебаний спектральная линия *расширяется*; она охватывает участок сплошного спектра, ширина которого  $\Delta\nu$  определяется затуханием  $\gamma$ . Для того чтобы показать это, следует прежде всего задать функцию  $f(t)$  в интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Мы можем это сделать следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ ae^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (69,1)$$

Согласно сказанному в предыдущем параграфе спектральное разложение функции  $f(t)$  даётся формулой

$$f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad (69,2)$$

где амплитуда  $a(\nu)$  определяется формулой

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt. \quad (69,3)$$

Подставляя сюда  $f(t)$  из (69,1) и замечая, что  $f(t) = 0$  в интервале от  $-\infty$  до 0, получаем

$$a(\nu) = \int_0^{+\infty} ae^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t} dt = a \int_0^{\infty} e^{\left[ i2\pi(\nu_0 - \nu) - \frac{\gamma}{2} \right] t} dt.$$

Вычисление этого интеграла даёт

$$a(\nu) = \frac{a}{i2\pi(\nu_0 - \nu) - \frac{\gamma}{2}} \left[ \frac{e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t}}{e^{-\frac{\gamma}{2}t}} \right]_0^{\infty} = \frac{a}{\frac{\gamma}{2} - i2\pi(\nu_0 - \nu)}. \quad (69,4)$$

Для отыскания распределения интенсивности в спектре в зависимости от частоты следует вычислить квадрат модуля  $a(\nu)$ :

$$|a(\nu)|^2 = \frac{a}{\frac{\gamma}{2} - i2\pi(\nu_0 - \nu)} \cdot \frac{a}{\frac{\gamma}{2} + i2\pi(\nu_0 - \nu)} = \frac{a^2}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (69,5)$$

Если теперь воспользоваться формулой (64,4) и произвести усреднение для большого промежутка времени, то в результате получится  $I_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^4 e^2}{3c^3} |a(\nu)|^2$  [см. формулу (64,6)]; подставляя вместо  $|a(\nu)|^2$  выражение (69,5), получаем

$$\bar{I}_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^4 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{16\pi^4\nu_0^4 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2 \left(1 - \frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\gamma^2}{\nu_0^2}}. \quad (69,6)$$

Вводя обозначения  $\frac{\nu}{\nu_0} = x$ ,  $\frac{\gamma}{\nu_0} = \Gamma$ , перепишем формулу (69,6) в виде

$$\bar{I}_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^4 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2(1-x)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}. \quad (69,7)$$

Формулы (69,6) и (69,7) дают распределение интенсивности в зависимости от частоты, т. е. картину спектра затухающего осциллятора.

На рис. 110 представлен ход множителя

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2(1-x)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}.$$

Как видно, кривая имеет резкий максимум при  $x=1$  или  $\nu=\nu_0$ , т. е. для частоты собственных колебаний незатухающего осциллятора. Максимальное значение  $f(x)$  есть

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}\Gamma^2}.$$

Очевидно, что значение  $f(x)$ , равное половине максимального, получается при условии

$$2\pi(1-x) = \frac{1}{2}\Gamma$$

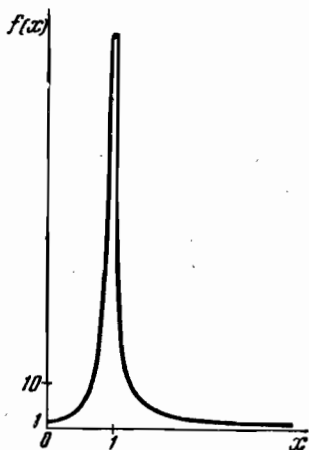


Рис. 110. Контур спектральной линии.

или, принимая во внимание, что  $x = \frac{\nu}{\nu_0}$  и  $\Gamma = \frac{\gamma}{\nu_0}$ , и обозначая  $\nu - \nu_0$  в этом случае через  $\Delta\nu_{1/2}$ ,

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\gamma}{4\pi}. \quad (69,8)$$

$\Delta\nu_{1/2}$  называется полушириной спектральной линии; как видно, она целиком определяется затуханием  $\gamma$ .

Полуширина  $\Delta\nu_{1/2}$  в реальных условиях очень мала. На рис. 110 представлен контур спектральной линии для  $\Gamma = \frac{1}{5}$ ; между тем для узких спектральных линий  $\Gamma$  — порядка  $10^{-3} - 10^{-4}$ , так что ширина линии, изображённая на рисунке, чрезмерно преувеличена.

Принимая во внимание связь между  $\gamma$  и временем релаксации  $\tau$  ( $\gamma = \frac{1}{\tau}$ ), мы можем переписать (69,8) в виде

$$\tau\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{4\pi}. \quad (69,9)$$

## § 70. Другие примеры спектрального разложения непериодических процессов

Рассмотрим ещё два примера спектрального разложения непериодических процессов.

а) Пусть колебание происходит в течение ограниченного промежутка времени  $\Delta t$ , но на этом ограниченном интервале подчиняется гармоническому закону (рис. 111, а). Такие колебания мы будем называть *квазимонохроматическими*. Очевидно, что все реальные колебания, которые мы практически считаем монохроматическими и незатухающими, в дей-

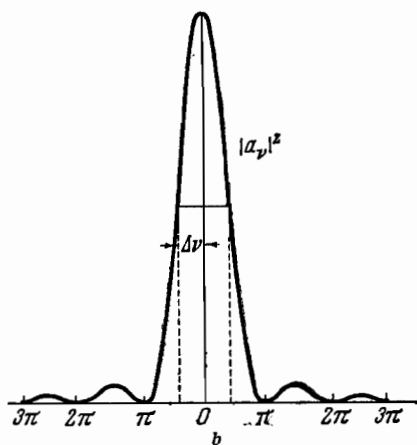
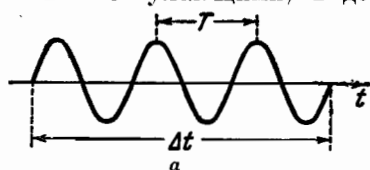


Рис. 111. Слева квазимонохроматическое колебание; справа его спектр.

ствительности являются квазимонохроматическими, так как они длятся ограниченное время. Пусть  $T$  будет период, а

$\nu_0 = \frac{1}{T}$  — частота этого колебания. Отыщем его спектральное разложение.

Поскольку колебание *не* длится от  $-\infty$  до  $+\infty$ , оно представляет собою процесс *непериодический* и для спектрального разложения его следует воспользоваться интегралом, а не рядом Фурье. Функция, которая подлежит разложению, такова:

$$f(t) = \begin{cases} A_0 e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{от } -\frac{\Delta t}{2} \text{ до } +\frac{\Delta t}{2}, \\ 0 & \text{от } -\infty \text{ до } -\frac{\Delta t}{2} \text{ и от } +\frac{\Delta t}{2} \text{ до } +\infty. \end{cases} \quad (70,1)$$

Искомое разложение есть

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i2\pi\nu t} d\nu,$$

где амплитуда  $a_\nu$  выражается

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

Принимая во внимание (70,1) и то, что  $f(t) \neq 0$  только в пределах  $-\frac{\Delta t}{2}, +\frac{\Delta t}{2}$ , получаем

$$\begin{aligned} a_\nu &= \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = A_0 \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} e^{i2\pi(\nu_0 - \nu)t} dt = \\ &= A_0 \frac{\sin \pi(\nu_0 - \nu)\Delta t}{\pi(\nu_0 - \nu)}. \end{aligned} \quad (70,2)$$

Этот результат можно также представить в виде

$$a_\nu = A_0 \Delta t \cdot \frac{\sin \pi(\nu_0 - \nu)\Delta t}{\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t} \quad (70,3)$$

или, обозначая  $A_0 \Delta t = A$  и  $\pi(\nu_0 - \nu)\Delta t = \xi$ ,

$$a_\nu = A \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Функция  $\frac{\sin \xi}{\xi}$  имеет следующий ход: её главный максимум расположен при  $\xi = 0$ , где  $\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$ ; далее, она обращается в нуль при  $\xi = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \pm m\pi$ . В промежутках она имеет вто-



ростепенные максимумы при значениях  $\xi$ , удовлетворяющих условию  $\operatorname{tg} \xi = \xi$ ; они таковы:  $\xi = 1,430\pi = 4,49$ ;  $2,459\pi = 7,73$ ;  $3,47\pi = 10,90$  и т. д. Значения  $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$  в максимумах таковы:

$\xi$	0	4,49	7,73	10,90
$\left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2$	1	0,017	0,016	0,008

Из этого следует, что с ошибкой, не превосходящей 5%, можно считать, что весь ход функции  $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$  сосредоточен на интервале  $\xi = \pm \pi$ . За пределами этого интервала функцию (в указанных пределах точности) можно считать обращающейся в нуль. Так как

$$|a_\nu|^2 = A^2 \left(\frac{\sin \xi}{\xi}\right)^2 = (A_0 \Delta t)^2 \left[ \frac{\sin \pi (\nu_0 - \nu) \Delta t}{\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t} \right]^2,$$

то  $|a_\nu|^2$  имеет главный максимум при  $\nu = \nu_0$  (рис. 111, б), т. е. при частоте квазимонохроматических колебаний, и обращается в нуль при

$$|\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t| = \pi. \quad (70,4)$$

Мы видим, таким образом, что, хотя частота  $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$  представлена с наибольшей интенсивностью, спектр охватывает сплошной интервал частот  $\nu - \nu_0 = \Delta \nu$ . Из (70,4) непосредственно следует соотношение между  $\Delta \nu$  и длительностью  $\Delta t$  незатухающих колебаний

$$\Delta \nu \Delta t = 1. \quad (70,5)$$

Если принять во внимание не только главный максимум, но и второстепенные, то вместо условия (70,4) мы получим

$$|\pi (\nu_0 - \nu) \Delta t| = m\pi,$$

что даёт  $\Delta \nu \Delta t = 2, 3, \dots, m$ , так что вместо (70,5) мы можем написать неравенство

$$\Delta \nu \Delta t \geq 1. \quad (70,6)$$

Это неравенство показывает, что чем больше длительность  $\Delta t$  квазимонохроматических колебаний, тем уже спектральный интервал  $\Delta \nu$ , и наоборот.

б) В качестве второго примера рассмотрим единичное возмущение, описываемое функцией

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2}$$

(см. верхнюю кривую на рис. 112).

Параметр  $\beta$ , имеющий размерность [сек.<sup>-1</sup>], характеризует остроту возмущения. Именно, мерой этой остроты служит промежуток времени  $\Delta t = \frac{1}{\beta}$ , в течение которого амплитуда возмущения изменяется в  $e$  раз. Амплитуда спектрального разложения вычисляется по известной формуле

$$\begin{aligned} a_\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + i2\pi\nu t)} dt. \end{aligned}$$

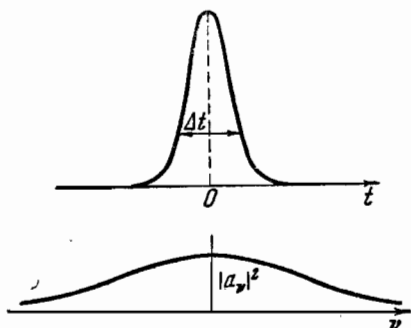


Рис. 112. Единичный импульс и его спектр.

Показатель степени под интегралом можно преобразовать так

$$\begin{aligned} -(\beta^2 t^2 + i2\pi\nu t) &= -\left[ \beta^2 t^2 + i2\pi\nu t + \left(\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2 \right] + \left(\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2 = \\ &= -\left(\beta t + \frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2 - \frac{\pi^2 \nu^2}{\beta^2}, \end{aligned}$$

так что

$$a_\nu = e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta t + \frac{i\pi\nu}{\beta})^2} dt.$$

Полагая

$$\beta t + i \frac{\pi\nu}{\beta} = z,$$

получим

$$a_\nu = e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\pi^2 \nu^2}{\beta^2}},$$

откуда

$$|a_\nu|^2 = \frac{\pi}{\beta^2} e^{-2\frac{\pi^2 \nu^2}{\beta^2}}.$$

Распределение энергии в спектре зависит, очевидно, от экспоненциального множителя. Ширина кривой определяется условием

$$2 \frac{\pi^2 (\Delta\nu)^2}{\beta^2} = 1$$

или, так как  $\beta = \frac{1}{\Delta t}$ ,

$$|\sqrt{2\pi}\Delta\nu \Delta t| = 1,$$

т. е.

$$\Delta\nu \Delta t \approx 1.$$

Как и в рассмотренных ранее случаях, ширина сплошного спектра находится в обратном отношении к длительности импульса  $\Delta t$ .

Для всех примеров, рассмотренных в последних двух параграфах, характерен следующий общий вывод: между длительностью возмущения  $f(t)$  и протяжением спектра частот имеется обратное соотношение: чем короче длится возмущение, тем шире спектр, и наоборот.

Л. И. Мандельштам в своих лекциях пояснял это следующей яркой иллюстрацией. Пусть луч света падает на пластинку, быстро движущуюся в своей плоскости перпендикулярно к лучу. Длина следа, оставленного лучом на пластинке, и есть мера длительности возмущения  $f(t)$ . Поставим теперь пластинку в спектрограф, состоящий из призмы и линзы. Если  $f(t)$  есть синус (безграничное возмущение), то в фокальной плоскости мы получим точку, соответствующую одной определенной частоте  $\nu$ . Но если  $f(t)$  не есть синус, то вместо одной частоты на пластинке появляется растянутый спектр. Чем короче черта на движущейся пластинке, тем шире растянут спектр, и наоборот.

## § 71. Планетарная модель атома

До сих пор мы пользовались в качестве модели источника света только линейным осциллятором, т. е. диполем, совершающим колебания по гармоническому или негармоническому закону. Однако согласно планетарной модели Резерфорда атом следует рассматривать как ротатор, т. е. отрицательно заряженную частицу, обращающуюся по замкнутой орбите около положительного ядра. Нетрудно убедиться в том, что электромагнитные свойства такой модели не содержат ничего существенно нового по сравнению с уже найденным для излучения линейного осциллятора.

Представим себе сначала в качестве простейшего случая электрон, равномерно обращающийся около ядра по круговой орбите. Такое обращение будет движением ускоренным; поэтому оно должно сопровождаться излучением электромагнитных волн.

Для того чтобы вычислить интенсивность этого излучения, разложим равномерное круговое движение на два гармонических колебания по осям  $x$  и  $y$ :

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

Очевидно, что вместо электрона, равномерно обращающегося по круговой орбите, можно рассматривать излучение двух диполей, совершающих колебания с одинаковой частотой  $\omega$  и одинаковой амплитудой  $a$  по взаимно перпендикулярным направлениям.

Согласно формулам § 64 мы имеем для интенсивности излучения обоих диполей

$$J_x = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \omega t, \quad J_y = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \sin^2 \omega t.$$

Полное излучение круговой орбиты будет, таким образом,

$$J = J_x + J_y = \frac{2e^2 a^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{32\pi^4 \nu^4 e^2 a^2}{3c^3}.$$

Сравнивая полученный результат с формулой для среднего излучения диполя за период (64,6), мы видим, что полное излучение круговой орбиты не зависит от времени и в два раза больше среднего излучения диполя, что вполне понятно, так как излучение обоих диполей  $J_x$  и  $J_y$  некогерентно.

Несколько сложнее обстоит дело в том случае, когда рассматривается общее движение по кеплерову эллипсу электрона, связанного с ядром кулоновской силой. В этом случае составляющие движения по осям координат  $x$  и  $y$  уже не являются простыми гармоническими колебаниями. Однако они всегда могут быть разложены в ряды Фурье, т. е. представлены как результат суперпозиции простых гармонических колебаний. Выбирая за оси координат главные оси эллипса, имеем

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t + a' \cos 2\omega t + a'' \cos 3\omega t, \\ y &= b \sin \omega t + b' \sin 2\omega t + b'' \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

Если вычислить, как в § 65, средние интенсивности, соответствующие колебаниям по оси  $x$  и по оси  $y$ , и сложить эти интенсивности (колебания во взаимно перпендикулярных направлениях некогерентны!), то окажется, что излучение соответствует набору осцилляторов с частотами  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ...

Таким образом, электрон, обращающийся по кеплерову эллипсу, излучает целый спектр частот, состоящий из основной частоты и её гармонических обертонов.

## § 72. Орбитальный магнитный момент и теорема Лармора

Электрон, обращающийся по орбите, представляет собою круговой ток. По законам электродинамики такой круговой ток должен обладать определённым магнитным моментом, т. е. вести себя в магнитном поле как магнитный диполь. С другой

стороны, с механической точки зрения, электронный круговой ток вследствие быстрого вращения электрона должен обладать свойствами волчка. Имеется определённое соотношение между магнитными свойствами электронной орбиты, которые характеризуются её магнитным моментом и её механическими свойствами, мерой которых является момент количества движения. Выведем это соотношение.

Как известно из электродинамики <sup>\*</sup>), магнитный момент замкнутого тока равен

$$M = \frac{1}{c} JS, \quad (72,1)$$

где  $J$  — сила тока (в электростатических единицах),  $S$  — площадь, обтекаемая током, и  $c$  — скорость света. Если число оборотов электрона по круговой орбите будет  $\nu = \frac{1}{T}$ , где  $T$  — период обращения, то, очевидно,

$$J = e\nu = \frac{e}{T}. \quad (72,2)$$

Поэтому

$$M = \frac{1}{c} e\nu\pi r^2$$

или, заменяя  $\nu$  угловой частотой  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ,

$$M = \frac{e}{2c} \omega r^2 = \frac{e}{2mc} m r^2 \omega. \quad (72,3)$$

Но  $m r^2 \omega = m r^2 \dot{\phi}$ , очевидно, представляет собой момент количества движения  $l$  электронной орбиты. Итак,

$$M = \frac{e}{2mc} l. \quad (72,4)$$

Это и есть искомое соотношение.

Представим себе теперь, что наш атом, содержащий орбитальный электрон, помещён в магнитное поле. Так как, по сказанному, атом обладает определённым магнитным моментом, то он должен вести себя во внешнем поле как магнит, т. е. должен устанавливаться своим магнитным моментом параллельно или антипараллельно полю. Но этому препятствует то, что атом одновременно является и волчком. Отсюда следует, что в магнитном поле атом должен вести себя совершенно так же, как обыкновенный волчок ведёт себя в поле земного тяготения, т. е. атом должен совершать прецессионное движение около направления поля. Если

<sup>\*</sup>) См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, стр. 268, Гостехиздат, 1946.

теперь рассматривать орбиту электрона с точки зрения неподвижной системы координат, то она перестаёт быть плоской и становится вообще очень сложной. Рассмотрение значительно упрощается, если ввести подвижную систему координат, прецессирующую вместе с орбитой. В такой системе координат орбита сохраняет свою форму, и остаётся только определить угловую скорость прецессии.

Введём две системы координат: одну из них свяжем с направлением магнитного поля  $\mathcal{H}$ . Эту систему мы будем называть «неподвижной». Вторая система — подвижная — прочно связана с орбитой электрона и прецессирует относительно «неподвижной» системы; ось прецессии совпадает с направлением поля. Пусть угловая скорость прецессии будет  $\omega$ ; скорость электрона, движущегося по орбите, пусть будет в неподвижной системе координат  $v$ , в подвижной —  $v'$ . В подвижной системе на электрон действуют добавочные силы инерции — центробежная  $m\rho\omega^2$ , где  $\rho$  — расстояние электрона от оси прецессии, и кориолисова  $C = 2m[v\omega']$ . Полагая, что линейная скорость, сообщаемая электрону прецессионным движением, мала по сравнению с орбитальной скоростью электрона в отсутствие прецессии, т. е. что

$$\rho\omega \ll v,$$

мы можем пренебречь центробежной силой инерции по сравнению с кориолисовой силой. Оценка степени приближения (см. ниже), связанного с этим допущением, вполне оправдывает его. Далее, в пределах того же приближения можно в выражении кориолисовой силы скорость  $v'$  заменить скоростью  $v$  по отношению к неподвижной системе координат. Итак,

$$C = 2m[v\omega]. \quad (72,5)$$

Мы знаем, однако, что на электрон, движущийся в магнитном поле со скоростью  $v$ , действует сила

$$F = -\frac{e}{c}[v\mathcal{H}]. \quad (72,6)$$

Знак минус обусловлен тем, что заряд электрона отрицателен. Если направление поля  $\mathcal{H}$  параллельно оси прецессии, то, как нетрудно убедиться, определяя по известному правилу для векторного произведения направления сил  $C$  и  $F$ , эти силы действуют прямо противоположно друг другу. Поэтому для того, чтобы орбита сохранила свои размеры и форму, они должны быть численно друг другу равны,  $C = -F$ . В таком случае (72,5) и (72,6) дают

$$2m\omega v \sin(\omega v) = \frac{e}{c} v \mathcal{H} \sin(\angle v \mathcal{H}). \quad (72,7)$$

Так как ось прецессии параллельна направлению поля, то

$$\sin(\nu_0) = \sin(\nu \mathcal{H})$$

и (72,7) даёт

$$\omega = \frac{e}{2mc} \mathcal{H}. \quad (72,8)$$

Полученный результат можно формулировать следующим образом: электрон описывает в слабом магнитном поле ту же орбиту, что и в отсутствие поля, но по отношению к системе координат, которая прецессирует относительно магнитного поля с угловой частотой

$$\omega = \frac{e}{2mc} \mathcal{H}.$$

Действие магнитного поля на электронную орбиту можно свести, таким образом, к сообщению этой орбите прецессии со скоростью  $\omega$  (рис. 113). В этом и состоит теорема Лармора.

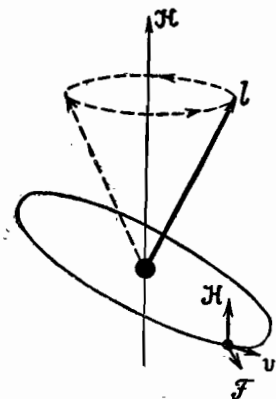


Рис. 113.

Упражнение. Источник света помещён в магнитное поле с напряжённостью 40 000 эрстед. Вычислить ларморовскую частоту прецессии электронной орбиты и определить длину волны, соответствующую этой частоте (ответ:  $\lambda = 0,54$  см).

### § 73. Эффект Зеемана

Известно, что в конце своей жизни Фарадей усиленно искал явлений, которые указывали бы на связь между электромагнитным полем и светом. Он стремился, по его собственному выражению, «осветить силовые линии и намагнитить свет». Известно также, что ему удалось обнаружить «намагничивание света» в виде открытого им вращения плоскости поляризации в магнитном поле (эффект Фарадея). Идя дальше в этом направлении, он пытался (в 1862 г.), но безуспешно, открыть влияние магнитного поля на спектральные линии. Лишь 34 года спустя, в 1896 г., Зееману при помощи значительно более мощных полей и тонких спектральных приборов удалось обнаружить, что при помещении источника света между полюсами электромагнита спектральные линии испытывают расщепление на несколько компонент.

Явление это было количественно объяснено Лоренцом на основе электронной теории. Согласно теории Лоренца

при наблюдении перпендикулярно к направлению поля спектральная линия должна расщепляться на три компоненты, давая симметричную картину (рис. 114, б), причём расстояние между средней линией и каждой из крайних в шкале частот должно быть равно

$$\Delta\nu = \frac{e}{4\pi mc} \mathcal{H} \text{ сек.}^{-1}. \quad (73,1)$$

Расщеплённые линии должны обнаруживать линейную поляризацию: крайние — перпендикулярную к полю; средняя — по полю. При наблюдении же вдоль поля средняя линия должна отсутствовать, а крайние обнаруживать круговую поляризацию с противоположным направлением вращения (рис. 114, а).

Все эти предсказания теории во многих случаях подтвердились с поразительной точностью. Вместе с тем оказалось, что имеется большое число случаев, когда картина расщепления значительно сложнее: число компонент больше трёх, и величина смещения не совпадает с вычисленной по формуле (73,1), хотя и связана с ней простым отношением.

Расщепление, следующее теории Лоренца, называется *нормальным эффектом Зеемана*. Во всех остальных случаях наблюдаемая картина называется *аномальным* или *сложным эффектом Зеемана*.

Посмотрим теперь, в чём заключается объяснение нормального эффекта с точки зрения классической электронной теории. Рассмотрим электрон, обращающийся по круговой орбите. Пусть это будет, например, водородный

атом с ядром, имеющим заряд  $+e$ , около которого обращается один электрон. Магнитное поле пусть будет направлено перпендикулярно к плоскости орбиты (рис. 115).

Сила, удерживающая электрон на орбите, по абсолютной величине равна

$$F = \frac{e^2}{r^2}. \quad (73,2)$$

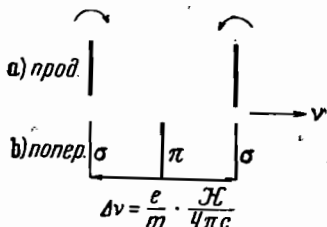


Рис. 114. Схема расщепления спектральной линии в простом эффекте Зеемана.

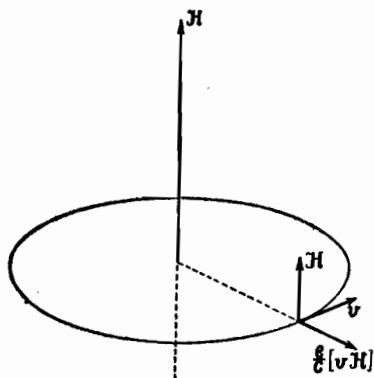


Рис. 115.



Эта сила  $F$  равна центробежной силе инерции

$$\frac{e^2}{r^2} = m\gamma\omega_0^2, \quad (73,3)$$

где  $\omega_0$  — частота обращения электрона в отсутствии магнитного поля. При включении магнитного поля на электрон кроме кулоновской силы (73,2) действует ещё сила Лоренца, равная  $\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]$ .

Если теперь воспользоваться известным правилом правого винта для определения направления силы Лоренца, то из рис. 115 легко усмотреть, что эта сила направлена по радиусу\*). Тем не менее влияние магнитного поля сказывается *не в том, что радиус орбиты увеличивается или уменьшается*, а в том, что изменяется угловая скорость обращения электрона при неизменном радиусе орбиты.

Это утверждение кажется неожиданным, однако оно может быть доказано строгим расчётом\*\*). Мы здесь этот расчёт приводить не будем, но ограничимся следующими разъяснениями. При включении магнитного поля оно не сразу достигает своей конечной величины, но устанавливается в течение известного промежутка времени. Этот промежуток настолько велик по сравнению с периодом обращения электрона, что весь процесс можно рассматривать как бесконечно медленный, наподобие адиабатических процессов в термодинамике. Поэтому в каждый момент должно соблюдаться равенство между суммой кулоновской силы и силы Лоренца, с одной стороны, и центробежной силой инерции — с другой. Эта последняя, однако, будет меняться потому, что возрастание магнитного поля по закону электромагнитной индукции Фарадея (точнее говоря, вследствие второго уравнения электродинамики Максвелла) влечёт за собой появление вихревого электрического поля с осью симметрии, совпадающей с направлением магнитного поля. Именно это вихревое электрическое поле воздействует на электрон, ускоряя или замедляя его. То, что процесс должен протекать описанным образом, видно уже из того, что сама сила Лоренца не может изменить частоту обращения, так как она направлена перпендикулярно к скорости и, следовательно, никакой работы не совершает.

Равновесие между силами, действующими на электрон, и центробежной силой инерции, как сказано, должно иметь место в каждый момент времени, в том числе, конечно, и в установившемся состоянии, когда магнитное поле достигает своей стационарной величины  $\mathcal{H}$ . Обозначая угловую скорость элек-

\*) На рис. 115 и 113 направление силы Лоренца показано для положительного заряда. В случае электрона сила направлена в противоположную сторону, т. е. к центру.

\*\*\*) См. приложение III в конце книги.

трона в этом состоянии через  $\omega$ , имеем, во-первых, для численной величины силы Лоренца  $\frac{e}{c} r\omega \mathcal{H}$ , так как  $v=r\omega$  и  $\sin(v \mathcal{H}) = 1$ ; последнее вследствие того, что поле перпендикулярно к плоскости орбиты. Во-вторых, указанное условие равновесия будет

$$\frac{e^2}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega \mathcal{H} = m r \omega^2$$

или вследствие (73,3)

$$m r \omega_0^2 + \frac{e}{c} r\omega \mathcal{H} = m r \omega^2,$$

откуда

$$\omega^2 - \frac{e}{m c} \mathcal{H} \omega - \omega_0^2 = 0. \quad (73,4)$$

Коэффициент при  $\omega$  во втором члене слева, очевидно, равен удвоенной ларморовой частоте  $\omega$ , так как

$$\omega = \frac{e}{2 m c} \mathcal{H}$$

и, следовательно,

$$\omega^2 - 2\omega\omega - \omega_0^2 = 0. \quad (73,5)$$

Решая это квадратное уравнение относительно  $\omega$ , получаем

$$\omega = \omega \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}. \quad (73,6)$$

Величина  $\omega$  мала по сравнению с  $\omega_0$ . В самом деле, наиболее интенсивные магнитные поля, которые удавалось до сих пор осуществить (известные опыты П. Л. Капицы), достигали приблизительно 500 000 эрстед. В таких полях

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{e}{m c} \mathcal{H} = 0,5 \cdot 1,76 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^5 = 4,4 \cdot 10^{12} \text{ сек.}^{-1}.$$

Между тем  $\omega_0$  для спектральных линий, лежащих в видимой или ультрафиолетовой части спектра, имеет порядок величины  $10^{16}$  сек.<sup>-1</sup>. Следовательно,  $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$  — порядка  $10^{-8}$ , и мы имеем полное право пренебречь под радикалом в (73,6) величиной  $\omega^2$  по сравнению с  $\omega_0^2$  и написать

$$\omega = \omega \pm \omega_0$$

или

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega, \quad \omega_2 = -\omega_0 + \omega. \quad (73,7)$$

Таким образом, частота электрона, обращающегося против часовой стрелки (если смотреть из конца вектора поля) в магнитном поле, увеличивается на  $\omega$ , а частота электрона, движущегося в обратную сторону, уменьшается на ту же величину.

Если теперь перейти от угловой частоты к линейной, то мы получаем

$$\Delta\nu = \pm \frac{c}{2\pi} = \pm \frac{e}{4\pi mc} \mathcal{H}. \quad (73,8)$$

Это и есть формула Лоренца (73,4).

### § 74. Эффект Зеемана. Общий случай

В предыдущем параграфе мы рассмотрели частный случай влияния магнитного поля на электронную орбиту, плоскость которой перпендикулярна к направлению поля. При этом мы убедились, что и в этом случае изменение угловой частоты обращения электрона как раз равно ларморовской частоте  $\omega$  [см. (73,7)]. Рассмотрим теперь более общий случай и покажем, что теория точно описывает все стороны явления, включая состояние поляризации линий.

Пусть мы имеем диполь, причём положительный заряд пусть будет закреплён в начале координат, а электрон с зарядом  $-e$  связан с положительным зарядом квазиупругой силой. Уравнение свободных колебаний электрона есть

$$m\ddot{\mathbf{r}} + f\mathbf{r} = 0.$$

В присутствии магнитного поля появляется сила Лоренца  $-\frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathcal{H}]$ , и уравнение колебаний после деления на  $m$  и замены  $\frac{f}{m}$  через  $\omega_0^2$  принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{mc} [\mathbf{v}\mathcal{H}]. \quad (74,1)$$

Положим теперь, что магнитное поле направлено по оси  $z$ , так что

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y = 0, \quad \mathcal{H}_z = \mathcal{H}.$$

Заметив, что  $\frac{e}{mc} \mathcal{H}$  есть удвоенная ларморовская частота, напишем три скалярных уравнения, соответствующих векторному уравнению (74,1):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\omega \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y - 2\omega \dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (74,2)$$

Решения первых двух дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$x = ae^{i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t}, \quad (74,3)$$

где амплитуды  $a$  и  $b$ , вообще говоря, — комплексные. Подставляя (74,3) в (74,2), получаем

$$\left. \begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega b &= 0, \\ b(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (74,4)$$

Мы получили систему линейных однородных уравнений для неизвестных  $a$  и  $b$ . Как известно, такая система имеет решения, отличные от нуля, только при условии равенства нулю определителя из коэффициентов, т. е.

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 2i\omega \\ -2i\omega & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (74,5)$$

откуда, раскрывая определитель, находим\*)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = 4\omega^2. \quad (74,6)$$

Мы получаем, таким образом, два квадратных уравнения

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 - \omega'^2 &= 2\omega', \\ \omega_0^2 - \omega''^2 &= -2\omega''. \end{aligned} \right\} \quad (74,7)$$

Из четырёх решений этих уравнений только два положительны

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= -\omega + \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}, \\ \omega'' &= \omega + \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (74,8)$$

Отсюда, принимая во внимание, что  $\omega \ll \omega_0$  (см. стр. 241),

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega_0 - \omega, & \omega'' &= \omega_0 + \omega, \\ \omega'' - \omega' &= 2\omega = \frac{e}{mc} \mathcal{H}, \end{aligned}$$

\*) Условие (74,5) имеет весьма простой смысл: из первого уравнения (74,4) получаем

$$\frac{a}{b} = -\frac{2i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

из второго —

$$\frac{a}{b} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\omega}.$$

Для того чтобы решения обоих уравнений были совместимы, правые части написанных равенств должны быть между собой равны

$$-\frac{2i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\omega}.$$

Отсюда сразу получаем (74,6).

а смещённые линейной частоты относительно  $\nu_0$ , как и раньше, будет

$$\Delta\nu = \pm \frac{v}{2\pi} = \pm \frac{e}{4\pi mc} \mathcal{H}. \quad (74,9)$$

Таким образом, частоты колебаний, происходящих по осям  $x$  и  $y$ , т. е. перпендикулярных к полю  $\mathcal{H}$ , смещаются как раз на величину, даваемую формулой Лоренца.

Мы можем теперь установить также состояние поляризации обеих смещённых компонент. Из (74,4) имеем

$$\frac{a}{b} = -i \frac{2c\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (74,10)$$

Подставляя сюда  $\omega'$ , т. е. частоту компоненты, смещённой в красную сторону, и замечая, что согласно первому из уравнений (74,7)

$2c\omega' = \omega_0^2 - \omega'^2$ , получаем  $\frac{a}{b} = -i$  или  $a = -ib = be^{-i\frac{\pi}{2}}$ . Это означает, что колебание по оси  $x$  отстаёт по фазе от колебания по оси  $y$  на  $\frac{\pi}{2}$ . Оба колебания дают круговое вращение и притом, принимая во внимание указанное соотношение фаз, вращение по часовой стрелке, т. е. правокруговую поляризацию.

Аналогично, подставляя в (74,10)  $\omega''$ , т. е. частоту компоненты, смещённой в фиолетовую сторону, и принимая во внимание второе из уравнений (74,7), получаем

$$\frac{a}{b} = i \quad \text{или} \quad a = be^{i\frac{\pi}{2}},$$

откуда следует, что компонента  $\omega''$  поляризована по левому кругу. Наконец, третье уравнение системы (74,2)

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

показывает, что колебание по оси  $z$  происходит без изменения частоты; оно имеет линейную поляризацию. Однако наблюдатель, смотрящий навстречу силовым линиям магнитного поля (продольное направление), не увидит этой третьей компоненты, так как излучение диполя в направлении колебаний равно нулю.

Итак, в продольном направлении картина эффекта Зеемана состоит из двух смещённых линий; обе поляризованы по кругу, причём линия, смещённая в красную сторону, поляризована по правому кругу, а линия, смещённая в фиолетовую сторону; — по левому.

Наблюдатель, смотрящий перпендикулярно к направлению магнитного поля, например по оси  $x$ , увидит несмещённую линию, так как колебания по оси  $z$  дают максимальное излу-

чение в перпендикулярном направлении. Он увидит также обе смещённые компоненты по следующей причине: диполь, колеблющийся по оси  $x$ , не даёт излучения в направлении этой оси. Но оба колебания в плоскости  $xz$  дают компоненты, поляризованные по кругу. Поэтому наблюдатель, который смотрит навстречу оси  $x$ , увидит проекции круговых колебаний на ось  $y$ , а наблюдатель, смотрящий по оси  $y$ , увидит проекции круговых колебаний на ось  $x$ . Таким образом, картина поперечного эффекта Зеемана состоит из трёх линий: несмещённой и двух смещённых. Все линии линейно поляризованы: несмещённая имеет колебания электрического вектора по направлению поля, смещённые — перпендикулярно к полю.

Как уже было указано в начале этого параграфа, для случая *простого эффекта* Зеемана все изложенные результаты теории подтверждаются совершенно точно. Зато сложный эффект мог быть объяснён только в рамках квантовой теории (см. т. II, гл. XV).

---

## ГЛАВА VI

# ИЗЛУЧЕНИЕ АБСОЛЮТНО ЧЁРНОГО ТЕЛА И ГИПОТЕЗА КВАНТОВ ЭНЕРГИИ

### § 75. Классическая физика и проблема теплового излучения

В предыдущей главе мы показали, каким образом классическая физика объясняет электромагнитное излучение атомов. Мы видели, что ряд следствий из электромагнитной теории света и электронной теории хорошо совпадает с результатами эксперимента. Сюда относятся, например, распределение излучения по различным направлениям, ширина спектральных линий, нормальный эффект Зеемана и ряд других явлений, не затронутых в нашем изложении. Наряду с этим мы обращали внимание на то, что некоторые следствия либо противоречат опыту, либо имеют ограниченную применимость. Так, например, характер линейного электромагнитного спектра лишь в области длинных волн (длинноволновая инфракрасная область и радиоволны) отвечает требованиям классической теории, а в оптической области спектра резко ей противоречит.

Однако особенно серьёзное поражение потерпела классическая физика, когда она была применена к проблеме теплового излучения. Именно при изучении этой проблемы впервые обнаружилось слабые места классической механики и электродинамики, и потребовалось введение гипотезы квантов, решительным образом противоречащей всему духу классической физики.

Для того чтобы сразу ввести читателя в существо дела, мы прежде всего покажем, к каким непримиримым противоречиям привела классическая физика в этом вопросе.

Каждодневный опыт учит нас, что твёрдые тела, будучи нагреты до достаточно высокой температуры, накаляются, т. е. начинают испускать видимый свет. Однако и при более низкой температуре они излучают энергию в виде так называемых тепловых волн. На самом деле хорошо известно, что различие между видимыми и тепловыми волнами обусловлено только особенностями физиологического аппарата наших органов чувств и ни в какой связи с природой тех и других волн не стоит. Поэтому в дальней-

шем мы будем говорить о тепловом излучении, не имея в виду специально длинные тепловые волны, и будем пользоваться этим термином — «тепловое излучение» — только для того, чтобы подчеркнуть способ его возникновения.

Представим себе теперь несколько тел, нагретых до различной температуры, и для полной определённости поместим эти тела в полость, окружённую оболочкой с идеально отражающими стенками. Если даже внутри этой полости будет абсолютный вакуум, тела будут обмениваться энергией между собой через посредство излучения. При этом, хотя излучение каждого тела зависит только от его собственной температуры, а не от температуры окружающих тел (закон Прево), более тёплые тела будут охлаждаться, так как они испускают большее количество энергии, чем получают от окружающих тел, а менее нагретые тела — нагреваться, потому что они получают больше, чем отдают. Так как, кроме того, электромагнитные волны, излучаемые всеми этими телами, распространяются с конечной скоростью, то пространство внутри полости будет всегда заполнено лучистой энергией. *Опыт показывает*, что в конце концов обязательно устанавливается стационарное состояние, при котором все тела приобретают одинаковую температуру, т. е. поглощают в единицу времени ровно столько энергии, сколько отдают её, а плотность излучения в пространстве между ними достигает некоторой определённой величины, соответствующей данной температуре. Этот факт настолько хорошо известен, что он представляется даже вполне естественным выводом из законов классической физики, а между тем, если вдуматься глубже, то он оказывается совершенно непонятным именно с точки зрения *классической физики*.

Поясним это простым примером. Представим себе, что в нашей полости помещён кусок железа, и положим, что поверхность его зачернена так, что она поглощает полностью всю падающую на неё энергию. Известно с полной определённой, что такой кусок железа при температуре в  $0^{\circ}\text{C}$  будет излучать с каждого квадратного сантиметра своей поверхности  $3 \cdot 10^5$  эрг в секунду, а при тепловом равновесии — одновременно и поглощать из окружающего пространства ровно такое же количество энергии в секунду. Столь же достоверно известно, что в пространстве между стенками полости и поверхностью нашего куска железа, вообще *в той части пространства внутри полости, которая не занята частицами вещества*, равновесная плотность энергии при  $0^{\circ}\text{C}$  будет равна  $4 \cdot 10^{-5}$  эрг/см<sup>3</sup>. С другой стороны, плотность тепловой энергии внутри самого куска железа при той же температуре равна приблизительно  $8 \cdot 10^9$  эрг/см<sup>3</sup>, т. е. в  $2 \cdot 10^{14}$  раз больше плотности энергии излучения. Эта тепловая энергия, как известно, заключается в колебаниях атомов железа около положений равновесия. Мы приходим, таким образом, к поразительному выводу: при термо-



динамическом равновесии между колеблющимися атомами вещества и электромагнитным излучением почти вся энергия сосредоточена в колеблющихся атомах, и лишь ничтожная часть её приходится на долю излучения, находящегося с ними в равновесии.

Именно этот факт является совершенно непонятным с точки зрения классической механики. Представим себе следующую простую модель рассмотренного выше опыта: на поверхности воды, налитой в какой-нибудь резервуар, плавают пробки, соединённые пружинами, так что они могут колебаться относительно друг друга. Приведём эти пробки в колебания; тогда они будут отдавать свою энергию («излучать») воде, на гладкой поверхности которой появятся волны. Эти волны будут бороздить поверхность в различных направлениях, отражаться от стенок резервуара, раздробляясь на всё более мелкие волны, и вследствие вязкости их энергия будет постепенно превращаться в тепло. Совершенно очевидно, что окончательный результат опыта должен состоять в том, что пробки прекратят свои колебания, а вся их энергия будет передана окружающей среде.

Невозможно представить себе, чтобы в конечном состоянии пробки находились в интенсивном колебании, а вода не получила бы никакой энергии. Но именно это имеет место в случае равновесия между нагретым материальным телом и излучением. Там, как мы видели, почти вся энергия сосредоточена в колебаниях атомов, а на излучение приходится лишь ничтожная доля энергии.

Рассмотрим теперь другой модельный опыт. Пусть механической моделью излучающего тела будут служить вместо пробковых шариков дробинки, также соединённые лёгкими пружинками и подвешенные в замкнутой камере, содержащей воздух. Если теперь привести эти дробинки в сильные колебания и предоставить самим себе, то они возбудят в воздухе акустические волны, которые будут постепенно раздробляться и замирать вследствие вязкости воздуха, совершенно так же, как волны на поверхности жидкости. Окончательным состоянием системы будет такое, в котором дробинки покоятся в их положениях равновесия, а весь их первоначальный запас энергии перейдёт к молекулам воздуха. Точнее говоря, дробинки будут совершать бесконечно малые брауновские колебания со скоростями, соответствующими их массе. Однако и при этом уточнении практически вся энергия, которой обладает система, будет принадлежать молекулам газа.

Кинетическая теория газов даёт полное объяснение причины такого хода явления. В самом деле, кинетическая энергия двухатомных молекул воздуха в равновесном состоянии при температуре  $T$  равна, как известно,  $\frac{5}{2} nkT$ , где  $n$  — число молекул; кинетическая энергия  $n'$  дробинок, совершающих брауновское движение,

равна  $\frac{3}{2} n' kT$ . Полная энергия всей системы при равновесии должна быть поэтому  $\left(\frac{5}{2} n + \frac{3}{2} n'\right) kT$ . Так как число молекул  $n$  неизмеримо больше числа дробинки  $n'$ , то ясно, что вся энергия практически равна  $\frac{5}{2} n kT$ . Другими словами, при равновесии энергия должна целиком перейти от дробинки к молекулам воздуха.

Мы видим, таким образом, что описанная картина явления для «излучающей» системы частиц и среды, в которой распространяется излучение, прямо противоположна той, которая имеет место *согласно опыту* в случае равновесия материального тела и электромагнитного поля (тепловое излучение). Затруднение, которое возникло в связи с проблемой теплового излучения, состоит именно в том, что, как оказывается, *согласно классической физике также и в случае равновесия электромагнитного излучения материальных тел в замкнутой полости* практически вся энергия должна перейти к электромагнитному полю.

### § 76. Равновесное излучение в полости

Займёмся теперь рассмотрением проблемы излучения, чтобы убедиться в правильности вывода, сделанного в конце предыдущего параграфа. Представим себе, как и раньше, полость, окружённую теплонепроницаемыми стенками, нагретыми до некоторой определённой температуры  $T$ . Стенки полости будут излучать электромагнитные волны и поглощать волны, падающие на них изнутри полости; при равновесии в 1 сек. будет излучаться столько же, сколько и поглощаться, и так как излучение распространяется с конечной скоростью, то внутри полости будет существовать электромагнитное поле с постоянной плотностью энергии

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2). \quad (76,1)$$

Вместо объёмной плотности излучения  $u$  удобно, особенно для практических целей, пользоваться другой величиной — удельной интенсивностью или поверхностной яркостью излучения. Эта величина определяется следующим образом: рассмотрим в поле излучения площадку  $d\sigma$ , ориентированную любым образом. Через эту площадку во всевозможных направлениях проходит излучение. Мы можем себе представить двойное многообразие элементарных конусов, опирающихся на площадку  $d\sigma$ , и представить себе, далее, что излучение распространяется внутри этих конусов. Количество энергии, проходящей в единицу времени через площадку  $d\sigma$  внутрь конуса  $d\Omega$ , ось которого составляет с нормалью к площадке угол  $\vartheta$ , равно

$$d\Phi = I d\sigma \cos \vartheta d\Omega. \quad (76,2)$$

Величина  $I$  называется удельной интенсивностью излучения. Это есть, следовательно, энергетический поток, проходящий в единицу времени через площадку  $d\sigma = 1 \text{ см}^2$  и распространяющийся внутри единичного телесного угла в направлении нормали к площадке. Для того чтобы получить величину полного потока, проходящего через  $d\sigma$  в единицу времени в одну сторону, нужно проинтегрировать выражение (76,2) по всем азимутам  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  и по всем углам  $\vartheta$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Принимая во внимание, что  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ , имеем

$$\Phi = d\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

Если излучение изотропно, т. е. если  $I$  не зависит от угла, то

$$\Phi = \pi I d\sigma.$$

Очевидно, что величина  $I$  играет для излучения такую же роль, как величина поверхностной (энергетической) яркости для источника, ввиду чего  $I$  часто называют поверхностной яркостью излучения.

Между яркостью  $I$  и объёмной плотностью излучения  $u$  имеется простое соотношение. Рассмотрим какую-нибудь точку  $O$  внутри поля излучения и вообразим сферу, описанную из  $O$ , как из центра. Очевидно, что все лучи, проходящие через точку  $O$ , должны пройти через эту сферу и каждый из них вносит свою долю в объёмную плотность излучения около  $O$ . Путём интегрирования и на основании простых геометрических соображений\*) нетрудно показать, что для случая линейно поляризованного излучения

$$u = \frac{4\pi I}{c}. \quad (76,3)$$

Далее, нужно принять во внимание, что тепловое излучение в полости имеет сплошной спектр. Для рассмотрения его спектрального состава необходимо наряду с интегральными величинами  $u$  и  $I$ , в которых учитываются излучения всех имеющихся частот, ввести спектральные величины. Для бесконечно малого интервала частот  $d\nu$  мы можем считать спектральную объёмную плотность  $du_\nu$  пропорциональной интервалу  $d\nu$

$$du_\nu = \rho_\nu d\nu.$$

\*) См., например, М. Планк, Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935.

Коэффициент  $\rho_\nu$  называется спектральной (объёмной) плотностью излучения. Для сплошного спектра, охватывающего все частоты от 0 до  $\infty$ , имеем

$$u = \int_0^{\infty} du_\nu = \int_0^{\infty} \rho_\nu d\nu.$$

Наряду с  $\rho_\nu$  можно ввести спектральную поверхностную яркость излучения  $I_\nu$ , определив её по аналогии с тем, как это было сделано для интегральных величин. Между  $\rho_\nu$  и  $I_\nu$  имеется в таком случае то же соотношение, что и между  $u$  и  $I$ :

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \quad (76,4)$$

Наконец, нужно принять во внимание, что излучение определённой частоты и определённого направления характеризуется ещё своим состоянием поляризации. Излучение внутри полости вполне не поляризовано. Но неполяризованный луч в отношении переносимой энергии эквивалентен двум лучам, поляризованным во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющим одинаковую среднюю интенсивность. Поэтому для неполяризованного излучения

$$I = 2 \int_0^{\infty} I_\nu d\nu$$

и для неполяризованного однородного изотропного излучения мы имеем

$$\rho_\nu = \frac{8\pi}{c} I_\nu. \quad (76,5)$$

## § 77. Закон Кирхгофа

Первый крупный шаг в теоретическом исследовании свойств равновесного излучения был сделан Кирхгофом, который термодинамическим путём показал, что при постоянной температуре спектральная плотность излучения  $\rho_\nu$  совершенно не зависит от природы и свойств тел, находящихся внутри полости (в том числе и стенок самой полости), например, от характера их поверхности, наличия или отсутствия у них полос селективной оптической абсорбции и т. д. Эта особенность равновесного излучения вытекает непосредственно из второго начала термодинамики. В самом деле, допустим обратное, т. е. что плотность излучения при равновесии каким-то образом зависит от природы тел, находящихся внутри полости. Тогда,

взяв две равновесные системы, находящиеся при одинаковой температуре, но заключающие разные тела, и установив между ними сообщение, мы бы нарушили равновесие. Это повело бы к установлению между обеими системами разности температур, которую можно было бы использовать для построения *perpetuum mobile* второго рода.

Кирхгоф, далее, нашёл важное соотношение между испускающей и поглощательной способностями тела для данной частоты, с одной стороны, и спектральной яркостью  $I_\nu$  (а значит и  $\rho_\nu$ ) — с другой. Во избежание недоразумений необходимо, однако, прежде всего условиться в терминах.

Если на тело падает излучение, то часть его неизбежно отражается на поверхности раздела между телом и средой, а оставшаяся часть проникает внутрь тела. Эта проникшая внутрь лучистая энергия частью поглощается, превращаясь в тепло, частью же после одного или нескольких отражений внутри тела вновь выходит наружу. Доля всей падающей энергии данного интервала частоты  $\nu, \nu + d\nu$ , которая остаётся внутри тела и превращается в тепло, называется *поглощательной способностью тела* для данной частоты и обозначается через  $A_\nu$  (безразмерное число). Её не следует смешивать с коэффициентом поглощения  $a_\nu$ , измеряющим относительное ослабление параллельного пучка лучей на единице длины. Тело может иметь малый коэффициент поглощения, но при значительном протяжении — большую поглощательную способность. Энергия, излучаемая  $1 \text{ см}^2$  в 1 сек., называется *испускательной способностью* и обозначается через  $E_\nu$ . Установленное Кирхгофом соотношение гласит

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = I_\nu = \frac{c}{8\pi} \rho_\nu \quad (77,1)$$

[последнее — по (76,5)], т. е. отношение испускающей способности тела к его поглощательной способности равно поверхностной яркости находящегося с ним в равновесии излучения. Так как спектральная плотность  $\rho_\nu$  (а также  $I_\nu$ ) не зависит от природы тела, то соотношение (77,1) означает, что отношение испускающей способности тела к его поглощательной способности для всех тел одно и то же. Это отношение, пропорциональное спектральной плотности равновесного излучения, является, таким образом, универсальной функцией, зависящей только от температуры и частоты.

Среди всех тел особенно большое значение должно иметь такое тело, у которого поглощательная способность равна единице; так как это тело поглощает всю *падающую* на него энергию, то Кирхгоф назвал его *абсолютно чёрным*. Положим, что нам

удалось построить такое тело; из соотношения (77,1) при  $A_\nu = 1$  получаем

$$E_\nu = I_\nu = \frac{c}{8\pi} \rho_\nu. \quad (77,2)$$

Это значит, что испускательная способность абсолютно чёрного тела также является универсальной функцией частоты и температуры. Если поэтому теоретически найдена формула, дающая явное выражение  $\rho(\nu, T)$ , и если экспериментальная проверка, выполненная только для одного абсолютно чёрного тела, подтверждает эту формулу, то мы можем вычислить распределение энергии в спектре для любого тела, зная его поглотительную способность, которую можно найти при помощи спектра абсорбции и геометрических соображений. Отсюда понятно то большое внимание, которое привлекла к себе проблема теоретического отыскания функции  $\rho(\nu, T)$ .

В действительности ни одно тело в природе не может считаться абсолютно чёрным, и не существует такой краски, которая, будучи нанесена на поверхность тела, свела бы к нулю его коэффициент отражения. Однако закон Кирхгофа открывает возможность искусственного построения абсолютно чёрного тела. Для этого достаточно взять полость, окружённую равномерно нагретыми стенками (например, муфельную электрическую печь); тогда равновесное излучение, устанавливающееся внутри полости, будет характеризоваться распределением энергии в спектре, тождественным с абсолютно чёрным телом. Поэтому если сделать в стенке полости малое отверстие, то из этого отверстия будет выходить излучение, тождественное с излучением абсолютно чёрного тела. Относительно практического осуществления подобного искусственного абсолютно чёрного тела см. § 79.

## § 78. Законы излучения абсолютно чёрного тела

Основной вывод, к которому приводит закон Кирхгофа, может быть записан следующим образом:

$$\rho_\nu d\nu = F(\nu, T) d\nu, \quad (78,1)$$

где  $F(\nu, T)$  — некоторая универсальная функция. Следующая задача заключается в раскрытии вида этой функции. Наиболее значительный шаг в этом направлении после ряда работ — в том числе важных работ русских физиков В. А. Михельсона и Б. Б. Голицына — был сделан Вином, который воспользовался, кроме термодинамики, ещё и электромагнитной теорией света.

В результате он установил следующую формулу\*):

$$\rho_\nu d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu. \quad (78,2)$$

Здесь  $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$  — функция, раскрыть вид которой при помощи термодинамических соображений, т. е. без всяких гипотез о молекулярном механизме испускания и поглощения, оказалось невозможным.

Несмотря на этот недостаток, формула Вина сыграла очень важную роль. Во-первых, она свела отыскание функции двух переменных  $\nu$  и  $T$  к функции одной переменной  $\frac{\nu}{T}$ , а это открывало возможность по заданной кривой распределения энергии в спектре для какой-нибудь одной температуры вычислять кривую для любой другой. Положим, например, что нам дана кривая для температуры  $T$ , и мы хотим вычислить кривую для температуры  $T_1$ . Для частоты  $\nu_1$ , удовлетворяющей условию  $\frac{\nu_1}{T_1} = \frac{\nu}{T}$ , т. е.  $\nu_1 = \frac{T_1 \nu}{T}$ , формула Вина даёт

$$\rho(\nu_1, T_1) = \nu_1^3 F\left(\frac{\nu_1}{T_1}\right) = \nu_1^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{T_1^3}{T^3} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{T_1^3}{T^3} \rho(\nu, T).$$

Таким образом, достаточно ординату каждой точки кривой  $\rho(\nu, T)$  умножить на отношение  $T_1^3/T^3$ , чтобы получить кривую  $\rho(\nu_1, T_1)$ .

Во-вторых, поскольку формула Вина выведена при помощи термодинамики, она безусловно верна, вследствие чего любая другая формула, полученная при помощи каких-либо специальных предположений о механизме излучения, обязательно должна удовлетворять требованиям, выраженным в этой формуле, т. е. содержать (кроме постоянных) куб частоты и функцию отношения  $\nu/T$ .

Наконец, несмотря на присутствие неявной функции  $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ , формула Вина ведёт к некоторым совершенно определённым количественным соотношениям.

В этом можно убедиться, прежде всего вычислив при помощи этой формулы интегральную плотность излучения  $u$ :

$$u = \int_0^{\infty} \rho_\nu d\nu = \int_0^{\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu.$$

\*) Вывод закона Вина можно найти в большом числе руководств по теоретической физике, в том числе в книгах М. Планка, Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935, и Введение в теоретическую физику, ч. V, ОНТИ, 1935. Краткое изложение теории излучения, отличающееся исключительной ясностью, дано в книге Г. А. Лорентца, Теория излучения, Гостехиздат, 1941.

Вводя новую переменную  $\nu/T = \xi$ , мы имеем

$$u = T^4 \int_0^{\infty} \xi^3 F(\xi) d\xi.$$

Если мы обозначим величину, получающуюся при вычислении интеграла, через  $\alpha$ , то получим

$$u = \alpha T^4, \quad (78,3)$$

т. е. известный закон *Стефана — Больцмана*.

Для дальнейшего целесообразно перейти от распределения по частотам к распределению по длинам волн. С этой целью необходимо принять во внимание прежде всего, что энергия, заключённая в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , равна  $\rho_\nu d\nu$  (но не  $\rho_\nu l$ ); та же энергия, выраженная через длины волн, равна, очевидно,  $\rho_\lambda d\lambda$ . Поэтому для перехода от распределения по частотам к распределению по длинам волн следует пользоваться соотношением

$$\rho_\nu d\nu = \rho_\lambda d\lambda; \quad (78,4)$$

далее, надо заменить  $\nu$  и  $d\nu$  через  $\lambda$  и  $d\lambda$ :

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad |d\nu| = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda. \quad (78,5)$$

Принимая всё это во внимание, получим

$$\rho_\lambda d\lambda = \rho_\nu d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda. \quad (78,6)$$

Воспользуемся теперь условием максимума  $\frac{d\rho_\lambda}{d\lambda} = 0$ . Дифференцируя (78,6), получаем

$$\frac{c^4}{\lambda^6} \left(\frac{c}{\lambda T}\right) F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) + \frac{5c^4}{\lambda^6} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = 0,$$

или, наконец, вводя обозначение  $\frac{c}{\lambda T} = \eta$  и сокращая,

$$\eta F'(\eta) + 5F(\eta) = 0. \quad (78,7)$$

Решая это уравнение, мы получим для  $\eta$  какое-то определённое численное значение  $\eta = \text{const.}$ , а это даёт  $\frac{c}{\lambda_{\max} T} = \text{const.}$ , где через  $\lambda_{\max}$  обозначена длина волны, отвечающая  $\rho_{\lambda_{\max}}$ , или, так как  $c$  есть величина постоянная,

$$\lambda_{\max} T = \text{const.} = b. \quad (78,8)$$

Но это — хорошо известный закон *смещения Вина*: длина волны, отвечающая максимальной энергии в спектре, обратно пропорциональна абсолютной температуре.



## § 79. Экспериментальное исследование законов теплового излучения

В § 77 мы видели, что искусственное построение модели абсолютно чёрного тела позволяет изучать экспериментальным путём свойства равновесного излучения и, в частности, — исследовать распределение энергии в спектре этого излучения. Для практического осуществления модели чёрного тела необходимо обеспечить возможность равномерного нагревания стенок полости и выход

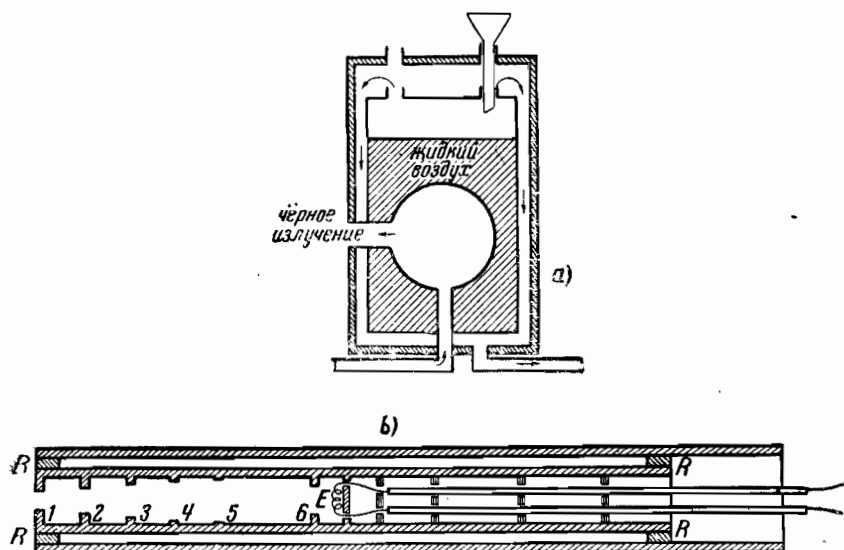


Рис. 116. Две модели чёрного тела: а) простейшая модель с температурной баней; б) чёрное тело, применяемое для исследования излучения при высоких температурах.

излучения наружу через малое отверстие. На рис. 116, а изображено чёрное тело, впервые построенное Луммером и Прингсгеймом. Оно представляет собою металлический сосуд с двойными стенками. Пространство между стенками используется в качестве «температурной бани» для поддержания определённой и равномерной температуры. Это достигается путём пропускания пара кипящей воды или для низких температур — путём наполнения льдом, твёрдой углекислотой, жидким воздухом и т. д.

Для исследования излучения при высоких температурах применяется чёрное тело иной конструкции (рис. 116, б). Цилиндр из платиновой жести, через который пропускается электрический ток, служит для равномерного нагревания внутреннего фарфорового цилиндра  $R$ . Температура внутри цилиндра измеряется тер-

мопарой  $E$ ; диафрагмы 1, 2, 3, ... предохраняют от охлаждения проникающим снаружи воздухом.

При помощи подобных моделей чёрного тела были экспериментально исследованы законы излучения, точно определены его константы и изучено спектральное распределение яркости излучения. Ряд кривых распределения энергии в спектре абсолютно чёрного тела для различных температур приведён на рис. 117. Все кривые имеют резко выраженный максимум и обнаруживают при повышении температуры смещение этого максимума в сторону коротких волн, требуемое законом Вина.

### § 80. Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы

В теоретическом исследовании проблемы излучения абсолютно чёрного тела важную роль сыграла одна весьма общая теорема классической статистической механики — так называемая теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Нам необходимо теперь ознакомиться с содержанием этой теоремы.

Представим себе систему большого числа частиц, например газ, состоящий из одноатомных молекул. Полная энергия этого газа есть, очевидно, сумма кинетических энергий поступательного движения его молекул. Если бы мы могли измерять кинетическую энергию отдельных молекул, — мы бы получили для разных молекул весьма различные значения. Однако при постоянной температуре средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну молекулу, есть вполне определённая величина. Если мы выделим какую-нибудь часть объёма газа, состоящую из достаточного числа молекул, то средняя кинетическая энергия молекулы, вычисленная для этой части объёма, будет равна средней кинетической энергии, вычисленной для другой части объёма при условии, что температура газа везде одинакова. То же будет верно и в том случае, если газ является смесью молекул различной массы.

Кинетическая энергия молекул одного моля одноатомного газа равна  $E_k = \frac{1}{2} Nm\bar{v}^2$  и так как, с другой стороны, согласно

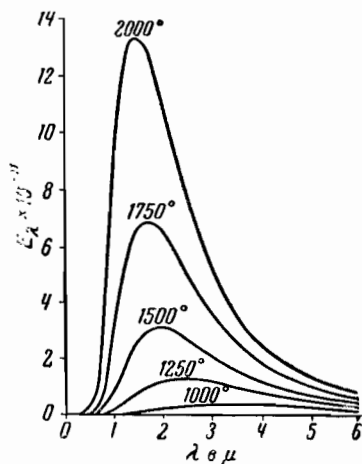


Рис. 117. Кривые распределения энергии в спектре абсолютно чёрного тела. По оси ординат отложена плотность энергии, приходящейся на каждую длину волны.

кинетической теории газов  $pV = RT = \frac{1}{3} N m \bar{v}^2$ , то  $m \bar{v}^2 = 3 \frac{R}{N} T = 3kT$  и

$$E_k = \frac{3}{2} NkT.$$

Если молекулы одноатомного газа рассматривать как гладкие идеально упругие шары, то конфигурация системы  $N$  таких шаров полностью определяется  $3N$  декартовыми координатами их центров тяжести. Мы говорим, что система имеет  $3N$  степеней свободы. Пусть координаты центра тяжести  $i$ -го шара будут  $x_i, y_i, z_i$ ; соответствующие им составляющие скорости будут  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ . Кинетическую энергию всей системы мы можем написать в виде суммы  $3N$  квадратичных членов:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 + \dots + \frac{1}{2} m \dot{x}_N^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_N^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}_N^2.$$

Если каждому квадратичному члену этой суммы, т. е. каждой степени свободы, приписать одну и ту же среднюю кинетическую энергию, равную  $\frac{1}{2} kT$ , то полная энергия газа будет равна  $\frac{3}{2} NkT$  в согласии с предыдущим.

В рассмотренном простейшем случае этот результат очевиден. Классическая статистическая механика, основанная на механике Ньютона, показывает, однако, что он имеет место и в самом общем случае. Пусть, например, наш газ состоит из двухатомных молекул. Каждая из них имеет пять степеней свободы: три степени свободы поступательного перемещения центра тяжести и две степени свободы вращения около двух осей, перпендикулярных к линии, соединяющей атомы. И в этом случае для вычисления полной энергии газа следует каждой степени свободы (т. е. как степеням свободы поступательных перемещений, так и степеням свободы вращения) приписать одну и ту же среднюю энергию, равную  $\frac{1}{2} kT$ .

Пусть, наконец, мы имеем любую систему, конфигурация которой полностью определяется  $f$  лагранжевыми обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_f$ , так что система имеет  $f$  степеней свободы. Кинетическая энергия такой системы представится однородной квадратичной формой, содержащей члены с квадратами обобщенных скоростей и, вообще говоря, также члены с их попарными произведениями\*). Можно выбрать, однако, координаты  $q_1, q_2, \dots, q_f$  таким образом, чтобы кинетическая энергия представилась суммой  $f$  членов, содержащих только одни квад-

\*) См., например, Г. К. С л о в, Теоретическая механика, стр. 329, Гостехиздат, 1944.

раты обобщённых скоростей, т. е. имеющих вид  $\frac{1}{2} a_i \dot{q}_i^2$ ; при этом коэффициенты  $a_i$ , вообще говоря, уже не будут просто равны массам  $m_i$ . Например, в полярных координатах для  $i$ -й частицы

$$W = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} m_i r_i^2 \sin^2 \theta_i \dot{\varphi}_i^2,$$

так что  $a_{r_i} = m_i$ ,  $a_{\theta_i} = m_i r_i^2$ ,  $a_{\varphi_i} = m_i r_i^2 \sin^2 \theta_i$ . Каковы бы, однако, ни были выбранные координаты, если кинетическая энергия содержит *только* квадратичные члены, на каждый из этих  $f$  членов, т. е. на каждую степень свободы, приходится согласно упомянутой теореме статистической механики одна и та же *средняя* кинетическая энергия, равная  $\frac{1}{2} kT$ .

До сих пор речь шла только о кинетической энергии. Имеются, однако, случаи, когда и потенциальную энергию можно вычислить столь же простым способом. Если, например, система состоит из линейных гармонических осцилляторов, то ввиду того, что средняя потенциальная энергия линейного гармонического осциллятора равна его средней кинетической, на каждую степень свободы придётся энергия, равная  $\frac{1}{2} kT + \frac{1}{2} kT = kT$ .

В общем случае системы, способной совершать малые колебания, можно найти такие координаты, в которых не только кинетическая энергия представится в виде суммы квадратичных членов вида  $\frac{1}{2} a_i \dot{q}_i^2$ , но и потенциальная энергия будет суммой квадратичных членов  $\frac{1}{2} b_i q_i^2$ ; число последних также равно числу степеней свободы системы \*). Выбранные таким образом *нормальные координаты* характеризуются тем, что для каждой из них зависимость от времени представляется простой синусоидальной функцией, а средняя кинетическая энергия соответствующих собственных колебаний равна средней потенциальной (см. упражнение к этому параграфу). Движение системы будет в этом случае суперпозицией  $f$  линейных гармонических осцилляторов; полная энергия будет суммой  $2f$  квадратичных членов. На каждый член приходится *средняя* энергия, равная  $\frac{1}{2} kT$ , следовательно, полная энергия будет  $fkT$ . В этом и состоит теорема о равномерном распределении энергии.

\*) Доказательство см. в руководствах по теории линейных колебаний, например: Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Теоретическая механика, т. III, стр. 411, ОНТИ, 1934.

У п р а ж н е н и е. Кинетическая и потенциальная энергии системы, способной совершать малые колебания в нормальных координатах, представляются в виде

$$T = \frac{1}{2} a_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \dot{q}_2^2 + \dots + \frac{1}{2} a_f \dot{q}_f^2,$$

$$U = \frac{1}{2} b_1 q_1^2 + \frac{1}{2} b_2 q_2^2 + \dots + \frac{1}{2} b_f q_f^2.$$

Написать уравнения Лагранжа в этих координатах и убедиться в том, что решения их будут

$$q_1 = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b_1}{a_1}} t + \delta_1\right), \quad q_2 = A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}} t + \delta_2\right), \quad \dots$$

Пользуясь этим, написать выражения для потенциальной и кинетической энергий для каждого из собственных колебаний и убедиться в том, что их средние значения между собой равны.

### § 81. Формула Рэлея — Джинса

Рэлея впервые воспользовался теоремой о равномерном распределении энергии для вычисления плотности электромагнитной энергии в замкнутой полости. Основанием для применения этой теоремы в данном случае служит то, что она обладает весьма большой общностью. Средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы, не зависит от специальных свойств системы и от характера обмена энергией между её частями. Если мы представим себе полость объёма  $V$ , не содержащую материи (т. е. вакуум) и окружённую идеально отражающими стенками, нагретыми до температуры  $T$ , то в этой полости будет существовать электромагнитное поле в виде системы бесконечно большого числа стоячих электромагнитных волн. Число степеней свободы такой системы будет равно числу собственных колебаний, которые способен совершать объём  $V$ , заполненный *сплошной* (т. е. не состоящей из отдельных частиц) средой. Если подсчитать это число собственных колебаний в интервале частот между  $\nu$  и  $\nu + \Delta\nu$  и каждому из них приписать среднюю энергию  $\frac{1}{2} kT$ , то будет найдена для этого интервала частот часть энергии поля, соответствующая кинетической энергии. Известно, однако, что энергию электромагнитного поля можно разложить на магнитную и электрическую и рассматривать магнитную энергию как кинетическую, а электрическую — как потенциальную. В случае излучения обе эти энергии друг другу равны и, следовательно, полная энергия, приходящаяся на одну степень свободы (одно собственное колебание), и в этом случае будет равна в среднем  $kT$ .

Таким образом, отыскание плотности энергии для интервала частот  $\nu$ ,  $\nu + d\nu$ , т. е. функции  $\rho_\nu d\nu$ , сводится к отысканию числа собственных колебаний этого интервала частот для объёма, запол-

ненного сплошной средой. Соответствующие вычисления были сделаны сначала Рэлеем, а затем Джинсом. Полученная ими формула для  $\rho_\nu d\nu$  носит название формулы Рэля—Джинса. Следует заметить, что формула Рэля—Джинса может быть выведена и другими способами, но метод Рэля особенно ценен потому, что он с большой ясностью вскрывает сущность затруднения классической физики, описанного в § 75.

Подсчёт интересующего нас числа собственных колебаний можно провести способом, который мы опишем в общих чертах без детальных вычислений. Рассмотрим полость объёма  $V$  и положим, что она заполнена *сплошной средой*, способной совершать колебания. Задача состоит в отыскании числа собственных колебаний такой непрерывной системы, принадлежащих интервалу  $\nu, \nu + \Delta\nu$ .

Можно показать, что если длина волны мала по сравнению с линейным протяжением полости, то число собственных колебаний  $f(\lambda) d\lambda$  с длинами волн, лежащими между  $\lambda$  и  $\lambda - \Delta\lambda$ , соответствующими интервалу частот  $\nu, \nu + \Delta\nu$ , будет пропорционально объёму полости  $V$  и интервалу  $\Delta\lambda$

$$f(\lambda) \Delta\lambda = C \varphi(\lambda) V \Delta\lambda,$$

где  $C$  — постоянное число. Но так как  $f(\lambda) d\lambda$  должно быть безразмерным числом, а  $V \Delta\lambda$  имеет размерность  $см^3$ , то  $\varphi(\lambda)$  должна иметь размерность  $см^{-3}$ . Итак,  $\varphi(\lambda) = \lambda^{-4}$  и

$$f(\lambda) \Delta\lambda = C \lambda^{-4} V \Delta\lambda. \quad (81,1)$$

Вычисление показывает, что постоянная  $C$  для случая газа, заполняющего полость, равна  $4\pi$ , для электромагнитного поля — равна  $8\pi$  и для упругого твёрдого тела —  $12\pi$ . Причина, вследствие которой коэффициенты  $C$  в этих трёх случаях относятся как 1:2:3, очевидна. В случае газа возможны только продольные колебания, в случае электромагнитного поля — только поперечные, но существует два вида поперечных независимых волн, соответствующих двум взаимно перпендикулярным состояниям поляризации; наконец, в случае упругой среды возможны как поперечные, так и продольные колебания. Итак, для электромагнитных волн

$$f(\lambda) d\lambda = 8\pi V \lambda^{-4} d\lambda.$$

Это и есть искомое число собственных колебаний. По теореме о равномерном распределении энергии каждому из них следует приписать среднюю энергию  $kT$ . Следовательно, полная энергия в объёме  $V$  будет

$$8\pi V \lambda^{-4} d\lambda kT, \quad (81,2)$$

а плотность энергии отсюда получается равной

$$\rho_\lambda d\lambda = 8\pi kT\lambda^{-4} d\lambda. \quad (81,3)$$

Это и есть формула Рэля—Джинса. Для поверхностной яркости излучения  $I_\lambda$  получаем из (81,3) при помощи соотношения

$I_\lambda = \frac{c}{8\pi} \rho_\lambda$  формулу

$$I_\lambda d\lambda = ckT\lambda^{-4} d\lambda. \quad (81,4)$$

## § 82. «Ультрафиолетовая катастрофа»

Проанализируем теперь формулу Рэля—Джинса и посмотрим, в какой степени она даёт результаты, согласные с экспериментом. Для этого мы прежде всего перейдём от распределения по длинам волн к распределению по частотам. Для интервала длин волн между  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$  имеем

$$\rho_\lambda d\lambda = \rho_\nu d\nu, \quad (78,4)$$

и

$$|d\lambda| = \frac{c}{\nu^2} d\nu. \quad (78,5)$$

При помощи этих соотношений получаем из формулы (81,3)

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu. \quad (82,1)$$

Эта формула удовлетворяет термодинамическому закону Вина  $\rho_\nu d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ , так как её можно переписать в виде

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} k \frac{T}{\nu} d\nu.$$

Несмотря на это, формула Рэля—Джинса ведёт к очевидному абсурду. Действительно, вычислим при помощи (82,1) интегральную плотность излучения

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 d\nu = \infty!$$

Это означает, что равновесие между материальными телами и излучением могло бы наступить только при бесконечной плотности излучения (см. конец § 75). Другими словами, осцилляторы излучающего тела должны были бы излучать энергию до тех пор, пока их температура не упала бы до абсолютного нуля. В § 75 мы уже разъяснили, что именно такой результат и должен получаться, если допустить применимость классической механики к микроскопическим излучающим системам. С другой стороны, однако, этот результат самым резким образом противоречит опыту, который

показывает, что равновесие между излучением и его материальными центрами возможно при любой температуре и что при этом равновесии, как раз наоборот, плотность энергии излучения очень мала по сравнению с плотностью энергии, заключающейся в материальных телах.

Несмотря на явную ошибочность формулы Рэля—Джинса, интересно сравнить её с результатами опыта. Для этого удобнее всего воспользоваться этой формулой в виде (81,3) или (81,4), где даётся распределение по длинам волн. Обратившись к рис. 117, на котором приведены экспериментальные кривые распределения энергии в спектре абсолютно чёрного тела при различных температурах, мы видим, что все эти кривые имеют максимум и круто спадают в сторону коротких длин волн. Напротив, формула Рэля—Джинса даёт монотонное и притом быстрое ( $\lambda^{-4}$ ) возрастание в сторону коротких волн. Однако для длинных волн или для высоких температур она хорошо согласуется с экспериментом. Это схематически показано на рис. 118.

Так как формула Рэля—Джинса, опирающаяся на классическую физику, в резком противоречии с опытом, приводит к заключению, что в спектре теплового излучения большая часть энергии приходится на коротковолновую часть спектра, то это положение было названо П. С. Эренфестом «ультрафиолетовой катастрофой».

Подводя итог сказанному, мы видим, что в теории теплового излучения классическая физика потерпела решительное поражение. По образному выражению Лоренца, «уравнения классической физики оказались неспособными объяснить, почему угасшая печь не испускает жёлтых лучей наряду с излучением больших длин волн».

### § 83. Формула Планка

Формула Рэля—Джинса, как мы видели, основана на самых общих законах классической физики и не требует для своего вывода никаких специальных гипотез. В 1896 г. Вин предложил другую формулу, хорошо согласующуюся с результатами эксперимента как раз в той области спектра, где формула Рэля—Джинса неприменима. Эта формула Вина, будучи написана для  $I_\lambda$ , такова:

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}, \quad (83,4)$$

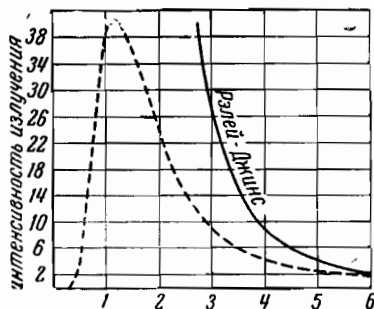


Рис. 118. Сравнение экспериментальной кривой распределения энергии в спектре (пунктирная кривая) с кривой, рассчитанной по формуле Рэля—Джинса.



где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные. Для вывода своей формулы Вин должен был сделать некоторые гипотезы о механизме испускания излучения, в соответствии с которыми распределение излучения по частотам должно быть аналогично максвелловскому распределению скоростей между молекулами газа.

Формула Вина оказалась, однако, применимой только для коротковолновой ветви кривой распределения энергии в спектре абсолютно чёрного тела. Таким образом, к концу XIX столетия существовали две формулы, каждая из которых соответствовала экспериментальным данным в ограниченном участке спектра, но ни одна из них не описывала всю экспериментальную кривую. Около 1900 г. Планку удалось найти сначала чисто эмпирически формулу, которая хорошо согласовалась с данными опыта и в двух предельных случаях (для длинных и для коротких волн) переходила соответственно в формулу Рэля—Джинса либо в формулу Вина. Формула Планка для  $I_\lambda$  такова:

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \quad (83,2)$$

Легко убедиться в том, что эта формула на самом деле представляет собою результат интерполяции между формулами Рэля—Джинса и Вина. Действительно, для  $\lambda T \gg 1$  (длинные волны или высокие температуры) можно разложить в ряд экспоненциальный член в знаменателе формулы Планка, ограничившись первыми двумя членами разложения:

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \dots$$

В этом случае формула Планка даёт

$$I_\lambda = \frac{c_1}{c_2} \lambda^{-4} T,$$

что, очевидно, совпадает с формулой Рэля—Джинса

$$I_\lambda = ck \lambda^{-4} T. \quad (81,4)$$

Напротив, для случая  $\lambda T \ll 1$  (короткие волны или низкие температуры)  $\frac{c_2}{\lambda T} \gg 1$  и в знаменателе формулы Планка можно пренебречь 1 по сравнению с экспоненциальным членом. При этом формула Планка непосредственно даёт

$$I_\lambda = e_1 e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \cdot \lambda^{-5},$$

т. е. переходит в формулу Вина (83,1).

О степени соответствия между формулой Планка и экспериментальными данными можно судить по рис. 119, где по оси ординат отложены процентные отклонения. Кружками и крестиками нанесены экспериментальные результаты. Приведённые

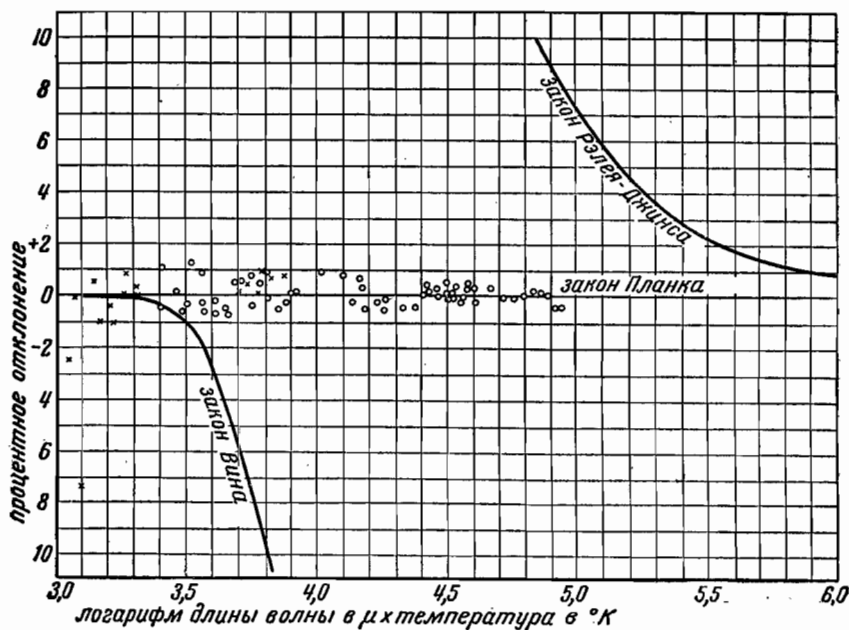


Рис. 119. Экспериментальная проверка формулы Планка.

на том же рисунке кривые, построенные по формулам Вина и Рэлея—Джинса, хорошо иллюстрируют асимптотический характер этих формул.

## § 84. Гипотеза квантов энергии

Формула Планка, как было показано в предыдущем параграфе, решала задачу об отыскании математического выражения закона распределения энергии в спектре абсолютно чёрного тела. Оказалось, однако, что для вывода этой формулы необходимо сделать гипотезу, коренным образом противоречащую всей системе представлений классической физики, а именно гипотезу о том, что энергия микроскопических систем (атомы, молекулы) может принимать только определённые, дискретные значения.

При выводе своей формулы Планк схематизировал излучающие материальные центры, рассматривая их как линейные

гармонические осцилляторы, несущие электрический заряд, при посредстве которого они могут обмениваться энергией с окружающим электромагнитным полем. Гипотеза, которую Планк положил в основу своего вывода в современной, более точной формулировке, такова: *осцилляторы могут находиться только в некоторых избранных состояниях, в которых их энергия является целым кратным наименьшего количества энергии  $\epsilon_0$ :*

$$\epsilon_0, 2\epsilon_0, \dots, n\epsilon_0, \dots;$$

при излучении или поглощении осцилляторы переходят из одного из этих состояний в другое скачком, минуя промежуточные состояния. На основании этой гипотезы Планк вывел формулу для объёмной спектральной плотности излучения  $\rho_\nu$  в следующем виде:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (84,1)$$

Но любая правильная формула излучения должна удовлетворять термодинамическому закону Вина  $\rho_\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ . Легко видеть, что для того, чтобы формула (84,1) удовлетворяла этому закону, необходимо положить

$$\epsilon_0 = h\nu, \quad (84,2)$$

где  $\nu$  — частота колебаний осциллятора ( $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{j}{m}}$ ), а  $h$  — универсальная постоянная, имеющая размерность [энергия  $\times$  время]. Механическая величина, имеющая такую размерность, называется *действием*.

Подставляя (84,2) в (84,1), имеем

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (84,3)$$

Это и есть формула Планка в том виде, в каком ею обычно пользуются в теоретической физике.

Из (84,3) следует выражение для спектральной яркости излучения  $I_\nu = \frac{c}{8\pi} \rho_\nu$ , а именно,

$$I_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (84,4)$$

Для того чтобы от формулы (84,4) перейти к формуле для  $I_\lambda$ , которой, как сказано, пользуются в практических приме-

ниях, следует воспользоваться обычными соотношениями

$$I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda, \quad |d\nu| = \frac{c d\lambda}{\lambda^2}.$$

Формула (84,4) при этом даёт

$$I_\lambda d\lambda = \frac{hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} d\lambda. \quad (84,5)$$

Полагая

$$hc^2 = c_1, \quad \frac{hc}{k} = c_2,$$

приведём формулу (84,4) к виду

$$I_\lambda d\lambda = c_1 \lambda^{-5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda, \quad (84,6)$$

совпадающему с формулой (83,2) предыдущего параграфа.

Для случая  $h\nu \ll kT$ , т. е. для малых частот (длинных волн) или высоких температур, имеем приближённо

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT},$$

и формула Планка (84,3) даёт

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

— формулу Рэля — Дживса для  $\rho_\nu$  (82,1). Для случая же  $h\nu \gg kT$ , т. е. для высоких частот или низких температур, формула Планка (84,3) приводит к формуле, совпадающей с формулой Вина для  $\rho_\nu$ :

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

Универсальная постоянная  $h$  — постоянная Планка, — как известно, играет в современной физике выдающуюся роль. Её значение может быть определено экспериментально самыми разнообразными методами. В частности, законы излучения абсолютно чёрного тела дают

$$h = 6,53 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}.$$

Методы более точного определения  $h$  будут рассмотрены в главе IX. Здесь мы отметим только, что именно крайне малая величина  $h$  (порядка  $10^{-27}$  эрг · сек) является причиной того, что прерывность, требуемая законами атомной физики, совершенно не сказывается при изучении макроскопических явлений.

Подчеркнём в заключение ещё раз, что установление формулы Планка знаменовало глубокий разрыв с классической механикой. В самом деле, тот факт, что излучение подчиняется не формуле Рэлея—Джизса, но формуле Планка, указывал на неприменимость — или во всяком случае ограниченную применимость — теоремы о равномерном распределении энергии к статистическому равновесию между веществом и излучением. Но теорема о равномерном распределении является неизбежным следствием статистической механики, основанной на классической механике в её гамильтоновой форме. Таким образом, 1900 г., когда Планк впервые формулировал гипотезу квантов энергии, был не только первым годом нового столетия в календарном летоисчислении, но и началом новой эры в развитии теоретической физики.

**У п р а ж н е н и е.** Пользуясь формулой Планка для  $\rho_\nu$ , вычислить интегральную плотность излучения

$$u = \int_0^{\infty} \rho_\nu d\nu$$

и показать, что

$$u = \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4 \left( 1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{3^4} + \dots \right)$$

(вывод закона Стефана—Больцмана из формулы Планка). [ Указание.

При интегрировании ввести новую переменную  $\xi = \frac{h\nu}{kT}$ . ]

## ГЛАВА VII

### УРОВНИ ЭНЕРГИИ АТОМОВ

#### § 85. Планетарная модель атома и квантовые постулаты Бора

В главе III мы видели, что атом построен из тяжёлого положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. По классической механике такая система может находиться в равновесии лишь при условии, если электроны будут обращаться вокруг ядра по каким-то орбитам. Однако, с точки зрения *классической электродинамики*, такой атом был бы всё же неустойчив, так как при движении с ускорением электроны должны были бы излучать энергию в виде электромагнитных волн (§ 71) и, следовательно, постепенно падать к ядру. Вместе с тем и частота обращения при этих условиях должна была бы непрерывно меняться, и мы получили бы сплошной спектр вместо резких спектральных линий. Тот факт, что этого на самом деле не наблюдается и атомы испускают резкие спектральные линии, указывает на их замечательную устойчивость, противоречащую классической электродинамике.

В предыдущей главе мы видели, что постулат о существовании устойчивых стационарных состояний осцилляторов является необходимой предпосылкой для вывода правильной формулы излучения абсолютно чёрного тела. Нильсу Бору (1913 г.) принадлежит заслуга отчётливой формулировки этого положения и обобщения его на *любые атомные системы*. Тем самым впервые с полной ясностью была показана неприменимость классической физики к внутриатомным движениям. Идея о квантах, высказанная Планком в применении к обмену энергии между полем излучения и линейными осцилляторами, приобрела универсальное значение как выражение наиболее характерной особенности процессов внутриатомного мира.

В основу развитой им квантовой теории строения атома Бор положил следующие два постулата:

1. Атомы и атомные системы могут длительно пребывать только в определённых состояниях—стационарных состояниях,— в которых, несмотря на происходящие в них движения заряжен-

ных частиц, они не излучают и не поглощают энергию. В этих состояниях атомные системы обладают энергиями, образующими *дискретный* ряд:  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Состояния эти характеризуются своей устойчивостью; всякое изменение энергии в результате поглощения или испускания электромагнитного излучения или в результате соударения может происходить только при полном переходе (скачком) из одного из этих состояний в другое.

II. При переходе из одного стационарного состояния в другое атомы испускают или поглощают излучение только строго определённой частоты. Излучение, испускаемое или поглощаемое при переходе из состояния  $E_m$  в состояние  $E_n$ , монохроматично, и его частота  $\nu$  определяется из условия

$$h\nu = E_m - E_n \quad (85,1)$$

(условие частот Бора).

Оба эти постулата резко противоречат требованиям классической электродинамики, так как по первому постулату атомы не излучают, несмотря на то, что образующие их электроны совершают ускоренное движение (например, обращение по замкнутым орбитам), а по второму — испускаемые частоты не имеют ничего общего с частотами периодических движений электронов.

## § 86. Опыты Франка и Герца

Формулированные в предыдущем параграфе квантовые постулаты Бора нашли наиболее непосредственное экспериментальное подтверждение в опытах Дж. Франка и Густава Герца, к описанию которых мы и переходим.

Идея этих опытов заключается в следующем: атомы или молекулы более или менее разрежённого газа обстреливаются медленными электронами; при этом исследуется распределение скоростей электронов до и после соударений. Если соударения происходят упруго, то распределение скоростей в результате соударений не изменится, и наоборот, при неупругих соударениях часть электронов теряет свою энергию, отдавая её атомам, с которыми они испытали соударения, и распределение скоростей меняется.

В результате опытов Франка и Герца оказалось, что:

1. При скоростях электронов, меньших некоторой критической скорости, соударение происходит вполне упруго, т. е. электрон не передаёт атому своей энергии, но отскакивает от него, изменяя лишь направление своей скорости.

2. При скоростях, достигающих критической скорости, удар происходит неупруго, т. е. электрон теряет свою энергию и передаёт её атому, который при этом переходит в другое стационарное состояние, характеризующееся большей энергией.

Таким образом, атом или вообще не воспринимает энергию (упругий удар), а если воспринимает её, то только в количествах, равных разности энергий в двух стационарных состояниях.

Прежде чем переходить к более детальному описанию этих опытов и их результатов, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с осуществлением этих опытов. Основные требования, которым должна удовлетворять экспериментальная установка, предназначенная для изучения соударений медленных электронов с атомами, заключаются в следующем:

1. Источник электронов должен давать достаточно большое число медленных электронов с определённым начальным распределением скоростей.

2. Этим электронам можно сообщить любую, заранее известную скорость путём воздействия приложенного извне ускоряющего потенциала.

3. Ускоренные электроны должны испытывать соударения с исследуемыми атомами или молекулами в определённом месте аппарата.

Для получения пучков медленных электронов, удовлетворяющих указанным требованиям, пользуются только горячими катодами. Электроны, в избытке получаемые от этих катодов, ускоряются приложенным к катоду потенциалом  $V$ , который может меняться по произволу. Скорость  $v$  (в  $см/сек$ ), которую приобретает неподвижный электрон под действием ускоряющего потенциала  $V$  вольт, находится из соотношения

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{eV}{300},$$

откуда, полагая

$$\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot e^{-1} = 5,27 \cdot 10^{17} \text{ CGSE} \cdot e^{-1},$$

получаем

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} \frac{V}{300}} = 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{V} \frac{см}{сек}.$$

Таким образом, при ускоряющем потенциале в 1 V скорость электронов составляет около  $6 \cdot 10^7$   $см/сек$ . Отсюда видно, что термин «медленные электроны» имеет весьма относительное значение.

Если исследовать зависимость силы тока от ускоряющего напряжения и затем построить график, откладывая по оси абсцисс ускоряющий потенциал, а по оси ординат — соответствующую силу тока, то получается кривая (так называемая вольтамперная характеристика), типичный вид которой изображён на рис. 120. У этой кривой обращают на себя внимание следующие характерные черты:

1) При некотором потенциале сила тока становится независимой от напряжения; это — «ток насыщения», возникновение кото-



рого объясняется тем, что все электроны, освобождаемые в единицу времени при данной температуре накала из катода, переносятся к аноду.

2) При ускоряющем потенциале, равном нулю, ток не только не падает до нуля, но продолжает оставаться независимым от напряжения также и при потенциалах обратного знака, т. е. при тормозящих потенциалах, вплоть до некоторого потенциала— $K$ . При дальнейшем увеличении тормозящего потенциала ток убывает, постепенно спадая к нулю.

Для объяснения этих особенностей следует прежде всего принять во внимание, что катод и анод в трубке с горячим катодом всегда бывают сделаны из различных металлов. Поэтому между

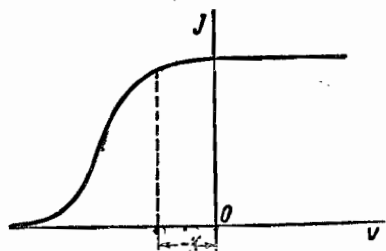


Рис. 120. Вольтамперная характеристика трубки с горячим катодом.

катодом и анодом в отсутствии внешнего напряжения обязательно имеется *контактная* разность потенциалов. Если теперь внешний ускоряющий потенциал становится равным нулю, то электроны ещё подгоняются этой контактной разностью потенциалов. Для компенсации её необходимо приложить некоторый *тормозящий* потенциал  $K$ .

Когда этот потенциал приложен, то сила тока всё ещё остаётся отличной от нуля потому, что электроны

выходят из катода не с нулевой скоростью, но обладают конечными скоростями, распределёнными по закону Максвелла. Только тогда, когда задерживающий потенциал достигает такой величины, что его не могут преодолеть самые быстрые электроны, сила тока становится равной нулю.

Идея опытов, излагаемых в следующих параграфах, как уже было указано, состоит в том, что электронам, получившим определённое ускорение, предоставляется возможность испытывать соударения с атомами газов, вводимых при небольших давлениях в трубку. Для того чтобы установить, каков характер этих соударений, — упругие они или неупругие, очень часто бывает необходимо исследовать после соударений распределение скоростей между электронами. Это осуществляется при помощи метода задерживающего потенциала.

Пусть  $D$ —горячий катод (рис. 121), к которому приложен ускоряющий потенциал  $V$ . Ускоренные электроны направляются к пластинке  $A$ , перед которой расположена сетка  $N$ . Если зарядить эту сетку до потенциала  $+V_1$ , то в пространстве между  $N$  и  $A$  электроны будут двигаться в тормозящем поле. Только те из них, которые обладают кинетической энергией, достаточной для преодо-

ления тормозящего поля, достигнут пластинки  $A$ . Последняя через гальванометр  $G$  соединена с землёй. Таким образом, электроны, достигающие  $A$ , дают ток, отмечаемый гальванометром. Следует иметь в виду, что тормозящий потенциал  $P$ , препятствующий попаданию электрона на пластинку  $A$ , определяется не полной скоростью  $v$  электрона, но её составляющей  $v_s$ , нормальной к  $A$  (рис. 121): достигнуть  $A$  могут только те электроны, для которых имеет место соотношение

$$\frac{1}{2} m v_s^2 \geq \frac{1}{300} eP. \quad (86,1)$$

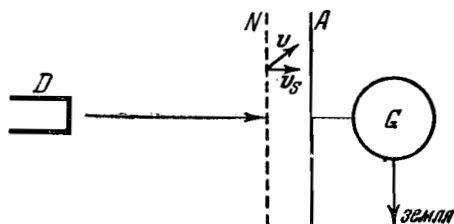


Рис. 121. Схема метода задерживающего потенциала.

Если постепенно увеличивать  $v_s$  и одновременно измерять ток гальванометра  $G$ , то в результате получается некоторая вольтамперная характеристика  $I$  (рис. 122). Эта вольтамперная характеристика позволяет вычислить распределение скоростей между электронами следующим образом. Если тормозящий потенциал

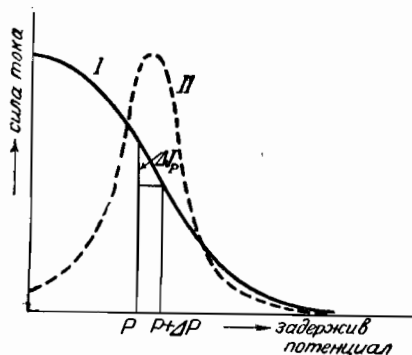


Рис. 122. Вольтамперная характеристика, снятая по методу задерживающего потенциала.

$f(P)$  есть функция распределения электронов по энергиям, то очевидно, что

$$f(P) = \frac{dJ}{dP}.$$

Из этого следует, что для нахождения кривой распределения энергии (скоростей) между электронами необходимо произвести

равен  $P$ , то соответствующая сила тока  $J_p$  пропорциональна числу электронов, обладающих энергией, равной или большей  $P$  электрон-вольт. При тормозящем потенциале  $P + \Delta P$  сила тока  $J_p - \Delta J_p$  пропорциональна числу электронов с энергией, большей или равной  $P + \Delta P$  электрон-вольт. Таким образом, величина  $\frac{\Delta J_p}{\Delta P} \Delta P$  есть мера числа электронов, приходящихся на интервал энергии между  $P$  и  $P + \Delta P$ . Поэтому если представить количество электронов, обладающих энергиями между  $P$  и  $P + dP$ , в виде  $f(P)dP$ , где

графическое дифференцирование вольтамперной характеристики  $I$  (рис. 122).

Кривая, полученная в результате дифференцирования вольтамперной характеристики  $I$ , показана пунктиром (кривая  $II$ , рис. 122).

### § 87. Упругие соударения

Франк и Герц показали прежде всего, что если энергия электронов не превосходит некоторой критической величины, то соударения между электронами и атомами происходят вполне упруго.

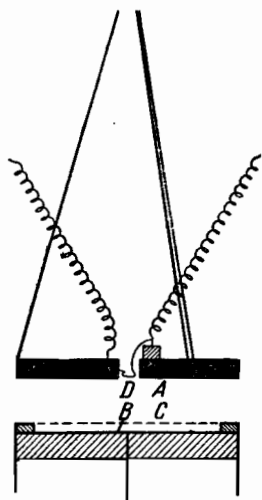


Рис. 123.

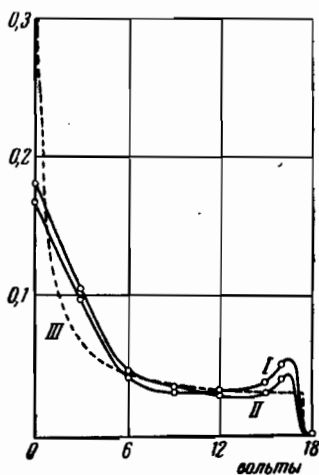


Рис. 124.

Это значит, что электрон в результате соударения изменяет только *направление* скорости, не теряя своей энергии. Для доказательства этого было поставлено несколько опытов, из которых мы опишем только один.

В центре металлического диска  $A$  (рис. 123) имеется отверстие, в котором помещается нить накала  $D$ . Диск подвешен на нитях в пространстве, где может создаваться любое давление газа. При помощи специального приспособления, действующего через шлиф, диск может быть поднят или опущен без нарушения вакуума. В пространстве между вторым диском  $B$  и сеткой  $C$  может быть создано задерживающее поле, при помощи которого измеряется распределение скоростей между электронами. Давление газа выбирается таким, чтобы в пространстве между сеткой  $C$  и воспринимающей пластинкой  $B$  электроны по возможности не испытывали

соударений. На рис. 124 представлено распределение энергии электронов в гелии при давлении 1,3 мм и при ускоряющем потенциале 18 В. Кривая *I* измерена при расстоянии *АС*, равном 4 мм, кривая *II*— при расстоянии 18 мм. Несмотря на то, что электроны во втором случае испытывают неизмеримо большее число соударений, чем в первом, обе кривые почти точно совпадают. Отсюда следует, что удары между электронами с энергией в 18 eV и атомами гелия происходят ещё вполне упруго.

Пунктирная кривая *III* на рис. 124 есть теоретическая кривая, рассчитанная в предположении, что вследствие соударений скорости электронов меняют своё направление так, что электроны, проходящие сквозь отверстия сетки *С*, имеют всевозможные направления в пределах полусферы. Как видно, эта кривая близко подходит к экспериментальным кривым.

Характер кривых требует дополнительного разъяснения.

Обращает на себя внимание тот факт, что функция распределения электронов по энергиям принимает наибольшее значение при энергии, равной нулю. Причина этого — чисто геометрическая. Теоретическая кривая *I*, как уже сказано, построена в предположении, что электроны в результате соударений, не меняя своей скорости по величине, имеют в пространстве между сеткой *С* и анодом всевозможные направления. Далее, необходимо принять во внимание, что в методе задерживающего потенциала при плоских электродах имеет значение только нормальная составляющая скорости (см. § 86). При совершенно равномерном распределении скоростей по направлениям число электронов, попадающих внутрь телесного угла  $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$  (рис. 125), будет

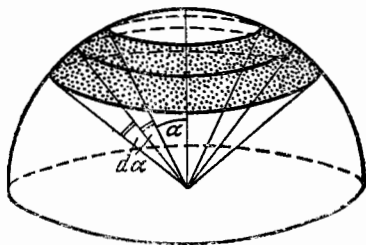


Рис. 125.

$$dN = N_0 d\Omega = 2\pi N_0 \sin \alpha d\alpha.$$

Из этого следует, что наибольшее число электронов приходится на угол  $\alpha$ , равный  $\frac{\pi}{2}$ . Но для таких электронов нормальная составляющая скорости равна нулю. Это и объясняет подъём кривой при переходе к нулевой энергии. Небольшой максимум, имеющийся на экспериментальных кривых при энергии, несколько меньшей 18 eV, несомненно обусловлен тем, что распределение по направлениям электронов, проходящих через сетку, не вполне хаотическое: заметная доля электронов сохраняет направление скорости, близкое к нормали.

### § 88. Неупругие соударения. Критические потенциалы

Для доказательства существования неупругих соударений Франком и Герцем была использована следующая установка. Электроны от нити накала  $D$  (рис. 121) ускорялись отрицательным потенциалом, наложенным на нить. В пространстве между  $D$  и  $N$  эти электроны испытывали многочисленные соударения и попадали в конце концов на воспринимающую пластинку  $A$ . Гальванометр  $G$ , соединённый с  $A$ , измерял ток пластинки. Сетка  $N$ , заряженная слабо положительно относительно  $A$  (в большинстве случаев до потенциала  $+0,5$  V), помещалась непосредственно перед пластинкой  $A$ .

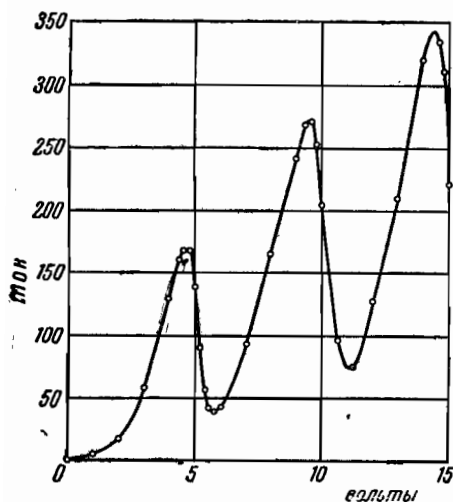


Рис. 126.

При увеличении ускоряющего потенциала от нуля ток первоначально возрастал (рис. 126), причём кривая тока имела обычный вид вольтамперных характеристик термоэлектронных приборов. Но при потенциале около 4,1 V ток внезапно резко падал, а затем вновь начинал возрастать до потенциала 9,0 V, при котором вновь обнаруживалось резкое падение тока и новое его возрастание до потенциала 13,9 V. Таким образом, вся кривая представляла собою ряд острых максимумов, отстоящих друг от друга на расстоянии 4,9 V. Тот факт, что расстояние между двумя соседними максимумами всегда составляло (с точностью до 0,1 V) 4,9 V, а первый максимум обнаруживался у 4,1 V, легко объясняется тем, что к наложенному извне ускоряющему потенциалу прибавляется контактная разность потенциалов, которая как бы смещает всю кривую влево, не изменяя расстояния между максимумами.

Истолкование максимумов кривой на основании сказанного в § 86 не представляет затруднений. До тех пор, пока энергия

Назначение сетки заключалось в том, чтобы вылавливать электроны, почти полностью потерявшие свою энергию вследствие неупругих соударений. Опыт производился в парах ртути при относительно высоком давлении (около 1 мм) и состоял в измерении тока пластинки  $A$  в зависимости от ускоряющего потенциала, наложенного на нить  $D$ .

При увеличении ускоряющего потенциала от нуля ток первоначально возрастал (рис. 126), причём кривая тока имела обычный вид вольтамперных характеристик термоэлектронных при-

электрона не достигнет  $4,9 \text{ V}$ , он испытывает с атомами ртути упругие соударения, и ток возрастает с увеличением потенциала по обычному закону. При потенциале  $4,9 \text{ V}$  удар становится неупругим, электрон отдаёт при соударении атому ртути всю свою энергию. Эти электроны не попадут на пластинку  $A$ , так как они будут выловлены обратно сеткой  $N_1$ , заряженной до  $+0,5 \text{ V}$ , и ток пластинки резко упадёт.

Если энергия электронов заметно превосходит  $4,9 \text{ V}$ , то такие электроны, потеряв часть своей энергии при неупругом соударении, сохраняют достаточный избыток энергии и потому, несмотря на наличие положительно заряженной сетки, достигают пластинки  $A$ , — ток вновь начинает возрастать.

Заметим, что, какова бы ни была энергия электронов, испытывающих первое неупругое соударение, они все придут к пластинке  $A$  с одной и той же энергией. Представим себе для большей ясности, что потенциал катода равен нулю, потенциал пластинки  $A$  равен  $+V_p$ , критический потенциал равен  $V_A$  (в данном случае  $V_A = 4,9 \text{ V}$ ), и положим, что сетка  $N$  удалена. Падение потенциала  $V_p$  происходит на всём протяжении от  $D$  до  $A$ . Пусть электрон испытывает неупругое соударение в месте, где потенциал равен  $V_x$ . Дойдя до этого места, он накопит энергию  $eV_x$ , а при неупругом соударении отдаст энергию  $eV_A$ . Таким образом, после соударения он будет обладать энергией  $e(V_x - V_A)$ . Разность потенциалов на остающемся пути до пластинки  $A$  будет  $V_p - V_x$ ; на этом пути электрон накопит ещё энергию  $e(V_p - V_x)$  и, следовательно, придя к пластинке  $A$ , будет обладать энергией

$$e(V_x - V_A) + e(V_p - V_x) = e(V_p - V_A).$$

Как мы видим, эта энергия совершенно не зависит от того места, где произошло первое неупругое соударение. Если ускоряющий потенциал  $V_p$  достаточно велик, так что  $V_p - V_A > 4,9 \text{ V}$ , то на остающемся пути электрон может испытать ещё одно или два (в зависимости от величины  $V_p - V_A$ ) неупругих соударения, и в этом заключается причина периодического повторения максимумов.

Мы видим, таким образом, что энергия в  $4,9 \text{ eV}$  имеет особое значение для атомов ртути. Меньшую энергию они воспринять не могут, так как при меньшей энергии бомбардирующих их электронов удар происходит вполне упруго; энергию же в  $4,9 \text{ eV}$  они воспринимают полностью. Но это и означает в согласии с первым постулатом Бора, что атом ртути может обладать не любыми запасами энергии, а только избранными. Если  $E_1$  будет запас энергии «невозбуждённого» атома ртути, то следующее возможное значение энергии атома будет  $E_1 + 4,9 \text{ eV}$ . Ускоряющий потенциал  $4,9 \text{ V}$  называется «первым критическим потенциалом» или «резонансным потенциалом» атома ртути. Такие же

резонансные потенциалы найдены и для других атомов. Например, для калия резонансный потенциал равен 1,63 V, для натрия 2,12 V, для гелия 21 V и т. д.

Само собою разумеется, что, кроме энергии, соответствующей первому критическому потенциалу, атомы могут обладать и другими, более высокими ступенями энергии возбуждения. Эти более высокие ступени возбуждения могут быть также найдены при помощи метода электронных соударений. Однако экспериментальная методика для этой цели должна быть видоизменена. К этому вопросу мы вернёмся в следующих параграфах.

### § 89. Усовершенствование экспериментальной методики

Описанный метод при многих преимуществах обладает существенными недостатками. В частности, он не даёт возможности разделить тесно лежащие максимумы, а между тем случаи, когда имеются близко расположенные ступени возбуждения, встречаются нередко. Расчёт показывает, что форма кривых существенно зависит от величины падения потенциала на протяжении одного свободного пробега  $\lambda$ , т. е. от величины  $\lambda \frac{dV}{dx}$ . Чем меньше

эта величина, тем острее максимумы, тем точнее определяются критические потенциалы и тем отчётливее разрешаются близко лежащие ступени возбуждения. Если, однако, выбрать условия, в которых  $\lambda \frac{dV}{dx}$  достаточно мало, то становится невозможным определение более высоких ступеней возбуждения. Для избежания этого

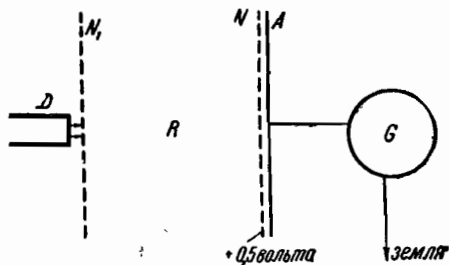


Рис. 127.

недостатка Франк и Герц видоизменили методику так, что накопление энергии электроном происходило в одной части прибора, а столкновение—в другой. С этой целью оказалось достаточным ввести вторую «сетку»  $N_1$  (рис. 127), расположенную от нити накала  $D$  на расстоянии, малом по сравнению со средней длиной свободного пути электрона. В таком случае электроны, получившие всю свою энергию на протяжении  $D-N_1$ , попадают в свободное от поля пространство  $R$  между двумя металлическими сетками и там испытывают многочисленные соударения с атомами газа. При выходе электронов из этого пространства через отверстия сетки  $N$  те из них, которые потеряли свою энергию, вновь вылавливаются этой сеткой, заряженной до потен-

циала  $+0,5$  V, и повторяется картина, описанная в предыдущем параграфе.

Наиболее изящное видоизменение этого метода было предложено Герцем, осуществившим следующую схему (рис. 128). Электроны от нити накала  $D$  ускорялись в пространство  $DN_1$  и сквозь отверстия сетки  $N_1$  попадали в свободное от поля пространство  $R$ , окружённое цилиндрической сеткой  $N_2$ . После многочисленных соударений эти электроны диффундировали через отверстия сетки  $N_2$  в пространство между  $N_2$  и сплошным металлическим цилиндром  $P$ . При помощи гальванометра ток цилиндра измерялся дважды: в отсутствии поля между  $N_2$  и  $P$  и при задерживающем потенциале в  $+0,2$  V. В первом случае на  $P$  попадали все электроны, диффундировавшие в пространство  $N_2P$ , во втором — «отсеивались» электроны, потерявшие энергию вследствие неупругих соударений. Разность обоих значений тока, делённая на величину первичного тока, очевидно, должна давать максимум при критическом значении ускоряющего потенциала, так как в этом случае значительное количество электронов теряет свою энергию и ток при наличии задерживающего потенциала становится весьма малым. При помощи этого метода оказалось возможным разделять максимумы, отстоящие на доли вольта, и обнаруживать слабо выраженные максимумы.

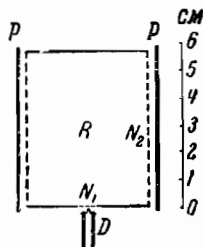


Рис. 128. Схема метода Герца.

## § 90. Одновременное определение всех ступеней возбуждения

Мы уже упоминали, что описанные методы можно применить и для определения высших ступеней энергии. С этой целью необходимо выбрать такие условия опыта, чтобы давление газа было возможно меньше. Это существенно потому, что при высоком давлении число соударений электрона с атомами газа настолько велико, что электрону достаточно набрать энергию, равную или немного превосходящую первый критический потенциал, чтобы вероятность её передачи атому сделалась весьма значительной. При достаточно низком давлении и достаточно высоком ускоряющем потенциале открывается возможность возбуждения и до более высоких стационарных состояний.

Однако непосредственно получаемые из опыта значения критических потенциалов ещё не дают истинных значений ступеней энергии, так как возможность двукратной или вообще многократной отдачи энергии всё ещё не исключается. Это ясно видно из следующего примера. Непосредственными наблюдениями в парах ртути получают следующие значения критических



потенциалов: 4,9; 9,8; 11,2; 13,5; 14,7; 16; 17,6; 19,3; 20,2; 21,2 V. В действительности же все эти потенциалы являются комбинациями двух основных:  $a = 4,9$  V и  $b = 6,7$  V, причём второй отдельно вовсе не наблюдается. В самом деле, легко видеть, что  $9,8 = 2a$ ;  $11,2 \approx a + b$ ;  $13,5 = 2b$ ;  $17,6 \approx a + 2b$ ;  $21,2 = 3a + b$  и т. д. Таким образом, интерпретация получающихся максимумов далеко не проста.

Значительно нагляднее те же высшие уровни энергии могут быть определены при помощи метода, предложенного Юзом, Рожанским и Мак-Милленом. Идея опыта состоит в следующем: строго однородный пучок электронов с энергией, превосходящей

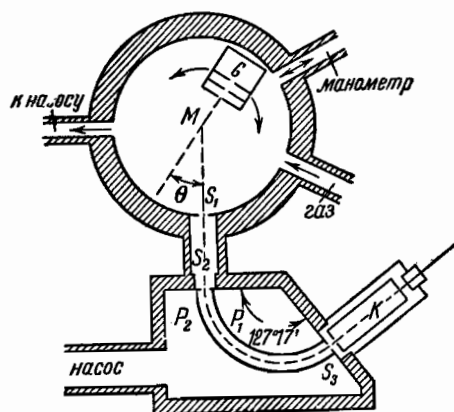


Рис. 129. Схема метода определения всех ступеней возбуждения.

Самый опыт осуществлялся следующим образом. Пучок электронов с энергией в 50 eV получался при помощи «электронной пушки» G (рис. 129). Этот пучок направлялся по диаметру металлического цилиндра, заключавшего гелий при очень высоком разрежении. Через щели  $S_1$  и  $S_2$  могли проникать только те электроны, которые испытали соударение в центре  $M$  цилиндра и были при этом отклонены в направлении  $\theta$ . Две цилиндрически изогнутые пластинки  $P_1$  и  $P_2$ , в пространство между которыми попадали далее электроны, представляли собой «фильтр» скоростей (см. § 9); пройдя через щель  $S_3$ , электроны попадали в фардеев цилиндр  $K$ , заряд которого можно было измерять при помощи электрометра. Так как при определённой разности потенциалов на фильтре  $P_1P_2$  сквозь него могли проходить электроны только строго определённой скорости, то, изменяя напряжённость поля в пространстве  $P_1P_2$ , можно было непосредственно найти распределение по энергиям электронов, рассеянных под углом  $\theta$ . Изменение угла  $\theta$  производилось с помощью перемещения

наиболее высокую ступень возбуждения изучаемых атомов, пускается в весьма разрежённый газ. При неупругих соударениях различные электроны теряют части своей энергии, отвечающие возможным ступеням возбуждения атомов. Так как газ сильно разрежён, то вероятность повторных соударений весьма мала. Если теперь разложить в спектр скоростей пучок электронов, испытавших соударения, то этот спектр сразу даёт все происходящие потери энергии, а вместе с тем и все возможные ступени энергии.

электронной пушки  $G$  в направлениях, указанных стрелками на рис. 129.

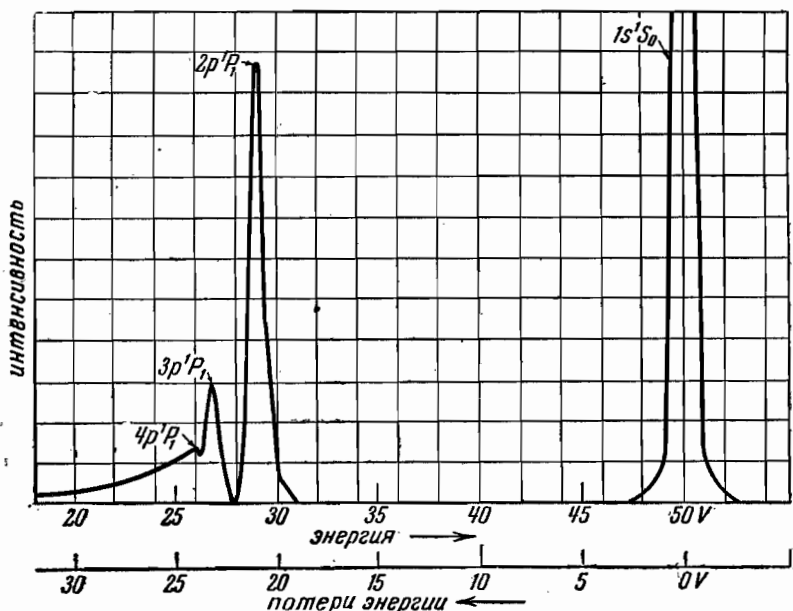


Рис. 130. Спектр скоростей электронов с первоначальной энергией 50 eV после соударений с атомами гелия.

Полученный таким путём энергетический спектр электронов с начальной энергией в 50 eV после соударений с атомами гелия представлен на рис. 130. Как видно, в этом спектре, помимо максимума, соответствующего начальной энергии электронов 50 eV, имеются максимумы у 28,8; 27,2; 26,38 eV. Из этого следует, что при неупругих соударениях электронов с атомами гелия электроны могут терять только строго определённые порции энергии, а именно:  $50 - 28,8 = 21,2$ ;  $50 - 27,2 = 22,8$ ;  $50 - 26,4 = 23,6$  eV.

Если условно принять за нуль энергию атомов гелия до соударения (нормальное состояние) и изображать возможные энергетические состояния горизонтальными прямыми, расположенными на соответствующей высоте, то получится схема «уровней энергии» атома гелия, приведённая на рис. 131. Энергии различных уровней, показанные на этой схеме, вычислены из спектроскопических данных. Как видно, совпадения с циф-

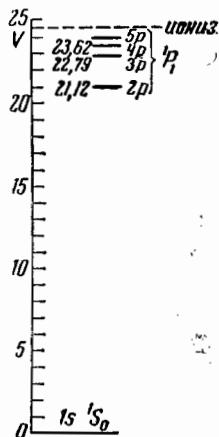


Рис. 131. Схема уровней гелия.

рами, полученными из опытов с соударениями, вполне удовлетворительны. Таким образом, эти опыты можно рассматривать как исключительно ясное экспериментальное подтверждение правильности первого постулата Бора.

### § 91. Определение ионизационных потенциалов

Все описанные методы, как уже было указано, позволяют находить *разности* значений энергии в различных стационарных состояниях. Например, мы может сказать, что для атома ртути разность  $E_2 - E_1$  равна 4,9 eV. Однако самые значения энергий  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$  этими методами найдены быть не могут. Для того чтобы найти эти значения, очевидно, достаточно определить, какую энергию надо затратить, чтобы от атома, находящегося в определённом энергетическом состоянии, полностью отделить электрон. Другими словами, задача о нахождении абсолютных значений энергии  $E_1, \dots, E_n$  совпадает с задачей об определении потенциалов *ионизации* в различных энергетических состояниях.

Для определения потенциалов ионизации было предложено множество методов. Мы опишем лишь метод Герца, отличающийся особенной простотой и точностью. Небольшое добавление к описанной в § 89 схеме Герца позволяет находить при помощи того же прибора и потенциалы ионизации. Добавление это заключается во второй нити накала  $G$  (рис. 132), расположенной внутри пространства  $R$ . Если соединить сетку  $N_2$  с цилиндром  $P$  и задать разность потенциалов между  $G$  и  $N_2$ , то гальванометр покажет термоэлектронный ток между  $G$  и  $N_2$ . При увеличении тока накала нити  $G$  термоэлектронный ток будет возрастать, однако, лишь до определённого предела, после которого возрастание прекратится. Это объясняется тем, что при сильных токах накала в пространстве вокруг нити  $G$  образуется пространственный заряд, препятствующий дальнейшему выходу электронов из нити.

Представим себе теперь, что в пространстве  $R$  попадают электроны от катода  $D$ , ускоряемые соответствующими потенциалами.

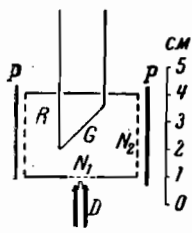


Рис. 132.

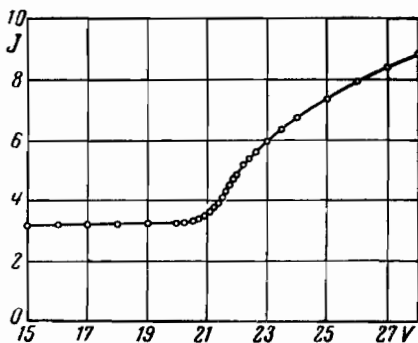


Рис. 133.

Если энергия этих электронов достаточна для того, чтобы ионизовать атомы газа в  $R$ , то при каждом акте ионизации появляются тяжёлые (по сравнению с электронами), медленно движущиеся положительные ионы, которые компенсируют часть пространственного заряда. Вследствие этого при появлении таких ионов термоэлектронный ток между  $G$  и  $N_2$  резко возрастает.

Наблюдая, при каком ускоряющем потенциале между  $D$  и  $N_1$  начинается это возрастание тока, можно определить потенциал ионизации. На рис. 133 приведена для примера кривая, снятая в неоне; резкое возрастание тока около 21 В сразу бросается в глаза. Таким путём найдены ионизационные потенциалы для большего числа атомов периодической системы (см. таблицу IX).

Т а б л и ц а IX Ионизационные потенциалы элементов

Атомный номер	Элемент	Первый ионизационный потенциал в электрон-вольтах	Атомный номер	Элемент	Первый ионизационный потенциал в электрон-вольтах
1	H	13,539	15	P	10,3
2	He	24,45	16	S	10,31
			17	Cl	12,96
3	Li	5,371	18	Ar	15,70
4	Be	9,50			
5	B	8,34	19	K	4,32
6	C	11,217	20	Ca	6,09
7	N	14,474	21	Sc	6,57
8	O	13,565	22	Ti	6,81
9	F	18,6	23	V	6,76
10	Ne	21,482	24	Cr	6,74
			25	Mn	7,40
11	Na	5,116	26	Fe	7,83
12	Mg	7,61			
13	Al	5,96			
14	Si	7,39			

Ионизационный потенциал является типичным периферическим свойством атома, поскольку речь идёт об отрыве *внешних* электронов. Как и все остальные периферические свойства, ионизационные потенциалы обнаруживают периодическую зависимость от атомного номера (рис. 134). Из рис. 134 видно, что в максимумах кривой располагаются благородные газы, которые характеризуются инертностью и в химическом отношении. Наобо-

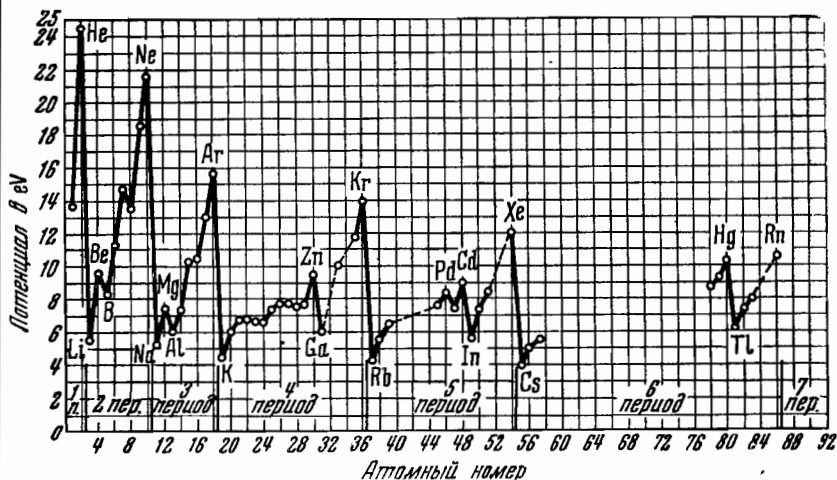


Рис. 134. Первый ионизационный потенциал как функция атомного номера.

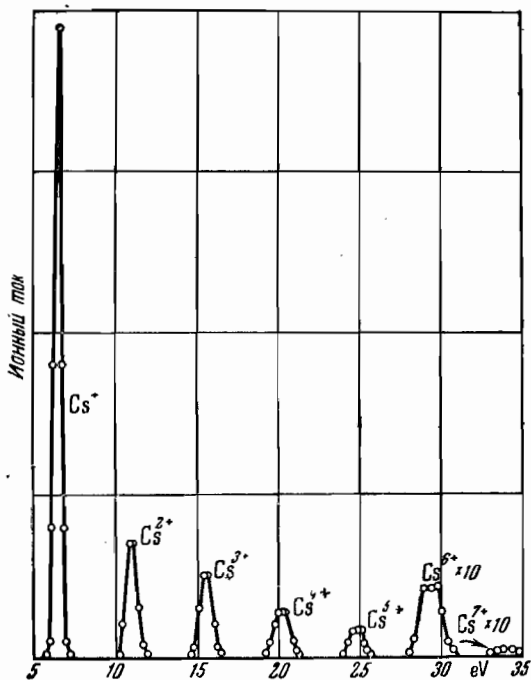


Рис. 135. Анализ паров цезия, ионизированных электронами с энергией 700 eV.

рот, щелочные металлы (Li, Na, K, Rb, Cs), одновалентные и в высшей степени способные к химическим реакциям, обладают минимальными ионизационными потенциалами.

До сих пор мы имели в виду только *первые* ионизационные потенциалы, т. е. энергии освобождения одного электрона из нейтрального атома. Интерес представляют также работы освобождения второго, третьего и т. д. электронов. Установки описанного типа позволяют заключить о появлении положительных ионов (начало ионизации), но не дают возможности судить о природе ионов, в частности о том, появляются ли ионы с одним или несколькими зарядами.

Для изучения последовательных стадий ионизации и определения природы положительных ионов пользуются масс-спектрометрическими методами (см. § 16). Так как масс-спектрометр определяет *отношения* заряда к массе  $\frac{E}{M}$ , то ион с  $n$  зарядами

$E = ne$  соответствует массе  $\frac{M}{n} \left( \frac{ne}{M} = \frac{e}{M/n} \right)$ . Кривая, приведённая на

рис. 135, представляет собой масс-спектр ионов, возникающих в парах цезия при бомбардировке их электронами с энергией в 700 eV. Семь максимумов, видных на рисунке, соответствуют семи последовательным стадиям ионизации атома цезия. Значения соответствующих потенциалов ионизации таковы:

Ион	Cs <sup>+</sup>	Cs <sup>2+</sup>	Cs <sup>3+</sup>	Cs <sup>4+</sup>	Cs <sup>5+</sup>	Cs <sup>6+</sup>	Cs <sup>7+</sup>
Потенциал ионизации (eV)	3,9	27,4	62	113	171	275	410

## § 92. Излучение возбуждённых атомов

Атом, получивший избыток энергии при соударении с электроном, сохраняет его в течение некоторого времени, а затем под влиянием возмущений отдаёт обратно, вновь переходя в нормальное состояние. Если давление газа достаточно мало, то наиболее вероятный способ этого обратного перехода заключается в излучении энергии в виде света. Отсюда открывается новый путь для экспериментальной проверки постулатов Бора. Рассмотрим, например, атом ртути. Его первый критический потенциал равен 4,9 eV, т. е.

$$E_2 - E_1 = 4,9 \text{ eV.}$$

По второму постулату Бора вся эта энергия при переходе в нормальное состояние должна испускаться в виде одного кванта

монохроматического света:

$$E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Отсюда получим для  $\lambda$

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} \approx 2500 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 2500 \text{ \AA}.$$

Итак, если теория верна, то пары ртути, подвергаемые бомбардировке электронами с энергией 4,9 eV, должны давать спектр,



Рис. 136. Спектр паров магния, возбуждаемый электронами с энергией 3,2 eV.

состоящий лишь из одной ультрафиолетовой линии  $\lambda = 2500 \text{ \AA}$ . Опыт обнаруживает действительно одну ультрафиолетовую линию  $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ .

В том, что эта линия возникает при переходе из *первого* возбуждённого состояния в нормальное, можно убедиться из опытов с её оптическим возбуждением. Если освещать разрежённые пары ртути монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda \approx 2537 \text{ \AA}$ , то, по предыдущему, поглощающие атомы должны переходить

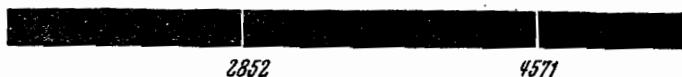


Рис. 137. Спектр паров магния, возбуждаемый электронами с энергией 6,5 eV.

в состояние с энергией в 4,9 eV и при обратном переходе в нормальное состояние — излучать только одну линию с той же самой длиной волны, если между  $E_1$  и  $E_2$  нет никаких промежуточных уровней. Опыт подтверждает и этот вывод. Такие спектральные линии называются *резонансными*, так как их длина волны в точности равна поглощаемой длине волны при оптическом возбуждении. Очевидно, что, определяя длину волны резонансных линий, можно вычислить и первый критический потенциал.

Аналогичная картина имеет место и в других одноатомных газах или парах. На рис. 136 в качестве примера приведён спектр паров магния, возбуждаемых ударами электронов при ускоряющем потенциале в 3,2 V. Как видно, при потенциале в 3,2 V спектр состоит из одной линии 4571 Å (резонансный потенциал 2,65 V).

Из рис. 137 видно, что при возбуждающем потенциале в 6,5 В возникают уже две линии: прежняя линия 4571 Å и новая с длиной волны, равной 2852 Å. При ещё более высоком потенциале (10 В) может быть получен полный спектр паров магния.

### § 93. Спонтанное излучение

В предыдущем параграфе мы уже перешли от доказательств существования уровней энергии и способов их непосредственного определения к рассмотрению переходов между различными уровнями. Ввиду важности этих процессов перехода нам необходимо теперь глубже проанализировать их с теоретической точки зрения. Этот анализ позволит выяснить некоторые своеобразные особенности квантовых явлений, а в качестве непосредственного применения результатов и методов рассмотрения мы дадим простой и вместе с тем безупречный вывод формулы Планка, принадлежащий Эйнштейну.

Итак, рассмотрим атом, находящийся в свободном пространстве и не подверженный влияниям извне. Атом может находиться в различных квантовых состояниях, которым соответствует дискретный ряд уровней энергии. Для простоты мы рассмотрим только два из этих состояний с энергиями  $E_1$  и  $E_2$  (рис. 138). Эти состояния мы будем коротко называть: состояние 1 и состояние 2.

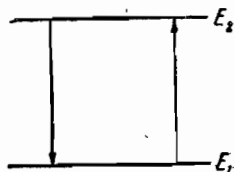


Рис. 138.

Если атом в некоторый момент  $t$  находится в возбуждённом состоянии 2, то в следующий за этим интервал времени  $dt$  он может либо остаться в том же состоянии, либо перейти в нижнее состояние 1, отдавая избыток энергии  $E_2 - E_1$  в виде излучения. Переход в этом случае происходит под действием каких-то внутренних возмущений, которые мы детально проанализировать не можем. Мы считаем такой переход поэтому «самопроизвольным» или «спонтанным» и рассматриваем его как явление случайное. Это означает, что мы не можем с *достоверностью* предсказать, произойдёт или не произойдёт в данном атоме переход в течение 1 сек., следующей за моментом  $t$ , но можем только указать его *вероятность*. Назовём эту вероятность спонтанного перехода  $2 \rightarrow 1$  в единицу времени через  $A_{21}$ . Поскольку спонтанный переход есть процесс случайный, предполагается, что  $A_{21}$  не зависит от времени.

Пусть теперь мы имеем совокупность очень большого числа атомов, которые, однако, образуют настолько сильно разрежённый газ, что взаимодействием между атомами можно пренебречь. Пусть  $N_2$  из числа этих атомов в момент  $t$  находятся в состоянии 2. В промежуток времени между  $t$  и  $t + dt$  часть из них



спонтанно перейдёт в состояние 1. Поскольку такие переходы — явление случайное, мы не можем указать, *какие* именно атомы совершат переход, но, зная вероятность  $A_{21}$ , можем предсказать, *сколько* атомов в среднем совершит переход. Именно, число переходов  $dZ_{21}$  за промежуток времени  $dt$  будет, очевидно,

$$dZ_{21} = A_{21}N_2 dt. \quad (93,1)$$

Так как при каждом из этих переходов согласно условию частот Бора излучается энергия  $E_2 - E_1 = h\nu$ , то за тот же промежуток времени будет испущена энергия, равная

$$h\nu dZ_{21} = A_{21}N_2 h\nu dt. \quad (93,2)$$

Теперь мы можем найти закон убывания числа возбуждённых атомов со временем и среднее «время жизни» атома в возбуждённом состоянии.

Очевидно, что число переходов  $dZ_{21}$  за промежуток времени  $dt$  равно уменьшению числа атомов, находившихся к моменту  $t$  в возбуждённом состоянии,  $dZ_{21} = -dN_2$ . Поэтому формула (93,1) даёт

$$-dN_2 = A_{21}N_2 dt. \quad (93,3)$$

Интегрируя, находим

$$N_2 = N_{20} e^{-A_{21}t}, \quad (93,4)$$

где  $N_{20}$  — число атомов, находившихся в состоянии 2 в момент  $t = 0$ .

Принимая во внимание формулу (93,2), мы найдём энергию, испускаемую в единицу времени, т. е. интенсивность свечения,

$$J = A_{21}N_{20} e^{-A_{21}t} h\nu. \quad (93,5)$$

Таким образом, свечение возбуждённого газа должно убывать со временем по экспоненциальному закону.

Среднюю продолжительность жизни в возбуждённом состоянии мы теперь вычислим следующим образом. Число атомов, совершающих переход  $E_2 \rightarrow E_1$ , в промежуток времени между  $t$  и  $t + dt$  равно  $A_{21}N_2 dt$ . Это вместе с тем есть число атомов, «проживших» в возбуждённом состоянии  $t$  сек. Сумма их продолжительностей жизни равна поэтому  $tA_{21}N_2 dt$ , а сумма продолжительностей жизни всех атомов, испытавших переход за время от 0 до  $\infty$ , будет  $\int_0^{\infty} tA_{21}N_2 dt$ . Отсюда средняя продолжительность жизни  $\tau$  будет

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} tA_{21}N_2 dt}{N_{20}}$$

или, принимая во внимание (93,4),

$$\tau = A_{21} \int_0^{\infty} t e^{-A_{21}t} dt. \quad (93,6)$$

Интегрируя по частям (см. стр. 96), найдём

$$\tau = \frac{1}{A_{21}}. \quad (93,7)$$

Формулу (93,5) для интенсивности, принимая во внимание (93,7) и обозначая  $N_{20}A_{21}h\nu$  через  $J_0$ , можно переписать в виде

$$J = J_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (93,8)$$

В § 66 мы уже рассматривали затухание излучения линейного осциллятора с точки зрения классической электродинамики и пришли к формуле (66,4'), *формально* тождественной с формулой (93,7). В формулу (66,4') входит также в качестве константы, характеризующей затухание, время  $\tau$ , которое мы назвали там временем релаксации. Однако физический смысл, который мы вкладываем в понятие «средней продолжительности жизни» в возбуждённом состоянии, резко отличается от смысла «времени релаксации». Согласно классической электродинамике все излучающие диполи одновременно совершают вынужденные колебания, и время  $\tau$ , равное времени уменьшения квадрата амплитуды в  $e$  раз, одинаково для всех диполей данного рода.

Здесь же мы рассматриваем излучение как совокупность независимых квантовых переходов, происходящих в различных возбуждённых атомах в самые разнообразные моменты времени. Произойдёт ли в *данный момент* времени переход или не произойдёт, определяется законами случая: один из возбуждённых атомов может вернуться в нормальное состояние через очень короткий промежуток времени, а другой — может «прожить» в этом состоянии очень долго. Но, как всегда бывает при массовых процессах, *среднее* время жизни для атомов данного рода имеет строго определённую величину.

Экспериментальная проверка закона затухания свечения и определение средней продолжительности жизни в возбуждённом состоянии наиболее непосредственно были произведены Вином в опытах со свечением каналовых лучей. Пучок водородных каналовых лучей через щель шириною в 0,1—0,25 мм выпускался в пространство, где поддерживался столь высокий вакуум, что возбуждённые атомы могли «высвечиваться» практически без соударений. При этом получался светящийся и затухающий вдоль своей длины пучок каналовых лучей, который помещался на месте щели кварцевого спектрографа. Кварцевая призма

разлагала этот пучок в спектр, так что затухание свечения можно было проследить для каждой спектральной линии отдельно. Если  $v$  есть скорость каналовых лучей и  $y$  — расстояние какой-

либо точки от начала пучка, то  $t = \frac{y}{v}$  и  $e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{y}{v\tau}}$ . Таким

образом, время  $\tau$  можно было определить, прослеживая убывание интенсивности вдоль пучка каналовых лучей.

Этим методом для красной линии водорода  $H_\alpha$  ( $\lambda = 6562 \text{ \AA}$ ) было получено  $\tau = 1,5 \cdot 10^{-8}$  сек.; для резонансной линии ртути ( $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ ) получено  $\tau = 9,8 \cdot 10^{-8}$  сек. в хорошем согласии с результатом вычислений  $\tau$  косвенным путём.

### § 94. Вынужденное излучение и поглощение

До сих пор мы рассматривали атомы, не учитывая их взаимодействия с электромагнитным полем излучения, в котором они находятся. Пусть спектральная плотность этого излучения будет  $\rho_\nu$ .

Классическая теория колебаний (справедливая для колебаний любой природы) показывает, что диполь, помещённый в поле, воздействующее на него некоторой периодически изменяющейся силой, может — в зависимости от соотношения фаз между колебаниями поля и самого диполя — либо поглощать энергию из поля, либо, наоборот, отдавать её полю. В первом случае имеет место *положительная*, во втором — *отрицательная абсорбция* или вынужденное (в отличие от спонтанного) испускание.

Руководствуясь весьма плодотворным *принципом соответствия* (см. § 107), в силу которого между квантовыми и классическими законами должна иметь место *аналогия*, мы можем заключить, что и атом, находящийся в поле излучения, должен обнаруживать как положительную абсорбцию, так и вынужденное испускание. Необходимость последнего при недостаточно тщательном рассмотрении совсем не очевидна. Однако существование вынужденного излучения подтверждается целым рядом фактов и своеобразных явлений. Так, например, экспериментально установлено существование явлений «отрицательной дисперсии», соответствующих этой отрицательной абсорбции, подобно тому как обычная «положительная» дисперсия соответствует положительной абсорбции.

Пользуясь принятым в предыдущем параграфе статистическим способом рассмотрения, мы утверждаем, что возбуждённый атом, помещённый в поле излучения, имеет определённую вероятность совершить переход  $2 \rightarrow 1$ , сопровождающийся излучением. Поскольку эти переходы обусловлены наличием поля, вероятность их мы примем пропорциональной спектральной

плотности  $\rho_\nu$  и положим равной  $B_{21}\rho_\nu$ . Таким образом, полная вероятность возбуждённому атому совершить в единицу времени переход с испусканием *либо* спонтанно, *либо* вынужденно будет равна сумме вероятностей

$$A_{21} + B_{21}\rho_\nu,$$

а полное число переходов с испусканием за промежуток времени  $dt$  будет

$$dZ_{21} = (A_{21} + B_{21}\rho_\nu) N_2 dt. \quad (94,1)$$

Что касается положительной абсорбции, то мы её рассматриваем совершенно аналогичным образом. Атом совершает переход из низшего квантового состояния 1 в высшее 2, заимствуя из поля энергию  $E_2 - E_1 = h\nu$ . Поглощение её данным атомом есть явление случайное и вероятность поглощения пропорциональна  $\rho_\nu$  и равна  $B_{12}\rho_\nu$ . Если число атомов в момент  $t$ , находящихся в состоянии с энергией  $E_1$ , равно  $N_1$ , то число переходов в промежуток времени между  $t$  и  $t + dt$  будет

$$dZ_{12} = B_{12}\rho_\nu N_1 dt. \quad (94,2)$$

### § 95. Вывод формулы Планка по Эйнштейну

Обратимся теперь к выводу формулы Планка. С этой целью мы рассмотрим замкнутую полость, стенки которой нагреты до температуры  $T$ . Атомы, образующие стенки полости, излучают и поглощают электромагнитные волны. Статистическое равновесие между процессами испускания и поглощения наступит тогда, когда полное число актов испускания будет равно числу актов поглощения за тот же промежуток времени; спектральная плотность излучения внутри полости будет при этом  $\rho_\nu$ . Пользуясь формулами (94,1) и (94,2), получаем для состояния равновесия

$$(A_{21} + B_{21}\rho_\nu) N_2 = B_{12}\rho_\nu N_1 \quad (95,1)$$

откуда

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}\rho_\nu}{A_{21} + B_{21}\rho_\nu}. \quad (95,2)$$

Но отношение  $\frac{N_2}{N_1}$  может быть выражено ещё иным способом при помощи общих законов статистической механики. Согласно этим законам (каноническое распределение) в том случае, когда система способна принимать дискретный ряд значений энергии  $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ , вероятность состояния с определённой энер-

гией, т. е. доля числа атомов, обладающих энергией  $E_i$ , выражается формулой

$$w_i = A e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (95,3)$$

причём  $A$  есть постоянная, которая выбирается так, чтобы вероятность атому иметь *какое-либо* из возможных значений энергии (достоверное событие) равнялась 1 (нормирующий множитель).

В атомной физике нередко встречаются случаи (см., например, следующую главу, § 106), когда имеется несколько различных состояний, в которых атом имеет одну и ту же энергию (так называемый случай *вырождения*). В таких случаях различным значениям энергии соответствует разный статистический вес, который в квантовой физике характеризуется числом совпадающих уровней энергии. Поэтому в общем случае вероятность состояния  $w_i$  выразится в виде

$$w_i = A g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (95,4)$$

где  $g_i$  и есть статистический вес, который равен 1 в случае простых (невырожденных) уровней энергии.

Принимая во внимание всё сказанное, имеем для отношения  $\frac{N_2}{N_1}$  следующее выражение:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{kT}}}{g_1 e^{-\frac{E_1}{kT}}}. \quad (95,5)$$

Сравнивая (95,2) и (95,5), получаем

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{B_{12}\rho_\nu}{A_{21} + B_{21}\rho_\nu} &= \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{kT}}}{g_1 e^{-\frac{E_1}{kT}}}, \\ \rho_\nu &= \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{g_1}{g_2} e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} - B_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (95,6)$$

Но по условию частот Бора  $E_2 - E_1 = h\nu$  и, следовательно,

$$\rho_\nu = \frac{A_{21}}{\frac{g_1}{g_2} B_{12} e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}}. \quad (95,7)$$

Это и есть формула распределения энергии в спектре равновесного излучения. Для определения коэффициентов  $A$  и  $B$  мы используем следующие предельные условия:

1) При  $T \rightarrow \infty$ , т. е. при  $h\nu \ll kT$ , плотность  $\rho_\nu$  должна стремиться к бесконечности, т. е. знаменатель в (95,7) — к нулю. Это даёт сразу

$$\frac{g_1}{g_2} B_{12} = B_{21} \quad \text{или} \quad g_1 B_{12} = g_2 B_{21}. \quad (95,8)$$

2) При том же условии  $h\nu \ll kT$  должна быть справедлива формула Рэля—Джинса

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT.$$

Принимая во внимание (95,8), перепишем (95,7) в следующем виде:

$$\rho_\nu = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (95,9)$$

Разлагая в ряд  $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ , получаем в первом приближении  $1 + \frac{h\nu}{kT}$  и, следовательно, (95,9) принимает вид

$$\rho_\nu = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} \cdot \frac{kT}{h\nu}.$$

Сравнивая с формулой Рэля—Джинса, получаем

$$\frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}, \quad \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3},$$

и (95,9) теперь принимает вид

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

А это и есть формула Планка.

ГЛАВА VIII  
СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ И УРОВНИ ЭНЕРГИЙ  
ВОДОРОДНОГО АТОМА

§ 96. Серия Бальмера

Спектральные линии атомного водорода в своей последовательности обнаруживают простые закономерности. На рис. 139



Рис. 139. Серия Бальмера в спектре испускания атомного водорода,  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$ ,  $H_\delta$ —видимые линии;  $H_\infty$ —предел серии.

приведена фотография спектра испускания атомного водорода, полученная в лабораторных условиях, а на рис. 140—фотография того же спектра (в абсорбции) в звезде  $\zeta$  Tauri. Существо-



Рис. 140. Серия Бальмера в спектре поглощения (звезда  $\zeta$ —Tauri), начиная от  $H_\gamma$  до предела серии.

вание закономерной связи между спектральными линиями на той и другой фотографиях прямо бросается в глаза. И действительно, уже в 1885 г. Бальмер показал, что длины волн четырёх линий, лежащих в видимой части и обозначаемых символами  $H_\alpha$ ,  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$ ,  $H_\delta$  (рис. 139), могут быть очень точно предста-

влены эмпирической формулой

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4}, \quad (96,1)$$

где вместо  $n$  следует подставить целые числа 3, 4, 5, 6 и  $B$  — эмпирическая константа, равная  $3645,6 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 3645,6 \text{ \AA}$ . Насколько точно совпадают вычисленные по этой формуле длины волн с данными непосредственных измерений, которые были известны Бальмеру, видно из таблицы X.

Таблица X

Линия	Вычислено по формуле Бальмера (Å)	По измерениям Ангстрема (Å)	Разность (Å)
$H_{\alpha}$	6562,08	6562,10	+0,02
$H_{\beta}$	4860,80	4860,74	-0,06
$H_{\gamma}$	4340,00	4340,10	+0,10
$H_{\delta}$	4101,30	4101,20	-0,10

Помимо четырёх видимых линий в то время было известно пять ультрафиолетовых в земных источниках и 10 — в спектрах белых звёзд. Подставляя в формулу Бальмера дальнейшие целые числа  $n = 7, 8, \dots$ , можно было получить также и длины волн этих ультрафиолетовых линий. Однако совпадение вычисленных и наблюденных длин волн для этих линий оказалось несколько худшим, что, впрочем, объясняется исключительно неточностью, с какой были измерены в то время эти линии.

Закономерность, выражаемая формулой Бальмера, становится особенно наглядной, если представить эту формулу в том виде, в каком ею обычно пользуются в настоящее время. С этой целью следует преобразовать эту формулу так, чтобы она позволяла вычислять не длины волн, но частоты или волновые числа. По известной формуле частота (число колебаний в 1 сек.) выражается в виде

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} \text{ сек.}^{-1},$$

где  $c$  — скорость света в пустоте и  $\lambda_0$  — длина волны также в пустоте. Волновое число есть обратная длина волны или число волн, укладываемых на 1 см:

$$\nu = \frac{1}{\lambda_0} \text{ см}^{-1}.$$



В спектроскопии пользуются предпочтительно волновыми числами (в  $\text{см}^{-1}$ ), так как длины волн определяются в настоящее время с огромной точностью и, следовательно, с той же точностью известны и волновые числа, тогда как скорость света, а значит, и частота определены со значительно меньшей точностью.

Из (96,1) получаем

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{B} \frac{n^2 - 4}{n^2} = \frac{4}{B} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (96,2)$$

Обозначая постоянную  $4/B$  через  $R$  (первая буква фамилии выдающегося шведского спектроскописта Ридберга, именем которого названа эта постоянная), перепишем (96,2) так:

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots). \quad (96,3)$$

Это и есть обычный вид формулы Бальмера.

Из формулы (96,3) видно, что по мере увеличения  $n$  разность между волновыми числами соседних линий уменьшается,

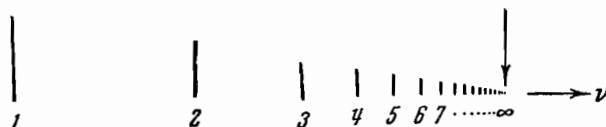


Рис. 141. Общая схема спектральной серии.

и при  $n = \infty$  мы получаем постоянное значение  $\nu = \frac{R}{2^2}$ . Таким образом, линии должны постепенно сближаться, стремясь к предельному положению  $\nu = \frac{R}{4} \text{ см}^{-1}$ . Это хорошо видно на фотографиях рис. 139 и 140; теоретическое положение предела серии указано на рис. 139 символом  $H_{\infty}$ . Наблюдение показывает, кроме того, что с увеличением номера линии  $n$  закономерно уменьшается её интенсивность. Таким образом, если схематически представить расположение спектральных линий, охватываемых формулой (96,3), и условно изображать длиной линий их интенсивность, то получится картина, показанная на рис. 141.

Совокупность спектральных линий, обнаруживающих в своей последовательности и в распределении интенсивности закономерность, которая схематически представлена рис. 141, называется вообще *спектральной серией*. Предельное волновое число, около которого сгущаются линии при  $n \rightarrow \infty$ , называется *границей серии*.

Получение большого количества линий атомного водорода при помощи земных источников связано с различными экспери-

ментальными трудностями. Поэтому только в 1920 г. Вуду удалось сфотографировать 22 и промерить 20 членов серии Бальмера. Наибольшее количество линий этой серии можно было промерить в спектре солнечной хромосферы и протуберанцев (до 37 членов).

### § 97. Серии Лаймана, Пашена и др. Обобщённая формула Бальмера

Наряду с серией Бальмера в спектре атомного водорода был обнаружен ряд других серий, представляемых совершенно аналогичными формулами. Так, в крайней ультрафиолетовой части спектра Лайман открыл серию

$$\nu = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (97,1)$$

В инфракрасной части найдено три серии:  
серия Пашена

$$\nu = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, \dots). \quad (97,2)$$

серия Брэкета

$$\nu = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, \dots), \quad (97,3)$$

серия Пфунда

$$\nu = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, \dots). \quad (97,4)$$

Отсюда видно, что все известные серии атомного водорода можно представить общей формулой

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (97,5)$$

где  $m$  имеет в каждой данной серии постоянное значение ( $m = 1, 2, 3, 4, 5$ ), а  $n$  — ряд целых значений, начинающихся с числа, на единицу большего  $m$ . Формула (97,5) называется обобщённой формулой Бальмера.

В таблице XI приведены длины волн в различных сериях атомного водорода, вычисленные и измеренные непосредственно (для серии Бальмера приведено 10 членов из промеренных 36). Эта таблица даёт возможность судить о точности, с какой позволяют вычислять длины волн формулы спектральных серий.

$$\text{Серия Лаймана } \nu = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$n$	$\lambda_{\text{вак.}} (\text{набл.})$	$\lambda_{\text{вак.}} (\text{вычисл.})$	$\nu (\text{вычисл.})$
2	1 215,7	1 215,68	82 258,31
3	1 026,0	1 025,73	97 491,36
4	972,7	972,54	102 822,94

$$\text{Серия Бальмера } \nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$n$	$\lambda_{\text{возд.}} (\text{набл.})$	$\lambda_{\text{вак.}} (\text{вычисл.})$	$\nu (\text{вычисл.})$
3	6 562,8473 6 562,7110	6 562,793	15 233,216
4	4 861,3578 4 861,2800	4 861,327	20 564,793
5	4 340,497 4 340,429	4 340,466	23 032,513
6	4 101,7346	4 101,738	25 181,055
7	3 970,0740	3 970,075	24 373,343
8	3 889,0575	3 889,052	25 705,957
9	3 835,397	3 835,337	26 065,61
10	3 797,910	3 797,900	26 322,90

$$\text{Серия Пашена } \nu = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$n$	$\lambda_{\text{возд.}} (\text{набл.})$	$\lambda_{\text{возд.}} (\text{вычисл.})$	$\nu (\text{вычисл.})$
4	18 751,3	18 751,1	5 331,58
5	12 817,6	12 818,1	7 799,33
6	10 09 $\mu$	10 938,1	9 139,84
7	10 049,8	10 049,4	9 948,13
8	9 546,2	9 546,0	10 472,74
9	9 229,7	9 229,1	10 832,40
10	9 015,3	9 014,9	11 089,69
11	8 863,4	8 862,9	11 290,03

$$\text{Серия Брэггера } \nu = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$n$	$\lambda_{\text{возд.}} (\text{набл.})$	$\lambda_{\text{возд.}} (\text{вычисл.})$	$\nu (\text{вычисл.})$
5	4,05 $\mu$	40 510,4	2 467,75
6	2,63 $\mu$	26 251,6	3 808,26

$$\text{Серия Пфунда } \nu = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$n$	$\lambda (\text{набл.})$	$\lambda (\text{вычисл.})$	$\nu (\text{вычисл.})$
6	7,40 $\mu$	74 578,0	1 340,512

### § 98. Спектральные термы. Комбинационный принцип

Сравнивая между собой формулы (97,1) — (97,4), легко заметить, что постоянный первый член каждой из этих формул является одним из переменных членов в другой. Например, постоянный член формулы серии Пашена  $R/3^2$  является первым из возможных переменных членов формулы серии Бальмера и вторым — для формулы серии Лаймана; постоянный член серии Бальмера, в свою очередь, является одним из переменных членов в формуле серии Лаймана и т. д. Этот факт особенно ясно виден в написании обобщенной формулы Бальмера (97,5), которая показывает, что волновое число любой спектральной линии водородного спектра можно представить как разность двух членов типа  $R/m^2$  при каких-нибудь двух целых значениях  $m$ . В этом заключается современная формулировка так называемого *комбинационного принципа*.

Вводя обозначения

$$T(m) = \frac{R}{m^2}, \quad T(n) = \frac{R}{n^2}, \quad (98,1)$$

мы можем записать (97,5) в виде разности двух функций целых чисел

$$\nu = T(m) - T(n). \quad (98,2)$$

Числа  $T(n)$ ,  $T(m)$  называются *спектральными термами* или просто термами. Для водородного атома вся система термов получается из одной общей формулы

$$T = \frac{R}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (98,3)$$

Из (98,3) следует, что, зная систему термов для данного атома, мы можем получить волновое число любой спектральной линии как разность двух членов этой системы.

Мы можем дать комбинационному принципу несколько иную формулировку: если известны волновые числа двух спектральных линий одной и той же серии, то их разность будет также волновым числом некоторой третьей спектральной линии, принадлежащей тому же атому. Пусть, например, даны волновые числа двух линий серии Лаймана:

$$\nu_1 = T_1 - T_2 \quad \text{и} \quad \nu_2 = T_1 - T_3.$$

Тогда разность  $\nu_2 - \nu_1$  будет волновым числом первой линии серии Бальмера

$$\nu_2 - \nu_1 = T_2 - T_3 \quad \text{и т. д.}$$

В самом деле, из последнего столбца таблицы XI находим

$$\nu_1 = 82\,258,31, \quad \nu_2 = 97\,491,36.$$

Разность этих чисел равна  $\nu_2 - \nu_1 = 15\,233,05$ . В-той же таблице для первого члена серии Бальмера ( $n=3$ ), находим  $\nu = 15\,233,216$  — число, совпадающее с  $\nu_2 - \nu_1$  в пределах ошибок наблюдения.

Комбинационный принцип был открыт чисто эмпирическим путём, и, подобно многим другим закономерностям в спектрах, он казался вначале каким-то числовым курьёзом. Глубокий смысл этого принципа открылся только после того, как были сформулированы квантовые постулаты Бора.

Нетрудно убедиться в том, что закономерность в частотах, выражаемая этим принципом, резко противоречит классической физике. В самом деле, если приписать электрону одну степень свободы, то спектр должен был бы состоять из одной частоты и её обертонов; если же связь электрона такова, что ему следовало бы приписать три степени свободы, то мы имели бы три основные частоты и их обертоны. Однако на самом деле в атомных спектрах вообще не наблюдается никаких обертонов, т. е. частот, образующих гармонический ряд.

Впервые Бор с полной отчётливостью указал на то, что комбинационный принцип является ярким выражением своеобразных квантовых законов, управляющих внутриатомными движениями. Обобщая и формулируя точнее гипотезу Планка, высказанную для частного случая линейных осцилляторов, он увидел в комбинационном принципе указание на то, что атомы могут находиться только в определённых состояниях, энергии которых образуют дискретный ряд. Таким образом, каждому терму отвечает определённое стационарное энергетическое состояние, и условие частот Бора, сформулированное в § 85, представляет собою не что иное, как комбинационный принцип, выраженный иным способом, а именно так, что каждая из испускаемых частот связывается с двумя стационарными состояниями. Если мы будем обозначать через  $\nu$  волновое число, выраженное в  $\text{см}^{-1}$ , то частота, выраженная в  $\text{сек.}^{-1}$ , будет равна  $c\nu$ , и условие частот (85,1) напишется в виде

$$hc\nu = E_n - E_m,$$

откуда

$$\nu = \frac{E_n}{hc} - \frac{E_m}{hc}. \quad (98,4)$$

Если мы положим

$$T(n) = -\frac{E_n}{hc}, \quad (98,5)$$

то (98,4) представится в виде

$$\nu = T(m) - T(n),$$

т. е. мы получаем уже известную формулировку комбинационного принципа. Знак минус в (98,5) имеет условное значение: как мы знаем, энергия (нерелятивистская) электрона, связанного в кулоновском поле, всегда отрицательна (§ 49), в то время как термам удобнее приписывать положительный знак.

Введя в (98,4) выражение терма через постоянную Ридберга по определению (98,1), мы можем выразить и энергию атомов через эту постоянную:

$$E_n = -\frac{Rhc}{n^2}. \quad (98,6)$$

В этой формуле  $h$  и  $c$  — универсальные постоянные,  $n$  — целое число и только  $R$  — эмпирическая константа. Наша формула приобрела бы исчерпывающее ясное физическое значение, если бы мы сумели выразить также и постоянную Ридберга  $R$  через универсальные константы. Это удалось сделать Бору уже в первом наброске его теории строения атома.

### § 99. Квантование круговых орбит

В основе теории Бора лежат квантовые постулаты, сформулированные в § 85, а именно, постулат о существовании стационарных состояний и условие частот. Эти постулаты, как уже неоднократно указывалось, находятся в резком противоречии с законами классической физики. В самом деле, в то время как постулаты Бора требуют существования дискретной последовательности уровней энергии, которым соответствует в атоме избранный ряд *квантованных* орбит, — классическая механика приводит к непрерывному множеству орбит. Это противоречие имеет весьма общий характер. Совокупность фактов однозначно указывает на то, что в явлениях атомного мира проявляется прерывность, характеризуемая конечной величиной (неравенством нулю) постоянной Планка. Наоборот, для явлений макроскопического, т. е. большого, масштаба характерна именно непрерывность.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что классическая механика с её непрерывно изменяющимися величинами неприменима к атомным явлениям. В дальнейшем, в главе X, мы увидим, что на самом деле этот разрыв очень глубок, так как оказывается, что очень маленькие частицы — электроны, протоны и т. п. — при своих движениях подчиняются совершенно своеобразным *волновым* законам, резко отличающимся от законов классической механики. Это обстоятельство, однако, было открыто лишь через двенадцать лет после установления постулатов Бора.

На первых же стадиях развития атомной механики пришлось воспользоваться следующим логически противоречивым методом: сначала задача решалась при помощи классической механики (заведомо неприменимой полностью к внутриатомным движениям), а затем из всего непрерывного множества состояний движения, к которым приводит классическая механика, отбирались на основании специального постулата избранные, квантовые состояния. Несмотря на всё несовершенство этого метода, он привёл к очень большим успехам. Достаточно было подметить некоторые своеобразные черты атомных процессов и сделать из этого необходимые выводы, чтобы получить возможность распутать сложные закономерности в атомных и молекулярных спектрах, значительно ближе подойти к пониманию химических процессов и т. д.

Формулируем прежде всего тот специальный постулат, на основе которого в теории Бора производился выбор квантованных орбит. Мы будем при этом исходить из самой простой модели атома: центральное положительно заряженное ядро, около которого обращается электрон по круговой орбите. Несколько более сложный случай эллиптических орбит мы коротко рассмотрим ниже, в § 106.

Постулат для выбора квантованных орбит, который нам необходимо формулировать, представляет собою целесообразное обобщение постулата Планка для выбора квантовых состояний линейного осциллятора. Согласно этому последнему постулату из всех возможных состояний линейного осциллятора осуществляются только такие, энергия которых равна

$$E_n = nh\nu. \quad (99,1)$$

Формулируем сначала это условие, применимое только к линейному осциллятору, несколько иным образом. Для этого мы прежде всего перепишем его в виде

$$\frac{E}{\nu} = nh. \quad (99,2)$$

Написанное в таком виде условие мы будем рассматривать как общее требование, заключающееся в том, что в атомных системах механическая величина, имеющая размерность  $\left[ \frac{\text{энергия}}{\text{частота}} \right]$ , или, что то же, [энергия  $\times$  время] и называемая действием, должна быть кратной постоянной Планка  $h$ . Вопрос теперь сводится к целесообразному выбору этой величины для каждого частного случая.

Чтобы указать общее правило, автоматически приводящее к правильному выбору состояний, мы снова рассмотрим линейный осциллятор. Его состояние в классической механике характери-

зуется декартовой координатой  $x$  и соответствующим ей количеством движения  $mx$ . Обозначим эти параметры состояния через  $q$  и  $p$  и будем изображать состояние осциллятора точкой в фазовом пространстве, как это принято в статистической механике.

Поскольку в данном случае состояние системы полностью характеризуется двумя параметрами  $p$  и  $q$ , фазовое «пространство» является плоскостью, и каждое состояние системы, характеризуемое данными значениями  $p$  и  $q$ , представится точкой на этой плоскости. При движении в системе эта точка будет непрерывно менять своё положение, описывая некоторую фазовую траекторию (рис. 142). Посмотрим, какова будет эта траектория для осциллятора, обладающего данной энергией  $E$ . Напишем выражение для полной энергии ( $T+U$ ) осциллятора (см. § 44)

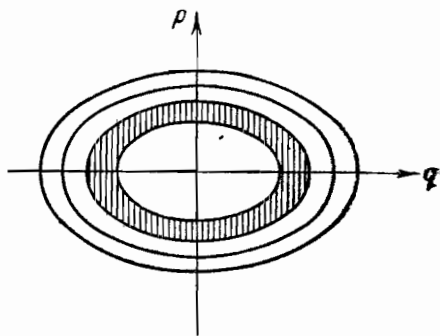


Рис. 142.

$$E = T + U = \frac{mq^2}{2} + \frac{fq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{fq^2}{2}. \quad (99,3)$$

Разделим обе части (99,3) на  $E$ :

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{E}{f}} = 1;$$

вводя обозначения

$$a = \sqrt{2mE} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{f}}, \quad (99,4)$$

получим

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1. \quad (99,5)$$

Но (99,5) есть уравнение эллипса, так что фазовая траектория линейного осциллятора есть эллипс, оси которого согласно (99,4) для данного осциллятора (заданные  $m$  и  $f$ ) определяются энергией  $E$ . Вычислим теперь площадь нашего эллипса. Площадь, ограничиваемая кривой  $y = f(x)$ , равна  $\int y dx$ ; с другой стороны, площадь эллипса равна  $\pi ab$ . Поэтому  $\oint p dq = \pi ab$ , где



кружок у интеграла указывает, что вычисление его следует вести по замкнутому контуру. Но по (99,4)

$$\pi ab = \pi \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{j}} = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{j}}.$$

Так как для гармонического осциллятора  $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{j}{m}}$ , то

$$\oint p dq = \pi ab = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{j}} = \frac{E}{v} \quad (99,6)$$

или, принимая во внимание (99,2),

$$\oint p dq = nh. \quad (99,7)$$

Теперь нам осталось сделать последний шаг: формулу (99,7) мы будем рассматривать как общее условие квантования для любых систем с одной степенью свободы, если только под  $q$  и  $p$  разуметь *обобщенную* координату и соответствующий ей обобщенный импульс.

Применим это общее условие к нашей модели электрона, обращающегося по круговой орбите. Здесь в качестве координаты целесообразно выбрать полярный угол  $\varphi$ , характеризующий положение электрона на орбите. Соответствующим ей обобщенным импульсом будет [см. (55,5)] момент количества движения  $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ . Если мы теперь подставим в (99,7)  $\varphi$  и  $p_\varphi$  вместо  $q$  и  $p$  и примем во внимание, что согласно закону сохранения момента количества движения  $p_\varphi = \text{const.}$ , то получим

$$nh = \oint p dq = \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

откуда сразу имеем

$$p_\varphi = n \frac{h}{2\pi}. \quad (99,8)$$

Это и есть искомое «правило квантования» круговых орбит: из всех возможных согласно классической механике орбит в действительности осуществляются такие, у которых момент количества движения есть кратное  $h/2\pi$ . Последняя величина  $h/2\pi$  является, таким образом, квантовой единицей момента количества движения.

## § 100. Теория Бора

Обратимся теперь к теории Бора. Будем рассматривать так называемый «водородоподобный атом», т. е. систему, состоящую из ядра с зарядом  $+Ze$  ( $Z$  — целое число) и одного электрона. При  $Z=1$  такая система представляет собою собственно водо-

родный атом, при  $Z=2$  — однократно ионизованный атом гелия  $\text{He}^+$ , при  $Z=3$  — двукратно ионизованный атом лития  $\text{Li}^{++}$ , при  $Z=4$  —  $\text{Be}^{+++}$  и т. д.

Из кинетической теории газов известно, что «размеры» атомов — порядка  $10^{-8}$  см. С другой стороны, из опытов Резерфорда с рассеянием  $\alpha$ -частиц (§ 28) следует, что закон Кулона имеет место вплоть до расстояний порядка  $10^{-12}$  см; поэтому мы можем быть уверены в том, что взаимодействие электрона с ядром в нашей модели подчиняется закону Кулона, т. е. сила, с которой ядро удерживает электрон, должна быть равна  $Ze^2/r^2$ . Если мы допустим, что движение электрона в атоме подчиняется законам классической механики, то мы сможем перенести на нашу модель все результаты, полученные при решении кеплеровой задачи в классической механике (§ 49); в частности, полная энергия (кинетическая + потенциальная) такой системы должна быть равна

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a}, \quad (49,19)$$

где  $a$  — большая полуось эллипса или в данном случае — радиус круговой орбиты. По третьему закону Кеплера (§ 49) радиус  $a$  связан с периодом обращения  $T$  соотношением

$$\frac{a^3}{T^2} = a^3 v^{*2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}. \quad (49,24)$$

Второе соотношение даст нам правило квантования, установленное в предыдущем параграфе:

$$p_\varphi = n \frac{h}{2\pi}. \quad (99,8)$$

Далее, по определению

$$p_\varphi = ma^2 \dot{\varphi} = ma^2 \omega = 2\pi ma^2 v^*, \quad (100,1)$$

откуда \*)

$$a^2 v^{*2} = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m}. \quad (100,2)$$

Комбинируя (100,2) и (49,24), легко найдём

$$a = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m Ze^2}. \quad (100,3)$$

При  $Z=1$  и  $n=1$  (первая орбита водородного атома) мы получаем

$$a_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} = 0,528 \cdot 10^{-8} \text{ см.} \quad (100,4)$$

\*) Для отличия от волнового числа, частота, измеряемая в сек.<sup>-1</sup>, обозначена здесь через  $v^*$ .

Эта комбинация универсальных постоянных будет встречаться при вычислениях и в дальнейшем; мы её всегда будем обозначать через  $a_1$ . Подставляя значение (100,3) в (49,19), получим

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{2\pi^2mZ^2e^4}{n^2h^2} \quad (100,5)$$

давая  $n$  последовательный ряд целых значений 1, 2, 3, ..., мы и получим квантованные значения энергии  $E_1, E_2, \dots$

Воспользовавшись условием частот  $h\nu = E_n - E_k$  и подставляя сюда выражения для  $E_n$  и  $E_k$  из (100,5), получим обобщённую формулу Бальмера для водородоподобных атомов в виде

$$\nu = \frac{2\pi^2mZ^2e^4}{h^2c} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (100,6)$$

Полагая здесь  $Z=1$ , получим формулу Бальмера специально для водородного атома, а множитель перед скобками и будет искомым выражением постоянной Ридберга через универсальные постоянные:

$$R = \frac{2\pi^2me^4}{h^2c} \quad (100,7)$$

Для вычисления  $R$  воспользуемся современными наиболее точными значениями универсальных констант  $e$ ,  $\frac{e}{m}$ ,  $h$ ,  $c$ :

$$\begin{aligned} c &= 2,99776 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}, & h &= 6,624 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{сек}, \\ e &= 4,8025 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}, & \frac{e}{m} &= 1,7592 \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot e^{-1}; \end{aligned} \quad (100,8)$$

формула (100,7) даст тогда следующее теоретическое значение для  $R$ :

$$R = 109\,737,303 \text{ см}^{-1}, \quad (100,9)$$

тогда как величина  $R_H$ , эмпирически найденная из точнейших спектроскопических измерений, есть

$$R_H = 109\,677,581 \text{ см}^{-1}. \quad (100,10)$$

Совпадение теоретически вычисленного и экспериментального значений  $R$  настолько близко, что оно не оставляет сомнений в правильности найденной Бором формулы (100,5) для уровней энергии водородоподобных атомов. В действительности это совпадение лучше, чем может показаться при непосредственном сравнении (100,9) и (100,10). Дело в том, что эти два значения в сущности между собою несравнимы, так как при выводе

формулы (100,7) сделано одно допущение, не оправдываемое точностью современных спектроскопических измерений. А именно, мы предполагали, что ядро водородоподобного атома неподвижно, тогда как по законам механики следует рассматривать движение электрона и ядра около их общего центра инерции. Допущение неподвижного ядра было бы оправдано (см. § 48) лишь в том случае, если бы массу ядра можно было считать бесконечно большой по сравнению с массой электрона. В действительности же отношение массы водородного ядра к массе электрона равно

$$\frac{M_{\text{H}}}{m} = 1836,5,$$

и при огромной точности современных спектроскопических измерений пренебрежение конечной величиной массы ядра недопустимо.

Нетрудно, однако, внести поправку, учитывающую это обстоятельство. Как мы видели в § 51, для точного решения задачи о двух телах в формуле (100,5) вместо массы электрона необходимо ввести приведённую массу электрона и ядра:

$$m' = \frac{mM_Z}{m + M_Z},$$

где  $M_Z$  — масса ядра с атомным номером  $Z$ . Формула (100,7) при этом примет вид

$$R_Z = \frac{2\pi^2 m' e^4}{h^3 c} = \frac{2\pi^2 m M_Z e^4}{h^3 c (m + M_Z)} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c \left(1 + \frac{m}{M_Z}\right)}. \quad (100,11)$$

Для водорода  $M_Z = M_{\text{H}}$  и

$$R_{\text{H}} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c \left(1 + \frac{m}{M_{\text{H}}}\right)}. \quad (100,12)$$

При  $M_Z = \infty$  формула (100,11) переходит в (100,7). Поэтому, если обозначить величину  $R$ , даваемую (100,7), через  $R_{\infty}$ , то (100,12) примет вид

$$R_{\text{H}} = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m}{M_{\text{H}}}}, \quad (100,13)$$

а общая формула (100,11) представится так:

$$R_Z = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m}{M_Z}}. \quad (100,14)$$

При помощи формулы (100,13) мы можем произвести окончательную проверку теории следующим образом: подставим в (100,13) наиболее точное экспериментальное значение  $R_H = 109\,677,581$  и из (100,13) вычислим  $R_\infty$ ; принимая  $\frac{m}{M_H} = \frac{1}{1836,5}$ , получим

$$R_\infty = R_H \left(1 + \frac{m}{M_H}\right) = 109\,677,581 \left(1 + \frac{1}{1836,5}\right) = 109\,736,807 \text{ см}^{-1}.$$

Сравнивая это со значением  $109\,737,303$ , вычисленным непосредственно по формуле (100,7), мы видим, что совпадение не оставляет желать лучшего.

### § 101. Применение предыдущей теории. Открытие тяжёлого изотопа водорода

Зависимость постоянной Ридберга от массы ядра была использована при открытии тяжёлого изотопа водорода. Этапы этого открытия очень напоминают историю открытия благородных газов в атмосфере, начиная с аргона, толчком к которому послужило, как известно, небольшое расхождение между величинами атомного веса атмосферного азота и атомного веса азота, полученного в лабораторных условиях из различных химических соединений. Эта история является превосходной демонстрацией смысла точнейшего определения констант и очень хорошо подтверждает остроумное замечание одного из естествоиспытателей конца XIX столетия: «сколько ещё открытий таится вокруг шестого десятичного знака!»

История открытия тяжёлого водорода вкратце такова. Определение атомного веса водорода, выполненное Астоном при помощи масс-спектрографа, дало  $1,00778 \pm 0,000015$  по отношению к атомному весу кислорода, условно принятому за  $16,00000$ . Эта величина очень хорошо совпадала с атомным весом водорода, найденным из химических определений:  $1,00777 \pm 0,0002$ .

В то время, когда производились эти измерения, предполагалось, что кислород не имеет изотопов. Однако вскоре было обнаружено, что атмосферный кислород представляет собой смесь двух изотопов:  $O^{16}$  и  $O^{18}$ , количества которых находятся в постоянном отношении  $630 : 1$ . Учитывая это обстоятельство, Бердж и Менцель обратили внимание на то, что совпадение величин атомного веса водорода из масс-спектрографических и химических определений на самом деле иллюзорно и основано на принципиальной ошибке. В самом деле, каждая линия в масс-спектрографе отвечает одному определённом изотопу. Линия, которой приписывается масса  $16,00000$ , на самом деле принадлежит изотопу кислорода  $O^{16}$ , в то время как в химических определениях масса  $16$  неправильно приписывается смеси  $O^{16} + \frac{1}{630} O^{18}$ . Если

условно приписать линии кислорода в масс-спектре ту среднюю массу, которую имеет кислород в химических опытах, т. е.  $O^{16} + \frac{1}{830} O^{18}$ , то для атомного веса водорода, приведённого таким образом к химической шкале, получается заметно *меньшее* число: 1,00756. Тот факт, что атомный вес водорода, определённый химическим способом, на  $1,00777 - 1,00756 = 0,00021$ , т. е. приблизительно на 0,02% больше, побудил Берджа и Менцеля высказать гипотезу, что и обычный водород, с которым имеют дело химики в своих опытах, в действительности представляет смесь по крайней мере двух изотопов: лёгкого с массой приблизительно 1 и тяжёлого с массой (в круглых цифрах) 2. Из разности масс-спектрографического и химического атомных весов они определили отношение количеств изотопов в обычном водороде и получили  $H^1 : H^2 = 4500 : 1$ .

Возможности открытия тяжёлого изотопа способствовало необычайно благоприятное соотношение масс обоих изотопов. В то время как обычно разница в массах изотопов относительно очень мала, вследствие чего их свойства настолько близки, что



Рис. 143. Фотография первых четырёх членов серии Лаймана у лёгкого и тяжёлого водорода.

накопление какого-нибудь изотопа крайне затруднительно, здесь масса одного изотопа в два раза больше массы другого. Вследствие этого их свойства весьма заметным образом различаются. Воспользовавшись этим, Юри с сотрудниками добились искусственного увеличения процента тяжёлого водорода следующим образом: они подвергли 3 л жидкого водорода осторожному испарению при давлении в несколько миллиметров Hg. Так как скорость испарения лёгкого водорода должна быть больше, чем тяжёлого, то по мере испарения последний должен был накапливаться в смеси. Доводя количество жидкого водорода от 3 л до долей кубического сантиметра, они ввели остаток в разрядную трубку и сфотографировали спектр, рассчитывая на то, что вследствие различия в величине постоянной Ридберга линии тяжёлого водорода должны быть смещены относительно лёгкого. Это и подтвердилось на самом деле. На рис. 143 приведены фотографии первых четырёх членов серии Лаймана для смеси лёгкого ( $H^1$ ) и тяжёлого ( $H^2$ ) водорода. Смещение линий видно вполне отчётливо. Соответствующие длины волн приведены в таблице XII, где линии тяжёлого водорода обозначены через  $\lambda_D$  (тяжёлый водород получил особое название — *дейтерий*, и ему присвоен химический символ D). В двух последних столбцах таблицы приведены разности  $\Delta\lambda$ , измеренные и вычисленные

при помощи значений постоянной Ридберга для H и D. Совпадение вычисленных и наблюдаемых значений  $\Delta\lambda$  и здесь превосходно.

Рис. 144 представляет фотографию первой линии ( $H_\alpha$ ) серии Бальмера лёгкого и тяжёлого водорода.



Рис. 144. Сравнение длин волн  $H_\alpha$  (нижняя линия) и  $D_\alpha$  (верхняя линия).

Т а б л и ц а XII

$\lambda_D$ (в Å)	$\lambda_H$ (в Å)	$\Delta\lambda$ вычисл.	$\Delta\lambda$ набл.
1215,664	1215,334	0,330	0,330
1025,718	1025,439	0,279	0,279
972,533	972,269	0,264	0,266

Как мы увидим позднее, тяжёлый водород — дейтерий — не только интересен как заместитель лёгкого водорода в различных соединениях, но весьма важен по своим применениям в ядерной физике, где ядро дейтерия — дейтерон — является одним из наиболее удобных снарядов, применяемых для расщепления ядер.

## § 102. Серия Пикеринга и спектры водородоподобных ионов

В 1897 г. астроном Пикеринг открыл в спектре звезды  $\zeta$  Puppis спектральную серию, которая очень напоминала серию Бальмера. С историей этой серии связана одна из блестящих



Рис. 145. Серия Бальмера и Пикеринга. Линии серии Бальмера изображены более длинными черточками.

побед квантовой теории строения атома. Рис. 145, на котором схематически изображены обе серии, показывает, что линии серии Пикеринга можно разбить на две группы: линии одной группы, расположенные через одну, почти совпадают с линиями серии Бальмера, а промежуточные линии не имеют аналогов в серии

Бальмера. Ридберг показал, что эта серия может быть представлена формулой Бальмера, в которой, однако,  $n$  имеет как целые, так и половинные значения:

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2,5; 3; 3,5; \dots); \quad (102,1)$$

целым значениям соответствуют линии, совпадающие с бальмеровыми, а половинным — промежуточные.

Как ни пытались получить эту серию с земным водородом, это не удавалось. Поэтому серия Пикеринга была приписана водороду, находящемуся в звездах в каком-то особом состоянии. Наконец, удалось получить эту серию в лаборатории, но оказалось, что для успеха опыта к водороду обязательно должен быть примешан гелий. Эту противоречивую совокупность фактов распутал Бор, предположив, что серия Пикеринга принадлежит вовсе не водороду, но ионизованному гелию. В самом деле, так как на основании (100,6)  $\nu$  пропорционально  $Z^2$  и для гелия  $Z = 2$ , то спектральные серии ионизованного гелия  $\text{He}^+$  должны укладываться в формулу

$$\nu = 4R_{\text{He}} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (102,2)$$

Если положить здесь  $m = 4$ , то формула принимает вид

$$\nu = 4R_{\text{He}} \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, \dots),$$

но её можно также представить и в виде

$$\nu = R_{\text{He}} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \right)$$

или, если обозначить  $n/2$  через  $k$ ,

$$\nu = R_{\text{He}} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (k = 2,5; 3; 3,5; 4; \dots).$$

Но это и есть формула серии Пикеринга. Вследствие различия масс водорода и гелия константа Ридберга  $R_{\text{He}}$  должна немного отличаться от  $R_{\text{H}}$ . Поэтому и для целых значений  $k$  линии серии Пикеринга должны быть немного смещены относительно бальмеровых линий водорода.

Эти предсказания Бора были подтверждены Пашеном, который показал, что серия Пикеринга легко может быть получена в чистом гелии без всяких следов водорода, но не может быть получена в чистом водороде, и что линии этой серии для целых значений  $k$  смещены относительно бальмеровых линий в фиолетовую сторону, как и следовало ожидать по формуле (102,2). Иллюстрации этого смещения можно найти в таблице XIII, где



приведены измеренные Пашеном точные длины волн в спектре ионизованного гелия, а рядом — длины волн бальмеровской серии водорода, соответствующие целым значениям  $n$ .

Таблица XIII

$k$	He <sup>+</sup>	H
3	6560,1	6562,8 (H <sub>α</sub> )
3,5	5411,6	—
4	4859,3	4861,3 (H <sub>β</sub> )
4,5	4561,6	—
5	4333,7	4340,5 (H <sub>γ</sub> )
5,5	4199,9	—
9	4100,0	4101,7 (H <sub>δ</sub> )

Следующими за He<sup>+</sup> водородоподобными ионами являются двукратно ионизованный литий Li<sup>++</sup> ( $Z = 3$ ) и трёхкратно ионизованный бериллий Be<sup>+++</sup> ( $Z = 4$ ). Их спектральные серии должны подчиняться формулам

$$\nu = 9R_{\text{Li}} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

$$\nu = 16R_{\text{Be}} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

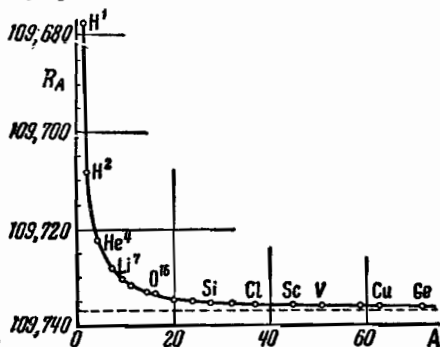


Рис. 146. Изменение постоянной Ридберга в зависимости от массы ядра.

Первые члены серии Лаймана ( $m = 1$ ) для этих ионов на самом деле удалось найти в далёкой ультрафиолетовой части спектра.

На рис. 146 графически представлено изменение постоянной Ридберга в зависимости от массы ядра.

### § 103. О спектроскопическом определении удельного заряда электрона

В § 40 уже упоминалось о том, что из спектроскопических данных можно определить удельный заряд электрона. Покажем теперь, как это делается.

Напишем выражения постоянной Ридберга для каких-нибудь двух атомов, например для водорода (H) и дейтерия (D):

$$R_H = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_H}}, \quad (103,1)$$

$$R_D = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{M_D}}, \quad (103,2)$$

где  $M_H$  и  $M_D$  — массы атомных ядер. Из (103,1) и (103,2) получаем

$$\frac{R_D}{R_H} = \frac{1 + \frac{m}{M_H}}{1 + \frac{m}{M_D}}, \quad \frac{R_D - R_H}{R_H} = \frac{m}{M_H} \cdot \frac{M_D - M_H}{M_D + m},$$

откуда

$$\frac{m}{M_H} = \frac{(R_D - R_H)(M_D + m)}{R_H(M_D - M_H)}. \quad (103,3)$$

Массы ядер  $M_D$  и  $M_H$ , входящие в эту формулу, выражаются через атомные массы H и D и массу электрона следующим образом:

$$M_H = \frac{H}{N} - m, \quad M_D = \frac{D}{N} - m$$

( $N$  — постоянная Авогадро).

Заряд Фарадея  $F$  есть произведение заряда электрона на постоянную Авогадро

$$F = Ne. \quad (103,4)$$

Из (103,3) и (103,4) получаем

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} &= \frac{F}{Nm} = \frac{FR_H(M_D - M_H)}{N(R_D - R_H)(M_D + m)M_H} = \\ &= \frac{FR_H(D - H)}{(R_D - R_H)D(H - Nm)}. \end{aligned} \quad (103,5)$$

Принимая во внимание, что произведение  $Nm$  («атомный вес» электрона) — величина малая по сравнению с H и D,

$$Nm = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 9,108 \cdot 10^{-28} = 5,48 \cdot 10^{-4},$$

мы можем с достаточной точностью воспользоваться для вычисления  $e/m$  вместо (103,5) следующей формулой:

$$\frac{e}{m} = F \frac{R_H}{(R_D - R_H)H} \cdot \frac{D - H}{D}.$$

Если подставить сюда точные значения констант, то на основании последних измерений спектров H и D получается

$$\frac{e}{m} = 1,7596 \cdot 10^7 \text{ CGSM} \cdot e^{-1}.$$

Как видно, наиболее точные значения  $e/m$ , полученные из опытов с отклонением электронов в электромагнитных полях, близки к этому спектроскопическому значению  $e/m$ .

### § 104. Диаграммы уровней энергии

Подводя итоги сказанному в предыдущих параграфах, мы видим, что наиболее существенным результатом анализа спектра

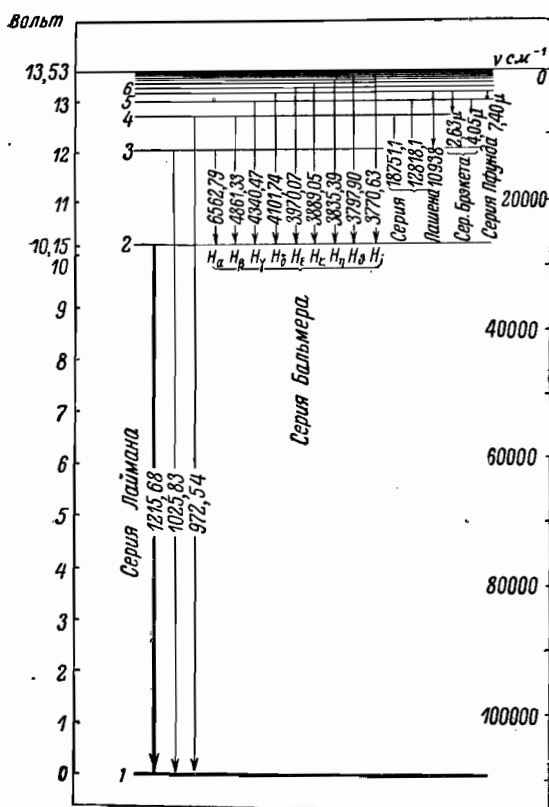


Рис. 147. Диаграмма уровней энергии атома водорода.

является установление системы термов. Действительно, комбинируя термы попарно, мы прямо получаем волновые числа спектральных линий; умножая числа, выражающие термы в  $\text{см}^{-1}$ , на  $hc$ , мы получаем положительные значения энергии атома в различных квантованных состояниях. Эти величины энергии, будучи выражены в электрон-вольтах, дают ионизационные потенциалы атома в различных состояниях, а разности их — потенциалы возбуждения.

Для того чтобы быстро обозреть всю совокупность сведений об атоме, которые мы, таким образом, получаем, удобнее всего пользоваться диаграммами уровней энергии. Простей-

шая из таких диаграмм для атома водорода приведена на рис. 147. Здесь горизонтальными прямыми отмечены различные

энергетические состояния. Для построения их, согласно сказанному, достаточно отложить по оси ординат значения  $R/k^2$ . По мере увеличения  $k$  расстояние между последовательными уровнями уменьшается и в пределе обращается в нуль. Выше места слияния расположена сплошная область некантованных положительных энергий. Справа и слева помещены шкалы энергий и термов. Отсчёт по той и другой шкале делается от места слияния уровней, но так как для кантованных состояний энергии отрицательны, а термы положительны, то энергия убывает снизу вверх, а термы (равные работе ионизации) возрастают в том же направлении. На той же диаграмме стрелками показаны возможные переходы между уровнями и отмечены образующиеся при этом серии. Каждая серия возникает при переходе на нижний уровень со всех вышележащих уровней. Волновые числа спектральных линий можно отсчитывать при помощи правой шкалы как разности термов, соответствующих конечному и начальному состояниям.

### § 105. Граничный сплошной спектр атомного водорода

Во всяком сериальном спектре к границе серии, т. е. к месту слияния линий, всегда примыкает сплошной спектр, простирающийся в сторону коротких волн. Этот сплошной спектр можно наблюдать как в эмиссии, так и в абсорбции. Возникновение его связано с переходами электронов из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией или наоборот. Как мы уже знаем, во всех кантованных состояниях электрон обладает отрицательной энергией. Отрицательный знак здесь обусловлен произвольностью выбора состояния с нулевой потенциальной энергией. Обычно потенциальная энергия, равная нулю, приписывается электрону, который покоится на бесконечно большом расстоянии от ядра. Поэтому отрицательный знак полной энергии указывает просто на то, что энергия электрона в таких состояниях меньше его энергии в том случае, когда он отделён от атома и покоится на бесконечно большом расстоянии, т. е. на то, что мы имеем дело со связанным электроном\*). Отсюда следует, что положительной энергией должен обладать электрон, отделённый от атома и имеющий избыток кинетической энергии над потенциальной. По классической механике такой электрон должен обращаться около ядра по гиперболической орбите (рис. 148). Однако первый постулат Бора требует, чтобы при обращении по этой орбите электрон не излучал; излучение же

\*) На самом деле в полную энергию электрона входит ещё в качестве слагаемого энергия, соответствующая массе покоя электрона,  $m_0c^2$ , равная  $0,5 \cdot 10^6$  eV, т. е. значительно превосходящая отрицательную потенциальную энергию в нормальном состоянии.

может происходить только тогда, когда он перескакивает с этой гиперболической орбиты на замкнутую (например, круговую). С другой стороны, согласно общим принципам теории квантов (см. следующий параграф) квантованию подлежат только периодические или условно-периодические движения, вследствие чего электроны, обращающиеся по гиперболическим орбитам, могут обладать любыми, непрерывно распределёнными запасами энергии. Этим и объясняется сплошной характер спектра.

Действительно, волновое число, отвечающее переходу из квантованного состояния в состояние с энергией, равной нулю, будет  $R/m^2$  (граница серии), а волновое число, соответствующее переходу из квантованного состояния в состояние с положительной энергией  $\Delta E$ , будет

$$\nu = \frac{R}{m^2} + \frac{\Delta E}{hc}.$$

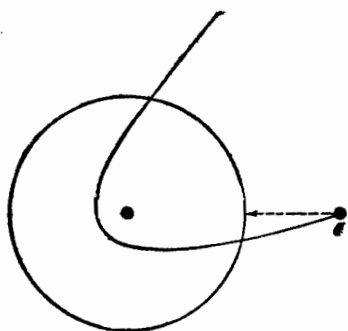


Рис. 148.

Так как  $\Delta E > 0$  и изменяется непрерывно, то  $\nu$  будет больше волнового числа границы серии и будет изменяться непрерывно, т. е. мы получим сплошной спектр, примыкающий к границе серии со стороны коротких волн. Очевидно, далее, что *сплошной спектр поглощения* указывает на процессы отделения электрона

от атома с конечной кинетической энергией, т. е. на ионизацию, а *сплошной спектр испускания* — на обратный процесс, т. е. на рекомбинацию положительного иона и электрона. Наконец, энергия, соответствующая волновому числу начала сплошного спектра со стороны длинных волн, или, что то же, волновому числу границы серии, должна быть равна энергии ионизации, т. е. энергии, необходимой для отделения электрона от атома и перевода его в состояние с нулевой кинетической энергией. Таким образом, волновое число границы серий Лаймана для водорода

$$\nu = \frac{R_H}{1^2} = R_H = 109\,678 \text{ см}^{-1}$$

сразу даёт энергию ионизации водородного атома в основном, наиболее устойчивом состоянии. Если перевести указанное волновое число в электрон-вольты, то получается 13,527 eV в согласии с непосредственно измеренной при помощи методов, разобранных в главе VII, работой ионизации водородного атома из нормального состояния 13,54 eV.

### § 106. Квантование водородоподобного атома по Бору—Зоммерфельду

В предыдущих параграфах мы рассмотрели большое число следствий теории Бора, обеспечивших последней исключительный успех. Зоммерфельд сделал дальнейший шаг в развитии теории. В то время как в первоначальной теории Бора рассматривались только круговые орбиты, Зоммерфельд использовал общее решение кеплеровой задачи в классической механике, т. е. учёл также и эллиптические орбиты. Для этого понадобилось прежде всего расширение правила квантования, формулированного в § 99. Действительно, пока мы рассматриваем только круговое движение электрона, нам достаточно правила квантования для одной степени свободы. Если же мы хотим учесть также и эллиптические орбиты, нам нужны правила квантования для системы с двумя степенями свободы, так как положение электрона на орбите в этом случае определяется двумя параметрами: радиусом-вектором  $r$  и полярным углом (азимутом)  $\varphi$ . Наконец, если мы хотим принять во внимание пространственную ориентацию орбиты, электрону следует приписать все три степени свободы.

Таким образом, первая задача, которую необходимо было решить, состояла в отыскании правил квантования для систем со многими степенями свободы. Эту задачу Зоммерфельд и, независимо от него Г. А. Вильсон, решили для довольно общего случая систем — так называемых условно-периодических систем.

Простым примером подобной системы может служить так называемый анизотропный осциллятор. Представим себе частицу с массой  $m$ , которая движется на плоскости так, что её проекции на две взаимно перпендикулярные оси координат совершают простые гармонические колебания с различными частотами  $\nu_x$  и  $\nu_y$ . Тогда уравнения движения частицы будут

$$m\ddot{x} = -f_1x, \quad m\ddot{y} = -f_2y,$$

откуда

$$x = a_1 \cos(2\pi\nu_x t + \delta_1), \quad y = a_2 \cos(2\pi\nu_y t + \delta_2),$$

и частоты будут

$$\nu_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f_1}{m}}, \quad \nu_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f_2}{m}}.$$

Если бы обе константы квазиупругой силы  $f_1$  и  $f_2$  были равны между собой, то и частоты  $\nu_x$  и  $\nu_y$  были бы одинаковы, и мы имели бы обыкновенный изотропный осциллятор. Мы предполагаем, однако, что  $f_1 \neq f_2$ ; в этом случае осциллятор называется анизотропным. Наиболее общее движение такого осциллятора получается тогда, когда  $\nu_x$  и  $\nu_y$  несоизмеримы. При этом условии частица описывает сложную кривую (фигура Лиссажу), состоящую из многих

петель (рис. 149) и обладающую следующим интересным свойством: кривая эта нигде не замыкается; она заполняет прямоугольник  $a_1 a_2$  с равномерной плотностью, так что движущаяся точка может подойти бесконечно близко к любой точке, лежащей внутри этого прямоугольника. Наоборот, если  $\nu_x$  и  $\nu_y$  соизмеримы, то получается чисто периодическое движение; например, при  $\nu_x = \nu_y$  частица либо совершает колебания по прямой, либо описывает круг или эллипс. При каком-нибудь другом рациональном отношении частот получается, вообще говоря, сложная, однако обязательно замкнутая кривая; выйдя из определённой точки и описав более или менее сложную траекторию, частица вновь вернётся

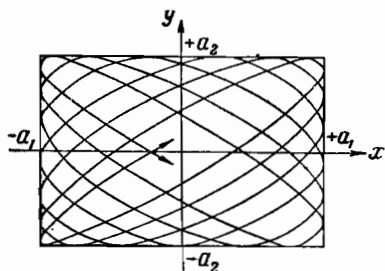


Рис. 149. Пример условно-периодического движения.

в эту точку, и движение начнёт повторяться. Во всех таких случаях мы имеем дело в сущности не с двумя основными частотами  $\nu_x$  и  $\nu_y$ , а только с одной, так как вследствие рациональности отношения  $\nu_x/\nu_y$  вторую частоту можно выразить через первую. Отсюда ясно, что чисто периодическое движение есть частный случай условно-периодического и притом *особенный* случай: вместо двух собственных частот, которыми должна характеризоваться система с

двумя степенями свободы, мы имеем здесь дело с одной частотой, и траектория не заполняет с равномерной плотностью весь прямоугольник. Обычно говорят, что чисто периодическое движение является случаем *вырождения* условно-периодического.

В рассмотренном простейшем случае условно-периодическое движение сводится к двум простым гармоническим колебаниям. Поэтому правило квантования (99,7) можно теперь применить к каждому из этих колебаний и потребовать, чтобы

$$\oint p_x dx = n_x h, \quad \oint p_y dy = n_y h,$$

где  $n_x$  и  $n_y$  — целые числа 1, 2, 3, ...

Оказывается, что во многих случаях систем с несколькими степенями свободы можно найти такие обобщённые координаты  $q_1, q_2, \dots, q_f$ , в которых, как и в рассмотренном примере анизотропного осциллятора, движение «разделяется» на  $f$  гармонических колебаний; в этих случаях найденное нами в § 99 правило квантования можно применить к каждой степени свободы. Мы получим при этом  $f$  квантовых условий:

$$\oint p_1 dq_1 = n_1 h, \quad \oint p_2 dq_2 = n_2 h, \quad \dots, \quad \oint p_f dq_f = n_f h. \quad (106,1)$$

Целые числа  $n_1, n_2, \dots, n_j$  называются *квантовыми числами*.

Обратимся теперь к водородоподобному атому. По схеме теории Бора необходимо сначала решить в рамках классической механики задачу о движении электрона в кулоновском поле ядра. Это решение полностью выполнено нами в § 49, где были найдены следующие соотношения:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}, \quad (49,19)$$

$$E = -\frac{mZ^2v^4(1-\varepsilon^2)}{2r^2}. \quad (49,18)$$

Из этого непрерывного многообразия значений энергии следует отобрать при помощи квантовых условий дискретный ряд.

Так как при рассмотрении орбитального движения электрона мы должны приписать ему две степени свободы, соответствующие двум независимым координатам  $r$  и  $\varphi$ , то необходимо применить два квантовых условия:

$$\oint p_r dr = n_r h; \quad \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h. \quad (106,2)$$

Обобщённые импульсы  $p_r$  и  $p_\varphi$  на основании § 55 таковы:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}.$$

Принимая во внимание, что по закону сохранения момента количества движения  $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$ , мы получаем из второго условия (106,2)

$$n_\varphi h = \oint p_\varphi d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

откуда

$$p_\varphi = n_\varphi \frac{h}{2\pi}. \quad (106,3)$$

Применение первого квантового условия (106,2) требует довольно сложных вычислений, которые мы здесь опустим. В результате этих вычислений получается следующее выражение для эксцентриситета орбиты  $\varepsilon$  через квантовые числа  $n_r$  и  $n_\varphi$ :

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{(n_r + n_\varphi)^2}.$$

Сумма обоих квантовых чисел  $n_r$  и  $n_\varphi$  называется *главным квантовым числом*. Обозначив его через  $n$ , имеем

$$\begin{aligned} n_r + n_\varphi &= n, \\ 1 - \varepsilon^2 &= \frac{n_\varphi^2}{n^2}. \end{aligned} \quad (106,4)$$



Подставляя это в (49,18) и заменяя  $P = p_\varphi$  через  $n_\varphi \hbar/2\pi$ , получим

$$E = - \frac{2\pi^2 mZ^2 e^4}{n^2 \hbar^2}. \quad (106,5)$$

Мы видим, что, несмотря на применение двух квантовых условий, окончательный результат ничем не отличается от полученного в § 100 для случая круговых орбит: энергия зависит от одного квантового числа  $n$ , называемого *главным квантовым числом*; при этом  $n$  является суммой квантовых чисел  $n_r$  и  $n_\varphi$ . Этот результат связан с тем, что эллиптическое движение электрона является вырожденным случаем условно-периодического движения. В самом деле, невырожденное условно-периодическое движение на плоскости должно происходить по незамкнутойся фигуре Лиссажу, тогда как обращение по эллипсу есть движение чисто периодическое. Мы сейчас увидим, что результат, выражаемый формулой (106,5), означает, что для каждого значения главного квантового числа  $n$  имеется  $n$  *совпадающих по величине уровней энергии*.

Для того чтобы убедиться в этом, покажем, что каждому значению  $n$  соответствует  $n$  различных орбит с одной и той же большой полуосью. Действительно, выражение для большой полуоси орбиты мы получим из формулы (49,19). Вставляя в неё квантованные значения энергии (106,5), имеем

$$a = - \frac{Ze^2}{2E} = n^2 \frac{\hbar^2}{4\pi^2 mZe^2} \quad (106,6)$$

или, воспользовавшись введённым в § 100 сокращённым обозначением для «боровского радиуса»  $a_1$  [формула (100,4)],

$$a = n^2 \frac{a_1}{Z} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (106,7)$$

Итак, величина большой полуоси в различных квантовых состояниях пропорциональна квадрату главного квантового числа.

Для вычисления малой полуоси  $b$  возьмём известную формулу аналитической геометрии  $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$  и вставим в неё уже найденные квантовые значения  $a$  и  $\sqrt{1-\varepsilon^2}$  из (106,4) и (106,7):

$$b = n^2 \frac{a_1}{Z} \cdot \frac{n_\varphi}{n} = nn_\varphi \frac{a_1}{Z}. \quad (106,8)$$

Сравнение (106,7) и (106,8) показывает, что большая полуось зависит только от главного квантового числа, тогда как малая полуось зависит как от главного, так и от азимутального квантового числа.

Рассмотрим теперь, какие значения может принимать азимутальное квантовое число. При  $n_p = n$  (106,8) переходит в (106,7), и орбита — круговая; при  $n_p = 0$  и  $b = 0$  эллиптическая орбита вырождается в прямолинейную траекторию, по которой электрон должен был бы совершать маятникообразные движения. Такая орбита в теории Бора исключается по тем соображениям, что при движении по ней электрон должен был бы сталкиваться с ядром. Итак, наименьшее значение  $n_p$  есть 1, наибольшее —  $n$ :

$$n_p = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (106,9)$$

Отсюда следует, что каждому значению  $n$ , т. е. каждой большой полуоси, отвечает  $n$  различных орбит с разной величиной эксцентриситета: от вытянутого эллипса до круга. Например,

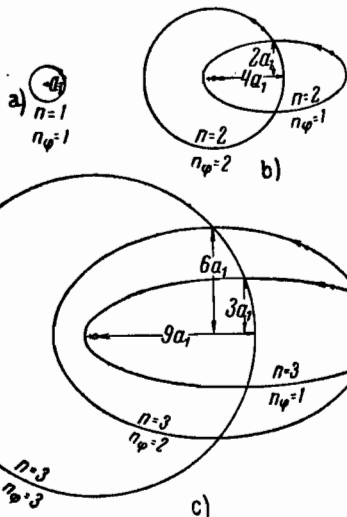
$$\begin{aligned} n = 1, a = \frac{a_1}{Z}, n_p = 1, b = \frac{a_1}{Z} & \text{— круг,} \\ n = 2, a = 4 \frac{a_1}{Z} & \begin{cases} n_p = 1, b = 2 \frac{a_1}{Z} \text{— эллипс,} \\ n_p = 2, b = 4 \frac{a_1}{Z} \text{— круг,} \end{cases} \\ n = 3, a = 9 \frac{a_1}{Z} & \begin{cases} n_p = 1, b = 3 \frac{a_1}{Z} \text{— эллипс,} \\ n_p = 2, b = 6 \frac{a_1}{Z} \text{— эллипс,} \\ n_p = 3, b = 9 \frac{a_1}{Z} \text{— круг.} \end{cases} \end{aligned}$$

На рис. 150 вычерчены орбиты для  $n = 1, 2, 3$ . Заметим, что эллиптические орбиты в перигелии подходят к фокусу (ядру) тем ближе, чем меньше  $n_p$ .

Мы видим, таким образом, что для каждого значения главного квантового числа действительно существует  $n$  различных орбит с одинаковой большой полуосью. Всем этим  $n$  орбитам по формуле (106,5) соответствует одно и то же значение энергии или, точнее,  $n$  равных значений энергии. В этом и заключается вырождение. Если, однако, появляется какое-либо возмущение, то орбиты деформируются различным образом, и  $n$  уровней энергии, которые раньше совпадали, разделяются. Принято говорить, что возмущение снимает вырождение.

До сих пор мы интересовались только движением электрона в плоскости его орбиты и в соответствии с этим приписывали электрону две степени свободы. Однако положение электрона в пространстве характеризуется тремя координатами. Учитывая все три степени свободы, мы приобретаем возможность описывать не только движение электрона по его орбите, но и пространственную ориентацию самой орбиты.

Положение электрона в пространстве характеризуется тремя полярными координатами  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\psi$  (рис. 151). Поэтому квантовые условия в этом случае принимают вид



$$\left. \begin{aligned} \oint p_r dr &= n_r h, \\ \oint p_\vartheta d\vartheta &= n_\vartheta h, \\ \oint p_\psi d\psi &= n_\psi h. \end{aligned} \right\} (106,10)$$

Обобщённые импульсы  $p_r$ ,  $p_\vartheta$ ,  $p_\psi$  вычисляются по общему правилу (§ 55): нужно написать выражение кинетической энергии в полярных координатах  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$ :

$$\begin{aligned} E_k &\equiv T = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\psi}^2) \end{aligned} \quad (106,11)$$

Рис. 150. Орбиты электронов по Бору.

и найти производные по обобщённым скоростям:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2 \dot{\vartheta}, \\ p_\psi &= \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (106,12)$$

Обратим теперь внимание на обобщённый импульс  $p_\psi$ . Из рис. 151 видно, что координата  $\psi$  характеризует движение проекции электрона по экватору, а соответствующий ей обобщённый импульс  $p_\psi$  есть проекция полного момента количества движения  $P$  на ось  $z$ . Направление этой оси физически может быть задано, например, бесконечно малым магнитным полем, совпадающим

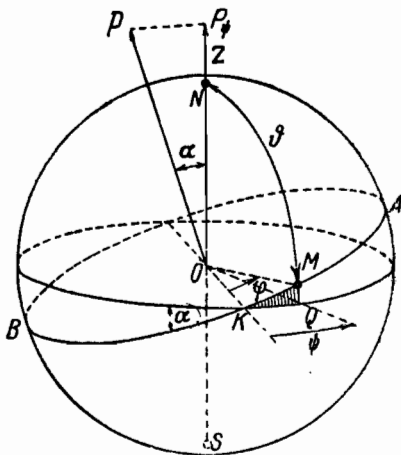


Рис. 151.

по направлению с осью  $z$ . Мы сейчас увидим, что  $p_\psi$  сохраняет своё значение,  $p_\psi = \text{const.}$  С этой целью напомним функцию

Гамильтона, принимая во внимание выражение кинетической энергии (106,11) и выражения обобщённых импульсов (106,12):

$$H = T + U = E_k + E_p = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} p_\psi^2 \right) - \frac{Ze^2}{r}. \quad (106,13)$$

Так как координата  $\psi$  в это выражение не входит, то она есть циклическая координата. Поэтому соответствующий импульс постоянен (§ 58),  $p_\psi = \text{const}$ . Ввиду этого квантовое условие

$\oint p_\psi d\psi = n_\psi h$  даёт:

$$\begin{aligned} \oint p_\psi d\psi &= p_\psi \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi p_\psi = n_\psi h, \\ p_\psi &= n_\psi \frac{h}{2\pi}. \end{aligned} \quad (106,14)$$

Мы видим, таким образом, что проекции момента количества движения на направление поля имеют квантованные значения. Это показывает, что ориентация орбит  $AB$  в пространстве не может быть произвольной, но существует дискретный ряд возможных ориентаций. Действительно, всяда вместо существенно положительного числа  $n_\psi$  равное ему по абсолютной величине число  $m$ , которое, однако, может иметь как положительные, так и отрицательные значения, мы получим

$$\cos \alpha = \frac{p_\psi}{P} = \frac{m \frac{h}{2\pi}}{n_\varphi \frac{h}{2\pi}} = \frac{m}{n_\varphi}.$$

Пусть, например,  $P = 1 \frac{h}{2\pi}$ ; тогда  $n_\varphi = 1$  и

$$\cos \alpha = \frac{m}{n_\varphi} = +1, 0, -1.$$

Итак, при  $n_\varphi = 1$  возможны только три различные ориентации орбиты; при  $n_\varphi = 2$  таких ориентаций будет пять ( $m = +2, +1, 0, -1, -2$ ), при  $n_\varphi = 3$  — семь и вообще при любом  $n_\varphi$  число возможных ориентаций равно  $2n_\varphi + 1$ .

Легко, однако, убедиться в том, что введённые нами два новых квантовых числа — «экваториальное»  $n_\theta$  и «широтное»  $n_\psi$  — весьма просто связаны с азимутальным квантовым числом  $n_\varphi$ . Именно

$$n_\varphi = n_\theta + n_\psi.$$

Действительно, в § 57 мы видели, что кинетическая энергия  $T$  может быть выражена следующим образом:

$$2T = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (57,9)$$

Обозначая кинетическую энергию через  $E_{\text{кин}}$  и принимая во внимание, что  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$ , получаем

$$2E_{\text{кин}} = \sum_k \dot{q}_k p_k.$$

Интегрируя это равенство по  $t$  в пределах периода, т. е. от 0 до  $\tau$ , находим

$$2 \int_0^{\tau} E_{\text{кин}} dt = \sum_k \int_0^{\tau} p_k dq_k = \sum_k \oint p_k dq_k. \quad (106,15)$$

Если мы выберем в качестве координат  $q_k$  полярные координаты на плоскости ( $r$  и  $\varphi$ ), то согласно (106,15)

$$2 \int_0^{\tau} E_{\text{кин}} dt = \oint p_r dr + \oint p_\varphi d\varphi. \quad (106,16)$$

В случае сферических полярных координат имеем

$$2 \int_0^{\tau} E_{\text{кин}} dt = \oint p_r dr + \oint p_\vartheta d\vartheta + \oint p_\psi d\psi.$$

Приравнивая друг другу правые части, находим после сокращения

$$\oint p_\varphi d\varphi = \oint p_\vartheta d\vartheta + \oint p_\psi d\psi$$

или, принимая во внимание квантовые условия (106,2),

$$n_\varphi = n_\psi + n_\vartheta. \quad (106,17)$$

Это показывает, что выражение для полной энергии электрона (106,5) может быть переписано в виде

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{(n_r + n_\varphi)^2 \hbar^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{(n_r + n_\vartheta + n_\psi)^2 \hbar^2}.$$

Следовательно, полная энергия при учёте пространственной ориентации орбиты так же, как и в случае плоской задачи, зависит только от суммы всех квантовых чисел, но не от самих квантовых чисел. Другими словами, вырождение на самом деле

более значительно, нежели это следовало из рассмотрения плоской задачи: не только все эллипсы с одинаковой большой полуосью, но и все такие эллипсы, различным образом ориентированные в пространстве, в отсутствии внешнего магнитного поля имеют одинаковую энергию.

Ввиду того, что при введении всех рассмотренных уточнений (эллиптические орбиты, пространственная ориентация) результат получается тот же самый, что и в простейшем случае круговых орбит,— учёт этих усложнений может показаться излишним. В действительности это не так. При появлении внешнего магнитного поля устраняется вырождение в отношении экваториального  $n_\phi$  (или магнитного  $m$ ) квантового числа: различным образом ориентированные орбиты приобретают различную энергию. Последовательно проведённый расчёт даёт объяснение простого эффекта Зеемана. Далее, в сложных атомах, где имеется несколько электронов, возмущение движения периферического электрона остальным и приводит к тому, что в выражении энергии атома появляется наряду с главным квантовым числом, равным сумме  $n_r + n_\phi$ , также и азимутальное квантовое число. Вследствие этого уровни энергии с одним и тем же главным квантовым числом и различными азимутальными, совпадающие в случае одноэлектронных атомов, разделяются. Это даёт возможность объяснить особенности спектров сложных атомов, имеющих один валентный электрон (элементы первой группы периодической системы Li, Na, K и т. д.). Мы, однако, не будем здесь останавливаться на этом дальнейшем развитии теории Бора, так как она, несмотря на ряд больших частных успехов, сохранила теперь лишь историческое значение. Упомянутые же явления (спектры сложных атомов, эффект Зеемана) получили иное объяснение в рамках значительно более широкого круга явлений. С этим объяснением мы познакомимся в дальнейшем.

### § 107. Принцип соответствия

Вернёмся теперь к вопросу, уже затронутому в § 99, именно, — к вопросу о взаимоотношении законов классической и квантовой физики. Как мы видели, неравенство нулю постоянной Планка  $h$  ведёт к тому, что механические величины, характеризующие системы атомных размеров (энергия, момент количества движения), вообще говоря, не могут изменяться непрерывно, но принимают дискретный ряд значений, отбираемых при помощи квантовых условий.

Равным образом и законы классической электродинамики оказываются неприменимыми к атомным системам. В самом деле, согласно законам классической электродинамики электрон, обращающийся по орбите, должен излучать электромагнитные

волны. Это излучение влечёт за собой потерю энергии, вследствие чего электрон должен был бы постепенно приближаться к ядру. Напротив, квантовые постулаты требуют, чтобы излучение происходило только при переходе с одной стационарной орбиты на другую. Таким образом, в классической картине электрон непрерывно падает к ядру по спиральной орбите, всё время излучая, тогда как в квантовой картине он спускается по ступеням конечной величины, излучая только при «перескоках».

Существуют, однако, условия, при которых обе картины должны дать совпадающие результаты. Представим себе, что расстояния между последовательными уровнями малы по сравнению с высотой самих уровней. Тогда «ступеньки», по которым происходит спуск, будут очень мелкими, и спуск по ним мало отличается от непрерывного скольжения вниз. Такой именно случай имеет место при больших квантовых числах. В самом деле, рассмотрим, например, бальмеровские уровни энергии:

$$E_n = - \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2 n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как энергия отрицательна, то с увеличением  $n$  она возрастает. Кроме того, при достаточно больших  $n$  соседние уровни будут расположены тесно и притом тем теснее, чем больше  $n$ . Если  $n$  очень велико, то мы будем иметь дело с практически непрерывной последовательностью уровней, и характерная особенность квантовых процессов — дискретность — должна совершенно сгладиться.

Мы сейчас увидим, что результаты, полученные нами в предыдущих параграфах, вполне удовлетворяют этому требованию. Начнём с водородоподобного атома и покажем, что для больших квантовых чисел частоты излучения, вычисленные по классическим и по квантовым законам, между собой совпадают. Для этого мы воспользуемся формулами § 100. Комбинируя формулы \*)

$$a_n^2 \nu_n^* = \frac{nh}{4\pi^2 m}, \quad (100,2)$$

и

$$a_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m Z e^2}, \quad (100,3)$$

найдем

$$\nu_n^* = \frac{4\pi^2 m Z^2 e^4}{n^3 h^3} \text{ сек.}^{-1}.$$

Эта формула даёт частоту обращения электрона по  $n$ -й стационарной орбите. Согласно классической электродинамике

\*) Напоминаем, что  $\nu^*$  означает частоту, выражающуюся в сек.<sup>-1</sup>, в отличие от  $\nu$  (волновое число), выражаемого в см.<sup>-1</sup>.

такой же должна быть и частота испускаемого электромагнитного излучения. Мы имеем поэтому

$$\nu_{кл}^* = \nu_n^* = \frac{4\pi^2 m Z^2 e^4}{n^3 h^3} \text{сек.}^{-1}. \quad (107,1)$$

Эту формулу мы запишем в более компактном виде, воспользовавшись выражением постоянной Ридберга:

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} \text{см}^{-1}. \quad (100,7)$$

Формулу (107,1) можно теперь легко привести к виду

$$\nu_{кл}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3} \text{сек.}^{-1}. \quad (107,2)$$

Квантовая частота при переходе  $n \rightarrow k$ , как известно, вычисляется по формуле Бальмера и равна

$$\nu_{кв}^* = RcZ^2 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{сек.}^{-1} \quad (107,3)$$

(множитель  $c$  появился потому, что мы вычисляем истинную частоту в сек.<sup>-1</sup>, тогда как  $R$  обычно выражается в см.<sup>-1</sup>).

Для сравнения со (107,1) удобнее привести (107,3) к следующему виду:

$$\nu_{кв}^* = RcZ^2 \frac{k^2 - n^2}{k^2 n^2} = RcZ^2 \frac{(k-n)(k+n)}{k^2 n^2}. \quad (107,4)$$

Как мы видим, выражения (107,2) и (107,3) для  $\nu_{кл}^*$  и  $\nu_{кв}^*$  резко различаются. Положим, однако, что  $n$  — большое число:

$$n \gg 1 \quad (107,5)$$

и пусть, кроме того,  $k - n = 1$ ; тогда вследствие (107,5)  $k = n + 1 \approx n$ . При этом условии (107,4) принимает вид

$$\nu_{кв}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3} \text{ или } \frac{2RcZ^2}{k^3}. \quad (107,6)$$

Сравнивая (107,6) со (107,2), мы видим, что если квантовые числа велики, то для переходов между соседними квантовыми состояниями

$$\nu_{кв}^* = \nu_{кл}^*. \quad (107,7)$$

Если при переходе главное квантовое число изменяется не на 1, а на 2, 3, ... и вообще на  $\Delta n$ , при условии, что  $\Delta n \ll n$ , то

$$\nu_{кв}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3} \Delta n = \nu_{кл}^* \Delta n \quad (\Delta n = 2, 3, \dots),$$



т. е. испускаемые при таких переходах частоты  $2\nu_{кл}^*$ ,  $3\nu_{кл}^*$ , ... будут совпадать с первым, вторым или более высокими обертонами классической частоты. Для малых квантовых чисел такого совпадения не имеется, но существует соответствие, так что каждому классическому обертому можно привести в соответствие определённую квантовую частоту.

Соотношение между классическими и квантовыми законами в очень отчётливой форме можно высказать ещё следующим образом. Пусть мы имеем систему с одной степенью свободы. Частота излучения, испускаемого этой системой, по квантовым законам вычисляется при помощи условия частот  $E_n - E_k \equiv \Delta E = h\nu$

$$\nu_{кв} = \frac{\Delta E}{h}. \quad (107,8)$$

Стационарные же состояния с энергиями  $E_k$  и  $E_n$  находятся при помощи квантового условия  $\oint p dq = nh$ . Обозначив через  $I$  интеграл  $\oint p dq$ , имеющий размерность действия, имеем  $I = nh$ .

Для двух стационарных состояний мы получим

$$I_k = kh, \quad I_n = nh$$

и

$$I_k - I_n \equiv \Delta I = (k - n)h.$$

Если  $k - n = 1$ , т. е. если рассматриваются соседние состояния, то  $\Delta I = h$ . Подставляя это в (107,8), получим

$$\nu_{кв}^* = \frac{\Delta E}{\Delta I}. \quad (107,9)$$

Для вычисления соответствующего выражения классической частоты мы возьмём случай линейного гармонического осциллятора. Энергия осциллятора равна  $E = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{p^2}{2m} + U$ , откуда  $p = \sqrt{2m(E - U)}$ . Интеграл действия в таком случае будет

$$I = \oint p dx = \oint \sqrt{2m(E - U)} dx.$$

Рассматривая энергию  $E$  как непрерывно изменяющийся параметр, найдём производную

$$\frac{dI}{dE} = \oint \frac{m}{\sqrt{2m(E - U)}} dx = \oint \frac{m}{p} dx = \oint \frac{dx}{v} = \oint \frac{dx}{dx/dt} = \oint dt = T,$$

где  $T$  — период колебания. Отсюда получается следующее замечательное выражение для классической частоты:

$$\nu_{кл}^* = \frac{1}{T} = \frac{dE}{dI}. \quad (107,10)$$

Можно показать, что соотношение (107,10) должно иметь место для *любой* периодических систем с одной степенью свободы. Но так как это общее доказательство требует использования аппарата, знакомство с которым не предполагается у читателя, то мы ограничимся подтверждением его на частных примерах, приведённых в упражнениях к этому параграфу.

Сравнивая (107,9) и (107,10), мы приходим к следующему результату. И по классической, и по квантовой теории частота может быть вычислена как отношение приращения энергии к приращению действия, но, в то время как в первом случае мы берём бесконечно малые приращения, во втором мы должны брать конечные разности.

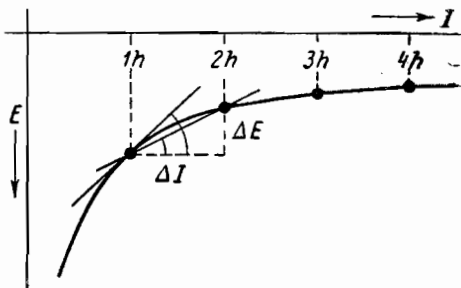


Рис. 152.

Рис. 152 хорошо иллюстрирует это. Сплошная кривая на этом рисунке представляет энергию как функцию интеграла действия  $I$ .

Квантовые состояния изображают только те точки этой кривой, которые отвечают целочисленным значениям действия  $I=1h, 2h, 3h$ . Очевидно, что квантовая частота  $\Delta E/\Delta I$  будет равна тангенсу угла наклона секущей, соединяющей две точки, соответствующие квантовым состояниям, классическая же частота равна тангенсу угла наклона касательной, так как  $\nu_{\text{кл}}^* = \frac{dE}{dI}$ . При этом в области больших квантовых чисел, где разница между наклоном касательных и секущих исчезает,  $\nu_{\text{кл}} = \nu_{\text{кв}}$ .

Полученный результат можно суммировать ещё иначе. Из той общей формулировки, которую мы дали квантовым условиям в § 99, следует, что основная причина прерывности механических величин для очень малых систем заключается в «атомизме» действия: существует наименьшая величина действия, равная постоянной Планка  $h=6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек; она-то и является как бы «атомом» действия. Если размеры системы и массы частиц таковы, что действие для такой системы сравнимо с  $h$ , то квантовый характер явлений сказывается в полной мере; если же действие настолько велико, что можно положить  $h=0$ , то прерывность становится незаметной, и должны удовлетворяться законы классической механики.

Этот результат является частным случаем общего принципа, играющего важную роль в современной теоретической физике — *принципа соответствия*. Так, например, формулы механики специальной теории относительности автоматически переходят

в формулы ньютоновой механики при  $v \ll c$ , т. е. если скорости настолько малы, что можно положить  $c \rightarrow \infty$ . Принцип соответствия требует, вообще, чтобы всякая неклассическая теория в соответствующем предельном случае переходила в классическую.

У п р а ж н е н и я: 1. Доказать, что формула (107,10) имеет место для ротатора, т. е. для частицы, обращающейся по кругу около неподвижного центра. (Указание. Интеграл действия в случае ротатора есть

$$I = \oint p_{\varphi} d\varphi, \text{ причём } p_{\varphi} = \sqrt{2EA}, \text{ где } A - \text{момент инерции.})$$

2. Пользуясь формулой (103,5) для энергии водородоподобного атома  $E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 \hbar^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{I^2}$ , где  $I = nh$  — интеграл действия, и предполагая, что  $I$  меняется непрерывно, вычислить при помощи (107,10) классическую частоту обращения электрона для  $n$ -й орбиты и показать, что получаемый таким образом результат совпадает с (107,2).

## § 108. Кризис теории Бора

Теория Бора, с которой мы ознакомились в этой главе, была весьма крупным шагом в развитии теории строения атома. Она с полной отчётливостью показала неприменимость классической физики к внутриатомным явлениям, с одной стороны, и первенствующее значение квантовых законов в микроскопических системах — с другой. Она послужила толчком к большому числу экспериментальных работ, принесших ряд важных результатов; но особенно велико было её эвристическое значение: даже в тех случаях, когда теория не могла дать количественного объяснения той или другой группе явлений, она давала руководящую нить для отчётливой их классификации и качественной интерпретации. Таким путём, например, огромный эмпирический материал спектроскопии — атомной и молекулярной — трудами ряда исследователей, среди которых большое значение имеют работы русского учёного, академика Д. С. Рождественского и учеников его школы, был впервые приведён в стройную и ясную систему.

Наряду с этими и многими другими положительными сторонами теория обладала существенными недостатками, которые были ясны с самого начала. К числу их относится прежде всего внутренняя логическая противоречивость теории. В самом деле, теория Бора не была ни последовательно классической, ни последовательно квантовой теорией. По шутливому выражению У. Г. Брэгга, в этой теории мы как бы должны были по понедельникам, средам и пятницам пользоваться классическими законами, а по вторникам, четвергам и субботам — квантовыми!

Не удивительно, что после первых успехов теории всё яснее и яснее давали себя знать её недочёты. Прежде всего, даже в простейшем случае водородоподобных атомов теория Бора позволяла вычислять только частоты спектральных линий, но не их интен-

сивности. Для вычисления интенсивностей приходилось пользоваться принципом соответствия, распространяя его также и на малые квантовые числа и, в конечном счёте, производя вычисления по классической электродинамике.

Особенно тягостной была неудача всех попыток построения теории нейтрального атома гелия — одного из простейших атомов периодической системы, непосредственно следующего за атомом водорода и состоящего из трёх частиц — ядра и двух электронов. Хотя задача о трёх телах в рамках классической механики не может быть решена точно, — в небесной механике были уже давно разработаны превосходные приближённые методы, которые могли бы дать результаты с точностью, вполне достаточной для сравнения с экспериментом. Несмотря на это, многочисленные попытки построения теории атома гелия потерпели полное крушение.

В настоящее время, после открытия своеобразных волновых свойств вещества, о которых речь будет в главе X, совершенно ясно, что теория Бора, опирающаяся на классическую механику, могла быть только переходным этапом к созданию последовательной теории атомных явлений.

## ГЛАВА IX СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ

### § 109. Флуктуации светового поля

До сих пор мы интересовались проявлениями своеобразных квантовых законов в *движениях* микроскопических частиц. Мы установили, в частности, что процесс испускания света атомом происходит прерывным образом при переходах между различными стационарными состояниями, но вопрос о природе самой лучистой энергии мы пока оставляли в стороне. Однако уже в 1905 г. Эйнштейн указал на то, что существует большое количество экспериментальных фактов и серьёзных теоретических соображений, которые неизбежно приводят к представлению о прерывной природе самого излучения. Мы начнём с изложения *теоретических* соображений Эйнштейна. Эти соображения основаны на рассмотрении случайных колебаний (флуктуаций) плотности излучения.

Представим себе, что мы имеем материальный газ, помещённый в замкнутый резервуар объёма  $V$ . Выделим теперь какую-нибудь часть объёма  $v < V$  и будем следить в различные моменты за числом молекул газа, находящихся внутри  $v$ . С молекулярно-статистической точки зрения это число отнюдь не будет строго постоянным, но будет испытывать колебания. Пусть среднее число частиц в объёме  $v$  будет  $\bar{n}$ . Если этот объём достаточно велик и газ находится при нормальном давлении, то мгновенные отклонения от этого среднего числа  $n$  будут относительно настолько малы, что ими, вообще говоря, можно пренебречь. Станем теперь уменьшать объём  $v$ . Если мы, в конце концов, представим себе, что этот объём настолько мал, что в нём помещается лишь небольшое число частиц (скажем, в среднем 10), то случайные отклонения от среднего сделаются уже вполне заметными. Такие случайные отклонения и называются флуктуациями. Изучение их является одной из интереснейших и важнейших глав современной статистической физики.

Смолуховский, который много занимался изучением флуктуаций, рассматривал, например, следующую задачу: какова

вероятность того, что все молекулы газа, находящиеся в объёме  $V$ , соберутся в части  $v$  этого объёма? Ответ на этот вопрос дать нетрудно. Если бы в объёме  $V$  находилась только одна молекула, то вероятность найти её в части  $v$  будет, очевидно, пропорциональна  $v$  и равна

$$w_1 = \frac{v}{V}. \quad (109,1)$$

Действительно, если  $v=V$ , то  $w_1=1$ , что и должно быть, так как нахождение молекулы во всём объёме  $V$  есть событие достоверное. Пусть, однако, в объёме  $V$  находится  $n$  независимых молекул. Вероятность найти *одну* молекулу в части объёма  $v$  выражается формулой (109,1); вероятность найти  $n$  независимых молекул в одной и той же части объёма, по теореме умножения вероятностей, будет

$$w_n = \left(\frac{v}{V}\right)^n. \quad (109,2)$$

Из этой формулы видно, что если, например,  $v = \frac{1}{2}V$ , то при сколько-нибудь больших значениях  $n$  вероятность  $w_n$ , равная

$$w_n = \frac{1}{2^n},$$

будет ничтожно мала.

Эйнштейн рассмотрел аналогичную задачу для случая излучения. Пусть мы имеем замкнутый объём  $V$ , наполненный чёрным излучением при температуре  $T$ . Энергия излучения с частотами между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$ , заключённая внутри этого объёма, равна

$$E = V\rho_\nu d\nu,$$

где  $\rho_\nu$  — спектральная плотность излучения. Задача заключается в вычислении вероятности того, что вся эта энергия сконцентрируется в части объёма  $v$ . Пользуясь статистической термодинамикой и формулой Вина для плотности излучения (*справедливой для высоких частот*)

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu,$$

Эйнштейн нашёл, что искомая вероятность равна

$$w = \left(\frac{v}{V}\right)^{E/h\nu}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (109,2), мы видим, что излучение с достаточно короткими длинами волн ведёт себя так, как если бы оно состояло из  $n = \frac{E}{h\nu}$  независимых корпускул!

Эйнштейн рассмотрел, далее, и вопрос о флуктуациях плотности излучения. Заметим, однако, что вопрос этот сохраняет свой смысл также и в том случае, если излучению приписывать чисто волновую природу. В самом деле, в этом последнем случае мы считаем, что полость  $V$  бороздят во всех направлениях электромагнитные волны. Среди них имеются волны, близкие по направлению и по частоте, которые в каждой точке полости между собою интерферируют. Так как, однако, эти интерферирующие волны некогерентны, то интерференционная картина непрерывно меняется во времени и в пространстве. Именно поэтому «макроскопически», в среднем мы получаем всюду одинаковую плотность излучения, т. е. кажущееся отсутствие интерференции. Микроскопическая же картина такова, что максимумы и минимумы непостоянны во времени и в пространстве, т. е. имеются флуктуации плотности излучения.

Обратимся теперь к рассмотрению этих флуктуаций. Предположим сначала, что излучение действительно состоит из отдельных «атомов» величины  $h\nu$ , которые мы будем называть *фотонами*. В таком случае плотность излучения будет равна числу фотонов в единице объёма, умноженному на  $h\nu$ . Но число фотонов в некотором выбранном объёме, как и число молекул, должно испытывать случайные колебания, флуктуации. Установим сначала меру этих флуктуаций. Если  $\bar{n}$  есть среднее число частиц в объёме  $v$ , то число частиц  $n_k$ , находящихся в данный момент в этом объёме, будет, вообще говоря, отлично от  $\bar{n}$ : в одних случаях оно будет больше  $\bar{n}$ , в других — меньше. Отклонение от среднего

$$\Delta n_k = n_k - \bar{n}$$

будет поэтому то положительным, то отрицательным и будет, кроме того, иметь различные абсолютные значения. Однако среднее значение  $\Delta n$  не может служить мерой флуктуаций, так как оно, очевидно, равно нулю

$$\overline{\Delta n} = \overline{(n_k - \bar{n})} = \bar{n} - \bar{n} = 0.$$

Поэтому в качестве меры отклонения удобнее пользоваться квадратом  $(n_k - \bar{n})^2$ , который всегда положителен. Среднее значение квадрата отклонения

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(n_k - \bar{n})^2}$$

является мерой «разброса» отдельных значений  $n_k$ , их отступления от среднего;  $\overline{\varepsilon^2}$  поэтому называется квадратичной флуктуацией или дисперсией. Отклонения от среднего

можно характеризовать также квадратным корнем из  $\overline{\varepsilon^2}$ , взятым со знаком плюс:

$$\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{(\overline{n_k} - \bar{n})^2},$$

который физики называют средней квадратичной ошибкой, а математики — стандартом. Все эти определения применимы, конечно, не только к случаю отклонений числа частиц, но и к любым случайным флуктуациям.

В математической статистике доказывается простой закон, имеющий место для любых случайных отклонений и состоящий в следующем: если среднее значение случайно изменяющейся величины есть  $\bar{n}$ , то и квадратичная флуктуация  $\overline{\varepsilon^2}$  также равна  $\bar{n}$  (\*), а потому среднее квадратичное отклонение  $\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\bar{n}}$ . Смысл этого закона станет ясным из численных примеров. Пусть  $\bar{n}$  есть попрежнему среднее число частиц. Если  $\bar{n} = 100$ , тогда  $\overline{\varepsilon^2}$  также = 100, а  $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10$  или иначе колебания числа частиц в среднем составляют 10% их числа; если же  $\bar{n} = 10^{10}$ , то  $\overline{\varepsilon^2} = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10^5$  или  $10^{-5} \% \bar{n}$ , а при  $\bar{n} = 10^{20}$   $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10^{10}$  или  $10^{-8} \% \bar{n}$ .

Если нас интересуют колебания энергии, то, допуская, что энергия состоит из независимых атомов величины  $h\nu$ , имеем  $\overline{E} = \bar{n} h\nu$ , а потому

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\Delta E^2} = \overline{\Delta n^2} (h\nu)^2 = (\bar{n} \cdot h\nu) h\nu = \overline{E} \cdot h\nu. \quad (109,3)$$

В статистической термодинамике (\*\*\*) доказывается, что для любой величины, зависящей от плотности  $\rho$  и температуры  $T$ , квадратичная флуктуация равна

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 \frac{d\overline{E}}{dT}. \quad (109,4)$$

Но  $\overline{E} = V\rho_\nu d\nu$ . Возьмём для плотности излучения формулу Вина (ещё раз напоминаем: оправдывающуюся для высоких частот). Тогда

$$\frac{d\overline{E}}{dT} = V \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{h\nu}{kT^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu = \frac{h\nu}{kT^2} V\rho_\nu d\nu = \frac{h\nu}{kT^2} \overline{E}.$$

Подставляя в (109,4), получаем

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu \cdot \overline{E}, \quad (109,5)$$

\*) См. приложение IV в конце книги.

\*\*) См. Г. А. Лоренц, Статистические теории в термодинамике, стр. 75, ОНТИ, 1935.



т. е. формулу (109,3). Это показывает, что излучение, подчиняющееся формуле Вина, действительно ведёт себя как собрание «атомов излучения».

Рассмотрим теперь другой крайний случай: возьмём для плотности излучения формулу Рэля—Джинса, справедливую только для длинных волн

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu.$$

Имеем

$$\frac{d\bar{E}}{dT} = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k d\nu$$

и

$$\bar{\varepsilon}^2 = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT} = k^2 T^2 V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu. \quad (109,6)$$

Принимая во внимание, что в этом случае

$$\bar{E} = V \rho_\nu d\nu = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu,$$

легко привести (109,6) к виду

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V d\nu} \bar{E}^2. \quad (109,7)$$

Эйнштейн вычислил непосредственно квадратичную флуктуацию энергии в предположении, что флуктуации вызываются непостоянством интерференционной картины, т. е. приписывая свету чисто волновую природу. При этом он получил формулу, в точности совпадающую с формулой (109,7)\*.

Мы видим, таким образом, что статистика приводит к следующему своеобразному выводу: в области коротких волн (область применимости закона Вина) излучение должно вести себя, как собрание частиц, фотонов; в области длинных волн оно должно вести себя, как волны. Однако оба использованных нами закона излучения являются предельными законами. Возьмём, наконец, формулу Планка, справедливую для любых длин волн

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1},$$

и вычислим при её помощи, пользуясь той же термодинамической формулой (109,4), квадратичную флуктуацию. После

\*) Мы не приводим здесь этот сложный расчёт. Интересующиеся могут найти его в книге Г. А. Лорентца, Статистические теории в термодинамике, стр. 119, ОНТИ, 1935.

несложных вычислений, которые могут быть выполнены читателем самостоятельно, мы получим для  $\bar{\epsilon}^2$  формулу, состоящую из двух членов

$$\bar{\epsilon}^2 = h\nu\bar{E} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu V} \bar{E}^2. \quad (109,8)$$

Первый член совпадает с формулой (109,5), т. е. соответствует чисто корпускулярному представлению о природе света. Второй член совпадает с формулой (109,7) и, следовательно, соответствует чисто волновому представлению. Мы приходим, таким образом, к поразительному выводу, что свет должен обладать как бы двумя аспектами: корпускулярным и волновым. Первый проявляется с особенной отчётливостью в коротковолновой части спектра, второй — в длинноволновой. Ни один из этих аспектов сам по себе не даёт полной картины природы света; только их сочетание позволяет полностью объяснить все его проявления.

В настоящей главе нас будут интересовать исключительно корпускулярные свойства света. Нам необходимо убедиться в том, что существует большой круг явлений, которые наиболее непосредственно объясняются, если рассматривать свет как поток фотонов. Явления же, в которых проявляется волновой аспект природы света (интерференция, диффракция), достаточно хорошо известны из классической оптики.

## § 110. Фотоэффект и уравнение Эйнштейна

К числу явлений, в которых обнаруживаются корпускулярные свойства света, принадлежит прежде всего освобождение электронов под действием света — фотоэффект.

В 1888 г. Генрих Герц заметил, что проскакивание искры между цинковыми шариками разрядника значительно облегчается, если один из шариков осветить ультрафиолетовым светом. Это явление было подробно изучено русским физиком А. Г. Столетовым, который разработал методику исследования фотоэффекта (конденсатор Столетова) и установил целый ряд закономерностей. Оказалось, что явление это основано на удалении отрицательного электричества с поверхности металла под действием ультрафиолетового света. Дальнейшие исследования выяснили, что сущность фотоэффекта заключается в освобождении электронов. Особенно ясно это было показано изящными опытами советского физика А. Ф. Иоффе с фотоэффектом на металлических пылинках. Микроскопические частицы металла, получавшиеся вследствие распыления электродов при горении дуги между ними, вводились в конденсатор. Разность потенциалов между пластинами конденсатора подбиралась так, чтобы одна из этих пылинок оставалась уравновешенной в поле

зрения микроскопа. При освещении ультрафиолетовым светом пылинка время от времени изменяла свой заряд, и равновесие нарушалось; вновь подбирая соответствующую разность потенциалов, можно было вернуть пылинку в центр поля зрения. Зная уравновешивающие потенциалы, можно было вычислить величину заряда, каждый раз теряемого пылинкой (см. § 3). Оказалось, что этот заряд всегда представляет собою целое кратное заряда электрона.

Качественное объяснение фотоэффекта с волновой точки зрения *на первый взгляд* не представляет трудностей. В самом деле, это объяснение могло бы выглядеть так: падающая электромагнитная волна вызывает вынужденные колебания электронов в металле; при резонансе между собственным периодом колебания электрона и периодом падающей волны амплитуда колебаний электрона становится настолько большой, что он может вырваться за пределы поверхности металла. Очевидно, что если эта картина верна, то кинетическая энергия, с какой электрон покидает металл, должна заимствоваться у падающей волны, и поэтому естественно ожидать, что энергия фотоэлектрона должна находиться в прямой связи с интенсивностью падающего света. На самом же деле многочисленные опыты показали, что энергия фотоэлектронов *абсолютно не зависит* от интенсивности света: повышение интенсивности увеличивает лишь *число* фотоэлектронов и притом в количестве, строго пропорциональном интенсивности, — но не их скорость. Последняя зависит только от частоты падающего света, а именно, с увеличением частоты *линейно* возрастает и энергия фотоэлектронов.

Все эти законы фотоэффекта представляются непонятными с точки зрения волновой природы света. Независимость энергии фотоэлектронов от интенсивности света пытались объяснить тем, что свету приписывалась роль «спускового механизма», т. е. предполагалось, что электрон набирает свою энергию не за счёт падающей волны, но за счёт тепловых движений в металле, так что роль света сводится только к освобождению электрона. Однако при этом остаётся совершенно непонятным влияние частоты света и, кроме того, если бы это было верно, фотоэффект должен был бы сильно зависеть от температуры металла, чего на самом деле нет.

Эйнштейн указал на то, что все эти трудности исчезают, если рассматривать свет как поток фотонов величины  $h\nu$ , т. е. стать на чисто корпускулярную точку зрения. Качественная картина механизма фотоэффекта с этой точки зрения такова: фотон, поглощаясь, отдаёт свою энергию электрону, и если эта энергия достаточна для того, чтобы освободить электрон от удерживающих его связей, то он выходит за пределы поверхности металла. Так как вероятность одновременного поглощения двух фотонов одним

электроном ничтожно мала, то каждый освобождённый электрон заимствует свою энергию у *одного фотона* (обратное, вообще говоря, не имеет места, т. е. не каждый поглощённый фотон освобождает электрон).

Поэтому *число* освобождённых фотоэлектронов должно быть пропорционально числу поглощённых фотонов, т. е. пропорционально интенсивности света (закон Столетова). Но *энергия* фотоэлектрона зависит только от энергии поглощённого фотона; последняя же равна  $h\nu$ , откуда следует, что энергия фотоэлектрона должна линейно зависеть от частоты и вовсе не зависеть от интенсивности (числа фотонов).

Энергетический баланс при поглощении фотона может быть в самом общем случае выражен следующим простым уравнением, которое обычно называется уравнением Эйнштейна:

$$h\nu = P_1 + P_2 + eV. \quad (110,1)$$

Здесь  $P_1$  — энергия отрыва электрона от атома (энергия ионизации);  $P_2$  — работа выхода электрона за пределы поверхности тела и  $eV$  — кинетическая энергия освобождённого фотоэлектрона.

Металлы характеризуются тем, что у них имеется большое количество свободных электронов; поэтому для металлов  $P_1$  можно считать равным нулю. Зато для выхода за пределы поверхности металла электрон должен преодолеть поле, благодаря наличию которого электроны оказываются запертыми внутри металла как бы в ящике. Работа, которую нужно затратить на преодоление этого поля, и есть работа выхода  $P_2$ . Таким образом, для металлов уравнение Эйнштейна имеет вид

$$h\nu = eV + P_2. \quad (110,2)$$

Очевидно, что если  $h\nu < P_2$ , то электрон не сможет выйти за пределы поверхности металла. Это значит, что существует некоторая минимальная частота  $h\nu_0 = P_2$ , которая ещё способна вызвать фотоэффект; при меньших частотах он не наблюдается (красная граница фотоэффекта).

Необходимость затраты работы для освобождения электрона из металла проявляется не только в случае фотоэффекта, но также и в случае испускания электронов накаливаемыми телами (термоионная эмиссия). Работа выхода может быть определена экспериментально, независимо от фотоэффекта, именно путём исследования термоионной эмиссии. Она имеет порядок величины нескольких электрон-вольт. В таблице XIV даётся несколько примеров величины работы выхода.

Следует заметить, что на величину работы выхода существенное влияние оказывает состояние поверхности металла и в особенности наличие плёнки адсорбированного газа,

Цифры, приведённые в таблице, относятся к металлам с обезгаженной поверхностью.

Таблица XIV

Металл	Работа выхода (в электрон-вольтах)	Металл	Работа выхода (в электрон-вольтах)
Li	2,4	W	4,5
Na	2,1	Pd	5,0
K	2,0	Pt	6,3
Cs	0,7		

Зная работу выхода, можно вычислить длину волны красной границы фотоэффекта,  $\lambda_0$ :

$$P_a = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}.$$

Такие вычисления показывают, что для щелочных металлов  $\lambda_0$  лежит в видимой части спектра (например, для калия  $\lambda_0 = 600 \text{ м}\mu$ ), а для вольфрама, платины и других металлов с работой выхода порядка 5—6 eV — в ультрафиолете (например, для вольфрама  $\lambda_0 = 270 \text{ м}\mu$ ).

Упражнение. Вычислить длины волн красной границы для всех металлов, приведённых в таблице XIV.

### § 111. Экспериментальная проверка уравнения Эйнштейна

Уравнение Эйнштейна допускает экспериментальную проверку. Согласно (110,2) между частотой падающего света и энергией вырванных им фотоэлектронов  $eV$  должна существовать линейная связь. Таким образом, возбуждая фотоэффект различными длинами волн и измеряя энергию освобождаемых фотоэлектронов, можно убедиться в правильности уравнения Эйнштейна и, кроме того, определить численное значение  $h$ , как тангенс угла наклона получающейся прямой.

Для измерения энергии фотоэлектронов в большинстве случаев пользуются методом «задерживающего потенциала», описанным в § 86.

Если бы все освобождаемые электроны имели одинаковую скорость, то зависимость силы фототока от тормозящего потенциала имела бы вид, изображённый на рис. 153; до тех пор, пока тормозящий потенциал не достигнет определённой величины  $V = V_g$ , сила тока не зависит от потенциала. При  $V = V_g$  ток сразу становится равным нулю. Это именно тот потен-

циал  $V_g$ , при котором кинетическая энергия электрона равна работе, которую электрон должен совершить для преодоления тормозящего поля

$$\frac{1}{2} mv^2 = eV_g.$$

Таким образом, этот предельный потенциал  $V_g$  служит мерой энергии фотоэлектронов: она равна  $eV_g$  электрон-вольт.

В действительности такого резкого спада тока никогда не наблюдается. Кривая зависимости тока от тормозящего потенциала обычно имеет вид, изображённый на рис. 154.

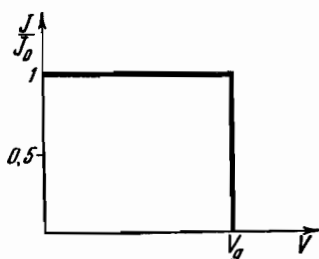


Рис. 153.

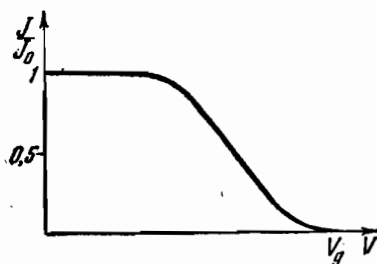


Рис. 154.

Постепенное спадание тока объясняется тем, что электроны освобождаются не с одной определённой скоростью, но имеется непрерывный набор скоростей. При этом кривая рис. 154, представляющая собою вольтамперную характеристику, позволяет отыскать и распределение электронов по энергиям. Для этого нужно произвести графическое дифференцирование вольт-амперной характеристики, как это уже было разъяснено в § 86.

Однако при экспериментальной проверке уравнения Эйнштейна нас интересует не распределение электронов по энергии, но *максимальная* энергия, так как это есть именно та энергия, с которой освобождаются фотоэлектроны с поверхности металла.

Два обстоятельства сильно затрудняют получение точных результатов. Во-первых, экспериментальная кривая  $J/J_0$  в функции  $V_g$  не пересекает ось абсцисс, как показано на рис. 154, но подходит к ней асимптотически, ввиду чего максимальный задерживающий потенциал оказывается в известной степени неопределённым. Во-вторых, как и во всех подобных опытах, контактная разность потенциалов, трудно доступная для точного определения, смещает всю кривую.

Неизбежное присутствие этой контактной разности потенциалов и трудность её учёта, а также ряд других экспериментальных затруднений и источников ошибок — всё это привело к тому,

что безупречное подтверждение уравнения Эйнштейна было получено не сразу. После некоторых предварительных работ, вызвавших серьёзные возражения, Милликэну удалось при помощи остроумной, но очень сложной установки дать искомое экспериментальное доказательство и точно определить  $h$ .

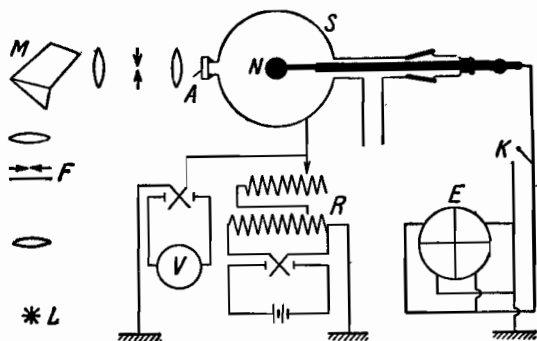


Рис. 155. Схема исследования фотоэффекта при помощи сферического конденсатора.

В настоящее время благодаря усовершенствованию техники высокого вакуума и применению удобного метода сферического конденсатора измерения чрезвычайно упростились. Преимущество метода сферического конденсатора, впервые разработанного П. И. Лукирским и использованного для экспериментальной проверки уравнения Эйнштейна П. И. Лукирским и С. С. Прилежаевым, заключается в том, что благодаря особенностям движения электронов в поле такого конденсатора кривая тока в зависимости от задерживающего потенциала спадает к нулю круто, вследствие чего максимальный задерживающий потенциал может быть определен очень точно.

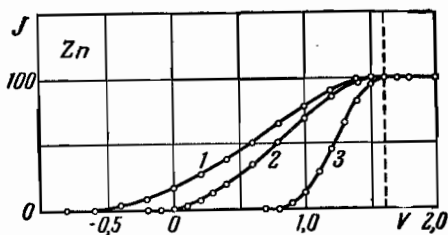


Рис. 156. Фотоэффект с цинка.

направленного П. И. Лукирским и использованного для экспериментальной проверки уравнения Эйнштейна П. И. Лукирским и С. С. Прилежаевым, заключается в том, что благодаря особенностям движения электронов в поле такого конденсатора кривая тока в зависимости от задерживающего потенциала спадает к нулю круто, вследствие чего максимальный задерживающий потенциал может быть определен очень точно.

На рис. 155 приведена схема расположения опыта. Здесь  $L$  — источник света (кварцевая ртутная лампа),  $FM$  — кварцевый монохроматор, позволяющий выделять из спектра одну линию. Через кварцевое окошко  $A$  свет попадает внутрь стеклянного, посеребрённого изнутри шара  $S$ , который служит наружной обкладкой конденсатора. Металлический шарик  $N$ , сделанный из исследуемого металла, служит внутренней обкладкой и освещается монохроматическим светом. Потенциометр  $R$  позволяет накладывать на обкладку конденсатора  $S$  определённый потен-

циал. Переключатель  $K$  позволяет включать источник тока  $E$  в цепь конденсатора. Вольтметр  $V$  измеряет разность потенциалов между шаром  $S$  и шариком  $N$ .

циал, измеряемый вольтметром  $V$ ; потенциал шарика измеряется электрометром  $E$ . На рис. 156 приведены три кривые, полученные при освещении цинкового шарика длинами волн: 1—2302 Å, 2—2537 Å и 3—3130 Å. Спадание кривых начинается при одном и том же потенциале независимо от длины волны. Этот потенциал как раз равен контактной разности потенциалов, которая, таким образом, определяется без специальных измерений. Если найти при помощи таких кривых максимальную энергию фотоэлектронов и построить график зависимости этой энергии от частоты, то получаются прямые, приведённые на рис. 157. Тем самым подтверждается линейная связь между  $h\nu$  и  $eV$ ; тангенс угла наклона этих прямых равен  $h/e$ , так что, определив угол наклона, можно вычислить  $h$  при помощи известной величины  $e$ .

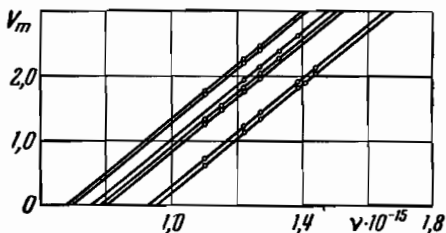


Рис. 157.

этой энергии от частоты, то получаются прямые, приведённые на рис. 157. Тем самым подтверждается линейная связь между  $h\nu$  и  $eV$ ; тангенс угла наклона этих прямых равен  $h/e$ , так что, определив угол наклона, можно вычислить  $h$  при помощи известной величины  $e$ .

## § 112. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

Если энергия связи внутренних электронов значительно меньше энергии фотона  $h\nu$ , вызывающего фотоэффект, то в уравнении Эйнштейна можно пренебречь и величиной  $P_2$ , и величиной  $P_1$  по сравнению с  $h\nu$ . В этом случае уравнение Эйнштейна принимает самый простой вид

$$h\nu = eV. \quad (112,1)$$

Если это уравнение прочитать слева направо, то оно указывает, какова энергия электрона, освобождаемого фотоном  $h\nu$ . Если же его прочитать справа налево, то оно требует, чтобы за счёт электрона с энергией  $eV$  получался фотон  $h\nu$ . Такой процесс превращения энергии быстро движущегося электрона в энергию фотона представляет собою возникновение рентгеновских лучей при торможении электронов. На самом деле механизм явления не так прост, и при торможении электрона возникает целый сплошной спектр рентгеновских лучей. Однако уравнение Эйнштейна безусловно требует, чтобы максимальная энергия получающихся при этом фотонов удовлетворяла условию (112,1).

Опыт показывает, что распределение энергии в сплошном спектре рентгеновских лучей имеет вид, изображённый на рис. 158, где приведён ряд сплошных спектров, полученных при различных потенциалах на электродах рентгеновской трубки с вольфрамовым



антикатодом. Каждый из этих спектров резко ограничен со стороны коротких длин волн (высоких частот). Эмпирически было найдено, что длина волны  $\lambda_{\min}$ , соответствующая коротковолновой границе, связана с приложенным потенциалом соотношением

$$\lambda_{\min} V = \text{const.}, \quad (112,2)$$

очевидно, тождественным с уравнением Эйнштейна (112,1). Действительно, заменяя в (112,1)  $\nu$  через  $c/\lambda$ , получаем

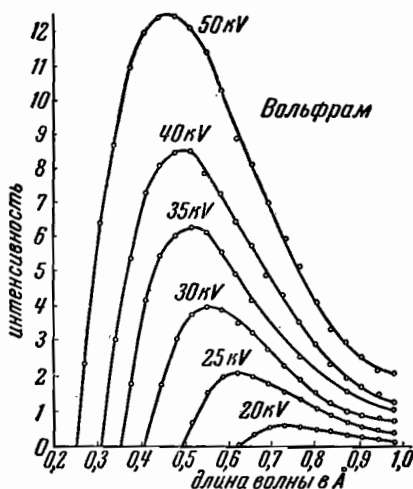
$$\lambda_{\min} V = \frac{ch}{e} = \text{const.} \quad (112,3)$$

Соотношение (112,3) можно применить для определения  $h$ ; получающееся при этом значение является наиболее достоверным.

### § 113. Точное определение постоянной Планка

Так как квантовые законы обмена энергией имеют место в большом числе явлений, то существует множество возможностей вычисления  $h$  из экспериментальных данных. Укажем прежде всего, что уже законы излучения абсолютно чёрного тела дают такую возможность. Например, в формулы

Рис. 158. Коротковолновая граница сплошного спектра рентгеновских лучей при различных потенциалах.



Планка и Вина, выраженные через длину волны, входит постоянная  $c_2 = \frac{hc}{k}$ . Экспериментальное определение этой постоянной даёт

$$c_2 = 1,4384 \text{ см} \cdot \text{град},$$

откуда, пользуясь значениями  $c$  и  $k$ :

$$c = 2,99776 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad k = 1,3804 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{град}^{-1},$$

получаем

$$h = 6,558 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}.$$

Более непосредственно определяется  $h$  из фотоэффекта. В самом деле, наклон прямых рис. 157 даёт  $h/e$ , так что точность определения  $h$  этим путём, помимо точности самого эксперимента, зависит от достоверности ещё одной константы  $e$ ,

тогда как в рассмотренном выше методе требуется знание ещё двух констант  $c$  и  $k$ . Из фотоэффекта получено

$$h = 6,547 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек.}$$

Наиболее точным методом определения  $h$  считается метод, основанный на определении коротковолновой границы рентгеновского спектра. Самое определение производится или из кривых, подобных изображённым на рис. 158, т. е. из распределения энергии в спектре при постоянном потенциале (рис. 159, *a*) или при помощи метода «изохромат». Метод «изохромат» заключается в следующем. Спектрометр для рентгеновских лучей

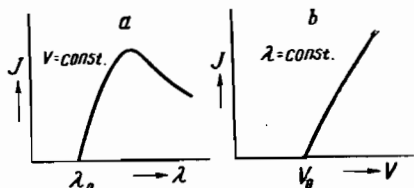


Рис. 159. *a*) кривая распределения энергии в сплошном рентгеновском спектре; *b*) изохромата.

устанавливается так, чтобы в ионизационную камеру попадали лучи одной и той же определённой длины волны, и измеряется интенсивность в зависимости от наложенного на трубку потенциала. На основании уравнения Эйнштейна

$$eV = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

выбранная длина волны появляется при строго определённом потенциале

$$V_0 = \frac{hc}{\lambda_0};$$

при дальнейшем увеличении потенциала интенсивность растёт по некоторой кривой, называемой «изохроматой»

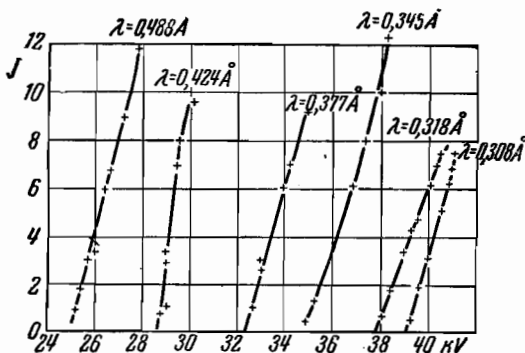


Рис. 160. Примеры изохромат.

(рис. 159, *b*). Разница между методом определения  $\lambda_{\min}$  из спектральной кривой и методом изохромат иллюстрируется рис. 159. Несколько примеров изохромат приведено на рис. 160. Экстраполируя каждую из кривых до пересечения с осью абсцисс, находим  $V_0$ , а затем при помощи уравнения Эйнштейна и  $h$ . Наиболее точные измерения, выполненные в последнее время, дали

$$\frac{h}{e} = (1,37920 \pm 0,00009) \cdot 10^{-17} \text{ эрг} \cdot \text{сек} \text{ CGSE}^{-1}.$$

Отсюда, полагая  $e = 4,8024 \cdot 10^{-10}$  CGSE, находим

$$h = 6,624 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек.}$$

### § 114. Другие опыты, обнаруживающие корпускулярные свойства света

В § 109 мы видели, что корпускулярные свойства света должны наиболее отчётливо проявляться в опытах с коротковолновым излучением. Не случайно волновые свойства рентгеновских лучей были окончательно установлены лишь через 17 лет после открытия самих лучей.

Из многочисленных опытов с рентгеновскими и  $\gamma$ -лучами, обнаруживающих с большой ясностью корпускулярные свойства этих лучей, мы рассмотрим только два: первый принадлежит А. Ф. Иоффе и Н. И. Добронравову, второй — Боте.

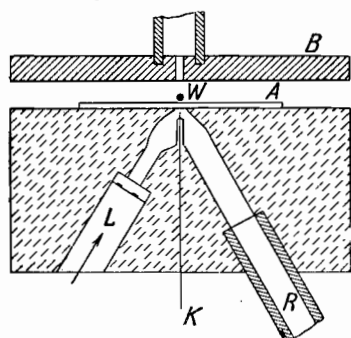


Рис. 161. Схема опыта Иоффе и Добронравова.

На рис. 161 дана схема миниатюрной рентгеновской трубки, применявшейся в опытах Иоффе и Добронравова. В толстой эбонитовой пластинке просверлены отверстия  $R$  и  $L$ . Через  $R$  из образовавшейся полости удаляется воздух; через отверстие  $L$ , закрытое кварцевым окошком, освещается ультрафиолетовым светом конец алюминиевой проволоки  $K$  толщиной  $0,2$  мм. Освобожденные при этом фотоэлектроны ускоряются потенциалом в  $12\,000$  В, наложенным на проволочку  $K$ , и тормозятся тонким алюминиевым листочком  $A$ , закрывающим сверху отверстие в полости. Толщина этого листочка столь мала ( $5 \cdot 10^{-3}$  мм), что он практически не поглощает рентгеновских лучей, образующихся при торможении электронов. Освещение проволочки подбиралось настолько слабым, чтобы она давала около  $1000$  фотоэлектронов в секунду, а следовательно, и число рентгеновских импульсов было около  $1000$  в секунду.

Алюминиевая фольга  $A$  служила вместе с тем нижней пластиной конденсатора Милликулена  $AB$ , в котором уравнивалась микроскопическая висмутовая пылинка  $W$  радиусом около  $3 \cdot 10^{-5}$  см на расстоянии от антикатада  $A$  примерно в  $0,02$  см.

Опыт показал, что время от времени пылинка выходит из равновесия, т. е. что рентгеновские лучи освобождают из неё фотоэлектрон, приобретающий энергию, согласно уравнению Эйнштейна, около  $12\,000$  В. Это происходит в среднем через каждые 30 минут. В течение этих 30 минут через пылинку проходит около  $1,8 \cdot 10^6$  рентгеновских импульсов. Если бы энергия этих импульсов распространялась в виде сферических волн, то каждый из них отдавал бы пылинке очень малую часть своей энергии вследствие

малой величины телесного угла, под которым видна пылинка из антикатада. Эта энергия, кроме того, распределялась бы между очень большим числом электронов, образующих пылинку, и совершенно невероятно, чтобы раз в 30 минут все эти электроны отдавали свою энергию каким-то загадочным механизмом одному электрону, который должен при этом приобрести ровно столько энергии, сколько её имел фотоэлектрон, вырванный из пылинки и ускоренный потенциалом в 12 000 V.

Таким образом, с волновой точки зрения, результаты опыта Иоффе и Добронравова непонятны. Напротив, с корпускулярной точки зрения, они представляются вполне естественными.

Действительно, с этой точки зрения, энергия распространяется в виде локализованных в пространстве фотонов, и электрон выбивается из пылинки только тогда, когда в неё попадает фотон. Подсчитаем вероятность того, что фотон попадает в пылинку. В опытах Иоффе и Добронравова расстояние от пылинки до антикатада было  $d=0,02$  см, а радиус пылинки  $r=3 \cdot 10^{-5}$  см. Сфера радиуса  $d$  имеет поверхность  $4\pi d^2=4\pi(0,02)^2=16\pi \cdot 10^{-4}$  см<sup>2</sup>. Площадь, занимаемая пылинкой на этой сфере, т. е. эффективное сечение пылинки, будет

$$\pi r^2 = \pi (3 \cdot 10^{-5})^2 = 9\pi \cdot 10^{-10} \text{ см}^2.$$

Если считать, что для движения отдельного рентгеновского фотона все направления равновероятны, то очевидно, что вероятность попадания фотона в пылинку будет равна отношению эффективного сечения пылинки к поверхности сферы, т. е. будет равна  $\frac{9\pi \cdot 10^{-10}}{16\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{1800000}$ . Следовательно, в среднем один из 1 800 000 фотонов попадает в пылинку. Так как в 1 сек. вылетает 1000 фотонов, то в среднем в пылинку будет попадать 1 фотон в 30 мин., что вполне согласуется с результатами опыта.

Опыт Боте показывает, что при возбуждении рентгеновских лучей флуоресценции энергия распространяется не в виде сферических волн, но в виде направленных фотонов. Тонкая железная или медная фольга  $F$  (рис. 162) подвешивалась между двумя счётчиками Гейгера  $Z_1$  и  $Z_2$ . Первичные рентгеновские лучи достаточной жёсткости освещали фольгу сверху (в направлении стрелки  $P$ ) и возбуждали её к испусканию характеристического излучения флуоресценции. Если бы энергия этого излучения распростра-

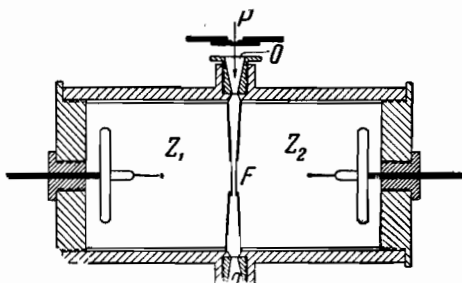


Рис. 162. Схема опыта Боте.

нялась в виде сферических волн, то оба счётчика должны были бы реагировать одновременно.

Опыт показывает, однако, что этого нет: счётчики реагируют совершенно независимо один от другого, и число совпадений не превышает ожидаемого числа *случайных* совпадений. Всё происходит так, как если бы возникающее излучение флуоресценции распространялось в виде направленных фотонов, которые могут попадать либо в один, либо в другой счётчик.

### § 115. Флуктуации светового потока

Корпускулярные свойства света влекут за собой ещё одно важное следствие: необходимость существования флуктуации в слабых световых потоках. В самом деле, если свет можно рассматривать как поток фотонов, то каждый фотон, попадая в приёмное устройство (фотоэлемент, ионизационную камеру и т. п.), вызывает то или иное действие независимо от других фотонов. При обычных интенсивностях число этих элементарных актов поглощения настолько велико, что мы не замечаем никакой дискретности в излучении. Представим себе, однако, что поток настолько слаб, что число фотонов, попадающих в приёмник в единицу времени, измеряется единицами или десятками; если, кроме того, приёмник настолько чувствителен, что он реагирует на попадание малого числа фотонов, то неизбежно должны сказаться флуктуации этого числа.

Такие флуктуации были обнаружены прежде всего с очень коротковолновым излучением, именно с рентгеновскими и  $\gamma$ -лучами радиоактивных веществ. В этом случае, как уже неоднократно указывалось, вследствие высокой частоты излучения фотоны очень велики. При поглощении их атомами или молекулами происходит ионизация и освобождаются быстрые электроны, которые в свою очередь вызывают ионизацию в большом числе других молекул ионизационной камеры или счётчика. Таким путём первичный эффект элементарного акта поглощения значительно усиливается и наблюдение слабого потока облегчается. Рассмотренный в § 114 опыт Боте с двумя счётчиками, регистрирующими направленные в противоположные стороны фотоны слабого рентгеновского излучения железной фольги, в сущности относится к числу флуктуационных опытов.

Особенный интерес представляет обнаружение флуктуаций слабых потоков *видимого света*. Такие флуктуации на самом деле наблюдались особенно безупречно С. И. Вавиловым и его сотрудниками в обширной серии работ, а после него также и рядом других исследователей. Воспринимающим устройством во всех этих опытах является глаз человека, который обладает чувствительностью, пока ещё не достигнутой фотоэлектрическими прибо-

рами. Именно, согласно опытам Вавилова, для глаза, достаточно долго пробывшего в темноте, максимальная чувствительность определённого периферического участка сетчатки составляет около 200 фотонов и довольно значительно колеблется у различных наблюдателей. При этом указанная чувствительность относится к энергии, падающей на глаз. Так как свет, прежде чем достигнуть сетчатки, проходит через ряд сред, в которых он отражается и частично поглощается, то минимальное число фотонов, вызывающих зрительное ощущение, значительно меньше указанного числа и составляет, по оценке Вавилова, немного десятков, а может быть, и несколько фотонов.

Для того чтобы постановка опытов Вавилова была понятна, необходимо напомнить некоторые факты, относящиеся к устройству и физиологическим функциям глаза.

Как известно, в сетчатой оболочке глаза распределены два типа воспринимающих свет элементов: колбочки и палочки. Колбочки преобладают в частях сетчатки, расположенных вблизи оптической оси глаза, а на периферии их нет совсем; наоборот, палочки преобладают в периферических частях сетчатки. Эти два рода элементов выполняют различные функции: с колбочками связан аппарат цветного зрения, тогда как палочки обуславливают серое, так называемое сумеречное или периферическое зрение. Чувствительность палочек во много раз выше чувствительности колбочек. Поэтому в опытах по определению предела воспринимающей способности глаза, каковыми и являются опыты с флукутациями, используется именно бесцветное периферическое зрение. Все эти опыты основаны на существовании резкого порога зрительного ощущения: если энергия излучения, падающего на сетчатку, меньше некоторой определённой величины, то глаз совсем не ощущает света. Именно этим свойством зрительного ощущения и воспользовался Вавилов для наблюдения квантовых флукутаций видимого света. Представим себе, что наблюдается кратковременная вспышка света; пусть порогу соответствует  $n_0$  фотонов, поглощённых за время вспышки, и пусть  $z$  — действительное число фотонов, поглощённых за то же время. В таком случае глаз увидит вспышку лишь при условии  $z \geq n_0$ , если же  $z < n_0$ , то зрительное ощущение будет равно нулю, глаз не обнаружит такой вспышки. Очевидно, что если периодически, через определённые промежутки времени посылать в глаз вспышки столь малой интенсивности, что вследствие флукутаций числа фотонов  $z$  будет то больше, то меньше  $n_0$ , — глаз наблюдателя то будет, то не будет ощущать вспышку.

Таким образом, существование порога зрительного ощущения даёт острый критерий наличия флукутаций: при колебаниях  $z$  около величины  $n_0$  свет или не наблюдается совсем, или видна вспышка. Что же касается колебаний интенсивности в зависи-

мости от различного числа поглощаемых фотонов в условиях, когда  $z \geq n_0$ , то их, по свидетельству Вавилова, в этих опытах на пределе способности глаза к восприятию обнаруживать не удаётся.

Опыты были поставлены следующим образом (рис. 163). Для того чтобы свет вспышки попадал на один и тот же периферический участок сетчатки, глаз наблюдателя фиксировался слабой лампочкой  $S$ , свет которой пропускаться через красный фильтр; на получающееся красное пятно и был всё время направлен глаз наблюдателя. Свет другой лампочки  $L$ , отразившись от зеркала  $m$ , падал на диск  $D$  с отверстием, вращавшийся синхронным

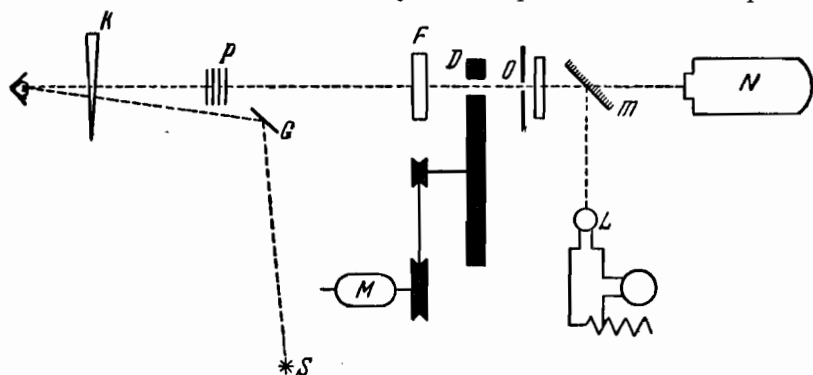


Рис. 163. Схема установки для измерения зрительных квантовых флуктуаций.

мотором  $M$  (1 оборот в секунду). Отверстие имело такие размеры, что диск пропускал свет в течение 0,1 сек. и задерживал его в течение 0,9 сек. Тем самым создавалась вспышка длительностью в 0,1 сек., а в течение 0,9 сек. глаз отдыхал. Подобное устройство необходимо для того, чтобы исключить влияние способности глаза длительно сохранять зрительное впечатление: Зелёный фильтр  $F$  был необходим для получения потока определённой длины волны.

В момент, когда наблюдатель видел вспышку, он нажимал кнопку хронографа, на движущейся ленте которого получалась отметка. Особое устройство связывало вращающийся диск с другим пером хронографа таким образом, что на той же ленте отмечался каждый оборот диска. Благодаря этому можно было установить, наблюдается или не наблюдается вспышка, когда отверстие диска пропускает свет.

Яркость зелёного пятна можно было непрерывно уменьшать. При этом оказывается, что вначале наблюдатель отмечает каждую вспышку. При дальнейшем понижении яркости вспышки перестают соответствовать каждому прохождению отверстия диска;

наблюдаются флуктуации: при одних прохождениях вспышки видны, при других — их нет. Изучая ленту хронографа после опыта, можно было подвергнуть наблюдения статистическому контролю. С одной стороны, отношение числа наблюдаемых вспышек к полному числу оборотов диска равно вероятности  $P$  появления вспышки; с другой стороны, некоторые дополнительные измерения, на которых мы не останавливаемся, позволяли определить отношение числа фотонов  $n$ , поглощаемых сетчаткой за одну вспышку, к числу фотонов  $n_0$ , поглощаемых сетчаткой в условиях порога зрительного ощущения. Если обозначить это отношение через  $x$

$$\frac{n}{n_0} = x,$$

то расчёт, основанный на теории вероятностей, даёт такое соотношение между  $P$  и  $x$ :

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_0}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{x}}.$$

Большой экспериментальный материал, полученный С. И. Вавиловым, показывает во всех без исключения случаях линейную связь между вероятностью  $P$  и величиной  $\frac{1-x}{\sqrt{x}}$ . На рис. 164 приведён один пример: сплошная прямая проведена по формуле, а кружками нанесены наблюдаемые значения. Видно, что экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую, тем самым подтверждая статистический характер наблюдаемых флуктуаций.

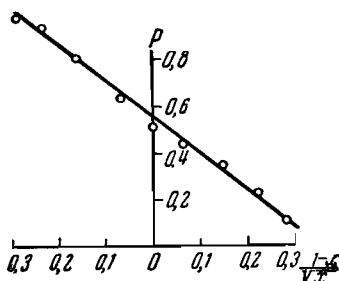


Рис. 164 Результаты флуктуационных наблюдений.

## § 116. Рассеяние рентгеновских лучей (волновая теория)

Рассеяние рентгеновских лучей принадлежит к числу явлений, в которых с особенной ясностью сказывается двойственная природа излучения (см. § 109).

В самом деле, в настоящем и в следующих параграфах мы увидим, что некоторые свойства рассеянного рентгеновского излучения (поляризация, интенсивность) могут быть легко объяснены с волновой точки зрения, тогда как другие свойства (изменение частоты при рассеянии) непонятны с волновой точки зрения, но зато без труда объясняются, если приписать рентгеновским лучам корпускулярную природу.

Один из важных выводов волновой теории рассеяния рентгеновских лучей состоит в том, что даже тогда, когда падающее излучение не поляризовано, рассеянное излучение должно быть, вообще говоря, частично поляризовано, а при определённых



условиях — поляризовано полностью. Рассмотрим возникновение этой поляризации. Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении, параллельном оси  $z$  (рис. 165), падает в точке  $O$  на электрон.

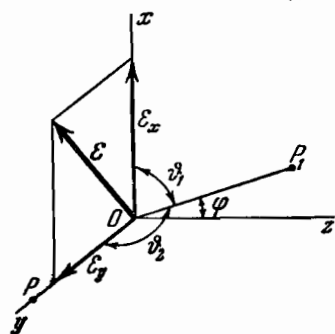


Рис. 165.

Электрический вектор этой волны, действуя на электрон, заставляет его совершать гармонические колебания, вследствие чего электрон становится центром сферической волны, которая и представляет собою рассеянную волну. Рассмотрим состояние поляризации этой волны в точке  $P$ , лежащей на продолжении оси  $y$ , т. е. в направлении, перпендикулярном к направлению падающей волны. Так как падающая волна не поляризована, то её электрический вектор  $\mathbf{E}$  может иметь любые направления, но

он всегда остаётся в плоскости  $xy$ . Разложим его на составляющие  $\mathcal{E}_x$  и  $\mathcal{E}_y$ . В § 63 [см., например, формулу (63,6)] мы видели, что интенсивность электромагнитного излучения ускоренно движущегося электрона пропорциональна  $\sin^2 \vartheta$ , где  $\vartheta$  — угол между направлением колебаний электрона и направлением в точку наблюдения. Поэтому колебания электрона под действием составляющей  $\mathcal{E}_y$  в направлении  $OP$  не дают излучения ( $\vartheta=0$ ). Из этого следует, что в точку  $P$  приходит рассеянное излучение, обусловленное колебаниями под действием одной только составляющей  $\mathcal{E}_x$ , т. е. излучение, линейно поляризованное с направлением колебаний электрического вектора, перпендикулярным к плоскости, проходящей через направление падающей волны и точку наблюдения  $P$ .

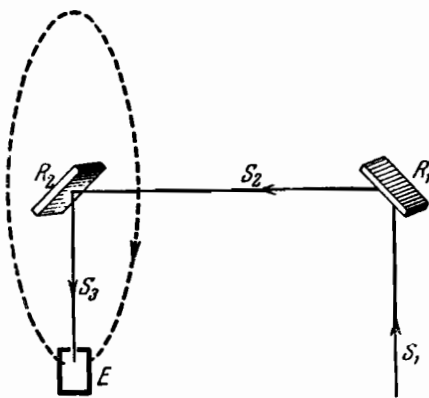


Рис. 166. Схема опыта Баркля для обнаружения поляризации рентгеновских лучей.

Этот вывод подтверждается следующим опытом Баркля, аналогичным известному оптическому опыту с зеркалами Норренберга. Рентгеновские лучи падают в направлении  $S_1$  (рис. 166) на пластинку  $R_1$  (уголь или парафин), которая играет роль поляризатора. Согласно сказанному выше лучи, рассеянные в направ-

влении  $S_2$ , должны быть полностью поляризованы. Эта поляризация обнаруживается при помощи второй пластинки  $R_2$ , играющей роль анализатора. С этой целью пластинка  $R_2$  вместе с ионизационной камерой  $E$  может вращаться около оси, параллельной  $S_2$  (как показано пунктиром). Опыт показывает, что камера  $E$  обнаруживает максимальную интенсивность рассеянного излучения, когда  $S_3$  параллельно  $S_1$  (как на чертеже), и минимальную, когда  $S_3$  перпендикулярно к  $S_1$  (т. е. при повороте на  $90^\circ$  по отношению к положению, показанному на чертеже).

Но именно этого и следовало ожидать, так как, на основании сказанного выше, электрический вектор падающей волны возбуждает в  $R_2$  колебания электронов, перпендикулярные к  $S_1$  и  $S_2$ .

Вычислим теперь интенсивность рассеянных лучей. Рассмотрим для этого вынужденные колебания электрона, происходящие под действием плоской волны, распространяющейся в направлении оси  $z$  (рис. 167). Положим сначала, что волна линейно поляризована и её электрический вектор  $\mathcal{E}$  колеблется в направлении оси  $x$  с частотой  $\omega$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (116,1)$$

Интенсивность падающей волны будет в таком случае согласно § 63

$$J_0 = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}^2. \quad (116,2)$$

Электрическое поле  $\mathcal{E}$  вызывает вынужденные колебания электрона, совершающиеся по оси  $x$  с той же частотой  $\omega$ . Эти колебания дают начало новой сферической волне, мгновенная интенсивность которой в некоторой точке  $P$  на расстоянии  $R$  от электрона согласно формуле (63,6) равна

$$J = \frac{e^2 \ddot{x}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \vartheta, \quad (116,3)$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением к точке наблюдения  $P$  и направлением колебаний электрона. Ускорение электрона  $\ddot{x}$ , движущегося под действием силы поля  $e\mathcal{E}$ , очевидно, равно  $\frac{e\mathcal{E}}{m}$ .

Подставляя это в (116,3), находим

$$J = \frac{e^4 \mathcal{E}^2}{4\pi c^3 m^2 R^2} \sin^2 \vartheta.$$

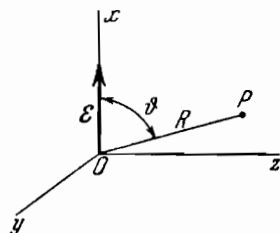


Рис. 167.

Заменяя здесь  $\mathcal{E}^2$  через интенсивность падающей волны  $J_0$  по (116,2), получаем

$$J = J_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \vartheta. \quad (116,4)$$

Это и есть выражение для интенсивности рассеянного излучения в точке  $P$ . Мы видим, что распределение интенсивности по направлениям в случае, когда падающая волна линейно поляризована, содержит  $\sin^2 \vartheta$ , т. е. в направлении колебаний интенсивность равна нулю и достигает максимума при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  (см. § 63).

В случае, когда падающая волна не поляризована, зависимость интенсивности рассеяния от направления несколько иная. Рассмотрим этот случай.

Пусть падающая волна попрежнему распространяется параллельно оси  $z$  (рис. 165); электрический вектор поэтому будет лежать в плоскости  $yx$ . Разложим его на составляющие  $\mathcal{E}_x$  и  $\mathcal{E}_y$  и вычислим интенсивность рассеянного излучения в точке  $P_1$ , лежащей в плоскости  $xz$ . Так как первичное излучение не поляризовано, то электрический вектор  $\mathcal{E}$  может занимать любые положения в плоскости  $xy$ . Средние значения квадратов составляющих  $\mathcal{E}_x$  и  $\mathcal{E}_y$  будут между собой равны

$$\overline{\mathcal{E}_x^2} = \overline{\mathcal{E}_y^2} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2,$$

так что интенсивности, соответствующие этим составляющим, будут также равны

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_0.$$

Каждая из составляющих  $\mathcal{E}_x$  и  $\mathcal{E}_y$  создаёт рассеянную волну; интенсивности этих рассеянных волн в точке  $P_1$  по формуле (116,4) будут (см. рис. 165)

$$J' = J_x \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \vartheta_1 = \frac{1}{2} J_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \cos^2 \varphi, \quad (116,5)$$

$$J'' = J_y \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \sin^2 \vartheta_2 = \frac{1}{2} J_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \quad (116,6)$$

( $\sin^2 \vartheta_2 = 1$ , так как  $\vartheta_2$  — угол между плоскостью  $xz$  и осью  $y$ ). Так как колебания  $\mathcal{E}_x$  и  $\mathcal{E}_y$  некогерентны, то для получения полной интенсивности в  $P_1$  нужно сложить интенсивности  $J'$  и  $J''$ :

$$J = J' + J'' = J_0 \frac{e^4}{m^2 c^4 R^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \varphi}{2}. \quad (116,7)$$

Экспериментальная проверка показала, что для рентгеновских лучей не слишком короткой длины волны формула (116,7) даёт результаты, вполне удовлетворительно совпадающие с опытом. На рис. 168 сплошная кривая представляет распределение интенсивности, вычисленное по формуле (116,7); пунктирные кривые представляют экспериментальные результаты для двух резко различных длин волн. Видно, что для более длинных волн ( $\lambda = 0,71 \text{ \AA}$ ) и для не слишком малых углов рассеяния экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретической кривой. Сильное расхождение между экспериментальными и теоретическими результатами для углов, меньших  $30^\circ$ , объясняется тем, что в приведённом простом выводе не учитывается интерференция волн, рассеянных соседними электронами атома.

Напротив, для малых длин волн ( $\lambda = 0,017 \text{ \AA}$ ) экспериментальная кривая на всём протяжении расходится с теоретической. Она не обнаруживает около  $90^\circ$  никакого минимума, требуемого теорией, и, кроме того, экспериментально найденная интенсивность рассеяния для всех углов значительно меньше теоретической.

Это расхождение показывает, что для очень малых длин волн классическая волновая теория рассеяния рентгеновских лучей становится совершенно неудовлетворительной.

Упражнения: 1. Пользуясь формулой (116,4), доказать, что полная энергия, рассеиваемая электроном по всем направлениям, выражается формулой

$$S = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^4}{m^2 c^4} J_0.$$

2. Процент поляризации рассеянного излучения характеризуется дробью

$$\frac{J'' - J'}{J'' + J'} \cdot 100\%.$$

Доказать, что для точек наблюдения, лежащих в плоскости  $xy$  (рис. 165), поляризация полная (100%), а для точек, лежащих на оси  $z$ , процент поляризации равен нулю.

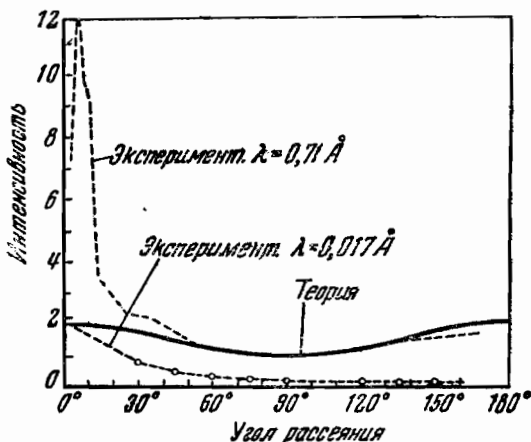


Рис. 168. Сопоставление волновой теории рассеяния с экспериментальными данными.

## § 117. Эффект Комптона

Недостаточность волновой теории рассеяния рентгеновских лучей, обнаруживающаяся при изучении интенсивности рассеяния очень коротких длин волн, особенно резко сказывается, если обратиться к рассмотрению частоты рассеянных лучей. Согласно волновой теории механизм рассеяния состоит «в раскачивании» электронов электромагнитным полем падающей волны. Естественно ожидать поэтому, что частота рассеянного излучения должна совпадать с частотой падающего излучения.

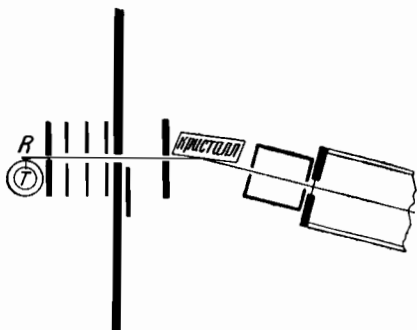


Рис. 169. Схема опыта Комптона.

Между тем уже старые наблюдения показывали, что при рассеянии рентгеновских и особенно  $\gamma$ -лучей длина волны изменяется, а именно, в составе рассеянного излучения появляются более длинные волны, обладающие меньшей проникающей способностью. Так как до открытия спектроскопии рентгеновских лучей для определения длины волны приходилось пользоваться грубыми методами, основанными на различии абсорбции лучей разных длин волн, то в деталях явления разобраться было трудно и его обычно приписывали влиянию вторичных факторов.

В 1922—1923 гг. А. Комpton, воспользовавшись рентгеновским спектрографом, тщательно изучил это явление и показал, что оно отнюдь не может быть сведено к влиянию побочных факторов, но непосредственно связано с самим механизмом рассеяния. Схема опыта Комптона приведена на рис. 169. Излучение рентгеновской трубки с молибденовым антикатодом  $T$  рассеивается куском графита  $R$ ; рассеянное излучение, пройдя через ряд щелей, падает на кристалл рентгеновского спектрографа. Сместив и поворачивая около вертикальной оси трубку вместе с радиатором  $R$ , можно было изменять угол рассеяния  $\varphi$ , не трогая остальной части прибора. Спектральное

Мо  
К-линия

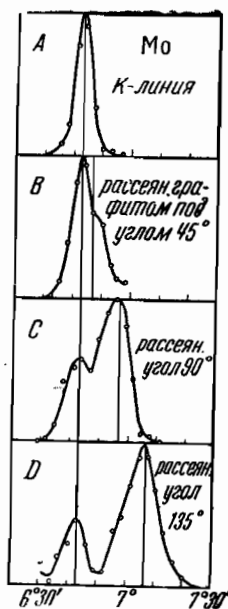


Рис. 170. Эффект Комптона на графите.

Мо  
К-линия

распределение интенсивности измерялось при помощи ионизационной камеры.

На рис. 170 сопоставлены полученные результаты. А представляет распределение интенсивности в первичной линии (линия  $K_{\alpha}$  молибдена  $\lambda = 0,712605 \text{ \AA}$ ); B, C, D дают спектральный состав

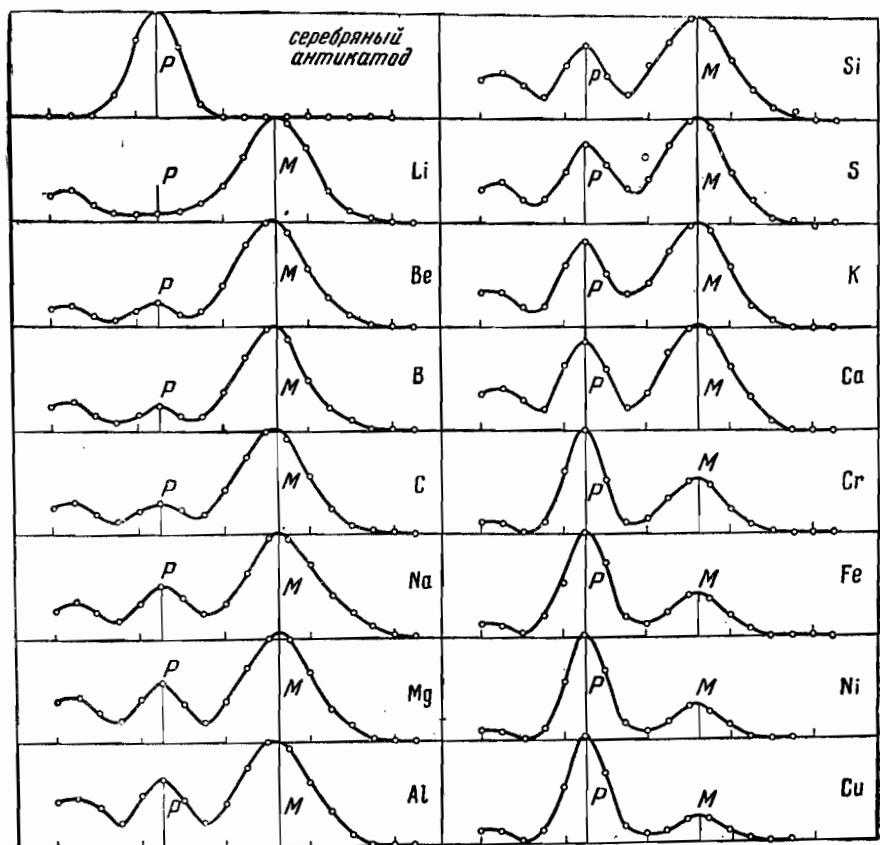


Рис. 171. Эффект Комптона на радиаторах различной природы.

излучения при различных углах рассеяния. Можно сразу установить следующие особенности явления: 1) в рассеянном излучении присутствуют как первоначальная длина волны возбуждающего излучения, так и длина волны, смещённая в сторону длинных волн; 2) величина смещения зависит от угла рассеяния, а именно, она возрастает при увеличении этого угла; 3) при увеличении угла рассеяния интенсивность несмещённой линии падает, а интенсивность смещённой линии возрастает.

На рис. 171 приведены спектры линии  $K_{\alpha}$  серебряного антикатада ( $\lambda = 0,56267 \text{ \AA}$ ), рассеянной под одним и тем же углом различными веществами. Можно установить следующие особенности процесса: 1) величина смещения не зависит от природы радиатора; 2) при возрастании атомного номера радиатора интенсивность несмещённой линии возрастает, а интенсивность смещённой линии падает. Так, у лития рассеянное излучение практически полностью состоит из смещённой длины волны, а у меди интенсивность смещённой линии невелика по сравнению с интенсивностью линии несмещённой.

### § 118. Элементарная теория эффекта Комптона

Описанные в предыдущем параграфе особенности эффекта Комптона трудно объяснить на основе классических волновых представлений. На первый взгляд может показаться, что мы имеем здесь дело с эффектом Дошлера, т. е. со смещением спектральных линий вследствие движения источника. Однако такое объяснение было бы неудовлетворительно, что видно из следующих соображений. Сферическая волна вызывает вынужденные колебания всех электронов. Так как смещение в эффекте Комптона увеличивается при возрастании угла рассеяния и достигает наибольшей величины при угле в  $180^\circ$ , то нужно было бы себе представить, что все электроны под действием падающей волны приходят в движение со скоростью, сравнимой со скоростью света, и притом в одном направлении. Это совершенно неправдоподобно.

Зато очень легко объяснить это явление, если считать, что излучение имеет чисто корпускулярную природу, т. е. представляет собою поток фотонов и что в рассеянии принимают участие не все электроны, а только незначительная часть их, но каждый электрон рассеивает целый фотон. Для того чтобы провести это объяснение до конца, нужно допустить, что фотон обладает не только определённым запасом энергии ( $h\nu$ ), но и определённым количеством движения, т. е. ведёт себя, грубо говоря, как движущийся шарик. В таком случае рассеяние фотонов электронами связано с обменом энергией и количества движения при соударениях и, по образному выражению Комптона, происходит наподобие игры на бильярде фотонами и электронами.

Для того чтобы на основе этого представления произвести расчёт смещения длины волны, мы должны прежде всего найти количество движения фотона. Если фотон есть частица, то она во всяком случае обладает особыми свойствами, так как фотон движется со скоростью света. Поэтому формулы классической механики здесь непригодны и для вычисления количества дви-

жения фотона  $p$  нужно воспользоваться релятивистским соотношением (см. § 61)

$$p = \frac{v}{c^2} E, \quad (61,12)$$

а так как для фотона  $v=c$  и  $E=h\nu$ , то

$$p = \frac{h\nu}{c}. \quad (118,1)$$

Положим теперь, что электрон до соударения покоился, т. е. импульс его до соударения с фотоном был равен нулю; начальный импульс фотона равен  $\overrightarrow{h\nu/c}$ . После соударения электрон приобретёт импульс  $\overrightarrow{mv}$ , где  $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$ , а импульс фотона станет равным  $\overrightarrow{h\nu'/c}$ .

Применяя законы сохранения энергии и количества движения, т. е. рассчитывая это соударение как удар упругих шаров, получим два уравнения. Из закона сохранения энергии имеем

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (118,2)$$

где  $m_0c^2$  — «энергия покоя» электрона. Обозначив для краткости массу движущегося электрона через  $m$ , перепишем (118,2) так:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2. \quad (118,3)$$

Закон сохранения количества движения даёт

$$\frac{\overrightarrow{h\nu}}{c} = \frac{\overrightarrow{h\nu'}}{c} + \overrightarrow{mv}. \quad (118,4)$$

Из уравнений (118,3) и (118,4) первое — скалярное, а второе — векторное. Для расчёта следовало бы векторное уравнение (118,4) заменить двумя скалярными в проекциях на оси координат. Но мы поступим следующим образом. Векторное уравнение (118,4) фиксирует треугольник  $OAB$  (рис. 172). По формуле элементарной тригонометрии из этого треугольника определяем квадрат стороны  $AB$ , равной по величине  $mv$

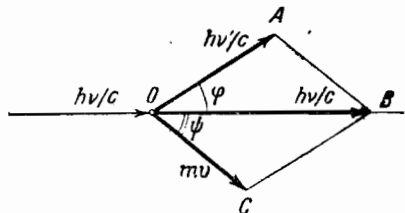


Рис. 172.

или

$$\begin{aligned} m^2v^2 &= \frac{h^2\nu^2}{c^2} + \frac{h^2\nu'^2}{c^2} - 2h^2\frac{\nu\nu'}{c^2} \cos \varphi \\ m^2v^2c^2 &= h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (118,5)$$



Уравнение (118,3) перепишем в виде

$$mc^2 = h(\nu - \nu') + m_0c^2$$

и возведём в квадрат:

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(\nu - \nu'). \quad (118,6)$$

Вычитая (118,5) из (118,6), получим

$$m^2c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4 - 2h^2\nu\nu'(1 - \cos \varphi) + 2m_0c^2h(\nu - \nu'). \quad (118,7)$$

Заметив, что  $m^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) \equiv m^2(1 - \beta^2) = m_0^2$  и произведя простые преобразования в (118,7), найдём

$$c(\nu - \nu') = \frac{h}{m_0c} \nu\nu'(1 - \cos \varphi). \quad (118,8)$$

Разделим теперь обе части на  $\nu\nu'$  и примем во внимание, что  $\frac{c}{\nu} = \lambda$  и  $\frac{c}{\nu'} = \lambda'$ :

$$\lambda' - \lambda \equiv \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \varphi)$$

или

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0c} \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (118,9)$$

Величина  $h/m_0c$ , имеющая размерность длины, есть комбинация трёх универсальных постоянных; она называется комptonовской длиной волны и обозначается через  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \frac{h}{m_0c} = \frac{6,624 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 2,99 \cdot 10^{10}} = 0,0242 \text{ \AA}.$$

Окончательная формула для изменения длины волны при рассеянии имеет вид

$$\Delta\lambda = 2\Lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0,048 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (118,10)$$

Из этой формулы видно, что для  $\varphi = 0$   $\Delta\lambda = 0$ , для  $\varphi = 90^\circ$   $\Delta\lambda = \Lambda$  и, наконец, для  $\varphi = 180^\circ$   $\Delta\lambda = 2\Lambda$ .

На рис. 170 и 171 вычисленные положения смещённых линий отмечены вертикальными прямыми. Как видно, максимумы экспериментально измеренных линий очень хорошо совпадают с предсказанными по формуле (118,10). Из наиболее точных измерений величина  $h/m_0c$  получается равной

$$\left(\frac{h}{m_0c}\right)_{\text{эксп}} = (0,02424 \pm 0,00004) \text{ \AA}$$

в хорошем совпадении с теоретической величиной, вычисленной по наиболее точным значениям  $h$ ,  $m_0$  и  $c$ :

$$\left(\frac{h}{m_0 c}\right)_{\text{теор}} = (0,024265_{14} \pm 0,000005_7) \text{ \AA}.$$

Формулы (118,9) и (118,10) показывают, что комптоновское смещение не зависит от длины волны первичного излучения. Поэтому, если бы можно было наблюдать эффект Комптона в видимом спектре, то для крайней фиолетовой части ( $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ ) он составлял бы тысячные доли процента основной длины волны; для рентгеновских лучей средней жёсткости ( $\lambda \sim 0,5 \text{ \AA}$ ) он составляет уже около 10%, а для  $\gamma$ -лучей величина его порядка самой длины волны.

Нам осталось ещё объяснить, почему в рассеянном излучении наряду со смещённой линией наблюдается и несмещённая: из теории, изложенной выше, это не вытекает. Однако при рассмотрении механизма рассеяния мы предполагали, что фотон «соударяется» со свободным электроном. Для лёгких атомов и для периферических, слабо связанных электронов такое предположение вполне оправдано, так как энергия связи электрона (несколько электрон-вольт) ничтожно мала по сравнению с энергией фотона рентгеновских лучей. Но внутренние электроны, особенно в тяжёлых атомах, связаны настолько прочно, что их уже нельзя рассматривать как свободные. Поэтому при «соударении» фотон обменивается энергией и количеством движения с атомом в целом. Так как масса последнего очень велика, то, по закону сохранения количества движения, фотон не передаёт ему своей энергии и количества движения; следовательно,  $h\nu$  при рассеянии не изменяется.

На основании этих соображений можно качественно оценить соотношение интенсивностей смещённой и несмещённой линий в зависимости от массы атома. В лёгких атомах все электроны связаны слабо; наоборот, в тяжёлых атомах только периферические электроны связаны слабо. Поэтому можно ожидать, что при увеличении атомного номера, при одинаковых условиях наблюдения интенсивность смещённой линии будет падать, а интенсивность несмещённой — возрастать. Это и наблюдается на самом деле, как показывает рис. 171.

Из аналогичных соображений следует, что в видимой части спектра эффект Комптона вовсе не может наблюдаться.

## § 119. Электроны отдачи

До сих пор мы сосредоточивали внимание на изменении спектра при рассеянии рентгеновских лучей. Простой расчёт смещения, приведённый в § 118, показывает, однако, что каждый элементарный акт рассеяния должен сопровождаться появле-

нием быстрого электрона, получившего толчок со стороны фотона. Подсчитаем изменение кинетической энергии электрона при рассеянии.

По закону сохранения энергии это изменение должно быть равно разности энергии фотона до рассеяния и после рассеяния:

$$E_k = h\nu - h\nu' \equiv h \Delta\nu.$$

Отношение  $E_k$  к первоначальной энергии фотона равно

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu}. \quad (119,1)$$

Но

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = \nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda},$$

откуда

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Принимая во внимание (118,10), получим:

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2\Delta \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\lambda + 2\Delta \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (119,2)$$

Подсчитаем по этой формуле, какую часть энергии первичного фотона получает электрон отдачи. При  $\lambda = 10\Delta = 0,24 \text{ \AA}$  (жёсткие рентгеновские лучи) и  $\varphi = 90^\circ$   $E_k/h\nu$  составляет всего  $1/11$  и только для  $\lambda = \Delta = 0,024 \text{ \AA}$  (область  $\gamma$ -лучей) при  $\varphi = 90^\circ$  отношение  $\frac{E_k}{h\nu} = \frac{1}{2}$ . Таким образом, для не слишком жёстких рентгеновских лучей электрон отдачи получает сравнительно малую часть всей энергии фотона. Это позволяет отличать электроны отдачи от «фотоэлектронов», возникающих при полном поглощении фотона атомом, так как согласно

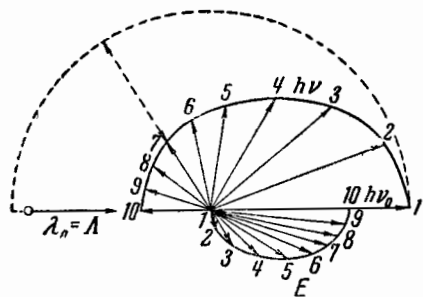


Рис. 173. Полярная диаграмма рассеянных фотонов и электронов отдачи.

уравнению Эйнштейна в последнем случае электрон приобретает энергию порядка величины самого фотона.

На рис. 173 приведена полярная диаграмма, показывающая соотношение направлений и энергий рассеянных фотонов ( $h\nu$ ) и электронов отдачи ( $E$ ). Диаграмма вычерчена для случая

$\lambda_0 = \Delta$ , т. е. для жёстких лучей; поэтому энергия электронов отдачи здесь составляет заметную долю энергии первичного фотона ( $h\nu_0$ ). Как видно из диаграммы, электроны отдачи должны выбрасываться по преимуществу вперёд, по направлению первичного фотона.

Предсказание теории Комптона относительно необходимости появления электронов отдачи при рассеянии рентгеновских и  $\gamma$ -лучей было немедленно подтверждено опытами с камерой



Рис. 174. Следы электронов отдачи в камере Вильсона.

Вильсона. На photographиях (рис. 174), снятых при прохождении рентгеновских лучей в воздухе, можно заметить наряду с длинными траекториями фотоэлектронов большое число коротких траекторий, расположенных по пути лучей и направленных преимущественно вперёд, в соответствии с полярной диаграммой рис. 173. Это и есть пути электронов отдачи.

Заметим, что, так как на сообщение скорости электронам отдачи затрачивается энергия, то с возникновением их связана абсорбция падающих рентгеновских или  $\gamma$ -лучей. Обозначим коэффициент этой абсорбции через  $\sigma$ , а коэффициент обычной или «фотоэлектрической» абсорбции через  $\tau$ . Тогда мы можем ожидать, что между числом коротких траекторий электронов отдачи  $N_r$  и числом длинных траекторий фотоэлектронов  $N_p$  должно иметь место соотношение

$$\frac{N_r}{N_p} = \frac{\sigma}{\tau}.$$

Опыт показывает, что коэффициент абсорбции  $\tau$  убывает с уменьшением длины волны пропорционально  $\lambda^3$ , а  $\sigma$  медленно изменяется с длиной волны. Поэтому при уменьшении  $\lambda$  отношение  $N_r/N_p$  должно быстро возрастать. Таблица XV показывает, что это имеет место на самом деле. Отсюда следует, между прочим, что абсорбция жёстких  $\gamma$ -лучей почти исключительно связана с растратой энергии на создание электронов отдачи, а не с фотоэффектом.

Таблица XV

Длина волны (в Å)	$\frac{N_r}{N_p}$	$\frac{\sigma}{\tau}$
0,71	0,10	0,27
0,44	0,9	1,2
0,29	2,7	3,8
0,20	9	10
0,17	17	17
0,13	72	32

Наиболее обстоятельные исследования электронов отдачи были выполнены советским физиком Д. В. Скобельцыным. Для



Рис. 175. Пути электронов отдачи в магнитном поле.

определения начальных энергий этих электронов Скобельцын разработал особый метод наблюдения, сыгравший впоследствии исключительно важную роль при изучении быстрых частиц космических лучей (см. т. II, гл. XXIII). Этот метод состоит в том, что камера Вильсона помещается в сильное магнитное поле и по радиусам кривизны вильсоновских траекторий определяется энергия электронов. Одна из таких фотографий Скобельцына приведена на рис. 175 (рассеяние  $\gamma$ -лучей RaC). При помощи этого метода Скобельцыну удалось решить ряд важных вопросов, связанных с поглощением  $\gamma$ -лучей (см. т. II, гл. XIX).

## § 120. Элементарные акты рассеяния и законы сохранения

В § 114 мы видели, что опыт с элементарным фотоэффектом на висмутовой пылинке естественнее всего объясняется, если представить себе, что энергия рентгеновских лучей распространяется не в виде сферических волн, а в виде фотонов. Средний промежуток времени между двумя элементарными актами фотоэффекта как раз соответствует вероятности того, что один из фотонов, наудачу «выстреливаемых» из антикатада, попадает в «мишень», представляемую висмутовой пылинкой. Эффект Комптона, рассмотренный в предыдущих параграфах, свидетельствует об этом с ещё большей ясностью.

В самом деле, весьма грубая модель соударяющихся билиардных шаров позволяет легко объяснить все существенные черты явления. Мы даже можем наблюдать один из этих «билиардных шаров» — электрон отдачи, который движется после рассеяния точно в точь так, как если бы перед этим его, по выражению Комптона, «стукнул фотон».

Если бы мы попытались объяснить это явление с чисто классической точки зрения, т. е. рассматривая рентгеновские лучи как сферические волны, а электроны — как обычные частицы (грубо говоря, шарики), то для этого пришлось бы принести слишком тяжёлую жертву: отказаться от применимости законов сохранения энергии и количества движения к элементарным актам рассеяния. Это вытекает из следующих соображений. Сферическая волна равномерно действует на все электроны, заставляя их совершать вынужденные колебания; вследствие ничтожной величины сечения электрона доля энергии и импульса, приходящаяся на каждый электрон, чрезвычайно мала. Между тем при комптоновском рассеянии появляются электроны отдачи, каждый из которых несёт заметную долю энергии и импульса первичной волны. Для того чтобы понять, откуда они берут эту энергию и этот импульс, пришлось бы допустить, что происходит постепенное накопление энергии в течение длительных промежутков времени. Но это нельзя согласовать с тем фактом, что эффект Комптона возникает как на слабо связанных электронах (которые могут накапливать энергию), так и на свободных электронах (например, в металлах).

Желая спасти волновые представления, Бор, Крамерс и Слэтер в 1923 г. сделали даже попытку построить теорию, согласно которой законы сохранения энергии и импульса при рассеянии выполняются лишь *статистически*, в среднем за большие промежутки времени, но к элементарным актам неприменимы. По этой теории рассеяние должно происходить непрерывно, но электроны отдачи испускаются совершенно случайно. Оба процесса — рассеяние волн и испускание электронов отдачи — между собою

не координированы. Теория эта, в основе которой лежит отрицание таких твёрдо установленных основных законов природы, как законы сохранения энергии и количества движения, неприемлема уже с общей методологической точки зрения. Как и следовало ожидать, несостоятельность её вскоре была показана экспериментально.

Опыты, установившие выполнение законов сохранения энергии и количества движения в элементарных актах рассеяния рентгеновских лучей, основаны на следующих соображениях. Согласно «теории игры на биллиарде», требующей применения законов сохранения к элементарным актам рассеяния, оба процесса должны быть связаны между собой и во всяком случае должны происходить одновременно. По статистической же теории Бора, Крамерса и Слэтера оба процесса совершенно независимы друг от друга.

Для проверки той и другой теорий оказалось возможным поставить соответствующие опыты. Если законы сохранения энергии и импульса применимы к элементарным актам рассеяния, то неизбежно должен выполняться ряд следствий. Например, в противоположность требованию статистической теории каждому электрону отдачи должен соответствовать одновременно с ним рассеянный фотон (фотоэлектрон в нашей модели). Кроме того, между углами полёта электрона отдачи и фотона после рассеяния должно существовать определённое соотношение. Это соотношение иллюстрируется полярной диаграммой рис. 173; оно может быть получено непосредственным вычислением, если воспользоваться законами сохранения [формулы (118,2) и (118,4)] и заменить векторное уравнение (118,4) двумя скалярными в проекциях на оси координат. Получающееся соотношение имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{1+\alpha} \operatorname{tg} \psi, \quad (120,1)$$

где  $\alpha = \frac{\Lambda}{\lambda}$ ; обозначения углов см. на рис. 172.

Опыты были поставлены в 1925 г. Боте и Гейгером, с одной стороны, и Комптоном и Саймоном — с другой. Опыты эти с полной определённой показали неправильность основной предпосылки статистической теории о неприменимости законов сохранения к элементарным актам рассеяния. Вместе с тем они послужили наилучшей иллюстрацией целесообразности корпускулярных представлений для объяснения некоторых свойств света. Впоследствии (1936—1937 гг.) аналогичные опыты были повторены вновь с улучшенной техникой и в разнообразных формах в связи с проверкой опытов Шенкланда, который получил с  $\gamma$ -лучами результаты, будто бы подтверждающие статистическую теорию. И в этих новых опытах так же, как и в прежних, только с большей точностью и убедительностью, была подтверждена применимость законов

сохранения к элементарным актам рассеяния рентгеновских и  $\gamma$ -лучей. Из этих опытов мы опишем наиболее характерные, а именно, первый опыт Боте и Гейгера и опыт Комптона и Саймона.

### § 121. Экспериментальное подтверждение применимости законов сохранения к элементарным актам рассеяния

Опыт Боте и Гейгера был поставлен для того, чтобы убедиться в одновременности появления электрона отдачи и рассеянного фотона. Узкий пучок рентгеновских лучей (рис. 176) проходил в атмосфере водорода между двумя счётчиками Гейгера. Водород был избран потому, что он слабо поглощает рентгеновские лучи, но достаточно сильно их рассеивает. Один из счётчиков (левый на рис. 176) был закрыт платиновой фольгой и наполнен воздухом, другой был открыт и, следовательно, наполнен водородом. При этих условиях левый счётчик не реагировал на электроны отдачи,

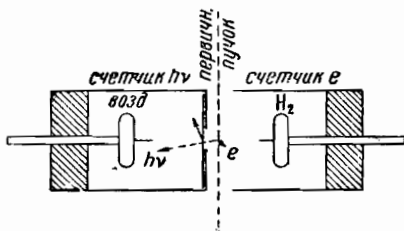


Рис. 176. Схема опыта Боте и Гейгера.

так как они поглощались платиновой фольгой, но реагировал на фотоны, которые, пройдя через фольгу, могли вырвать фотозлектрон из воздуха, стенки счётчика или самой фольги. Правый же счётчик почти не реагировал на фотоны, так как они весьма слабо поглощаются водородом, но зато сильно реагировал на электроны отдачи. Так как далеко не каждый фотон, попадавший в левый счётчик, заставлял его работать, то не каждому отбросу электрометра, связанного с правым счётчиком, можно было сопоставить отброс электрометра левого счётчика. Наоборот, если совпадение действительно имеет место, то каждому отбросу счётчика квантов должен соответствовать отброс счётчика электронов. В действительности это соблюдалось не совсем точно, но число совпадений было настолько велико, что по статистическому подсчёту Боте и Гейгера можно поставить 150 000 против 1 за то, что эти совпадения не случайны, но обусловлены одновременностью факта рассеяния и появления электронов отдачи.

Опыт Комптона и Саймона и его усовершенствованная модификация, осуществлённая Крэйном, Гертнером и Турином, были поставлены с камерой Вильсона для того, чтобы проверить, осуществляется ли соотношение между углами полёта электрона отдачи и рассеянного фотона, требуемое законами сохранения [см. диаграмму рис. 173 и формулу (120,1)]. Чтобы понять идею этого опыта, обратимся к диаграмме рис. 173.



Пусть, например, при рассеянии электрон отдачи полетел в направлении нижней стрелки 5; тогда, по законам сохранения, рассеянный фотон должен полететь в направлении верхней стрелки 5. Углы между нижней и верхней стрелками 5 и стрелкой 1 удовлетворяют соотношению (120,1). Направление нижней стрелки в действительном опыте установить легко, так как каждый электрон отдачи вызывает в камере Вильсона заметный след. Но фотон сам не ионизует воздуха; поэтому направление соответствующей верхней стрелки в камере Вильсона непосредственно установить нельзя. Косвенным образом это можно сделать так: если рассеян-

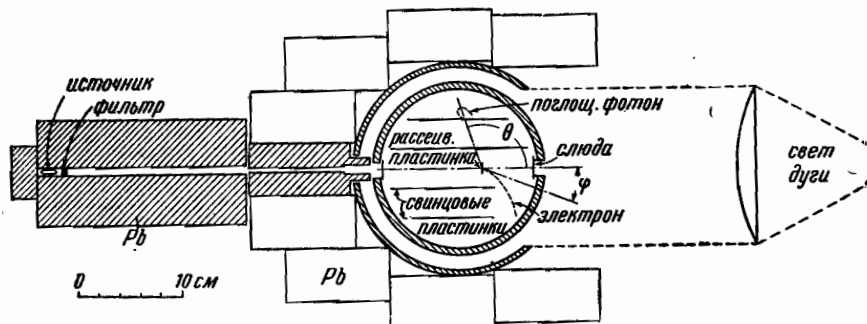


Рис. 177. Схема опыта Комптона и Саймона.

ный фотон будет поглощён где-нибудь внутри камеры, то он даст длинный след фотоэлектрона. Соединяя начало этого длинного следа с началом короткого следа электрона отдачи, можно получить обе стрелки. Известная недостоверность, которая при этом остаётся, связана с тем, что нельзя с достоверностью утверждать относительно найденного фотона, что это именно тот, который при рассеянии вызвал фиксированный нами электрон отдачи. Поэтому выводы из опыта можно делать только на основании достаточно большого статистического материала.

Схема опыта дана на рис. 177.

Опыт был выполнен не с рентгеновскими лучами, но с жёсткими  $\gamma$ -лучами, чтобы увеличить энергию электронов отдачи и этим повысить точность опыта. Источник  $\gamma$ -лучей помещался в конце узкого канала в толстом свинцовом блоке; параллельный пучок фильтрованных  $\gamma$ -лучей, выйдя из канала, попадал в камеру Вильсона. Рассеивающим телом служил кусок целлулоида, помещённый в центре камеры. Чтобы увеличить вероятность поглощения рассеянного фотона внутри камеры, с той и другой сторон от рассеивающего тела располагались по две свинцовые пластинки. Камера помещалась в магнитное поле, перпендикулярное к плоскости чертежа. Это давало возможность не только найти направление полёта электрона отдачи, но и определить по кривизне

следа энергию этого электрона (метод Скобельцына, см. § 119). Такая постановка опыта имела следующее преимущество: по углу полёта электрона отдачи и его энергии можно при помощи теории Комптона найти соответствующий угол полёта рассеянного фотона без каких бы то ни было предположений относительно энергии

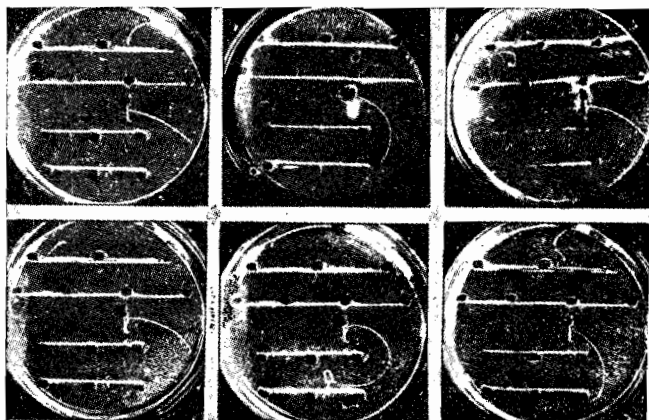


Рис. 178.

падающего фотона. Это преимущество существенно потому, что нельзя быть уверенным в чистоте фильтрации первичных  $\gamma$ -лучей, а следовательно, и нельзя с полной уверенностью приписать падающему фотону определённую энергию. На рис. 178 в качестве примера приведены три снимка, на которых виден электрон отдачи (в середине камеры) и место поглощения рассеянного фотона (у крайней верхней свинцовой пластинки). При обработке фотографий по углу полёта электрона отдачи и его энергии вычислялся угол полёта рассеянного фотона, и результат вычислений сравнивался с углом, найденным на фотографии. Всего было сделано около 10 000 фотографий, на которых было найдено 300 комбинаций электрон—фотон. В результате обработки оказалось, что в числе случаев, далеко превосходящем возможность случайного совпадения, наблюдаемый угол полёта рассеянного фотона совпадает с вычисленным.

Таким образом, в настоящее время не может быть никакого сомнения в том, что законы сохранения энергии и количества движения при элементарных актах рассеяния выполняются.

## ГЛАВА X

### ВОЛНЫ И ЧАСТИЦЫ

#### § 122. Введение

В предыдущей главе было показано, что в оптических явлениях (включая область рентгеновских лучей) обнаруживается своеобразный дуализм. Наряду с такими свойствами света, которые как бы самым непосредственным образом свидетельствуют о его волновой природе (интерференция, диффракция), имеются и другие свойства, столь же непосредственно обнаруживающие его корпускулярную природу (фотоэффект, эффект Комптона). Хотя мы никак не можем себе представить, чтобы один и тот же объект был одновременно и частицей и волной, мы вынуждены для объяснения всего круга оптических явлений пользоваться и той и другой картиной.

В настоящей главе мы увидим, что этот в высшей степени поразительный дуализм имеет место и для тех объектов, которые мы обычно называем «частицами» — для электронов, протонов, атомов. Существует большое число общеизвестных опытов, которые с полной очевидностью показывают, что эти элементарные составные части вещества ведут себя, как локализованные в пространстве частицы. Когда мы рассматриваем туманные следы на вильсоновских фотографиях, у нас не возникает никакого сомнения в том, что это — следы пролетевших частиц. И однако в этой главе мы увидим, что существуют другие опыты, в которых те же самые «частицы» ведут себя, как волны, способные к интерференции.

В предыдущей главе мы особенно подчёркивали явления, в которых обнаруживается корпускулярная природа света. Настоящую главу мы начнём с более подробного рассмотрения *двойственности* в природе света, — того замечательного вывода, к которому привело нас в конце концов рассмотрение флуктуаций светового поля (§ 109).

Так как, однако, для дальнейшего нам понадобится целый ряд сведений из теории волнового движения, то мы сначала коротко напомним эти необходимые сведения.

## § 123. Плоская монохроматическая волна в однородной среде

Когда мы говорим о волнах, то представляем себе прежде всего волны на поверхности воды или поперечные волны, бегущие в упругом шнуре при периодическом сотрясении его конца. Какова бы, однако, ни была природа волн, распространение их следует одинаковым законам.

Рассмотрим сначала простейший вид волн — плоские монохроматические или гармонические волны — и выберем направление распространения волн за ось  $x$  системы координат. Такие волны представляются формулой

$$u = a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c'} \right) + \delta \right]. \quad (123,1)$$

Здесь  $a$ ,  $\omega$ ,  $c'$  и  $\delta$  — постоянные, смысл которых будет сейчас установлен, а  $u$  — величина волнообразно распространяющегося возмущения, например отклонение частицы от положения равновесия в упругой волне, какая-нибудь составляющая напряжённости электрического или магнитного поля в электромагнитной волне и т. д. Постоянная  $a$  есть амплитуда волны,  $\omega \left( t - \frac{x}{c'} \right) + \delta$  мы называем фазой волны, а постоянную  $\delta$ , входящую в фазу, — начальной фазой. Поверхность, во всех точках которой фаза имеет одно и то же значение, есть поверхность равной фазы. Очевидно, что в рассматриваемом случае, когда фаза зависит линейно от координаты  $x$ , такой поверхностью будет плоскость  $x = \text{const.}$ , нормаль к которой совпадает с осью  $x$ .

Постоянная  $c'$ , входящая в фазу, имеет следующий смысл. Выберем какое-либо определённое значение фазы и посмотрим, при каких условиях оно будет сохранять одну и ту же величину при изменении  $x$  и  $t$ . Очевидно, что для постоянства фазы необходимо и достаточно, чтобы  $t - \frac{x}{c'} = \text{const.}$ , откуда

$$x = c't + \text{const.}$$

Отсюда видно, что  $c'$  есть скорость перемещения плоскости равной фазы, или фазовая скорость волны.

Так как  $x$  и  $t$  входят в аргумент периодической функции, то волна должна обнаруживать периодичность во времени и в пространстве. Вследствие периодичности во времени должен существовать постоянный промежуток времени  $T$ , удовлетворяющий условию

$$\cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c'} \right) + \delta \right] = \cos \left[ \omega \left( t + T - \frac{x}{c'} \right) + \delta \right].$$

Это может быть только в том случае, если  $\omega T = 2\pi$  или  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .  $T$  называется периодом волны,  $\omega$  — угловой или циклической частотой;  $\frac{1}{T}$  есть линейная частота  $\nu$ , так что  $\omega = 2\pi\nu$ .

Вследствие периодичности в пространстве при данном  $t$  одни и те же значения  $u$  должны повторяться при изменении  $x$  на некоторый отрезок  $\lambda$  (длину волны), т. е. должны быть

$$\cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c'} \right) + \delta \right] = \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x+\lambda}{c'} \right) + \delta \right].$$

Это значит, что  $\frac{\omega\lambda}{c'} = 2\pi$  или  $\lambda = \frac{2\pi c'}{\omega} = \frac{c'}{\nu}$  или, наконец,

$$c' = \lambda\nu \quad (123,2)$$

— соотношение, связывающее фазовую скорость с длиной волны.

Пусть теперь плоская волна распространяется в любом направлении, образуя с осями координат углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Повернём оси координат так, чтобы ось  $x$ , как и раньше, совпадала с нормалью к плоскости равной фазы. Тогда в этой новой системе координат формула плоской волны будет

$$u = a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x'}{c'} \right) + \delta \right].$$

Но согласно формулам преобразования координат при повороте осей

$$x' = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$

и мы получаем

$$u = a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c'} \right) + \delta \right]. \quad (123,3)$$

Уравнение плоскости равной фазы в этом случае будет

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \text{const.}$$

Пользуясь вместо угловой частоты  $\omega$  линейной  $\nu$ , можно записать формулу волны в виде

$$\begin{aligned} u &= a \cos \left[ 2\pi\nu \left( t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c'} \right) + \delta \right] = \\ &= a \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} \right) + \delta \right]. \end{aligned}$$

Введём теперь вектор  $\mathbf{k}$ , по направлению совпадающий с положительной нормалью к плоскости равной фазы, а по абсолютной величине равный

$$|\mathbf{k}| = \frac{1}{\lambda}. \quad (123,4)$$

Компоненты этого вектора, который мы будем называть волновым вектором, или вектором распространения волны, таковы:

$$k_x = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \quad k_y = \frac{\cos \beta}{\lambda}, \quad k_z = \frac{\cos \gamma}{\lambda}.$$

В таком случае

$$\frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} = xk_x + yk_y + zk_z = \mathbf{kr}, \quad (123,5)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведённый в произвольную точку плоскости равной фазы. При помощи (123,5) формула плоской волны приводится к следующему компактному виду:

$$u = a \cos [2\pi(\nu t - \mathbf{kr}) + \delta]. \quad (123,6)$$

Заметим, наконец, что так же, как и формулы колебаний (§ 45), формулу плоской волны можно писать в комплексном виде:

$$u = ae^{i[2\pi(\nu t - \mathbf{kr}) + \delta]} \quad (123,7)$$

или, вводя комплексную амплитуду  $A = ae^{i\delta}$ ,

$$u = Ae^{i2\pi(\nu t - \mathbf{kr})}. \quad (123,8)$$

При этом берётся только действительная часть комплексного числа (123,7) или (123,8).

## § 124. Волновое уравнение

Рассмотренная в предшествующем параграфе формула плоской волны является частным решением некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым уравнением. Например, из основных уравнений электромагнитного поля в пустоте — уравнений Максвелла — для любой компоненты напряжённости электрического или магнитного поля может быть получено следующее уравнение второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (124,1)$$

где  $u$  — любая компонента напряжённости электрического или магнитного поля. Уравнение (124,1), как доказывается в руководствах по электродинамике\*), описывает электромагнитные волны, распространяющиеся в пустоте со скоростью  $c$ .

\*) Волновое уравнение для электромагнитных волн выводится непосредственно из уравнений Максвелла: см. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, § 100, Гостехиздат, 1949; Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, § 44, Гостехиздат, 1948; П. Друде, Оптика, стр. 229, ОНТИ, 1935.

Легко убедиться в том, что формула плоской волны

$$u = Ae^{i2\pi(kr - \nu t)} = Ae^{i2\pi(xk_x + yk_y + zk_z - \nu t)} \quad (124,2)$$

удовлетворяет уравнению (124,1). Действительно, дифференцируя (124,2) дважды по всем координатам и по времени, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -4\pi^2 k_x^2 u, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -4\pi^2 k_y^2 u, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -4\pi^2 k_z^2 u, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -4\pi^2 \nu^2 u. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в (124,1), получаем после сокращения

$$\nu^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (124,3)$$

Это важное соотношение, связывающее частоту  $\nu$  с компонентами волнового вектора, характерно для природы волны; его называют иногда законом дисперсии.

Вместо того, чтобы писать в правой части (124,1) сумму вторых частных производных по координатам, мы можем представить её так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$$

где  $\Delta$  — так называемый оператор Лапласа. Написав волновое уравнение в виде

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad (124,4)$$

мы не только пользуемся сжатым способом записи, но и получаем существенное обобщение, так как оператор Лапласа может быть выражен в любой системе координат. В частном случае прямоугольных декартовых координат он имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (124,5)$$

В других системах координат оператор  $\Delta$  выражается иначе. Из этих выражений для нас очень важно выражение оператора  $\Delta$  в сферических полярных координатах. Оно таково:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (124,6)$$

Переход от декартовых координат к полярным можно, конечно, выполнить путём обычной замены переменных по правилам

дифференциального исчисления. Однако вычисления в случае перехода к пространственным координатам  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$  оказываются настолько громоздкими и утомительными, что идти таким путём не рекомендуется. В руководствах по векторному анализу обычно излагается очень простой и изящный метод для перехода к любым криволинейным ортогональным координатам, которым и пользуются для получения формулы (124,6). Излагать этот метод здесь не место\*), и мы ограничимся приведением готовой формулы (124,6).

Волновое уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных. Как всякое линейное однородное уравнение, оно обладает следующим важным свойством. Положим, что мы нашли частное решение (124,1)  $u_1$ ; тогда и  $c_1 u_1$ , где  $c_1$  — произвольная постоянная, будет также решением (124,1). Если нам известны частные решения  $u_1$  и  $u_2$ , то

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные, также будет решением волнового уравнения (124,1). В этом заключается математическое обоснование известного принципа наложения или суперпозиции волновых движений, который позволяет при помощи наложения плоских волн строить любые волновые поля. Мы воспользуемся этим принципом в ближайших параграфах.

## § 125. Суперпозиция плоских волн

Рассмотренные в предшествующем параграфе плоские монохроматические волны в природе никогда не осуществляются. В самом деле, по условию, эти волны представляют собою строго периодический процесс, а для этого они должны иметь бесконечное протяжение в пространстве и во времени. Реальные же световые «сигналы» всегда ограничены в пространстве, испускаются в течение ограниченных промежутков времени, а потому и не являются строго гармоническими (см. § 68). Поэтому мы можем их рассматривать как результат суперпозиции строго гармонических, плоских волн, которые в одной части пространства вследствие интерференции усиливают друг друга, а в остальном пространстве друг друга погашают. Такие сложные волны имеют некоторые важные особенности, которые мы выясним сначала на примере суперпозиции только двух плоских гармонических волн.

\*) См., например, Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, стр. 202, ГОНТИ, 1938.



Положим, что обе эти волны распространяются вдоль оси  $x$  и что их частоты  $\nu_0$  и  $\nu$ , а также абсолютные значения волнового вектора  $k_0$  и  $k$  ( $k_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ ,  $k = \frac{1}{\lambda}$ ) очень [мало различаются друг от друга:  $k_0 - k = \Delta k \rightarrow 0$ ,  $\nu_0 - \nu = \Delta \nu \rightarrow 0$ ].

Итак, мы имеем

$$u_1 = a \cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x),$$

$$u_2 = a \cos 2\pi (\nu t - kx).$$

Складывая  $u_1$  и  $u_2$ , получаем сложную волну  $u$ :

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = a \cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x) + a \cos 2\pi (\nu t - kx) = \\ &= 2a \cos 2\pi \left( \frac{\nu_0 - \nu}{2} t - \frac{k_0 - k}{2} x \right) \cos 2\pi \left( \frac{\nu_0 + \nu}{2} t - \frac{k_0 + k}{2} x \right) \end{aligned}$$

или, вследствие близости  $\nu_0$  и  $\nu$ ,  $k_0$  и  $k$ , приближённо

$$u = 2a \cos 2\pi \left( \frac{\Delta \nu}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x). \quad (125,1)$$

Полученный результат можно истолковать следующим образом. Второй множитель формулы (125,1),  $\cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x)$ , пред-



Рис. 179. Образование волновых групп.

ставляет фазу волны с частотой  $\nu_0$  и волновым числом  $k_0$ , а первый

$$2a \cos 2\pi \left( \frac{\Delta \nu}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right)$$

— медленно ( $\Delta \nu \rightarrow 0$ ,  $\Delta k \rightarrow 0$ ) и притом периодически меняющуюся амплитуду. Другими словами, волну  $u$  (125,1) мы рассматриваем как волну с частотой  $\nu_0$  и волновым числом  $k_0$ , но с *модулированной амплитудой*. Не следует забывать, однако, что волна, изображаемая формулой (125,1), строго говоря, уже не будет гармонической: гармоническая волна на всём протяжении от  $-\infty$  до  $+\infty$  должна иметь одну и ту же амплитуду и одну определённую частоту. Между тем волна (125,1) имеет периодически меняющуюся амплитуду, и соответствующий спектральный прибор обнаружит в ней не одну частоту, а две —  $\nu_0$  и  $\nu$ .

Этот результат иллюстрируется рис. 179, где изображены для некоторого момента времени два участка гармонических

волн с мало различающимися  $\lambda_0$  и  $\lambda$  и волна, возникающая в результате их суперпозиции. Как видно, эта сложная волна распадается на ряд групп с амплитудами, меняющимися по косинусоидальному закону.

Найдём теперь отдельно скорость перемещения определённой фазы и скорость перемещения определённой амплитуды. Очевидно, что последняя совпадает со скоростью перемещения каждой группы в целом и потому называется *групповой*. Для того чтобы отыскать фазовую скорость, выберем какое-нибудь значение фазы (безразлично, какое именно) и, положив  $v_0 t - k_0 x = \text{const.}$ , отыщем  $\dot{x}$ . Мы получаем

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{k_0} = v_0 \lambda_0 \quad (125,2)$$

— уже известную формулу фазовой скорости. Для отыскания скорости перемещения группы, или, что то же, скорости перемещения определённой амплитуды, поступаем таким же образом: выбираем постоянное значение амплитуды так, чтобы

$$\frac{\Delta v}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x = \text{const.},$$

и отыскиваем  $\dot{x}$ :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta k}.$$

В пределе, при  $\Delta k \rightarrow 0$

$$g = \frac{dv}{dk}. \quad (125,3)$$

Мы видим, что обе скорости — фазовая и групповая — выражаются различными формулами. Сравнение этих формул и вытекающих из них следствий мы, однако, отложим до § 127.

## § 126. Волновой пакет

Покажем теперь, что путём суперпозиции плоских волн можно осуществить волновой процесс, в котором амплитуда отлична от нуля только в небольшой части пространства, а в остальном пространстве равна нулю. Будем попрежнему для простоты рассматривать линейные процессы или, точнее, плоские волны, зависящие только от одной пространственной координаты  $x$  и от времени.

Для того чтобы образовать волновой процесс, имеющий ограниченное протяжение в пространстве, наложения двух плоских волн уже недостаточно. Оказывается, однако, что такой процесс можно образовать путём наложения волн с непрерывно

меняющимися  $k$  в пределах некоторого интервала  $2\Delta k$ , размеры которого мы установим впоследствии. Выберем на интервале  $2\Delta k$  некоторую среднюю точку  $k_0$  и покажем, что при определённых условиях, в результате суперпозиции, которая теперь уже вследствие непрерывного изменения  $k$  должна представиться не суммой, но интегралом

$$u = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) \cos 2\pi [\nu(k)t - kx] dk, \quad (126,1)$$

можно получить ограниченный плоский волновой процесс или, как его называют, волновой пакет.

Что касается амплитуды  $a(k)$  складываемых гармонических волн, то мы условимся считать её постоянной во всём интервале  $\pm\Delta k$  и равной  $a(k_0)$ . Зависимость частоты  $\nu$  от  $k$  даётся, вообще, законом дисперсии волн интересующей нас природы (см. § 124). Но каков бы ни был этот закон, для малого интервала  $\Delta k$  мы можем представить  $\nu(k)$  в виде степенного ряда

$$\nu(k) = \nu(k_0) + (k - k_0) \left( \frac{d\nu}{dk} \right)_{k=k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left( \frac{d^2\nu}{dk^2} \right)_{k=k_0} + \dots \quad (126,2)$$

Вычислим теперь интеграл (126,1) приближённо, полагая, что интервал  $k - k_0$  настолько мал, что в (126,2) можно отбросить все члены, начиная с третьего, т. е. взять для  $\nu(k)$  линейное выражение

$$\nu(k) = \nu(k_0) + (k - k_0) \left( \frac{d\nu}{dk} \right)_{k=k_0}.$$

Подставляя это выражение  $\nu(k)$  в (126,1), получаем

$$u = a(k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \cos 2\pi \left[ \nu(k_0)t + (k - k_0) \left( \frac{d\nu}{dk} \right)_0 t - kx \right] dk.$$

Интеграл этот легко вычисляется, и мы находим после подстановки пределов и умножения числителя и знаменателя на  $\Delta k$ :

$$u = 2a(k_0) \Delta k \frac{\sin 2\pi \Delta k \left[ \left( \frac{d\nu}{dk} \right)_0 t - x \right]}{2\pi \Delta k \left[ \left( \frac{d\nu}{dk} \right)_0 t - x \right]} \cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x). \quad (126,3)$$

Этот результат можно истолковать совершенно аналогично тому, как мы толковали формулу (125,1) в предыдущем параграфе: множитель  $\cos 2\pi (\nu_0 t - k_0 x)$  в (126,3) связан с фазой нашего сложного процесса, а стоящий перед ним множитель представляет переменную (модулированную) амплитуду. Обозначив

$$2\pi \Delta k \left[ \left( \frac{d\nu}{dk} \right)_0 t - x \right] = \xi,$$

мы видим, что характер изменения амплитуды определяется множителем  $\frac{\sin \xi}{\xi}$ . Этот модулирующий множитель мы уже встречали в § 70; при изменении аргумента он имеет следующий ход:

$$\text{при } \xi \rightarrow 0 \quad \lim \frac{\sin \xi}{\xi} = 1,$$

$$\text{при } \xi = \pm \pi \quad \frac{\sin \xi}{\xi} = 0.$$

При дальнейшем увеличении абсолютной величины  $\xi$  функция  $\frac{\sin \xi}{\xi}$  проходит через ряд максимумов и минимумов. Однако их величина мала по сравнению с главным максимумом при  $\xi = 0$  и быстро убывает с увеличением аргумента. Таким образом, можно сказать, что в результате суперпозиции получается практически одна группа, амплитуда которой отличается от нуля лишь

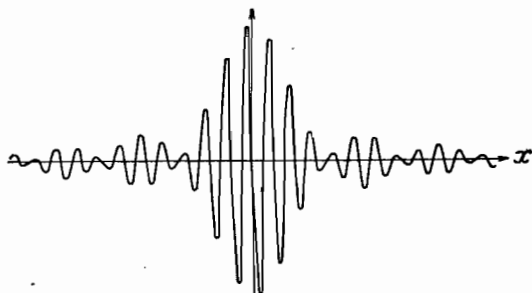


Рис. 180. Волновой пакет.

в ограниченной области и в этой области изменяется как  $\frac{\sin \xi}{\xi}$ . На рис. 180 изображена «моментальная фотография» такой группы, т. е. её форма в определённый момент времени.

Формула (126,3) показывает, что в случае волнового пакета, как и в случае сложения двух плоских волн, рассмотренном в предыдущем параграфе, можно говорить о двух скоростях — фазовой и групповой. Фаза, как уже было сказано, входит в множитель  $\cos 2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$ ; приравнявая фазу  $2\pi(\nu_0 t - k_0 x)$  постоянной и дифференцируя, находим фазовую скорость, как и в предыдущем параграфе, равной

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{\nu_0}{k_0}.$$

Множитель, модулирующий амплитуду,  $\frac{\sin \xi}{\xi}$  при  $\xi \rightarrow 0$ , имеет постоянное значение, равное 1. При  $\xi = 0$  имеем

$$x - \left(\frac{d\nu}{dk}\right)_0 t = 0.$$

Это показывает, что поверхность равных амплитуд есть плоскость, перемещающаяся со скоростью

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{dv}{dk} \right)_0 = g. \quad (126,4)$$

Мы видим, что выражение для скорости перемещения плоскости равных амплитуд совпадает с найденной в предыдущем параграфе формулой для групповой скорости (125,3). Это есть вместе с тем скорость перемещения пакета как целого.

Необходимо теперь напомнить, что все полученные до сих пор результаты связаны с приближением, которое мы сделали в формуле (126,3), отбросив в разложении  $v(k)$  члены порядка выше первого, и надо ещё исследовать, как влияет это приближение на результат. Если вторая производная  $\left( \frac{v^2}{dk^2} \right)_0$  равна нулю (что имеет место при отсутствии дисперсии среды), то результаты сохраняются. Если же  $\frac{d^2v}{dk^2} \neq 0$ , то обнаруживается следующее своеобразное свойство пакета: пакет не сохраняет своей формы и с течением времени деформируется, постепенно расплываясь. Если, однако, дисперсия мала, так что  $\frac{d^2v}{dk^2}$  близка к нулю, то можно говорить об определённой форме пакета и о перемещении его как целого с групповой скоростью  $g$ .

Мы получили таким образом полное описание нашего волнового процесса. Подчеркнём теперь следующую его особенность: хотя в формулу пакета (126,3) входит фазовый множитель с определёнными  $v_0$  и  $k_0$ , в действительности мы имеем дело со сложным процессом, с которым нельзя связывать какой-либо одной определённой длины волны. Напротив, поскольку для образования пакета необходима суперпозиция многих гармонических волн с непрерывно меняющимися  $k$ , спектральный анализ пакета развернёт его в целый участок сплошного спектра. Более того, оказывается, что для образования волнового пакета заданного протяжения  $\Delta x$  интервал сплошного спектра  $\Delta k$  не может быть меньше некоторой определённой величины.

Найдём теперь это очень важное для последующего соотношение между  $\Delta k$  и  $\Delta x$ . Для этого мы рассмотрим пакет в какой-нибудь определённый момент времени  $t=0$ . Форма пакета определится тогда множителем

$$\frac{\sin 2\pi \Delta k \cdot x}{2\pi \Delta k \cdot x} = \frac{\sin \xi_0}{\xi_0},$$

где  $\xi_0 = 2\pi \Delta k \cdot x$ . Этот множитель обращается в нуль при  $\xi_0 = \pm \pi$ . Если мы выберем начало координат в точке оси,

соответствующей главному максимуму (т. е. в точке, соответствующей  $\xi_0 = 0$ ), то координаты первых минимумов слева и справа от этого максимума будут  $\pm \frac{\Delta x}{2}$ . Принимая во внимание, что следующие максимумы быстро убывают по величине (см. § 70, где более детально рассмотрен ход функции  $\frac{\sin \xi}{\xi}$ ), мы можем за протяжение пакета приближённо принять отрезок  $\Delta x$  между двумя симметричными первыми минимумами. Для них имеем условие

$$\pm 2\pi \Delta k \cdot \frac{\Delta x}{2} = \pm \pi,$$

откуда получаем  $\Delta k \cdot \Delta x = 1$ .

Если бы мы захотели определить протяжение пакета точнее и привяли за его длину расстояние между следующими минимумами, симметричными относительно начала координат, то мы бы получили  $\Delta k \cdot \Delta x = 2$  и вообще

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 1. \quad (126,5)$$

До сих пор мы рассматривали образование групп в одном измерении, или «линейных групп», для получения которых мы складывали монохроматические волны с одинаково направленными векторами  $\mathbf{k}$ . Так как все предыдущие рассуждения справедливы для любой из трёх осей координат, то для образования пространственного пакета с протяжением по осям координат  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  должны быть выполнены три условия:

$$\Delta x \Delta k_x \geq 1, \quad \Delta y \Delta k_y \geq 1, \quad \Delta z \Delta k_z \geq 1. \quad (126,6)$$

Мы видим, что между пространственным протяжением пакета в определённый момент ( $t = 0$ ) и сплошным спектром гармонических волн, необходимых для образования этого пакета, имеет место то же соотношение взаимности, какое мы нашли в § 70 для функции времени  $f(t)$  и распределения амплитуд по частотам. Безгранично протяжённой синусоидальной волне  $e^{i2\pi kx}$  соответствует определённое  $k$  (определённая длина волны  $\lambda$ ). Но если волна ограничена в пространстве, то определённое  $k$  отсутствует и неизбежно появляется спектр длин волн, имеющий ширину  $\Delta k$ , такую, что  $\Delta x \Delta k \sim 1$ .

## § 127. Фазовая и групповая скорости

Обратимся теперь к рассмотрению обеих скоростей — фазовой и групповой — и сравним их между собой в двух случаях:

1. Случай, когда фазовая скорость образующих пакет гармонических волн не зависит от  $k$ . Относительно сред, обладаю-

щих таким свойством, говорят, что у них отсутствует дисперсия.

2. Случай, когда среда обладает дисперсией, т. е. когда фазовая скорость есть функция  $k$ .

Обратимся к случаю (1). Из формулы для фазовой скорости  $c' = \frac{v}{k}$  находим  $v = c'k$ . Вычислим теперь групповую скорость

$$g = \frac{dv}{dk} = \frac{d}{dk}(c'k) = c'.$$

Итак, в отсутствии дисперсии групповая скорость и фазовая скорость одинаковы.

В случае (2)  $c'$  есть функция  $k$  и потому

$$g = \frac{d}{dk}(c'k) = c' + k \frac{dc'}{dk}. \quad (127,1)$$

Второй член справа преобразуем так:

$$\frac{dc'}{dk} = \frac{dc'}{d\lambda} : \frac{dk}{d\lambda} = \frac{dc'}{d\lambda} : \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\lambda^2 \frac{dc'}{d\lambda}.$$

Подставляя в (127,1), получаем

$$g = c' - \lambda \frac{dc'}{d\lambda}. \quad (127,2)$$

Мы видим, что при наличии дисперсии групповая скорость не совпадает с фазовой, а именно, в зависимости от знака производной  $\frac{dc'}{d\lambda}$  групповая скорость может быть как меньше фазовой ( $\frac{dc'}{d\lambda} > 0$ ), так и больше фазовой ( $\frac{dc'}{d\lambda} < 0$ ). В оптике осуществляются оба эти случая: 1) при нормальной дисперсии с увеличением  $\lambda$  показатель преломления  $\mu$  (т. е. отношение  $\frac{c}{c'}$ , где  $c$  — скорость света в вакууме) убывает, т. е.  $c'$  возрастает и  $\frac{dc'}{d\lambda} > 0$ ; 2) при аномальной дисперсии, которая наблюдается внутри полос поглощения, зависимость  $\mu$  от  $\lambda$  обратная и, следовательно,  $\frac{dc'}{d\lambda} < 0$ . Таким образом, в случае световых волн в вакууме обе скорости одинаковы; в среде же при нормальной дисперсии  $g < c'$ , при аномальной  $g > c'$ .

Возникает вопрос: какая же из двух скоростей измеряется на опыте при определении скорости света. Анализ различных методов измерения скорости света показывает, что ни один из них не даёт возможности определять фазовую скорость, но все они дают групповую скорость. Это видно из того, что в различных методах определения скорости света либо находится скорость определённого сигнала (метод Ремера — затмения спутников Юпитера)

тера), либо скорость ограниченного ряда волн, пропускаемого вращающимся зубчатым колесом (метод Физо). Но всякий ограниченный ряд волн может быть подвергнут анализу при помощи интеграла Фурье и представлен как результат суперпозиции плоских монохроматических волн. Это значит, что всякий ограниченный ряд волн представляет собою волновой пакет, и мы измеряем скорость пакета, т. е. групповую скорость. Менее очевидно то же утверждение в случае метода абберации света; однако анализ, выполненный П. С. Эренфестом, показал, что и в этом случае определяется групповая, а не фазовая скорость\*).

Из сказанного следует, что фазовая скорость есть величина, недоступная для непосредственного измерения. Но при распространении пространственно ограниченных волн (т. е. волновых пакетов) в диспергирующей среде и самое понятие фазовой скорости теряет свой непосредственный смысл, так как в этом случае мы имеем дело не с одной фазой, а с фазами бесчисленного множества гармонических волн, каждая из которых распространяется со своей скоростью.

Более подробный анализ показывает, что изменение скорости перемещения плоскости равной фазы, наблюдаемое при распространении волны в среде, наполненной резонаторами, обусловлено сдвигом фазы, возникающим при вынужденных колебаниях резонаторов под действием проходящей волны. Из этого следует, что фазовая скорость в точном соответствии со своим названием даёт лишь скорость перемещения определённой фазы и, как показывает более подробный анализ, совершенно не связана, например, со скоростью движения фронта, ограниченного в пространстве ряда волн или со скоростью движения энергии. Именно поэтому возникновение фазовой скорости, большей скорости света в пустоте, ни в какой степени не противоречит утверждению теории относительности о том, что скорость света в пустоте есть предельная скорость.

В частности, в оптике доказывается, что скорость фронта волны при любых условиях равна  $c$ , т. е. скорости света в пустоте\*\*).

---

\* ) См. по этому поводу статью П. Эренфеста и Л. Исакова «О так называемой групповой скорости света» (Сборник «Новые идеи в физике» под редакцией И. И. Боргмана, № 5, Изд. «Образование», СПб, 1913); см. также Г. С. Ландсберг, Оптика, § 113, Гостехиздат, 1947.

\*\* ) Вопрос о распространении волновых групп в диспергирующей среде принадлежит к числу самых трудных и тонких вопросов волновой оптики. См. по этому поводу: Г. С. Ландсберг, Оптика, § 113, Гостехиздат, 1947; подробное математическое рассмотрение вопроса см. в книге К. Шефер, Теоретическая физика, т. III, часть 2, стр. 371, ГОНТИ, 1938. По поводу волновых пакетов см. Я. И. Френкель, Электродинамика, т. II, стр. 241 и след., ОНТИ, 1935.



## § 128. Корпускулярно-волновой параллелизм. Преломление света

Рассмотрение флуктуаций светового поля (§ 109) привело нас к выводу, что волновые и корпускулярные свойства представляют две равноправные стороны одного и того же явления — светового поля. В этом и в двух следующем параграфах мы покажем на других примерах, что различные оптические явления можно рассматривать как с волновой, так и с корпускулярной точек зрения.

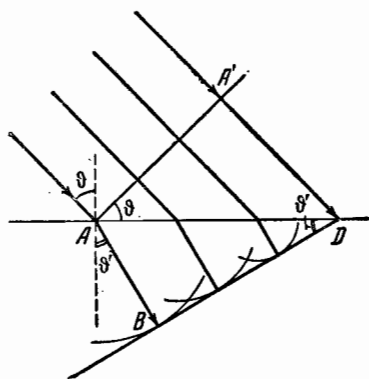


Рис. 181. Преломление. Волновая картина.

Мы начнём с рассмотрения явления, возможность интерпретации которого с обеих точек зрения была известна давно, а именно, с преломления света.

Хотя объяснение преломления с волновой точки зрения излагается в элементарных курсах физики, — мы воспроизведём его здесь для того, чтобы подчеркнуть некоторые характерные черты этого объяснения. Волновое объяснение сводит преломление при переходе из одной среды в другую к изменению фазовой скорости волны. Представим себе две среды с различными

показателями преломления, разделённые плоской границей (рис. 181). Для определённости положим, что верхняя среда есть вакуум, где скорость света равна  $c$ ; в нижней среде скорость света пусть будет  $c'$ . Длины волн в той и другой среде будут соответственно  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  и  $\lambda' = \frac{c'}{\nu}$ . Плоская волна падает на поверхность раздела под углом  $\theta$ . В момент  $t = 0$  положение плоскости равной фазы в верхней среде изображается прямой  $AA'$ . Пусть в момент  $t = t'$  волна из точки  $A'$ , пройдя расстояние  $A'D = ct'$ , достигнет границы раздела в точке  $D$ . За это время волна от точек, лежащих между  $A$  и  $D$ , будет распространяться в нижней среде.

Для отыскания положения плоскости равной фазы в нижней среде строим гюйгенсовы сферические волны из точек поверхности раздела между  $A$  и  $D$  и находим их огибающую. Очевидно, что в момент  $t = t'$  радиус вторичной волны, исходящей из  $A$ , будет  $AB = c't'$ . Отсюда, как легко видеть из чертежа,

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{ct'}{c't'} = \text{const.} \quad (128,1)$$

— закон Снеллиуса.

Для того чтобы теперь объяснить преломление с корпускулярной точки зрения, достаточно допустить, что световые частицы изменяют своё количество движения при переходе через поверхность раздела обеих сред. Пусть, в самом деле, количество движения «световой частицы» в верхней среде будет  $p$ , в нижней  $p'$ , причём  $p' > p$  (рис. 182). Вследствие симметрии тангенциальная составляющая количества движения при переходе через поверхность раздела не меняется:

$$p_t = p'_t, \quad (128,2)$$

а меняется только нормальная составляющая ( $p'_n > p_n$ ). Из чертежа имеем

$$\sin \vartheta = \frac{p_t}{p}, \quad \sin \vartheta' = \frac{p'_t}{p'},$$

что даёт, принимая во внимание (128,2),

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} = \frac{p'}{p} = \text{const.}, \quad (128,3)$$

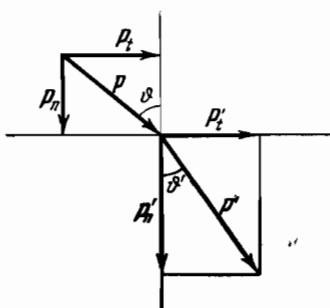


Рис. 182. Преломление. Корпускулярная картина.

т. е. опять закон Снеллиуса.

Для того чтобы подвести итог проделанному рассуждению, сравним между собой формулы (128,1) и (128,3), из которых первая является результатом волновой интерпретации, а вторая — корпускулярной. Мы видим, что в первом случае отношение синусов углов падения и преломления оказывается равным отношению скорости света в вакууме к скорости в среде, тогда как во втором отношении синусов равно обратному отношению импульсов «световых частиц», т. е. отношению импульса в среде к импульсу в вакууме.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли использовать это различие для постановки решающего эксперимента, который бы показал с полной определённою, что же представляет собою свет — волны или потоки частиц. В самом деле, если бы «световые частицы» были обыкновенными «ньютоновыми» частицами, то их импульс был бы прямо пропорционален скорости, так что  $p = mv$  и

$$\frac{p'}{p} = \frac{v'}{v}.$$

Таким образом, предполагая, что «световые частицы» подчиняются ньютоновой механике, мы должны ожидать, что в случае, если верна корпускулярная картина, скорость света в среде должна быть больше, чем в пустоте. Наоборот, в случае правильности волновой картины скорость света в пустоте должна

быть больше, чем в среде. Опыт на самом деле был поставлен Физо и Фуко, которые с этой целью определяли скорость света в воде. Оказалось, что скорость света в воде меньше, чем в воздухе (в вакууме). Впоследствии Майкельсон проделал аналогичный опыт с большей точностью, сравнивая скорости света в воде и в сероуглероде со скоростью света в воздухе (практически равной скорости света в вакууме). И этот опыт также показал, что отношение скоростей в воздухе и в воде равно 1,330, что практически равно показателю преломления воды для жёлтого света, которым пользовался Майкельсон (на самом деле показатель преломления воды в этой части спектра равен 1,333, но разница в 0,003 лежит в пределах ошибок опыта Майкельсона). С сероуглеродом, обладающим высоким показателем преломления и большой дисперсией, результат получился несколько иной. Именно оказалось, что отношение скоростей равно  $1,76 \pm 0,02$ , тогда как показатель преломления  $\text{CS}_2$  равен 1,63. Таким образом, опыт обнаружил, что скорость света в сероуглероде меньше, чем в воздухе, как это требуется волновой теорией, но отношение скоростей не равно показателю преломления. Разгадка этого кажущегося противоречия лежит в том, что измерения Майкельсона, как и всякие измерения скорости светового сигнала (см. § 127), дают групповые, но не фазовые скорости, отношению которых равен показатель преломления. В воздухе и в воде, где дисперсия очень мала, обе скорости одинаковы. Но в сероуглероде дисперсия настолько велика, что разница между фазовой и групповой скоростями должна быть заметна. Пользуясь формулой

$$g = c' - \lambda \frac{dc'}{d\lambda},$$

можно показать, что отношения скорости света в пустоте  $c$  к групповой скорости света в среде связано с показателем преломления  $\mu$  соотношением

$$\frac{c}{g} = \mu - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda}. \quad (128,4)$$

Для сероуглерода  $\frac{c}{g} = 1,76$ ; далее из кривой зависимости показателя преломления  $\text{CS}_2$  от длины волны для использованной Майкельсоном длины волны  $\lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = -0,126$  (показатель преломления убывает с увеличением длины волны). Таким образом, из (128,4) получается

$$\mu = \frac{c}{g} + \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = 1,76 - 0,126 \approx 1,63$$

в согласии с экспериментальными данными.

Если бы речь шла о сравнении волновой теории с ньютоновой корпускулярной теорией, то описанные опыты однозначно свидетельствовали бы в пользу волновой теории. Не следует, однако, забывать, что в корпускулярной картине отношение скоростей света в вакууме и в среде равно отношению *импульсов* «световых частиц», а не скоростей

$$\frac{c}{c'} = \frac{p'}{p}.$$

Это весьма существенно потому, что импульс фотона, как мы знаем, равен  $\frac{h\nu}{c}$ , т. е. содержит скорость света в знаменателе, но не в числителе, так что

$$p = \frac{\text{const.}}{c}.$$

Поэтому и

$$p' = \frac{\text{const.}}{c'}.$$

Таким образом, и в корпускулярной картине, поскольку световыми корпускулами являются фотоны, фазовая скорость света в среде должна быть меньше скорости света в пустоте.

Из этого следует, что описанные опыты, вопреки мнению, сложившемуся в XIX столетии, не решают вопроса о природе света: они не противоречат ни волновой, ни корпускулярной картине.

Отметим в заключение ещё следующее важное обстоятельство. Волну мы характеризуем частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$ ; для частицы характерны её энергия  $E$  и импульс  $p$ . Мы можем описывать преломление либо с корпускулярной, либо с волновой точек зрения. В первом случае мы пользуемся величинами  $E$  и  $p$ ; во втором —  $\nu$  и  $\lambda$ . Если, однако, мы хотим перейти от корпускулярной картины к волновой, то мы должны воспользоваться следующими известными нам соотношениями между обеими группами величин:

$$E = h\nu \quad (128,5)$$

и

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (128,6)$$

Мы видим, таким образом, что в этих соотношениях постоянная Планка играет роль переводного множителя или ключа, позволяющего переходить от одного аспекта к другому.

## § 129. Корпускулярно-волновой параллелизм. Эффект Допплера

Покажем теперь на других примерах возможность истолкования оптических явлений с двух точек зрения — корпускулярной и волновой. Для этого обратимся сначала к эффекту Допплера.

Эффект Допплера, имеющий место как в акустике, так и в оптике, состоит, как известно, в изменении частоты при относительном движении источника и наблюдателя. Пусть источник света находится в  $A$ , а наблюдатель в  $B$ . Если источник движется под углом  $\vartheta$  к прямой, соединяющей  $A$  и  $B$  со скоростью  $v$ , то частота, регистрируемая наблюдателем при движении источника, отличается от частоты, воспринимаемой при покоящемся источнике на величину  $\Delta\nu$ , определяемую формулой

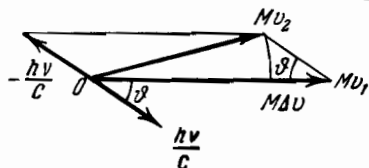


Рис. 183. К корпускулярной теории эффекта Допплера.

ростью  $v$ , то частота, регистрируемая наблюдателем при движении источника, отличается от частоты, воспринимаемой при покоящемся источнике на величину  $\Delta\nu$ , определяемую формулой

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \vartheta, \quad (129,1)$$

где  $c$  — скорость света. Волновая теория этого явления основана на рассмотрении кажущегося изменения длины волны вследствие движения источника при сохранении скорости распространения света \*).

Оказывается, однако, что это явление может быть объяснено и с корпускулярной точки зрения. При этом испускание света рассматривается как «выстреливание» фотона, и к этому процессу применяются законы сохранения энергии и количества движения совершенно так же, как в корпускулярной теории эффекта Комптона.

Пусть атом с массой  $M$ , движущийся со скоростью  $v_1$ , т. е. обладающий количеством движения  $Mv_1$ , находясь в точке  $O$ , испускает фотон  $h\nu$  (рис. 183). Количество движения этого фотона равно  $\frac{h\nu}{c}$ . В силу закона сохранения количества движения атом приобретает в момент испускания добавочный импульс  $-\frac{h\nu}{c}$ , направленный в противоположную сторону (отдача). Его импульс после испускания становится равным  $Mv_2$ . Из чертежа, построенного на основании закона сохранения

\*) Мы здесь не можем останавливаться на волновой теории эффекта Допплера и на существенных различиях этого явления в акустике и оптике. Относящиеся сюда вопросы с большей ясностью изложены в книге Г. С. Ландсберга, Оптика, §§ 114 — 116, Гостехиздат, 1947.

импульса, видно, что

$$Mv_1 - Mv_2 \equiv M\Delta v = \frac{h\nu}{c} \cos \vartheta. \quad (129,2)$$

Для того чтобы теперь применить закон сохранения энергии, будем рассуждать следующим образом. Если энергии покоящегося атома в стационарных состояниях, ведущих к испусканию фотона  $h\nu$ , равны соответственно  $E_1$  и  $E_2$ , то

$$E_1 - E_2 = h\nu. \quad (129,3)$$

Энергия движущегося атома в возбуждённом состоянии (перед испусканием) равна

$$E_1 + \frac{1}{2} Mv_1^2,$$

в нормальном состоянии (после испускания)

$$E_2 + \frac{1}{2} Mv_2^2.$$

Энергия испущенного фотона равна

$$h(\nu + \Delta\nu).$$

На основании закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2} Mv_1^2 + E_1 = \frac{1}{2} Mv_2^2 + E_2 + h(\nu + \Delta\nu), \quad (129,4)$$

откуда, принимая во внимание (129,3),

$$\frac{1}{2} M(v_1^2 - v_2^2) = h\Delta\nu$$

или

$$M\Delta\nu \frac{v_1 + v_2}{2} = h\Delta\nu.$$

Пользуясь (129,2) и вводя среднюю скорость  $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ , получаем

$$\bar{v} \frac{h\nu}{c} \cos \vartheta = h\Delta\nu,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\bar{v}}{c} \cos \vartheta,$$

т. е. соотношение (129,1), выводимое в волновой оптике.

### § 130. Корпускулярно-волновой параллелизм. Диффракционная решётка

Рассмотрим отражательную плоскую диффракционную решётку. Из волновой теории известно, что если период решётки равен  $a$  и если на решётку падает плоская монохроматическая волна под углом  $\vartheta$  относительно плоскости решётки, то при

отражении в направлении, характеризуемом углом  $\vartheta'$ , мы получим свет при условии

$$a(\cos \vartheta - \cos \vartheta') = n\lambda. \quad (130,1)$$

Рассмотрим теперь это явление с корпускулярной точки зрения. Пусть на решётку падает поток фотонов под углом  $\vartheta$ . Поскольку из опыта хорошо известно, что характер диффракционной картины не зависит от интенсивности света, но определяется только самой решёткой в целом, нам не следует детализировать картину, — например, рассматривать отражение каждого фотона от определённого отражающего участка решётки (этот вопрос мы рассмотрим подробнее ниже). Мы можем, однако, утверждать, что при падении фотона на решётку последняя получает добавочный импульс, а при отражении — испытывает отдачу. В результате составляющая импульса решётки в направлении оси  $x$ , лежащей в плоскости решётки, изменится на

$$p_x - p'_x = \Delta p_x.$$

Представим себе теперь, что решётка подвижна, и пусть она может перемещаться, оставаясь в своей плоскости; тогда импульс  $\Delta p_x$  сообщит ей движение. Очевидно, что при перемещении решётки в направлении оси  $x$  на расстояние, равное её периоду  $a$ , — решётка вновь совместится со своим исходным положением. Поэтому движение решётки мы можем рассматривать как периодическое с периодом  $a$ . В таком случае его можно «проквантовать», пользуясь квантовыми условиями Бора—Зоммерфельда (§ 106)

$$\int_0^a \Delta p_x dx = nh,$$

откуда

$$a \Delta p_x = nh. \quad (130,2)$$

Так как масса решётки очень велика по сравнению с массой фотона, то изменением абсолютной величины его импульса  $p$  при отражении можно пренебречь. Поэтому

$$\begin{aligned} p_x &= p \cos \vartheta; \\ p'_x &= p \cos \vartheta', \\ \Delta p_x &= p (\cos \vartheta - \cos \vartheta'), \end{aligned}$$

и (130,2) принимает вид

$$a(\cos \vartheta - \cos \vartheta') = n \frac{h}{p}. \quad (130,3)$$

Принимая во внимание, что  $p$  есть импульс фотона, связанный с длиной волны соотношением

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (128,6)$$

и подставляя это выражение в (130,3), получим

$$a(\cos \vartheta - \cos \vartheta') = n\lambda, \quad (130,1)$$

т. е. формулу диффракционной решётки в обычном виде.

Обратим внимание на то, что в формулу (130,3) входит импульс  $p$  — величина, характеризующая частицу, а в соотношение (130,1) — длина волны. Можно сказать, таким образом, что соотношения (130,3) и (130,1) представляют одну и ту же формулу, написанную, однако, в первом случае в терминах корпускулярной картины, а во втором — в терминах волновой картины. Как и в остальных случаях, переход от одной картины к другой производится при помощи соотношения

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

связывающего оба аспекта оптических явлений.

### § 131. Гипотеза де-Брогля

Дуализм «волны-частицы» был установлен, как мы видели, прежде всего при изучении природы света. В 1924 г. Луи де-Брогль, пытаясь выйти из затруднений, связанных с этим дуализмом, выдвинул смелую гипотезу, что дуализм не является особенностью одних только оптических явлений, но имеет универсальное значение. «В оптике, — говорит он, — в течение столетия слишком пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым; не делалась ли в теории материи обратная ошибка? Не думали ли мы слишком много о картине «частиц» и не пренебрегали ли чрезмерно картиной волн?». Таков был вопрос, поставленный де-Броглем.

К допущению волновых свойств у материальных частиц его привели также следующие соображения. В двадцатых годах XIX столетия Гамильтон обратил внимание на замечательную аналогию между геометрической оптикой и механикой (само собой разумеется, что в то время речь могла идти только о механике Ньютона). Оказывается, что основные законы этих двух различных областей можно представить в математически тождественной форме. Это значит, что вместо того, чтобы рассматривать движение материальной частицы в поле с потенциалом  $V(x, y, z)$ , можно рассматривать движение световых лучей в оптически неоднородной среде с соответственно выбранным показателем



преломления  $\mu(x, y, z)$  и наоборот. Эта аналогия распространялась только на геометрическую оптику и классическую механику. Но хорошо известно, что геометрическая оптика не может объяснить всех свойств света. Для объяснения таких свойств, как интерференция и дифракция, нужно пользоваться волновой оптикой, которая имеет более общее значение; геометрическая же оптика является предельным случаем оптики волновой (имеющей место для очень коротких длин волн). С другой стороны, известно также, что и ньютонова механика имеет ограниченную применимость; она, например, не может объяснить существования дискретных уровней энергии в атомных системах. Идея де-Брогля состояла в том, что необходимо расширить аналогию между механикой и оптикой и волновой оптике сопоставить *волновую механику*, — более общую, нежели механика классическая, и применимую к внутриатомным движениям.

Допуская таким образом, что материальные «частицы» наряду с корпускулярными свойствами имеют также и волновые, де-Брогль перенёс на случай материальных «частиц» правила перехода от одной картины к другой, с которыми мы уже неоднократно встречались, рассматривая дуализм «волны-частицы» в оптике. Пусть мы имеем материальную «частицу» (например, электрон) с массой  $m$ , движущуюся в отсутствии поля, т. е. равномерно со скоростью  $v$ . В корпускулярной картине мы приписываем частице энергию  $E$  и импульс  $p$ ; в волновой картине мы имеем дело с частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$ . Если обе эти картины являются различными аспектами одного и того же объекта, то связь между характеризующими их величинами устанавливается соотношениями (см. § 128)

$$E = h\nu \quad (131,1)$$

и

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (131,2)$$

где  $h$  — постоянная Планка.

В случае оптических явлений мы использовали соотношение (131,2) для определения импульса фотона, который представляет собою частицу с массой покоя, равной нулю, движущуюся со скоростью света  $c$ . Для материальных частиц то же соотношение по де-Броглю даёт длину волны тех плоских монохроматических волн, которые сопоставляются этим частицам:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

В случае частиц с массой покоя, не равной нулю,  $p = mv$ , причём для малых скоростей  $m$  есть постоянная, а для скоростей, сравнимых со скоростью света, релятивистская масса

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$  зависит от скорости. Итак, для «частиц» с массой покоя, не равной нулю, по де-Броглю

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (131,3)$$

Если ввести волновой вектор  $\mathbf{k}$  с абсолютным значением  $|\mathbf{k}| = \frac{1}{\lambda}$ , то на основании (131,2)

$$\mathbf{p} = h\mathbf{k}; \quad p_x = hk_x, \quad p_y = hk_y, \quad p_z = hk_z. \quad (131,4)$$

Формула плоской волны, описывающей движение свободных материальных «частиц», имеет поэтому следующий вид\*):

$$\begin{aligned} \psi &= Ae^{i2\pi(\mathbf{kr} - \nu t)} = Ae^{i2\pi(xk_x + yk_y + zk_z - \nu t)} = \\ &= Ae^{i\frac{2\pi}{h}(xp_x + yp_y + zp_z - \nu t)}. \end{aligned} \quad (131,5)$$

### § 132. Свойства волн де-Брогля

Вычислим скорость распространения волн де-Брогля, различая, как и во всех случаях, фазовую и групповую скорости. Фазовая скорость будет

$$c' = \frac{v}{k} = \frac{h\nu}{hk} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}; \quad (132,1)$$

так как  $c > v$ , то фазовая скорость волн де-Брогля больше скорости света в пустоте. Но это не должно нас смущать, так как мы уже знаем, что фазовая скорость не характеризует ни скорости «сигнала», ни скорости перемещения энергии, а потому и может быть как меньше, так и больше  $c$ .

Групповую скорость вычисляем при помощи формулы (125,3)

$$g = \frac{d\nu}{dk} = \frac{d(h\nu)}{d(hk)} = \frac{dE}{dp}. \quad (132,2)$$

Нетрудно доказать, что  $\frac{dE}{dp} = v$ . В самом деле, изменение энергии  $dE$  частицы, движущейся под действием силы  $\mathbf{F}$  на пути  $ds$ , равно  $dE = \mathbf{F} ds$ , но  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ , а потому

$$dE = \frac{d\mathbf{p}}{dt} ds = d\mathbf{p} \frac{ds}{dt} = d\mathbf{p} v$$

\* То, что в (131,5) показатель имеет обратный знак по сравнению со (123,8), не имеет значения, так как физический смысл имеет квадрат модуля  $|\psi|^2$ , т. е.  $\psi^* \psi = A^2$ .

или, так как  $v$  и  $p$  направлены одинаково

$$dE = v dp,$$

откуда

$$\frac{dE}{dp} = v.$$

Итак, мы получаем из (132,2)

$$g = v, \quad (132,3)$$

т. е. групповая скорость волн де-Брогеля равна скорости частицы. К этому замечательному соотношению мы ещё вернёмся.

Найдём теперь связь между частотой волн де-Брогеля и составляющими волнового вектора (закон дисперсии). С этой целью мы сначала установим соотношение между  $v$  и  $k$  для общего случая релятивистских частиц, воспользовавшись известным из § 61 релятивистским соотношением между импульсом и энергией:

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p^2 = m_0^2 c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Подставляя сюда

$$E = h\nu, \quad (131,1)$$

$$p_x = hk_x, \quad p_y = hk_y, \quad p_z = hk_z, \quad (131,4)$$

получаем:

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{h^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (132,4)$$

Вводя обозначение

$$\frac{m_0 c^2}{h} = \nu_0, \quad (132,5)$$

приводим (132,4) к виду

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{\nu_0^2}{c^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (132,6)$$

Это и есть искомое релятивистское соотношение. Заметим, что для частиц с массой покоя, равной нулю, формула (132,5) даёт  $\nu_0 = 0$  и (132,6) принимает вид

$$\frac{\nu^2}{c^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

— уже известное нам соотношение, вытекающее из волнового уравнения для электромагнитных волн, т. е. для волн, которым сопоставляются фотоны.

Рассмотрим, наконец, ещё одно замечательное свойство волн де-Брогеля. В элементарной теории водородоподобного атома

по Бору мы пользовались следующим условием для отбора стационарных круговых орбит

$$mva = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Это условие можно переписать в виде

$$2\pi a = n \frac{h}{mv}.$$

Принимая во внимание, что  $\frac{h}{mv}$  есть длина волны де-Брогля, имеем:

$$2\pi a = n\lambda, \quad (132,7)$$

т. е. длина окружности стационарной орбиты должна быть равна целому числу волн де-Брогля.

Аналогичное условие имеет место и для эллиптических орбит Бора. Этот случай несколько сложнее, так как длина волны де-Брогля  $\lambda = \frac{h}{mv}$  в разных точках эллиптической орбиты различна вследствие того, что скорость не постоянна. Для отбора эллиптических орбит в теории Бора необходимо пользоваться двумя квантовыми условиями:

$$\oint p_r dr = n_r h; \quad \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h.$$

Складывая их, получаем

$$\oint (p_r dr + p_\varphi d\varphi) = (n_r + n_\varphi)h = nh.$$

Заметив, что согласно формуле (106,15)

$$p_r dr + p_\varphi d\varphi = 2T dt,$$

получаем

$$nh = \oint (p_r dr + p_\varphi d\varphi) = \oint 2T dt = \oint mv^2 dt = \oint mvv dt = \oint mv ds.$$

Принимая во внимание формулу де-Брогля  $\lambda = \frac{h}{mv}$ , имеем

$$nh = h \oint \frac{ds}{\lambda}$$

или

$$\oint \frac{ds}{\lambda} = n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (132,8)$$

т. е. и в этом случае на длине орбиты должно укладываться целое число волн де-Брогля. Истинный смысл этого интересного результата состоит, однако, в том, что волновая функция, описывающая движение электрона, должна удовлетворять требованию однозначности.

### § 133. Экспериментальное подтверждение гипотезы де-Брогля. Метод Брэгга

Гипотеза де-Брогля очень быстро была блестяще оправдана экспериментально. А именно, было показано, что пучки электронов, протонов и даже целых атомов обнаруживают явления интерференции совершенно так же, как свет или рентгеновские лучи.

Рассмотрим прежде всего, каков порядок величины длины волны де-Брогля для материальных частиц. Это даст нам указание на то, какие именно экспериментальные методы должны быть применены в данном случае для обнаружения интерференции. Пусть мы имеем пучок электронов, ускоренных потенциалом  $V$  вольт; если этот потенциал невелик, так что можно ещё пользоваться формулами классической (ньютоновой) механики, то скорость электронов определяется из соотношения

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300}, \quad (133,1)$$

а длина волны де-Брогля — из соотношения

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (131,3)$$

Исключая  $v$  из (133,1) и (131,3), получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\frac{h^2}{me}} \sqrt{\frac{150}{V}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{9 \cdot 10^{-29} \cdot 4,8 \cdot 10^{-10}}} \sqrt{\frac{150}{V}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{150}{V}} \cdot 10^{-8} \text{ см} = \sqrt{\frac{150}{V}} \text{ \AA} = \frac{12,25}{\sqrt{V}} \text{ \AA}. \end{aligned} \quad (133,2)$$

Итак, мы видим, что для электронов, ускоренных потенциалом 150 В, длина волны де-Брогля равна 1 \AA; это — порядок величины длины волны мягких рентгеновских лучей.

Если скорость электронов велика, то формулы ньютоновой механики становятся неприменимыми, и нужно учитывать релятивистскую поправку на зависимость массы от скорости. В таких случаях для определения  $\lambda$  можно пользоваться следующей приближённой формулой:

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{V}} (1 - 0,489 \cdot 10^{-6} V) \text{ \AA}. \quad (133,3)$$

Для протонов длина волны де-Брогля при той же скорости

в  $\sqrt{1836}$  раз меньше. В таблице XVI приведены вычисленные значения  $\lambda$  для электронов и протонов.

Из сказанного ясно, что для обнаружения интерференции материальных частиц следует пользоваться теми же методами, которые применяются в случае рентгеновских лучей, т. е. интерференцией в кристаллической решётке. На самом деле, интерференция электронных пучков в кристаллах была обнаружена ещё до появления теории де-Брогля. В 1921—1923 гг. Дэвисон и Кансман нашли, что при рассеянии электронов тонкими металличе-

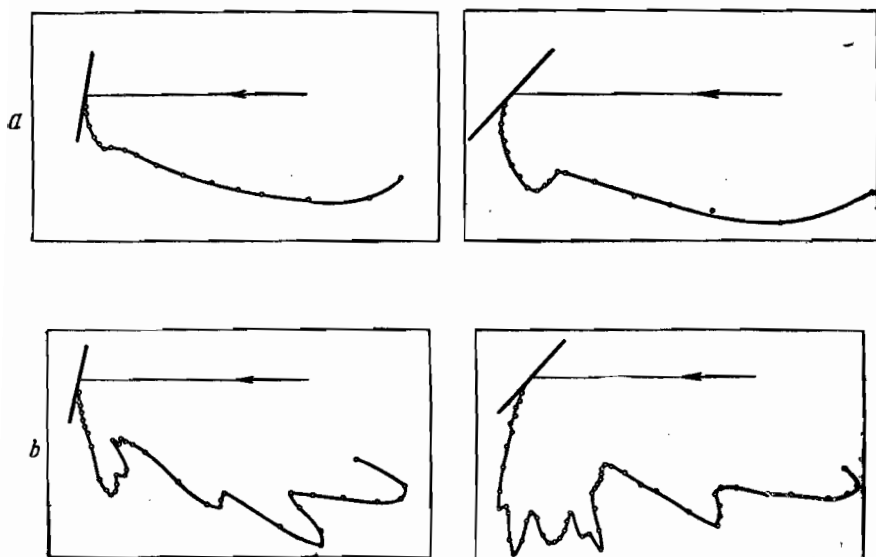


Рис. 184. Рассеяние электронов поликристаллической никелевой пластинкой: *a*) до прокаливания, *b*) после прокаливания.

скими листочками наблюдается определённо выраженная зависимость интенсивности от угла рассеяния (рис. 184). При этом положение и величина получающихся максимумов существенно зависят от скорости электронов. Случайное обстоятельство показало, что в этом явлении решающую роль играет кристаллическая структура: во время опытов с отражением от никелевых пластинок стеклянный аппарат лопнул, и никелевая пластинка окислилась. Для восстановления этой пластинки её пришлось затем долго прокалывать в вакууме и в атмосфере водорода. После этой обработки пластинка испытала рекристаллизацию: в ней образовалось некоторое количество крупных кристаллов. При повторных опытах с рассеянием электронов оказалось, что картина вследствие этой рекристаллизации резко изменилась: количество максимумов

сильно возросло, а сами максимумы сделались значительно определённые (см. рис. 184, *b*).

Т а б л и ц а X V I

Ускоряющий потенциал (в вольтах)	Длина волны (в Å)	
	электроны	протоны
$10^9$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$7,3 \cdot 10^{-6}$
$10^8$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$
$10^7$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$0,9 \cdot 10^{-4}$
$10^6$	$0,87 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$
$10^5$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$9,0 \cdot 10^{-4}$
$10^4$	0,12	$2,9 \cdot 10^{-3}$
$10^3$	0,39	$9,0 \cdot 10^{-3}$
400	0,61	$1,4 \cdot 10^{-2}$
200	0,86	$2,0 \cdot 10^{-2}$
50	1,7	$4,0 \cdot 10^{-2}$
10	3,9	$0,9 \cdot 10^{-1}$

Объяснение этой своеобразной селективности в отражении электронов было крайне затруднительно до тех пор, пока не поняли, что здесь мы имеем пример интерференционного отражения. Следующие опыты Дэвисона и Гермера подтвердили правильность этого объяснения.

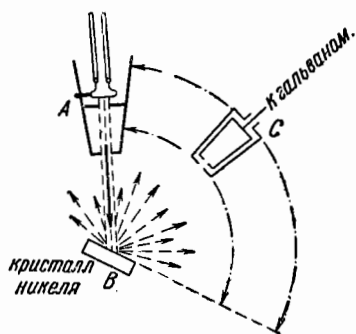


Рис. 185. Схема опытов Дэвисона и Гермера.

Параллельный пучок электронов (рис. 185) определённой скорости, получаемый при помощи «электронной пушки» *A*, направлялся на кристалл *B*; отражённые электроны улавливались коллектором *C*, соединённым с гальванометром. Коллектор мог устанавливаться под любым углом относительно падающего пучка, оставаясь всё время в одной плоскости. Измеряя силу тока коллектора при разных положениях его, можно было судить об интенсивности отражения в различных направлениях. Результат представлялся в виде полярной диаграммы, образец которой приведён на рис. 186. На радиусах-векторах, проведённых под различными углами, откладывались отрезки, пропорциональные интенсивности отражения под соответствующими углами. Оказалось, что если поместить в *B* монокристалл никеля, то при отражении наблюдается резко выраженный селективный максимум, показывающий, что электроны отражаются, следуя оптическому закону: «угол

поступает в *B* монокристалл никеля, то при отражении наблюдается резко выраженный селективный максимум, показывающий, что электроны отражаются, следуя оптическому закону: «угол

падения равен углу отражения». Тот же опыт, повторённый с поликристаллической пластинкой никеля, состоящей из множества хаотически расположенных кристалликов, не обнаружил никакой селективности.

Опыт с правильным отражением электронов от монокристалла на самом деле представляет точную аналогию интерференционного отражения рентгеновских лучей от кристалла по методу Брэгга—Вульфа (или интерференционного отражения монохроматического света от тонкой пластинки). Как известно, рентгеновские лучи испытывают отражение от кристалла только в том случае, если их длина волны и угол скольжения удовлетворяют формуле Брэгга—Вульфа (см. гл. IV, § 34)

$$n\lambda = 2d \sin \varphi. \quad (133,4)$$

Эту формулу можно использовать для обнаружения интерференции двояким образом. Во-первых, можно направить на кристалл лучи определённой длины волны  $\lambda$  и, поворачивая кристалл, убедиться, что отражения происходят только при определённых углах  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , соответствующих значениям  $n=1, 2, \dots$  в формуле Брэгга—Вульфа. Таким образом, получаются спектры первого, второго и т. д. порядков. Во-вторых, можно сохранять один и тот же угол скольжения  $\varphi$  и непрерывно менять длину волны. При этом отражения должны получаться только в тех случаях, когда

$$\lambda_n = \frac{1}{n} 2d \sin \varphi, \quad (133,5)$$

т. е. для длин волн  $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}, \lambda_3 = \frac{\lambda_1}{3}$  и т. д.

В случае рентгеновских лучей пользуются первым способом; в случае электронов—вторым, так как потоки электронов обычно имеют определённую скорость (т. е. им соответствует определённая длина волны  $\lambda = \frac{h}{mv}$ ) и эту скорость менять неизмеримо проще (изменяя ускоряющий потенциал), нежели поворачивать кристалл в вакууме.

Комбинируя формулы (133,2) и (133,5), получаем

$$\frac{12,25}{V^{1/2}} = \frac{1}{n} 2d \sin \varphi,$$

или

$$V^{1/2} = n \frac{12,25}{2d \sin \varphi}. \quad (133,6)$$

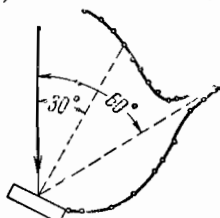


Рис. 186. Полярная диаграмма интенсивности отражения электронов от монокристалла никеля.



Таким образом, если при расположении, изображённом на рис. 185, постепенно менять ускоряющий потенциал  $V$  и каждый раз измерять силу тока коллектора (т. е. интенсивность отражения), то, откладывая затем по оси абсцисс  $V^{1/2}$ , а по оси ординат — интенсивность отражения, мы должны получить кривую с рядом равноотстоящих резких максимумов с расстоянием между максимумами, равным  $\frac{12,25}{2d \sin \varphi}$ .

На рис. 187 приведена кривая, полученная Дэвисоном и Гермером с монокристаллом никеля при определённых условиях ( $\varphi = 80^\circ$ ,  $d = 2,03 \text{ \AA}$ ).

Как видно, периодическое повторение максимумов выражено очень отчётливо. На том же чертеже стрелками показано

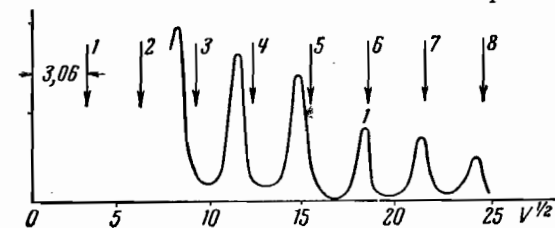


Рис. 187. Проверка формулы Брэгга—Вульфа для интерференционного отражения электронов от монокристалла никеля.

положение максимумов, вычисленное по формуле Брэгга—Вульфа (133,6). Сравнение с положением максимумов на экспериментальной кривой показывает, что для высоких значений  $n$  ( $n = 7, 8$ ) имеется точное совпадение; для более

низких  $n$  обнаруживается расхождение и притом тем большее, чем меньше  $n$ .

Поскольку это расхождение имеет систематический и закономерный характер, оно показывает, что какой-то фактор не учтён при расчёте. Этот фактор есть показатель преломления волн де-Броглия. В самом желе, при выводе формулы Брэгга—Вульфа (см. § 34) показатель преломления считается равным 1, а длина волны вне кристалла и внутри него — одинаковой. Это вполне допустимо для очень коротких длин волн. Для более длинных волн в области рентгеновских лучей, при точном определении длины волны, приходится учитывать показатель преломления и пользоваться исправленной формулой Брэгга—Вульфа, которая будет выведена ниже. То же самое должно иметь место и для волн де-Броглия. Качественно это подтверждается уже характером расхождения вычисленных и экспериментальных максимумов отражения. В самом деле, расхождение, как мы видели, уменьшается при увеличении  $n$ ; но при фиксированном угле  $\varphi$  отражения для возрастающих  $n$  согласно формуле (133,5) суть отражения соответственно убывающих длин волн  $\lambda$ ,  $\frac{\lambda}{2}$ ,  $\frac{\lambda}{3}$  и т. д.

Упражнения: 1. Вычислить длину волны, соответствующую  $\alpha$ -частице  $\text{RaC}'$  (энергия  $\alpha$ -частицы равна  $1,22 \cdot 10^{-5}$  эрг).

2. Вычислить ускоряющий потенциал, соответствующий максимуму первого порядка для интерференционного отражения от монокристалла никеля при угле между падающим и отражённым пучком в  $50^\circ$ .

### § 134. Преломление электронных волн и внутренний потенциал металла

Объяснение смещения максимумов, приведённое в конце предыдущего параграфа, количественно подтверждается вычислением внутреннего потенциала металла из наблюдений над электронной интерференцией. Вычисление это производится следующим образом. Фазовая скорость волн де-Брогя, как мы знаем, равна  $\frac{E}{p}$ . Когда электроны попадают внутрь металла, то их импульс меняется, и это именно есть причина преломления электронных потоков с корпускулярной точки зрения (см. § 128). Изменение импульса при попадании внутрь металла объясняется тем, что внутри металла имеется электрическое поле, обусловленное положительными ионами, из которых состоит кристаллическая решётка металла. Потенциал этого поля, таким образом, положителен. Если мы теперь представим себе прямую, проходящую через ряд положительных ионов металла, то при перемещении вдоль этой прямой потенциал, очевидно, должен меняться периодически, так как ионы расположены на равных расстояниях. Мы можем, однако, приближённо заменить этот периодически меняющийся потенциал некоторым средним потенциалом, который и называется внутренним потенциалом металла.

Фазовая скорость электронных волн вне металла равна

$$c'_a = \frac{E}{p_a} = \frac{E}{mv_a} = \frac{E}{\sqrt{m^2 v_a^2}} = \frac{E}{\sqrt{2mE}},$$

где  $E$  — полная энергия электронов. Если потенциальная энергия электрона внутри металла есть  $U$ , то импульс внутри металла будет  $p_i = \sqrt{2m(E - U)}$ , а фазовая скорость электронных волн

$$c_i = \frac{E}{\sqrt{2m(E - U)}}.$$

Показатель преломления  $\mu$  по определению равен

$$\mu = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} = \frac{c_a}{c_i} = \sqrt{\frac{E - U}{E}} = \frac{\lambda_a}{\lambda_i}, \quad (134,1)$$

где  $\varphi$  и  $\varphi'$  — углы скольжения, т. е. дополнения до  $\frac{\pi}{2}$  к углам падения и преломления.

Теперь нужно принять во внимание, что внутренний потенциал металла  $V_0$  положителен, а заряд электрона отрицателен; поэтому потенциальная энергия  $U$  — отрицательна:

$$U = -eV_0;$$

полная энергия  $E$  выражается, как обычно, через внешний ускоряющий потенциал

$$E = eV.$$

Принимая всё это во внимание, получаем из (134,1)

$$\mu = \frac{\sqrt{V+V_0}}{\sqrt{V}} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}. \quad (134,2)$$

Мы получили таким образом выражение показателя преломления через внутренний потенциал  $V_0$ .

Выведем теперь формулу Брэгга—Вульфа для случая, когда  $\mu \neq 1$ . Рассмотрим два интерферирующих луча 1 и 2 (рис. 188). Вследствие преломления внутренний угол скольжения  $\varphi'$  не равен внешнему  $\varphi$ . Разность хода лучей 1 и 2, очевидно, равна

$$2d \sin \varphi' = 2d \sqrt{1 - \cos^2 \varphi'}$$

или, принимая во внимание, что

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} = \mu,$$

$$2d \sin \varphi' = 2d \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\mu^2}};$$

Рис. 188. К выводу формулы Брэгга—Вульфа с учётом показателя преломления.

Условие максимума при интерференции теперь даёт

$$2d \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\mu^2}} = n\lambda_t = n \frac{\lambda_a}{\mu}$$

[см. (134,1)] или

$$2d \sqrt{\mu^2 - \cos^2 \varphi} = n\lambda_a. \quad (134,3)$$

Это и есть формула Брэгга—Вульфа для  $\mu \neq 1$ .

При помощи этой формулы можно вычислить внутренний потенциал металла следующим образом. Подставляя в (134,3)

$\lambda_a = \sqrt{\frac{150}{V}}$ , получаем

$$4d^2 (\mu^2 - \cos^2 \varphi) = n^2 \frac{150}{V},$$

и, заменяя здесь  $\mu^2$  через  $1 + \frac{V_0}{V^2}$  по формуле (134,2), находим

$$V_0 = n^2 \frac{150}{4d^2} - V \sin^2 \varphi. \quad (134,4)$$

Итак, зная ускоряющий потенциал  $V$  и измерив угол скольжения  $\varphi$ , можно вычислить  $V_0$  для кристалла с известной величиной  $d$ .

Таким путём получаются, например, значения  $V_0$ , приведённые в таблице XVII. Как видно, эти значения достаточно постоянны. Они согласуются со значениями, вычисленными из теории металлов.

Т а б л и ц а X V I I

Металл	Ускоряющий потенциал (в вольтах)	$\lambda$ в $\text{Å}$	$n$	$\mu$	$V_0$ (вольт)
Ni	67	1,49	3	1,12	17
	142	1,03	4	1,05	16
	213	0,83	5	1,03	14
Pb	65	1,52	3	1,10	14
	125	1,09	4	1,06	15
	208	0,84	5	1,03	13
Ag	48	1,77	3	1,15	15
	96	1,25	4	1,08	15
	166	0,95	5	1,04	13

У п р а ж н е н и я: 1. Вычислить показатель преломления платины для пучка электронов с энергией 240 eV, падающего на поверхность платины под углом  $30^\circ$ . Внутренний потенциал платины равен 12 V, востоянная решётки—3,9 Å.

2. При данных предыдущей задачи вычислить угол преломления пучка электронов.

### § 135. Экспериментальное подтверждение гипотезы де-Брогя. Методы Лауэ и Дебая—Шеррера

Интерференция рентгеновских лучей в кристаллах осуществляется не только по методу Брэгга, но также и двумя другими главными методами: методом Лауэ и методом Дебая—Шеррера. Оба эти метода могут быть применены и для осуществления интерференции с волнами де-Брогя. Метод Лауэ, при помощи которого исторически впервые была осуществлена интерференция рентгеновских лучей в кристаллах, как известно, заключается в том, что узкий пучок рентгеновских лучей, имеющих сплошной

спектр, пропускается через кристалл. Получающиеся при этом интерференционные пучки фиксируются на фотопластинке в виде системы симметричных пятен (см. § 33).

Причина, вследствие которой для осуществления опыта Лауэ необходимо, чтобы рентгеновские лучи имели сплошной спектр, подробно разъяснена в § 33. Однако в случае электронов получение пучка с набором скоростей, распределённых непрерывным образом, экспериментально невозможно: электроны, выходящие из электронной пушки, имеют одну и ту же скорость или, точнее

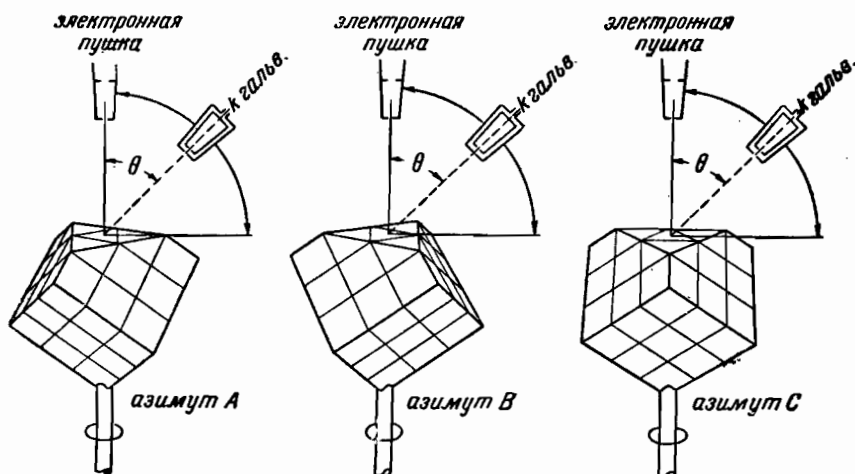


Рис. 189. Схема экспериментального исследования диффракции электронов по методу Лауэ.

говоря, обладают распределением скоростей в узких пределах. Поэтому, направляя электронный пучок на кристалл, мы, вообще говоря, не удовлетворим условиям, необходимым для осуществления интерференции Лауэ. В этом случае приходится шаг за шагом отыскивать условия, при которых возникает максимум, соответствующий определённому интерференционному пучку, непрерывно меняя скорость электронов (т. е. ускоряющий потенциал, наложенный на пушку) и одновременно меняя положение коллектора, принимающего отражённые от кристалла электроны.

Практически опыт с электронами, аналогичный опыту Лауэ, был поставлен Дэвисоном и Гермером следующим образом. Монокристалл никеля, принадлежащий к кубической системе, сошлифовывался, как показано на рис. 189 [параллельно плоскостям с кристаллографическими индексами (111)]. На рис. 189 показаны три характерных положения сошлифованного таким образом кристалла. В одном из них (азимут A) плоскость, проходящая через пучок и ось коллектора, проходит через одну из вершин треуголь-

ника; при другом (азимут  $B$ ) она делит сторону треугольника пополам и при третьем (азимут  $C$ ) она параллельна стороне треугольника.

Различие между условиями опыта в этих трёх азимутах видно из рис. 190. Сошлифованная поверхность кристалла покрыта правильными рядами атомов. Её можно рассматривать как совокупность линейных решёток; при этом постоянная решётки в различных азимутах неодинакова: например, в азимуте  $A$  она равна  $2,15 \text{ \AA}$ , а в азимуте  $C$  —  $1,24 \text{ \AA}$ .

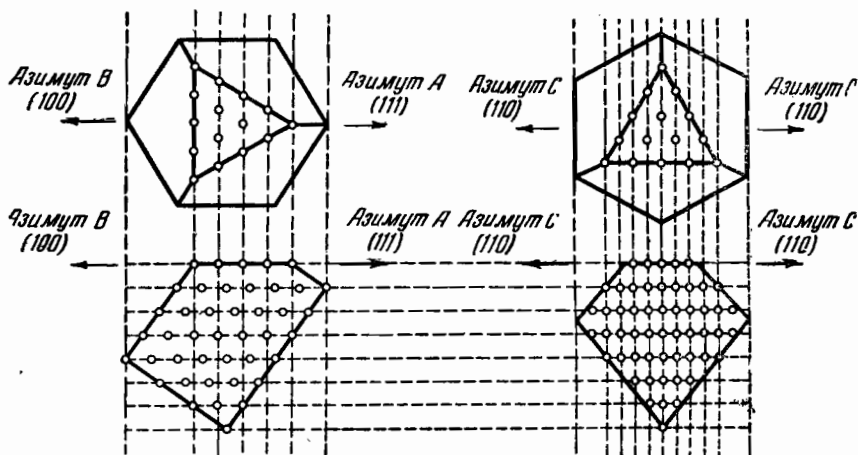


Рис. 190. Расположение атомов в кристалле никеля в различных проекциях.

Экспериментальная установка позволяла вращать кристалл около вертикальной оси и, кроме того, перемещать коллектор в любое положение около вертикальной оси.

В опыте Дэвисона и Гермера пучок электронов направлялся перпендикулярно к сошлифованной плоскости и с помощью коллектора измерялась интенсивность отражения электронов под различными углами при фиксированном положении кристалла (в одном из трёх указанных азимутов). Результаты такого рода измерений иллюстрируются на рис. 191 серией полярных диаграмм интенсивности отражения в азимуте  $A$  при различных скоростях электронов (т. е. при разной длине волн де-Брогля). Здесь видно, что при скорости электронов в  $44 \text{ eV}$  максимум под углом  $50^\circ$  едва намечается (рис. 191,  $a$ ); при  $54 \text{ eV}$  он достигает полного развития и при дальнейшем увеличении скорости вновь ослабляется, почти исчезая при  $68 \text{ eV}$ . Далее опыт видоизменялся следующим образом: положение коллектора и скорость электронов сохранялись неизменными (например, соответствующими данным рис. 191,  $c$ ), но кристалл постепенно поворачивался около вертикальной оси

и каждый раз измерялся соответствующий ток на коллектор. Из рис. 189 видно, что вследствие симметрии, при повороте кристалла, он трижды должен совместиться с исходным положением.

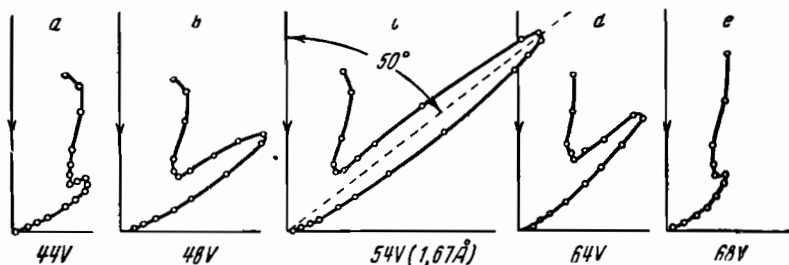


Рис. 191. Нарастание и исчезновение интерференционного пика в азимуте  $A$ .

Поэтому резкий максимум должен повторяться через каждые  $120^\circ$ . Рис. 192 показывает, что это наблюдается на самом деле. Небольшие горбы, видные на этом рисунке между каждыми двумя

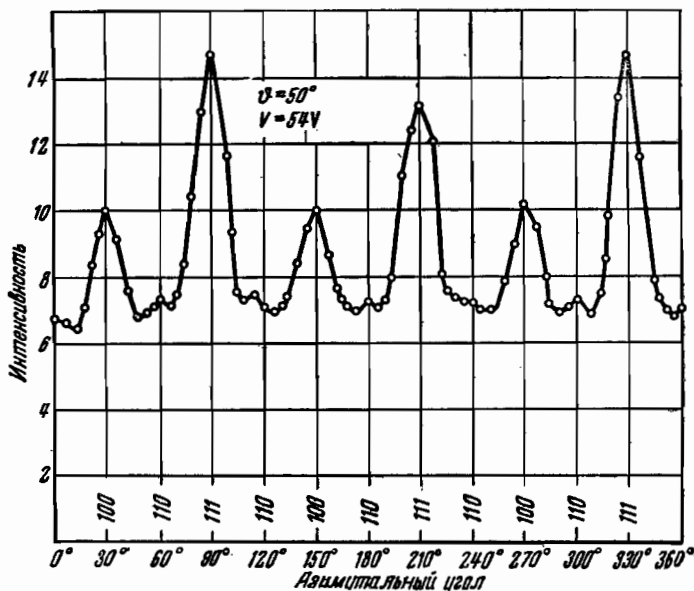


Рис. 192. Азимутальное распределение интенсивности при повороте кристалла.

резкими максимумами, представляют собою едва намечающиеся максимумы для электронов в 54 eV в азимутах  $B$  и  $C$ .

Наконец, и третий метод изучения интерференции рентгеновских лучей—метод Дебая—Шеррера—также был применён для

доказательства существования интерференции электронных пучков. Если тонкий пучок рентгеновских лучей проходит сквозь мелкокристаллический порошок или через тонкую металлическую пластинку, представляющую собою агрегат микрокристалликов, то среди них всегда найдутся такие, которые расположены к падающему пучку под углом, удовлетворяющим соотношению Брэгга—Вульфа. От таких кристалликов рентгеновские лучи испытывают отражения, причём все отражённые лучи для данного значения  $\varphi$  в формуле Брэгга—Вульфа пойдут по поверхности конуса. Поставив на пути рассеянных лучей фотографическую пластинку,

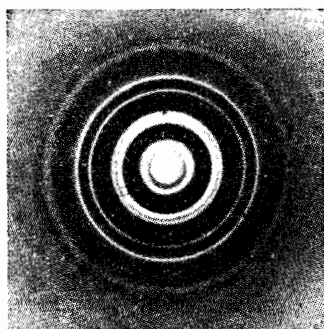


Рис. 193. Электронограмма тонких листков золота.

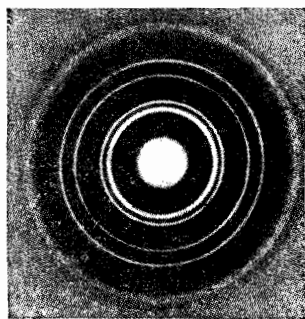


Рис. 194. Электронограмма тонких листков меди.

расположенную перпендикулярно к направлению первичного пучка, мы получим на ней ряд колец. Совершенно такая же картина получается, если через тонкую металлическую плёнку пропускать пучок электронов: рассеянные электроны дают на фотографической пластинке систему интерференционных колец.

Опыты с получением электронограмм дебаевского типа были впервые удачно поставлены Г. П. Томсоном с быстрыми электронами (17 500—56 500 eV) и П. С. Тартаковским—с относительно медленными электронами (до 1700 eV).

На рис. 193—194 приведено два снимка, полученных с листочками золота и меди. Как видно, в том и другом случаях получаются типичные интерференционные кольца. Г. П. Томсон очень простым способом показал, что эти кольца образуются самими рассеянными электронами, а не вторичными рентгеновскими лучами: при включении магнитного поля вся интерференционная картина смещается и искажается, в то время как интерференционная картина, получаемая с рентгеновскими лучами, конечно, остаётся неизменной.



Количественная проверка может быть произведена следующим образом. Из геометрических соображений легко показать\*), что для данного металлического листка и при неизменном расстоянии от листка до фотопластинки между радиусом дифракционного кольца  $r$  и длиной волны  $\lambda$  должно иметь место соотношение

$$\frac{r}{\lambda} = \text{const.} \quad (135,1)$$

Так как в этих опытах приходится пользоваться электронами, энергии которых измеряются килоэлектрон-вольтами (вследствие сильного поглощения медленных электронов металлическими листочками), то простое выражение для длины волны  $\lambda = 12,25 V^{-1/2}$  становится неточным, и нужно пользоваться формулой с поправкой на релятивистские эффекты

$$\lambda = \frac{12,25}{\sqrt{V}} (1 - 0,489 \cdot 10^{-6}V). \quad (133,3)$$

Подставляя это выражение в (135,1), получаем

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{rV^{1/2}}{12,25 (1 - 0,489 \cdot 10^{-6}V)} \approx \frac{rV^{1/2}}{12,25} (1 + 0,489 \cdot 10^{-6}V) = \text{const.} \quad (135,2)$$

В таблице XVIII приведены данные опыта с золотыми листочками. Как видно из третьего столбца таблицы, требуемое постоянство выполняется удовлетворительно.

Т а б л и ц а XVIII

$V$ (вольт)	$r$ (см)	$rV^{1/2}(1 + 0,489 \cdot 10^{-6}V)$
24 600	2,50	398
31 800	2,15	390
39 400	2,0	404
45 600	1,86	405
54 300	1,63	388

Наконец, можно вычислить постоянную решетки различных кристаллов из дебай-шерреровских снимков с электронными лучами и сравнить с результатами, полученными для тех же кристаллов при помощи рентгеновских лучей. В том и другом случаях получаются цифры, весьма удовлетворительно между собою совпадающие (см., например, таблицу XIX). В настоящее время

\*) Вывод см. в книге: П. С. Т а р т а к о в с к и й, Экспериментальные основания волновой теории материи, стр. 51, ГТТИ, 1932.

на основе опытов с интерференцией электронных пучков развился мощный метод электронографического анализа, по своей точности и широте практических применений не уступающий рентгенографическому анализу, а в некоторых случаях даже более удобный.

Таблица XIX

Металл	Постоянная решётки ( $a_{\Delta}^{\circ}$ )	
	из интерференции электронов	из интерференции рентгеновских лучей
Al	4,035	4,063
Au	3,99—4,20	4,06
Pt	3,89	3,91
Pb	4,99	4,92
Fe	2,85	2,86

У п р а ж н е н и е. Пучок электронов с энергией в 30 keV проходит через тонкий листок алюминия. Допуская применимость формулы Брэгга—Вульфа, вычислить угол отклонения для интерференционной картины первого порядка. Постоянную решётки Al взять из таблицы XIX.

### § 136. Интерференционные явления с молекулярными пучками

Согласно гипотезе де-Брогля волновыми свойствами должны обладать не только электроны, но и любые материальные частицы, т. е. также атомы и ионы. Так как по формуле де-Брогля длина волны  $\lambda = \frac{h}{mv}$  обратно пропорциональна массе, то уже для самых лёгких атомов  $\lambda$  будет очень мала. Поэтому экспериментальное осуществление интерференционных явлений для атомов связано с большими трудностями. Значительное усовершенствование техники работы с так называемыми молекулярными лучами, т. е. направленными пучками нейтральных атомов или молекул, позволило и в этом случае отчётливо обнаружить интерференционные явления. На рис. 195 приведены кривые интенсивности отражения атомов гелия от кристалла фтористого лития, а на рис. 196—такие же кривые для отражения молекул  $H_2$ . В том и другом случаях виден ряд интерференционных максимумов.

Верхняя кривая рис. 196 снята при температуре 580° К, а нижняя кривая — при температуре 290° К. В первом случае боковые максимумы лежат ближе к центральному, как этого и следовало ожидать, принимая во внимание, что повышение температуры означает увеличение скорости атомов и, следовательно, уменьшение длины волны де-Брогля. Расчёт положения максимумов даёт

результаты, очень хорошо согласующиеся с экспериментальными. Таким образом, опыты с молекулярными лучами не только качественно подтверждают существование волн материи, но и количественно оправдывают формулу де-Брогля и для тяжёлых частиц.

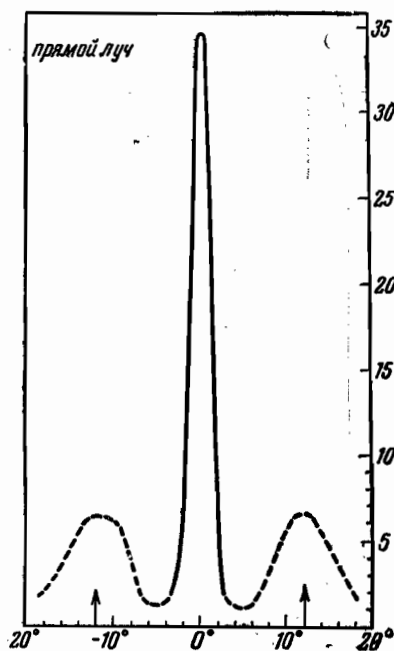


Рис. 195. Диффракция атомов гелия от кристалла фтористого лития.

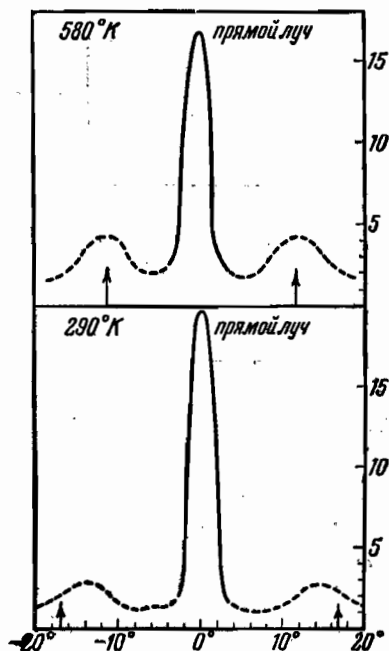


Рис. 196. Диффракция молекул водорода от кристалла фтористого лития.

С особенной наглядностью существование волновых свойств у тяжёлых частиц и правильность формулы де-Брогля показали недавние опыты с диффракцией нейтронов. Эти опыты будут подробно изложены во втором томе.

### § 137. Волновой пакет и частица

В четырёх последних параграфах мы убедились в том, что интерференционные опыты, поставленные с такими «частицами», как электроны или даже целые атомы, столь же хорошо свидетельствуют в пользу волновой природы этих «частиц», как и соответствующие опыты со светом. Мы вновь встречаемся с двойственностью, которую впервые обнаружили у света. Однако на первых порах развития квантовой механики была сделана заманчивая попытка разрешить противоречие волны-частицы, рассматривая

частицы как *волновые пакеты*. Основания для этого были следующие. Электрон или другая материальная частица не может быть, конечно, плоской волной, так как волна безгранична, а частица локализована в пространстве и во времени, т. е. в определённый момент времени занимает определённое место в пространстве. Мы видели, однако (§ 126), что из плоских волн, подбирая соответственным образом их волновые векторы  $k$ , можно строить волновые пакеты, имеющие сколь угодно малое протяжение. Нельзя ли рассматривать частицу как волновой пакет? Подобная гипотеза, казалось бы, находит себе подтверждение в том замечательном свойстве волн де-Брогля, что их групповая скорость, т. е. именно та скорость, с которой перемещается максимум пакета, как раз равна скорости частицы  $v$

$$g = v. \quad (132,2)$$

Сколь ни привлекательной может показаться эта простая идея, при ближайшем рассмотрении она оказывается совершенно неправильной. Решающее возражение заключается в следующем. Те благоприятные свойства пакета, которые мы нашли в § 126, — именно его устойчивость и движение как целого с групповой скоростью, не дают полной картины свойств пакета. Они нами на самом деле были получены лишь в качестве первого приближения, так как при рассмотрении движения пакета в § 126 мы воспользовались приближённым соотношением между  $v$  и  $k$

$$v(k) = v(k_0) + (k - k_0) \left( \frac{dv}{dk} \right)_0,$$

отбросив все последующие члены разложения. Если же провести вычисление точно, то получается несколько иной результат, а именно, оказывается, что, хотя максимум пакета перемещается со скоростью  $\frac{dv}{dk}$ , равной для волн де-Брогля  $v$ , самый пакет при движении в диспергирующей среде не сохраняет своей формы и размеров, но постепенно расширяется — расплывается.

Причину такого расплывания нетрудно понять из следующих качественных соображений. Положим, что в некоторый определённый момент путём суперпозиции плоских волн образован пакет. Для образования его необходимо накладывать волны с длинами волн или, что то же, — волновыми числами  $k$ , непрерывно изменяющимися в некотором интервале  $\pm \Delta k$ . Если среда не имеет дисперсии, то все эти волны распространяются с одной и той же скоростью, и пакет сохраняется. Но если дисперсия имеется, то образующие пакет плоские волны будут распространяться с различной фазовой скоростью: более быстрые будут забегать вперёд, а более медленные — отставать. Вследствие этого подходящие

для образования пакета фазовые соотношения между плоскими волнами уже в следующий момент нарушатся, и пакет будет растягиваться—расплываться. Быстрота этого расплывания характеризуется разницей групповой скорости у самых быстрых и самых медленных волн, т. е. величиной  $\frac{d^2 v}{dk^2} \Delta k$ , но член, содержащий  $\frac{d^2 v}{dk^2}$ , мы как раз отбросили при первом рассмотрении пакетов.

Довольно громоздкие вычисления, которые мы здесь не приводим\*), показывают, что если образовать из волн де-Брогля пакет, имеющий в момент  $t=0$  форму гауссовой кривой вероятности

$$u(x, 0) = C e^{-\frac{x^2}{2b^2}},$$

где  $u$  — амплитуда пакета в точке с координатой  $x$ , а величина  $b$  характеризует полуширину пакета в момент  $t=0$ , то протяжение пакета удваивается через промежуток времени, выражаемый формулой

$$t = 2\pi \sqrt{3} \frac{b^3 m}{h},$$

где  $m$  — масса частицы и  $h$  — постоянная Планка. Для частицы с массой  $m=1$  г, занимающей протяжение 2 мм ( $b=0,1$  см), соответствующий пакет удваивается через  $6 \cdot 10^{17}$  лет. Но для частицы с массой электрона ( $m=0,9 \cdot 10^{-27}$  г) при  $b \sim 10^{-12}$  см  $t \approx 1,6 \cdot 10^{-28}$  сек., т. е. пакет, соответствующий электрону, расплывался бы мгновенно, что, конечно, противоречит элементарнейшим наблюдениям.

### § 138. Статистическое истолкование волн де-Брогля

В предыдущем параграфе мы видели, что попытка рассматривать частицы как волновые пакеты потерпела неудачу: пакеты расплываются и исчезают, а «частицы» этим свойством не обладают.

Существуют, кроме того, и общие соображения, указывающие на то, что микроскопические частицы нельзя рассматривать как пакеты волн. Необходимым признаком элементарных частиц является их неделимость. Мы утверждаем, что отрицательное электричество состоит из электронов потому, что в процессе перезарядки может быть передано количество электричества, равное заряду либо одного, либо нескольких электронов, но во всяком случае не менее одного. Точно так же анализ законов фотоэффек-

\*) Интересующихся подобными вычислениями мы отсылаем к книгам: Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, стр. 131, Гостехиздат, 1949; Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн в ионосфере, § 11, Гостехиздат, 1947.

та приводит к выводу о существовании фотонов, так как оказывается, что монохроматический свет частоты  $\nu$  переносит энергию и передаёт её в процессе поглощения только целыми фотонами  $h\nu$ , но не долями фотона.

Этим свойством неделимости волны не обладают. На границе двух сред с различной фазовой скоростью волна разделяется на отражённую и преломлённую, при прохождении через кристалл она разбивается на ряд диффракционных пучков и т. д. Если бы мы стали рассматривать электрон как агрегат волн, то, например, при диффракции очень слабого пучка, когда электроны проходят один за другим через кристалл, каждый диффракционный пучок должен бы нести только часть электрона, чего на самом деле нет.

Если, однако, целостность частиц при таких процессах, как отражение, преломление, диффракция, должна сохраняться, то мы можем утверждать, что при падении на поверхность раздела двух сред частица *либо* отразится, *либо* пройдёт во вторую среду. Но в таком случае связь между волнами и частицами может быть истолкована только статистически, а именно, следующим образом: квадрат амплитуды волны в данном месте, измеряющий её интенсивность, есть мера *вероятности* найти частицу в этом месте.

Для того чтобы пояснить это истолкование, рассмотрим типичный интерференционный опыт: плоская волна падает на непрозрачный экран, в котором проделаны два отверстия  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 197). В таком случае на достаточно удалённом воспринимающем экране (фотопластинка, флуоресцирующий экран) возникает интерференционная картина, состоящая из последовательности светлых и тёмных полос. Объяснение этой картины с волновой точки зрения общеизвестно: надо представить себе, что слева на экран  $I$  падает плоская волна; отверстия  $S_1$  и  $S_2$  становятся при этом центрами двух сферических гюйгеновых волн, распространяющихся вправо от экрана и интерферирующих между собой. В том месте экрана  $II$ , где разность хода этих волн равна нулю или чётному числу полуволн, мы получим максимальную амплитуду и вместе с тем максимум светлой полосы; там же, где разность хода равна нечётному числу полуволн, волны при интерференции гасят друг друга, амплитуда равна нулю, мы получаем тёмную полосу.

Как можно понять возникновение этих полос, рассматривая электроны как неделимые «частицы»? Представим себе, что

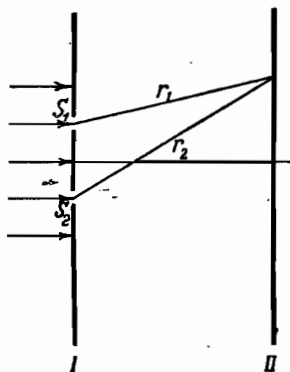


Рис. 197.

падающий пучок электронов очень слаб. Опыт показывает, что характер интерференционной картины не зависит от интенсивности. Допустим, что фотопластинка может регистрировать попадание отдельных электронов\*). В таком случае при прохождении слабого потока электронов через экран  $I$  на фотопластинке сначала появились бы хаотически разбросанные отдельные тёмные точки — следы попадания электронов. Можно было бы только заметить, что число этих пятнышек, т. е. число попаданий электронов, больше в тех местах, где должны быть максимумы интерференционной картины. При достаточно продолжительном эксперименте эти отдельные следы должны образовать интерференционные полосы. Таким образом, светлые интерференционные полосы — это места, куда электроны попадают чаще всего; тёмные полосы — это места, куда они вовсе не попадают.

Если теперь применить эти соображения не к собранию большого числа электронов, но к отдельным электронам, то можно также сказать, что вероятность нахождения электрона максимальна там, где амплитуда волнового поля имеет максимальную величину и равна нулю там, где амплитуда равна нулю. Но так как амплитуда может быть и положительной, и отрицательной, а вероятность есть всегда положительное число, то необходимо характеризовать вероятность *квадратом* амплитуды.

Условившись в таком статистическом толковании волн де-Брогля, мы можем сохранить и волновые пакеты в качестве удобного метода рассуждения. Построим волновой пакет так, чтобы он занимал ту область пространства, где находится электрон в некоторый определённый момент, и предоставим пакет самому себе. Если мы теперь найдём форму пакета в какой-нибудь следующей момент времени  $t$ , то квадрат его амплитуды в том или ином месте будет пропорционален вероятности найти электрон в этом месте в момент  $t$ .

### § 139. Соотношения неопределённости

Статистическое истолкование волн де-Брогля, рассмотренное в предыдущем параграфе, позволяет связывать результаты, полученные теоретическим путём, с экспериментальными фактами. Однако оно оставляет в стороне вопрос о природе микроскопических объектов: электронов, фотонов и т. п. Основное затруднение состоит здесь в том, что для описания экспериментальных фактов нам приходится пользоваться то картиной частиц, то картиной волн. Одни и те же объекты — электроны — в опыте с камерой Вильсона оставляют резко очерченные следы, т. е.

\*) В дальнейшем мы часто будем для определённости говорить об электронах, имея в виду любые микроскопические частицы.

ведут себя как снаряды, движущиеся по определённым траекториям, а в опыте с прохождением через микрокристаллические листочки дают светлые и тёмные интерференционные кольца, т. е. ведут себя как волны, подчиняющиеся принципу суперпозиции. Поскольку, однако, свойства частиц и волн не только слишком различны, но и во многих отношениях исключают друг друга, а электроны, несомненно, имеют единую природу, приходится заключить, что электроны на самом деле не являются ни тем, ни другим, так что картины волн и частиц в одних случаях подходят, а в других оказываются непригодными. Свойства микрочастиц настолько своеобразны, поведение их в такой степени не похоже на поведение окружающих нас в обыденной жизни макроскопических тел, что у нас нет для них подходящих образов. Однако ясно, что, поскольку мы вынуждены для описания *одних и тех же объектов* пользоваться и волновой, и корпускулярной картинами, мы уже не можем приписывать этим объектам *все* свойства частиц и *все* свойства волн. Например, наличие волновых свойств у электронов неизбежно должно внести какие-то ограничения в применимости к этим микрочастицам понятий, характеризующих частицу в классической механике.

Мы теперь и посмотрим, каковы же эти ограничения. В классической механике частицы имеют следующие основные свойства: всякая частица в любой момент времени занимает строго определённое место в пространстве (причём под «местом» разумеются координаты центра тяжести) и обладает определённым импульсом [для частиц с массой покоя, не равной нулю ( $p = mv$ ), определённом импульсу соответствует определённая скорость  $v$ ]. Возможность одновременного точного определения положения и скорости является столь характерным свойством макроскопических частиц, что в классической физике «состояние» системы частиц полностью характеризуется совокупностью всех координат и всех соответствующих им импульсов. Мы сейчас увидим, что наличие у электронов волновых свойств вносит существенное ограничение в возможность *такого* описания состояния системы микрочастиц.

Допустим, в самом деле, что нам известно положение микрочастицы на оси  $x$  с некоторой неточностью  $\Delta x$ , так что можно утверждать, что частица находится где-то между  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$ . Теперь мы вспомним, что все факты атомной физики могут быть описаны также и с помощью картины волн (см. §§ 128—130). Тот факт, что положение частицы известно лишь с некоторой неточностью  $\Delta x$ , описывается в волновой картине, очевидно, тем, что амплитуда волновой функции отлична от нуля лишь на протяжении отрезка, приблизительно равного  $\Delta x$ . Такая функция, как мы знаем, может быть построена путём суперпозиции гар-



монических волн, но сама она, разумеется, отнюдь не является гармонической волной. Ей поэтому нельзя приписать определённых значений  $\nu$  и  $k$ ; ограниченная в пространстве волновая функция представляет собой *волновой пакет*, для построения которого путём суперпозиции синусоидальных волн следует складывать волны с непрерывно меняющимися в пределах определённого интервала  $\Delta k$  значениями волнового вектора  $k$ . Соотношение между протяжением пакета  $\Delta x$  и интервалом  $\Delta k$ , как мы знаем (§ 126), даётся условием

$$\Delta x \Delta k_x \geq 1. \quad (126,5)$$

Умножая обе части этого неравенства на постоянную Планка  $h$  и замечая, что согласно постулату де-Броглия  $hk_x = p_x$ , получаем

$$\Delta x \Delta p_x \geq h. \quad (139,1)$$

Из этого соотношения следует, что  $x$  и  $p_x$  не могут одновременно иметь определённых значений: если значение  $x$  определено, т. е. если  $\Delta x = 0$ , то  $\Delta p_x \rightarrow \infty$ , а значит,  $p_x$  не имеет никакого определённого значения, и наоборот. Если же  $x$  и  $p_x$  неопределённы в известных пределах  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$ , то между этими неопределённостями имеет место соотношение (138,1), из которого следует, что чем меньше  $\Delta x$ , т. е. чем точнее локализовано положение частицы, тем больше  $\Delta p_x$ , т. е. тем больше неопределённость соответствующей составляющей импульса.

Для двух других координат получим аналогичные неравенства [см. формулы (126,6)]

$$\Delta y \Delta p_y \geq h, \quad (139,1')$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq h. \quad (139,1'')$$

Эти неравенства называются соотношениями неопределённости Гейзенберга. Они представляют собой именно то ограничение применимости к микрочастицам классических понятий, о котором говорилось в начале этого параграфа. В самом деле, для макроскопической частицы, как уже было сказано, характерна возможность точно определить в каждый момент времени положение и импульс. Соотношение (139,1) показывает, что такое описание состояния теряет смысл для частицы микрокосмической. Это следует из того, что в силу соотношения (139,1)  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  не могут быть равны нулю одновременно [аналогичное имеет место для  $\Delta y$  и  $\Delta z$  и соответственно для  $\Delta p_y$  и  $\Delta p_z$  в силу соотношений (139,1') и (139,1'')], так как в этом случае левая часть (139,1) оказалась бы равной нулю, а правая сохранила бы конечное значение  $h$ . Из этого вытекает, что не имеет смысла задаваться вопросом об одновременных точных значениях  $x$  и  $p_x$ , так как таких значений у микрочастицы просто не существует.

Необходимо отчётливо уяснить себе, что столь странная особенность есть неизбежное следствие того, что электроны и другие микрочастицы наряду с корпускулярными свойствами проявляют также и свойства волновые. Наличие корпускулярных свойств требует, чтобы частицу можно было локализовать в пространстве и во времени. Но даже приближённая локализация (конечное значение  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ) ведёт к тому, что соответствующее волновое поле должно иметь ограниченное протяжение. А в таком случае на сцену выступает факт, имеющий место для любого волнового поля: *никаким способом нельзя построить волновое поле так, чтобы оно имело ограниченное протяжение и вместе с тем представляло собой волну с определённым значением  $\lambda$*  (т. е. с определённым значением  $k$ ). Возможно либо одно, либо другое: либо гармоническая волна, характеризующаяся определённым значением длины волны  $\lambda$ , но такая волна безгранична, а значит, не может быть и речи ни о какой локализации, либо ограниченное волновое поле, но тогда нет волны с определённым значением  $\lambda$ , а имеется волновой пакет, который разлагается в сплошной спектр, где  $\lambda$  непрерывно меняется в определённом интервале, тем более широком, чем уже пакет, т. е. чем точнее локализация.

### § 140. Определение места и импульса микрочастицы

В предыдущем параграфе мы вывели соотношения неопределённости, исходя из двойственной природы электрона. Обратимся теперь к рассмотрению экспериментов, с помощью которых можно определять координаты электрона и его импульс. При этом, как и в выводе предыдущего параграфа, мы естественно также будем руководствоваться твёрдо установленным на опыте фактом — двойственной, корпускулярно-волновой природой микрочастиц и на каждом этапе наших дальнейших рассуждений будем следить за тем, какие ограничения в применимость к микрочастицам способа описания, пригодного для макроскопических тел, вносит наличие волновых свойств у микрочастиц.

Обсуждение экспериментов, предназначенных для определения координаты и импульса микрочастицы, помимо наглядности, важно и по другой причине.

В самом деле, если бы оказалось, что теория приводит к выводу, что нельзя говорить об одновременных точных значениях координаты и импульса микрочастицы, но можно было бы указать эксперимент, — хотя бы неосуществимый вследствие *технических затруднений*, — с помощью которого обе эти величины были бы доступны для измерения с любой степенью точности, то это бы означало, что в теории имеется внутреннее противоречие.

Рассмотрим экспериментальное устройство, позволяющее прямым путём определить положение электрона. Пусть на экран со щелью  $AB$  шириной  $\Delta x$ , который мы дальше будем называть «диафрагмой», слева падает электрон в направлении, перпендикулярном к плоскости диафрагмы (рис. 198). Направим ось  $x$  параллельно диафрагме, а ось  $y$  — перпендикулярно к ней. Если мы обнаружим электрон справа от диафрагмы, например, по сцинтилляции, которую он вызывает на флуоресцирующем экране  $CD$ , или по пятну на фотопластинке, то можно утверждать, что электрон прошёл через щель  $AB$ . В этом случае «место электрона» в момент прохождения через щель, очевидно, можно

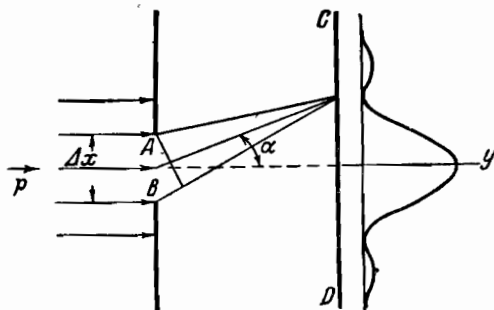


Рис. 198. Определение положения электрона при помощи экрана со щелью.

определить как положение щели относительно остальных частей прибора. В самом деле, если диафрагма достаточно массивна и жёстко скреплена с остальными частями прибора, то положение щели в диафрагме тем самым будет фиксировано относительно этой системы отсчёта, а следовательно, положение электрона в момент прохождения через щель будет известно с неточностью  $\Delta x$ , равной ширине щели. Очевидно, что, сужая щель, мы можем определить таким путём положение электрона со всё большей степенью точности. На первый взгляд может показаться, что импульс известен нам также с полной определённой. В самом деле, поскольку направление полёта электрона слева от диафрагмы перпендикулярно к плоскости диафрагмы, то  $x$ -составляющая импульса слева от экрана равна нулю, а  $y$ -составляющая равна, например,  $p$ , т. е. и импульс имеет определённое значение. Однако при прохождении через щель плоская волна де-Броглия, представляющая движение свободного электрона, испытывает дифракцию. А это означает следующее: представим себе вместо одного электрона параллельный поток их, проходящий через диафрагму в направлении оси  $y$ . Тогда на фотопластинке мы получим дифракционную картину, состоящую из размытого главного максимума, расположенного симметрично относительно оси  $y$ , и меньших максимумов более высоких порядков по обе стороны от главного максимума (см. кривую в правой части рис. 198). Из вида дифракционной картины мы заключаем, что после прохождения через щель большинство электронов продолжает двигаться в первоначальном направлении, т. е. сохра-

няет значение  $p_x = 0$ . Но имеются также электроны, которые изменяют своё направление и попадают в различные точки фотопластинки с вероятностью, соответствующей ходу кривой в правой части рис. 198.

Обратим теперь внимание на следующее важное обстоятельство. Описанная выше диффракционная картина возникает тогда, когда через щель одновременно проходит большое число электронов. Можно было бы подумать, что участие большого числа электронов необходимо для диффракции, а отдельный электрон ведет себя как-нибудь иначе. Однако это не так. Из оптики уже давно известно, что характер диффракционной картины совершенно не зависит от интенсивности света. Что же касается электронов, то недавно советские физики Л. Биберман, Н. Сушкин и В. Фабрикант показали, что даже в том случае, когда отдельные электроны проходят через диффрагирующую систему по-одиночке через относительно огромные промежутки времени и, следовательно, ведут себя абсолютно независимо друг от друга — в конечном счёте, при достаточной продолжительности опыта, возникает диффракционная картина, в точности совпадающая с той, которую дают потоки в десятки миллионов раз более интенсивные. Это показывает, что изменение направления полёта, ведущее к возникновению характерной диффракционной картины, происходит при индивидуальном прохождении электронов через диффрагирующую систему (в интересующем нас случае — через щель)\*).

Возникает вопрос: как можно объяснить с корпускулярной точки зрения тот факт, что при прохождении через щель некоторые электроны меняют своё направление? Очевидно, что электрон-частица мог бы изменить своё направление только в результате взаимодействия с краями щели или со всем экраном. Таким образом, изменение направления в корпускулярной картине есть результат того, что в момент прохождения через щель электрон приобретает добавочный импульс  $\Delta p_x$  в направлении оси  $x$ . Для большинства электронов, а именно тех, которые прошли через диафрагму без изменения направления и попали в место, соответствующее максимуму почернения фотопластинки, этот добавочный импульс равен нулю. Но так как почернение плавно уменьшается в обе стороны от максимума, то наряду с этим имеются и такие электроны, которые попадают в различные места

\*) В опыте Л. Бибермана, Н. Сушкина и В. Фабриканта промежуток времени между двумя последовательными прохождениями электрона через диффрагирующую систему был примерно в 30 000 раз (!) больше времени, затрачиваемого одним электроном на прохождение всего прибора. Несмотря на это, возникающая диффракционная картина ничем не отличалась от картины, получающейся с пучками, интенсивность которых в  $10^7$  раз больше. [См. Доклады Академии Наук СССР, т. LXVI, стр. 185 (1949).

фотопластинки, а следовательно, — при прохождении через щель приобретают добавочный импульс  $\Delta p_x$ , отличный от нуля.

Итак, мы можем утверждать, что в момент прохождения через щель координата электрона известна с неточностью  $\Delta x$ , а импульс — с неточностью  $\Delta p_x$ . Если теперь мы станем сужать щель для того, чтобы повысить точность определения координаты, то неточность  $\Delta p_x$  будет соответственно возрастать ввиду того, что главный дифракционный максимум будет тем шире, чем уже щель. Из этого следует, что чем лучше удовлетворяет своему назначению наша установка как прибор для определения положения электрона, тем бóльшую неопределённость вносит она в величину импульса.

Можно, однако, так видоизменить установку, чтобы с её помощью было доступно экспериментальное определение  $\Delta p_x$ . Именно, импульс микрочастицы можно определить, применяя закон сохранения импульса (количества движения) к взаимодействию микрочастицы с диафрагмой, сквозь которую она проходит.

Так как при прохождении через щель частица получает добавочный импульс, параллельный диафрагме, т. е. в направлении оси  $x$ , то сама диафрагма со щелью испытывает отдачу также в направлении оси  $x$ , но в обратную сторону. Зная эту отдачу, мы бы знали и  $\Delta p_x$ , а поскольку  $y$ -составляющая остаётся без изменения, — мы точно знали бы импульс электрона в момент его прохождения через щель.

Для измерения отдачи нужно диафрагму сделать достаточно лёгкой и подвижной. Если диафрагма до прохождения электрона покоилась относительно остальных частей прибора, то, измеряя скорость, которую она получает при прохождении электрона, и зная её массу, мы тем самым найдём добавочный импульс  $\Delta p_x$ , приобретаемый ею, а следовательно и электроном.

Тот факт, что подобный эксперимент неосуществим по техническим причинам, например вследствие того, что нельзя осуществить столь лёгкий экран, чтобы он приобрёл заметную скорость в результате взаимодействия с электроном, никак не влияет на правильность заключений, выводимых на основании рассмотрения ожидаемого хода процесса. В самом деле, это рассмотрение ничем не отличается от теории эффекта Комптона, где возможность применения закона сохранения импульса к соударениям микрочастиц доказана экспериментально. Однако если диафрагма будет подвижной, то она уже не сможет служить фиксированной системой отсчёта для определения положения электрона в момент прохождения его через щель, как бы ни была узка последняя.

Вернёмся к рассмотрению установки с неподвижной диафрагмой. В этом случае, как мы видим, установка позволяет

измерить положение частицы с неопределённостью  $\Delta x$ , которая может быть сделана сколь угодно малой. Однако, поскольку при жёстко закреплённой диафрагме мы лишены возможности учесть отдачу, испытываемую диафрагмой при прохождении частицы, добавочный импульс, приобретаемый частицей, остаётся в известных пределах  $\Delta p_x$  неопределённым. Докажем, что неопределённости  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  связаны соотношением  $\Delta x \Delta p_x \geq h$ .

Из рис. 198 видно, что

$$\Delta p_x = p \sin \alpha = \frac{h}{\lambda} \sin \alpha. \quad (140,1)$$

С другой стороны, если учитывать попадания электрона на фотопластинку в пределах одного только главного диффракционного максимума, то  $\alpha$  будет углом между осью  $y$  и направлением к первому диффракционному минимуму. Положение этого минимума определяется условием, чтобы разность хода волн, диффрагированных от верхнего и нижнего краёв диафрагмы, равнялась  $\lambda$ . Это даёт (см. рис. 198)

$$\Delta x \sin \alpha = \lambda; \quad (140,2)$$

Перемножая (140,1) и (140,2), получаем

$$\Delta x \Delta p_x = h. \quad (140,3)$$

Если учесть также побочные диффракционные максимумы, то вместо условия (140,2) будем иметь  $\Delta x \Delta p_x = nh$  и, следовательно, вообще

$$\Delta x \Delta p_x \geq h; \quad (140,4)$$

Это и есть соотношение неопределённости.

Для того чтобы оценить количественную сторону тех ограничений применимости к микрочастицам классических понятий, которые устанавливаются соотношениями неопределённости, полезно выразить  $p$  через скорость,  $p = mv$ , и найти из (140,3)

$$\Delta v = \frac{h}{m \Delta x}; \quad (140,5)$$

Так как  $h$  — очень малая величина,

$$h = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек},$$

то величина  $\Delta v$  главным образом зависит от соотношения между численными значениями  $h$  и  $m$ . Принципиально говоря, соотношения неопределённости должны иметь место для любых масс, в том числе и макроскопических, так как можно доказать, что классическая механика является предельным случаем механики квантовой. Однако из соотношения (140,5) видно, что при воз-

растании массы  $\Delta v$  стремится к нулю, поскольку разумные значения  $\Delta x$  для макроскопических масс во всяком случае значительно больше численного значения  $h$ . Напротив, для микрочастиц, порядок величины массы которых близок к порядку величины  $h$ , неопределённость  $\Delta v$  может приобрести большие значения в зависимости от точности определения положения, т. е. от величины  $\Delta x$ . Поясним это двумя примерами. Если речь идёт о теле с массой  $m$ , равной 1 г, то очевидно, что вполне удовлетворительна точность определения положения центра тяжести, при которой  $\Delta x$  не будет превышать  $10^{-4}$  см = 1 м. В этом случае

$$\Delta v = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{10^{-4}} = 6,6 \cdot 10^{-23},$$

т. е. неопределённость скорости лежит далеко за пределами возможности измерения. Как и следовало ожидать, для макроскопических тел соотношения неопределённости практически не играют никакой роли.

Если, однако, применить то же соотношение к электрону, то результат получается иной. Масса электрона равна  $9 \cdot 10^{-28}$  г  $\approx \approx 10^{-27}$  г, т. е. того же порядка величины, что и  $h$ . В этом случае порядок величины  $\Delta v$ , очевидно, зависит от точности определения положения, т. е. величины  $\Delta x$ . Пусть, например, требуется установить принадлежность электрона определённой атому. В этом случае разумная точность определения положения должна быть, по крайней мере,  $\Delta x = 10^{-9}$  см, так как размеры атома — порядка  $10^{-8}$  см. Соотношение (140,5) даёт тогда

$$\Delta v = \frac{6,6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-9}} = 7,3 \cdot 10^9 \text{ см/сек},$$

т. е. по крайней мере на порядок величины больше, нежели сама измеряемая скорость (см. § 86).

Тот факт, что в этом и аналогичных случаях самую существенную роль играет порядок величины  $\Delta x$ , позволяет разъяснить кажущееся парадоксальным поведение микрочастиц в камере Вильсона. В самом деле, здесь мы наблюдаем *при достаточной большой энергии частиц* строго прямолинейные траектории и никаких признаков неопределённости импульса, связанной с волновыми свойствами, не обнаруживается. Для объяснения следует принять во внимание, что при рассматривании фотографий этих прямолинейных траекторий в микроскоп видно, что они представляют собой гирлянду маленьких капелек тумана. Капелька представляет собой «измерительный прибор», отмечающий положение микрочастицы. Размеры капелек — порядка  $10^{-4}$  см; поэтому в данном случае  $\Delta x = 10^{-4}$  и  $\Delta v$  в случае электронов — порядка  $10^{-23}$ . Так как, с другой стороны, прямолинейные

траектории наблюдаются только при очень большой энергии микрочастиц, то  $\Delta p$  будет очень мало по сравнению с  $p$  и частица в указанных пределах точности будет вести себя вполне как классическая частица. Вообще, при очень больших энергиях длина волны де-Брогля будет очень мала, и так же, как в оптике, при очень малых длинах волн вполне применимо геометрическое приближение. В оптике при этом без большой ошибки можно рассматривать световые лучи, не учитывая явлений дифракции, а в случае микрочастиц — определённые траектории.

Упражнения: 1. Энергия  $\alpha$ -частиц, испускаемых радием, равна  $4,8 \cdot 10^6$  eV. Пользуясь соотношениями неопределённости, выяснить, при какой точности определения положения  $\alpha$ -частицы ещё можно пренебрегать неопределённостью импульса  $\Delta p$  по сравнению с величиной самого импульса  $p$ . Выполнить то же для электронов, обладающих энергией  $10^8$  eV. (Указание. При такой энергии электрон ведёт себя уже как релятивистская частица, и его импульс следует вычислять по формуле  $p = \frac{h}{\lambda}$ .)

2. Частица «заперта» в области, линейные размеры которой порядка  $10^{-8}$  см. Какова должна быть минимальная энергия этой частицы, необходимая для того, чтобы соотношения неопределённости были удовлетворены? Выразить эту энергию в эргах и в электрон-вольтах.

3. Оценить роль соотношений неопределённости в механике молекулы водорода. Зная размеры молекулы, оценить минимальную разумную точность определения положения её атомов и найти соответствующую неопределённость импульса.

4. Ньютонова механика становится неприменимой, когда длина волны де-Брогля порядка размеров изучаемой системы. Рассмотреть с этой точки зрения вопрос о применимости ньютоновой механики к водородному атому, предполагая, что электрон движется по круговой орбите с радиусом  $0,5 \cdot 10^{-8}$  см и что его момент количества движения равен  $\frac{h}{2\pi}$  (первая боровская водородная орбита). Найти по этим данным скорость электрона и длину волны де-Брогля.

5. Выполнить аналогичное рассмотрение для атома водорода в водородной молекуле. Массу водородного атома взять из таблиц. Скорость определить по следующим данным: молекулу водорода считать линейным осциллятором и найти среднюю кинетическую энергию ( $E = \frac{1}{2} kT$ ) атомов при тепловом равновесии при температуре  $300^\circ$  К. Сравнить вычисленную таким путём длину волны де-Брогля с амплитудой колебаний водородного атома, полагая, что их частота равна  $10^{14}$  сек $^{-1}$ . Выполнить те же подсчёты для равновесия при температуре  $10^\circ$  К и сравнить между собой оба случая.

## § 141. Ошибочные толкования соотношений неопределённости

Соотношения неопределённости дали повод к различным неправильным толкованиям и философским идеалистическим извращениям.

Нередко приходится встречать следующее толкование: «Микрочастицы — электроны, протоны, фотоны — очень малы, но они имеют в каждый момент времени определённые координаты и опре-



делённый импульс, т. е. представляют собою как бы сильно уменьшенные копии билиардных шаров или дробинки, отличаясь от них лишь количественно, своими размерами. Наряду с этим существует закон природы, выражаемый соотношениями неопределённости, который запрещает нам узнавать одновременно с любой точностью их положение и импульс». Такое толкование прежде всего неприемлемо с философской точки зрения, так как оно устанавливает предел познания и потому может служить для обоснования агностицизма, т. е. одной из разновидностей идеализма. Оно, конечно, ошибочно и с физической точки зрения. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим ещё один опыт.

Представим себе диафрагму с *двумя* щелями, на достаточно большом расстоянии от которой помещена фотопластинка. Если через такую диафрагму пропустить параллельный пучок электронов, то на фотопластинке должна возникнуть известная картина диффракции от двух щелей, всем своим характером, но отнюдь не просто интенсивностью, отличающаяся от картины диффракции от одной щели. Закроем одну из щелей; мы получим на фотопластинке изображение открытой щели, тождественное с самой щелью (или, если щель достаточно узка, — картину диффракции от одной щели). Закроем ту щель, которая ранее была открыта, и откроем вторую: мы снова получим изображение открытой щели. Откроем обе щели — возникающая при этом картина отнюдь не будет соответствовать сложению обеих картин, получающихся при одной открытой щели, но будет состоять из светлых и тёмных полос, положение которых определяется *обеими щелями*. На рис. 198а приведены две фотографии В. К. Аркадзева, иллюстрирующие сказанное. Фотографии получены со светом, но с электронами картина должна быть совершенно аналогичной \*).

\*) Упомянутый на стр. 419 опыт Биббермана, Сушкина и Фабриканта является новым и ещё более ярким доказательством того, что электроны никоим образом нельзя рассматривать как собрание «классических» частиц, т. е. частиц-шариков. В самом деле, в этом опыте диффрагирующей системой служил кристалл окиси магния. Электроны, пролетая через такой кристаллик по-одиночке через относительно очень большие промежутки времени, в результате диффракции летят затем в определённых направлениях к диффракционным максимумам. Электрон-микродробинка взаимодействовал бы с одним или, во всяком случае, очень небольшим числом атомов кристаллической решётки; между тем характер диффракционной картины, распределение её максимумов и минимумов, определяется *всей решёткой* в целом, т. е. огромным числом атомов, расположенных в тысячах слов.

Заметим, кстати, что аналогичные диффракционные опыты осуществляются также и с нейтронами, не имеющими электрического заряда и взаимодействующими с атомами решётки через посредство ядерных сил, чрезвычайно быстро убывающих с расстоянием, ввиду чего возможность интерпретации диффракционной картины как результата взаимодействия нейтронов с отдельными атомами решётки абсолютно исключена.

Совершенно очевидно, что этот опыт никак не может быть согласован с представлением об электро́не как о частице, двигающейся по определённой траектории, т. е. обладающей в каждый момент времени определёнными, хотя бы и неизвестными, координатами и импульсом. Подобная частица, наглядным образом которой может служить дробинка, доведённая до крайних пределов малости, обязательно должна пройти через *одну* определённую щель; присутствие или отсутствие второй щели не может оказать никакого влияния на её траекторию. Между тем элек-

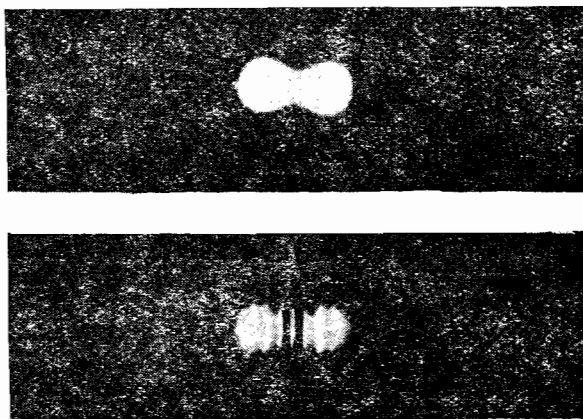


Рис. 198а. Верхняя фотография снята при прохождении света сначала через одну, а затем через другую щель; нижняя фотография получена при одновременном прохождении света через обе щели.

троны и другие микрочастицы ведут себя существенно различным образом в том и другом случаях, т. е. при открытой и закрытой второй щели.

Описанный опыт показывает, что электроны и другие микрочастицы ни в коем случае нельзя рассматривать просто как микродробинки. Представление об очень маленькой частице, движущейся по определённой траектории и обладающей в каждой точке этой траектории определённой скоростью, пока над ней не произведено измерения, — такое представление отнюдь не может служить картиной движения электрона. Понятие траектории теряет смысл для электрона, *совершенно так же, как в волновой оптике теряет смысл понятие светового луча.*

Поэтому смысл соотношений неопределённости не в том, что они «запрещают» нам узнать какие-либо реально существующие свойства микрочастиц, т. е. не в том, что они в какой-либо мере ограничивают познание, а в том, что они ограничивают приме-

нимость к микрочастицам понятий классической механики, которая является по существу *корпускулярной* механикой. В классической механике, как уже подчёркивалось, одновременное задание всех координат  $q_i$  системы макроскопических частиц и всех соответствующих им импульсов  $p_i$  является необходимым для полного описания состояния системы. Для микрочастицы такое описание, как мы уже видели, неосуществимо. Из предыдущего, однако, ясно, что вопрос об *одновременных* значениях координат и импульсов электрона вообще лишён физического смысла, так как электрон *по самой своей природе* есть объект, которому *не свойственна* подобная характеристика.

Если тем не менее мы стремимся описывать поведение электрона в терминах классической механики, т. е. указывая одновременно его положение и импульс, то для этого имеется определённая причина. В самом деле, схема всякого эксперимента, производимого в атомной физике, такова, что мы при помощи определённой экспериментальной установки хотим получить ответ на вопрос, относящийся к протеканию того или иного объективного процесса, происходящего в пространстве и во времени. Этот вопрос мы ставим, пользуясь в конечном счёте приборами, представляющими собой макроскопические тела. Поведение этих приборов, например поворот стрелки гальванометра или движение пера самописца, подчиняется классической механике; сама установка, геометрическое расположение её частей — щелей, конденсаторов, магнитных полей и т. п. — представляет собой некую пространственно-временную систему отсчёта. Само собой разумеется, что и поведение исследуемых микрочастиц нам необходимо описывать в той же пространственно-временной системе отсчёта, пользуясь теми же понятиями классической механики, с помощью которых мы описываем нашу макроскопическую установку. Мы, например, измеряем смещение светлого пятна, образованного налетающими электронами на экране катодного осциллографа, или интересуемся отклонением электрона в данном месте установки и т. п. Поскольку мы при этом применяем к электрону или к другой микрочастице несвойственное этим объектам классическое описание, мы естественно должны указать *границу применимости* этого классического описания, так как ведь микрочастицы подчиняются законам, отличным от законов классической механики, и последние применимы к ним лишь приближённо. Соотношения неопределённости как раз и указывают эту границу.

Другое ошибочное толкование соотношений неопределённости особенно опасно потому, что оно ведёт непосредственно к субъективному идеализму. Это толкование настойчиво проводится многими западными физиками, в особенности представителями так называемой «копенгагенской школы» современной теоретической

физики (Н. Бор, В. Гейзенберг, П. Иордан и др.), по своему философскому мировоззрению являющимися открытыми сторонниками реакционной махистской философии или примыкающими к ней. В интерпретации копенгагенской школы в квантовой механике особое внимание уделяется наблюдателю. Так, например, Гейзенберг утверждает, что «в то время как предмет классической физики составляли объективные события в пространстве и во времени, для существования которых их наблюдения не имеют значения, квантовая теория рассматривает такие процессы, которые, так сказать, вспыхивают в момент наблюдения и о которых бессмысленны наглядные физические высказывания для интервала между наблюдениями».

Другой представитель той же школы, П. Иордан, откровенно заявляющий о своей принадлежности к позитивистской (т. е. махистской) школе в философии, идёт ещё дальше. В своей книге по квантовой механике он утверждает, что так как позитивизм (т. е. махизм) признаёт «только непосредственные факты переживаний как собственный объект научного исследования, то психология, взятая в её наиболее широком охвате, оказывается наиболее всеобъемлющей наукой, а физика — её малой частью...».

Подобные явно идеалистические утверждения не имеют никакой основы в квантовой теории вообще и в соотношениях неопределённости — в частности. В самом деле, квантовая теория учитывает не наблюдателя и его переживания, но взаимодействие реально существующих объектов, которые мы называем «микрочастицами», с другими реально существующими, но макроскопическими объектами, физическими телами, какими, в частности, являются приборы. Что участия одушевлённого наблюдателя при этом совершенно не требуется, видно уже из того, что любой из рассматриваемых экспериментов может быть сделан вполне объективным без малейшего изменения результата: глаз наблюдателя может быть заменён фотопластинкой или фотоэлементом, любые отметки могут быть сделаны автоматически и т. п. Воздействие прибора на измеряемый объект есть результат взаимодействия *физических тел, результат объективного процесса, развёртывающегося в пространстве и во времени* по законам физики, но отнюдь не результат психологического акта наблюдений. Поэтому можно с полной определённостью утверждать, что *роль одушевлённого наблюдателя в квантовой теории совершенно такая же, как и в ньютоновой механике*. Очевидно, что никакого воздействия на измеряемый объект подобный «наблюдатель» иметь не может. Тот факт, что «наблюдатель» в квантовой механике никакой особой роли не играет, виден, между прочим, также из того, что соотношения неопределённости были выведены нами в § 139 — из одного только рассмотрения свойств волновых пакетов, *при котором ни наблю-*

датель, ни процесс наблюдения совершенно не учитываются. Этот вывод основан исключительно на учёте своеобразных особенностей микрочастиц — особенностей, благодаря которым нам приходится пользоваться для описания их поведения и волновой, и корпускулярной картинами.

### § 142. Соотношения неопределённости и принцип причинности

Также лишён основания ещё один постоянно встречающийся в зарубежной литературе идеалистический вывод о том, что из соотношений неопределённости якобы вытекает неприменимость принципа причинности к явлениям микромира. В 1927 г. Гейзенберг в той самой работе, в которой им были сформулированы соотношения неопределённости, в качестве общего вывода из этих соотношений утверждал, что «квантовая механика определённо установила несостоятельность закона причинности». Основания для такого утверждения состояли в следующем. Принцип причинности требует, чтобы на основании точного знания состояния системы для какого-нибудь определённого момента можно было точно предсказать её состояние для любого будущего момента. Классическая механика Ньютона в полной мере удовлетворяет этому требованию, что особенно ярко показывает пример астрономии. Как известно, астрономия (небесная механика) позволяет предвычислять движения небесных тел — их траектории и скорости — для любого будущего момента времени с той степенью точности, какую допускает математическое решение задачи, и благодаря этому позволяет точно предсказывать астрономические явления (например, солнечные или лунные затмения) на сколько угодно времени вперёд. Эта возможность имеет отчётливое выражение в самой математической форме основных уравнений классической механики. Эти уравнения в наиболее удобном для обсуждения принципиальных вопросов виде гамильтоновых канонических уравнений (§ 56) таковы:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k},$$

$$k = 1, 2, \dots, f. \quad (142,1)$$

В простейшем случае одной материальной точки, движущейся в определённом силовом поле,  $k=1, 2, 3$ , т. е. имеется всего шесть дифференциальных уравнений первого порядка относительно времени. Решение этих уравнений даёт возможность выразить все координаты  $q_k$  и все импульсы  $p_k$  в функции

времени и шести произвольных постоянных

$$q_k = f_k(t, C_1, C_2, \dots, C_6), p_k = \varphi_k(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \dots \quad (142,2)$$

Если определить все координаты  $q_k^0$  и импульсы  $p_k^0$  для некоторого начального момента времени  $t=0$ , выполнив для этого, разумеется, соответствующие измерения, то, подставляя эти известные величины  $q_k^0$  и  $p_k^0$  в уравнения (142,2), можно вычислить из них (при  $t=0$ ) все шесть произвольных постоянных  $C_1, \dots, C_6$ . После этого формулы (142,2) позволят предсказывать  $q_k$  и  $p_k$  для любого момента  $t$ . Тем самым оказывается, что из начального состояния (при  $t=0$ ), *определяемого совокупностью всех координат и всех импульсов*, можно предсказать состояние для любого будущего момента, в полном соответствии с законом причинности.

Соотношения неопределённости утверждают, однако, что одновременные значения координат и импульсов могут быть измерены лишь с неизбежными неточностями  $\Delta q_k$  и  $\Delta p_k$ , удовлетворяющими соотношениям  $\Delta q_k \Delta p_k \geq h$ .

Из этого Гейзенберг сделал вывод, что начальное состояние не может быть определено точно, а потому не может быть точно предсказано и будущее состояние — в противоречии с законом причинности.

Это заключение, однако, ошибочно. Несомненно, конечно, что одновременные значения координат и импульсов микрочастицы могут быть определены лишь с неточностями, требуемыми соотношениями неопределённости. Однако самое понятие «состояние системы» в квантовой механике, очевидно, должно быть формулировано иначе, нежели в механике классической, а именно, для полного определения состояния требуется *иная совокупность параметров*. Между тем *количественная* формулировка закона причинности возможна лишь в том случае, когда указаны те переменные, которые определяют состояние.

Поясним это примером. Основные уравнения электромагнитного поля — уравнения Максвелла — представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно времени для напряжённостей поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ , плотности зарядов  $\rho$  и плотности токов  $j$ , рассматриваемых как функции координат и времени. Поэтому задание  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\rho$  и  $j$  для определённого момента времени позволяет предсказать их значения для любого (будущего или прошедшего) момента. Таким образом, принцип причинности для электромагнитного поля может быть количественно сформулирован только в том случае если «состояние» поля определяется правильным выбором параметров ( $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\rho$ ,  $j$ ).

Из этого примера мы ясно видим, что для формулировки принципа причинности в той или иной области физических

явлений необходимо отчётливое определение понятия «состояние системы» и явное указание тех параметров, от которых это состояние зависит.

Вернёмся теперь к микроскопическим «частицам» и к квантовой механике. В следующих главах этой книги мы увидим, что состояние микрочастицы определяется некоторой функцией  $\psi$ , так называемой волновой функцией или просто  $\psi$ -функцией (простейшим примером её может служить формула плоской волны де-Брогеля в комплексном виде), которая является функцией *одних только координат и времени* или *одних только импульсов и времени*. Мы увидим также, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (общее уравнение Шредингера, см. § 143) первого порядка относительно времени.

Из этого следует, что задание  $\psi$ -функций для момента  $t = 0$  предопределяет её значения для любого будущего момента времени. Таким образом, состояние системы микрочастиц, определённое в соответствии с требованиями *квантовой*, а не классической механики, однозначно вытекает из предшествующего состояния, *как того требует закон причинности*.

Нет ничего удивительного или парадоксального в том, что когда мы хотим описать состояние микрочастиц *в несвойственных им понятиях классической механики*, мы не можем сделать это точно и вынуждены довольствоваться статистическим описанием, т. е. указывать вероятности определённых положений и определённых импульсов. Но из этого ни в коем случае нельзя делать вывод о несостоятельности закона причинности в микромире. Это показывает только, что к микрочастицам неприменима количественная формулировка принципа причинности, пригодная для системы малых твёрдых тел, и что описание состояния микрочастицы с помощью задания одновременных значений всех координат и всех импульсов *не соответствует природе микрочастицы*.

Между тем утверждение о том, что квантовая механика якобы «опровергла» закон причинности, послужило поводом для ряда идеалистических извращений, вплоть до обоснования фидеизма. Так, например, А. Эддингтон в своей книге «Природа физического мира» утверждал даже, что «...доводы современной науки дают, быть может, возможность сделать заключение, что религия стала приемлемой для здравого научного ума, начиная с 1927 года», а Дирак утверждал, что «...природа в известные моменты делает свободный выбор».

Все подобные утверждения, разумеется, не имеют никакой почвы ни в соотношениях неопределённости, ни в квантовой механике. П. Ланжевен охарактеризовал их как «интеллектуальный разврат». В своей интересной речи «О понятии корпускул

и атомов» Ланжевен говорит\*): «Опыт говорит нам, что нельзя точно определить в один и тот же момент положение и скорость частицы. Вслед за этим мы сейчас же заключаем: в основе законов природы предполагается неопределённость. Почему, однако, не допустить, что наша корпускулярная концепция не адекватна, что невозможно представить внутриатомный мир, экстраполируя до крайних пределов нашу макроскопическую концепцию движущегося тела. Из того факта, что природа не даёт точного ответа на вопрос, касающийся движения частицы, было бы слишком претенциозно с нашей стороны заключить: в природе нет детерминизма. Гораздо проще сказать: самый вопрос плохо поставлен,— в природе не существует корпускулярной микрочастицы...».

«Мир, в котором мы живём в настоящее время, гораздо богаче мира в том виде, как он представлялся Паскалю, когда последний допускал одну и ту же структуру для бесконечно большого и бесконечно малого, в виде всё более и более уменьшающейся шкалы. С этой точки зрения, мы должны были бы находить одни и те же аспекты во всех этажах (нашего знания—*Э. III.*) и пользоваться всюду одними и теми же представлениями. Мир можно было бы сравнить с японскими куклами, заключёнными одна в другую, всегда одинаковыми, но всё более и более мелкими. К счастью, действительность оказалась более богатой, а значит, и более интересной. Всякий новый этаж, на котором опыт позволяет нам остановиться, приносит нам новые истины и требует нового усилия для теоретических построений».

В последних трёх параграфах мы рассмотрели подробно соотношения неопределённости и вытекающие из них следствия. Мы видели, что эти соотношения вовсе не ставят какого-либо предела познанию, но являются лишь выражением неприменимости представлений классической механики к движению микроскопических частиц. Точнее говоря, эти соотношения дают количественную меру того, до каких пределов ещё можно описывать состояние микрообъектов одновременным заданием координат и импульсов, подобно тому как это делается в классической механике для макроскопических тел: если, как это мы видели на примерах, рассмотренных на стр. 422, при разумной для данного случая неточности определения координаты  $\Delta q$  соотношения неопределённости  $\Delta q \Delta p \sim h$  дают для  $\Delta p$  пренебрежимо малую величину, то объект ведёт себя вполне «классически», т. е. можно говорить о его траектории и его скорости в каждой точке траектории. В противном случае образ «классической частицы» оказывается непри-

\*) Цитируется по русскому переводу в журнале «Под знаменем марксизма», 1938, № 1, стр. 140.



годным и понятие траектории теряет смысл, так же как в области применимости волновой оптики теряет смысл понятие светового луча. Из этого следует, что источником соотношений неопределённости являются своеобразные физические свойства электронов и других микрочастиц, — свойства, благодаря которым мы вынуждены для описания их поведения пользоваться то картиной волн, то картиной частиц.

Ограничение применимости классических представлений в области явлений атомного мира ни в коем случае не означает ограничения нашей способности познания, но означает лишь ограничение *механистической* картины мира. В самом деле, ведь именно с точки зрения механистической картины мира все явления должны сводиться к механическому движению неизменяемых малых частиц, рассматриваемых как уменьшенные копии макроскопических тел, между которыми действуют силы притяжения или отталкивания, зависящие только от расстояния. Эта картина, однако, оказалась несостоятельной уже в теории электромагнитного поля, механическую модель которого построить не удалось, несмотря на многочисленные попытки. Дальнейшее развитие физики, принесшее столь значительные успехи в познании внешнего мира, в частности развитие атомной физики, каждый раз с полной отчётливостью показывало всю ограниченность механистического мировоззрения. Но Ленин разъяснил в «Материализме и эмпириокритицизме», что «признание каких-либо неизменных элементов, „неизменной сущности вещей“ и т. п. не есть материализм, а есть *метафизический*, т. е. антидиалектический материализм»). И далее: «Это, конечно, сплошной вздор, будто материализм утверждал „меньшую“ реальность сознания или обязательно „механическую“, а не электромагнитную, не какую-нибудь ещё неизмеримо более сложную картину мира, как *движущейся материи*» \*\*).

Следует иметь в виду, что и квантовая механика, как и всякая физическая теория, также имеет свои границы применимости. В частности, она не даёт достаточно полного ответа на вопрос, почему электроны ведут себя столь странным образом, так как вопросы, относящиеся к самой природе микрочастиц, выходят за её границы. Решение обширного круга в высшей степени глубоких проблем о природе микрочастиц, о превращении одних «элементарных» частиц в другие и т. п. современная физика ожидает от следующего этапа развития теории микромира. Таковым, возможно, будет так называемая релятивистская квантовая механика, в системе которой должны быть учтены не

\*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, стр. 244, Госполитиздат, 1948.

\*\*) Там же, стр. 263.

только корпускулярно-волновой дуализм, но и особенности движения при скоростях, сравнимых со скоростью света. Создание такой теории, которая давала бы синтез квантовых и релятивистских свойств, есть дело будущего. Возможно, конечно, что на этом непосредственно следующем или более отдалённом этапе развития науки и соотношения неопределённости предстанут в новом свете, подобно тому как феноменологическое второе начало термодинамики получило новое освещение в статистической физике.

С другой стороны, мы видели также, что соотношения неопределённости, основанные на объективных свойствах реально существующих микрочастиц, были использованы идеалистическими физическими школами для обоснования якобы «крушения материализма», «отмены» закона причинности и т. д. вплоть до «научного» обоснования религии (Эддингтон, А. Комптон). В этом отношении, пожалуй, наиболее отчётливой и характерной является указанная выше позиция П. Иордана, который объявил физику малой частью психологии. Это различие в материалистической и идеалистической интерпретации одних и тех же фактов или явлений, как всегда, с предельной ясностью охарактеризовано В. И. Лениным в следующих замечательных словах: «*Действительно важный теоретико-познавательный вопрос, разделяющий философские направления, состоит не в том, какой степени точности достигли наши описания причинных связей и могут ли эти описания быть выражены в точной математической формуле, — а в том, является ли источником нашего познания этих связей объективная закономерность природы или свойства нашего ума, присущая ему способность познавать известные априорные истины и т. п.*» \*) (курсив мой.—Э. Ш.).

---

\*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, стр. 142. Госполитиздат, 1948.

## Г Л А В А XI

### УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

#### § 143. Уравнение Шредингера и физический смысл его решений

Одна из наиболее замечательных особенностей механики микроскопических частиц состоит в существовании дискретных уровней энергии. Необходимость постулирования такой дискретности выяснилась уже на первых этапах развития квантовой физики (см. гл. VI). Однако в рамках классической физики допущение дискретности атомных состояний было совершенно чуждым положением, шедшим вразрез со всей системой классической физики. В настоящей главе мы увидим, что в квантовой механике дискретность энергии не только не противоречит основам этой механики, но и вытекает из её уравнений столь же естественным образом, как, например, существование гармонических обертонов струны вытекает из уравнений классической механики. В историческом развитии квантовой механики этот результат был получен одним из первых, и он казался в то время наиболее замечательным. Очень скоро, однако, выяснилось, что из основного уравнения квантовой механики и из толкования смысла его решений вытекают и другие следствия, не менее своеобразные, нежели квантование. Эти следствия дали возможность объяснить новый обширный круг явлений и обеспечили плодотворность развития квантовой механики. Наконец, в качестве завершения этого этапа оказалось возможным построить логически стройную, хотя и совершенно своеобразную систему квантовой механики.

Имея в виду подготовить читателя к усвоению этой системы, мы пойдём в нашем изложении путём, близким к историческому, и в настоящей главе ограничимся установлением основного уравнения квантовой механики и на примерах задач, особенно простых в математическом отношении, покажем некоторые применения этого уравнения. С самой системой квантовой механики мы познакомимся в следующих главах.

До сих пор (гл. X) мы рассматривали движение только свободных микроскопических частиц и убедились в том, что это движе-

ние описывается плоскими волнами де-Брогя. Нам необходимо теперь получить возможность исследовать движение частиц в различных силовых полях. С этой целью мы найдём сначала дифференциальное уравнение, которому подчиняются волны де-Брогя, а затем обобщим это уравнение на случай движения в силовых полях. Таким путём мы получим основное уравнение квантовой механики — уравнение Шредингера.

Для получения искомого уравнения мы поступим следующим образом. В § 124 было указано, что волновое уравнение для электромагнитных волн (соответствующее фотонам) непосредственно вытекает из основных уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла). Написав это волновое уравнение и подставив в него решение в виде плоских волн, мы получили соотношение между частотой и составляющими волнового вектора (закон дисперсии), характерное для природы электромагнитных волн:

$$\frac{v^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (124,3)$$

Здесь мы пойдём обратным путём. Нам уже известен закон дисперсии волн де-Брогя

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{v_0^2}{c^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \quad (132,6)$$

где

$$v_0 = \frac{mc^2}{h}. \quad (132,5)$$

При помощи этого закона и формулы волны де-Брогя

$$\psi = Ae^{i2\pi(kr - vt)} \quad (131,5)$$

мы и получим интересующее нас уравнение для свободных микроскопических частиц.

Однако прежде всего заметим следующее. Закон дисперсии (132,6) нами получен из соотношения между импульсом и энергией, устанавливаемого теорией относительности

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (61,12)$$

Уравнение же Шредингера имеет место для частиц, движущихся со скоростями, достаточно малыми по сравнению с  $c$ . В этом

случае  $\frac{v}{c} \ll 1$  и, следовательно,  $p \ll mc$ . Из (61,12) находим \*)

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} &= \sqrt{m^2 c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)} = \\ &= mc \left[ 1 + \frac{1}{m^2 c^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \right]^{1/2} = \\ &= mc \left[ 1 + \frac{1}{2m^2 c^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Отбрасывая члены, содержащие более высокие степени, получаем:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (143,1)$$

Заменяя здесь  $E$  через  $h\nu$ ,  $p_x$  через  $hk_x$  и т. д. в соответствии с постулатами де-Брогеля (131,1) и (131,4), находим

$$h\nu = mc^2 + \frac{h^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2),$$

или, так как по (132,5)  $mc^2 = h\nu_0$ , то

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{h^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \quad (143,2)$$

$$\nu = \nu_0 + \frac{h}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad [(143,2)']$$

Это и есть искомый закон дисперсии, соответствующий ньютонову приближению.

Принимая во внимание, что в ньютоновой механике энергия всегда содержит произвольную постоянную вследствие неопределённости нулевого значения потенциальной энергии (§ 42), мы можем целесообразно изменить начало счёта энергии и положить в (143,1)

$$E - mc^2 = E'.$$

Тогда соотношение это примет уже знакомый нам вид

$$E' = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (143,3)$$

[см. (57,11)]. В соответствии с изменением начала счёта энергии изменим и начало счёта частот, полагая

$$\nu' = \nu - \nu_0.$$

\*) Квадратный корень мы берём только со знаком +. Двойственность знака перед корнем имеет, однако, весьма важное значение. Этот вопрос будет рассмотрен в т. II, § 202.

При этом (143,2) примет вид

$$h\nu' = \frac{h^3}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (143,4)$$

и, соответственно, (143,2') напишется в виде

$$\nu' = \frac{h}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (143,5)$$

Полученное соотношение (143,5) и эквивалентное ему (143,4) и есть закон дисперсии в ньютоновом приближении.

Продифференцируем теперь формулу волны де-Брогля (131,5) один раз по времени и два раза по координатам

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -2\pi i \nu \psi, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= (2\pi i)^2 k_x^2 \psi, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= (2\pi i)^2 k_y^2 \psi, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= (2\pi i)^2 k_z^2 \psi. \end{aligned}$$

Найдя отсюда  $\nu$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  и подставив в закон дисперсии (143,4), сразу получим

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$

или

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi. \quad (143,6)$$

В этой главе нас будут интересовать только решения (143,6), соответствующие монохроматическим волнам. Для таких волн решение может быть представлено в виде произведения двух функций, из которых одна есть функция только координат, а другая — только времени, причём зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i2\pi\nu t} = e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ , так что

$$\psi(x, y, z, t) = \psi^0(x, y, z) e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}. \quad (143,7)$$

Заметим прежде всего, что для таких решений левая часть (143,6) даёт

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi. \quad (143,8)$$

Подставляя решение (143,7) в (143,6) и имея в виду (143,8), находим после сокращения на временной множитель  $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$  и перестановки членов

$$\Delta \psi^0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E\psi^0 = 0. \quad (143,9)$$

Уравнение (143,6) и является искомым волновым уравнением для свободной частицы; часть его решения, зависящая только от координат, подчиняется уравнению (143,9). В дальнейшем мы будем писать удовлетворяющую (143,9) функцию без знака  $^0$ , помня, что в настоящей главе речь идёт о «монокроматических» решениях уравнения (143,6), для получения которых

достаточно приписать к  $\psi$  множитель  $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ .

Уравнение (143,9) мы получили для случая свободной микроскопической частицы. Посмотрим, как его можно разумно обобщить на случай частицы движущейся в силовом поле, характеризуемом потенциальной энергией  $U$ . Полная энергия частицы в таком поле равна сумме  $T + U = E$ . В случае же свободной частицы полная энергия совпадает с кинетической ( $U = 0$ ), т. е.  $E = T$ . Для обобщения, которое нас интересует, следует решить вопрос, — как понимать при переходе к случаю движения в поле энергии  $E$ , входящую в уравнение (143,9), — как полную или как кинетическую? Ясно, что если бы мы стали рассматривать энергию  $E$ , как полную, то в обобщённом уравнении не было бы члена, описывающего то или иное поле. Если же, наоборот, мы под  $E$  в случае свободной частицы будем разуметь только кинетическую энергию, то для случая движения в поле с потенциальной энергией  $U$  мы должны будем подставить вместо  $E$  в (143,9) кинетическую энергию  $T = E - U$ , и уравнение (143,9) примет вид

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\psi = 0. \quad (143,10)$$

Это и есть основное уравнение квантовой механики — уравнение Шредингера для частицы в потенциальном поле.

Само собой разумеется, что на приведённые соображения следует смотреть только как на соображения; поясняющие установление уравнения Шредингера, а не как на вывод его. Как и все основные уравнения физики (например, ньютоновы уравнения механики или уравнения Максвелла для электромагнитного поля), уравнение Шредингера не имеет строгого вывода. Оно не выводится, но устанавливается, и правильность его подтверждается согласием с опытом получаемых с его помощью результатов.

Уравнению (143,10) соответствует более общее уравнение для функции  $\psi$ , зависящей не только от координат, но и от времени. В случае консервативного поля, когда потенциальная функция  $U$  не зависит явно от времени, можно всегда предположить, что зависимость  $\psi$  от времени выражается «монокроматическим» множителем  $e^{-i2\pi\nu t} = e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}$ . Принимая во вни-

мание, что в этом случае имеет место соотношение (143,8) и переписав уравнение (143,10) в виде

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta\psi + U\psi = E\psi,$$

где

$$\psi = \psi^0(x, y, z) e^{-i\frac{2\pi}{h}Et}, \quad (143,11)$$

найдем

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta\psi + U\psi = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (143,12)$$

Это есть общее уравнение Шредингера, содержащее время.

В заключение — ещё одно замечание. При получении уравнения Шредингера для свободной частицы мы бы могли воспользоваться вместо волновой функции свободной частицы, написанной в виде

$$\psi = Ae^{i2\pi(kr - vt)},$$

комплексно сопряжённой функцией

$$\psi^* = A^* e^{-i2\pi(kr - vt)}. \quad (143,13)$$

В этом последнем случае, как легко видеть,

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 2\pi i\nu\psi^*, \quad \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2} = -4\pi^2 k_x^2 \text{ и т. д.}$$

Вместо уравнения (143,6) мы бы получили тогда

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta\psi^* \quad (143,14)$$

и соответственно изменилось бы уравнение (143,12). Однако сейчас мы увидим, что физический смысл имеет не сама функция  $\psi$ , но квадрат её модуля, т. е.  $\psi\psi^*$ . Ввиду этого совершенно безразлично, в какой из двух возможных форм писать уравнение Шредингера.

Рассмотрим теперь физический смысл решений уравнения Шредингера. Напишем волновое уравнение классической физики, с которым мы встретились в § 124

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad (124,4)$$

и сравним его с уравнением Шредингера, содержащим время

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta\psi + U\psi. \quad (143,12)$$

Классическое волновое уравнение, как известно, имеет действительные решения вида  $a \cos[2\pi(kr - vt) + \delta]$ . Однако непосредственной проверкой легко убедиться в том, что уравнение



Шредингера этими действительными решениями не удовлетворяется, но удовлетворяется только *комплексными* решениями, например, при  $U=0$

$$\psi = Ae^{i2\pi(kx - \nu t)}$$

Эта особенность уравнения Шредингера обусловлена тем, что (в отличие от классического волнового уравнения) оно содержит *первую* производную по времени и вторые — по координатам. Мы показали, что это получилось потому, что мы искали волновое уравнение, которое соответствовало бы закону дисперсии волн де-Броглия (в ньютоновом приближении)

$$\nu = \frac{h}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \quad (143,5)$$

содержащему первую степень  $\nu$  и вторые степени составляющих волнового вектора.

Этот факт весьма существенен для понимания смысла уравнения Шредингера. Он показывает, что, хотя уравнение Шредингера в некоторых случаях удовлетворяется периодическими решениями, никаких реальных волн, распространяющихся в физической среде, оно не описывает. Если, несмотря на это иногда говорят о «волнах» материи стоячих и бегущих, об узлах и пучностях и т. д., то это делается исключительно для наглядности. Истинный смысл решений уравнения Шредингера совсем иной.

В самом деле, в предыдущей главе мы видели, что поведение свободного электрона описывается плоской волной де-Броглия, но физический смысл имеет только *квадрат амплитуды* этой волны, очевидно, равный квадрату модуля комплексной  $\psi$ -функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера (143,12) при  $U=0$ . Действительно, при

$$\begin{aligned} \psi &= Ae^{i2\pi(kx - \nu t)} \equiv ae^{i\delta} \cdot e^{i2\pi(kx - \nu t)}, \\ \psi^* &= A^*e^{-i2\pi(kx - \nu t)} \equiv ae^{-i\delta} \cdot e^{-i2\pi(kx - \nu t)} \end{aligned}$$

имеем

$$a^2 = |A|^2 = \psi^* \psi$$

Этот квадрат амплитуды мы истолковали статистически:  $a^2 d\tau = \psi^* \psi d\tau$  согласно § 138, есть вероятность нахождения частицы в объеме  $d\tau = dx dy dz$ , т. е. в области с координатами между  $x$  и  $x + dx$ ,  $y$  и  $y + dy$ ,  $z$  и  $z + dz$ . Это статистическое истолкование мы сохраняем и для решений уравнения (143,12) в общем случае: квадрат модуля комплексной функции  $\psi$ , удовлетворяющей этому уравнению, мы толкуем как плотность

вероятности найти частицу в объёме  $d\tau$  около точки с координатами  $x, y, z$ . Сама же вероятность пропорциональна  $\psi\psi^* d\tau$ .

Функция  $\psi$  по своему смыслу должна удовлетворять некоторым естественным условиям. Прежде всего она должна быть всюду непрерывной и однозначной. Далее, поскольку мы толкуем  $\psi\psi^* d\tau$  как вероятность, появляется необходимость нормировать эту функцию  $\psi$  таким образом, чтобы вероятность достоверного события равнялась 1. Так как декартовы координаты меняются от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то достоверное событие состоит в том, что частица находится где-нибудь в пространстве. Условие нормирования поэтому будет таково:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi d\tau = 1. \quad (143,15)$$

В учебниках анализа доказывается\*), что несобственный интеграл с бесконечными пределами существует в том случае, если функция достаточно быстро убывает при удалении от начала координат, а именно, функция с интегрируемым квадратом должна убывать по крайней мере как  $\frac{1}{r^p}$ , где  $p > 1$ . Мы увидим в настоящей и в следующих главах, что перечисленные естественные условия имеют в квантовой механике огромное значение. Свойства решений уравнения Шредингера таковы, что решения удовлетворяют этим требованиям только при очень определённых условиях, например при определённых дискретных значениях энергии, входящей в качестве параметра в уравнение. В этом, как будет показано на конкретных примерах, лежит ключ к объяснению дискретности механических величин в квантовой механике.

#### § 144. Отражение и прохождение через потенциальный барьер

В главе X мы рассматривали движение частицы в пространстве, свободном от поля. В качестве первого примера применения уравнения Шредингера рассмотрим поведение частицы на границе двух областей I и II, в каждой из которых потенциальная энергия частицы постоянна, но эти потенциальные энергии различаются на конечную величину. Схематизируя реально встречающиеся условия, мы предположим, что на границе областей I и II потенциальная энергия изменяется скачком, как это показано на рис. 199 и 200, причём в области I потенциал пусть будет равен нулю, а в области II пусть он будет равен  $+U$ .

\*) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, стр. 258, Гостехиздат, 1948.

Напишем теперь уравнение Шредингера для той и другой областей и с этой целью выберем направление прямолинейного движения частицы за ось  $x$ . Тогда оператор Лапласа  $\Delta$ , входящий в уравнение Шредингера, сведётся ко второй производной по одной координате  $\frac{d^2}{dx^2}$ , и мы получим для области  $I$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\psi_1 = 0, \quad (144,1)$$

для области  $II$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U)\psi_2 = 0. \quad (144,2)$$

Введём обозначения

$$k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} = 2\pi \frac{mv_1}{h} = \frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad (144,3)$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U)} = 2\pi \frac{mv_2}{h} = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \quad (144,4)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — соответственно длины волн де-Броглия в области  $I$  и в области  $II$ . Уравнения (144,1) и (144,2) теперь переписутся в виде

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0, \quad (144,1')$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2^2\psi_2 = 0. \quad (144,2')$$

Это — обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Частные решения их имеют вид  $e^{\pm ik_1x}$  и  $e^{\pm ik_2x}$ . Очевидно, что эти частные решения представляют собою плоские волны де-Броглия в области  $I$  и в области  $II$ . В самом деле, возьмём какое-нибудь из них, например  $e^{ik_1x}$ , и присоединим к нему «монохроматический» временной множитель  $e^{-i\frac{2\pi}{h}Et} = e^{-i2\pi vt}$ ; мы получим

$$e^{ik_1x} \cdot e^{-i2\pi vt} = e^{i2\pi \left( \frac{x}{\lambda_1} - vt \right)}.$$

Но это и есть формула плоской волны, распространяющейся в области  $I$  в направлении положительной оси  $x$ .

Общие решения уравнений (144,1') и (144,2') таковы:

$$\psi_1 = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x}, \quad (144,5)$$

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2x} + b_2 e^{-ik_2x}. \quad (144,6)$$

Рассмотрим теперь условия перехода частицы из области  $I$  в область  $II$  в двух случаях: а) когда полная энергия частицы  $E$  больше её потенциальной энергии  $U$  в области  $II$  (рис. 199) и б) когда  $E < U$  (рис. 200).

а) При  $E > U$  частица, подчиняющаяся классической механике, обязательно (иначе говоря, с достоверностью) перейдёт из области  $I$  в область  $II$ . В самом деле, положим, что эта частица несёт электрический заряд и движется в области  $I$  слева направо. На границе  $I$  и  $II$  она попадёт в поле задерживающего потенциала  $U$ , но так как её полная энергия  $E$  больше  $U$ , то частица преодолевает это задерживающее поле и продолжает своё движение в области  $II$  с уменьшенной энергией  $E - U$ .

Мы сейчас увидим, что частица, подчиняющаяся уравнению Шредингера, например электрон, должна вести себя совершенно иначе. Это вытекает уже из следующих качественных сообра-

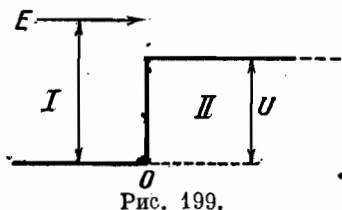


Рис. 199.

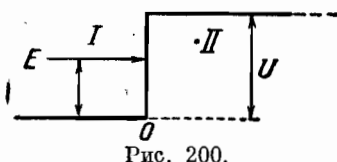


Рис. 200.

жений. Движение электрона представляется плоской волной де-Броглия. На границе двух областей, где происходит внезапное изменение потенциала, эта волна должна вести себя так, как ведёт себя световая волна на границе двух областей с различным показателем преломления (см. § 134). Это значит, что на границе областей  $I$  и  $II$  волна де-Броглия частью отражается, а частью проходит в область  $II$ . Мы можем также сказать, что, переходя из одной области в другую, электрон имеет определённую вероятность отразиться и определённую вероятность пройти дальше в область  $II$ .

Наша задача теперь состоит в том, чтобы найти эти вероятности. Для этого мы прежде всего заметим, что частное решение  $e^{ik_1x}$  соответствует волне, идущей в направлении положительной оси  $x$  (слева направо), т. е. падающей волне, а частное решение  $e^{-ik_1x}$  соответствует отражённой волне. То же самое справедливо для частных решений  $e^{\pm ik_2x}$ . Принимая во внимание, что в области  $I$  распространяются как падающая, так и отражённая волны, мы видим, что для этой области имеет смысл общее решение (144,5), состоящее из двух членов:

$$\psi_1 = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x}, \quad (144,5)$$

причём  $a_1^2$  есть интенсивность падающей волны, а  $b_1^2$  — интенсивность волны отражённой. В области же  $II$  распространяется

только проходящая волна. Поэтому в (144,6) следует положить  $b_2 = 0$  и тогда

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2 x}. \quad (144,6')$$

Положим теперь, что амплитуда падающей волны  $a_1$  равна 1, и вычислим остальные две амплитуды  $b_1$  и  $a_2$ . Для этого нам придётся воспользоваться «граничными условиями», состоящими в том, что на границе областей не только сама функция  $\psi$ , но и её первая производная — непрерывны. Непрерывность первой производной вытекает из следующих соображений. Представим себе, что вертикальная ступень слева на рис. 201 заменена наклонной (пунктир на рис. 201); пусть ширина переход-

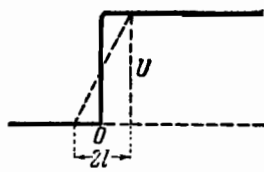


Рис. 201.

ной области равна  $2l$  и потенциал в этой области непрерывно меняется от 0 до  $U$ . Приняв во внимание обозначение (144,3) и (144,4), перепишем оба уравнения (144,1') и (144,2') в виде

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k'^2 \psi. \quad (144,7)$$

При этом коэффициент  $k'$  в области от  $-l$  до  $+l$  непрерывно меняется от  $k' = k_1$  до  $k' = k_2$ . Для этой области мы имеем, с одной стороны,

$$\int_{-l}^{+l} \frac{d^2 \psi}{dx^2} dx = \left( \frac{d\psi}{dx} \right)_{+l} - \left( \frac{d\psi}{dx} \right)_{-l},$$

а с другой стороны, применяя теорему о среднем значении к правой части (144,7),

$$\int_{-l}^{+l} k'^2 \psi dx = -2lk'^2 \psi.$$

Итак,

$$\left( \frac{d\psi}{dx} \right)_{+l} - \left( \frac{d\psi}{dx} \right)_{-l} = -2lk'^2 \psi$$

или, переходя к пределу при  $l \rightarrow 0$ ,

$$\left( \frac{d\psi_1}{dx} \right)_{x=0} = \left( \frac{d\psi_2}{dx} \right)_{x=0}.$$

Непрерывность функции  $\psi$  на границе обеих областей даёт

$$(\psi_1)_{x=0} = (\psi_2)_{x=0}$$

или, если воспользоваться (144,5), при  $a_1 = 1$  и (144,6')

$$1 + b_1 = a_2. \quad (144,8)$$

Из условия непрерывности производной

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$$

при помощи (144,5) и (144,6') находим

$$1 - b_1 = \frac{k_2}{k_1} a_2. \quad (144,9)$$

Решая уравнения (144,8) и (144,9) относительно  $b_1$  и  $a_2$ , получаем

$$b_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (144,10)$$

Теперь мы можем, пользуясь аналогией с оптикой, определить коэффициент отражения  $R$  и коэффициент прозрачности  $D$ . Коэффициент отражения равен отношению квадратов амплитуд отражённой и падающей волн или, принимая во внимание, что амплитуда падающей волны  $a_1$ , по условию, равна 1:

$$R = b_1^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2. \quad (144,11)$$

При вычислении коэффициента прозрачности  $D$  нужно умножить отношение квадратов амплитуд проходящей и падающей волн на отношение скоростей частиц в той и другой областях по следующей причине. Коэффициент прозрачности равен отношению проходящего потока частиц к падающему. Представим себе цилиндр с основанием, равным  $1 \text{ см}^2$ , и высотой, равной скорости  $v$ . Если плотность частиц в этом цилиндре равна  $\rho$ , то полное число частиц в нём есть  $\rho v$  и все эти частицы проходят через основание цилиндра в  $1 \text{ сек}$ . Итак, поток частиц равен  $\rho v$ , а следовательно, коэффициент прозрачности

$$D = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{v_2}{v_1}.$$

Но плотность частиц  $\rho$  пропорциональна квадрату амплитуды волны де-Броглия, а отношение скоростей

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

или, учитывая (144,3) и (144,4),

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Поэтому имеем окончательно

$$D = \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = a_2^2 \cdot \frac{k_2}{k_1} \quad (144,12)$$

( $a_1$  по предыдущему есть 1) и, пользуясь выражением  $a_2$  по (144,10), находим

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \cdot \quad (144,13)$$

Коэффициенты  $R$  и  $D$  мы можем истолковать с корпускулярной точки зрения следующим образом:  $R$  представляет вероятность частице испытать отражение на границе областей, а  $D$  — вероятность пройти в область II или, как принято говорить, — вероятность преодолеть потенциальный барьер.

Складывая (144,11) и (144,13), находим  $R + D = 1$ , что и следовало ожидать на основании теоремы сложения вероятностей, так как можно с достоверностью утверждать, что на границе областей частица либо отразится, либо пройдет дальше.

Вычислим теперь коэффициенты отражения и пропускания в зависимости от соотношения между полной энергией  $E$  и потенциальной энергией  $U$ . Мы имеем

$$k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} = 2\pi \frac{p_1}{h}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E-U)} = 2\pi \frac{p_2}{h},$$

$$R = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left( \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 - U/E}} \right)^2,$$

$$D = 1 - R = 4 \frac{\sqrt{1 - U/E}}{(1 + \sqrt{1 - U/E})^2}.$$

В таблице XX приведено несколько численных значений  $R$

Таблица XX

$\frac{U}{E}$	$R$	$D$	$\frac{E}{U}$
0,1	0,0007	0,9993	10
0,5	0,0293	0,9707	2
0,8	0,149	0,851	1,25
0,9	0,2703	0,7303	1,11
1,0	1,000	0,000	1,0

и  $D$ . Из этой таблицы видно, что, когда энергия частицы вдвое больше высоты «потенциальной ступени»  $U$ , вероятность

отражения уже имеет вполне заметную величину (около 3%), а при  $U = E$  проникновение в область II вообще невозможно, тогда как по классической механике в этом случае, так же, как и в остальных, частица с достоверностью переходит в область II, но только её кинетическая энергия там равна нулю.

Причина, из-за которой мы не наблюдаем этого квантового отражения в обыкновенных макроскопических опытах с электронами, заключается в том, что потенциал на границе изменяется на участке «макроскопической» величины, а не возрастает внезапно, как на рис. 199. Если, однако, ширина переходной области имеет атомные размеры ( $1 - 10 \text{ \AA}$ ), то этот эффект должен иметь место и его необходимо учитывать.

б) При  $E < U$  по классической механике переход из области II в область I невозможен, так как при этом условии (потенциальная энергия больше полной) кинетическая энергия частицы в области I должна была бы сделаться отрицательной, а скорость — мнимой.

Вычислим коэффициент отражения  $R$  для этого случая, пользуясь квантовой механикой. Прежде всего следует обратить внимание на то, что при  $E < U$  величина  $k_2$  становится чисто мнимой:

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E-U)} = i \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} = ik,$$

где  $k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)}$ . Ввиду этого при вычислении  $R$  по формуле (144,11) возведение в квадрат следует заменить перемножением комплексно сопряжённых величин  $RR^*$ , или, что то же, отысканием квадрата модуля:

$$R = \left| \frac{k_1 - ik}{k_1 + ik} \right|^2 = 1, \quad D = 1 - R = 0.$$

Итак, при  $E < U$  коэффициент отражения равен 1, т. е. отражение является полным. Как видно, этот результат вполне соответствует ожиданию. Однако неожиданным является то, что, как мы сейчас покажем, хотя отражение и полное, — имеется определённая вероятность найти частицу в области II. Другими словами, отражение не обязательно происходит на самой границе областей, но некоторые частицы заходят в область II с тем, что бы потом вернуться в область I. В самом деле, так как при  $E < U$  коэффициент  $k_2$  становится чисто мнимым и равным  $ik$ , то решение уравнения Шредингера для области II приобретает вид

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2 x} = a_2 e^{-kx},$$



а вероятность найти частицу на единице длины будет поэтому

$$\psi_2 \psi_2^* = \psi_2^2 = a_2^2 e^{-2kx} = a_2^2 e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} x}. \quad (144,14)$$

Это означает, что имеется вполне определённая вероятность найти частицу в области II. Правда, эта вероятность экспоненциально (т. е. очень быстро) убывает с увеличением  $x$ , но она отлична от нуля: микроскопические частицы могут проникать в области, «запрещённые» для частиц макроскопических.

Подсчитаем, например, какова относительная вероятность найти электрон на расстоянии  $x = 1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$  от границы при условии, если  $U - E = 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ . Мы имеем

$$\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} x = \frac{12,56}{6,6 \cdot 10^{-27}} \sqrt{1,87 \cdot 10^{-27} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-8}} = 1,045,$$

$$e^{-1,045} = 0,29.$$

Как видно—вероятность очень большая (около 30%); при  $x = 5 \text{ \AA}$  она становится равной  $e^{-5,2} = 0,005$ , т. е. малой, но ещё вполне заметной; однако, уже при  $x = 10 \text{ \AA}$  экспоненциальный фактор становится равным ничтожной величине  $e^{-10,45} = 4,54 \cdot 10^{-5}$ .

Истолкование полученных результатов с волновой точки зрения не представляет затруднений, так как случай  $E < U$  аналогичен случаю полного внутреннего отражения в оптике. В самом деле, с точки зрения геометрической оптики при переходе света из более плотной среды в менее плотную, когда угол падения больше критического, свет не может проникнуть в менее плотную среду. Однако волновая оптика показывает, и опыт подтверждает, что в действительности в этой менее плотной среде, даже и при углах падения, больших критического, имеется волновое поле с экспоненциально убывающей амплитудой. При этом убывание амплитуды приблизительно определяется множителем  $e^{-2\pi x/\lambda}$ , а убывание интенсивности — множителем  $e^{-4\pi x/\lambda}$  — закон, совершенно аналогичный закону убывания плотности вероятности  $\psi^2$  для  $E < U$ . Далее, вычисление показывает, что несмотря на проникновение света во вторую среду, среднее значение составляющей вектора Умова — Пойнтинга (поток энергии), нормальной к поверхности раздела, за достаточно большой промежуток времени равно нулю. Это означает, что движения энергии, однообразие направленного из первой среды во вторую, не имеется.

Детальный анализ этого случая, выполненный А. А. Эйхенвальдом, показал, что при полном внутреннем отражении линии вектора Умова — Пойнтинга оказываются кривыми; они заходят во вторую среду и вновь выходят в первую; отражение продолжает оставаться полным, несмотря на установление поля во вто-

рой среде \*). В соответствии с этим и в нашем случае коэффициент отражения  $R$  равен 1, а коэффициент пропускания равен нулю: частицы «заходят» в область  $II$ , проникают на некоторое расстояние и вновь возвращаются в область  $I$ .

Если, таким образом, волновое истолкование проникновения в «запрещённую» область оказывается очень простым, то с корпускулярной точки зрения это явление представляется на первый взгляд непонятным. В самом деле, если имеется не равная нулю вероятность найти частицу справа от барьера, то значит её там можно обнаружить. С точки зрения классической механики обнаружить частицу в области, где  $E < U$ , как уже сказано, невозможно, так как прохождение частицы из области  $I$  в область  $II$  при  $E < U$  было бы связано с нарушением закона сохранения энергии.

В квантовой механике, однако, нет никакого парадокса в том, что частицу можно обнаружить в области, где  $E < U$ . Во-первых, необходимо всегда помнить, что для микроскопических частиц, в силу соотношений неопределённости, одновременные точные значения  $x$  и  $p$  невозможны. Поэтому не имеет смысла говорить об одновременных определённых значениях потенциальной (функция  $x$ ) и кинетической (функция  $p$ ) энергии. Далее, что значит найти частицу справа от барьера? Для этого, очевидно, надо измерить её координату  $x$ . Но в квантовой механике утверждение, что можно измерить ту или иную механическую величину, приобретает содержание только тогда, когда указан способ, каким это измерение может быть произведено. При анализе интересующего нас вопроса с этой точки зрения оказывается, что не всякий способ измерения координаты пригоден в случае  $E < U$ , а если он пригоден, то частица получает со стороны измерительного прибора такую добавочную порцию энергии, что закон сохранения энергии оказывается ненарушенным.

Приведём этот анализ. Пусть нам удалось измерить координату частицы приближённо, но так, что оказалось, что частица находится где-то справа от барьера в пределах отрезка, равного  $l$ . В таком случае координата частицы уже не будет совершенно неопределённой, но будет нам известна с неточностью  $\Delta x = l$ . Но если мы уже определили координату с неточностью  $\Delta x = l$ , то импульс должен приобрести неопределённость

$$\Delta p \geq \frac{h}{l}. \quad (144,15)$$

Откуда может возникнуть этот добавочный импульс  $\Delta p$ ? Чтобы с уверенностью утверждать, что частица находится

\*) См., например, Г. С. Ландсберг, Оптика, § 130, Гостехиздат, 1947; А. А. Эйхенвальд, Теоретическая физика, ч. VI, § 216, ГНТИ, 1931.

справа, а не слева от барьера, разрешающая способность оптического прибора, с помощью которого производится определение координаты частицы, должна быть достаточно высока. А для этого, как известно из оптики, длина волны света, применяемого для освещения частицы, должна быть соответственно мала. Но в таком случае, частица при рассеянии света получает комптоновский отброс, который и создаёт неопределённость импульса.

Но неопределённость импульса  $\Delta p$  соответствует неопределённость энергии  $\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m}$ . Оценим её. Так как вероятность нахождения частицы по формуле (144,14) убывает с увеличением  $x$  экспоненциально, то имеет смысл отыскивать частицу на таких расстояниях от барьера, для которых показатель степени в (144,14) порядка 1, т. е.

$$\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} l \sim 1,$$

откуда

$$l \sim \frac{h}{4\pi \sqrt{2m(U-E)}}.$$

Таким образом, неопределённость импульса по (144,15) будет

$$\Delta p \geq 4\pi \sqrt{2m(U-E)},$$

а следовательно, и по-прежнему

$$\Delta p > \sqrt{2m(U-E)}.$$

Поэтому

$$(\Delta p)^2 > 2m(U-E)$$

и

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m} > U-E.$$

Итак, добавочная энергия, которую получает частица при измерении координаты, больше разности между потенциальной и кинетической энергией, а потому возможность обнаружения частицы справа от барьера не противоречит закону сохранения энергии.

### § 145. Потенциальный барьер конечной ширины

Продолжим рассмотрение задачи о барьерах и займёмся исследованием случая, когда барьер имеет конечную ширину. Условия задачи, которую мы будем решать в этом параграфе, таковы: частица движется слева направо параллельно оси  $x$  в поле, которое мы разделим на три области.

В области I, т. е. при  $x \leq 0$ , потенц. энергия  $U = 0$ ,  
 » » II » »  $0 \leq x \leq d$ , » »  $U = \text{const.} \neq 0$ ,  
 » » III » »  $x \geq d$ , » »  $U = 0$ .

Этот тип барьера схематически представляет условия, встречающиеся при решении многих задач атомной физики (например, эмиссия электронов из металлов, радиоактивный распад и т. д.).

Напишем уравнение Шредингера для каждой области отдельно: для областей I и III ( $U = 0$ ):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\psi = 0 \quad (145,1)$$

и для области II ( $U \neq 0$ ):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - U)\psi = 0. \quad (145,2)$$

Решения этих уравнений будут соответственно

$$\psi_{I, III} = e^{\pm ik_1x} \quad \left( k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\lambda} \right), \quad (145,3)$$

$$\psi_{II} = e^{\pm ik_2x} \quad \left( k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U)} \right). \quad (145,4)$$

В предыдущем параграфе мы рассмотрели случай перехода частицы в безгранично протяжённую область с иной потенциальной энергией, и мы видели, что при любом соотношении между энергией частицы и высотой потенциального барьера имеется определённая вероятность частице испытать отражение и определённая вероятность проникнуть в область II. В случае, который нам предстоит рассмотреть, потенциальный барьер имеет конечную ширину; мы увидим, что здесь всегда имеется ещё и определённая вероятность того, что частица пройдёт сквозь область II и выйдет в область III. В особенности интересно, что даже тогда, когда полная энергия падающей частицы меньше её потенциальной энергии в области II, эта вероятность имеет конечную величину, причём частица в этом случае выходит в область III с той же энергией, какой она обладала в области I.

Отличие рассматриваемого случая от изученного в предыдущем параграфе состоит в том, что здесь отражение имеет место как на границе областей I и II, так и на границе областей II и III. В соответствии с этим решениями будут

$$\psi_I = e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x}, \quad \psi_{II} = a_2 e^{ik_2x} + b_2 e^{-ik_2x}, \quad \psi_{III} = a_3 e^{ik_1x}. \quad (145,5)$$

При этом, как и в предыдущем параграфе, коэффициент  $a_1$  положен равным единице.

Для вычисления коэффициентов  $R$  и  $D$  необходимо найти прежде всего постоянные  $b_1, b_2, a_2, a_3$ . С этой целью мы воспользуемся условиями непрерывности функции  $\psi$  и её первой производной на границах областей  $I$  и  $II$ ,  $II$  и  $III$ , т. е. при  $x=0$  и при  $x=d$ . Выпишем эти условия:

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0}, \quad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}, \quad (145,6)$$

$$(\psi_{II})_{x=d} = (\psi_{III})_{x=d}, \quad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=d} = \left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=d}. \quad (145,7)$$

Эти условия дают

$$\left. \begin{aligned} 1 + b_1 &= a_2 + b_2, \\ k_1 - k_1 b_1 &= k_2 a_2 - k_2 b_2, \\ a_2 e^{ik_2 d} + b_2 e^{-ik_2 d} &= a_3 e^{ik_1 d}, \\ a_2 e^{ik_2 d} - b_2 e^{-ik_2 d} &= a_3 \frac{k_1}{k_2} e^{ik_1 d}. \end{aligned} \right\} \quad (145,8)$$

Решая эту систему уравнений, найдём следующее выражение для  $a_3$ :

$$a_3 = \frac{4k_1 k_2 e^{ik_1 d}}{(k_1 + k_2)^2 e^{-ik_2 d} - (k_1 - k_2)^2 e^{ik_2 d}}. \quad (145,9)$$

Мы не будем вычислять коэффициент отражения  $R$ , так как это вычисление не дало бы ничего принципиально нового по сравнению со сказанным в предыдущем параграфе. Поэтому остальные постоянные  $b_1, a_2, b_2$  нам не понадобятся. Коэффициент прозрачности барьера  $D$  [см. формулу (144,12)] в данном случае равен просто квадрату модуля  $a_3$  ввиду того, что длина волны в областях  $I$  и  $III$  — одна и та же:

$$D = |a_3|^2 = a_3 a_3^*. \quad (145,10)$$

Для нас представляет интерес величина  $D$  в том случае, когда  $E < U$ . При этом

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U)}$$

будет, очевидно, чисто мнимым числом. Положим

$$k_2 = ik,$$

где

$$k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)}. \quad (145,11)$$

Экспоненциальные функции  $e^{\pm ik_2 d}$ , входящие в знаменатель (145,9), будут при этом условием действительными числами  $e^{\mp kd}$ . Вместо (145,9) мы получим

$$a_3 = \frac{i \cdot 4k_1 k e^{ik_1 d}}{(k_1 + ik)^2 e^{kd} - (k_1 - ik)^2 e^{-kd}},$$

$$a_3^* = \frac{-i \cdot 4k_1 k e^{-ik_1 d}}{(k_1 - ik)^2 e^{kd} - (k_1 + ik)^2 e^{-kd}}.$$

Вводя гиперболические функции

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

приведём выражения для  $a_3$  и  $a_3^*$  к виду

$$a_3 = \frac{i \cdot 2k_1 k e^{ik_1 d}}{(k_1^2 - k^2) \operatorname{sh} kd + 2ikk_1 \operatorname{ch} kd},$$

$$a_3^* = \frac{-i \cdot 2k_1 k e^{-ik_1 d}}{(k_1^2 - k^2) \operatorname{sh} kd - 2ikk_1 \operatorname{ch} kd}.$$

Это даёт

$$D = a_3 a_3^* = \frac{4k_1^2 k^2}{(k_1^2 - k^2)^2 \operatorname{sh}^2 kd + 4k^2 k_1^2 \operatorname{ch}^2 kd};$$

после преобразований, принимая во внимание, что

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

получим

$$D = \frac{4k_1^2 k^2}{(k_1^2 + k^2)^2 \operatorname{sh}^2 kd + 4k_1^2 k^2}. \quad (145,12)$$

Примем теперь во внимание, что в значительном большинстве интересных для нас случаев можно считать  $\operatorname{sh}^2 kd$  равным просто  $e^{2kd}$ . В самом деле, например, для электронов при  $U - E = 150 \text{ V}$  и  $d = 10^{-8} \text{ см}$ ,  $kd = \frac{2\pi}{10^{-8}} \cdot 10^{-8} = 6,28$ . Поэтому

$$e^{2kd} = e^{12,56} = 2,9 \cdot 10^5, \quad e^{-2kd} = e^{-12,56} = 3,5 \cdot 10^{-3}.$$

Написав теперь  $D$  в виде

$$D = \frac{4}{\frac{1}{4} \left( \frac{k_1}{k} + \frac{k}{k_1} \right)^2 e^{2kd} + 4},$$

мы замечаем, что 4 в знаменателе можно отбросить по сравнению с  $e^{2kd}$  и так как  $k_1$  и  $k$  — одного порядка величины, то с точностью до несущественного множителя:

$$D \sim e^{-2kd} = e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} d}. \quad (145,13)$$

Эта формула показывает, что проникаемость барьера в очень сильной степени зависит от его ширины  $d$ .

Вычислим значение экспоненциального фактора для электронов. Возьмём для массы электрона  $m = 9,8 \cdot 10^{-28}$ , для постоянной Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-27}$ . Если разность между высотой барьера  $U$  и энергией электрона равна  $V$  электрон-вольт или  $1,6 \cdot 10^{-12} V$  эргов, то

$$\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)} = 1,08 \cdot \sqrt{V} \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}.$$

Задаваясь разностью  $U-E=V=5 \text{ eV}$ , получим следующие значения экспоненциального множителя для различной ширины барьера:

$d$ (в Å)	1	1,3	1,5	1,8	2,0	5,0	10,0
$D$	0,1	0,04	0,03	0,016	0,008	$5,54 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-12}$

Как видно, для ширины барьера в  $1 \text{ Å}$  (атомные размеры) проникаемость довольно велика (несколько процентов), но уже для  $d = 10 \text{ Å}$  она становится ничтожно малой.

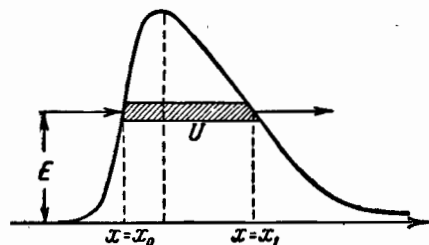


Рис. 202. Потенциальный барьер произвольной формы.

Интересно отметить, что прохождение через потенциальный барьер не сопровождается для частицы потерей энергии: она выходит из пределов барьера с той же энергией, с какой в него попадает.

Мы рассмотрели случай прохождения частицы через потенциальный барьер весьма упрощённой прямоугольной формы. Можно показать, что коэффициент прозрачности барьера произвольного вида (см. рис. 202) выражается с достаточным приближением формулой, которая является естественным обобщением формулы (145,13)

$$D = Ce^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{U-E} dx} \quad (145,14)$$

где  $C$  — несущественная постоянная порядка единицы. Эту формулу мы в дальнейшем применим к некоторым конкретным физическим задачам.

Прохождение через потенциальный барьер часто образно называют *туннельным эффектом*: для преодоления барьера частица не взбирается на его вершину, но проходит *под ней* как бы через туннель. Основы теории туннельных переходов были заложены в работе Л. И. Мандельштама и М. А. Леонтовича.

Многие явления, недоступные для объяснения в классической механике, легко объясняются в квантовой механике именно благодаря рассмотренным в последних двух параграфах своеобразным свойствам микроскопических частиц. К этому вопросу мы ещё вернёмся в следующих параграфах.

### § 146. Колебания струны

Задачи, рассмотренные в предыдущих параграфах, сразу раскрывают перед нами своеобразие законов, управляющих движением очень малых частиц. В следующих параграфах мы покажем, каким образом из уравнения Шредингера совершенно непринуждённо вытекает уже известная нам особенность атомных систем, резко отличающая их от систем, подчиняющихся классической механике: существование дискретных уровней энергии. Мы увидим, что эта особенность находится в тесной связи с некоторыми свойствами дифференциального уравнения Шредингера, — свойствами, которые были открыты уже очень давно, при решении определённых задач классической физики.

Для того чтобы облегчить понимание дальнейшего, рассмотрим сначала одну из таких классических задач — наиболее характерную с нашей точки зрения — задачу о колебаниях натянутой струны, имеющей по всей длине одну и ту же плотность ( $\rho = \text{const.}$ ) и одинаковое натяжение ( $T = \text{const.}$ ).

Уравнение колебаний струны \*) есть волновое уравнение для одного измерения

$$\frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (146,1)$$

где  $u(x, t)$  — отклонение струны от положения равновесия, а  $c'$  — скорость распространения волны на струне, связанная с натяжением  $T$  струны и её плотностью  $\rho$  формулой

$$c' = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (146,2)$$

При постоянных  $T$  и  $\rho$   $c' = \text{const.}$

Положим сначала, что струна безгранична, и рассмотрим случай, когда волна гармоническая (монохроматическая).

\*) Вывод уравнения колебаний струны см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, § 163, Гостехиздат, 1948.



Тогда каждый участок струны совершает гармонические колебания, и мы можем искать решение уравнения (146,1) в виде

$$u(x, t) = y(x) e^{i2\pi \nu t}. \quad (146,3)$$

Подставив это решение в (146,1), получим после сокращения на  $e^{i2\pi \nu t}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c'^2} y = 0, \quad (146,4)$$

или, заменяя  $\nu/c$  через  $1/\lambda$ ,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} y = 0. \quad (146,5)$$

Это уравнение удовлетворяется решениями  $e^{\pm i \frac{2\pi}{\lambda} x}$ . Общее решение будет поэтому

$$y = B_1 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x} + B_2 e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} x}, \quad (146,6)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  — произвольные постоянные, вообще говоря, комплексные, т. е. включающие начальные фазы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  (см. § 45):

$$B_1 = b_1 e^{i\delta_1}, \quad B_2 = b_2 e^{-i\delta_2}.$$

Вводя в решение (146,6) действительные амплитуды  $b_1$  и  $b_2$ , получим

$$y = b_1 e^{i \left( \frac{2\pi}{\lambda} x + \delta_1 \right)} + b_2 e^{-i \left( \frac{2\pi}{\lambda} x + \delta_2 \right)}. \quad (146,7)$$

Если мы теперь припишем к каждому члену (146,7) временной множитель  $e^{i2\pi \nu t} = e^{i \frac{2\pi}{\lambda} c't}$ , то получим общее решение уравнения (146,1):

$$u(x, t) = b_1 e^{i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + c't) + \delta_1 \right]} + b_2 e^{-i \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - c't) + \delta_2 \right]} \quad (146,8')$$

или, если взять только действительную часть,

$$u(x, t) = b_1 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x + c't) + \delta_1 \right] + b_2 \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x - c't) + \delta_2 \right]. \quad (146,8)$$

Каждый из членов этого решения представляет собою волну, распространяющуюся на струне; при этом, если первый член соответствует волне, распространяющейся слева направо (скорость  $+c'$ ), то второй соответствует волне, бегущей справа налево (скорость  $-c'$ ).

Положим, что  $b_1 = b_2 = \frac{a}{2}$ , и преобразуем сумму косинусов, входящих в (146,8), по известному правилу тригонометрии:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \delta'\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} c't + \delta\right) = \\ &= a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \delta'\right) \cos(2\pi\nu t + \delta), \end{aligned} \quad (146,9)$$

где  $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \delta'$ ,  $\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} = \delta$ . Очевидно, что это решение представляет стоячие волны на струне, так как при тех значениях  $x$ , которые удовлетворяют условию

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \delta'\right) = 0,$$

отклонение  $u(x, t)$  будет равно нулю при любом  $t$ . Это значит, что на струне имеются места, где отклонение всё время равно нулю — узлы, между которыми располагаются места, где оно имеет максимальную величину, — пучности.

Положим теперь, что струна жёстко закреплена с одного конца (например, при  $x=0$ ). Мы имеем, таким образом, одно краевое условие:

$$u(0, t) = 0. \quad (146,10)$$

Это краевое условие будет удовлетворено, если

$$u(0, t) = a \cos \delta' \cos(2\pi\nu t + \delta),$$

что может быть (исключая тривиальный случай  $a=0$ ) только в том случае, когда  $\delta' = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ , т. е.

$$u(x, t) = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cos(2\pi\nu t + \delta). \quad (146,11)$$

Если струна имеет конечную длину  $l$  и закреплена на обоих концах, то решение (146,9) должно удовлетворять двум крайним условиям

$$u(0, t) = 0 \quad \text{и} \quad u(l, t) = 0.$$

Применяя первое условие, мы получаем уже известное решение (146,11); второе краевое условие, записанное в явном виде, требует, чтобы

$$a \sin \frac{2\pi}{\lambda} l \cos(2\pi\nu t + \delta) = 0$$

при любых значениях  $t$ . Это требование будет удовлетворено, если

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (146,12)$$

откуда

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = n \frac{\pi}{l} \quad \text{и} \quad 2\pi\nu_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} c' = n \frac{\pi c'}{l}. \quad (146,13)$$

Итак, решения, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (146,1) и краевым условиям (146,12), представляют собою совокупность бесконечного числа *избранных* функций

$$\sin n \frac{\pi x}{l} \cos(2\pi\nu_n t + \delta_n) \equiv \sin n \frac{\pi x}{l} \cos\left(n \frac{\pi c'}{l} t + \delta_n\right) \quad (146,14)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Эти функции описывают различные *стоячие волны* или *собственные колебания*, которые может совершать струна, закреплённая на обоих концах. Действительно, полагая в (146,12)  $n=1$ , получаем решение

$$u_1 = \sin \pi \frac{x}{l} \cos\left(\frac{\pi c'}{l} t + \delta\right). \quad (146,15)$$

Это решение представляет стоячую волну, имеющую два узла — при  $x=0$  и при  $x=l$ , так как только при этих значениях  $x$  функция (146,15) обращается в нуль для любых значений  $t$ . При  $n=2$  мы получаем стоячую волну

$$u_2 = \sin 2 \frac{\pi x}{l} \cos\left(2 \frac{\pi c'}{l} t + \delta\right),$$

которая имеет три узла при  $x=0$ ,  $l/2$ ,  $l$ , т. е. два узла по концам струны и один — посередине. Вообще,  $m$ -я функция

$$u_m = \sin m \frac{\pi x}{l} \cos\left(m \frac{\pi c'}{l} t + \delta\right)$$

описывает стоячую волну, имеющую  $m+1$  узлов. Заметим уже сейчас, что целое число  $m$  играет здесь ту самую роль, которую играют квантовые числа в задачах атомной физики.

Длины волн, способных устанавливаться на струне, закреплённой на обоих концах, найдутся из формулы (146,12):

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad (146,16)$$

причём только эти длины волн и могут распространяться на струне, так как в противном случае краевые условия не будут

удовлетворены. Соответствующий этим длинам волн избранный ряд частот будет

$$\nu_n = n \frac{c'}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (146,17)$$

Эти частоты называются *собственными частотами* колебаний струны. Как видно, они образуют дискретный ряд: наименьшая собственная частота равна  $\nu_1 = \frac{c'}{2l}$ ; следующие частоты будут  $2\nu_1, 3\nu_1, \dots$ . Наименьшая частота  $\nu_1$  называется в акустике основным тоном; следующие частоты называются обертонами или гармониками;  $\nu_2$  есть первый обертон или первая гармоника и т. д.

Введём следующую терминологию, которой мы будем пользоваться в дальнейшем. Функции

$$y_n = \sin n \frac{\pi x}{l} \quad (146,18)$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} y = 0 \quad (146,19)$$

и краевым условиям

$$y(0) = y(l) = (0)$$

только в том случае, если длина волны  $\lambda$ , входящая в уравнение (146,18) в качестве параметра, принимает одно из следующих значений:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Эти значения мы будем называть *собственными значениями* параметра, а соответствующие им функции — *собственными функциями* дифференциального уравнения (146,19).

Мы установили, каковы те собственные колебания, которые может совершать струна, закреплённая на обоих концах. Этим колебаниям соответствует избранный ряд частот. Отсюда, однако, не следует, что струна обязательно должна колебаться с частотой, соответствующей только одному основному тону или только одной из гармоник. Как раз наоборот: для того, чтобы заставить струну совершать такие простые колебания, нужны специальные условия возбуждения. При обычных же способах возбуждения одновременно возникают, вообще говоря, все собственные колебания, которые способна совершать струна. Математически это соответствует тому факту, что уравнение

$$\frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (146,1)$$

— линейное и однородное, а потому оно удовлетворяется не

только решениями

$$\sin n \frac{\pi x}{l} \cos \left( n \frac{\pi c'}{l} t + \delta_n \right), \quad (146,14)$$

но и любой их линейной комбинацией. Так как число решений (146,14) бесконечно велико, то уравнение (146,1) удовлетворяется бесконечным рядом

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sin \frac{\pi x}{l} \cos \left( \frac{\pi c'}{l} t + \delta_1 \right) + a_2 \sin 2 \frac{\pi x}{l} \cos \left( 2 \frac{\pi c'}{l} t + \delta_2 \right) + \dots \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n \frac{\pi x}{l} \cos \left( n \frac{\pi c'}{l} t + \delta_n \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \frac{\pi x}{l} \left( b_n \cos n \frac{\pi c'}{l} t + c_n \sin n \frac{\pi c'}{l} t \right). \end{aligned} \quad (146,20)$$

При этом, разумеется, те или иные коэффициенты могут оказаться равными нулю, откуда будет следовать, что соответствующие обертоны отсутствуют.

Если все коэффициенты ряда (146,20) известны, то мы можем предсказать форму колебаний струны для любого будущего момента времени. Но для определения этих коэффициентов должны быть известны начальные условия и, поскольку уравнение (146,1) второго порядка, должно быть задано два начальных условия, а именно: начальная форма струны и начальное распределение скоростей её точек.

Начальная форма струны задаётся функцией

$$u(x, 0) = u_0(x) = y_0(x),$$

характеризующей вид струны при  $t = 0$ , а начальное распределение скоростей определяется значением производной  $\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = v_0$ . Дифференцируя ряд (146,20) по  $t$ , находим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi c'}{l} \sum_n \sin n \frac{\pi x}{l} \left( -n b_n \sin n \frac{\pi c'}{l} t + n c_n \cos n \frac{\pi c'}{l} t \right). \quad (146,21)$$

При  $t = 0$  (146,20) и (146,21) дают

$$y_0 = \sum_n b_n \sin n \frac{\pi x}{l}, \quad (146,22)$$

$$v_0 = \frac{\pi c'}{l} \sum_n n c_n \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (146,23)$$

Но очевидно, что ряды (146,22) и (146,23) представляют собою ряды Фурье. Их коэффициенты находятся по обычному правилу

$$\left. \begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l y_0(x) \sin n \frac{\pi x}{l} dx, \\ c_n &= \frac{2}{n \pi c'} \int_0^l v_0(x) \sin n \frac{\pi x}{l} dx. \end{aligned} \right\} (146,24)$$

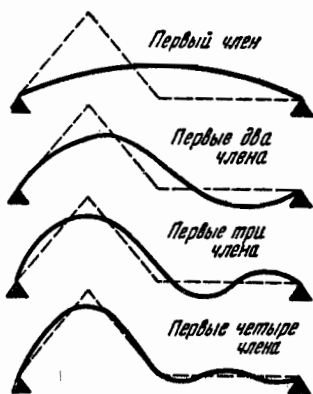


Рис. 203.

Подставив коэффициенты  $b_n$  и  $c_n$  в ряд (146,20), мы получаем возможность предсказать характер колебаний струны для любого будущего момента времени.

На рис. 203 приведён пример, показывающий, каким образом начальную форму колебаний струны можно воспроизвести при помощи различного числа членов ряда Фурье. Здесь пунктирные линии представляют собою форму струны в момент  $t=0$ , а сплошные показывают, как эта форма воспроизводится при помощи одного, двух, трёх и четырёх членов ряда Фурье.

### § 147. Частица в потенциальном ящике

От задачи классической физики, рассмотренной в предыдущем параграфе, мы снова вернёмся к уравнению Шредингера и прежде всего на самом простом примере покажем, каким образом из этого уравнения следует квантование энергии.

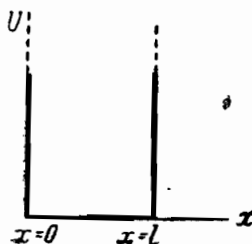


Рис. 204.

Рассмотрим микроскопическую частицу, находящуюся в поле, которое характеризуется следующим образом: от  $x=0$  до  $x=l$  потенциальная энергия  $U$  постоянна и равна нулю; на границах же области  $(0, l)$   $U$  внезапно возрастает до бесконечности (рис. 204). При таких условиях можно утверждать, что частица не выходит за пределы области  $0, l$ . Для наглядности можно себе представить частицу, запертую в ящике с идеально

отражающими стенками; внутри ящика частица свободно движется между его стенками, но за пределы ящика выйти не может.

Установим прежде всего краевые условия этой задачи. С этой целью мы напишем уравнение Шредингера для

одномерного движения, параллельного оси  $x$ :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\psi = 0. \quad (147,1)$$

Потенциальная энергия  $U$  в нашей задаче должна удовлетворять требованиям:

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ \infty & \text{при } x=0 \text{ и при } x=l. \end{cases} \quad (147,2)$$

Покажем, что для удовлетворения этих требований  $\psi(x)$  должна обращаться в нуль у стенок ящика. Действительно, обозначив  $\frac{d^2\psi}{dx^2}$  через  $\psi''$ , мы можем переписать (147,1) в виде

$$\frac{\psi''}{\psi} = -\frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U). \quad (147,3)$$

Для всех значений  $x$  между 0 и  $l$ ,  $U=0$  и отношение  $\psi''/\psi$  имеет конечную величину; при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow l$  потенциальная энергия  $U$  стремится к бесконечности. В силу стандартных условий (§ 143, конечность и непрерывность  $\psi$  и  $\psi'$ ) это может быть только в том случае, когда  $\psi(x) \rightarrow 0$ . Итак, задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}E\psi = 0 \quad (147,4)$$

при краевых условиях

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0. \quad (147,5)$$

Как видно, эта задача совершенно тождественна с рассмотренной в предыдущем параграфе задачей о стоячих колебаниях струны. Поэтому мы можем использовать все полученные там результаты, давая им соответствующее нашему случаю истолкование. А именно, собственные функции уравнения (147,4) будут (см. § 146)

$$\psi_n = \sin n \frac{\pi x}{l}. \quad (147,6)$$

Для нахождения собственных значений энергии мы примем во внимание, что коэффициент  $8\pi^2mE/h^2$  в уравнении (147,4) стоит вместо коэффициента  $4\pi^2/\lambda^2$  в уравнении

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}y = 0. \quad (147,7)$$

Так как собственные значения  $\lambda$  в (147,7) определяются

формулой  $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ , то  $\frac{4\pi^2}{\lambda_n^2} = 4\pi^2 \left(\frac{n}{2l}\right)^2$ . Мы получаем, таким образом,

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E_n = 4\pi^2 \left(\frac{n}{2l}\right)^2,$$

откуда

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (147,8)$$

Итак, мы видим, что краевые условия задачи будут удовлетворены лишь для дискретного ряда значений энергии (147,8). А это и означает, что частица, «запертая» в потенциальном ящике, может иметь только квантованные значения энергии (147,8).

Этот вывод кажется сначала крайне неожиданным. Мы сейчас покажем, однако, что даже для очень малой частицы квантование становится заметным лишь в том случае, когда «ящик» имеет атомные размеры. Вычислим для этого расстояние между уровнями энергии для электрона с массой  $m = 9,8 \cdot 10^{-28}$  г, помещённого в ящик длиной  $l = 1$  см. Тогда

$$E_n = n^2 \frac{(6,65 \cdot 10^{-27})^2}{8 \cdot 9,8 \cdot 10^{-28}} = n^2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} = n^2 \cdot 3,37 \cdot 10^{-15} \text{ эВ}.$$

Расстояние между соседними уровнями ( $\Delta n = 1$ ) будет, таким образом,

$$\Delta E_n \approx 2n \cdot 3,37 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} = 6,74 \cdot 10^{-15} n \text{ эВ}.$$

Эти расстояния столь малы, что практически мы имеем дело со сплошным рядом энергий. В следующем параграфе мы увидим, однако, что наличие дискретных, хотя и очень близко расположенных, уровней в случае ящика макроскопических размеров имеет большое значение.

Положим теперь, что ящик имеет размеры атомного порядка, например  $l = 10 \text{ \AA} = 10^{-7}$  см. Тогда

$$E_n = 5,4 \cdot 10^{-13} n^2 \text{ эрг} = 0,34 n^2 \text{ эВ},$$

а расстояния между уровнями при  $\Delta n = 1$

$$\Delta E_n = 0,68 n \text{ эВ}.$$

Это — уже вполне заметные расстояния.

До сих пор мы интересовались только собственными значениями энергии. Рассмотрим теперь свойства собственных функций нашей задачи. Докажем прежде всего, что собственные функции обладают свойством *ортогональности*,



выражаемым равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^0(x) \psi_n^0(x) dx = 0 \quad \text{при } m \neq n.$$

Для доказательства заметим прежде всего, что в силу краевых условий (147,5) функция  $\psi$  обращается в нуль за пределами отрезка, заключённого между  $x=0$  и  $x=l$ . Поэтому интегрирование между бесконечными пределами сводится к интегрированию от 0 до  $l$ . Принимая во внимание общее выражение собственных функций (147,6), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^0(x) \psi_n^0(x) dx &= \int_0^l \sin m \frac{\pi x}{l} \sin n \frac{\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \cos(m-n) \frac{\pi x}{l} - \cos(m+n) \frac{\pi x}{l} \right] dx = 0, \end{aligned}$$

что мы и хотели доказать.

При  $m=n$  интеграл не равен нулю, и это позволяет нормировать к 1 функции  $\psi_n$ . В самом деле, пусть мы нашли такой множитель  $N_n$ , что функция  $N_n \psi_n$  будет нормирована, т. е. будет выполняться условие

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x) dx = 1.$$

Попрежнему интегралы от  $-\infty$  до 0 и от  $l$  до  $+\infty$  равны нулю вследствие того, что функция  $\psi_n$  в этих промежутках равна нулю, и мы получим

$$1 = N_n^2 \int_0^l \sin^2 n \frac{\pi x}{l} dx = N_n^2 \frac{l}{2},$$

откуда

$$N_n = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Итак, нормирующий множитель для всех функций  $\psi_n$  одинаков и нормированные собственные функции таковы:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin 2 \frac{\pi x}{l}, \quad \dots$$

Напомним, что, когда частица находится в состояниях, описываемых собственными функциями  $\psi_n$ , зависимость от времени выражается «монокроматическим» множителем  $e^{-i2\pi \frac{E_n}{h}}$ , так что

функция, описывающая состояние частицы, обладающей энергией  $E_n$ , в любой момент времени такова:

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-i2\pi \frac{E_n}{h} t} = \sin n \frac{\pi x}{l} e^{-i2\pi \frac{E_n}{h} t}.$$

При этом согласно сказанному в § 143 временной множитель должен быть комплексным по существу, т. е. не следует брать только его действительную часть. Однако физический смысл

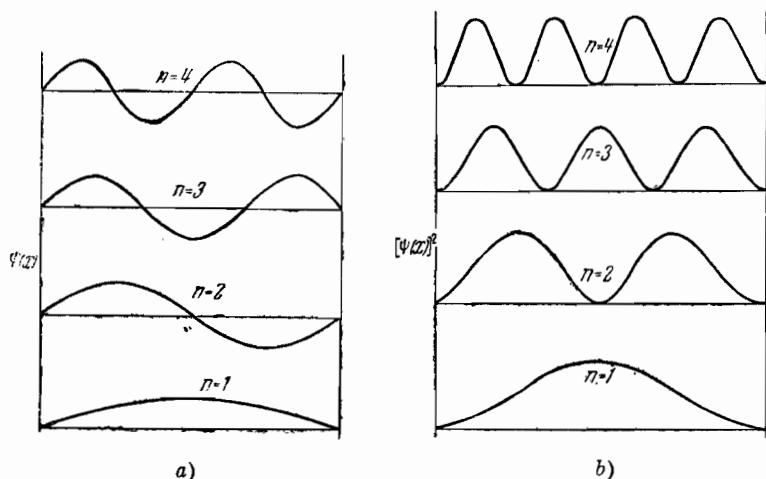


Рис. 205. а) графики собственных функций; б) распределения плотности вероятности положения частицы в потенциальном ящике.

имеет не сама функция  $\psi_n(x, t)$ , но квадрат её модуля

$$|\psi_n(x, t)|^2 = \psi_n^*(x, t) \psi_n(x, t) = \psi_n^2(x) = \sin^2 n \frac{\pi x}{l}.$$

Очевидно, что состояния, описываемые функциями  $\psi_n(x, t)$ , от времени не зависят: это — *стационарные состояния*.

На рис. 205 приведены графики собственных функций (147,6) и квадратов их модулей. По смыслу последние представляют распределение вероятности найти микроскопическую частицу на единице длины в том или ином месте внутри ящика при различных значениях энергии частицы. Как видно из рисунка, в нижнем энергетическом состоянии ( $n=1$ ) с наибольшей вероятностью можно найти частицу около середины ящика, а вероятность найти её у стенок равна нулю. Этот результат резко отличается от того, что можно ожидать для макроскопической частицы. Такую частицу, очевидно, с равной вероятностью можем найти в любом месте

ящика, так что кривая плотности вероятности для неё должна идти параллельно оси абсцисс. Рисунок показывает, что при увеличении энергии частицы (возрастание квантового числа  $n$ ) максимумы кривой  $|\psi_n|^2$  располагаются всё ближе и ближе друг к другу, так что для очень больших значений квантового числа и получается распределение, соответствующее макроскопической частице. Здесь, как и во всех случаях, принцип соответствия удовлетворяется.

### § 148. Электрон в потенциальной яме

В качестве применения результатов, полученных в предыдущих параграфах, рассмотрим поведение электрона в поле, изображаемом потенциальной «кривой» рис. 206: потенциальная энергия электрона вне ящика или «ямы»  $OABC$  равна нулю, внутри ямы она равна  $-U$ . В таком поле находится, например, электрон внутри металла. В самом деле, в § 134 мы видели, что периодическое поле, образованное положительными ионами металла, в первом приближении может быть заменено некоторым средним полем, потенциал которого  $V$  постоянен внутри всего металла. Потенциальная энергия электрона отрицательна и равна  $U = -eV$ : электрон внутри металла заперт в потенциальной яме глубиной  $U$ .

Поскольку выбор нуля потенциальной энергии произволен, выберем его так, чтобы потенциальная энергия покоящегося электрона внутри металла была положительна и равна, например,  $U''$  (рис. 207). Тогда вне металла (в вакууме) потенциальная энергия покоящегося электрона будет также положительна и равна  $U'$ , а разность  $U' - U'' = U_0$  и есть глубина той потенциальной ямы, внутри которой находится электрон в металле.

Если электрон в металле движется, то его полная энергия будет больше  $U''$  и равна, например,  $E$ . Избыток энергии по сравнению с  $U''$ , т. е. величина  $E - U'' = T$ , будет при этом, очевидно, равен кинетической энергии.

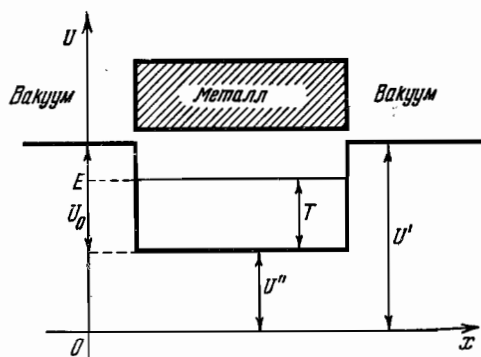


Рис. 207. Потенциальная модель для электрона в металле.

Мы знаем, что электрон, помещённый в потенциальный ящик, может обладать только избранными значениями энергии, образующими дискретный ряд (§ 147)\*. Правда, при конечной величине куска металла расстояние между этими уровнями энергии будет ничтожно мало. Однако наличие их сказывается очень определённым образом благодаря важному закону природы — так называемому *принципу Паули*, с которым мы познакомимся подробнее впоследствии. В силу этого принципа на каждом из уровней энергии в металле может находиться только два электрона.

Если представить себе поэтому вначале только решётку положительных ионов, внутрь которой вносятся один за другим электроны при абсолютном нуле температуры, то первые два электрона расположатся на самом нижнем уровне; третий электрон уже не сможет поместиться на этом уровне и должен будет

расположиться на следующем, более высоком, т. е. будет обладать не только потенциальной энергией, но и некоторой незначительной кинетической. Так как число свободных электронов в металле очень велико (например, один грамм-атом одновалентного металла, скажем натрия, имеет  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  свободных электронов), то будет заполнено соответствующее, т. е. вдвое меньшее, число уровней энергии. Верхний из этих заполненных уровней при абсолютном нуле образует резкую границу между заполненными и свободными уровнями. Этот верхний уровень  $\zeta$  называется критическим уровнем или границей Ферми. Очевидно, что для освобождения электрона из металла нужно сообщить ему энергию, по крайней мере равную разности между глубиной потенциальной ямы и кинетической энергией критического уровня (рис. 208). Эта разность

$$w = U_0 - \zeta$$

и есть работа выхода электрона из металла, проявляющаяся в фотоэффекте (слагаемое  $P$  в уравнении Эйнштейна).

\* Отличие интересующего нас случая от случая, рассмотренного в § 147, состоит в том, что стенки потенциального ящика здесь имеют конечную высоту. Такая задача рассматривается в приложении V. Решение её показывает, что имеющиеся различия несущественны, особенно в случае ящика макроскопических размеров.

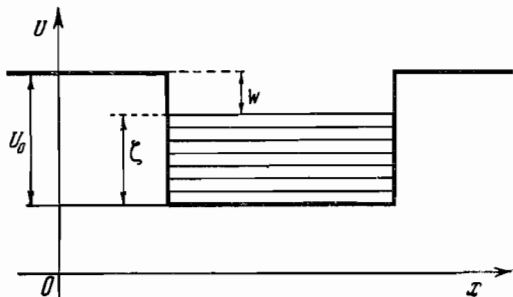


Рис. 208. Работа выхода и внутренний потенциал.

Электрон, однако, может быть освобождён из металла не только под действием света, но и вследствие нагревания (термоионная эмиссия). При температурах выше абсолютного нуля часть электронов располагается на верхних свободных уровнях, т. е. на уровнях, лежащих выше границы Ферми. Если вследствие нагревания металла энергия электрона станет настолько большой, что он сможет преодолеть тормозящее поле и выйти за пределы металла, то возникнет термоионный эффект.

*Холодная эмиссия.* Оказывается, однако, что под влиянием сильного электрического поля электроны начинают выходить из металла при сколь угодно низких температурах. Качественно

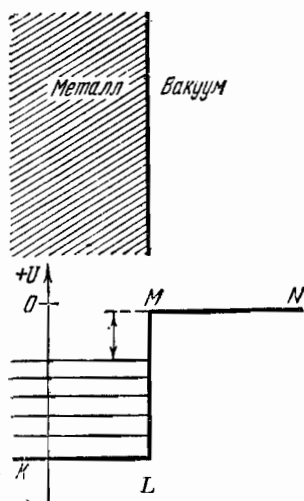


Рис. 209.

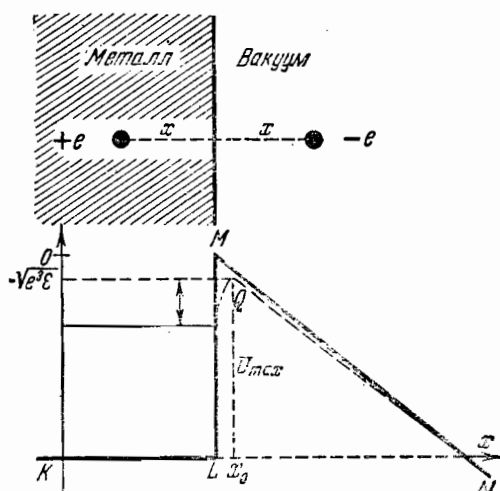


Рис. 210.

это явление можно объяснить и с классической точки зрения, по получаемые таким путём величины силы тока резко противоречат экспериментальным данным.

Классическое объяснение этого явления *холодного разряда* состоит в следующем. Распределение потенциала внутри металла и вблизи его поверхности в отсутствии поля приближённо представляется, как и раньше, ломаной линией  $KLMN$  (рис. 209). Пусть теперь к металлу приложено электрическое поле с напряжённостью  $\mathcal{E}$ . Сила, действующая на электрон, находящийся вне металла, складывается из силы  $e\mathcal{E}$ , с которой на него действует поле, плюс так называемая «сила изображения». Последняя возникает вследствие того, что сам электрон создаёт на поверхности металла путём электростатической индукции положительные

заряды, которые притягивают электрон так, как если бы внутри металла на расстоянии  $x$  от его поверхности был расположен заряд  $+e$  — зеркальное электрическое изображение электрона (рис. 210). Таким образом, полная сила равна

$$F = e\mathcal{E} - \frac{e^2}{4x^2},$$

а потенциальная энергия электрона в поле этой силы будет

$$U = U_0 - e\mathcal{E}x - \frac{e^2}{4x}. \quad (148,1)$$

На рис. 210 пунктиром изображена кривая этой потенциальной энергии. Эта кривая, как видно, имеет максимум на расстоянии  $x = x_0$  от поверхности. Для отыскания  $x_0$  пишем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_0} = -e\mathcal{E} + \frac{e^2}{4x_0^2} = 0,$$

откуда  $x_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e}{\mathcal{E}}}$ . Подставляя это  $x_0$  в (148,1), получаем для глубины потенциальной ямы

$$U_{\max} = U_0 - \sqrt{e^3 \mathcal{E}}.$$

Мы видим, что поле *понижает* высоту стенки потенциальной ямы на величину

$$\sqrt{e^3 \mathcal{E}}.$$

С точки зрения классической механики электроны внутри металла, имеющие энергию, меньшую  $U_{\max}$ , ещё не могут выйти за пределы его поверхности, так как этому препятствует потенциальный барьер  $LQN$ , но электроны, обладающие энергией, большей  $U_{\max}$ , уже освобождаются. Таким образом, в присутствии поля работа выхода электрона уменьшается и становится равной

$$w' = U_{\max} - \zeta = U_0 - \sqrt{e^3 \mathcal{E}} - \zeta = w - \sqrt{e^3 \mathcal{E}},$$

где  $w$  — работа выхода в отсутствие поля.

Очевидно, что максимальный ток получился бы в том случае, если бы работа  $w'$  обратилась в нуль. Напряжённость приложенного поля в этом случае, очевидно, будет

$$\mathcal{E} = \frac{w^2}{e^3} = 7 \cdot 10^8 w^2 \text{ В/см.}$$

Для вольфрама  $w = 4,9 \text{ В}$ ; поэтому  $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^8 \text{ В/см}$ . Между тем Милликэн получал сильные токи холодного разряда уже при  $\mathcal{E} = 4 \cdot 10^8 \text{ В/см}$ .

Ключ к разгадке этого резкого противоречия даёт как раз способность электронов совершать туннельные переходы, не учитываемая классической механикой. Рассмотрим снова потенциал вблизи поверхности металла в присутствии поля. Если мы не будем учитывать силу изображения (учёт силы изображения дал бы более точный результат, но сильно усложнил вычисления), то ход потенциала изобразится ломаной линией  $KLMN$  (рис. 211). Электрон, обладающий энергией  $E$ , по абсолютному значению меньшей высоты барьера  $U_0$ , в силу законов квантовой механики может выйти из металла непосредственно путём туннельного перехода.

Вероятность этого выхода даётся прозрачностью барьера, равной по формуле (145,14)

$$D = C e^{-\frac{4\pi}{h} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m} \sqrt{U-E} dx},$$

где  $U$  — потенциальная энергия в какой-нибудь точке барьера, а  $E$  — энергия частицы, отсчитываемая от того же уровня, что и высота барьера.

Очевидно (рис. 211), что

$$U = U_0 - e\mathcal{E}x.$$

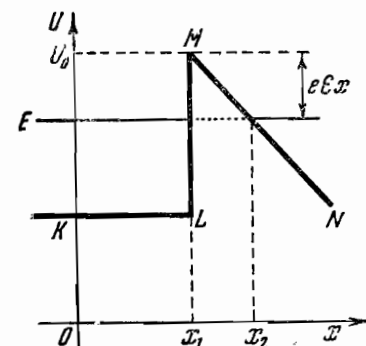


Рис. 211.

Поэтому, полагая  $x_1 = 0$ , можем написать

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} \sqrt{U-E} dx &= \int_0^{x_2} \sqrt{U_0 - e\mathcal{E}x - E} dx = \\ &= -\frac{2}{3e\mathcal{E}} (U_0 - e\mathcal{E}x_2 - E)^{3/2} + \frac{2}{3e\mathcal{E}} (U_0 - E)^{3/2}. \end{aligned}$$

Из чертежа непосредственно видно, что  $U_0 - e\mathcal{E}x_2 = E$ , вследствие чего первый член равен нулю, и мы получаем для прозрачности барьера

$$D = C e^{-\frac{8\pi (U_0 - E)^{3/2} \sqrt{2m}}{3eh} \cdot \frac{1}{e}}$$

или, обозначая  $\frac{8\pi (U_0 - E)^{3/2} \sqrt{2m}}{3eh} = \alpha$ , получим  $D = C e^{-\alpha/e}$ . Именно такая зависимость «холодного тока» от напряжённости поля и была найдена экспериментально.

Интересно привести данные для прозрачности барьера и силы холодного тока при разных напряжениях (см. таблицу XXI). Здесь интересен необычайно быстрый рост прозрачности при

увеличении поля, а также и то, что при очень малых значениях  $D$  получаются большие токи. Последнее объясняется тем, что число электронов, бомбардирующих в секунду стенку барьера, столь велико, что даже при ничтожной вероятности выхода возникают сильные токи.

Таблица XXI

$\mathcal{E}$ (V/cm)	$E = -2$ V		$E = -5$ V	
	$D$	$J$ (A/cm <sup>2</sup> )	$D$	$J$ (A/cm <sup>2</sup> )
$10^6$	$10^{-80}$	$10^{-74}$	$10^{-328}$	$10^{-322}$
$5 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^{-15}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-65}$	$6 \cdot 10^{-58}$
$10^7$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	100	$10^{-31}$	$3 \cdot 10^{-24}$
$2 \cdot 10^7$	0,013	$4 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{-7}$
$3 \cdot 10^7$	1	$7 \cdot 10^8$	$6 \cdot 10^{-10}$	0,18

**Контактная разность потенциалов.** Если привести в соприкосновение два металла различной природы (например, медь и цинк), то между ними устанавливается разность потенциалов (контактная разность потенциалов). Это явление, открытое ещё Вольта, становится понятным, если рассмотреть условия, в которых находятся электроны в обоих металлах.

Представим себе два металла с различными внутренними потенциалами и различными работами выхода  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и пусть  $\omega_1 < \omega_2$ . Сблизим их так, чтобы расстояние между их параллельными поверхностями было порядка атомных размеров ( $\sim 10^{-8}$  см). В том и другом металле все уровни энергии ниже границы Ферми  $\zeta$  заняты электронами, выше её — свободны. Но граница Ферми в металле I лежит выше относительно нулевого уровня  $Ox$ , нежели граница Ферми в металле II относительно того же уровня (рис. 212). Поэтому электроны с верхних уровней металла I могут переходить сквозь потенциальный барьер, разделяющий оба металла (туннельным переходом), на свободные уровни металла II. Но

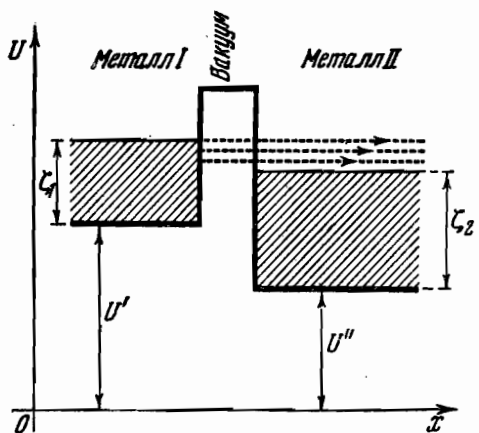


Рис. 212.



электроны металла II не могут переходить в металл I, так как все уровни этого последнего, лежащие на одной высоте с  $\zeta_2$  и ниже её в металле I, заняты парами электронов. Поэтому металл II будет заряжаться отрицательно, а металл I — положительно. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока критические уровни обоих металлов не сравняются. При этом между обоими металлами установится внешняя разность потенциалов, равная разности их работ выхода.

В этом можно убедиться из следующих соображений. Пусть мы имеем два соприкасающихся металла I и II с работами выхода  $w_1$  и  $w_2$ , причём  $w_1 < w_2$ . Рассмотрим точку A, расположенную в вакууме вблизи поверхности металла I, и точку B — вблизи поверхности металла II (рис. 213). При переходе электрона из точки A внутрь металла I на уровень его границы Ферми освободится работа  $w_1$ ; при переходе из точки B внутрь металла II на уровень его границы Ферми освободится работа  $w_2$ . Но граница Ферми в обоих соприкасающихся металлах, по сказанному, устанавливается на одной высоте. Работа же выхода, характерная для каждого металла, не зависит от того, что он находится в соприкосновении с другим металлом. Если поэтому  $w_2 > w_1$ , то при одинаковой высоте границы Ферми это может быть только в том случае, если потенциал в точке B выше потенциала в точке A как раз на величину разности  $w_2 - w_1$ .



Рис. 213.

§ 149. Линейный гармонический осциллятор

Одной из важных моделей, используемых в атомной физике, является линейный гармонический осциллятор. В предыдущем мы уже неоднократно пользовались этой моделью. Потенциальная энергия гармонического осциллятора, как мы знаем, равна

$$U = \frac{f x^2}{2} = 2\pi^2 m \nu_0^2 x^2, \quad (149,1)$$

где  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}}$  — частота колебаний осциллятора, вычисляемая по классической механике. Соответствующая потенциальная кривая есть парабола, изображённая на рис. 214. Легко видеть, что эта потенциальная кривая образует нечто вроде ящика с отражающими стенками, наподобие рассмотренного в § 147. Макроскопический осциллятор, имеющий энергию  $E$ , колеблется между «стенками» туда и сюда, оставаясь в пределах отрезка  $x_1 x_2$ , т. е. не проникая правее  $x_2$  и левее  $x_1$ . Для решения задачи о микроскопическом осцилляторе надо

рассмотреть стоячие волны, возникающие внутри такого потенциального ящика; в принципе процедура совершенно аналогична отысканию собственных колебаний струны. Однако здесь имеется особенность, из-за которой математически задача довольно сильно осложняется; в пределах ящика потенциальная энергия не имеет всюду постоянного значения, но изменяется по параболическому закону; поэтому длина волны  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$  не остаётся одной и той же в разных местах ящика, но увеличивается по краям его и уменьшается посередине.

Уравнение Шредингера для задачи об осцилляторе имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - 2\pi^2\nu_0^2 m x^2) \psi = 0, \quad (149,2)$$

причём функция  $\psi$  должна удовлетворять требованию: при  $x \rightarrow \pm \infty \psi(x) = 0$  и всем остальным стандартным условиям (§ 143).

Для сокращения записи введём обозначения

$$\frac{8\pi^2m}{h^2} E = \lambda, \quad \frac{4\pi^2m\nu_0}{h} = \alpha; \quad (149,3)$$

уравнение Шредингера при этом переписется так:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2) \psi = 0. \quad (149,4)$$

Для интегрирования (149,4) рассмотрим сначала предельный случай, когда  $x$  очень велико, так что  $\alpha x \gg \lambda$ . Тогда в (149,4) можно отбросить  $\lambda$  как величину, малую по сравнению с  $\alpha^2 x^2$ , и мы получаем

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2 x^2 \psi = 0. \quad (149,5)$$

При  $x \gg 1$  это уравнение с достаточной точностью удовлетворяется решением

$$\psi = e^{\pm \alpha x^2/2}. \quad (149,6)$$

В самом деле, имеем

$$\frac{d\psi}{dx} = \pm \alpha x e^{\pm \alpha x^2/2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2 x^2 e^{\pm \alpha x^2/2} \pm \alpha e^{\pm \alpha x^2/2}.$$

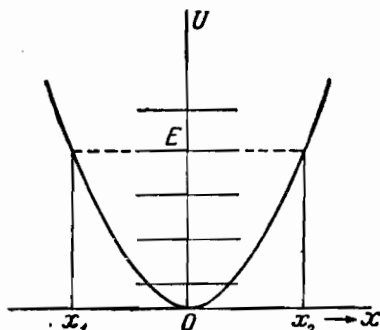


Рис. 214. Потенциальная кривая линейного гармонического осциллятора.

Но при  $x \gg 1$  второй член в правой части последнего равенства несущественен по сравнению с первым и, следовательно, уравнение (149,5) асимптотически удовлетворяется решением (149,6). Из двух возможных знаков в этом решении здесь следует взять знак минус

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2},$$

так как решение со знаком плюс безгранично возрастает при  $x \rightarrow \infty$ , что противоречит естественным условиям, накладываемым на функцию  $\psi$  (§ 143).

Принимая во внимание рассмотренный предельный случай, будем искать решение (149,4) в виде

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} f(x), \quad (149,7)$$

где  $f(x)$  — некоторая, пока неизвестная функция, которая должна быть подобрана так, чтобы (149,7) удовлетворяло уравнению (149,4). Подставим решение (149,7) в (149,4), найдя для этого прежде всего производные

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \left( -\alpha x f + \frac{df}{dx} \right) e^{-\alpha x^2/2}, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \left( -\alpha f - 2\alpha x \frac{df}{dx} + \alpha^2 x^2 f + \frac{d^2f}{dx^2} \right) e^{-\alpha x^2/2}. \end{aligned}$$

Произведя подстановку в (149,4), получим после простых преобразований и сокращения на  $e^{-\alpha x^2/2}$

$$\frac{d^2f}{dx^2} - 2\alpha x \frac{df}{dx} + (\lambda - \alpha) f = 0. \quad (149,8)$$

Это уравнение мы ещё преобразуем, введя вместо  $x$  новую независимую переменную  $\xi$

$$\xi = \sqrt{\alpha} \cdot x; \quad (149,9)$$

$\xi$  есть безразмерное число, так как  $\alpha$  имеет размерность  $[см^{-2}]$  [в чём легко убедиться непосредственно из выражения  $\alpha$  (149,3)]. Имеем теперь

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha} \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \sqrt{\alpha} \frac{d}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \alpha \frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Уравнение (149,8) после замены переменной и сокращения на  $\alpha$  приобретает вид

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + \left( \frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) H = 0, \quad (149,10)$$

где  $H(\xi)$  — функция, которая получается после замены в  $f(x)$  независимой переменной  $x$  на  $\xi$ . Будем искать  $H(\xi)$  в виде

степенного ряда

$$H(\xi) = a_\nu \xi^\nu + a_{\nu+1} \xi^{\nu+1} + a_{\nu+2} \xi^{\nu+2} + \dots \equiv \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k \xi^k. \quad (149,11)$$

Для того чтобы гарантировать конечность решения, мы начинаем ряд с некоторой степени  $\nu$  и только в последующем определяем это  $\nu$  так, чтобы функция  $H(\xi)$  нигде не обращалась в бесконечность. Выпишем производные от  $H(\xi)$ :

$$\frac{dH}{d\xi} = \nu a_\nu \xi^{\nu-1} + (\nu+1) a_{\nu+1} \xi^\nu + (\nu+2) a_{\nu+2} \xi^{\nu+1} + \dots,$$

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} = \nu(\nu-1) a_\nu \xi^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1} \xi^{\nu-1} + (\nu+2)(\nu+1) a_{\nu+2} \xi^\nu + \dots$$

Подставляя это в (149,10), получим после простых преобразований

$$\begin{aligned} \nu(\nu-1) a_\nu \xi^{\nu-2} + (\nu+1)\nu a_{\nu+1} \xi^{\nu-1} + (\nu+2)(\nu+1) a_{\nu+2} \xi^\nu + \dots = \\ = \left[ 2\nu - \left( \frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) \right] a_\nu \xi^\nu + \dots \end{aligned}$$

Так как это равенство должно иметь место тождественно, то коэффициенты при одинаковых степенях  $\xi$  слева и справа должны быть равны друг другу. Низший член слева есть  $\nu(\nu-1) a_\nu \xi^{\nu-2}$ ; его коэффициент должен быть равен нулю, так как справа не имеется члена с такой степенью  $\xi$ . Это даёт  $\nu(\nu-1) = 0$ , откуда  $\nu = 0$  или  $\nu = 1$ . Приравнявая нулю коэффициент при следующем члене, получаем  $\nu = 0$  или  $-1$ . Первое решение не даёт ничего нового, второе же непригодно, так как ряд, начинающийся членом с  $\xi^{-1}$ , обращается в бесконечность при  $\xi = 0$ .

Сравнивая коэффициенты при каком-нибудь члене, содержащем  $\xi^i$ , находим

$$(i+1)(i+2) a_{i+2} = \left[ 2i - \left( \frac{\lambda}{\alpha} - 1 \right) \right] a_i,$$

откуда

$$a_{i+2} = \frac{2i+1 - \frac{\lambda}{\alpha}}{(i+1)(i+2)} a_i. \quad (149,12)$$

Эта формула (рекуррентная формула) позволяет последовательно вычислять все члены ряда через один. Так как ряд может начинаться либо со степени  $\nu = 0$ , либо со степени  $\nu = 1$ ,

то рекуррентная формула (149,12) даёт два ряда, из которых один состоит только из чётных членов:

$$a_0 + a_2 \xi^2 + a_4 \xi^4 + \dots, \quad (149,13)$$

а другой — только из нечётных:

$$a_1 \xi + a_3 \xi^3 + a_5 \xi^5 + \dots \quad (149,14)$$

Эти ряды представляют частные решения уравнения (149,10).

Исследуем теперь поведение полученных рядов при больших значениях  $\xi$ . Возьмём любой из них, например (149,13), и покажем, что при достаточно большом  $\xi$  он ведёт себя, как  $e^{\xi^2}$ . Для этого мы сравним ряд (149,13) с рядом для  $e^{\xi^2}$ . Известно, что

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

и, следовательно,

$$e^{\xi^2} = 1 + \frac{\xi^2}{1!} + \frac{\xi^4}{2!} + \frac{\xi^6}{3!} + \dots + \frac{\xi^\tau}{\left(\frac{\tau}{2}\right)!} + \frac{\xi^{\tau+2}}{\left(\frac{\tau}{2} + 1\right)!} + \dots$$

При достаточно большом  $\xi$  первые члены этой суммы не имеют существенного значения по сравнению с высшими. Обозначим коэффициенты при  $\xi^\tau$  и  $\xi^{\tau+2}$  через  $b_\tau$  и  $b_{\tau+2}$ ; отношение их

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau} = \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)!}{\left(\frac{\tau}{2} + 1\right)!} = \frac{1}{\frac{\tau}{2} + 1}. \quad (149,15)$$

При достаточно большом  $\tau$  в знаменателе (149,15) можно отбросить 1:

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau} = \frac{1}{\tau/2} = \frac{2}{\tau}. \quad (149,16)$$

Для отношения соответствующих членов ряда (149,13) рекуррентная формула даёт

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau} = \frac{2\tau + 1 - \frac{\lambda}{a}}{(\tau+2)(\tau+1)};$$

при достаточно большом  $\tau$

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau} = \frac{2}{\tau}. \quad (149,17)$$

Сравнивая (149,16) и (149,17), мы видим, что

$$\frac{b_{\tau+2}}{a_{\tau+2}} = \frac{b_\tau}{a_\tau} = \dots = \text{const.},$$

т. е. высшие члены нашего ряда отличаются от высших членов ряда  $e^{\xi^2}$  лишь постоянным множителем, а это значит, что  $H(\xi)$  при больших  $\xi$  возрастает, как  $e^{\xi^2}$ , а следовательно, принимая во внимание (149,7) и (149,9),

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} f(x) = e^{-\xi^2/2} H(\xi) \rightarrow e^{\xi^2/2},$$

т. е. при  $\xi \rightarrow \infty$  и  $\psi \rightarrow \infty$ . Отсюда видно, что решения, представляемые степенными рядами с рекуррентной формулой (149,12), вообще говоря, не удовлетворяют краевым условиям. Однако легко заметить, что при избранных значениях  $\lambda/\alpha$  наши ряды обрываются на некотором члене, т. е. обращаются в полиномы. Так, например, при  $\frac{\lambda}{\alpha} = 5$  ряд (149,13) состоит только из одного члена  $a_0$ , так как из (149,12) видно, что при  $\frac{\lambda}{\alpha} = 5$  коэффициент  $a_2 = 0$ , а значит, и все последующие коэффициенты будут нулями. При  $\frac{\lambda}{\alpha} = 9, 13, \dots$  тот же ряд будет обрываться на втором, третьем и т. д. членах.

Но если  $H(\xi)$  сводится к полиному, то присутствие экспоненциального множителя обеспечит обращение  $\psi$  в нуль при  $\xi \rightarrow \infty$ . Итак, решения, удовлетворяющие стандартным требованиям, получаются лишь в тех случаях, когда ряды (149,13) и (149,14) обращаются в полиномы. На основании рекуррентной формулы (149,12) мы получим полином, заканчивающийся членом степени  $n$ , если

$$\frac{\lambda}{\alpha} = 2n + 1.$$

Подставляя сюда значения  $\lambda$  и  $\alpha$  из (149,3), получаем

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E_n = \frac{4\pi^2 m \nu_0}{h} (2n + 1),$$

откуда

$$E_n = h\nu_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (149,18)$$

Мы видим, таким образом, что из функций  $\psi$ , удовлетворяющих волновому уравнению осциллятора, удовлетворяют вместе с тем и краевым условиям только те, которые соответствуют дискретному ряду значений энергии осциллятора (149,18). Обратим внимание на то, что эта формула несколько отличается от формулы старой квантовой теории

$$E_n = n h \nu_0.$$

Именно, согласно формуле (149,18) квантовое число линейного осциллятора всегда выражается «половинчатым» числом  $n + \frac{1}{2}$ .

Вследствие этого в низшем квантовом состоянии (при  $n=0$ ) энергия осциллятора не обращается в нуль, но равна

$$E_0 = \frac{\hbar\nu_0}{2}. \quad (149,19)$$

Это значение  $E_0$  называется «нулевой энергией». Происхождение этого названия связано с тем, что энергия  $\frac{1}{2}\hbar\nu_0$  не исчезает также и при абсолютном нуле температуры. Её смысл и значение будут выяснены в следующих параграфах.

В § 147 мы видели, что квантование энергии частицы в потенциальном ящике получается в результате применения краевых условий, аналогичных краевым условиям в задаче о струне. В задаче о линейном осцилляторе, рассмотренной в настоящем параграфе, квантование оказалось следствием естественного условия конечности функции во всём пространстве. Возможность получения квантования в качестве простого следствия подобных естественных условий является той замечательной особенностью уравнения Шредингера, о которой упоминалось в § 143.

### § 150. Нормальное и возбуждённые состояния линейного осциллятора

Каждому собственному значению энергии линейного осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\nu_0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

соответствует своя собственная функция

$$\psi = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi),$$

где  $N_n$  — постоянный нормирующий множитель, а  $H_n(\xi)$  — полином степени  $n$ , коэффициенты которого вычисляются при помощи рекуррентной формулы (149,12) при  $\frac{\lambda}{\alpha} = 2n + 1$ . Найдём несколько первых полиномов  $H_n(\xi)$ . Коэффициент при  $\xi^n$  выразится при помощи (149,12) так:

$$a_n = \frac{[2(n-2)+1] - (2n+1)}{(n-1)n} a_{n-2} = -\frac{1 \cdot 2^2}{n(n-1)} a_{n-2},$$

откуда

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2^2} a_n;$$

далее легко получим

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} a_n \text{ и т. д.}$$

Искомый полином будет поэтому таков:

$$H_n(\xi) = a_n \left[ \xi^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2^2} \xi^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} \xi^{n-4} - \dots \right]. \quad (150,1)$$

Полагая в (150,1)  $a_n = 2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), получим следующие полиномы:

$$\left. \begin{aligned} H_0(\xi) &= 1, & H_3(\xi) &= 8\xi^3 - 12\xi, \\ H_1(\xi) &= 2\xi, & H_4(\xi) &= 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12, \\ H_2(\xi) &= 4\xi^2 - 2, & H_5(\xi) &= 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (150,2)$$

Это — так называемые полиномы Чебышева—Эрмита, которые можно представить в следующем, легко запоминаемом виде:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} \quad (150,2')$$

[в этом можно убедиться непосредственным вычислением, полагая  $n = 0, 1, 2, \dots$  и т. д. и сравнивая полученные результаты с полиномами (150,2)].

Собственные функции линейного осциллятора обладают следующим важным свойством: они ортогональны в промежутке от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е. \*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad \text{при } m \neq n.$$

В случае  $m = n$  интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x) dx$$

имеет конечное значение и этим можно воспользоваться для вычисления нормирующего множителя  $N_n$ . Условие нормирования (см. § 143) состоит в том, что

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x) dx = 1.$$

Подставляя сюда выражение функции  $\psi_n$  и производя вычисления\*\*), найдём

$$N_n^2 \frac{2^n n! \pi^{1/2}}{a^{1/2}} = 1,$$

\*) Доказательство см. в приложении VI в конце книги.

\*\*) См. приложение VI в конце книги.



откуда

$$N_n = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2} n! 2^n}}.$$

Для нулевого состояния  $n=0$  имеем

$$N_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}}.$$

Таким образом, собственная функция нулевого состояния есть

$$\psi_0(x) = N_0 e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\alpha x^2/2},$$

а соответствующая плотность вероятности

$$\psi_0^2(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}.$$

Кривая, изображающая  $\psi_0^2(x)$ , — типа гауссовской кривой ошибок (рис. 215, б). Эта кривая показывает, что, выполнив большое

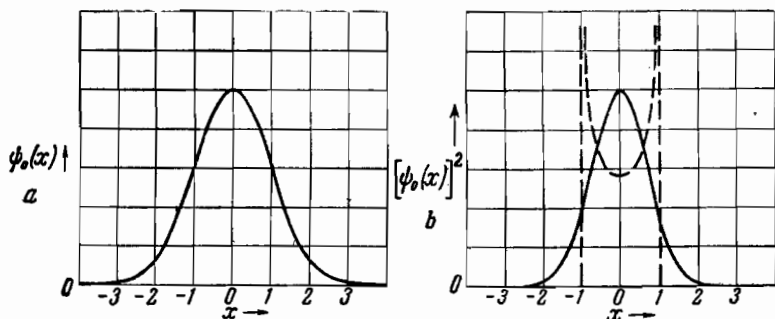


Рис. 215. Собственная функция и распределение плотности вероятности для нулевого состояния линейного гармонического осциллятора.

число определений положения частицы в нулевом состоянии осциллятора, мы чаще всего будем находить её около положения равновесия ( $x=0$ ). Кроме того, однако, имеется конечная вероятность найти частицу не только в пределах всего отрезка, равного удвоенной амплитуде колебаний классического осциллятора, но также и в «запрещённой» области (вправо и влево от вертикальных пунктирных прямых), где потенциальная энергия частицы больше полной (см. рис. 215).

Интересно сравнить с этой кривой соответствующую кривую распределения вероятности найти макроскопическую частицу, совершающую гармоническое колебание на участке пути  $dx$  в каком-нибудь месте пути. Представим себе, например, что мы имеем маятник, совершающий малые колебания, и будем

кинематографировать положения шарика маятника. Не может быть никакого сомнения в том, что в наибольшем числе кадров мы найдём шарик где-нибудь около одного из крайних положений, так как в этих местах скорость его будет близка к нулю; меньше всего окажется кадров, где шарик будет находиться около положения равновесия, потому что именно в этом месте он имеет наибольшую скорость. Очевидно, что вероятность найти шарик в определённом месте обратно пропорциональна его скорости в этом месте или, что то же, пропорциональна обратной величине квадратного корня из кинетической энергии, т. е.  $1/\sqrt{E-U}$ , где  $E$  — полная энергия и  $U$  — потенциальная энергия. Соответствующая кривая представлена пунктиром на рис. 215, в; она существенно отличается от кривой для квантового осциллятора.

Рассмотрим теперь несколько подробнее различные состояния квантового осциллятора и начнём с нулевого состояния. Особенность этого состояния заключается в том, что энергия осциллятора равна не нулю, а  $\frac{1}{2} h\nu_0$ . Именно в соответствии с этим квантовый осциллятор при абсолютном нуле не находится в покое: мы можем отыскать его с определённой вероятностью в любом месте отрезка, равного удвоенной амплитуде колебаний классического осциллятора, и даже за пределами этого отрезка. Нетрудно видеть, что этот факт является неизбежным следствием соотношений неопределённости. В самом деле, если бы квазиупруго связанная частица при абсолютном нуле покоилась, т. е. имела определённую координату, то это означало бы, что существует состояние, в котором и координата частицы и её импульс — определённы (импульс равен нулю). Но это противоречит соотношению неопределённости. Более того, мы сейчас покажем, что нулевая энергия  $\frac{1}{2} h\nu_0$  и есть как раз та минимальная энергия, которой по крайней мере должен обладать осциллятор в нулевом состоянии, чтобы соотношения неопределённости были удовлетворены.

За неопределённость положения частицы примем среднюю квадратичную ошибку, т. е. положительный квадратный корень из средней квадратичной флуктуации

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}.$$

Но  $\overline{\varepsilon^2} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$  и так как без ограничения общности можно положить  $\overline{x} = 0$  (это означает только, что начало координат следует поместить в точке, совпадающей с положением равновесия), то

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{x^2}}.$$

Итак,

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega_0 t} = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}, \quad (150,3)$$

где  $a$  — амплитуда колебаний классического осциллятора. Легко видеть, однако, что так как  $\frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 = E_0$  (см. § 44), то  $a^2 = \frac{2E_0}{m\omega_0^2} = \frac{2E_0}{f}$ , а потому

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{E_0}{f}}. \quad (150,4)$$

Далее, аналогично имеем

$$\overline{\Delta p} = \sqrt{\overline{p^2}} = \sqrt{m^2 a^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t} = \sqrt{\frac{1}{2} m^2 a^2 \omega_0^2} = \sqrt{m E_0}. \quad (150,5)$$

Итак,

$$\overline{\Delta x} \overline{\Delta p} = E_0 \sqrt{\frac{m}{f}} = \frac{E_0}{\omega_0} = \frac{E_0}{2\pi\nu_0}. \quad (150,6)$$

Но согласно соотношениям неопределённости  $\Delta x \Delta p \sim h$ . В следующей главе (т. II, § 168) мы увидим, однако, что точная величина нижнего предела произведения средних квадратичных ошибок есть  $h/4\pi$ , так что

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}. \quad (150,7)$$

Беря здесь знак равенства (т. е. выбирая нижний предел произведения ошибок) и сопоставляя (150,6) со (150,7), находим

$$\frac{E_0}{2\pi\nu_0} = \frac{h}{4\pi}, \quad E_0 = \frac{h\nu_0}{2}.$$

Итак, нулевая энергия осциллятора есть действительно минимальная энергия, которой осциллятор должен обладать в нулевом состоянии для соблюдения соотношений неопределённости.

Следует ещё объяснить, — почему кривая распределения вероятности положения даёт не равные нулю значения этой вероятности за пределами классической траектории осциллятора, т. е. в областях, где полная энергия меньше его потенциальной. Поскольку, однако, потенциальная кривая осциллятора представляет собою потенциальный ящик (см. начало § 149) и колебания частицы можно рассматривать как «отражения» от стенок этого ящика, объяснение здесь такое же, как и в случае отражения от прямоугольного барьера (§ 144).

Обратимся теперь к возбуждённым состояниям. На рис. 216 представлен ход собственных функций для нескольких значений  $n$ . Как видно, эти кривые напоминают волны. Если присоединить ещё периодический временной множитель  $e^{i2\pi\nu t}$ , то получится

нечто вроде стоячих волн. При  $n=0$  (рис. 215) мы имели два узла и максимум («пучность») посередине; разумеется, узлы получаются не на стенках потенциального ящика, а на бесконечности. При  $n=1$  (рис. 216) мы имеем два узла на бесконечности и один узел в середине отрезка, соответствующего области колебаний классического осциллятора; при  $n=2$ , кроме двух узлов на бесконеч-

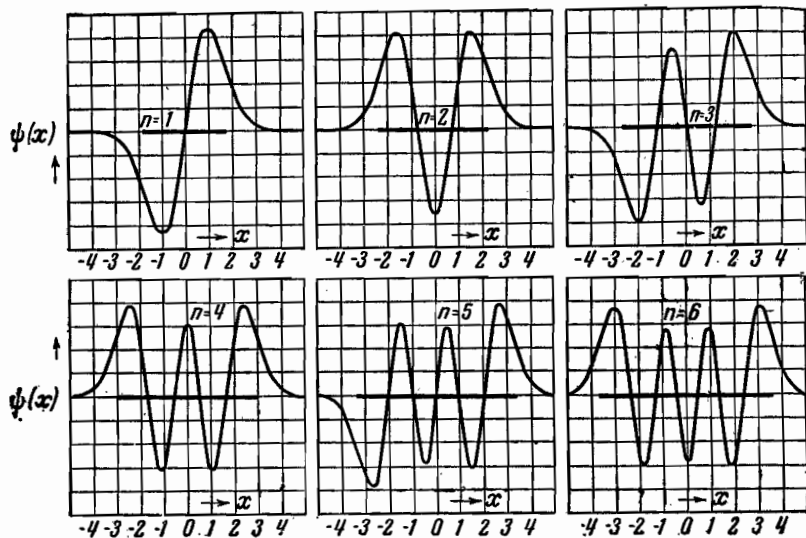


Рис. 216. Собственные функции линейного гармонического осциллятора для  $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

ности, получается ещё два узла и т. д. При рассматривании рисунков легко заметить, что у середины жирного отрезка, изображающего классическую траекторию, расстояние между узлами меньше, чем у краёв. Это соответствует тому, что длина волны де-Броглия  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$  около положения равновесия, где  $U$  проходит через нулевое значение, должна быть наименьшей.

На рис. 217 приведены кривые распределения плотности вероятности  $|\psi|^2$  для различных состояний квантового осциллятора (при  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ) и одновременно пунктиром — кривая для макроскопического осциллятора (шарик маятника). Мы видим, что при малых квантовых числах  $n$  квантовый осциллятор ведёт себя совершенно иначе, нежели классический. Наоборот, чем выше  $n$ , тем в большей степени квантовое распределение вероятности приближается к классическому. Это особенно ясно видно на рис. 218, где дано распределение для  $n=10$ . Если провести сплошную кривую через максимумы квантового распределения,

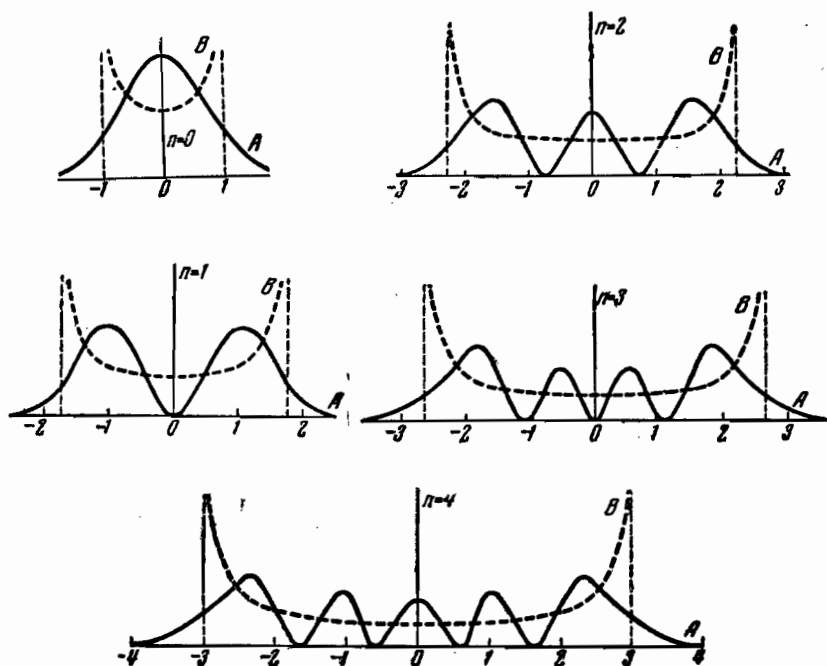


Рис. 217. Распределение плотности вероятности для  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

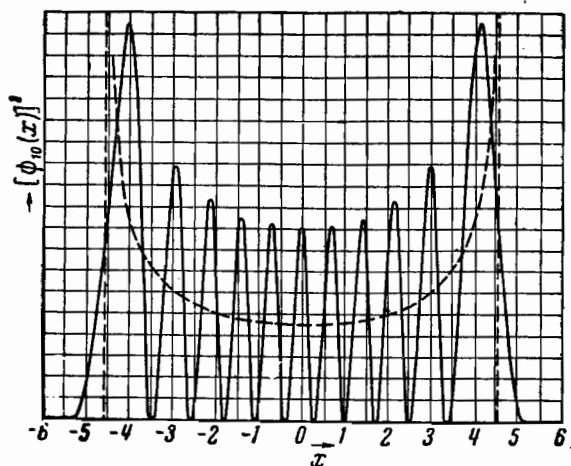


Рис. 218. Распределение плотности вероятности для  $n=10$ .

то эта кривая будет приблизительно параллельна классической кривой. При дальнейшем увеличении  $n$  максимумы сближаются всё теснее и ход кривой вероятности всё в большей степени приближается к классическому, как того и требует принцип соответствия.

Упражнения: 1. Вычислить нулевую энергию осциллятора, классическая частота колебаний которого равна  $10^{14}$  сек<sup>-1</sup>. Выразить её в электрон-вольтах. В какой части спектра лежит длина волны, соответствующая этой частоте?

2. Осциллятор состоит из частицы с массой 1 г, связанной с положением равновесия пружиной с  $f=10^4$  смн · см<sup>-1</sup>. Вычислить нулевую энергию этого осциллятора.

3. Вычислить квантовое число осциллятора предыдущей задачи, если его энергия равна  $kT$ , где  $k=1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг · град<sup>-1</sup> — постоянная Больцмана, а  $T=300^\circ$  К. Убедиться в том, что при этом квантовом числе энергия осциллятора меняется практически непрерывно (вычислить изменение энергии при  $\Delta n=1$ ).

## § 151. Связанные осцилляторы. Силы Ван-дер-Ваальса

В § 149 мы видели, что решение задачи о линейном осцилляторе в квантовой механике приводит к выводу, что даже при абсолютном нуле должна существовать «нулевая энергия», равная  $h\nu_0/2$ . Как ни своеобразен этот вывод, опыт показывает, что полученная нами формула для энергии линейного осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0$$

лучше соответствует фактам, чем прежняя «полуклассическая» формула  $E_n = nh\nu_0$ , которой пользовался Планк. Об этом свидетельствует, например, исследование молекулярных спектров, но, быть может, особенно интересно то, что существование нулевой энергии играет неожиданно важную роль в объяснении некоторых давно известных, но не поддававшихся объяснению явлений. Сюда относятся так называемые силы молекулярного сцепления, которые привлекаются для объяснения поверхностного натяжения, адсорбции и других молекулярных явлений. Так как эти силы проявляются уже в ван-дер-ваальсовом уравнении состояния реальных газов

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

то их называют силами Ван-дер-Ваальса.

Не было недостатка в попытках объяснить эти силы в рамках классической физики, причём во всех объяснениях им, конечно, приписывалось чисто электрическое происхождение. Поскольку ван-дер-ваальсовы силы проявляются во взаимодействиях между нейтральными атомами или молекулами, существование их можно

понять только в том случае, если считать, что эти взаимодействующие нейтральные системы являются электрическими диполями или — в случае более симметричных систем — квадрупольми \*). Силы взаимодействия между диполями убывают обратно пропорционально четвёртой степени расстояния, а силы взаимодействия между квадрупольми — обратно пропорционально шестой степени расстояния. Это качественно согласуется с тем давно известным фактом, что и силы молекулярного взаимодействия чрезвычайно быстро падают с расстоянием (вспомним о радиусах «сферы действия», которые привлекаются при элементарном объяснении молекулярных сил).

Однако попытки детального и, в особенности, количественного объяснения молекулярных взаимодействий в рамках классической физики встречали непреодолимые препятствия. Во-первых, совершенно загадочным представлялось существование молекулярных взаимодействий у благородных газов. Атомы этих газов обладают высокой электрической симметрией, ввиду чего невозможно приписывать им в статическом состоянии постоянный дипольный или даже квадрупольный момент. А между тем все они могут быть сгущены в жидкости и, следовательно, определённо обнаруживают существование молекулярных сил. Далее, попытки построения количественной теории даже для таких веществ, как галоидо-водородные соединения  $\text{HCl}$ ,  $\text{HBr}$ ,  $\text{HI}$ , заведомо обладающих большим дипольным моментом, привели к неудовлетворительным результатам.

Затруднения устраняются, если кроме указанных чисто статических взаимодействий учесть также и взаимодействия, обусловленные быстрыми движениями электронов в молекуле.

Пусть мы имеем две молекулы, у которых в состоянии покоя заряды распределены со сферической симметрией, так что молекулы между собою не взаимодействуют. Если сместить заряды из их положений равновесия, то молекула приобретает дипольный момент и взаимодействие становится возможным. Такое смещение на самом деле возникает вследствие не исчезающих ни при каких условиях нулевых колебаний с энергией  $\frac{1}{2} h\nu_0$ . Но появление дипольного момента в одной молекуле вызывает в окружающем пространстве поле и индуцирует дипольный момент в другой. Эти быстро меняющиеся дипольные моменты находятся относительно друг друга в такой фазе, что в результате возникает притяжение. Таково качественное объяснение молекулярных сил. Оно, как видно, неизбежно свя-

---

\*) По поводу свойств систем зарядов различной степени симметрии (диполи, квадруполь, октоуполь) см. А. Ф. Иоффе, Курс физики, т. I, стр. 215 и след., Гостехиздат, 1940.

зано с существованием нулевых колебаний, необходимость которых вытекает из соотношений неопределённости.

Покажем теперь, что эта простая картина позволяет сделать также количественный расчёт и установить закон молекулярных взаимодействий. Для этого, однако, нам необходимо сначала вспомнить, как решается в классической механике задача о колебаниях двух взаимодействующих или, иначе говоря, связанных осцилляторов.

Пусть мы имеем два электрических диполя, состоящих друг от друга на расстоянии  $r$  и расположенных вдоль прямой (рис. 219). Масса, связанная с каждым из зарядов,

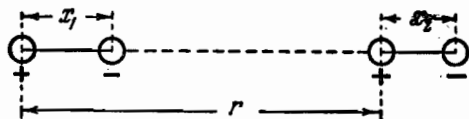


Рис. 219.

пусть будет равна  $m$ , расстояние между противоположными зарядами в первом диполе пусть будет  $x_1$ , во втором  $x_2$ . Энергия взаимодействия диполей обусловлена притяжениями противоположных зарядов и отталкиваниями одноимённых. По закону Кулона она равна

$$U_{12} = -\frac{e^2}{r-x_1} - \frac{e^2}{r+x_2} + \frac{e^2}{r+x_2-x_1} + \frac{e^2}{r} = \\ = \frac{e^2}{r} \left( -\frac{1}{1-\frac{x_1}{r}} - \frac{1}{1+\frac{x_2}{r}} + \frac{1}{1+\frac{x_2-x_1}{r}} + 1 \right).$$

Так как  $r$  всегда значительно больше  $x_2$  и  $x_1$ , то мы можем разложить дроби, стоящие в скобках, в ряды по общей формуле

$$\frac{1}{1+\frac{a}{r}} = \left(1 + \frac{a}{r}\right)^{-1} = 1 - \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \dots$$

Если ограничиться в каждом из этих разложений первыми тремя членами, то после простых вычислений получим

$$U_{12} = -\frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2. \quad (151,1)$$

Это и есть потенциальная энергия, обусловленная взаимодействием диполей.

Пусть теперь в наших диполях возникают колебания; при небольших смещениях эти колебания будут гармоническими. Так как массы зарядов и силы, связывающие их, в каждом диполе одинаковы, то в *отсутствии связи между диполями* (например, в случае очень больших расстояний между ними)



оба они будут совершать простые гармонические колебания с одной и той же частотой  $\nu_0$ :

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}},$$

где  $f$  — постоянная квазиупругой силы, одинаковая у обоих диполей.

Примем теперь во внимание связь между осцилляторами. Смещение заряда, скажем, в первом осцилляторе вызывает в нём квазиупругую силу  $-fx_1$ , смещение заряда во втором осцилляторе вызывает в нём силу  $-fx_2$ . Но вследствие связи между осцилляторами изменение дипольного момента второго осциллятора вызывает добавочную силу в первом, и наоборот. Эти добавочные силы  $F_{12}$  и  $F_{21}$  мы найдём, зная энергию взаимодействия  $U_{12}$ ; именно,

$$F_{12} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} = \frac{2e^2}{r^3} x_2, \quad F_{21} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} = \frac{2e^2}{r^3} x_1.$$

Вводя обозначение

$$\frac{2e^2}{r^3} = k, \quad (151,1')$$

мы можем написать уравнения движения обоих осцилляторов в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{k}{m} x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \frac{k}{m} x_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (151,2)$$

где, например,  $m\omega_0^2 x_1 = 4\pi^2 \nu_0^2 m x_1 = f x_1$  — квазиупругая сила, действующая в первом осцилляторе.

Зададимся вопросом, при каких условиях оба связанных осциллятора будут совершать простые гармонические колебания. Очевидно, что если колебание обоих осцилляторов будет простым, то оно должно происходить с одной и той же общей частотой. Поэтому для ответа на вопрос мы будем искать решения системы дифференциальных уравнений (151,2) в виде

$$x_1 = Ae^{i\omega t}, \quad x_2 = Be^{i\omega t}.$$

Подставив эти решения в (151,2), получим, после сокращения на  $e^{i\omega t}$ ,

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{k}{m} B &= 0, \\ -\frac{k}{m} A + (\omega_0^2 - \omega^2) B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (151,3)$$

Рассматривая эту систему алгебраических уравнений как уравнения с неизвестными  $A$  и  $B$ , мы видим, что система (151,3) линейна и однородна. Для того чтобы такая система имела решения, отличные от нуля, должно быть (см. § 74)

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \text{и} \quad \omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{k}{m}.$$

Отсюда получаем два значения для частоты  $\omega$ :

$$\omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{и} \quad \omega_- = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{k}{m}}. \quad (151,4)$$

Подставляя эти частоты обратно в (151,3), находим

- а) для  $\omega = \omega_+$   $A = +B$ ,  
 б) для  $\omega = \omega_-$   $A = -B = Be^{i\pi}$ .

Мы видим, таким образом, что система связанных осцилляторов имеет две различные частоты: одна из них немного меньше, а другая немного больше  $\omega_0$ . Эти частоты называются *нормальными*, или *главными*; именно с этими частотами осцилляторы могут совершать простые гармонические колебания. При этом, для того чтобы колебаться с частотой  $\omega_+$ , осцилляторы должны получить в начальный момент *одинаковое* смещение и в одной и той же фазе ( $A = B$ , антисимметричное колебание), а для того, чтобы колебаться с частотой  $\omega_-$ , осцилляторы должны получить смещение одинаковой амплитуды, но в *противоположных фазах* ( $A = -B$ , симметричное колебание). Оба эти случая иллюстрируются на рис. 220 и 221 примером с двумя связанными маятниками\*).

Если же при возникновении колебаний указанные, строго определённые условия не соблюдаются, например, если первому осциллятору в момент  $t=0$  сообщено смещение, а второй нахо-

\*) Следует, впрочем, иметь в виду, что в связанных маятниках потенциальная энергия выражается несколько иначе, нежели в рассматриваемом случае двух взаимодействующих диполей. В частности, в случае маятников только одна из частот (а именно большая,  $\omega_-$ ) отличается от  $\omega_0$ . Вторая же частота  $\omega_+$  не изменяет своей величины, что следует также и из того, что при  $\omega = \omega_+$   $A = B$ , т. е. маятники колеблются в одну сторону, а потому связывающая их пружина может быть убрана без изменения частоты. См. Л. Л. Лойцянский и А. И. Лурье, Теоретическая механика, т. III, стр. 384, ОНТИ, 1934.

дится в покое, то колебания системы уже не будут простыми, но их можно представить как наложение обоих главных колебаний — симметричного и антисимметричного.

В самом деле, состояние первого осциллятора можно получить, если представить себе, что он совершает одновременно

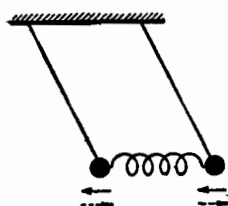


Рис. 220. Антисимметричные колебания связанных маятников.

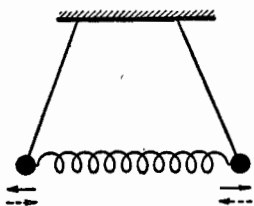


Рис. 221. Симметричные колебания связанных маятников.

оба колебания, каждое с амплитудой, равной  $A/2$ , причём в момент  $t=0$  эти колебания находятся в одинаковой фазе и поэтому дают амплитуду  $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = A$ . Равным образом состояние второго осциллятора можно получить

как наложение обоих собственных колебаний, находящихся в момент  $t=0$  в противоположных фазах ( $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A = 0$ ):

$$x_1 = \frac{A}{2} (\cos \omega_- t + \cos \omega_+ t) = A \cos \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \cos \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t,$$

$$x_2 = \frac{A}{2} (\cos \omega_- t - \cos \omega_+ t) = A \sin \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \sin \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t.$$

В каждом из этих выражений мы имеем медленно [с частотой  $(\omega_- - \omega_+)/2$ ] меняющийся множитель, представляющий модулированную амплитуду, и быстро [с частотой  $(\omega_- + \omega_+)/2$ ] меняющийся фазовый множитель. Кроме того, видно, что колебания  $x_1$  и  $x_2$  смещены друг относительно друга по фазе на  $\pi/2$ , так что, когда первый осциллятор колеблется с максимальной амплитудой, второй находится в покое. Постепенно амплитуда первого уменьшается, а амплитуда второго увеличивается, и через четверть периода модулирующей роли осцилляторов меняются, после чего весь процесс идёт в обратном направлении (рис. 222).

Эти «странствования» или флуктуации энергии нагляднее всего наблюдаются в известном демонстрационном опыте с двумя связанными одинаковыми маятниками. Мы можем описать также это явление, говоря, что осцилляторы периодически меняются местами, ввиду чего его можно назвать обменным эффектом.

Вычислим теперь полную энергию наших связанных осцилляторов. Потенциальная энергия отдельного осциллятора равна

$$\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2,$$

а потенциальная энергия системы связанных осцилляторов, как мы видели в начале этого параграфа, содержит, кроме суммы потенциальных энергий обоих осцилляторов, ещё

член  $-\frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2$ , соответствующий энергии их взаимодействия. Мы имеем, таким образом,

$$U = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2,$$

кинетическая же энергия равна

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2.$$

Следовательно,

$$T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3} x_1 x_2.$$

Если бы взаимодействием осцилляторов можно было пренебречь, отбросив последний член, то полная энергия системы

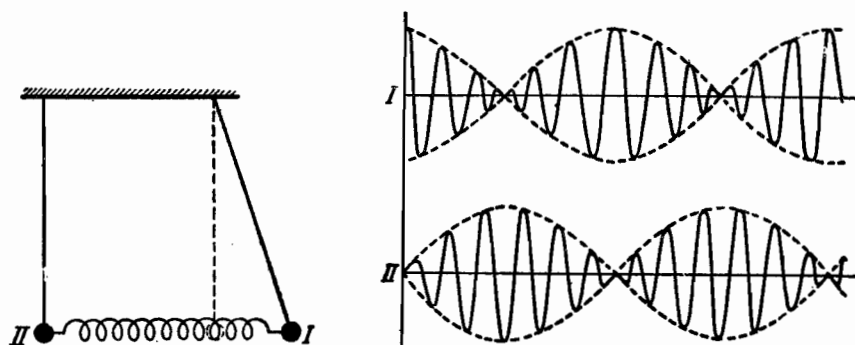


Рис. 222. Флуктуация энергии в связанных маятниках.

была бы просто равна сумме энергий обоих осцилляторов, совершающих колебания со своей неизменной частотой  $\omega_0$ . Но такое приближение годится только в том случае, когда осцилляторы находятся на большом расстоянии друг от друга ( $r$  велико). Мы можем, однако, представить полную энергию  $T + U$  в таком виде, чтобы её можно было рассматривать как сумму энергий осцилляторов, колеблющихся с *изменёнными частотами*.

Для того чтобы в этом убедиться, введём вместо  $x_1$  и  $x_2$  новые координаты  $\xi$  и  $\eta$ , связанные со старыми при помощи соотношений

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2).$$

Отсюда, обратно,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \eta), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \eta)$$

и, далее,

$$x_1^2 + x_2^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2).$$

Воспользовавшись этими соотношениями, преобразуем выражение для полной энергии:

$$\begin{aligned} T + U &= \frac{1}{2} m (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (\xi^2 + \eta^2) - \frac{e^2}{r^3} (\xi^2 - \eta^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(1 - \frac{2e^2}{mr^3 \omega_0^2}\right) \xi^2 + \frac{1}{2} m \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left(1 + \frac{2e^2}{mr^3 \omega_0^2}\right) \eta^2 \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (151,4) и (151,1),

$$T + U = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \omega_+^2 \xi^2 + \frac{1}{2} m \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m \omega_-^2 \eta^2. \quad (151,5)$$

Мы видим, таким образом, что в этом преобразованном виде  $T + U$  есть не что иное, как сумма энергий двух независимых осцилляторов, совершающих колебания с найденными ранее нормальными частотами  $\omega_+$  и  $\omega_-$ .

Согласно полученному в § 149 результату энергия этих осцилляторов имеет квантованные значения:

$$E_{n_+} = h\nu_+ \left(n_+ + \frac{1}{2}\right), \quad E_{n_-} = h\nu_- \left(n_- + \frac{1}{2}\right)$$

и, следовательно, полная энергия системы будет

$$E_{n_+} + E_{n_-} = h\nu_+ \left(n_+ + \frac{1}{2}\right) + h\nu_- \left(n_- + \frac{1}{2}\right). \quad (151,6)$$

Вычислим теперь частоты  $\nu_+$  и  $\nu_-$  с достаточным для нашей цели приближением. Заменяя в (151,4) угловые частоты линейными ( $\omega = 2\pi\nu$ ) и введя вместо  $k$  его выражение из (151,1'), получим

$$\nu_+ = \nu_0 \left(1 - \frac{2e^2}{r^3 f}\right)^{1/2}, \quad \nu_- = \nu_0 \left(1 + \frac{2e^2}{r^3 f}\right)^{1/2} \quad (f = 4\pi^2 m \nu_0^2).$$

Теперь воспользуемся разложением в ряд по известной формуле

$$(1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + \dots$$

Мы получим

$$\nu_+ = \nu_0 \left(1 - \frac{e^2}{r^3 f} - \frac{e^4}{2r^6 f^2}\right), \quad \nu_- = \nu_0 \left(1 + \frac{e^2}{r^3 f} - \frac{e^4}{2r^6 f^2}\right).$$

Подставляя это в (151,6), найдём

$$\begin{aligned} E &= E_{n_+} + E_{n_-} = \\ &= h\nu_0 \left\{ (n_+ + n_- + 1) + \frac{e^2}{r^3 f} (n_- - n_+) - \frac{e^4}{2r^6 f^2} (n_- + n_+ + 1) \right\}. \quad (151,7) \end{aligned}$$

В том случае, когда оба осциллятора находятся в основном состоянии,  $n_+ = n_- = 0$  и кроме того второй член в фигурных скобках обращается в нуль\*); мы получаем

$$E = h\nu_0 \left( 1 - \frac{e^4}{2f^2 r^6} \right). \quad (151,8)$$

Принимая во внимание, что сумма нулевых энергий обоих осцилляторов равна  $\frac{1}{2} h\nu_0 + \frac{1}{2} h\nu_0 = h\nu_0$ , мы видим, что полная энергия системы меньше этой суммы на величину  $\frac{e^4 h\nu_0}{2f^2 r^6}$ . Величина  $-\frac{e^4 h\nu_0}{2f^2 r^6}$  и есть энергия связи

$$W = -\frac{e^4 h\nu_0}{2f^2} \cdot \frac{1}{r^6} = -\frac{C}{r^6}, \quad (151,9)$$

где  $C$  — некоторая константа. Отрицательный знак указывает на то, что связь заключается всегда в притяжении. Константу  $C$  для различных атомов можно вычислить из оптических данных и значений универсальных констант  $e$  и  $h$ .

Таким образом, мы приобретаем возможность вычислять заранее энергию молекулярных взаимодействий. С другой стороны, мерой этой энергии может служить работа, которую нужно затратить, чтобы освободить атом или молекулу от её связи в твёрдой кристаллической решётке, или, иначе, теплота возгонки (сублимации). Насколько хорошо совпадают между собой вычисленные при помощи формулы (151,9) и найденные на опыте величины теплоты сублимации (приведённые к абсолютному нулю), показывают следующие цифры:

Вещество	Теплоты сублимации	
	вычисленные	наблюдённые
Ne	0,47	0,59
N <sub>2</sub>	1,64	1,86
Ar	2,08	2,03
CH <sub>4</sub>	2,42	2,70

Возвращаясь к сказанному в начале этого параграфа, мы покажем, что возможность объяснения сил сцепления Ван-дер-Ваальса обусловлена появлением в формуле энергии осцилля-

\* ) Этот член представляет большой интерес в том случае, когда один из диполей находится в возбуждённом состоянии, т. е. когда  $n_+$  или  $n_- \neq 0$ . Однако на этом случае мы здесь останавливаться не будем.

тора столь странной на первый взгляд нулевой энергии  $\frac{1}{2} h\nu_0$ . В самом деле, если бы мы для окончательного расчёта воспользовались полуклассической формулой Планка  $E_n = nh\nu_0$ , то в формуле (151,7) выпали бы две единицы (в первых и последних круглых скобках). Поэтому в основном состоянии (при  $n_+ = n = 0$ ) мы получили бы для энергии связи нуль. Это как раз соответствует тому факту, что покоящиеся осцилляторы согласно классической теории не могут взаимодействовать, если они в силу распределения зарядов не обладают заметным электрическим моментом (атомы благородных газов He, Ne, Ar!). Таким образом, *появление сил молекулярных взаимодействий в нормальном состоянии связано с существованием нулевой энергии.*

### § 152. Частица в трёхмерном потенциальном ящике

В задачах, с которыми мы имели дело до сих пор, функция  $\psi$  зависела только от одной координаты. В заключение этой главы мы рассмотрим простейший пример трёхмерной задачи.

Пусть мы имеем трёхмерный потенциальный ящик, т. е. ограниченную во всех направлениях область, внутри которой потенциальная энергия всюду равна нулю, но на границах которой она сразу возрастает до бесконечности и остаётся таковой во всём остальном пространстве. Положим, что область, где потенциальная энергия равна нулю, имеет форму параллелепипеда с рёбрами  $l_1, l_2, l_3$ . Мы можем представить  $U(x, y, z)$  как сумму трёх слагаемых:

$$U(x, y, z) = U_x(x) + U_y(y) + U_z(z),$$

причём

$$\begin{aligned} \text{при } 0 \leq x \leq l_1 & \quad U_x = 0, & \text{при } x \leq 0 \text{ и } x \geq l_1 & \quad U_x = \infty, \\ \text{» } 0 \leq y \leq l_2 & \quad U_y = 0, & \text{» } y \leq 0 \text{ и } y \geq l_2 & \quad U_y = \infty, \\ \text{» } 0 \leq z \leq l_3 & \quad U_z = 0, & \text{» } z \leq 0 \text{ и } z \geq l_3 & \quad U_z = \infty. \end{aligned}$$

Уравнение Шредингера мы напомним для этого случая в декартовых координатах:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U_x - U_y - U_z) = 0. \quad (152,4)$$

Это — дифференциальное уравнение в частных производных. Метод решения, которым мы будем пользоваться здесь и в дальнейшем (см. т. II, гл. XIII), состоит в том, что уравнение в частных производных стараются разделить на три обыкновенных уравнения. Возможность этого разделения в значительной

степени связана с рациональным выбором системы координат, а выбор этот обычно подсказывается симметрией задачи. В данном случае разделение осуществляется очень просто.

Будем искать  $\psi$  в виде произведения трёх функций, каждая из которых зависит только от одной координаты

$$\psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (152,2)$$

Подставив решение (152,2) в уравнение (152,1), разделив обе части на  $XYZ$ , получим

$$\left( \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_x \right) + \left( \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_y \right) + \left( \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_z \right) = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E. \quad (152,3)$$

Здесь первая пара членов зависит только от  $x$ , вторая — только от  $y$ , третья — только от  $z$ , однако сумма их равняется постоянной. Это может быть лишь в том случае, когда каждая из скобок в левой части сама равна какой-то постоянной. Итак,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_x &= C_x, \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_y &= C_y, \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U_z &= C_z. \end{aligned} \right\} \quad (152,4)$$

Мы получили три обыкновенных дифференциальных уравнения — разделение оказалось возможным. Очевидно, что

$$C_x + C_y + C_z = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E.$$

Но вместо постоянных  $C_x, C_y, C_z$  удобно ввести другие:  $E_x, E_y, E_z$ , полагая, например,  $C_x = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E_x$ . Тогда уравнения (152,4) можно будет переписать в виде

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E_x - U_x) X = 0 \text{ и т. д.} \quad (152,5)$$

Очевидно, что уравнение (152,5) совпадает с уравнением (147,1) задачи об одномерном потенциальном ящике. Краевые условия для обеих задач также одинаковы:

$$X(0) = X(l_1) = 0. \quad (152,6)$$



По аналогии с решениями § 147 мы можем сразу написать решения, удовлетворяющие уравнению (152,5) и краевым условиям (152,6). В нормированном виде они таковы:

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin \frac{n_x \pi x}{l_1} \quad (n_x = 1, 2, 3, \dots) \quad (152,7)$$

при условии

$$E_{n_x} = n_x^2 \frac{h^2}{8ml_1^2}. \quad (152,8)$$

Два других уравнения из группы (152,4) имеют аналогичные решения:

$$\left. \begin{aligned} Y_n &= \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{n_y \pi y}{l_2}, \\ Z_n &= \sqrt{\frac{2}{l_3}} \sin \frac{n_z \pi z}{l_3}, \end{aligned} \right\} \quad (n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots) \quad (152,9)$$

при условиях

$$E_{n_y} = n_y^2 \frac{h^2}{8ml_2^2}, \quad E_{n_z} = n_z^2 \frac{h^2}{8ml_3^2}. \quad (152,8')$$

Теперь мы уже можем написать решения исходного уравнения, удовлетворяющие краевым условиям:

$$\psi_n(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin \frac{n_x \pi x}{l_1} \sin \frac{n_y \pi y}{l_2} \sin \frac{n_z \pi z}{l_3}, \quad (152,10)$$

причём энергия может принимать только следующий дискретный ряд значений:

$$E(n_x, n_y, n_z) = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{n_x^2}{l_1^2} + \frac{n_y^2}{l_2^2} + \frac{n_z^2}{l_3^2} \right) \quad (152,11)$$

$$(n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots).$$

Собственные функции (152,10) нашей задачи характеризуются следующим образом (см. § 147): они представляют собою стоячие волны, имеющие  $n_x + 1$  узловых плоскостей, параллельных координатной плоскости  $yz$ ,  $n_y + 1$  узловых плоскостей, параллельных плоскости  $xz$ , и  $n_z + 1$  узловых плоскостей, параллельных плоскости  $xy$ .

Возможные значения энергии согласно формуле (152,11) образуют дискретную последовательность, причём каждой тройке целых чисел  $n_x, n_y, n_z$  соответствует определённый уровень энергии. Эти три числа  $n_x, n_y, n_z$  являются *квантовыми числами* задачи.

Для наглядного представления возможных состояний и значений энергии частицы в ящике удобно пользоваться следующим геометрическим образом. Представим себе пространствен-

ную решётку с элементарной ячейкой в виде прямоугольного параллелепипеда с рёбрами  $1/l_1, 1/l_2, 1/l_3$  (рис. 223). Объём этой ячейки будет  $1/l_1 l_2 l_3$ . Так как каждое состояние частицы характеризуется совокупностью целых значений  $n_x, n_y, n_z$ , то мы можем представить любое состояние тем узлом решётки, который имеет координаты  $n_x/l_1, n_y/l_2, n_z/l_3$ . Энергию, соответствующую этому состоянию, мы найдём при помощи нашей геометрической картины следующим образом. Вообразим вектор  $\mathbf{A}$ , соединяющий начало координат с точкой, изображающей состояние. Квадрат его длины будет

$$A^2 = \frac{n_x^2}{l_1^2} + \frac{n_y^2}{l_2^2} + \frac{n_z^2}{l_3^2}.$$

Поэтому энергия представится как

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{h^2}{8m} A^2.$$

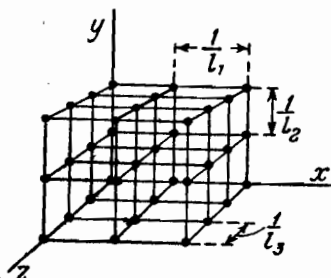


Рис. 223.

При помощи описанной геометрической картины мы можем установить чрезвычайно важную особенность решений данной задачи. Если рёбра потенциального ящика  $l_1 l_2 l_3$  — несоизмеримые числа, то *каждому состоянию* соответствуют своя изображающая точка и своё значение энергии. Не то будет в случае, когда рёбра находятся в рациональном отношении. Пусть для простоты мы имеем дело с кубическим ящиком, так что  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ . Для этого случая

$$\psi = \sqrt{\frac{8}{l^3}} \sin \frac{n_x \pi x}{l} \sin \frac{n_y \pi y}{l} \sin \frac{n_z \pi z}{l},$$

$$E = \frac{h^2}{8ml^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Очевидно, что для каждой совокупности целых значений  $n_x, n_y, n_z$  мы будем иметь свою функцию  $\psi$ , но значения энергии для всех состояний, для которых сумма  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$  имеет одну и ту же величину, будут между собой совпадать. Таким образом, различным узлам нашей воображаемой кубической решётки будут всегда соответствовать различные состояния, но энергия в некоторых из этих состояний будет одинакова.

Рассмотрим для примера два частных случая. Пусть  $n_x = 1, n_y = 1, n_z = 1$ ; в этом случае

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 3.$$

Так как нельзя подобрать три других целых числа, сумма квадратов которых равна 3, то состоянию  $(1, 1, 1)$  соответствует

только одно значение энергии. Но положим, что  $n_x = 1$ ,  $n_y = 2$ ,  $n_z = 3$ . Тогда

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 14,$$

и соответствующее значение энергии будет

$$E = \frac{h^2}{8m^2} \cdot 14.$$

Этому значению энергии отвечает шесть различных состояний (см. таблицу XXII).

Таблица XXII

$n_x$	$n_y$	$n_z$	$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$
1	2	3	14
1	3	2	
2	1	3	
2	3	1	
3	1	2	
3	2	1	

Нетрудно убедиться в том, что в случае кубического ящика попарившее большее состояние будет характеризоваться той особенностью, что несколькими различными состояниями соответствует одинаковая энергия. Такие состояния называются вырожденными, а число совпадающих уровней энергии называется квантовым весом состояния. В первом из рассмотренных примеров квантовый вес равен 6, во втором он равен 6.

Упражнения: 1. Решить задачу о колебаниях трехмерного линейного анизотропного осциллятора (см. § 106). Потенциальная энергия такого осциллятора выражается суммой

$$U = \frac{1}{2} f_x x^2 + \frac{1}{2} f_y y^2 + \frac{1}{2} f_z z^2,$$

где  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  — константы квадратичной силы в направлениях трех декартовых прямоугольных осей координат. Вводя соответствующие квантовые частоты  $\nu_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f_x}{m}}$  и т. д., можно представить потенциальную

энергию в виде

$$U = 2\pi^2 m (\nu_x^2 x^2 + \nu_y^2 y^2 + \nu_z^2 z^2).$$

Использовать эти выражениям потенциальной энергии в уравнении Шредингера и показать, что собственные значения энергии осциллятора в этом случае таковы:

$$E_{n_x, n_y, n_z} = h \left[ \left( n_x + \frac{1}{2} \right) \nu_x + \left( n_y + \frac{1}{2} \right) \nu_y + \left( n_z + \frac{1}{2} \right) \nu_z \right].$$

где целые числа  $n_x, n_y, n_z$  — квантовые числа данной задачи, а собственные функции имеют вид

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_x x^2 + \alpha_y y^2 + \alpha_z z^2)} H_{n_x}(\sqrt{\alpha_x} x) \cdot H_{n_y}(\sqrt{\alpha_y} y) \cdot H_{n_z}(\sqrt{\alpha_z} z),$$

где

$$\alpha_x = \frac{4\pi^2 m}{h} \nu_x \text{ и т. д.}$$

*Указание.* Выполнить разделение уравнения Шредингера по схеме, разобранный в настоящем параграфе, и воспользоваться результатами § 149 для одномерного линейного осциллятора.

2. Убедиться в том, что в случае трёхмерного изотропного линейного осциллятора собственные значения энергии будут:

$$E_n = \left( n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) h\nu_0 = \left( n + \frac{3}{2} \right) h\nu_0 \quad (n = n_x + n_y + n_z).$$

Показать, что все уровни, за исключением нулевого ( $n_x = n_y = n_z = 0$ ), — вырожденные, с квантовым весом  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### I. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

Рассмотрим следующую задачу. Пусть мы участвуем в беспроигрышной лотерее, в которой имеется  $n_1$  билетов с выигрышем  $a_1$  рублей,  $n_2$  билетов с выигрышем  $a_2$  рублей и т. д. Каков средний выигрыш? Пусть полное число билетов равно  $N$ :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k \equiv \sum_{i=1}^k n_i = N.$$

Очевидно, что средний выигрыш  $\bar{a}$  найдётся по «правилу смешения»:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \\ &= a_1 \frac{n_1}{N} + a_2 \frac{n_2}{N} + \dots + a_k \frac{n_k}{N}. \end{aligned} \quad (I,1)$$

Но отношения  $\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots$  суть вероятности для участвующего в лотерее получить тот или иной выигрыш\*):

$$w_1 = \frac{n_1}{N}, \quad w_2 = \frac{n_2}{N}, \quad \dots, \quad w_k = \frac{n_k}{N}. \quad (I,2)$$

Поэтому (I,1) можно переписать в виде

$$\bar{a} = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k \equiv \sum_{i=1}^k a_i w_i. \quad (I,3)$$

Выражение, стоящее в правой части (I,3), т. е. сумма произведений значений, которые может принимать величина  $a$ , на соответствующие вероятности, в теории вероятностей обычно называется математическим ожиданием.

В более общем случае величины  $x$ , принимающей дискретный ряд значений  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , среди которых могут быть

\*) См., например, С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, стр. 17, Гостехиздат, 1946.

и отрицательные, причём вероятности получить эти значения равны соответственно  $w_1, w_2, \dots, w_k$ , математическое ожидание определяется как *алгебраическая сумма*

$$\bar{x} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_k w_k. \quad (I,4)$$

Заметим, что вероятности (I,2) определены таким образом, что сумма вероятностей всех возможных значений величины  $a$  в (I,3) или  $x$  в (I,4) равна 1:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_k = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{N} = 1. \quad (I,5)$$

Смысл такого определения состоит в следующем: так как  $a_1, a_2, \dots, a_k$  исчерпывают все возможные величины выигрыша и лотерея беспроигрышная, то сумма вероятностей  $w_1 + w_2 + \dots + w_k$ , по теореме сложения вероятностей равная вероятности получить *какой-нибудь* выигрыш, есть вероятность достоверного события. По обычному условию, вероятность достоверного события принимается равной 1. Если вероятности всех возможных значений величины удовлетворяют условию (I,5), то говорят, что вероятность нормирована к 1.

В физике в некоторых случаях приходится иметь дело с вероятностями, не нормированными к 1. Можно было бы, например, вероятность получить тот или иной выигрыш характеризовать числом билетов, дающих этот выигрыш. Тогда

$$w_1 = n_1, \quad w_2 = n_2, \quad \dots, \quad w_k = n_k,$$

и по формуле (I,1)

$$\bar{a} = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k}{w_1 + w_2 + \dots + w_k} \equiv \frac{\sum_i a_i w_i}{\sum_i w_i}$$

или вместо (I,4)

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i}. \quad (I,6)$$

Приведённые определения относились к величинам, распределённым дискретно (например, различные возможные выигрыши  $a_1, a_2, \dots, a_k$  различаются на конечное число рублей). В физике же часто приходится иметь дело с величинами, изменяющимися непрерывным образом. В этом случае вероятность какой-либо величине иметь значение, лежащее в узком интервале между  $x$  и  $x + dx$ , пропорциональна величине интервала  $dx$  и выражается в виде  $w(x) dx$ . Здесь функция  $w(x)$ , которая называется функцией распределения или *плотностью вероят-*

ности, имеет следующий смысл. Построим кривую, изображающую  $w(x)$  (рис. 224); на малом участке от  $x$  до  $x+dx$  функцию  $w(x)$  можно считать постоянной и произведение  $w(x)dx$ , изображаемое площадью заштрихованной полоски, есть вероятность переменной величине иметь значение, лежащее в указанном интервале. Если эта переменная величина может непрерывно изменяться на конечном интервале от  $x=a$  до  $x=b$ , то интеграл

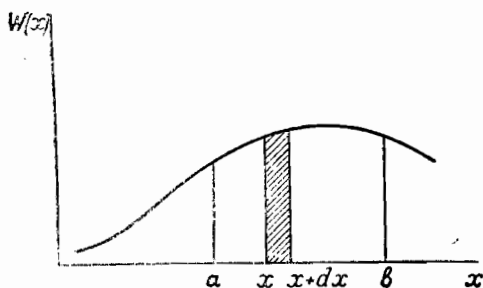


Рис. 224.

$\int_a^b w(x) dx$ , изображаемый площадью, ограничиваемой кривой между ординатами  $x=a$  и  $x=b$ , есть вероятность того, что значение  $x$  лежит где-нибудь в указанном конечном интервале  $(a, b)$ . В том случае,

когда в этом интервале заключены все возможные значения  $x$ , интеграл  $\int_a^b w(x) dx$  представляет вероятность достоверного события. Если функция  $w(x)$  выбрана так, что

$$\int_a^b w(x) dx = 1, \quad (I,7)$$

то говорят, что плотность вероятности нормирована к 1. В частности, область изменения  $x$  может быть интервал от 0 до  $\infty$  или даже от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Чтобы условие (I,7) имело смысл в этом случае, функция  $w(x)$  должна достаточно быстро убывать при возрастании  $x$  (по крайней мере, как  $x^{-p}$ , где  $p > 1$ )\*).

Для отыскания среднего значения  $x$  весь интервал  $(a, b)$  разбивается на малые участки  $x_i, x_i + dx$ . На каждом из них  $w(x) = w(x_i)$  можно считать постоянной;  $w(x_i) dx$  приближенно равно вероятности величине  $x$  иметь значение между  $x_i$  и  $x_i + dx$ .

Предел суммы  $\sum_i x_i w(x_i) dx$ , равный интегралу  $\int_a^b x w(x) dx$ , и будет в этом случае математическим ожиданием или средним

\*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, стр. 253, Гостехиздат, 1943.

значением непрерывно изменяющейся величины \*)

$$\bar{x} = \int_a^b x \omega(x) dx. \quad (I, 8)$$

Предполагается при этом, что плотность вероятности нормирована к 1, т. е. что имеет место равенство (I,7). Если же  $\omega(x)$  не нормирована, то для вычисления  $\bar{x}$  следует пользоваться формулой, аналогичной (I,6):

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x \omega(x) dx}{\int_a^b \omega(x) dx}. \quad (I, 9)$$

Среднее значение квадрата  $\bar{x}^2$  будет [в случае, когда  $\omega(x)$  нормирована]:

$$\bar{x}^2 = \int_a^b x^2 \omega(x) dx \quad (I, 10)$$

и вообще среднее значение любой функции  $f(x)$

$$\overline{f(x)} = \int_a^b f(x) \omega(x) dx. \quad (I, 11)$$

Рассмотрим пример. Пусть

$$\omega(x) = e^{-\lambda x}, \quad (I, 12)$$

причём  $x$  может принимать все значения от 0 до  $\infty$ . Проверяем нормирование функции  $\omega(x) = e^{-\lambda x}$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

т. е. вероятность не нормирована. Для вычисления средних значений нужно либо пользоваться формулой (I,9), либо нормировать  $\omega(x)$ . Очевидно, что в данном случае  $\lambda e^{-\lambda x}$  и есть

\*) За строгими доказательствами следует обратиться к руководствам по теории вероятностей, например, С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, гл IV, Гостехиздат, 1946; В. И. Гливенко, Курс теории вероятностей, § 16, Гостехиздат, 1939.



нормированная плотность вероятности. Среднее значение  $x$  будет

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} x w(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Интегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx &= \int_0^{\infty} x d\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

(двойная подстановка при верхнем пределе даёт неопределённость вида  $\frac{\infty}{\infty}$ ; раскрывая её по правилу Лопиталья, получаем нуль). Итак,

$$\bar{x} = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \bar{x^2} &= \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 d\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) = \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x dx = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Плотность вероятности типа  $e^{-\lambda x}$  неоднократно встречается в этой книге.

## II. ВЫВОД ФОРМУЛ ЗАВИСИМОСТИ МАССЫ ОТ СКОРОСТИ

Приведём принадлежащий Р. Толману\*) простой вывод формулы

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Для этого сопоставим прежде всего необходимые вспомогательные формулы.

а) *Теорема сложения скоростей.*

Имеем две системы координат  $S$  и  $S'$ . Система  $S'$  движется относительно  $S$  в направлении оси  $x$  со скоростью  $V$ . Если материальная точка равномерно движется со скоростью, со-

\*) В дальнейшем мы следуем изложению Р. Толмана, данному в его книге «Relativity, Thermodynamics and Cosmology», Oxford, 1934.

ставляющие которой в системе  $S'$  суть  $u'_x, u'_y, u'_z$ , то в системе  $S$  составляющие скорости равны

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + V}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}, \\ u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}, \\ u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}. \end{aligned} \quad (\text{II}, 1)$$

Формулы (II,1) выражают теорему сложения скоростей в механике специальной теории относительности.

б) Преобразование фактора Лоренца  $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ .

Выведем теперь формулу преобразования фактора Лоренца, как известно, часто встречающегося в формулах теории относительности. Напишем

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2}}. \quad (\text{II}, 1')$$

Подставляя сюда  $u_x, u_y, u_z$  из формул (II,1), получим после ряда алгебраических преобразований

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x V}{c^2}}, \quad (\text{II}, 2)$$

где

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2.$$

Формула (II,2) и есть искомая формула преобразования фактора

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

с) Вывод формулы зависимости массы от скорости.

Излагаемый далее вывод основан на законах сохранения массы и количества движения

$$\sum m = \text{const.}, \quad \sum m\dot{x} = \text{const.}, \quad \sum m\dot{y} = \text{const.}, \quad \sum m\dot{z} = \text{const.},$$

имеющих место в любой системе координат.

В первом случае суммирование распространяется на все массы системы; во втором — на все импульсы.

Рассмотрим теперь упругое соударение двух тождественных материальных точек. Пусть обе точки до соударения движутся в системе  $S'$  параллельно оси  $x$  со скоростями  $+u'$  и  $-u'$ . Поскольку, кроме того, предполагается, что соударение вполне упруго, обе точки в момент соударения останавливаются, а затем обмениваются скоростями: первая движется со скоростью  $-u'$ , вторая — со скоростью  $+u'$ . Введём теперь ещё систему координат  $S$ , которая равномерно движется относительно  $S'$  со скоростью  $-V$ . Скорости наших двух точек в этой системе будут  $u_1$  и  $u_2$ ; массы их обозначим через  $m_1$  и  $m_2$  (значки введены для того, чтобы заранее учесть возможность зависимости массы от скорости). Пусть  $M$  будет сумма масс обеих частиц в момент их соударения, т. е. тогда, когда их общая скорость относительно  $S$  равна  $+V$ . Законы сохранения массы и количества движения, справедливые в любой системе координат, дают

$$m_1 + m_2 = M, \quad (\text{II},3)$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = MV. \quad (\text{II},4)$$

Легко видеть, что в механике Галилея—Ньютона совместное использование этих соотношений приводит к независимости массы от скорости. Действительно, теорема сложения скоростей механики Галилея—Ньютона даёт

$$u_1 = u' + V,$$

$$u_2 = -u' + V.$$

Подставляя это в (II,4) и пользуясь (II,3), находим

$$m_1 u' + m_1 V - m_2 u' + m_2 V = m_1 V + m_2 V,$$

откуда

$$(m_1 - m_2) u' = 0$$

или

$$m_1 = m_2.$$

Напротив, в механике теории относительности преобразование скоростей производится по формулам (II,1), на основании которых

$$u_1 = \frac{u' + V}{1 + \frac{u' V}{c^2}}, \quad u_2 = \frac{-u' + V}{1 - \frac{u' V}{c^2}}.$$

Подставляя в (II,4) и пользуясь также законом сохранения массы  $M = m_1 + m_2$ , получаем

$$m_1 \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}} + m_2 \frac{-u' + V}{1 - \frac{u'V}{c^2}} = m_1 V + m_2 V,$$

откуда после простых алгебраических преобразований

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{u'V}{c^2}}{1 - \frac{u'V}{c^2}}. \quad (\text{II},5)$$

Но по формуле (II,2)

$$\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_1'^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_1'V}{c^2}},$$

$$\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_2'^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_2'V}{c^2}},$$

ввиду чего (II,5) принимает вид

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}. \quad (\text{II},6)$$

Это показывает, что при различных скоростях  $u_1$  и  $u_2$  массы  $m_1$  и  $m_2$  не одинаковы, но обратно пропорциональны факторам  $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ . Если поэтому  $u_2 = 0$ , то так как согласно предположению массы обеих частиц в покое одинаковы и равны, например,  $m_0$  — соотношение (II,6) даёт

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

что и требовалось доказать.

### III. К КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ЗЕЕМАНА

Покажем, что при медленном возрастании магнитного поля радиус орбиты электрона не меняется, но меняется только его угловая частота. Согласно второму уравнению Максвелла в интегральной форме (обобщённый закон электромагнитной индукции) при изменении магнитного поля  $\mathcal{H}$  возникает вих-

ревое электрическое поле  $\mathcal{E}$  с осью, направленной по  $\mathcal{H}$ , причём

$$\oint \mathcal{E}_s ds = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \pi r^2 \frac{d\mathcal{H}}{dt}. \quad (\text{III}, 1)$$

Если за время, пока магнитное поле возрастает от 0 до  $\mathcal{H}$ , электрон успевае сделать  $n$  оборотов, то, предполагая, что  $\mathcal{H}$  возрастает равномерно, имеем

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\mathcal{H}}{nT}, \quad (\text{III}, 2)$$

где  $T$  — период обращения электрона. Работа, совершаемая полем над электроном в течение одного оборота, равна

$$\frac{\Delta W}{n} = -e \oint \mathcal{E}_s ds$$

или, принимая во внимание (III,1) и (III,2),

$$\frac{\Delta W}{n} = \frac{e}{c} \frac{\mathcal{H}}{nT} \pi r^2,$$

так что

$$\Delta W = \frac{e}{c} \frac{\mathcal{H}}{T} \pi r^2 = \frac{e}{c} \mathcal{H} v \pi r^2 = \frac{e}{2c} \mathcal{H} \omega r^2.$$

Эта работа затрачивается прежде всего на увеличение кинетической энергии электрона, а если изменяется радиус орбиты, то также и на увеличение потенциальной энергии. Поэтому

$$\frac{e}{2c} \mathcal{H} \omega r^2 = \Delta E_{\text{кин}} + \Delta E_{\text{пот}}. \quad (\text{III}, 3)$$

Но

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}} &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2, \\ \Delta E_{\text{кин}} &= m (r^2 \omega \Delta \omega + \omega^2 r \Delta r), \\ E_{\text{пот}} &= -\frac{e^2}{r}, \quad \Delta E_{\text{пот}} = \frac{e^2}{r^2} \Delta r \end{aligned} \quad (\text{III}, 4)$$

или, принимая во внимание равенство между силой притяжения  $\frac{e^2}{r^2}$  и центробежной силой инерции  $m r \omega^2$ , имеем

$$\Delta E_{\text{пот}} = m r \omega^2 \Delta r. \quad (\text{III}, 5)$$

Подставляя (III,4) и (III,5) в (III,3), находим

$$\frac{e}{2c} \mathcal{H} \omega r^2 = m (r^2 \omega \Delta \omega + 2\omega^2 r \Delta r).$$

Разделив обе части на  $mr^2\omega^2$ , получаем

$$\frac{e}{2mc} \cdot \frac{\mathcal{H}}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} + 2 \frac{\Delta r}{r}. \quad (\text{III}, 6)$$

Далее, принимая во внимание, что при бесконечно медленном (адиабатическом) изменении состояния в каждый момент имеет место равенство между силами, действующими на электрон (т. е. кулоновской силой притяжения плюс сила Лоренца), и центробежной силой инерции; для установившегося состояния получаем

$$m(r + \Delta r)(\omega + \Delta\omega)^2 = \frac{e^2}{(r + \Delta r)^2} + \frac{e}{c} \mathcal{H}r\omega$$

или, после умножения на  $(r + \Delta r)^2$ ,

$$m(r + \Delta r)^3(\omega + \Delta\omega)^2 = e^2 + \frac{e}{c} \mathcal{H}r^3\omega$$

[членами, содержащими  $r \Delta r$  и  $(\Delta r)^2$ , пренебрегаем]. Отсюда простыми преобразованиями находим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\Delta r}{r} = \frac{e}{2mc} \frac{\mathcal{H}}{\omega}. \quad (\text{III}, 7)$$

Сравнивая (III, 6) и (III, 7), получаем прежде всего

$$\Delta r = 0$$

и далее

$$\Delta\omega = \frac{e}{2mc} \mathcal{H},$$

что и требовалось доказать.

#### IV. ФОРМУЛА СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФЛУКТУАЦИИ

Формула средней квадратичной флуктуации

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(\Delta n)^2} = \bar{n}$$

встречается так часто в этой книге, что целесообразно дать её вывод.

Рассмотрим следующую задачу кинетической теории газов: в некотором объёме  $V$  находится  $N$  молекул; какова вероятность того, что в части этого объёма  $v$  находится  $n$  молекул? Вероятность того, что одна молекула находится в объёме  $v$ , есть  $\frac{v}{V}$  (см. § 109); вероятность того, что  $n$  определённых молекул соберутся в объёме  $v$ , есть  $\left(\frac{v}{V}\right)^n$ , а вероятность того, что  $N - n$  молекул будут в объёме  $V - v$ , есть  $\left(\frac{V - v}{V}\right)^{N - n}$ . Наконец,

вероятность того, что  $n$  молекул будут в объёме  $v$ , а остальные  $(N-n)$  — в объёме  $V-v$ , есть

$$\left(\frac{v}{V}\right)^n \cdot \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \quad (\text{IV},1)$$

Эта формула, как уже подчёркивалось выше, даёт вероятность того, что какие-то *определённые* молекулы числом  $n$  находятся в объёме  $v$ ; можно, например, себе представить, что все  $N$  молекул перенумерованы и из них  $n$  молекул с такими-то номерами находятся в объёме  $v$ . Для нас, однако, не существенно, какие именно молекулы находятся в объёме  $v$ ; важно, чтобы их число было  $n$ . Но из данного распределения  $N$  молекул по объёмам  $v$  и  $V-v$  можно получить ещё

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (\text{IV},2)$$

различных распределений, при которых, однако,  $n$  молекул будет попрежнему в объёме  $v$ , а  $N-n$  — в объёме  $V-v$ . В самом деле, из  $N$  объектов можно осуществить  $N!$  перестановок, но не все эти перестановки дадут различные распределения. Именно  $n!$  перестановок молекул, находящихся в объёме  $v$ , и  $(N-n)!$  перестановок молекул, находящихся в объёме  $V-v$ , дадут одно и то же распределение. Таким образом, из всего числа  $N!$  перестановок нужно исключить  $n!(N-n)!$  перестановок, не меняющих распределения молекул, и следовательно, число перестановок, дающих *различные* распределения, выразится формулой (IV,2).

Итак, существует всего  $\frac{N!}{n!(N-n)!}$  альтернативных распределений, при которых  $n$  молекул находятся в объёме  $v$ , а  $N-n$  — в объёме  $V-v$ . Вероятность каждого из этих распределений выражается формулой (IV,1), а следовательно, вероятность того, что *любые*  $n$  молекул будут находиться в объёме  $v$  по теореме сложения вероятностей, есть

$$\omega_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \quad (\text{IV},3)$$

Если, в частности, требуется найти вероятность того, что *все*  $N$  молекул соберутся в части  $v$  объёма  $V$ , то в этом случае  $n=N$ , и формула (IV,3) даёт

$$\omega_n = \frac{N!}{N!0!} \left(\frac{v}{V}\right)^N = \left(\frac{v}{V}\right)^N,$$

т. е. вновь получается формула, приведённая в тексте, стр. 333. Очевидно, что при равномерном распределении  $N$  молекул по объёму  $V$  на объём  $v$  придётся  $N \frac{v}{V}$  молекул. Пользуясь форму-

лой (IV,3), можно показать, что такое распределение будет наиболее вероятным. Но формула (IV,3) даёт вероятность того, что в объёме  $v$  будет находиться любое число молекул ( $\leq N$ ), т. е. вероятность постоянной, любым образом отклоняющихся от наиболее вероятного. Сумма вероятностей (IV,3) по всем  $n$  от 0 до  $N$  даёт вероятность того, что в объёме  $v$  будет находиться *какое-нибудь* число молекул между 0 и  $N$ . Такое событие есть достоверность,

и поэтому  $\sum_{n=0}^N \omega_n$  должна быть равна 1, если вероятность (IV,3) нормирована к 1. Это имеет место на самом деле. Действительно, правая часть (IV,3) есть общий член бинома  $\left(\frac{V-v}{V} + \frac{v}{V}\right)^N$ , а потому

$$\sum_{n=0}^N \omega_n = \left(\frac{V-v}{V} + \frac{v}{V}\right)^N = 1^N = 1.$$

Зная вероятность  $\omega_n$ , можно найти среднее число молекул в объёме  $v$ :

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n \omega_n. \quad (\text{IV,4})$$

Обозначим в (IV,3)  $\frac{v}{V}$  через  $p$ , напомним (IV,4) в явном виде:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^N n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= Np \sum_{n=0}^N \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} p^{n-1} (1-p)^{N-n}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения  $n-1 = n'$ ,  $N-1 = N'$ , и замечая, что  $N' - n' = [(N-1) - (n-1)] = N-n$ , получаем

$$\bar{n} = Np \sum_{n'=0}^{N'} \frac{N'!}{n'!(N'-n')!} p^{n'} (1-p)^{N'-n'}.$$

Но по формуле бинома сумма равна  $(p+1-p)^{N'}$ , т. е. опять равна 1. Итак,

$$\bar{n} = Np = N \frac{v}{V}. \quad (\text{IV,5})$$



Это значит, что среднее число молекул в объеме  $v$  равно числу молекул, приходящемуся на этот объем при равномерном распределении по всему объему  $V$ , как и следовало ожидать.

Вычислим теперь среднее значение квадрата  $n$ , т. е.  $\bar{n}^2$ :

$$\bar{n}^2 = \sum_{n=0}^N n^2 w_n.$$

Заменим  $n^2$  через  $n(n-1) + n$  и напишем

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= \sum_{n=0}^N [n(n-1) + n] w_n = \sum_{n=0}^N n w_n + \sum_{n=0}^N n(n-1) w_n = \\ &= \bar{n} + \sum_{n=0}^N n(n-1) \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= \bar{n} + \sum_{n=2}^N \frac{N!}{(n-2)!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= \bar{n} + N(N-1) p^2 \sum_{n=2}^N \frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!} p^{n-2} (1-p)^{N-n}. \end{aligned}$$

В сумме полагаем

$$N-2 = N'', \quad n-2 = n''$$

и замечаем, что

$$N'' - n'' = [(N-2) - (n-2)] = N - n.$$

Сделав указанную замену, сразу увидим, что сумма по формуле бинома опять равна  $(p+1-p)^{N''}$ , т. е. равна единице, так что

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= \bar{n} + N(N-1) p^2 = \bar{n} + (Np)^2 - Np^2 = \\ &= \bar{n} + (\bar{n})^2 - \bar{n}p = (\bar{n})^2 + \bar{n}(1-p). \end{aligned} \quad (\text{IV}, 6)$$

По определению квадратичной флуктуации

$$(\Delta n)^2 = \overline{(n_k - \bar{n})^2}.$$

Возводя в квадрат и усредняя, находим

$$(\Delta n)^2 = \bar{n}_k^2 - 2\bar{n}_k \bar{n} + (\bar{n})^2 = \bar{n}^2 - (\bar{n})^2. \quad (\text{IV}, 7)$$

Подставляя из (IV,6) выражение для  $\bar{n}^2$ , получаем

$$\bar{n}^2 - (\bar{n})^2 = \bar{n} - \bar{n}p,$$

так что

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} - \bar{n}p. \quad (\text{IV}, 8)$$

Если  $v$  — малая часть объема  $V$ , то  $p = \frac{v}{V}$  — малое число. В этом

случае второй член в (IV,8) можно отбросить, и мы получаем искомую формулу

$$\overline{(\Delta n)^2} = \bar{n}. \quad (IV,9)$$

Само собой разумеется, что эта формула применима не только к флуктуациям числа молекул газа, но и к любым флуктуациям. Смысл её пояснён в тексте на стр. 335.

### У. ЧАСТИЦА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

В § 147 мы рассмотрели задачу о частице в прямоугольном потенциальном ящике с бесконечно высокими стенками. Мы видели, что путём применения крайних условий сразу получается система дискретных уровней энергии

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ml^2}.$$

Пусть теперь частица находится в поле, изображённом на рис. 225. Такое поле тоже можно назвать потенциальной ямой или потенциальным ящиком, но со стенками конечной высоты.

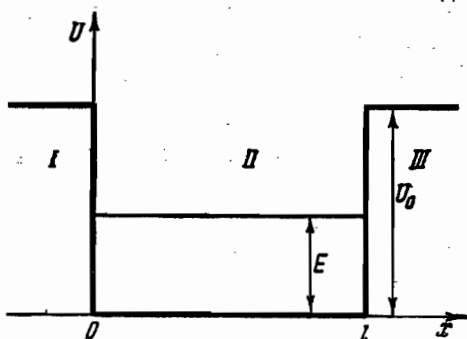


Рис. 225.

Рассмотрим случай, когда полная энергия частицы  $E$  меньше высоты ящика  $U_0$  (см. рис. 225)

$$E < U_0. \quad (V,1)$$

Как в § 145, разобьём всё поле на три области:

- Область I  $x \leq 0$   $U = U_0 = \text{const.},$
- » II  $0 \leq x \leq l$   $U = 0,$
- » III  $x \geq l$   $U = U_0 = \text{const.}$

Введём обозначения

$$k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U_0)}, \quad (V,2)$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}. \quad (V,3)$$

Вследствие условия (V,1)  $k_1$  — чисто мнимая величина

$$k_1 = ik,$$

где

$$k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U_0 - E)}. \quad (V,4)$$

При этих обозначениях уравнение Шредингера напишется в виде:

$$\text{для областей } I \text{ и } III \quad \frac{d^2\psi_{I, III}}{dx^2} - k^2\psi_{I, III} = 0, \quad (V,5)$$

$$\text{для области } II \quad \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + k_2^2\psi_{II} = 0. \quad (V,6)$$

Решения уравнения (V,5) суть  $e^{\pm kx}$ , но в области  $I$  решение  $e^{-kx}$  непригодно, так как при  $x \rightarrow -\infty$  оно безгранично возрастает; в области же  $III$  непригодно решение  $e^{kx}$ , так как оно безгранично возрастает при  $x \rightarrow \infty$ . Итак, мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \psi_I &= e^{kx} & (x < 0), \\ \psi_{II} &= b_1 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}, \\ \psi_{III} &= c e^{-kx} & (x > 0). \end{aligned} \right\} \quad (V,7)$$

Эти три значения  $\psi$  на границах областей, вообще говоря, не смыкаются (см., например, рис. 226). Между тем состояние

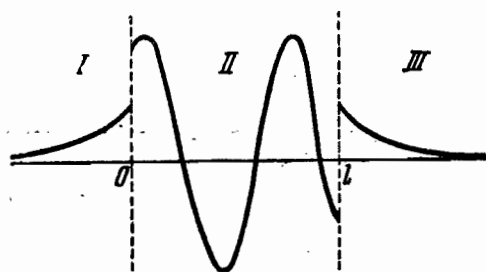


Рис. 226.

частицы должно описываться функцией  $\psi$ , которая во всём пространстве представляется непрерывной и гладкой кривой (непрерывность  $\psi$  и её первой производной). Для того чтобы это требование было удовлетворено, нам нужно найти условия, при которых все три отрезка на границах областей смы-

каются непрерывно и гладко, т. е. использовать условия (см. § 145)

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0}, \quad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}, \quad (V,8)$$

$$(\psi_{II})_{x=l} = (\psi_{III})_{x=l}, \quad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=l} = \left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=l}. \quad (V,9)$$

Условия (V,8) дают

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 + b_2, \\ k &= ik_2 b_1 - ik_2 b_2, \end{aligned}$$

откуда находим

$$b_2 = -\frac{k - ik_2}{k + ik_2} b_1. \quad (V,10)$$

Очевидно, что такое соотношение между коэффициентами  $b_2$  и  $b_1$  должно иметь место на всей кривой, в том числе и на границе областей II и III. Для этой границы условия (V,9) дают

$$\begin{aligned} b_1 e^{ik_2 l} + b_2 e^{-ik_2 l} &= c e^{-kl}, \\ ik_2 b_1 e^{ik_2 l} - ik_2 b_2 e^{-ik_2 l} &= -k c e^{-kl}. \end{aligned}$$

Исключая из этих соотношений  $c$ , находим

$$b_2 = -\frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{2ik_2 l} b_1. \quad (V,11)$$

Чтобы условия (V,10) и (V,11) были совместны, очевидно, необходимо

$$\frac{k - ik_2}{k + ik_2} = \frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{2ik_2 l}$$

или, что то же самое,

$$\frac{k - ik_2}{k + ik_2} e^{-ik_2 l} = \frac{k + ik_2}{k - ik_2} e^{ik_2 l}. \quad (V,12)$$

Отсюда легко получаем

$$(k^2 - k_2^2) \sin k_2 l = -2kk_2 \cos k_2 l$$

или

$$\operatorname{tg} k_2 l = -\frac{2kk_2}{k^2 - k_2^2} \quad (V,13)$$

или, наконец, в явном виде

$$\operatorname{tg} \left( \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \right) l = -\frac{2\sqrt{E(U_0 - E)}}{U_0 - 2E}. \quad (V,14)$$

В этом соотношении единственный параметр, которым можно распорядиться, есть  $E$ . (V,14) есть уравнение, из которого определяются значения  $E$ , при которых  $\psi$  удовлетворяет условиям непрерывности и гладкости во всём пространстве. Это уравнение — трансцендентное. Решение его можно найти, например, графически, построив кривые, изображающие правую и левую часть (V,14) в зависимости от  $E$ . Точки пересечения этих кривых и дадут искомые значения  $E$ . Для нас существенно только то, что эти значения, очевидно, образуют дискретную совокупность. Отсюда качественно следует, что и в случае ящика со стенками конечной высоты энергия частицы квантуется.

Для того чтобы составить себе представление о характере этих уровней энергии и их связи с уровнями энергии частицы в ящике с бесконечно высокими стенками, мы рассмотрим случай, когда  $U_0 \gg E$ , т. е., например, распределение нижних уровней энергии при достаточной высоте стенки. В этом случае правую часть (V,14) можно переписать в виде (вводя слева для краткости записи снова обозначение  $k_2$ )

$$\operatorname{tg} k_2 l = -2 \sqrt{\frac{E}{U_0}}. \quad (\text{V}, 15)$$

Мы видим, что  $\operatorname{tg} k_2 l$  отрицателен и мало отличается от 0 ( $U_0 \gg E$ ). Это значит, что аргумент тангенса  $k_2 l$  мало отличается от  $n\pi$ , но несколько меньше  $n\pi$ . Полагая приближённо

$$k_2 l \approx n\pi$$

или, в явном виде,

$$\frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE_n} l \approx n\pi,$$

находим

$$E_n \approx n^2 \frac{h^2}{8ml^2}.$$

Это означает, что распределение нижних уровней энергии мало отличается от такового для случая частицы в ящике с бесконечно высокими стенками.

## VI. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ И НОРМИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА

Собственные функции уравнения Шредингера для линейного осциллятора обладают свойством ортогональности в промежутке от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

(так как  $\psi_n$  — действительная функция  $x$ , то  $\psi_n^* = \psi_n$ ).

В этом проще всего можно убедиться следующим образом. Напишем уравнение Шредингера для осциллятора в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\psi = 0. \quad (149,4)$$

Собственные значения параметра  $\lambda$ , соответствующие собственным функциям  $\psi_n$ , суть  $\lambda_n = 2n + 1$ . Мы имеем, таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_n}{dx^2} + (2n + 1 - \alpha^2 x^2)\psi_n &= 0, \\ \frac{d^2\psi_m}{dx^2} + (2m + 1 - \alpha^2 x^2)\psi_m &= 0. \end{aligned}$$

Умножая первое из этих уравнений на  $\psi_m$ , второе на  $\psi_n$ , вычитая и интегрируя от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \psi_m \frac{d^2 \psi_n}{dx^2} - \psi_n \frac{d^2 \psi_m}{dx^2} \right) dx = 2(m-n) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \psi_m dx.$$

Левую часть этого равенства можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left( \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} \right) dx = \left[ \psi_m \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dx} \right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Принимая во внимание, что собственные функции стремятся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , так как

$$\psi_n = C_n e^{-\alpha x^2/2} H_n(\sqrt{\alpha} x).$$

видим, что подстановка даёт нуль как при верхнем, так и при нижнем пределе. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad m \neq n.$$

При  $m = n$  интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx$$

равен конечному числу (вследствие квадратичной интегрируемости функции  $\psi_n$ ), и этим можно воспользоваться для отыскания нормирующего множителя  $C_n$ . Заметим, что  $C_n$  есть, вообще говоря, комплексное число

$$C_n = |C_n| e^{-i\delta}.$$

Поскольку, однако, нас интересует квадрат модуля  $|\psi_n|^2$ , нам достаточно отыскать модуль  $|C_n|$ ; фазовый множитель остаётся неопределённым. Обозначив для краткости  $|C_n|$  через  $N_n$ , имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi$$

$$(\xi = \sqrt{\alpha} x).$$

Заменим один из двух множителей  $H_n^2(\xi)$  его выражением из (150,2)

$$H_n = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}; \quad (150,2')$$

представим интеграл в виде

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} H_n(\xi) d\xi.$$

Выполним интегрирование по частям, полагая

$$dv = \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} d\xi, \quad u = H_n(\xi),$$

так что

$$v = \frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}}, \quad du = \frac{dH_n(\xi)}{d\xi};$$

получим

$$\begin{aligned} & (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n} H_n(\xi) d\xi = \\ & = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} H_n(\xi) \right] + (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1} (e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что  $e^{-\xi^2}$  и все его производные обращаются в нуль при  $\xi = \pm \infty$ , видим, что первый член как произведение полинома на  $e^{-\xi^2}$  равен нулю. Если повторить подобное интегрирование по частям  $n$  раз, каждый раз полагая

$$dv = \frac{d^k e^{-\xi^2}}{d\xi^k} \quad \text{и} \quad u = \frac{d^i H_n(\xi)}{d\xi^i}$$

и замечая, что  $uv$  каждый раз на пределах обращается в нуль то в результате получится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} d\xi.$$

Так как  $H_n(\xi)$  есть полином степени  $n$ , т. е.

$$H_n(\xi) = 2^n \xi^n + \dots,$$

то

$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!$$

Мы получаем, таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Из условия нормирования находим

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}} 2^n n! \sqrt{\pi},$$

откуда

$$N_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

---



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрагама формула 38  
Абсорбция отрицательная 290  
—, положительная 290  
Авогадро постоянная 11, 143  
 $\alpha$ -частица, рассеяние 102, 104, 175  
—, свойства 100  
Астона масс-спектрограф 57  
Аркадьева фотографии диффракции 424  
Атом 46  
—, модель 103, 149, 234, 269  
—, радиус 99
- Бальмера серия 294  
Баркла опыт 352  
Бейнбриджа масс-спектрограф 63, 69  
Бибермана, Сушкина и Фабриканта опыт 419, 424  
Блекни масс-спектрометр 67  
Богуславский, работы по движению электронов 20  
Бора квантовые постулаты 269  
— теория атома 304, 330  
Боте и Гейгера опыт 367  
— опыт 347  
Брэгга—Вульфа уравнение 127, 399
- Вавилова опыт 348  
Ван-дер-Ваальса силы 485  
Вина закон смещения 255  
— формула 254, 263, 267  
Вода тяжёлая 90  
Волна де-Броглия 392, 393  
—, статистическое истолкование 412  
— плоская 371  
Волновой вектор 393  
— пакет 377, 410  
Время релаксации 219  
Вульфа—Брэгга уравнение 127  
Вырождение 320, 498
- Гамильтона функция 189, 190  
Голицын, работы по излучению 253  
Граница Ферми 467
- Движение условно-периодическое 318  
— в центральном поле 168  
— в электромагнитном поле 199  
Де-Броглия гипотеза 391  
Девисона и Гермера опыт 398  
Дейтерий 90, 308  
Демпстера масс-спектрометр 66  
Джинса—Рэлея формула 260, 267  
Дипольный момент 210  
Дисперсия 374, 382, 386  
Диффракционная решётка 389  
Диффракция атомов 409  
— молекул 409  
— электронов, метод Брэгга 397  
— —, — Дебая—Шеррера 406  
— —, — Лауэ 403  
Добронравова и Иоффе опыт 346  
Допплера эффект 388
- Зависимость массы от скорости 36, 504  
Закон дисперсии 374, 394  
— сохранения энергии 150  
Законы сохранения 195  
— — и элементарные акты 365  
Затухание колебаний 217  
Зеемана эффект 238, 242, 507
- Излучение абсолютно чёрного тела 253  
— возбуждённых атомов 285  
— вынужденное 290  
— равновесное в полости 249  
— спонтанное 287  
— тепловое 246, 256  
— электромагнитное 209
- Изобары 48  
Изотопы 48 и д., 70, 90, 92  
—, разделение диффузией 71  
— — путём обменных реакций 86  
— — термодиффузией 77  
— — фракционированной перегонкой 86  
— — центрифугированием 88  
— — электромагнитное 82  
Импульс обобщённый 186

- Инвариантность калибровочная (градиентная) 200  
 Интеграл Фурье 224  
 Ионизации потенциал 282  
 Иоффе и Добронравова опыт 346  
  
 Канонические уравнения 188  
 Кашица,  $\alpha$ -частицы в магнитном поле 100  
 Капицы—Триккера опыт 39  
 «Катастрофа ультрафиолетовая» 262  
 Кауфмана опыт 36  
 Квантование круговых орбит 301  
 — эллиптических орбит 317  
 Кванты световые 339, 346  
 — энергии 265  
 Кеплера закон 172  
 Кеплерова задача 170  
 Кирхгофа закон 251  
 Кольчание, комплексное представление 160  
 — связанных маятников 490  
 — струны 455  
 Комптона и Саймона опыт 367  
 — эффект 356, 358  
 Контактная разность потенциалов 471  
 Координаты нормальные 259  
 — обобщённые 179  
 — циклические 193  
 Корпускулярно-волновой параллелизм 384, 388, 389  
 Коэффициенты рассеяния 116  
 Кристалл 121, 133  
  
 Лагранжа уравнения 180  
 — функция 180, 183  
 Лармора теорема 235  
 Ленин В. И., анализ «кризиса физики» 45  
 — о метафизическом материализме 432  
 — о теории познания 433  
 Лоренца формула 38, 43  
 Лукирского и Прилежаева опыт 342  
  
 Магнитный момент орбитальный 235  
 Масса приведённая 176, 301  
 Масс-спектрографы 57 и л., 65  
 Менделеева периодическая система элементов 47, 52, 53  
 Метод задерживающего потенциала 273  
 — «изохромат» 345  
 Механика быстро движущихся тел 204  
 Милликэна опыт 12, 14  
  
 Михельсон, работы по излучению 253  
 Модель атома 103, 149, 234, 269  
 — электрона в металле 466  
 Мозели закон 136  
  
 Неопределённости соотношения 414  
 Нормирование собственных функций 441, 479, 516  
 Нулевая энергия осциллятора 478, 494  
  
 Орбита электрона 322  
 Ортогональность собственных функций 463, 479, 516  
 Осциллятор, возбуждённые состояния 478  
 — анизотропный 317  
 — гармонический 156, 455  
 — негармонический, спектр 215  
 —, нормальное состояние 478  
 —, нулевая энергия 478, 494  
 —, полное излучение 213  
 Осциллятор, среднее излучение 213  
 Осцилляторы связанные 484  
  
 Пакет волновой 377, 410  
 Парабол метод 54  
 Периодическая система элементов Менделеева 47, 52, 53  
 Пикеринга серия 310  
 Планка постоянная 263, 342, 344  
 — формула 263, 291  
 Пойнтинга—Умова вектор 212  
 Потенциал ионизационный 282  
 — критический 276  
 — металла внутренний 401, 467  
 Потенциальные кривые 153  
 Потенциальный барьер 441, 450  
 — — конечной ширины 450  
 — —, отражение 441  
 — —, прохождение 441  
 — — трёхмерный 493  
 — ящик 461, 513  
 Преломление света 384  
 — электронных волн 401  
 Прилежаева и Лукирского опыт 342  
 Принцип комбинационный 299  
 — причинности 428  
 — соответствия 290, 325  
 — суперпозиций 375  
 Пуассона скобки 195  
  
 Работа выхода 467  
 Разложение спектральное 162, 230  
 Разряд холодный 468  
 Рассеяние  $\alpha$ -частиц 102, 104  
 — рентгеновских лучей 115, 119, 351

- Рассеяние электронов 98  
 Резерфорда и Ройдса опыт 102  
 — формула 106, 107  
 Рентгеновские лучи 111  
 — —, диффракция 112, 121, 127  
 Рентгеновские лучи, диффракция по методу Брэгга—Вульфа 130  
 — —, — — кристаллических порошков 131  
 — —, — — — Лауэ 127  
 — —, длина волны 132, 140  
 — —, рассеяние 351  
 — —, спектр 134  
 — —, поглощение 115  
 Рентгеновский спектрограф 130  
 — спектр сплошной 112  
 — — характеристический 113, 134  
 Ридберга постоянная 296, 306, 312  
 Рэлея—Джинса формула 260, 267  
 Ряд Фурье 162  
 Свет, диффракция 389  
 —, преломление 384  
 Серия Бальмера 294  
 — Пикеринга 310  
 Спектральные серии 296, 297  
 Силы Ван-дер-Ваальса 485  
 Скобельцина метод 364  
 Скорость групповая 381  
 — секториальная 170  
 — фазовая 381  
 Собственные значения 459  
 — функции 459, 480, 483  
 — —, нормирование 441, 479, 516  
 — —, ортогональность 463, 479, 516  
 Соотношение между массой и энергией 206  
 Соотношения неопределённости 414  
 — — и принцип причинности 428  
 — —, ошибочные толкования 423  
 Состояние системы 180  
 Соударения неупругие 276, 278  
 — упругие 274  
 Спектр 162  
 Спектральные линии, ширина естественная 228  
 — термы 299  
 Спектр граничный сплошной 315, 349  
 Спектрограф рентгеновский 130  
 Спектр рентгеновских лучей 134  
 Спектры водородоподобных ионов 310  
 Списа и Цана опыт 39  
 Средние значения 500  
 Стационарные состояния 465  
 Стефана—Больцмана закон 255  
 Стокса закон 16  
 Столетова работы по фотоэффекту 337  
 Сушкина, Бибермана и Фабриканта опыт 419, 424  
 Тартаковского опыт 407  
 Тело абсолютно чёрное 252  
 — — —, законы излучения 253  
 — — —, модели 256  
 Теплота возгонки (сублимации) 493  
 Томсона Г. П. опыт 407  
 Томсона Д. Д. метод парабол 54  
 Трение лучистое 220  
 Триккера—Капицы опыт 39  
 Умова—Пойнтинга вектор 212  
 Условие нормирования 441, 479, 516  
 Уравнение волновое 373  
 — Шредингера 434  
 Уравнения Гамильтона 188  
 — Лагранжа 180, 183  
 Фабриканта, Бибермана и Сушкина опыт 419, 424  
 Фарадея закон 11  
 — число 11  
 Фильтры скоростей 32, 34, 35  
 Флуктуации брауновские 143  
 — светового поля 332, 348  
 — энергии 490  
 Флуктуация средняя квадратичная 335, 509  
 Фокусировка пучков заряженных частиц 32  
 Фотоэффект 337  
 Франка и Герца опыты 270, 274, 278  
 Фурье интеграл 224  
 Фурье ряд 163  
 Цана и Списа опыт 39  
 Центр инерции 177  
 Центральное поле 168, 183  
 Центральные силы 169  
 Чадвика опыт 109  
 Частоты нормальные (главные) 489  
 Чебышева—Эрмита полиномы 479  
 Число волновое 295  
 — квантовое азимутальное 321  
 — — главное 320  
 Шредингера уравнение 434  
 Эйнштейна уравнение 337, 340  
 Эйхенвальда анализ полного внутреннего отражения 448  
 Электромагнитное излучение 209  
 — — осциллятора 210  
 Электрон-вольт 25  
 Электрон в потенциальной яме 466

- Электрон в продольном электростатическом поле 24  
Электрон, движение в электрическом и магнитном полях 19  
— , диффракция 397, 403, 406  
— , зависимость массы от скорости 36, 504  
— , заряд 12, 143  
— , «классический радиус» 43  
— определение удельного заряда 25, 27, 29, 147, 312  
— отдачи 361  
— , открытие 11  
— , рассеяние атомами 98  
— , электромагнитная масса 41
- Эмиссия холодная 468  
Энергия, закон сохранения 150  
— кинетическая 150, 167  
— , одновременное определение всех ступеней 279  
— , распределение по степеням свободы 257  
— схема уровней 281, 314  
Эренфеста анализ скоростей 383  
Эффект Доплера 388  
Эффективное сечение рассеяния 95  
Эффект Комптона 356, 358
- Ядро 103  
— , заряд 109

ГЛАВПОЛИГРАФИЗДАТ  
при Совете Министров СССР  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, Орликов пер., 3

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ УЧЕБНИКИ ДЛЯ ВУЗОВ И ВТУЗОВ:

**Курс физики, том I.** Механика. Акустика. Теллота и молекулярная физика. Сост. проф. Н. Н. Андреевым, проф. С. Н. Ржевским и проф. Г. С. Гореликом. Под ред. акад. Н. Д. Папалекси. Допущено МВО СССР в качестве учебного пособия для вузов и физико-математических факультетов университетов. Стр. 600. Цена 17 руб.

**Курс физики, том II.** Электричество. Оптика, физика атомного ядра. Сост. проф. С. М. Рытовым, проф. В. Л. Левшиным, проф. Е. Л. Фейнбергом, проф. Л. В. Грошевым. Под ред. акад. Н. Д. Папалекси. Допущено МВО СССР в качестве учебного пособия для вузов и физико-математических факультетов университетов. Стр. 696. Цена 19 руб.

**Тамм И. Е.,** Основы теории электричества. Изд. 4-е. Стр. 627. Цена 18 руб.

**Фриш С. Э., Тиморева А. В.,** Курс общей физики. Том I. Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны. Изд. 2-е, пересмотр. и дополненное. Допущено МВО СССР в качестве учебного пособия для физических и физико-технических факультетов гос. университетов. Стр. 566. Цена 13 руб. 50 коп.

**Фриш С. Э., Тиморева А. В.,** Курс общей физики. Том II. Электричество и электромагнитные явления. Изд. 2-е, пересмотренное и дополненное. Допущено МВО СССР в качестве учебного пособия для физических и физико-технических факультетов гос. университетов. Стр. 592. Цена 13 руб.

**Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И.,** Курс теоретической механики, часть I. Издание четвертое, дополненное и переработанное. Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для высших технических учебных заведений. Стр. 580. Цена 18 руб.

**Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И.,** Курс теоретической механики, часть II. Издание четвертое, дополненное и переработанное. Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для высших технических учебных заведений. Стр. 580. Цена 18 руб.

Книги продаются в книжных магазинах и высылаются также почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделами

«КНИГА—ПОЧТОЙ»