Л. Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ

Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Л. Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517. 2
Э 53
УДК 517.91

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга имеет целью в краткой и по возможности доступной форме ознакомить читателя с основами теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, которые за последние годы нашли широкое применение не только в теории автоматического регулирования, но и во многих других областях техники, в различных задачах физики, в экономических и даже в биологических науках.

Автор не стремился к широкому охвату материала и далеко идущим обобщениям, ограничиваясь всюду лишь простейшими случаями. Нередко, желая избежать громоздких деталей доказательств, автор указывал лишь идею, или краткую схему, доказательства. Более подробные и глубокие сведения читатель может почерпнуть из указанных в конце книги литературных источников и прежде всего из [36], [24], [47], [87].

Предполагается, что читатель знаком с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонений аргумента и простейшими свойствами аналитических функций.

Разработка основ теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом еще очень далека от своего завершения. Это обстоятельство, конечно, наложило отпечаток на предлагаемый вниманию читателя курс и лишило его обычной для математической литературы стройности и систематичности изложения. Однако автор надеется, что несмотря на эти недостатки книга окажется полезной для широкого круга читателей, впервые знакомящихся с теорией дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А. Халанаю и редактору книги С. Б. Норкину за ряд ценных замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

Отдельные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом встречались еще в работах Л. Эйлера, однако систематическое изучение этих уравнений началось лишь в XX веке, в связи с потребностями прикладных наук и в первую очередь теории автоматического регулирования.

В последние 15—20 лет область приложений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом сильно расширилась, захватив не только многие вопросы физики и техники, но и некоторые области экономических и биологических наук. Обилие приложений еще более увеличило интерес к теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и в настоящее время эта область является одним из наиболее быстро развивающихся разделов математики.

Дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом называются дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция входит при различных значениях аргумента. Например:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)), \tag{2}$$

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), x(t - \tau(t)), \dot{x}(t - \tau(t))), \tag{3}$$

$$\ddot{x}(t) = f\left(t, x\left(\frac{t}{2}\right), \dot{x}\left(\frac{t}{2}\right), x(t), \dot{x}(t)\right). \tag{4}$$

Дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом называется дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, в котором производная максимального порядка от неизвестной функции входит при одинаковых значениях аргумента и этот аргумент не меньше чем все аргументы неизвестной функции и ее производных, входящих в уравнение. Например, уравнения (1), (2), (3), (4) являются уравнениями с запаздывающим аргументом, если в (1) и (3) $\tau(t) \geqslant 0$, в (2) $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ и в (4) $t \geqslant 0$.

Дифференциальным уравнением с опережающим аргументом называется дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, в котором производная максимального порядка от неизвестной функции входит при одинаковых значениях аргумента и этот аргумент не больше остальных аргументов неизвестной функции и ее производных, входящих в уравнение. Например, уравнения (1), (2), (3), (4) являются уравнениями с опережающим аргументом, если в (1) и (3) $\tau(t) \leqslant 0$, в (2) $\tau_1 < 0$ и $\tau_2 < 0$ и в (4) $t \leqslant 0$.

Все остальные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом называются уравнениями нейтрального типа. Например:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)),$$

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-\tau(t)), \dot{x}(t-\tau(t)), \ddot{x}(t-\tau(t))).$$

В обоих случаях предполагается, что функция f явно зависит от последнего аргумента.

Возможно, что на некотором множестве значений t уравнение принадлежит к одному из перечисленных типов, а на другом к другому. Например, уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t+\tau(t)))$$

является уравнением с запаздывающим аргументом на тех интервалах, на которых $\tau(t) \leqslant 0$, и уравнением с опережающим аргументом на интервалах, на которых $\tau(t) \geqslant 0$.

Аналогичная классификация применяется и для системы уравнений, достаточно лишь во всех определениях слово «функция» заменить словом «вектор-функция».

Наиболее часто в приложениях встречаются уравнения с запаздывающим аргументом, реже уравнения нейтрального типа и почти не встречаются уравнения с опережающим аргументом. Уравнения с запаздывающим аргументом и уравнения нейтрального типа хорошо описывают многие процессы с последействием.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

§ 1. Постановка основной начальной задачи

Для простейшего дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1}$$

где запаздывание τ пока будем считать положительной постоянной, основная начальная задача заключается в определении непрерывного решения $x(t)$ уравнения (1) при $t > t_0$, при условии, что $x(t) = \varphi(t)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$, где $\varphi(t)$ — заданная непрерывная функция, называемая *начальной* (рис. 1). Отрезок $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$, на котором задана начальная функция, называется *начальным множеством* и обозначается E_{t_0}. Обычно предполагается, что $\varphi(t_0) = x(t_0 + 0)$.

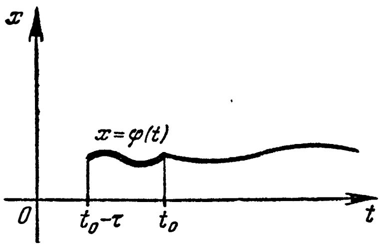

Рис. 1.

Ниже при некоторых ограничениях будет доказано существование решения этой начальной задачи, которое часто обозначается $\underset{\varphi}{x}(t)$.

Если в уравнении (1) и в начальных условиях $x(t)$, f и $\varphi(t)$ считать вектор-функциями, то мы получим постановку основной начальной задачи для систем уравнений.

В случае переменного запаздывания $\tau(t)$ в уравнении

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t)))$$

также требуется найти решение этого уравнения при $t > t_0$, причем на начальном множестве E_{t_0}, состоящем из точки t_0 и из тех значений $t-\tau(t)$, которые меньше t_0 при $t \geqslant t_0$, $x(t)$ считается совпадающим с заданной начальной функцией $\varphi(t)$ *). Обычно предполагается, что $x(t_0+0)=\varphi(t_0)$.

Например, в уравнении $\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\cos^2 t))$ при $t_0=0$ начальная функция $\varphi(t)$ должна быть задана на начальном множестве E_0, являющемся отрезком $-1 \leqslant t \leqslant 0$. В уравнении $\dot{x}(t)=f\left(t, x(t), x\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ при $t_0=0$ начальное множество E_0 состоит из одной точки $t_0=0$. В том же уравнении при $t_0=1$ начальное множество E_1 является отрезком $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$.

В прикладных задачах начальную функцию часто находят экспериментально. Нередко начальная функция определяется из другого дифференциального уравнения без отклонений аргумента, которое, например, в некоторых задачах автоматического регулирования описывает процесс до момента начала действия обратной связи.

Уравнения n-го порядка с отклоняющимся аргументом можно заменить, так же как и для уравнений без отклонений аргумента, соответствующей системой уравнений, однако при некоторых постановках задач при этом не будет полной эквивалентности.

Для уравнений n-го порядка с запаздывающим аргументом

$$x^{(n)}(t)=f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), \ldots \\ \ldots, x^{(n-1)}(t-\tau)) \qquad (2)$$

или для уравнений нейтрального типа

$$x^{(n)}(t)=f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots \\ \ldots, x^{(n-1)}(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau), \ldots, x^{(n)}(t-\tau)), \qquad (3)$$

где для простоты пока считаем τ постоянным, $\tau > 0$, в основной начальной задаче требуется определить $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ при $t > t_0$, причем на начальном множестве $t_0-\tau \leqslant t \leqslant t_0$ $x^{(k)}(t)$ счи-

*) Если требуется определить решение на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$, то начальное множество $E_{t_0 T}$ состоит из тех значений $t-\tau(t)$, которые меньше t_0 при $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

таются равными заданным начальным функциям $\varphi_k(t)$ (для уравнения (2) $k=0, 1, \ldots, (n-1)$, а для уравнения (3) $k=0, 1, \ldots, n$). Обычно требуется, чтобы

$$\varphi_k(t_0)=x^{(k)}(t_0+0) \qquad (k=0, 1, \ldots, (n-1)).$$

При такой постановке начальной задачи уравнение (2) может быть заменено эквивалентной системой:

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{x}_0(t)=x_1(t),\\ &\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ &\cdots\cdots\\ &\dot{x}_{n-2}(t)=x_{n-1}(t),\\ &\dot{x}_{n-1}(t)=f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots\\ &\qquad\qquad \ldots, x_{n-1}(t), x_0(t-\tau), \ldots, x_{n-1}(t-\tau)) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

с начальными условиями

$$x_k(t)=\varphi_k(t) \quad \text{на } E_{t_0} \quad (k=0, 1, \ldots, (n-1)) \tag{5}$$

(аналогичную систему получим и для уравнения (3)).

Однако в приложениях часто функции $\varphi_k(t)$ для уравнения n-го порядка должны быть производными одной и той же функции $\varphi(t)$

$$\varphi_k(t)=\varphi^{(k)}(t) \qquad (k=0, 1, \ldots, (n-1)). \tag{6}$$

Очевидно, что уравнение n-го порядка (2) с начальными условиями (6) не эквивалентно системе (4) с условиями (5). Оно эквивалентно системе (4) с условиями (6), но эти условия обычно не естественны для систем.

Все сказанное, очевидно, распространяется и на случай переменного запаздывания $\tau(t)$, но только начальные функции при этом задаются на начальном множестве E_{t_0}, которое было определено выше на стр. 10.

Если уравнение первого или более высокого порядка содержит несколько отклонений аргумента $\tau_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, например $\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t)))$, то начальное множество E_{t_0} состоит из точки $t=t_0$ и из всех значений $t-\tau_i(t)$, которые при $t \geqslant t_0$ меньше t_0 $(i=1, 2, \ldots, m)$.

В частности, если все τ_i постоянны, то начальным множеством является отрезок $t_0-\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \tau_i \leqslant t \leqslant t_0$.

§ 2. Метод шагов

Рассмотрим основную начальную задачу для простейшего дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{7}$$

где постоянное запаздывание $\tau > 0$,

$$x(t)=\varphi_0(t) \quad \text{при} \quad t_0-\tau \leqslant t \leqslant t_0.$$

Наиболее естественным методом решения этой задачи является так называемый метод шагов (или метод последовательного интегрирования), заключающийся в том, что непрерывное решение $x(t)$ рассматриваемой задачи определяется из дифференциальных уравнений без запаздывания

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau)) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\tau, \ x(t_0)=\varphi_0(t_0),$$

так как при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\tau$ аргумент $t-\tau$ изменяется на начальном множестве $[t_0-\tau, t_0]$ и, следовательно, третий аргумент $x(t-\tau)$ функции f равен начальной функции $\varphi_0(t-\tau)$. Предполагая существование решения $x=\varphi_1(t)$ этой начальной задачи на всем отрезке $[t_0, t_0+\tau]$, аналогично получим:

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), \varphi_1(t-\tau))$$
$$\text{при } t_0+\tau \leqslant t \leqslant t_0+2\tau, \ x(t_0+\tau)=\varphi_1(t_0+\tau),$$

. . . .

. . . .

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), \varphi_n(t-\tau))$$
$$\text{при } t_0+n\tau \leqslant t \leqslant t_0+(n+1)\tau, \ x(t_0+n\tau)=\varphi_n(t_0+n\tau),$$

. . . .

. . . .

где $\varphi_j(t)$ — решение рассматриваемой начальной задачи на отрезке $t_0+(j-1)\tau \leqslant t \leqslant t_0+j\tau$.

Этот метод дает возможность определить решение $x(t)$ на некотором конечном отрезке и одновременно доказывает существование решения в окрестности точки $(t_0, \varphi(t_0))$, если функции φ и f непрерывны в рассматриваемой области изменения переменных, и его единственность, если функция f удовлетворяет одному из условий, обеспечивающих единственность решения уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau))$$

без отклонений аргумента, например условию Липшица по второму аргументу.

Пример 1.

$$\dot{x}(t) = 6x(t-1), \quad x = t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Определить $x(t)$ при $1 < t \leqslant 3$.

Применяя метод шагов, получим:

$$\dot{x}(t) = 6(t-1), \quad 1 \leqslant t \leqslant 2, \quad x(1) = 1,$$

интегрируя, находим

$$x(t) = 3(t-1)^2 + 1.$$

При $2 \leqslant t \leqslant 3$ $\dot{x}(t) = 6[3(t-2)^2 + 1]$ $x(2) = 4$, откуда $x(t) = 6(t-2)^3 + 6t - 8$.

Пример 2.

$$\dot{x}(t) = ax(t-\tau).$$

Начальная функция $\varphi(t) \equiv C$, $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$, a, C и τ — постоянные, $\tau > 0$.

Применяя метод шагов, получим

$$x(t) = C \sum_{n=0}^{\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]+1} a^n \frac{(t - t_0 - (n-1)\tau)^n}{n!},$$

где $[t]$ — целая часть t.

Заметим, что даже в случае существования непрерывных производных от функций φ и f сколь угодно высокого порядка решение основной начальной задачи будет, вообще говоря, иметь разрыв первого рода у производной порядка k в точке $t_0 + (k-1)\tau$, но производные более низких порядков в этой точке будут уже непрерывны. Действительно, в точке t_0 первая производная $\dot{x}(t)$ имеет, вообще говоря, разрыв первого рода, так как интегрируя уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau)), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau,$$

можно удовлетворить условию $x(t_0)=\varphi_0(t_0)$, но, вообще говоря, нельзя удовлетворить, кроме того, условию

$$\dot{x}(t_0+0)=\dot{\varphi}_0(t_0-0).$$

Лишь при специальном выборе начальной функции $\varphi_0(t)$ может быть обеспечена непрерывность производной решения в точке t_0, для этого функция $\varphi_0(t)$ должна удовлетворять условию $\dot{\varphi}_0(t_0-0)=f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0-\tau))$.

В точке $t_0+\tau$ первая производная решения уже непрерывна. Действительно, производная $\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau))$, а правая часть является непрерывной функцией t в точке $t_0+\tau$, так как $x(t)$ непрерывна в точке t_0. Однако вторая производная

$$\ddot{x}(t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x(t)}\dot{x}(t)+\frac{\partial f}{\partial x(t-\tau)}\dot{x}(t-\tau)$$

в точке $t_0+\tau$, вообще говоря, разрывна, так как производная $\dot{x}(t-\tau)$ при $t=t_0+\tau$, как было указано выше, вообще говоря, разрывна. Но в точке $t=t_0+2\tau$ производная $\ddot{x}(t)$ непрерывна, так как $\dot{x}(t-\tau)$ и $x(t-\tau)$ непрерывны в точке $t=t_0+2\tau$.

Продолжая это рассуждение, замечаем, что в точке $t_0+(k-1)\tau$ производная $x^{(k)}(t)$, вообще говоря, разрывна, но производные меньшего порядка непрерывны, конечно, в предположении, что функция f дифференцируема достаточное число раз.

Такое сглаживание решений происходит и во внутренних точках. Действительно, при непрерывных φ_0 и f решение $x(t)$ уравнения (7) имеет непрерывную производную при $t_0<t<t_0+\tau$, а следовательно, при непрерывно дифференцируемой функции f решение уравнения (7) при $t_0+\tau<t<t_0+2\tau$ уже дважды непрерывно дифференцируемо. Продолжая эти рассуждения, докажем, что решение уравнения (7) при непрерывной функции φ и j раз непрерывно дифференцируемой функции f будет $j+1$ раз непрерывно дифференцируемо при $t_0+j\tau\leqslant t<t_0+(j+1)\tau$.

Итак, решение $x(t)$ с возрастанием t сглаживается. Заметим попутно, что отсюда следует, что периодические решения рассматриваемых уравнений бесконечно дифференцируемы, если, конечно, этим свойством обладает функция f.

Применение метода последовательного интегрирования становится затруднительным, если запаздывание τ мало́ по сравнению с отрезком, на котором требуется определить решение.

Очевидно, что метод последовательного интегрирования и вытекающие из него следствия распространяются и на дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом с непрерывным переменным запаздыванием $\tau(t)$. При применении этого метода решение уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t-\tau(t))), \tag{8}$$

$x(t) = \varphi_0(t)$, на начальном множестве E_{t_0}, определяется из уравнения без запаздывания

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ \varphi_0(t-\tau(t))), \qquad x(t_0) = \varphi(t_0)$$

при t, изменяющемся на отрезке $\mathscr{E}_{t_0} = [t_0,\ \gamma(t_0)]$. Этот отрезок является максимальным отрезком, начинающимся от точки t_0, для точек которого разность $t-\tau(t) \leqslant t_0$.

Заметим, что $\gamma(t)$ является обратной функцией для функции $t-\tau(t)$, если обратная функция существует.

Затем определяем решение на отрезке $\mathscr{E}_{\gamma(t_0)} = [\gamma(t_0)\gamma(\gamma(t_0))]$ из уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ \varphi_1(t-\tau(t))),\ x(\gamma(t_0)) = \varphi_1(\gamma(t_0)),$$

где $\varphi_1(t)$ является решением исходного уравнения на отрезке $[t_0,\ \gamma(t_0)]$, и, продолжая этот процесс, можно свести задачу к интегрированию уравнений без запаздывания.

В дальнейшем вместо $\gamma(\gamma(t_0))$ мы будем писать $\gamma_2(t_0)$, а $\gamma_n(t)$ будет обозначать n-кратную итерацию операции $\gamma(t)$.

Этот процесс последовательного определения решения на отрезках $\mathscr{E}_{\gamma_n(t)}$ нельзя будет продолжать в том случае, если один из отрезков

$$\mathscr{E}_{t_0},\ \mathscr{E}_{\gamma(t_0)},\ \mathscr{E}_{\gamma_2(t_0)},\ \ldots,\ \mathscr{E}_{\gamma_n(t_0)},\ \ldots$$

сведется к одной точке. Этот случай будем называть особым. Он может, очевидно, наступить лишь в случае обращения функции $\tau(t)$ в некоторой точке в нуль. Доказательство существования решения и его единственности в особом случае будет дано в следующем параграфе.

Особый случай заведомо не может наступить, если $\inf \tau(t) \geqslant d > 0$, так как в этом случае можно применять метод шагов с шагом d.

Если длины отрезков $\mathscr{E}_{\gamma_n(t_0)}$ при $n \to \infty$ стремятся к нулю, другими словами, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \bar{t}$, то в силу непрерывности запаздывания $\tau(t)$ получим $\tau(\bar{t}) = 0$ и в точке $\bar{t}$ возможно наступление особого случая.

Заметим, что при $\tau(t_0) = 0$ не обязательно наступает особый случай, так как если в правой окрестности этой точки $\tau(t)$ растет быстрее, чем t, то в точке t_0 метод шагов применим. Особый случай при $\tau(t_0) = 0$ наступает лишь при условии, что $t - \tau(t) > t_0$ в достаточно малой правой окрестности точки t_0, не включая t_0, т. е. в том случае, если в этой окрестности $\tau(t)$ растет медленнее, чем t.

Если исключить особый случай, то, применяя метод шагов, мы докажем существование и единственность решения уравнения (8) с заданной на E_{t_0} начальной функцией при условии, что все уравнения $\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ \varphi_k(t - \tau(t)))$, где t изменяется на отрезке $\gamma_k(t) \leqslant t \leqslant \gamma_{k+1}(t)$, а $\varphi_k(t)$ является решением той же задачи при t, изменяющемся на отрезке

$$\gamma_{k-1}(t) \leqslant t \leqslant \gamma_k(t),$$

удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности и допускают продолжение решения на весь отрезок

$$\gamma_k(t) \leqslant t \leqslant \gamma_{k+1}(t).$$

В том же предположении, мы, очевидно, обнаружим, что решение уравнения (8) будет иметь непрерывные производные до порядка p в точках $t > \gamma_{p-1}(t_0)$ $(p = 1, 2, \ldots, k-1)$, если функция f дифференцируема достаточное число раз, но производные порядка k будут, вообще говоря, в точке $\gamma_{k-1}(t_0)$ иметь разрыв первого рода. Сглаживание решений происходит и во внутренних точках.

Если уравнение содержит различные запаздывания, например, имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t))),$$

то отрезок $\mathscr{E}_{t_0} = [t_0,\ \gamma(t_0)]$ является наибольшим отрезком с левой граничной точкой t_0, при изменении независимого переменного t, на котором все разности

$$t - \tau_i(t) \leqslant t_0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Дословно так же определяются отрезки $\mathscr{E}_{\bar{t}}$, на которые могут быть продолжены методом последовательного интегрирования при каждом шаге решения одного уравнения n-го порядка или системы таких уравнений с запаздывающим аргументом. Точно так же, если $\mathscr{E}_{\bar{t}}$ сводится к одной точке $\bar{t}$, то дальнейшее применение метода последовательного интегрирования становится невозможным. Этот случай мы назовем особым.

Если метод последовательного интегрирования применим, и уравнения без запаздывания, к интегрированию которых сводится на каждом шаге решение уравнения (8) (или системы уравнений с запаздыванием), удовлетворяют условиям теоремы о существовании и единственности решения и непрерывной зависимости решений от параметра, то теми же свойствами обладают и решения исходных уравнений с запаздыванием. В этом же случае из метода получения решения непосредственно видно, что решение непрерывно в пространстве C_0 зависит от выбора начальных функций и от запаздывания $\tau(t)$, если правые части уравнения $\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau(t)))$ (или уравнений более общего вида) непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по второму и третьему аргументам.

Метод шагов конечно применим и ко многим уравнениям нейтрального типа, если множество $\mathscr{E}_{\bar{t}}$ не сводится к одной точке. Рассмотрим для упрощения изложения уравнения нейтрального типа первого порядка с одним постоянным отклонением аргумента τ:

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)). \tag{9}$$

В отличие от уравнения с запаздывающим аргументом первого порядка начальная функция $\varphi(t)$ для решения уравнений (9) должна быть не только непрерывной, но и дифференцируемой (или кусочно-дифференцируемой). На первом шаге получаем уравнение без отклонений аргумента

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), \varphi_0(t-\tau), \dot{\varphi}_0(t-\tau)) \tag{10}$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\tau$.

На следующем шаге

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), \varphi_1(t-\tau), \dot{\varphi}_1(t-\tau)) \tag{11}$$

при $t_0+\tau \leqslant t \leqslant t_0+2\tau$ и т. д.

Отличие от уравнений с запаздыванием заключается лишь в том, что решения не сглаживаются. Действительно, не только в точке t_0 левая производная $\dot\varphi(t_0-0)$, вообще говоря, не равна $\dot x(t_0+0)$, но и в точке $t_0+\tau$, как видно из уравнения (11), $\dot x_{\varphi}(t)$ будет, вообще говоря, разрывна из-за разрывности последнего аргумента $\dot x_{\varphi}(t-\tau)$ при $t=t_0+\tau$. Те же рассуждения показывают, что решение $x_{\varphi}(t)$ имеет, вообще говоря, угловые точки при $t=t_0+k\tau$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Не происходит сглаживание и во внутренних точках интервалов, как это видно из уравнений (10), (11) и аналогичных им, полученных на k-ом шаге.

К уравнениям с опережающим аргументом метод шагов так же применим, если $\mathscr{E}_{\bar t_0}$ не состоит из одной точки. При этом обнаруживается, что такие уравнения, вообще говоря, теряют запас гладкости, который имела начальная функция, и через некоторое число шагов решение может даже не существовать.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x(t)=f(t,\ x(t-\tau),\ \dot x(t-\tau)), \tag{12}$$

где постоянная $\tau>0$. Начальная задача ставится так же, как и для уравнений с запаздыванием, т. е. требуется найти решение уравнения при $t\geqslant t_0$, если на начальном множестве $t-\tau\leqslant t\leqslant t_0$ решение считается равным заданной начальной функции $\varphi(t)$. На первом шаге уравнение (12) переходит в конечное уравнение

$$x(t)=f(t,\ \varphi(t-\tau),\ \dot\varphi(t-\tau)) \tag{13}$$

при $t_0<t\leqslant t_0+\tau$. Следовательно, в точке $t=t_0$, вообще говоря, $\varphi(t_0)\neq x_{\varphi}(t_0+0)$ и в этом смысле решение разрывно. Если функция f дифференцируема достаточное число раз (не менее чем $k-1$ раз), а φ дифференцируема k раз, то решение уравнения (13) дифференцируемо, вообще говоря, лишь $k-1$ раз (так как $x^{(k-1)}(t)$ содержит слагаемое $\dfrac{\partial^{k-1}f}{\partial\dot\varphi^{k-1}(t-\tau)}\varphi^{(k)}(t-\tau)$ и для существования следующей производной надо было бы потребовать существование $\varphi^{(k+1)}(t-\tau)$, что мы не предполагали).

На следующем шаге по той же причине в граничной точке $t=t_0+\tau$ решение будет разрывным, а во внутренних точках отрезка $t_0+\tau \leqslant t \leqslant t_0+2\tau$ можно гарантировать лишь существование производных до порядка $k-2$ включительно. На k-ом шаге решение, вообще говоря, уже будет не дифференцируемо и для бóльших значений t решение уже может не существовать.

Заметим, что если в уравнении с опережающим аргументом (12) при том же задании начальной функции искать решение не при $t \geqslant t_0$, а при $t \leqslant t_0-\tau$, то уравнение с опережением переходит в уравнение с запаздыванием (после замены переменных $t=-t_1$), точно так же, если в уравнении с запаздыванием (7) искать решение при $t \leqslant t_0-\tau$, то это уравнение может быть преобразовано в уравнение с опережением.

Нередко в приложениях отклонения аргумента $\tau(t, x(t))$ зависят от неизвестной функции

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau(t, x(t)))). \tag{14}$$

При этом постановка основной начальной задачи не изменяется и для ее решения часто также может быть применим метод шагов. Метод шагов заведомо применим, если будет существовать

$$\inf \tau(t, x(t))=d>0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0$$

и при произвольных значениях второго аргумента. В этом случае можно будет продвигаться вперед «шагами», равными d, получая для уравнения (14) на каждом шаге дифференциальное уравнение без отклонений аргумента вида

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), \varphi_k(t-\tau(t, x(t)))).$$

§ 3. Интегрируемые типы уравнений с запаздывающим аргументом

Метод шагов является одним из основных методов интегрирования дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Применение этого метода к уравнениям вида

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau(t))) \tag{15}$$

сводится к интегрированию уравнений без запаздывания

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ \varphi_n(t - \tau(t))) \tag{16}$$

при $\gamma_{n-1}(t_0) \leqslant t \leqslant \gamma_n(t_0)$ (см. стр. 15).

Естественно называть уравнение (15) интегрирующимся в квадратурах, если к нему применим метод шагов, и уравнения (16) интегрируются в квадратурах, какова бы ни была непрерывная функция $\varphi_n(t)$. Аналогичное определение целесообразно ввести и для уравнений 1-го порядка более общего вида

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t))),$$

а так же для уравнений более высокого порядка с запаздывающим аргументом и систем уравнений. Примерами уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом, интегрирующимся в квадратурах, являются:

1) $$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t))).$$

Этот тип уравнений интегрируется особенно просто, так как при каждом шаге правая часть является известной функцией t.

2) $M(x(t))\,dx(t) = N(t,\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t)))\,dt$ (или $\varphi_1(x(t))\,\psi_1(t,\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t)))\,dx(t) = \varphi_2(x(t))\,\psi_2(t,\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t)))\,dt$ — уравнения с разделяющимися переменными.

3) $$\dot{x}(t) = p(t,\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t)))\,x(t) + q(t,\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t)))$$

— обобщенное линейное уравнение.

4) $$\dot{x}(t) = p(t,\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t)))\,x(t) + q(t,\ x(t - \tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t - \tau_m(t)))\,x^n(t),$$

где $n \neq 0$ и $n \neq 1$ — обобщенное уравнение Бернулли и т. д.

Во всех этих примерах предполагается, что метод шагов применим (т. е. множество $\mathscr{E}_t$ не сводится к точке ни при каком значении t) и что все $\tau_i(t) \geqslant 0$, причем обращение $\tau_i(t)$ в нуль может происходить лишь в изолированных точках.

Заметим, что интегрируемость некоторого уравнения в квадратурах обычно не облегчает исследования асимптотического поведения его решений, а нередко даже и на конечных интервалах изменения независимой переменной оказывается более целесообразным не применение метода шагов, а использование тех или иных приближенных или качественных методов исследования.

§ 4. Теоремы существования и единственности решения основной начальной задачи

Как уже указывалось, если метод шагов применим, т. е. множество $\mathscr{E}_{t_0}$ не сводится к одной точке, то, применяя метод шагов, сводим дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом к уравнению без отклонений аргумента, к которому применяем известные теоремы существования и единственности решения основной начальной задачи.

Например, для уравнения

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ x(t-\tau(t))), \tag{17}$$

$$\tau(t)\geqslant 0,\ x(t)=\varphi(t)\quad\text{при}\quad t\in E_{t_0}, \tag{18}$$

применяя метод шагов, получим

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ \varphi(t-\tau(t))), \tag{19}$$

$$x(t_0)=\varphi(t_0). \tag{20}$$

Уравнение (19) с начальным условием (20), а следовательно, и уравнение (17) с начальным условием (18), имеет решение, если f и φ непрерывны, и это решение единственно, если функция $f(t,\ x,\ y)$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу при t, близких к t_0, y, близких к $\varphi(t_0-\tau(t_0))$, и x, близких к x_0.

Для уравнения

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ x(t-\tau(t,\ x(t)))), \tag{21}$$

$$\tau(t,\ x(t))\geqslant 0,\quad x(t)=\varphi(t)\quad\text{на}\quad E_{t_0}$$

на первом шаге получим

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ \varphi(t-\tau(t,\ x(t)))), \tag{22}$$

$$x(t_0)=\varphi(t_0).$$

Если функции f, φ и τ непрерывны, то решение существует, если, кроме того, в (22) правая часть

$$F(t,\ x(t))=f(t,\ x(t),\ \varphi(t-\tau(t,\ x(t))))$$

удовлетворяет условию Липшица по $x(t)$ (для этого достаточно ограниченности

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y}\right|, \quad |\varphi'(t)| \text{ и } |\tau'_x(t, x)|$$

в окрестностях начальных значений), то решение единственно.

Эта схема доказательства теорем существования и единственности решения основной начальной задачи становится неприменимой в упомянутом на стр. 15 и 16 особом случае — случае неприменимости метода шагов.

Чтобы охватить и этот исключительный случай, применим принцип сжатых отображений к уравнению с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t))), \tag{23}$$

$x(t) = \varphi(t)$ на начальном множестве E_{t_0}.

Напомним кратко формулировку и доказательство принципа сжатых отображений.

Если в метрическом полном пространстве M задан оператор A, обладающий следующими свойствами:

1) Оператор A переводит элементы пространства M в элементы того же пространства;

2) $\rho(A(y), A(z)) \leqslant \alpha\rho(y, z)$, где y и z — любые точки пространства M, $0 < \alpha < 1$ и α не зависит от выбора точек y и z, $\rho(y, z)$ — расстояние между точками y и z в пространстве M, то существует единственная неподвижная при действии оператора A точка $\bar{y}$ пространства M и эта точка может быть найдена методом последовательных приближений, т. е. $\bar{y} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где

$$y_n = A(y_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{24}$$

причем точка y_0 выбирается произвольно в пространстве M.

Напомним, что множество M называется метрическим пространством, если в нем определена функция $\rho(y, z)$ пар точек этого множества, удовлетворяющая для любых точек множества условиям:

1) $\rho(y, z) \geqslant 0$, причем $\rho(y, y) = 0$ и из $\rho(y, z) = 0$ следует, что $y = z$;

2) $\rho(y, z) = \rho(z, y)$;

3) $\rho(y, z) \leqslant \rho(y, u) + \rho(u, z)$ — правило треугольника.

Функция $\rho(y, z)$ называется расстоянием между точками y и z в пространстве M.

Метрическое пространство M называется полным, если каждая фундаментальная последовательность точек пространства (т. е. последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, удовлетворяющая условию $\rho(y_n, y_{n+m}) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, при $n \geqslant N(\varepsilon)$ для любых целых $m > 0$) сходится в этом пространстве, т. е. существует точка $\bar{y} \in M$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_n, \bar{y}) = 0$.

Доказательство принципа сжатых отображений. 1) Предел $\bar{y}$ последовательности

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, \tag{25}$$

где $y_n = A(y_{n-1})$, существует, так как эта последовательность фундаментальна.

Действительно, применяя $m-1$ раз правило треугольника, получим

$$\rho(y_n, y_{n+m}) \leqslant \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_{n+2}) + \ldots$$
$$\ldots + \rho(y_{n+m-1}, y_{n+m})$$

и, принимая во внимание, что

$$\rho(y_2, y_1) = \rho(A(y_1), A(y_0)) \leqslant \alpha\rho(y_1, y_0),$$
$$\rho(y_3, y_2) = \rho(A(y_2), A(y_1)) \leqslant \alpha\rho(y_2, y_1) \leqslant \alpha^2\rho(y_1, y_0),$$

. . . .

. . . .

$$\rho(y_{n+1}, y_n) = \rho(A(y_n), A(y_{n-1})) \leqslant \alpha\rho(y_n, y_{n-1}) \leqslant \alpha^n\rho(y_1, y_0),$$

будем иметь

$$\rho(y_n, y_{n+m}) \leqslant (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m-1})\rho(y_1, y_0) =$$
$$= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+m}}{1-\alpha}\rho(y_1, y_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(y_1, y_0) < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ и сколь угодно мало, если n достаточно велико.

2) Предел $\bar{y}$ последовательности $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ является неподвижной точкой оператора M.

Действительно, пусть $A(\bar{y}) = \bar{\bar{y}}$, тогда при достаточно большом n

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) \leqslant \rho(\bar{y}, y_n) + \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}}) < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ и сколь угодно мало, так как $\rho(\bar{y}, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$, потому что $\bar{y}=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $\rho(y_n, y_{n+1})<\frac{\varepsilon}{3}$, так как последовательность (25) фундаментальна, наконец,

$$\rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}})=\rho(A(y_n), A(\bar{y}))\leqslant\alpha\rho(y_n, \bar{y})<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак, расстояние между двумя фиксированными точками $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$ может быть сделано меньше любого положительного числа ε, следовательно, это расстояние равно нулю и $\bar{y}=\bar{\bar{y}}$, т. е. $A(\bar{y})=\bar{y}$.

3) Неподвижная точка единственна.

Действительно, под действием оператора A расстояние между любыми двумя точками $\bar{y}$ и $\bar{z}$ должно уменьшаться, значит, обе эти точки не могут быть неподвижными.

Теорема существования и единственности решения основной начальной задачи для уравнения (23). *Если в уравнении* (23) *все* $\tau_i(t)$ *непрерывны при* $t_0\leqslant t\leqslant t_0+H$ $(H>0)$ *и неотрицательны, а функция* f *непрерывна в окрестности точки* $(t_0, \varphi(t_0), \varphi(t_0-\tau_1(t_0)), \ldots$ $\ldots, \varphi(t_0-\tau_m(t_0)))$ *и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, кроме первого, начальная функция* $\varphi(t)$ *непрерывна на* E_{t_0}, *то существует единственное непрерывное решение* $\underset{\varphi}{x}(t)$ *основной начальной задачи для уравнения* (23) *при* $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$, *где* h *достаточно мало.*

Доказательство. Заменяем уравнение (23) эквивалентным интегральным уравнением

$$x(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots$$
$$\ldots, x(t-\tau_m(t)))\,dt, \qquad (23\text{a})$$
$$x(t)=\varphi(t) \text{ на } E_{t_0}.$$

Проверяем, удовлетворяет ли оператор

$$A[x(t)]=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots$$
$$\ldots, x(t-\tau_m(t)))\,dt, \qquad (26)$$

определенный на полном метрическом пространстве C_0 всевозможных непрерывных функций, заданных на E_{t_0} и на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$, причем на E_{t_0} все эти функции равны $\varphi(t)$, с метрикой

$$\rho(x(t), y(t)) = \sup |x(t) - y(t)|, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h,$$

условиям 1) и 2) принципа сжатых отображений.

Очевидно, при достаточно малом h условие 1) принципа сжатых отображений будет выполнено: $A(x(t))$ непрерывна, если $x(t)$ непрерывна и определена при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h_1$ при достаточно малом h_1.

Проверим выполнение второго условия принципа сжатых отображений (положим $\tau_0(t) \equiv 0$)

$$\rho[A(x(t)), A(y(t))] = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h} \Big| \int_{t_0}^{t} [f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \ldots$$

$$\ldots, x(t - \tau_m(t))) - f(t, y(t), y(t - \tau_1(t)), \ldots, y(t - \tau_m(t)))]\, dt \Big| \leqslant$$

$$\leqslant N \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h} \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{m} |x(t - \tau_i(t)) - y(t - \tau_i(t))|\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant Nh(m+1) \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h} |x(t) - y(t)| =$$

$$= (m+1) Nh\rho(x(t), y(t)),$$

и при $h \leqslant \dfrac{\alpha}{(m+1)N}$, где $0 < \alpha < 1$, условие 2) принципа сжатых отображений будет выполнено.

Следовательно, при $h \leqslant \min\left\{\dfrac{\alpha}{(m+1)N}, h_1\right\}$ принцип сжатых отображений применим и можно утверждать, что существует единственная неподвижная точка оператора A, т. е. единственное решение основной начальной задачи для уравнения (23), и это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

С помощью принципа Шаудера легко можно доказать существование решения основной начальной задачи для уравнения (23), требуя лишь непрерывности правой части этого уравнения (см. [78]).

Значительно сложнее обстоит дело с существованием решения основной начальной задачи в особом случае для уравнений нейтрального типа.

Рассмотрим, например, уравнение с одним отклонением аргумента

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ \ x(t-\tau(t)),\ \dot{x}(t-\tau(t))) \tag{27}$$

и предположим, что имеет место особый случай — множество $\mathscr{E}_{t_0}$ сводится к одной точке t_0, тогда, если решение определяется лишь в достаточно малой правой окрестности точки t_0, то и множество E_{t_0} сводится к одной точке (так как $\tau(t_0)=0$ и $\tau(t)$ растет в этой окрестности медленнее t) и, следовательно, начальное условие имеет вид

$$x(t_0)=x_0.$$

Полагая в уравнении (27) $t=t_0$, получим уравнение или тождество

$$\dot{x}(t_0)=f(t_0,\ x(t_0),\ x(t_0),\ \dot{x}(t_0)). \tag{28}$$

Если (28) не обращается в тождество, то из этого уравнения определяется единственная неизвестная в ней величина $\dot{x}(t_0)$. Отсутствие действительных решений $\dot{x}_i(t_0)$ уравнения (28) означает отсутствие решений основной начальной задачи для уравнения (27). При наличии одного или нескольких действительных решений $\dot{x}_i(t_0)$ уравнения (28) при некоторых ограничениях (непрерывность правой части уравнения (27) в окрестности точки $(t_0, x(t_0), x(t_0), \dot{x}(t_0))$, выполнение условий Липшица по всем аргументам функции f, начиная со второго, и некоторые ограничения на модули постоянных Липшица) удается доказать существование единственного решения основной начальной задачи с непрерывной производной с угловым коэффициентом касательной в точке t_0, равным выбранному действительному корню $\dot{x}_i(t_0)$ уравнения (28) (см. [20], [22]). Таким образом, через точку $(t_0, x(t_0))$ может проходить столько решений уравнения (27), сколько действительных корней имеет уравнение (28). Если (28) является тождеством, то при тех же ограничениях существует целый пучок решений, проходящих через точку t_0, $x(t_0)$; решение определяется выбором $\dot{x}(t_0)$.

Пример 1.

$$\dot{x}(t)=\dot{x}\left(\frac{t}{2}\right)+\dot{x}^2\left(\frac{t}{2}\right)+2x^2(t)-x^2\left(\frac{t}{2}\right)+1.$$

Уравнение не имеет решений, удовлетворяющих условию $x(0)=x_0$, так как при $t=0$ уравнение переходит в уравнение $\dot{x}^2(0)+x_0^2+1=0$ относительно $\dot{x}(0)$, не имеющее действительных корней.

Пример 2.

$$\dot{x}(t)=\dot{x}\left(\frac{t}{2}\right).$$

При $t=0$ уравнение обращается в тождество. Существует пучок решений $x(t)=Ct+x_0$, где C — произвольная постоянная, удовлетворяющих условию $x(0)=x_0$.

Более сильные теоремы существования для уравнений с запаздывающим аргументом и их различных обобщений читатель может найти в [34], [57], [107].

Теорема о непрерывной зависимости решения уравнения (23) от параметров и от начальных функций в пространстве C_0 (для уравнений нейтрального типа (27) в пространстве C_1) в случае применимости метода шагов непосредственно следует из аналогичных теорем для уравнений без отклонений аргумента.

Если же метод шагов не применим, то непрерывная зависимость решения от параметров и от начальных функций может быть доказана методом последовательных приближений.

Действительно, для уравнения

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t), x(t-\tau(t)), \mu), \tag{29}$$

если выполнены условия теоремы существования и единственности (стр. 24), причем постоянная Липшица не зависит от параметра μ и f непрерывна по всем аргументам в достаточно малой окрестности начальных значений, последовательные приближения $x_n(t, \mu)$ сходятся к решению $\bar{x}(t, \mu)$ равномерно не только по t, но и по μ, и так как $x_n(t, \mu)$ непрерывна по t и по μ, то и предельная функция $\bar{x}(t, \mu)$ непрерывна по этим переменным.

Так как в особом случае начальное множество для уравнения (23) сводится к одной точке t_0 и начальное условие имеет вид $x(t_0)=x_0$, то теорема о непрерывной зависимости от начальных значений, как и в случае уравнений без отклоняющихся аргументов, сводится заменой переменных $x_1=x-x_0$, $t_1=t-t_0$ к теореме о непрерывной зависимости от параметров x_0 и t_0.

Можно для уравнения (29) доказать аналитическую зависимость решения $x(t, \mu)$ от параметра в окрестности $\mu=\mu_0$

в предположении непрерывности функции f по первому аргументу и аналитичности по остальным аргументам в окрестности начальных значений и $\mu=\mu_0$. При этом начальная функция φ, определяющая решение, предполагается или фиксированной, или аналитически зависящей от μ в окрестности $\mu=\mu_0$. Проще всего эта теорема доказывается методом А. Н. Тихонова *).

Теорема. *Решение уравнения* (23), *удовлетворяющего условиям теоремы существования* (*стр.* 24), *непрерывно в пространстве* C_0 *зависит от начальной функции. Более того, если*

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|<\delta, \qquad \delta>0$$

на E_{t_0}, *то*

$$\left|\underset{\varphi_1}{x}(t)-\underset{\varphi_2}{x}(t)\right|<\delta e^{(m+1)N(t-t_0)}$$

при $t>t_0$. *Следовательно, при* $t-t_0<T$ *можно выбрать* $\delta(\varepsilon)>0$ *столь малым, что*

$$\left|\underset{\varphi_1}{x}(t)-\underset{\varphi_2}{x}(t)\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Из уравнения (23а) стр. 24 следует

$$\max_{t\in[t_0,\,t]}\left|\underset{\varphi_1}{x}(t)-\underset{\varphi_2}{x}(t)\right|\leqslant|\varphi_1(t_0)-\varphi_2(t_0)|+$$
$$+\int_{t_0}^{t}N\sum_{i=0}^{m}\max_{t\in[t_0,\,t]}\left|\underset{\varphi_1}{x}(t-\tau_i(t))-\underset{\varphi_2}{x}(t-\tau_i(t))\right|dt\leqslant$$
$$\leqslant\delta+(m+1)N\int_{t_0}^{t}\max_{t\in[t_0,\,t]}\left|\underset{\varphi_1}{x}(t)-\underset{\varphi_2}{x}(t)\right|dt.$$

Решая полученное неравенство относительно $\max\limits_{t\in[t_0,\,t]}\left|\underset{\varphi_1}{x}(t)-\underset{\varphi_2}{x}(t)\right|$, будем иметь

$$\max_{t\in[t_0,\,t]}\left|\underset{\varphi_1}{x}(t)-\underset{\varphi_2}{x}(t)\right|\leqslant\delta e^{(m+1)N(t-t_0)}$$

(действительно, полагая $u(t)=\max\left|\underset{\varphi_1}{x}(t)-\underset{\varphi_2}{x}(t)\right|$, получим

*) См. Математ. сборник **22** (64), (1948), 193—204.

$u(t) \leqslant \delta + (m+1)N\int\limits_{t_0}^{t} u(t)\,dt, u(t) \leqslant u_1(t)$ при $t \geqslant t_0$, где $u_1(t) =$

$= \delta + (m+1)N\int\limits_{t_0}^{t} u_1(t)\,dt, \quad u_1'(t) = (m+1)Nu_1(t), \quad u_1(t_0) = \delta,$

откуда $u_1(t) \equiv \delta e^{(m+1)N(t-t_0)}$; можно также воспользоваться леммой Гроноулла).

§ 5. Приближенные методы интегрирования

В предыдущем параграфе была доказана применимость метода последовательных приближений к уравнениям с запаздывающим аргументом, однако этот метод редко применяется в практике приближенных вычислений из-за громоздкости и неоднотипности вычислений.

Чаще применяются различные экстраполяционные методы численного интегрирования уравнений. Сходимость построенных этими методами приближений к точному решению при стремлении шага к нулю и оценка погрешности могут быть получены совершенно так же, как и для уравнений без отклонений аргумента, поэтому вряд ли стоит на этом подробно останавливаться и целесообразнее лишь подчеркнуть некоторые особенности, возникающие при применении этих методов к уравнениям с отклоняющимся аргументом.

Почти все эти методы основаны на аппроксимации решения отрезками ряда Тейлора:

$$x(t_k + h) \approx x(t_k) + h\dot{x}(t_k) + \ldots + \frac{h^n}{n!}x^{(n)}(t_k), \tag{30}$$

т. е. основаны на замене интегральной кривой аппроксимирующей параболой, причем для упрощения вычислений правая часть в (30) преобразуется и обычно выражается через разности различных порядков.

В методе Эйлера вычисление ведется по схеме

$$x_{k+1} = x_k + q_k, \tag{31}$$

где $t_k = t_0 + kh$, $x_k = x(t_k)$, $q_k = \dot{x}(t_k)h$, h — шаг вычисления. Применяя итерации, можно повысить точность вычисления.

В методе Штермера вычисление ведется по одной из формул:

$$x_{k+1} = x_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1}, \tag{32}$$

где

$$\Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1};$$

$$x_{k+1} = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2}, \tag{33}$$

$$x_{k+1} = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}, \tag{34}$$

$$x_{k+1} = q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 q_{k-4}, \tag{35}$$

. . . .

. . . .

где $\Delta^p q_k = \Delta^{p-1} q_k - \Delta^{p-1} q_{k-1}$.

Та же идея лежит в основе метода Рунге, метода Мильна и многих других методов.

Все эти методы могут быть применены и к уравнениям с запаздывающим агрументом, но только надо иметь в виду, что аппроксимация решения отрезком ряда Тейлора (30) предполагает, что решение $n+1$ раз дифференцируемо и остаточный член $\frac{h^{n+1}x^{n+1}(t_k+\theta h)}{(n+1)!}$ $(0<\theta<1)$ мал.

Для уравнений с запаздывающим аргументом эти условия обычно не выполняются начиная с точки t_0, а начинают выполняться лишь при $t > t_0 + n\tau$, так как решения уравнений с запаздывающим аргументом с возрастанием t сглаживаются (см. стр. 16).

Итак, метод Эйлера можно применять, начиная с точки t_0, но в этой точке надо брать правую производную. Формулу Штермера (32) можно применять при $t > t_0 + \tau$, формулу (23) при $t > t_0 + 2\tau$, формулу (34) при $t > t_0 + 3\tau$ и т. д.

Можно, например, рекомендовать такую схему: начало вычисления ведется по формулам Эйлера с уменьшенным шагом, для повышения точности при этом целесообразно применять итерации; после достаточного сглаживания решений переходим на вычисление по одной из формул Штермера.

Заметим еще, что если запаздывание постоянно, то удобнее выбирать шаг так, чтобы запаздывание было кратно шагу: $mh = \tau$, так как при таком выборе шага значения $x(t_k - \tau)$ будут известны, если уже вычислены значения

$$x(t_p) \qquad (p = 0, 1, \ldots, k);$$

если же запаздывание переменно, а также иногда в случае нескольких хотя бы и постоянных запаздываний целесообразно вести вычисление с переменным шагом, чтобы вычисление значений $x(t_k - \tau)$ не требовало интерполяции.

Для приближенного численного интегрирования уравнений нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau)),$$

решения которых не сглаживаются (см. стр. 18), можно рекомендовать или применение метода Эйлера, или применение метода шагов, а на каждом шаге можно вести вычисление по любому методу, например по методу Штермера, Рунге или Мильна. Заметим, что метод интегральных неравенств Чаплыгина может быть в некоторых случаях применен и к уравнениям с отклоняющимся аргументом (см., например, [23]).

В заключение остановимся еще на методе разложения по степеням малого запаздывания, очень часто и иногда ошибочно применяемом в технической литературе.

Этот метод в применении к уравнению

$$x(t-\tau) = F(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{36}$$

(удобнее предположить, что уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{37}$$

разрешено относительно $x(t-\tau)$), где постоянная $\tau > 0$), заключается в том, что $x(t-\tau)$ заменяется несколькими членами его тейлоровского разложения в окрестности точки t

$$x(t-\tau) \approx x(t) - \tau\dot{x}(t) + \frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t) + \ldots + \frac{(-1)^m \tau^m x^{(m)}(t)}{m!}, \tag{38}$$

и, следовательно, уравнение (36) заменяется уравнением m-го порядка без отклонений аргумента

$$x(t) - \tau\dot{x}(t) + \frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t) + \ldots + \frac{(-1)^m \tau^m x^{(m)}(t)}{m!} = \\ = F(t, x(t), \dot{x}(t)). \tag{39}$$

Не говоря уже о том, что разложение (38) предполагает существование производных от решения высокого порядка, что, как правило, не выполняется в точках $t_0 + k\tau$ при $k \leqslant m$, переход от уравнения (36) к (39), вообще говоря, не допустим при $m \geqslant 2$, так как этот переход равносилен отбрасыванию в дифференциальном уравнении с малым коэффициентом при старшей производной неустойчивого типа, слагаемого с производной максимального порядка. Однако из теории таких уравнений (см., например, [78]) следует, что отбрасываемый член отнюдь не мал, и пренебрегать им, вообще говоря, конечно нельзя.

Переход к уравнению (39) при малом τ допустим лишь при $m=1$, так как при этом, вообще говоря, не возникает уравнения с малым коэффициентом при старшей производной.

Если приближенное решение уравнения (37) требуется вычислить с большей точностью, чем удается получить при $m=1$, то следует применять метод возмущений. Вычислив решение $\underset{\varphi}{x}(t, \tau)$ уравнения (37) методом шагов до точки $t_0+(n+1)\tau$, разлагаем в этой точке решение по степеням τ:

$$x(t_0+(n+1)\tau, \tau)=x_0^0+x_1^0\tau+x_2^0\tau^2+\ldots \tag{40}$$

Решение $x(t, \tau)$ при $t>t_0+(n+1)\tau$ ищем в виде

$$x(t, \tau)=x_0(t)+x_1(t)\tau+\ldots+x_n(t)\tau^n+R_n(t, \tau). \tag{41}$$

Подставив (41) в (37) и сравнивая члены при одинаковых степенях τ, получим

$$\dot{x}_0(t)=f(t, x_0(t), x_0(t)), \qquad x_0(t_0+(n+1)\tau)=x_0^0,$$

$$\dot{x}_1(t)=\left[\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x}+\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y}\right]_{x=y=x_0(t)} x_1(t)-$$

$$-\dot{x}_0(t)\left[\frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y}\right]_{x=y=x_0(t)}, \qquad x_1(t_0+(n+1)\tau)=x_1^0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n(t, \tau)=O(\tau^{n+1}) \qquad \text{при } t_0+(n+1)\tau\leqslant t\leqslant T.$$

Продвижение методом шагов до точки $t_0+(n+1)\tau$ имеет целью достаточно сгладить решение $x(t, \tau)$, если же непрерывность производных искомого решения до порядка $(n+1)$ обеспечена выбором начальной функции, начиная с точки $\bar{t}_0$ $(t_0\leqslant\bar{t}_0\leqslant t_0+(n+1)\tau)$, то точку $t_0+(n+1)\tau$ в (40) и (41) можно заменить точкой $\bar{t}_0$.

Метод возмущений может быть применен и к более сложным уравнениям и системам уравнений с запаздывающим аргументом, а при некоторых, довольно сильных, ограничениях и к уравнениям нейтрального типа (см. [4], [5]).

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Некоторые свойства линейных уравнений

Линейное уравнение n-го порядка с отклоняющимся аргументом имеет вид

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj}(t)\, x^{(p)}(t-\tau_j(t)) = f(t). \tag{1}$$

Уравнение

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj}(t)\, x^{(p)}(t-\tau_j(t)) = 0 \tag{2}$$

по отношению к уравнению (1) называется соответствующим однородным линейным уравнением.

Уравнения (1) и (2) в дальнейшем кратко будем записывать в виде

$$L(x(t)) = f(t) \tag{1}$$

и

$$L(x(t)) = 0. \tag{2}$$

Дифференциальный оператор $L(x(t))$ линеен и, следовательно,

1) $L(x_1(t)+x_2(t)) = L(x_1(t)) + L(x_2(t))$,

2) $L(Cx(t)) = CL(x(t))$,

где C — постоянная.

Уравнения (1) и (2) являются уравнениями с запаздывающим аргументом, на отрезке $[t_0, T]$, если на этом отрезке $a_{n0}(t) \neq 0$,

$$a_{nj}(t) \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\tau_j(t) \geqslant \tau_0(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

В дальнейшем будем считать $\tau_0(t) \equiv 0$.

Линейное уравнение с запаздывающим аргументом можно записать в виде

$$x^n(t)+\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m} b_{pj}(t)\,x^{(p)}(t-\tau_j(t))=\psi(t). \qquad (3)$$

Если все

$$b_{pj}(t), \quad \psi(t) \quad \text{и} \quad \tau_j(t)$$

непрерывны в правой окрестности начальной точки $t=t_0$, то уравнение (3) имеет в правой окрестности начальной точки t_0 единственное решение основной начальной задачи, так как все условия теоремы существования и единственности выполнены (стр. 24).

Линейные однородные уравнения обладают следующими очевидными свойствами:

1) Линейность и однородность уравнения сохраняются при линейном однородном преобразовании искомой функции и при преобразовании независимого переменного.

2) Линейная комбинация решений с произвольными постоянными коэффициентами $\sum\limits_{i=1}^{k} C_i \underset{\varphi_i}{x}(t)=\underset{\varphi}{x}(t)$ также является решением, причем $\varphi=\sum\limits_{i=1}^{k}\varphi_i$ (если точка t_0 изолирована в E_{t_0}, то

$$\underset{\varphi}{x^{(s)}}(t_0+0)=\sum_{i=1}^{k} C_i \underset{\varphi_i}{x^{(s)}}(t_0+0), \; s=0,\,1,\,\ldots,\,(n-1)).$$

Это свойство сохраняется и при $k\to\infty$, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i \underset{\varphi_i}{x}(t)$ сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что начальная точка t_0 остается неизменной для всех решений.

3) Если $\underset{\varphi(t,\,s)}{x}(t,\,s)$ является решением, непрерывно зависящим от параметра s, при $s_0\leqslant s\leqslant s_1$, то $\int\limits_{s_0}^{s_1}\underset{\varphi(t,\,s)}{x}(t,s)\,\Phi(s)\,ds$

является решением того же уравнения с начальной функцией $\int\limits_{s_0}^{s_1} \varphi(t, s)\Phi(s)\,ds$, где $\varphi(t, s)$ и $\Phi(s)$ — непрерывные функции при $s_0 \leqslant s \leqslant s_1$ $t \in E_{t_0}$ и $\varphi(t, s)$ n раз непрерывно дифференцируема по t.

Утверждение справедливо и при $s_1 \to \infty$, если интеграл $\int\limits_{s_0}^{\infty} \underset{\varphi(t,s)}{x}(t, s)\Phi(s)\,ds$ сходится, и допускаем n-кратное дифференцирование по t под знаком интеграла.

4) Если все коэффициенты $a_{pj}(t)$ и отклонения $\tau_j(t)$ действительны, то действительная и мнимая части комплексного решения являются решениями того же уравнения.

Линейные неоднородные уравнения обладают следующими столь же очевидными свойствами:

1) Линейное преобразование неизвестной функции и преобразование независимого переменного не нарушают линейности уравнения.

2) Сумма $\underset{\varphi}{\bar{x}}(t) + \underset{\varphi_1}{x_1}(t)$ решения $\underset{\varphi}{\bar{x}}(t)$ неоднородного уравнения и решения соответствующего однородного уравнения $\underset{\varphi_1}{x_1}(t)$ является решением неоднородного уравнения $\underset{\varphi+\varphi_1}{x}(t)$, определяемого начальной функцией $\varphi + \varphi_1$.

3) Справедлив принцип наложения: сумма $\sum\limits_{i=1}^{k} \underset{\varphi_i}{x}(t)$ решений $\underset{\varphi_i}{x}(t)$ уравнений $L(x(t)) = f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ является решением $\underset{\sum\limits_{i=1}^{k}\varphi_i}{x}(t)$ уравнения $L(x(t)) = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i(t)$.

Это утверждение остается справедливым и при $k \to \infty$, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \underset{\varphi_i}{x}(t)$ сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование.

4) Если все коэффициенты $a_{ij}(t)$ и отклонения $\tau_j(t)$ действительны, то действительная часть $u(t)$ решения $\underset{\varphi+i\psi}{x}(t) = u(t) + iv(t)$ уравнения $L(x(t)) = f(t)$ и его мнимая часть

$v(t)$ являются соответственно решениями уравнений

$$L(x(t)) = \operatorname{Re} f(t), \quad u(t) = \underset{\varphi}{x}(t)$$

и

$$L(x(t)) = \operatorname{Im} f(t), \quad v(t) = \underset{\psi}{x}(t).$$

Свойство 2) позволяет заменой переменных $x(t) = \underset{\varphi}{\bar{x}}(t) + y(t)$ свести исследование линейного неоднородного уравнения к исследованию соответствующего однородного уравнения. Решение линейного однородного уравнения $\underset{\varphi}{x}(t)$ является линейным функционалом, заданным на пространстве Ω_φ начальных функций $\varphi(t)$.

Предположим, что Ω_φ является линейным нормированным пространством (например, пространством C_n или C_{n-1}, или пространством L_2).

Если в линейном нормированном пространстве начальных функций Ω_φ выбрать некоторый базис $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \ldots$, то определяемая этими базисными функциями система решений линейного однородного уравнения $\underset{\varphi_1}{x}(t), \underset{\varphi_2}{x}(t), \ldots, \underset{\varphi_n}{x}(t), \ldots$ называется фундаментальной системой. В качестве базисной системы функций часто берут полиномы, тригонометрические или показательные функции.

Решение $\underset{\varphi}{x}(t)$, определяемое произвольной начальной функцией $\varphi \in \Omega_\varphi$, может быть представлено в виде

$$\underset{\varphi}{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \alpha_n \underset{\varphi_n}{x}(t), \tag{4}$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t), \tag{5}$$

α_n — постоянные.

Ряд (5) сходится в смысле метрики пространства Ω_φ, а ряд (4) в смысле любой метрики $\rho(\underset{\psi_1}{x}(t), \underset{\psi_2}{x}(t))$, в которой сохраняется непрерывная зависимость решений от начальных функций:

$$\rho(\underset{\psi_1}{x}(t), \underset{\psi_2}{x}(t)) < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

при

$$\rho_\varphi(\psi_1, \psi_2) < \delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) > 0,$$

ρ_φ — расстояние в смысле метрики пространства Ω_φ.

Пусть теперь Ω_φ является пространством C_{n-1}. По теореме Рисса в пространстве C_{n-1} можно любой линейный функционал, а следовательно и $\underset{\varphi}{x}(t)$, представить в виде

$$\underset{\varphi}{x}(t) = \int\limits_{E_{t_0}} \varphi(s)\, d_s K(t, s), \tag{6}$$

где в правой части стоит интеграл Стилтьеса.

Ядро $K(t, s)$, как нетрудно проверить, является решением того же линейного однородного уравнения, определяемым специальными начальными условиями (см. [14]). Вычислить $K(t, s)$ удается лишь для простейших уравнений (см. стр. 40—42), однако во многих случаях можно установить некоторые свойства этой функции (например, ее неотрицательность или неположительность) и тогда представление (6) позволяет обнаружить многие свойства решения в зависимости от свойств начальной функции (подробнее см. [76], [77]).

Для неоднородных линейных уравнений $L(x(t)) = f(t)$ решение $\underset{0}{x}(t)$, определяемое нулевой начальной функцией, можно рассматривать как линейный функционал, определенный на пространстве C_0 непрерывных функций $f(t)$ и, следовательно, по той же теореме Рисса

$$\underset{0}{x}(t) = \int\limits_{t_0}^{T} f(s)\, d_s K_1(t, s), \qquad T \geqslant t,$$

и в этом случае, если известны хотя бы некоторые свойства ядра $K_1(t, s)$, можно исследовать свойства решения $\underset{0}{x}(t)$ в зависимости от вида функций $f(t)$.

§ 2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

Если в уравнении

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} x^{(p)}(t - \tau_j) = f(t) \tag{7}$$

все коэффициенты a_{pj} и все отклонения аргументов τ_j постоянны, то уравнение (7) называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и с постоянными отклонениями аргумента.

Предположим, что

$$0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_m.$$

Если $a_{n0}\neq 0$, а остальные $a_{nj}=0$, то уравнение (7) является уравнением с запаздывающим аргументом. Если $a_{nm}\neq 0$, а остальные $a_{nj}=0$, то уравнение (7) является уравнением с опережающим аргументом. Если $a_{ni}\neq 0$ и $a_{nj}\neq 0$ при $i\neq j$, то уравнение (7) является уравнением нейтрального типа.

Рассмотрим вначале линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами и с постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}x^{(p)}(t-\tau_j)=0 \tag{8}$$

(такие уравнения часто называют стационарными линейными однородными уравнениями с отклоняющимся аргументом).

Будем искать частные решения уравнения (8) в виде

$$x(t)=e^{kt}, \tag{9}$$

где k — постоянная.

Подставляя (9) в (8) и сокращая на e^{kt}, получим для определения k так называемое характеристическое уравнение

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}k^pe^{-k\tau_j}=0. \tag{10}$$

Левая часть уравнения (10)

$$\Phi(k)\equiv\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}k^pe^{-k\tau_j}$$

называется характеристическим квазиполиномом. Уравнение (10) имеет бесконечное множество корней. Каждому корню k_i соответствует решение e^{k_it}. Линейные комбинации решений $\sum_{s=0}^{q}C_se^{k_st}$ с постоянными коэффициентами C_s и даже сумма бесконечного ряда

$$\sum_{s=0}^{\infty} C_s e^{k_s t} \tag{11}$$

решений, если ряд (11) сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, также являются решениями уравнения (8).

Если все коэффициенты a_{pj} действительны, то комплексным корням $k = p \pm qi$ уравнения (10) соответствуют комплексные решения $e^{(p \pm qi)t}$ или действительные решения $e^{pt} \cos qt$, $e^{pt} \sin qt$, являющиеся соответственно действительной и мнимой частью решения $e^{(p+qi)t}$.

Докажем, что кратным корням k_i уравнения (10) кратности α_i соответствует не только решение $e^{k_i t}$, но и $te^{k_i t}$, ..., $t^{\alpha_i - 1} e^{k_i t}$, и, следовательно, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i(t) e^{k_i t}, \tag{12}$$

где $P_i(t)$ — многочлены с произвольными постоянными коэффициентами степени $\alpha_i - 1$, сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, то его сумма является решением уравнения (8).

Действительно, нетрудно проверить, что каждому корню k_j характеристического квазиполинома $\Phi(s)$ соответствует решение уравнения (8) вида

$$\int_{C_j} e^{st} \frac{F(s)}{\Phi(s)} ds,$$

где C_j — окружность с центром в точке k_j столь малого радиуса, что на ней и в ограничиваемом ею круге S_j нет отличных от k_j нулей характеристического квазиполинома $\Phi(s)$, $F(s)$ — произвольная функция, аналитическая на C_j и в S_j. Проверка этого утверждения осуществляется подстановкой

$$x(t) = \int_{C_j} e^{st} \frac{F(s)}{\Phi(s)} ds$$

в (8). При этом, пользуясь аналитичностью подынтегральной функции на контуре C_j, получим

$$\int_{C_j} \frac{e^{st} F(s)}{\Phi(s)} \Phi(s)\, ds \equiv 0,$$

так как по теореме Коши $\int_{C_j} e^{st} F(s)\, ds \equiv 0.$

По теореме о вычете в α-кратном полюсе k_j получим

$$\int_{C_j} \frac{e^{st} F(s)}{\Phi(s)} ds = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{st} F(s)}{\Phi(s)},\ k_j\right] =$$

$$= \frac{2\pi i}{(\alpha-1)!} \frac{d^{\alpha-1}}{ds^{\alpha-1}} \left[\frac{e^{st} F(s)(s-k_j)^\alpha}{\Phi(s)}\right]\Bigg|_{s=k_j} = P_{\alpha-1}(t)\, e^{k_j t},$$

где $P_{\alpha-1}(t)$ — полином степени $\alpha - 1$ с произвольными, в силу произвола функции $F(s)$, коэффициентами.

Естественно возникает вопрос, можно ли в виде (12) представить любое решение уравнения (8).

В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен, но при некоторых ограничениях такое разложение решения в ряд возможно и может быть использовано для приближенного нахождения решения и для выяснения его асимптотических свойств. Этот вопрос будет рассмотрен ниже (§ 4) после изучения расположения корней квазиполиномов (§ 3).

Для представления решений в виде (12) необходимо знать корни характеристического квазиполинома, нахождение которых приводит к утомительным вычислениям. Укажем другое, иногда более удобное, представление решений простейших из уравнений вида (8).

Опираясь на свойства 2 и 3 (стр. 34), будем искать решение $\underset{\varphi}{x}(t)$ уравнения

$$\dot{x}(t) = a x(t-1) \tag{13}$$

в виде

$$C \underset{1}{x}(t) + \int_0^1 \underset{1}{x}(t-s)\, y'(s)\, ds, \tag{14}$$

где C — постоянная, $y(s)$ — неизвестная функция, $\underset{1}{x}(t)$ — решение уравнения (13), определяемое начальной функцией

$\psi(t) \equiv 1$ на E_1, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Кроме того, считаем $\underset{1}{x}(t) \equiv 0$ при $t < 0$. В силу последнего условия $\underset{1}{x}(t)$ является решением уравнения (13) не только при $t > 1$, но и на начальном множестве $0 \leqslant t \leqslant 1$, откуда в силу свойства 3 (стр. 34) следует, что (14) будет решением уравнения (13) при $t > 1$.

Остается подобрать C и $y(s)$ так, чтобы на E_1 (14) совпало с начальной функцией $\varphi(t)$. Полагая в (14) при $0 \leqslant t \leqslant 1$ $\underset{1}{x}(t) \equiv 1$, $\underset{1}{x}(t-s) = 1$ при $t \geqslant s$ и $\underset{1}{x}(t-s) = 0$ при $t < s$ и представляя интеграл $\int\limits_0^1 \underset{1}{x}(t-s) y'(s)\, ds$ в виде суммы двух интегралов

$$\int\limits_0^t \underset{1}{x}(t-s) y'(s)\, dx + \int\limits_t^1 \underset{1}{x}(t-s) y'(s)\, dx,$$

получим

$$C + \int\limits_0^t y'(s)\, ds = \varphi(t)$$

или

$$C + y(t) - y(0) = \varphi(t).$$

Этому условию можно удовлетворить, считая

$$y(t) = \varphi(t) \quad \text{и} \quad C = \varphi(0).$$

Итак, решение уравнения (13), определяемое дифференцируемой начальной функцией $\varphi(t)$, заданной на E_1, имеет вид

$$\underset{\varphi}{x}(t) = \varphi(0) \underset{1}{x}(t) + \int\limits_0^1 \underset{1}{x}(t-s) \varphi'(s)\, ds. \tag{15}$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям и пользуясь уравнением (13), получим

$$\underset{\varphi}{x}(t) = \varphi(1) \underset{1}{x}(t-1) + a \int\limits_0^1 \underset{1}{x}(t-s-1) \varphi(s)\, ds. \tag{16}$$

Нетрудно непосредственно подстановкой в (13) проверить, что (16) является решением уравнения (13) в предположении непрерывности начальной функции $\varphi(t)$ без требования ее дифференцируемости. Представление (15) или (16) удобно для исследования свойств решения $\underset{\varphi}{x}(t)$ в зависимости от свойств начальной функции.

Эти представления решений удобны и для приближенного вычисления решений, тем более что решения $\underset{1}{x}(t)$ уравнения (13) затабулированы.

Укажем интегральные представления решений еще для некоторых часто встречающихся в приложениях уравнений:

1) $$\dot{x}(t)=a\,x(t)+bx(t-\tau),\quad x(t)=\varphi(t)$$

при

$$0\leqslant t\leqslant\tau;\quad b\neq 0,\quad a+b\neq 0,\quad \tau>0,$$

$$\underset{\varphi(t)}{x}(t)=\frac{b\varphi(0)+a\varphi(\tau)}{a+b}\underset{1}{x}(t)+\frac{b}{a+b}\int_0^\tau \underset{1}{x}(t-s)\,\varphi'(s)\,ds \tag{17}$$

при

$$t<0,\quad \underset{1}{x}(t)=-\frac{a}{b}.$$

2) $$x^{(n)}(t)=\sum_{j=0}^{n}a_j x^{(j)}(t-\tau),\quad x(t)=\varphi(t)$$

при

$$0<t\leqslant\tau,\quad \tau>0,$$

$$\underset{\varphi(t)}{x}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\underset{t^k}{x}(t)+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\tau \underset{t^{n-1}}{x}(t-s)\,\varphi^{(n)}(s)\,ds,$$

$\underset{t^k}{x}(t)$ при $t>\tau$ — решение уравнения, определяемое начальной функцией $\varphi(t)=t^k$, $0\leqslant t\leqslant\tau$, а при $t<0$ $\underset{t^k}{x}(t)\equiv 0$.

3) $\ddot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$, $b\neq 0$, $a+b\neq 0$, $\tau>0$.

$$\underset{\varphi(t)}{x}(t)=\frac{b\varphi(0)+a\varphi(\tau)-a\tau\varphi'(\tau)}{a+b}\underset{1}{x}(t)+$$
$$+\frac{b\varphi'(0)+a\varphi'(\tau)}{a+b}\underset{t}{x}(t)+\frac{b}{a+b}\int_0^\tau \underset{t}{x}(t-s)\,\varphi''(s)\,ds$$

при

$$t<0\quad \underset{1}{x}(t)=-\frac{a}{b},\ \text{а}\quad \underset{t}{x}(t)=-\frac{a}{b}t\ ^{*)}.$$

---

*) Все эти представления решений могут быть найдены тем же методом, каким найдено интегральное представление решения (15) для уравнения (13), однако можно убедиться в их справедливости и непосредственной подстановкой в соответствующее уравнение.

Заметим, что замена переменных $x(t) = e^{pt}y(t)$ и $t = kt_1$, где p и k — постоянные, позволяет уменьшить число параметров в стационарных линейных уравнениях.

Пример. Приближенно вычислить значение решения $\underset{t^2}{x}(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = 2x(t) + x(t-3)$ в точке $t = t_0$, если начальным множеством является отрезок $[0, 3]$.

Заменой переменных $x(t) = e^{2t}y(t)$ и $t = 3t_1$ уравнение приводится к виду $\dot{y}(t_1) = ay(t_1 - 1)$, $a = 3e^{-6}$ и его решение $y(t_1)$, соответствующее решению $\underset{t^2}{x}(t)$, определяется по формуле

$$y(t_1) = \varphi(0)\underset{1}{y}(t_1) + \int_0^1 \underset{1}{y}(t_1 - s)\varphi'(s)\,ds,$$

где $\varphi(t_1) = 9t_1^2 e^{-6t_1}$.

Применяя теперь какую-нибудь квадратурную формулу и пользуясь таблицей функций $\underset{1}{y}(t_1)$, находим приближенно $y(t_1)$ при $t_1 = \frac{1}{3}t_0$ и $\underset{t^2}{x}(t)$ в заданной точке $t = t_0$.

При решении этого примера можно было бы воспользоваться формулой (17), но решения $x(t)$ для уравнения $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-\tau)$ не затабулированы ввиду возможности его сведения к уравнению $\dot{x}(t_1) = a_1x(t_1 - 1)$.

§ 3. Характеристический квазиполином

Одним из основных методов решения стационарных однородных уравнений

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj}x^{(p)}(t - \tau_j) = 0, \tag{18}$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m$, является нахождение частных решений вида e^{kt} и разложение искомого решения $\underset{\varphi}{x}(t)$ в ряд по этим основным решениям. При этом, как было указано в предыдущем параграфе, k должно быть корнем характеристического квазиполинома

$$\Phi(z) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj}z^p e^{-\tau_j z}.$$

Исследованию расположения корней таких квазиполиномов и посвящается этот параграф. Квазиполином является целой аналитической функцией. Если функция $\Phi(z)$ не вырождается в полином, т. е., если в уравнение (18) существенно входит отклонение аргумента, то $\Phi(z)$ имеет бесконечное множество нулей, единственной предельной точкой которых является бесконечность.

Если уравнение (18) является уравнением с запаздывающим аргументом (т. е. $a_{n0} \neq 0$, $a_{nj} = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, m$), то все корни z_i квазиполинома $\Phi(z)$ лежат в левой полуплоскости: $\operatorname{Re} z_i \leqslant N$.

Действительно, в рассматриваемом случае не может быть корней с неограниченно возрастающей действительной частью, так как при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ порядок роста модуля $|a_{n0} z^n|$ выше порядка роста каждого из остальных слагаемых квазиполинома, и, следовательно, выше порядка роста модуля их суммы

$$\left| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} e^{-\tau_j z} \right|.$$

Если уравнение (18) является уравнением с опережающим аргументом (т. е. $a_{nm} \neq 0$, $a_{nj} = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, (n-1))$, то все корни квазиполинома расположены в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z_i \geqslant N$.

Действительно, в рассматриваемом случае порядок роста при $\operatorname{Re} z \to -\infty$ модуля $|a_{nm} z^n e^{-\tau_m z}|$ выше порядка роста модуля суммы остальных слагаемых квазиполинома

$$\left| \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} z^p e^{-\tau_j z} \right|.$$

Для более точного описания распределения корней представим любой член квазиполинома $z^p e^{-\tau z}$ в виде $e^{p \ln z - \tau z}$, следовательно, $|z^p e^{-\tau z}| = e^{p \ln |z| - \tau \operatorname{Re} z}$. Отсюда видно, что $|z^p e^{-\tau z}|$ является монотонно возрастающей функцией $p \ln |z| - \tau \operatorname{Re} z$, и если в каком-нибудь квазиполиноме при $z \to \infty$ по какому-нибудь направлению $\arg z = \text{const}$, или по какому-нибудь иному закону возрастания $z = z(t)$, для одного члена квазиполинома значение $\mu = p \ln |z| - \tau \operatorname{Re} z$ больше аналогичного выражения для других членов, то в этом направлении $\arg z = \text{const}$ или вдоль данной кривой $z = z(t)$ при

$z \to \infty$ не может быть нулей квазиполинома. Если же при $z \to \infty$ по некоторой кривой $z = z(t)$ для нескольких членов квазиполинома величины $\mu = p \ln |z| - \tau \operatorname{Re} z$ совпадают и превосходят значения μ для других членов, то вдоль этой кривой могут быть нули z_k квазиполинома, модули которых неограниченно возрастают, причем для приближенного нахождения этих корней надо сохранить в уравнении лишь доминирующие члены (т. е. члены, имеющие наибольший порядок роста) и найти большие по модулю корни этого упрощенного, обычно двучленного, уравнения.

Применим этот метод исследования к квазиполиномам, соответствующим дифференциальным уравнениям с одним отклонением аргумента:

$$\Phi(z) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p + \sum_{q=0}^{m} b_q z^q e^{-\tau z},$$
$$\tau > 0, \quad n \geqslant m, \quad a_n > 0, \; b_m \neq 0.$$

При больших по модулю значениях z главным членом первой суммы будет $a_n z^n$, а второй суммы $b_m z^m e^{-\tau z}$. Следовательно, при $|z| \gg 1$ характеристическое уравнение $\Phi(z) = 0$ приближенно может быть заменено уравнением

$$a_n z^n + b_m z^m e^{-\tau z} = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим вначале случай $n = m$, соответствующий дифференциальному уравнению нейтрального типа. Тогда из (19) получим $e^{-\tau z} = -\frac{a_n}{b_n}$; $\quad -\tau z = \ln\left(-\frac{a_n}{b_n}\right)$, отсюда при $b_n < 0$

$$z_k \approx -\frac{1}{\tau} \ln \left| \frac{a_n}{b_n} \right| + \frac{2k\pi i}{\tau} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{20}$$

а при $b_n > 0$

$$z_k \approx -\frac{1}{\tau} \ln \left| \frac{a_n}{b_n} \right| + \frac{(2k+1)\pi i}{\tau} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{21}$$

Из (20) и (21) видно, что в рассматриваемом случае большие по модулю корни квазиполинома $\Phi(z)$ расположены в плоскости $z\,(z = x + iy)$ вблизи прямой $x = -\frac{1}{\tau} \ln \left| \frac{a_n}{b_n} \right|$ примерно на расстоянии $\frac{2\pi}{\tau}$ друг от друга.

Если $n > m$ и, следовательно, (18) является уравнением с запаздывающим аргументом, то из уравнения

$$a_n z^n + b_m z^m e^{-\tau z} = 0 \tag{22}$$

находим

$$e^{\tau z} z^p = a, \tag{23}$$

где $p = n - m > 0$, $a = -\frac{b_m}{a_n}$. Полагая $z = z_k = x_k + iy_k$ и взяв модуль левой и правой частей в (23), получим $e^{\tau x_k} |z_k^p| = |a|$, или, возводя в степень $\frac{2}{p}$, будем иметь

$$e^{\frac{2x_k}{p}\tau} (x_k^2 + y_k^2) = |a|^{\frac{2}{p}}. \tag{24}$$

Известно (см. стр. 44), что при $p > 0$ $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = -\infty$, следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} e^{\frac{2\tau x_k}{p}} x_k^2 = 0$ и (24) можно переписать в виде

$$e^{\frac{2\tau x_k}{p}} y_k^2 = |a|^{\frac{2}{p}} + \varepsilon_1, \tag{25}$$

где $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_1 = 0$, или

$$x_k^2 e^{\frac{2\tau x_k}{p}} \frac{y_k^2}{x_k^2} = |a|^{\frac{2}{p}} + \varepsilon_1.$$

Так как $\lim\limits_{k \to \infty} x_k^2 e^{\frac{2\tau x_k}{p}} = 0$ и $a \neq 0$, то

$$\lim_{k \to \infty} \frac{y_k^2}{x_k^2} = \infty.$$

Корни уравнения (23) встречаются сопряженными парами, поэтому можно взять корень с $y_k < 0$, тогда

$$\arg z_k = \operatorname{arctg} \frac{y_k}{x_k} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_2 \to 0$ при $k \to \infty$.

Логарифмируя (23) и сравнивая мнимые части, получим

$$\tau z_k + p \ln |z_k| + ip \arg z_k = i \arg a + 2k\pi i + \ln |a|,$$

$$\tau y_k + p \arg z_k = \arg a + 2k\pi$$

или

$$y_k = \frac{1}{\tau}\left(2k\pi - p\frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon_3 \quad \text{при} \quad a > 0 \tag{26}$$

и

$$y_k = \frac{1}{\tau}\left(2k\pi - \frac{p\pi}{2} + \pi\right) + \varepsilon_3 \quad \text{при} \quad a < 0, \tag{27}$$

где

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_3 = 0.$$

Логарифмируя (25), находим x_k

$$\frac{2\tau x_k}{p} + 2\ln y_k = \ln\{|a|^{\frac{2}{p}} + \varepsilon_1\},$$

$$x_k = \frac{1}{\tau}(-p\ln y_k + \ln|a|) + \varepsilon_4,$$

где $\varepsilon_4 \to 0$ при $k \to \infty$.

В правой части y_k можно заменить с помощью (26) или (27). При этом получим

$$z_k \approx \frac{1}{\tau}\left[-p\ln\left(2k - \frac{p}{2}\right)\frac{\pi}{\tau} + \ln|a|\right] \pm \left(2k - \frac{p}{2}\right)\frac{\pi i}{\tau}$$

$$\text{при } a > 0, \tag{28}$$

$$z_k \approx \frac{1}{\tau}\left[-p\ln\left(2k + 1 - \frac{p}{2}\right)\frac{\pi}{\tau} + \ln|a|\right] \pm \left(2k + 1 - \frac{p}{2}\right)\frac{\pi i}{\tau}$$

$$\text{при } a < 0. \tag{29}$$

Случай $m > n$, соответствующий дифференциальному уравнению (18) с опережающим аргументом, в прикладном отношении неинтересен, однако и он может быть исследован тем же методом.

Если уравнение содержит более одного отклонения аргумента, то, оставляя в нем лишь доминирующие члены, получим, вообще говоря, также уравнение вида (22), но, в виде исключения, могут получиться уравнения такого же вида, но содержащие более двух слагаемых.

Пусть, например, уравнение содержит три доминирующих члена

$$a_n z^n + b_m z^m e^{-\tau_1 z} + c_p z^p e^{-\tau_2 z} = 0, \tag{30}$$

причем

$$\mu = n\ln|z| = m\ln|z| - \tau_1 \operatorname{Re} z = p\ln|z| - \tau_2 \operatorname{Re} z. \tag{31}$$

Переписав, в силу (31), уравнение (30) в виде

$$e^{nz\frac{\ln|z|}{\operatorname{Re} z}}\left[a_n\left(ze^{-z\frac{\ln|z|}{\operatorname{Re} z}}\right)^n+b_m\left(ze^{-z\frac{\ln|z|}{\operatorname{Re} z}}\right)^m+\right.$$
$$\left.+c_p\left(ze^{-z\frac{\ln|z|}{\operatorname{Re} z}}\right)^p\right]=0$$

и находя корни u_i ($i=1, 2, \ldots$) алгебраического уравнения

$$a_nu^n+b_mu^m+c_pu^p=0,$$

получим для определения z уравнения вида $ze^{qz}=u_i$ ($i=1, 2, \ldots$), которые уже были рассмотрены выше (стр. 46). Также поступаем и при большем числе доминирующих членов.

Указанный выше метод дает возможность приближенно определить большие по модулю корни характеристического уравнения. Такие корни часто называют асимптотическими корнями уравнения.

Неасимптотические корни характеристического уравнения могут быть найдены различными приближенными методами. Например, методом Ньютона (в случае его применимости), в котором последовательные приближения вычисляются по формуле

$$z_n=z_{n-1}-\frac{\Phi^{\alpha-1}(z_{n-1})}{\Phi^{\alpha}(z_{n-1})},$$

где α — кратность искомого корня.

Если корни простые, то удобно применять правило ложного положения, и тогда

$$z_n=z_{n-1}-\frac{(z_{n-1}-z_{n-2})\,\Phi(z_{n-1})}{\Phi(z_{n-1})-\Phi(z_{n-2})}.$$

Если кратность корня неизвестна, то можно воспользоваться формулой

$$z_n=z_{n-1}-\frac{\Phi(z_{n-1})}{\Phi'(z_{n-1})-\dfrac{\Phi(z_{n-1})\,\Phi''(z_{n-1})}{\Phi'(z_{n-1})}}.$$

В качестве первого приближения к неасимптотическим корням иногда удобно брать значения корня, вычисленные по асимптотическим формулам (20), (21), (28), (29).

В формулах (20), (21), (28), (29) нетрудно оценить порядок погрешности, он соответственно равен (см. [47])

$$O\left(\frac{1}{n}\right),\quad O\left(\frac{1}{n}\right),\quad O\left(\frac{\ln n}{n}\right),\quad O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{32}$$

Можно также получить и следующие члены асимптотических представлений.

Заметим, что, как видно из асимптотических формул (20), (21), (28), (29), все корни квазиполинома удалены друг от друга более чем на некоторое положительное расстояние d и поэтому можно вокруг каждого корня, как из центра, описать непересекающиеся окружности радиуса $r \leqslant d$.

Нетрудно доказать, что это свойство сохраняется для всех характеристических квазиполинов, соответствующих уравнениям с одним отклонением аргумента, а также для широкого класса характеристических квазиполиномов, соответствующих уравнениям с несколькими отклонениями.

Однако существуют уравнения с отклоняющимся аргументом, асимптотические корни характеристических квазиполиномов которых неограниченно сближаются. В этом случае можно указать такое число $d > 0$, что все корни характеристического квазиполинома будут заключены внутри непересекающихся окружностей C_i ($i = 1, 2, \ldots$) радиуса $r < d$, причем внутри круга, ограниченного каждой окружностью, будет заключено лишь конечное число k_i корней $k_i \leqslant N$, где постоянная N не зависит от i (см. [89], [94], [98]).

Пример 1. Найти асимптотические корни квазиполинома $\Phi(z) = z + ae^{-z}$, соответствующего уравнению $\dot{x}(t) + ax(t-1) = 0$.

Напомним, что к этому уравнению заменой переменных легко приводится уравнение $\dot{x}(t) + a_1 x(t) + b_1 x(t-\tau) = 0$ (см. стр. 43).

Из (28), (29) и (32) получим

$$z_n = -\ln\left|\frac{2\pi n}{a}\right| \pm \left(\frac{1}{2}\operatorname{sgn} a + 2n\right)\pi i + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Пример 2. Найти асимптотические корни характеристического уравнения для следующего дифференциального уравнения нейтрального типа

$$\dot{x}(t) + a\dot{x}(t-1) + bx(t-1) = 0, \quad a \neq 0. \tag{33}$$

К этому уравнению заменой переменных легко приводится уравнение

$$\dot{x}(t) + a_1 x(t) + b_1 \dot{x}(t-\tau) + c_1 x(t-\tau) = 0.$$

Характеристическое уравнение для (33) имеет вид

$$z+(az+b)e^{-z}=0.$$

Принимая во внимание (20), (21) и (32), получим

$$z_n=\ln(-a)\pm 2n\pi i+O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при} \quad a<0,$$

$$z_n=\ln a\pm(2n+1)\pi i+O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при} \quad a>0.$$

Пример 3. Найти асимптотические корни характеристического квазиполинома для уравнения

$$\ddot{x}(t)+a_2x(t)+b_1\dot{x}(t-1)+b_2x(t-1)=0.$$

К этому уравнению легко сводится уравнение

$$\ddot{x}(t)+\bar{a}_1\dot{x}(t)+\bar{a}_2x(t)+\bar{b}_1\dot{x}(t-1)+\bar{b}_2x(t-1)=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2+a_2+(b_1z+b_2)e^{-z}=0.$$

Применяя указанный на стр. 46 метод и принимая во внимание (32), получим

$$z_n=-\ln\frac{2\pi n}{b_1}\pm\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi i+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

при $b_1>0$ и

$$z_n=-\ln\left(\frac{-2\pi n}{b_1}\right)\pm\left(2n-\frac{5}{2}\right)\pi i+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

при $b_1<0$.

§ 4. Разложение решения в ряд по основным решениям

Как уже указывалось выше (см. стр. 38), одним из основных методов интегрирования стационарных линейных однородных уравнений является разложение решения $x(t)$ в ряд по основным решениям вида $t^pe^{k_it}$, где k_i — корень характеристического уравнения, натуральное число $p\leqslant\alpha_i-1$, α_i — кратность корня k_i. Для получения такого разложения удобнее всего воспользоваться операционными методами, причем для облегчения обоснования их применимости иногда пользуются не преобразованием Лапласа, а преобразованием

Лапласа—Эйлера. Отсылая читателя, интересующегося этим вопросом, к [47], [89], [87], [98], [94], мы ограничимся здесь изложением лишь схемы доказательства и вычислением коэффициентов разложения в простейших случаях.

Пусть $\underset{\varphi}{x}(t)$ является при $t>0$ решением уравнения

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=0, \tag{34}$$

определяемым непрерывной начальной функцией $\varphi(t)$, заданной на отрезке $-\tau\leqslant t\leqslant 0$. Применяя к (34) преобразование Лапласа,

$$\int_0^\infty [\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)]\,e^{-pt}\,dt=0,$$

интегрируя первое слагаемое в левой части уравнения по частям, а в последнем слагаемом совершая замену переменных $t-\tau=t_1$ и разбивая полученный после этого преобразования интеграл $\int\limits_{-\tau}^{\infty}$ на два интеграла $\int\limits_{-\tau}^{0}$ и $\int\limits_{0}^{\infty}$, получим

$$p\bar{x}(p)-x(0)+a\bar{x}(p)+b\bar{x}(p)\,e^{-p\tau}+b\int_{-\tau}^{0}\varphi(t)\,e^{-p(t+\tau)}\,dt=0,$$

откуда

$$\bar{x}(p)=\frac{x(0)-b\int\limits_{-\tau}^{0}\varphi(t)\,e^{-p(t+\tau)}\,dt}{p+a+be^{-p\tau}}. \tag{35}$$

Существование $\bar{x}(p)$ обеспечивается оценкой порядка роста решений стационарных линейных уравнений $|x(t)|\leqslant Me^{st}$, где M и s — постоянные, доказательство которой не отличается от доказательства аналогичной теоремы для линейных уравнений без отклонений аргумента, но может быть получено и методом шагов.

Пользуясь формулой обращения интеграла Лапласа, получим

$$\underset{\varphi}{x}(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma_0-i\omega}^{\sigma_0+i\omega}e^{pt}\,\bar{x}(p)\,dp. \tag{36}$$

Замкнем отрезок $[\sigma_0 - i\omega,\ \sigma_0 + i\omega]$ полуокружностью, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leqslant \sigma_0$, или дополним его до прямоугольника (см. рис. 2), стороны которого неограниченно возрастают при $\omega \to \infty$.

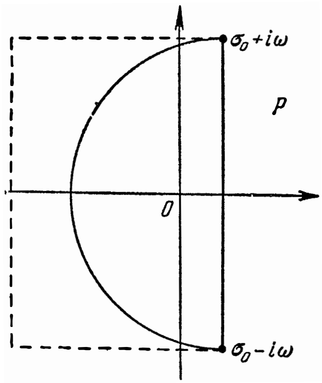

Рис. 2.

Нетрудно доказать, что интеграл по дуге полуокружности, или по трем отличным от отрезка $[\sigma_0 - i\omega,\ \sigma_0 + i\omega]$ сторонам прямоугольника при $\omega \to \infty$ стремится к нулю (см. [89]).

Применяя к интегралу (36), замкнутому дугой полуокружности, теоремы о вычетах, получим

$$x_{\varphi}(t) = \sum_j \operatorname{Res}\left[\frac{e^{pt}\left(\varphi(0) - b\int\limits_{-\tau}^{0} \varphi(t)\, e^{-p(t+\tau)}\, dt\right)}{p + a + be^{-p\tau}};\ p_j\right], \tag{37}$$

где суммирование распространяется на все особые точки подынтегральной функции в (36), т. е. сумма взята по всем нулям p_j квазиполинома $\Phi(p) = p + a + be^{-p\tau}$, расположенным в порядке возрастания их модулей, или, в силу (28), (29) (стр. 47), в порядке убывания действительных частей.

Если квазиполином $\Phi(p)$ обладает лишь простыми нулями, то (37) приобретает особенно простой вид

$$x_{\varphi}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi(0) - b\int\limits_{-\tau}^{0} \varphi(t)\, e^{-p_j(t+\tau)}\, dt}{1 - \tau be^{-p_j\tau}}\, e^{p_j t} \tag{38}$$

(мы воспользовались известной формулой для вычета функции $\frac{\psi(z)}{\Phi(z)}$ в простом полюсе $z = a$, $\psi(a) \neq 0$:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\psi(z)}{\Phi(z)}, a\right] = \frac{\psi(a)}{\Phi'(a)}\Big).$$

Замечание. В упомянутом на стр. 49 исключительном случае, когда корни сближаются достаточно быстро, примененная к уравнению (34) схема доказательства должна быть несколько изменена. Приходится группировать решения, соответствующие корням p_s, лежащим в одной окружности C_i, и представлять решение в виде $\underset{\varphi}{x}(t)=\sum_{j=0}^{\infty} v_j(t)$, где $v_j(t)=$ $=\sum_{s=N_j}^{N_j+1} p_s(t)\, e^{p_s t}$ (см. [89], [94], [29]).

§ 5. Некоторые линейные уравнения с переменными коэффициентами и переменными отклонениями аргумента

Линейные уравнения с переменными коэффициентами и с переменными запаздываниями находят многочисленные приложения, однако до настоящего времени они исследованы довольно слабо. В этом параграфе мы кратко остановимся лишь на некоторых более изученных типах линейных уравнений.

1. Уравнения, аналогичные уравнениям Эйлера. Уравнения вида

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs} t^r x^{(r)}(p_s t)=f(t), \tag{39}$$

где все a_{rs} и p_s — постоянные, $1=p_0>p_1>\ldots>p_m$, естественно считать аналогом уравнения Эйлера, так как заменой независимого переменного $t=e^u$ (или $t=-e^u$) уравнение (39) преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами и с постоянными запаздываниями.

Можно, конечно, и непосредственно искать частные решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (39) в виде $x(t)=t^k$. Тогда для определения k получим уравнение

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs} k(k-1)\cdot\ldots(k-r+1)\, p_s^{k-r}=0, \tag{40}$$

или, полагая $p_s=e^{-\tau_s}$,

$$\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} a_{rs} k(k-1)\ldots(k-r+1)e^{-(k-r)\tau_s}=0. \tag{41}$$

Корню k_i кратности α_i уравнения (40) или (41) соответствуют решения $u^s e^{k_i u}$ $(s=0,\ 1,\ \ldots,\ (\alpha_i-1))$ преобразованного однородного уравнения, или решения

$$t^{k_i}\ln^s(t)\,(s=0,\ 1,\ \ldots,\ (\alpha_i-1))$$

однородного уравнения, соответствующего уравнению (39).

2. Приводимые системы уравнений. Линейное однородное уравнение

$$\dot{x}(t)=A_0(t)\,x(t)+A_1(t)\,x(t-\tau) \tag{42}$$

называется приводимым, если существует невырожденное дифференцируемое линейное преобразование искомой функции

$$x(t)=B(t)\,y(t), \tag{43}$$

преобразующее уравнение (42) в линейное уравнение с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента.

В (42) и (43) можно считать $x(t)$ и $y(t)$ n-векторами, а $A_0(t)$, $A_1(t)$ и $B(t)$ $n\times n$-матрицами. Преобразование (43) переводит уравнение (42) в

$$B(t)\,\dot{y}(t)=[A_0(t)\,B(t)-\dot{B}(t)]\,y(t)+A_1(t)\,B(t-\tau)\,y(t-\tau)$$

или

$$\dot{y}(t)=B^{-1}(t)\,[A_0(t)\,B(t)-\dot{B}(t)]\,y(t)+\\ +B^{-1}(t)\,A_1(t)\,B(t-\tau)\,y(t-\tau).$$

Следовательно, для приводимости необходимо и достаточно постоянство матриц $B^{-1}(t)\,[A_0(t)\,B(t)-\dot{B}(t)]$ и $B^{-1}(t)\,A_1(t)\cdot B(t-\tau)$. Первое из этих двух условий означает приводимость уравнения без отклонений аргумента

$$\dot{x}(t)=A_0(t)\,x(t). \tag{44}$$

Итак, для приводимости уравнения (42) необходимо и достаточно приводимости уравнения (44) и постоянства матрицы

$$B^{-1}(t)\,A_1(t)\,B(t-\tau).$$

3. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Уравнение (44), если матрица $A_0(t)$ — периодическая, как известно, приводимо (теорема Ляпунова), но уравнение (42) с периодическими матрицами $A_0(t)$ и $A_1(t)$

с общим периодом T, вообще говоря, неприводимо, так как матрица $B(t)$, с помощью которой приводится уравнение (44), хотя и определяется с некоторой степенью произвола, но этой степени произвола, вообще говоря, недостаточно для удовлетворения условию

$$B^{-1}(t)\,A_1(t)\,B(t-\tau)=\mathrm{const}.$$

В скалярном случае для уравнения (42) с периодическими коэффициентами периода T и даже для более общего уравнения

$$\dot{x}(t)=\sum_{p=0}^{m} a_p(t)\,x(t-pT), \tag{45}$$

где $a_p(t)$ — периодические функции периода T, существует бесконечное множество решений вида

$$x(t)=e^{\int\limits_0^t f(u)\,du}, \tag{46}$$

где $f(u)$ — периодическая функция периода T.

Действительно, подставив (46) в (45) и вводя обозначение $k=\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(u)\,du$, после сокращения на $e^{\int\limits_0^t f(u)\,du}$ получим

$$f(t)=\sum_{p=0}^{m} a_p(t)\,e^{-pTk}. \tag{47}$$

Для нахождения k умножим (47) на dt и проинтегрируем в пределах от 0 до T:

$$k-\sum_{p=0}^{m}\tilde{a}_p e^{-pTk}=0, \tag{48}$$

где

$$\tilde{a}_p=\frac{1}{T}\int\limits_0^T a_p(t)\,dt \qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

Простым корням k_i уравнения (48) соответствуют, в силу (46), решения

$$x_i(t)=e^{\int\limits_0^t f(u,\,k_i)\,du},$$

где

$$f(t,\ k) = \sum_{p=0}^{m} a_p(t)\, e^{-pTk}.$$

Можно доказать, что кратным корням k_i уравнения (48) кратности α_i соответствуют решения

$$x_{ij}(t) = \left[\frac{\partial^j}{\partial k^j}\, e^{\int\limits_0^t f(t,\ k)\,dt}\right]_{k=k_i} \tag{49}$$

$$(j = 0,\ 1,\ \ldots,\ (\alpha_i - 1); \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Полученная система решений (49) в общем случае не является фундаментальной, но все же позволяет судить об устойчивости и о некоторых других асимптотических свойствах решений уравнения (45) (см. [12], [13]).

4. Уравнение

$$\dot{x}(t) = M(t)\, x(t - \tau(t)). \tag{50}$$

Уравнение (50) при $\tau(t) \geqslant 0$ и его различные обобщения изучались в работах А. Д. Мышкиса (см. [36]). Рассматривались уравнения так называемого неустойчивого типа $M(t) \geqslant 0$ и уравнения устойчивого типа $M(t) \leqslant 0$. В основном изучалось качественное поведение решений. Исследование опиралось на различные теоремы сравнения. Приведем одну из этих теорем.

Теорема. *Решения* $\underset{\varphi_1}{x}(t)$ *и* $\underset{\varphi_2}{x}(t)$ *уравнений*

$$\dot{x}_1(t) = M_1(t)\, x_1(t - \tau_1(t)) \quad \text{и} \quad \dot{x}_2(t) = M_2(t)\, x_2(t - \tau_2(t))$$

удовлетворяют неравенству $\underset{\varphi_2}{x}(t) \geqslant \underset{\varphi_1}{x}(t)$, *если* $0 \leqslant M_1(t) \leqslant$ $\leqslant M_2(t)$, $0 \leqslant \varphi_1(t) \leqslant \varphi_2(t)$ *и* $\tau_1(t) \equiv \tau_2(t)$.

При использовании теорем сравнения чаще всего сравнивают решения уравнений с переменными коэффициентами и постоянными или переменными запаздываниями с решениями уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента, свойства решений которых хорошо изучены.

Этим методом, в частности, удается выяснить, колеблются ли решения уравнения (50) при $M(t) \geqslant 0$ или при $M(t) \leqslant 0$, и оценить быстроту колебаний.

Аналогичные качественные исследования проведены и для уравнения

$$\ddot{x}(t) = M(t)\, x(t - \tau(t))$$

(см. [36], [19]). Отметим еще интересные результаты, связанные, в частности, с исследованием собственных значений и собственных функций краевых задач, полученные С. Б. Норкиным для уравнения

$$\ddot{x}(t) = M(t)\, x(t - \tau(t)) + \lambda x(t)$$

(см. [42], [43], [44], [45]).

Довольно хорошо изучена асимптотика решений линейных уравнений с асимптотически постоянными коэффициентами [28], [31], [32], [56], [86], [87], [92].

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 1. Основные понятия

При составлении дифференциального уравнения, описывающего какое-нибудь реальное явление, всегда приходится упрощать, идеализировать это явление, выделяя лишь какие-то основные факторы и пренебрегая остальными. Начальные условия в реальных задачах обычно являются результатом измерения и, следовательно, неизбежно определены с некоторой погрешностью.

Для того чтобы в этих условиях дифференциальное уравнение могло хотя бы приближенно описывать изучаемое явление, необходимо, чтобы малое изменение начальной функции и малые в некотором смысле изменения дифференциального уравнения лишь мало изменяли определяемое этой начальной функцией решение. Теория устойчивости и изучает условия, при которых малые в некотором смысле изменения, или, как часто говорят, малые возмущения дифференциальных уравнений и начальных условий приводят к малым изменениям решений.

Введем основные определения применительно к дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t)=f(t,\ x(t),\ x(t-\tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t-\tau_m(t))). \qquad (1)$$

I. Определение устойчивости. Решение $\underset{\varphi(t)}{x}(t)$ уравнения (1) называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что из неравенства $|\varphi(t)-\psi(t)|<\delta(\varepsilon)$ на начальном множестве следует $|\underset{\varphi(t)}{x}(t)-\underset{\psi(t)}{x}(t)|<\varepsilon$ при $t\geqslant t_0$, где $\psi(t)$ — любая непрерывная начальная функция.

Не обладающие этим свойством решения называются неустойчивыми.

II. Определение асимптотической устойчивости. Устойчивое решение $\underset{\varphi(t)}{x}(t)$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim\limits_{t\to\infty}|\underset{\varphi(t)}{x}(t)-\underset{\psi(t)}{x}(t)|=0$ для любой непрерывной начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей при достаточно малом $\delta_1>0$ условию $|\varphi(t)-\psi(t)|<\delta_1$.

III. Определение равномерной асимптотической устойчивости. Решение $\underset{\varphi(t)}{x}(t)$ уравнения (1) называется равномерно асимптотически устойчивым, если существует такое $\delta>0$, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $T(\varepsilon)$ такое, что при $t>t_1+T(\varepsilon)$ $|\underset{\varphi(t)}{x}(t)-\underset{\psi(t)}{x}(t)|<\varepsilon$ для любой непрерывной начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей неравенству $|\varphi(t)-\psi(t)|<\delta$ на начальном множестве E_{t_1}, где δ не зависит от выбора t_1, $t_1\geqslant t_0$.

IV. Определение асимптотической устойчивости по показательному закону. Решение $\underset{\varphi}{x}(t)$ уравнения (1) называется асимптотически устойчивым по показательному закону, если существуют постоянные $\delta>0$, $\alpha>0$, $B>1$ такие, что из неравенства $|\varphi(t)-\psi(t)|<\delta$ следует $|\underset{\varphi}{x}(t)-\underset{\psi}{x}(t)|<B\max\limits_{t\in E_{t_0}}|\varphi-\psi|e^{-\alpha(t-t_0)}$ при $t\geqslant T$.

V. Определение асимптотической устойчивости в целом. Решение уравнения (1) $\underset{\varphi}{x}(t)$ называется асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчиво и

$$\lim_{t\to\infty}(\underset{\varphi}{x}(t)-\underset{\psi}{x}(t))=0$$

при любых непрерывных начальных функциях $\psi(t)$.

Все определения сохраняются, если считать в (1) $x(t)$ n-вектором или даже элементом банахова пространства. При этом лишь всюду знак модуля $|\ |$ следует заменить на знак нормы $\|\ \|$.

Иногда целесообразно в определении устойчивости и асимптотической устойчивости пользоваться не метрикой пространства C_0, а какой-нибудь иной (см. [78]).

Для уравнения нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t-\tau_1(t)),\ \ldots$$
$$\ldots, x(t-\tau_m(t)),\ \dot{x}(t-\tau_1(t)),\ \ldots,\ \dot{x}(t-\tau_m(t))) \qquad (2)$$

все данные выше определения сохраняются, но только вместо требования $|\varphi(t)-\psi(t)|<\delta$ обычно приходится требовать близость в пространстве C_1:

$$|\varphi(t)-\psi(t)|<\delta \quad \text{и} \quad |\varphi'(t)-\psi'(t)|<\delta.$$

При исследовании на устойчивость какого-нибудь решения $\underset{\varphi}{x}(t)$ уравнения (1) или (2) можно заменой переменных $y(t) = x(t) - \underset{\varphi}{x}(t)$ преобразовать исследуемое на устойчивость решение $\underset{\varphi}{x}(t)$ в тривиальное $y(t)\equiv 0$. Поэтому в дальнейшем на устойчивость исследуются лишь тривиальные решения.

§ 2. Устойчивость решений стационарных линейных уравнений

Все решения линейного уравнения с отклоняющимся аргументом

$$L(x(t)) = f(t) \qquad (3)$$

с фиксированной начальной точкой t_0, так же как и решения линейных уравнений без отклонений аргумента, одновременно устойчивы или неустойчивы.

Действительно, любое решение $\underset{\varphi}{x}(t)$ уравнения (3) заменой переменных $y(t) = x(t) - \underset{\varphi}{x}(t)$ переходит в тривиальное решение соответствующего однородного уравнения

$$L(y(t)) = 0. \qquad (4)$$

Следовательно, все решения уравнения (3) в смысле устойчивости ведут себя так же, как тривиальное решение уравнения (4). В частности, при $f(t)\equiv 0$ все решения однородного уравнения в смысле устойчивости ведут себя так же, как и тривиальное решение того же уравнения.

Особенно просто исследуются на устойчивость решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента:

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj}x^{p}(t-\tau_j)=0, \tag{5}$$

где a_{pj} и τ_j — постоянные $\tau_m > \tau_{m-1} > \ldots > \tau_1 > \tau_0 = 0$.

В гл. II, § 3 указывалось, что если (5) является уравнением с опережающим аргументом ($a_{nm} \neq 0$ и $a_{ni} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$), то всегда существуют решения вида Ce^{kt}, где C — произвольная постоянная, с $\mathrm{Re}\, k > 0$. Следовательно, все решения уравнения (5) в этом случае неустойчивы, так как при сколь угодно малом $|C|$ решения вида Ce^{kt} или неограниченно возрастают по модулю при $t \to \infty$ или при комплексном k решения $C\,\mathrm{Re}\, e^{kt}$ и $C\,\mathrm{Im}\, e^{kt}$ колеблются с неограниченно возрастающей амплитудой.

Если уравнение (5) является уравнением с запаздывающим аргументом ($a_{n0} \neq 0$ и $a_{ni} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$), то любое решение $\underset{\varphi}{x}(t)$ при $t_0 + \tau \leqslant t \leqslant T$ может быть разложено в абсолютно и равномерно сходящийся ряд из основных решений

$$\underset{\varphi}{x}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(t)\, e^{k_j t}, \tag{6}$$

где $P_j(t)$ — многочлены степени не выше $\alpha_j - 1$, α_j — кратность корня k_j характеристического квазиполинома

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj} z^{p} e^{-\tau_j z}, \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}\, k_1 \geqslant \mathrm{Re}\, k_2 \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{Re}\, k_n \geqslant \ldots$$

Если все корни характеристического квазиполинома имеют отрицательные действительные части, то остаток ряда можно представить в виде $e^{-k_n t} R_n(t)$, где $|R_n(t)| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$. Отсюда уже следует асимптотическая устойчивость решений уравнения (5).

Более того, можно доказать, что при $t > t_0 + \tau$

$$\Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} P_j(t)\, e^{k_j t} \Big| \leqslant B e^{(k_{n+1}+\varepsilon)t},$$

где B и ε — постоянные, $\varepsilon > 0$ и сколь угодно мало (см. [47]). Следовательно, при $\operatorname{Re} k_1 < 0$ все решения уравнения (5) асимптотически устойчивы по показательному закону:

$$|\underset{\varphi}{x}(t)| < Ae^{(\operatorname{Re} k_1 + \varepsilon)t},$$

где A — постоянная. Заметим, что характеристический квазиполином, соответствующий уравнению с запаздывающим аргументом, имеет лишь конечное множество нулей k_j, удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re} k_j > d$ (см. стр. 44), следовательно, $\max\limits_j \operatorname{Re} k_j = \operatorname{Re} k_1$ существует и, если $\operatorname{Re} k_1 < 0$, то существует столь малое $\varepsilon > 0$, что $\operatorname{Re} k_1 + \varepsilon < 0$.

Для простейшего уравнения (34) из гл. II (стр. 51) все эти утверждения легко могут быть доказаны путем исследования ряда (37) (или (38)) из гл. II, в более сложных случаях надо предварительно теми же методами вычислить коэффициенты разложения (6) (см. [47]).

Аналогичная теорема справедлива и для уравнений нейтрального типа, но в этом случае, из-за возможности неограниченного приближения корней к мнимой оси, достаточным условием асимптотической устойчивости по показательному закону будет не требование «все $\operatorname{Re} k_j < 0$», а «все $\operatorname{Re} k_j \leqslant \leqslant \alpha < 0$».

Впрочем, Хан в [100] доказал, что и при условии «все $\operatorname{Re} k_j < 0$» решения уравнений нейтрального типа асимптотически устойчивы, но уже, вообще говоря, не по показательному закону.

Из-за возможности наступления для уравнений нейтрального типа, упомянутого на стр. 49 исключительного случая, доказательство асимптотической устойчивости по показательному закону решений уравнений нейтрального типа при условии «все $\operatorname{Re} k_j \leqslant -\alpha < 0$» несколько усложняется по сравнению с аналогичной теоремой для уравнений с запаздывающим аргументом (см. [98], [47]).

Если хотя бы один корень k_j характеристического квазиполинома (7) имеет положительную действительную часть, то решения уравнения (5), очевидно, неустойчивы, так как решения вида $C \operatorname{Re} e^{k_j t}$ или $C \operatorname{Im} e^{k_j t}$ при сколь угодно малых $|C|$ неограниченно возрастают по модулю с возрастанием t или колеблются с неограниченно возрастающей амплитудой.

Если для уравнения с запаздывающим аргументом характеристический квазиполином имеет простые чисто мнимые корни, а остальные корни имеют отрицательные действительные части, то решения уравнения (5) устойчивы. Это утверждение непосредственно следует из (6), если в нем выделить конечное число слагаемых, соответствующих чисто мнимым корням.

Такая же теорема об устойчивости, если все $\operatorname{Re} k_j \leqslant 0$ и корни с $\operatorname{Re} k_j = 0$ — простые, справедлива и для уравнений нейтрального типа, но доказательство несколько усложняется (из-за возможности неравномерной сходимости и даже расходимости ряда (6) и возможности появления бесконечного множества чисто мнимых корней характеристического квазиполинома).

Если среди чисто мнимых корней есть кратные, то из-за появления решений вида

$$Ct^{\alpha-1} \operatorname{Re} e^{k_j t} \quad \text{и} \quad Ct^{\alpha-1} \operatorname{Im} e^{k_j t}, \qquad \alpha > 1$$

решения неустойчивы.

Аналогичные теоремы, кроме последнего утверждения, справедливы и для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами и с постоянными отклонениями аргумента (в последнем утверждении надо кратность корня заменить величиной, аналогичной степени элементарного делителя).

Так как нахождение корней характеристического уравнения является задачей довольно сложной (см. стр. 48), то большое значение приобретают признаки отрицательности действительных частей всех корней квазиполинома, дающие возможность исследовать на устойчивость решения не только стационарных линейных уравнений, но, как будет показано в § 7 этой главы, и решения нелинейных уравнений, стационарных в первом приближении.

§ 3. Условия отрицательности действительных частей всех корней квазиполинома

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости решений стационарных линейных уравнений и достаточным условием асимптотической устойчивости тривиального решения широкого класса уравнений, стационарных в первом приближении (см. § 7 гл. III), является отрицательность действительных частей всех корней характеристического квазиполинома.

Так как приближенное вычисление всех корней квазиполинома является задачей весьма трудоемкой, то большее значение при исследовании на устойчивость приобретают различные признаки отрицательности действительных частей всех корней квазиполинома. Среди таких признаков чаще всего применяются следующие:

1) амплитудно-фазовый метод и его видоизменения;

2) метод D-разбиений и его видоизменения;

3) метод Меймана и Чеботарева.

Ниже мы изложим основные идеи амплитудно-фазового метода, подробно разработанного Я. З. Цыпкиным (см. [68], [69]), и метод D-разбиений (см. Ю. И. Неймарк [38], Пинни [47]).

Читателя, желающего ознакомиться с методом Меймана и Чеботарева, мы отсылаем к [30].

1. Амплитудно-фазовый метод. Напомним, что если функция $f(z)$, аналитическая и отличная от нуля в точках некоторого простого замкнутого контура C, внутри контура имеет лишь конечное множество особых точек типа полюса, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_C - P_C, \tag{8}$$

где N_C — сумма кратностей нулей функции $f(z)$, расположенных внутри контура C, а P_C — сумма кратностей там же расположенных полюсов. Геометрическое истолкование этой теоремы о логарифмическом вычете приводит к «принципу аргумента»

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z) = N_C - P_C. \tag{9}$$

$\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$ является полным приращением аргумента функции $f(z)$ при однократном обходе точкой z в положительном направлении контура C. Другими словами, разность $N_C - P_C$ равна числу полных оборотов, которые совершает в плоскости w вектор, идущий из точки $w=0$ в точку $w=f(z)$, когда точка z описывает в положительном направлении контур C (число оборотов считается положительным, если вектор вращается против часовой стрелки, и считается отрицательным при вращении по часовой стрелке).

Доказательство этих теорем читатель может найти в любом курсе теории аналитических функций в главе, посвященной логарифмическим вычетам.

Для получения условия отсутствия корней характеристического квазиполинома $\varphi(z)$ с положительными действительными частями применим принцип аргумента к контуру C_R, состоящему из отрезка мнимой оси $[-iR, iR]$ и полуокружности радиуса R с центром в начале координат, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ (рис. 3), предварительно убедившись, что квазиполином не имеет нулей на мнимой оси.

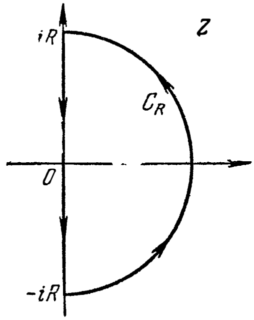

Рис. 3.

Воспользовавшись принципом аргумента, находим из (9) N_{C_R} и, если $\lim\limits_{R\to\infty} N_{C_R} = 0$, то все корни z квазиполинома удовлетворяют условию $\operatorname{Re} z_i < 0$. Заметим, что в рассматриваемом случае $P_C = 0$.

При применении этого общего метода к квазиполиному

$$\varphi(z) = P_n(z) + Q_{n-1}(z)\, e^{-\tau z},$$

соответствующему уравнению n-го порядка (а также некоторым системам n-уравнений первого порядка) с запаздывающим аргументом с одним запаздыванием, где $P_n(z)$ и $Q_{n-1}(z)$ — полиномы соответственно степени n и не выше $n-1$, можно несколько упростить исследование. Вместо функции $\varphi(z)$ рассматривают функцию

$$\frac{\varphi(z)}{P_n(z)} = 1 - \frac{Q_{n-1}(z)}{P_n(z)}\, e^{-\tau z},$$

нули которой совпадают с нулями функции $\varphi(z)$ (если $P_n(z)$ и $Q_{n-1}(z)$ не имеют общих нулей) и имеющую полюсы в нулях многочлена $P_n(z)$.

Обозначим $w_\tau(z) = -\frac{Q_{n-1}(z)}{P_n(z)}\, e^{-\tau z}$. Предельное положение при $R \to \infty$ образа контура C_R при отображении $w_\tau(z)$ называется амплитудно-фазовой характеристикой. Так как $\frac{\varphi(z)}{P_n(z)} = 1 - w_\tau(z)$, то нулям функции $\frac{\varphi(z)}{P_n(z)}$ соответствуют точки, в которых $w_\tau(z) = 1$. Поэтому, применяя принцип аргумента к функции $w_\tau(z)$, надо подсчитать число обходов амплитудно-фазовой характеристикой не точки $z=0$, а точки $z=1$. Число обходов амплитудно-фазовой характеристикой точки $z=1$ равно разности N_C-P_C и, следовательно, для того чтобы $N_C=0$, надо чтобы число обходов амплитудно-фазовой характеристикой точки $z=1$ равнялось $-P_C$. Еще раз напомним, что при этом предполагается, что на мнимой оси нет нулей функции $\varphi(z)$ и что $P_n(z)$ и $Q_{n-1}(z)$ не имеют общих нулей, причем оба эти условия сравнительно легко проверяемы.

Заметим, что при отображении $w_\tau(z)$ образ полуокружности, входящей в состав контура C_R при $R\to\infty$, стягивается в точку (так как степень $P_n(z)$ выше степени $Q_{n-1}(z)$), и, следовательно, надо строить лишь образ мнимой оси, проходимой в отрицательном направлении.

При построении амплитудно-фазовой характеристики удобно вначале найти так называемую предельную характеристику, являющуюся предельным положением образа контура C_R при отображении

$$w_0(z)=-\frac{Q_{n-1}(z)}{P_n(z)}.$$

Для построения образа мнимой оси при отображении

$$w_\tau(z)=-\frac{Q_{n-1}(z)}{P_n(z)}e^{-\tau z}=w_0(z)e^{-\tau z}$$

или

$$w_\tau(iy)=w_0(iy)e^{-\tau iy},$$

зная уже предельную характеристику, достаточно учесть влияние множителя $e^{-\tau iy}$, поворачивающего, без изменения модуля, радиус-вектор точки предельной характеристики, соответствующей значению y, на угол $-\tau y$.

При построении амплитудно-фазовой характеристики особое внимание следует уделить точкам предельной характеристики, лежащим на окружности $|z|=1$, так как именно эти точки при повороте на угол $-\tau y$ могут попасть в точку $z=1$.

В качестве примера найдем область асимптотической устойчивости в пространстве коэффициентов a и b тривиального решения уравнения

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=0, \tag{10}$$

где a, b и τ — постоянные, $\tau>0$.

В рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$z + a + be^{-\tau z} = 0,$$

$$w_\tau(z) = -\frac{be^{-\tau z}}{z+a}, \tag{11}$$

$$w_0(z) = -\frac{b}{z+a}. \tag{12}$$

Предельной характеристикой является образ мнимой оси при дробно-линейном отображении (12). При этом отображении мнимая ось переходит в окружность радуса $\left|\frac{b}{2a}\right|$ с центром в точке $z = -\frac{b}{2a}$, уравнение которой имеет вид

$$\left|z + \frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{b}{2a}\right|. \tag{13}$$

Пусть $a > 0$, тогда функция $w_\tau(z)$ не имеет полюсов в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и, если $|b| < a$, то ни при каком повороте точек окружности (13) (см. рис. 4), вызванном наличием множителя $e^{-\tau i y}$ в (11), амплитудно-фазовая характеристика не будет охватывать точки $z = 1$ и, следовательно, все нули квазиполинома $z + a + be^{-\tau z}$ расположены в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

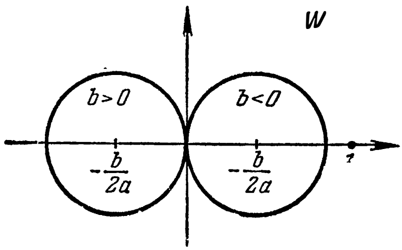

Рис. 4.

Итак, при $a > 0$ и $|b| < a$ решения уравнения (10) асимптотически устойчивы при любом $\tau \geqslant 0$. Эта часть области асимптотической устойчивости называется областью абсолютной асимптотической устойчивости.

При $|b| > a > 0$ (рис. 5) для некоторых значений τ точки предельной характеристики, лежащей одновременно и на окружности $|z| = 1$, изображенной на рисунке пунктиром, могут перейти в точку $z = 1$. Наименьшее из таких значений τ

при заданных a и b будет значением, при переходе через которое решения уравнения (10) теряют устойчивость, так как при переходе через это значение амплитудно-фазовая

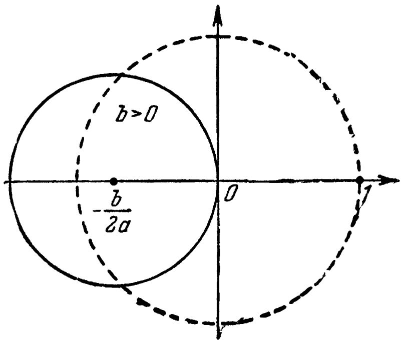

Рис. 5.

характеристика начинает охватывать точку $z=1$. Записав точку $w_0(iy)=-\frac{b}{iy+a}$ предельной характеристики в показательной форме, получим

$$w_0(iy)=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+y^2}}e^{i\,\operatorname{arctg}\left(-\frac{y}{a}\right)}. \tag{14}$$

Если эта точка лежит на окружности $|z|=1$, то

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+y^2}}=1, \tag{15}$$

а для того, чтобы после умножения на $e^{-\tau iy}$ точка перешла в точку $z=1$, аргумент $w_0(iy)e^{-\tau iy}$ должен быть кратен 2π:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{y}{a}\right)-\tau y=2k\pi. \tag{16}$$

Наименьшее положительное значение τ, определяемое из (16), и является тем критическим значением $\tau=\tau_0$, начиная с которого теряется устойчивость. Из (16) и (15) получаем

$$\tau_0=\frac{\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{b^2-a^2}}.$$

Если считать τ фиксированным, то, исключая из (15) и (16) параметр y, получаем уравнение граничной кривой области устойчивости.

Аналогично проводится исследование и при $a<0$, надо лишь иметь в виду, что при этом $P_C=1$ и поэтому, например, при $|b|<|a|$, когда амплитудно-фазовая характеристика заведомо не может охватывать точки $z=1$, получаем неустойчивость при любом τ, так как $N_C-P_C=0$, откуда $N_C=1$.

Амплитудно-фазовый метод может быть применен и при наличии чисто мнимых корней. В этом случае контур C_R несколько изменяется, так как корни на мнимой оси приходится обходить по полуокружностям достаточно малого радиуса (рис. 6).

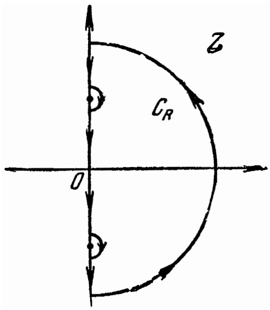

Рис. 6.

При наличии нескольких запаздываний основная идея метода не изменяется, но исследование, конечно, усложняется.

2. Метод D-разбиений. Нули характеристического квазиполинома $\varphi(z)$ при фиксированном отклонении τ являются непрерывными функциями его коэффициентов (предполагается неравенство нулю коэффициента при главном члене, что всегда выполнено для уравнений с запаздывающим аргументом).

Разобьем пространство коэффициентов на области гиперповерхностями, точкам которых соответствуют квазиполиномы, имеющие хотя бы один нуль на мнимой оси (случай $z=0$ не исключается). Такое разбиение называется D-разбиением.

Очевидно, что точкам каждой области такого D-разбиения соответствуют квазиполиномы с одинаковым числом нулей с положительной действительной частью (говоря о числе нулей, мы имеем в виду сумму их кратностей), так как изменение числа нулей с положительной действительной частью может произойти при непрерывном изменении коэффициентов лишь при переходе нуля через мнимую ось, т. е. при переходе точки в пространстве коэффициентов через границу области D-разбиения.

Итак, каждой области u_k D-разбиения можно отнести число k — число нулей с положительными действительными частями квазиполинома, определяемого точками этой области. Среди областей этого разбиения находятся и области u_0 (если они существуют), которым соответствуют квазиполиномы, не имеющие ни одного корня с положительной действительной частью. Эти области являются областями асимптотической устойчивости для решений соответствующих рассматриваемым квазиполиномам стационарных линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Таким образом, исследование на устойчивость методом D-разбиения в пространстве коэффициентов (или иных параметров, от которых могут зависеть коэффициенты и отклонения аргументов) проводится по следующей схеме: находим D-разбиение и выделяем из него области u_0. Для выделения области u_0, если она связна, достаточно убедиться, что хотя бы одна ее точка соответствует квазиполиному, все нули которого имеют отрицательную действительную часть.

Для выяснения того, как изменяется число корней с положительной действительной частью при переходе через некоторую границу D-разбиения, вычисляется дифференциал действительной части корня и по его знаку судят об уменьшении или увеличении числа корней с положительной действительной частью.

Если $\varphi(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) = 0$ — характеристическое уравнение, содержащее параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz = -\sum_{i=0}^{p} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}\,d\alpha_i, \qquad z = x + iy,$$

$$dx = -\operatorname{Re}\frac{\sum\limits_{i=0}^{p} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}\,d\alpha_i}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}.$$

Обычно dx вычисляется на некоторой границе D-разбиения при изменении лишь одного параметра, изменение которого гарантирует переход через рассматриваемую границу D-разбиения.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t - \tau) = 0, \tag{17}$$

уже частично исследованное амплитудно-фазовым методом на стр. 66—69. Характеристический квазиполином, соответствующий уравнению (17),

$$\varphi(z) = z + a + be^{-\tau z}, \tag{18}$$

имеет нулевой корень при

$$a + b = 0. \tag{19}$$

Эта прямая и является одной из линий, образующих границу D-разбиения.

Пусть теперь квазиполином имеет чисто мнимый корень iy:

$$iy + a + be^{-\tau iy} = 0$$

или

$$iy + a + b(\cos\tau y - i\sin\tau y) = 0.$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим уравнение границ D-разбиения в параметрической форме:

$$a + b\cos\tau y = 0,$$
$$y - b\sin\tau y = 0$$

или

$$b = \frac{y}{\sin\tau y},$$
$$a = -\frac{y\cos\tau y}{\sin\tau y}.$$

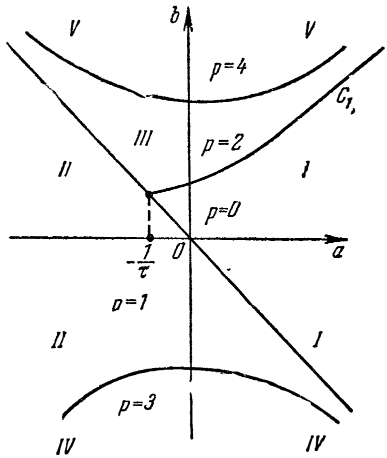

Рис. 7.

Эта линия и прямая (19) образуют D-разбиение, изображенное на рис. 7.

При $a > 0$ и $b = 0$ вырождившийся квазиполином не имеет корней с положительными действительными частями и, следовательно, область I является областью асимптотической устойчивости решений уравнения (17) (при $b \to 0$ действительные части всех корней квазиполинома, кроме одного, стремятся к $-\infty$ (см. стр. 44)). При переходе из области I в область II через прямую $a + b = 0$ появляется один корень с положительной действительной частью, так как из (18) получим, что на этой прямой $dx = -\frac{da}{1-b\tau}$ и, следовательно, при уменьшении a и постоянном b, $b < \frac{1}{\tau}$, действительная часть корня, равная нулю на этой прямой, получает положительное приращение. Если $b > \frac{1}{\tau}$, то при $da > 0$ и $dx > 0$, следовательно, в области III два корня имеют положительную действительную часть. Тот же результат можно получить и иным путем: на граничной кривой C_1 D-разбиения (рис. 7) (т. е. на кривой $a + b\cos\tau y = 0$, $y - b\sin\tau y = 0$, $0 < y < \frac{\pi}{\tau}$)

$$dx = -\operatorname{Re}\frac{da}{1-b\tau e^{-\tau z}} = -\operatorname{Re}\frac{da}{1-b\tau e^{-\tau i y}} =$$

$$= -\operatorname{Re}\frac{da}{1-b\tau(\cos\tau y - i\sin\tau y)} =$$

$$= -\frac{(1-b\tau\cos\tau y)\,da}{(1-b\tau\cos\tau y)^2 + b^2\tau^2\sin^2\tau y}.$$

На кривой C_1 корни чисто мнимы $z = iy$ и, принимая во внимание уравнение кривой C_1, получим при $b\tau > 1$ $\cos\tau y < 0$. Следовательно, знак dx опять противоположен знаку da. Таким образом, при переходе через границу C_1 из области I в III пара комплексных сопряженных корней приобретает положительную действительную часть. Совершенно аналогично проводится исследование и на других границах D-разбиения.

З а м е ч а н и е. Выделение области u_0 как в данном случае, так и в некоторых других может быть осуществлено с помощью теоремы Руше, которая утверждает, что если функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны на простом замкнутом контуре C и в области, им ограниченной, функция $\varphi(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке контура C и на контуре C $|\psi(z)| < |\varphi(z)|$, то в области, ограниченной контуром C, функции $\varphi(z)$ и $\varphi(z) + \psi(z)$ имеют одинаковое число нулей (см. любой курс теории аналитических функций).

Применяя теорему Руше к функциям $\varphi(z) = z + a$ и $\psi(z) = be^{-\tau z}$, заданным на контуре C_R, заметим, что при $|a| > |b|$ и при достаточно большом радиусе R полуокружности, входящей в состав контура C_R, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$

удовлетворяют условиям теоремы Руше, т. е. на контуре C_R

$$|z+a|>|be^{-\tau z}|, \text{ или } |z+a|>|b|e^{-\tau x}, \tag{20}$$

где $z=x+iy$. Действительно, на полуокружности при достаточно большом R справедливость неравенства (20) очевидна, так как $x>0$, а на мнимой оси

$$|z+a|\geqslant a, \qquad |be^{-\tau z}|=b$$

и, следовательно, при $|a|>|b|$,

$$|z+a|>|be^{-\tau z}|.$$

При $a>0$ функция $\varphi(z)$ не имеет нулей внутри контура C_R, следовательно, по теореме Руше там нет и нулей функции $z+a+be^{-\tau z}$ при любом R. Таким образом, та компонента D-разбиения (см. рис. 7), которая содержит область $a>|b|$, и является областью асимптотической устойчивости u_0.

Заметим еще, что при $|a|>|b|$ и $a<0$ из теоремы Руше следует неустойчивость решений уравнения (17).

Рассмотрим несколько примеров:

Пример 1. Найти в пространстве коэффициентов a и b область устойчивости решений уравнения

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t-1)+bx(t-1)=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2+(az+b)e^{-z}=0. \tag{21}$$

Находим границу D-разбиения. При $z=0$ $b=0$. При $z=iy$ $-y^2+(aiy+b)(\cos y-i\sin y)=0$, и, отделяя действительную и мнимую части, получим

$$-y^2+ay\sin y+b\cos y=0,$$

$$ay\cos y-b\sin y=0, \quad y\neq 0,$$

или

$$a=y\sin y, \qquad b=y^2\cos y, \qquad 0<y<\infty.$$

Эта кривая имеет спиралевидную форму (рис. 8). Подсчитывая число p корней с положительной действительной частью, получаем указанные на рисунке числа (при малых $|b|$ все корни, кроме корней, близких к корням вырожденного уравнения $z^2+aze^{-z}=0$, имеют, как видно из уравнения (21), большие по модулю отрицательные действительные части, так как $|be^{-z}|$ вне окрестности корней вырожденного уравнения не мал). При $b=0$ и $0<a<\frac{\pi}{2}$ нет корней с положительной действительной частью.

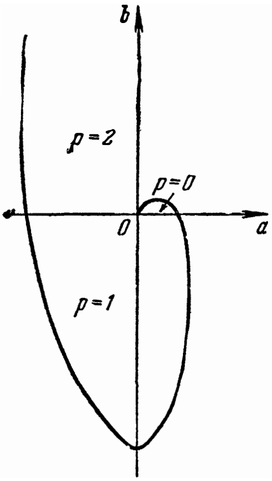

Рис. 8.

Действительная часть производной $\frac{\partial z}{\partial b}$ при $b=0$, $z=0$ равна $-\frac{1}{a}$ и, следовательно, при $a>0$ при переходе через ось $b=0$ при возрастании b теряется корень с положительной действительной частью.

Пример 2. Найти область устойчивости в пространстве коэффициентов a и b решений уравнения

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t-1)+bx(t)=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $z^2+aze^{-z}+b=0$. Полагая $z=0$, получаем $b=0$. При $z=iy$, $0<y<\infty$, находим $-y^2+aiy(\cos y-i\sin y)+b=0$, или

$$-y^2+ay\sin y+b=0,$$
$$ay\cos y=0.$$

Если $a\neq 0$, то из второго уравнения находим

$$\cos y=0, \qquad y=\frac{2k+1}{2}\pi \quad (k=0,\ 1,\ldots),$$

следовательно,

$$b=(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{2}\pi a+\left[\frac{2k+1}{2}\pi\right]^2$$

— прямые линии. На рис. 9 дано D-разбиение и указано число p корней с положительной действительной частью.

(При $a=0$, $b>0$, $z=\pm\sqrt{b}i$, $\operatorname{Re}\frac{\partial z}{\partial a}=-\frac{1}{2}\cos\sqrt{b}$, $\operatorname{Re}\frac{\partial z}{\partial a}<0$ при $0<b<\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2<b<\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2, \ldots$ $\operatorname{Re}\frac{\partial z}{\partial a}>0$ при $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2<b<\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2$, $\left(\frac{5}{2}\pi\right)^2<b<\left(\frac{7}{2}\pi\right)^2, \ldots$)

П р и м е р 3. Найти область устойчивости в пространстве коэффициентов a и b решений уравнения

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+bx(t-1)=0.$$

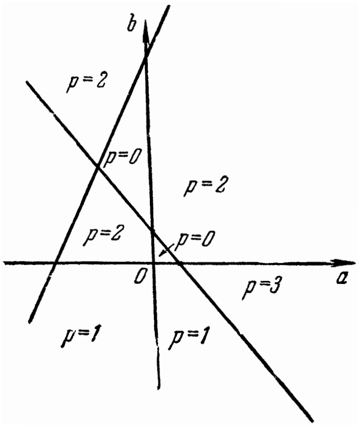

Рис. 9.

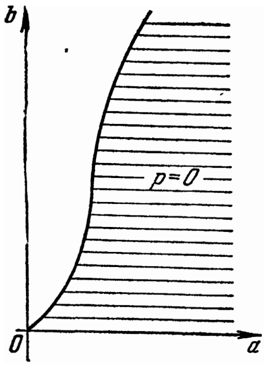

Рис. 10.

Характеристическое уравнение имеет вид $z^2+az+be^{-z}=0$. При $z=0$ $b=0$. При $z=iy$, $0<y<\infty$, получим

$$-y^2+aiy+b(\cos y-i\sin y)=0,$$

откуда

$$b\cos y-y^2=0, \quad ay-b\sin y=0$$

или

$$b=\frac{y^2}{\cos y}, \quad a=\frac{y\sin y}{\cos y}.$$

Область устойчивости изображена на рис. 10.

§ 4. Случай малого отклонения аргумента

Если в стационарном линейном уравнении

$$x^n(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}a_{kj}x^{(k)}(t-\tau_j)=0, \tag{22}$$

где $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_m$, запаздывание τ_m достаточно мало, то естественно ожидать, что многие свойства решений уравнения (22) будут близкими к свойствам решений уравнения без отклонений аргумента

$$x^n(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m}a_{kj}x^{(k)}(t)=0, \tag{23}$$

получающегося из (22) при $\tau_j=0$ ($j=1, 2,\ldots, m$).

В частности, справедливы следующие теоремы:

I. *Если решения уравнения* (23) *асимптотически устойчивы, то при достаточно малом* τ_m *асимптотически устойчивы и решения уравнения* (22).

II. *Если характеристическое уравнение для уравнения* (23) *имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью и, следовательно, решения уравнения* (23) *неустойчивы, то при достаточно малом* τ_m *неустойчивы и решения уравнения* (22).

III. *Если характеристическое уравнение для уравнения* (23) *имеет простой корень* $z=0$, *а остальные корни имеют отрицательную действительную часть, то при достаточно малом* τ_m *решение уравнения* (22) *устойчиво.*

Действительно, при достаточно малом τ_m все множители $e^{-\tau_j z}$ при $|z|<M$ сколь угодно близки к единице, следовательно, характеристический квазиполином $\psi(z)$ для уравнения (22) может быть представлен в виде

$$\psi(z)=\varphi(z)+\eta(z),$$

где $\varphi(z)$ — характеристический полином для уравнения (23), а $|\eta(z)|<\varepsilon$ в области $|z|<M$ при $\tau_m<\delta(\varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

Все корни полинома $\varphi(z)$ расположены внутри некоторого круга $|z|<M$. Применяя теорему Руше к сколь угодно малым контурам C_j, каждый из которых обходит некоторый

корень z_j полинома $\varphi(z)$, получим, что в сколь угодно малой окрестности каждого корня полинома $\varphi(z)$ при достаточно малом τ_m расположен корень квазиполинома $\psi(z)$. Принимая во внимание такое соответствие в расположении корней функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а также учитывая, что все остальные корни квазиполинома $\psi(z)$ при достаточно малом τ_m обладают сколь угодно большой по модулю отрицательной действительной частью (см. стр. 44—48), получим утверждение теорем I и II, так как при выполнении условий теоремы I все корни квазиполинома будут иметь отрицательные действительные части, а при выполнении условий теоремы II квазиполином будет иметь хотя бы один корень с положительной действительной частью.

Справедливость теоремы III следует из того, что при достаточно малом τ_m все корни квазиполинома $\psi(z)$, кроме одного, будут иметь отрицательную действительную часть, так как они или будут близки к корням полинома $\varphi(z)$ с отрицательной действительной частью, или их действительная часть будет отрицательна и сколь угодно велика по модулю. Один же корень квазиполинома, который должен быть близок к корню $z=0$ полинома $\varphi(z)$, будет также равен нулю, так как $\psi(0)=\varphi(0)=0$. Все сказанное справедливо и для систем уравнений с запаздывающим аргументом.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=0, \tag{24}$$

причем оценим, насколько должно быть мало τ, чтобы теоремы I, II и III были справедливы.

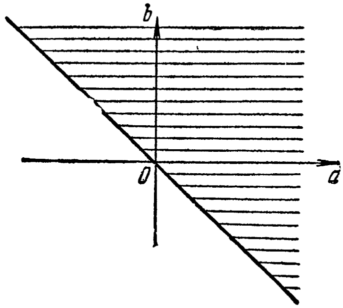

Рис. 11.

Область устойчивости для решений уравнения (24) изображена на рис. 7. Область устойчивости для решений уравнения

$$\dot{x}(t)+(a+b)x(t)=0 \tag{25}$$

определяется неравенством $a+b>0$ (см. рис. 11). Из сравнения этих областей следует:

1) Если решения уравнения (25) неустойчивы, то неустойчивы и решения уравнения (24) при любом τ;

2) Если решения уравнения (25) асимптотически устойчивы и $|b| < a$, то решения уравнения (24) асимптотически устойчивы при любом τ;

3) Если характеристическое уравнение для уравнения (25) имеет корень $z = 0$, т. е. $a + b = 0$, то решения уравнения (24) устойчивы при $b < 0$ при любом τ, а при $b > 0$ при $\tau < \frac{1}{b}$;

4) В случае асимптотической устойчивости решений уравнения (24) при $|b| > a$ оценка для τ может быть получена из уравнений граничной кривой C_1 (см. рис. 7)

$$a + b\cos\tau y = 0, \quad y - b\sin\tau y = 0,$$

$$0 < y < \frac{\pi}{\tau}.$$

Исключая y и разрешая относительно τ, получим

$$\tau = \frac{\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Итак, в рассматриваемом случае решение уравнения (24) асимптотически устойчиво при

$$0 \leqslant \tau < \frac{\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Для уравнений нейтрального типа столь полное соответствие в отношении устойчивости между решениями уравнений

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^{(k)}(t - \tau_j) = 0, \qquad a_{n0} \neq 0 \tag{26}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^{(k)}(t) = 0 \tag{27}$$

при малом τ_m наблюдается без дополнительных ограничений лишь в случае неустойчивости при наличии хотя бы одного корня с положительной действительной частью характеристического полинома $\varphi(z)$ для уравнения (27).

Отличие этого случая от случая уравнения с запаздывающим аргументом заключается в том, что асимптотические корни уравнения (26) при сколь угодно малых τ_j могут сохранять положительную действительную часть (см. стр. 44—45).

Например, решения уравнения

$$\dot{x}(t)+ax(t)-b\dot{x}(t-\tau)-abx(t-\tau)=0 \tag{28}$$

при $a>0$ и $b>1$ при сколь угодно малых τ, $\tau>0$, неустойчивы, так как его характеристическое уравнение $(z+a)(1-be^{-\tau z})=0$ имеет корни z_k с положительными действительными частями: $z_k=\frac{\ln b}{\tau}+\frac{2k\pi i}{\tau}$, в то время как при $\tau=0$ решения уравнения (28) асимптотически устойчивы: $x(t)=Ce^{-at}$.

Этот пример еще раз подчеркивает, что не всегда, даже при качественном исследовании, можно пренебрегать малым и даже сколь угодно малым отклонением аргумента.

§ 5. Случай большого отклонения аргумента

Наряду со стационарным линейным уравнением

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{kj}x^{(k)}(t-\tau_j)=0, \tag{29}$$

где $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_m$, $a_{n0}\neq 0$, рассмотрим уравнение без отклонений аргумента

$$\sum_{k=0}^{n}a_{k0}x^{(k)}(t)=0 \tag{30}$$

и их характеристические уравнения $\psi(z)=0$ и $\varphi(z)=0$, где

$$\psi(z)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{kj}z^ke^{-\tau_j z},$$

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{n}a_{k0}z^k.$$

Т е о р е м а. *Если полином $\varphi(z)$ имеет хотя бы один корень z_p с положительной действительной частью, то* *решения уравнения* (29) *при достаточно большом* τ_1 *неустойчивы.*

Доказательство. В окрестности корня $z = z_p$ модуль разности $\psi(z) - \varphi(z)$ сколь угодно мал при достаточно большом τ_1, так как при $\operatorname{Re} z > 0$ все слагаемые, содержащие множители $e^{-\tau_j z}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), сколь угодно малы. Следовательно, по теореме Руше при достаточно большом τ_1 квазиполином $\psi(z)$ имеет корень с положительной действительной частью, расположенный в сколь угодно малой окрестности нуля $z = z_p$ полинома $\varphi(z)$.

В случае асимптотической устойчивости решений уравнения (30) без добавочных предположений нельзя утверждать, что решения уравнения (29) будут при достаточно большом τ_1 асимптотически устойчивы, но все же и в этом направлении могут быть получены некоторые результаты, см. [108].

§ 6. Второй метод Ляпунова

Как известно, идея второго метода Ляпунова в применении к дифференциальным уравнениям без отклонений аргумента

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (31)$$

заключается в том, что подбирается функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (или $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$), играющая роль обобщенного расстояния до начала координат, и, если вдоль траекторий уравнения (31) эта функция не возрастает $\left(\frac{dV}{dt} \leqslant 0\right)$, то тривиальное решение $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) устойчиво.

Сформулируем точнее основные теоремы второго метода Ляпунова и выясним, возможно ли их обобщить на случай уравнений с отклоняющимся аргументом.

Теорема Ляпунова об устойчивости. *Тривиальное решение уравнения* (31) *устойчиво, если в окрестности начала координат при* $t \geqslant t_0$ *существует определенно положительная дифференцируемая функция* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, *производная которой в той же окрестности вдоль интегральных кривых уравнения* (31) *неположительна:*

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial V}{\partial t} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Напомним, что функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ называется определенно положительной, если

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \geqslant W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0, \qquad (32)$$

причем непрерывная функция W равна нулю лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Идея доказательства. По заданному $\varepsilon > 0$ выбираем столь малое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\sup_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \delta^2(\varepsilon)} V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_0) < \inf_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \varepsilon^2} W(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (33)$$

Тогда, выбрав произвольную начальную точку в δ-окрестности начала координат, в силу условий (32) и (33) получим траекторию, которая не может выйти из ε-окрестности начала координат при $t > t_0$, так как вдоль траектории функция V не может возрастать.

Замечание. Эта теорема допускает обращение, т. е. если тривиальное решение системы (31) устойчиво, то существует функция V, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова. В качестве такой функции V, если не требовать ее гладкости, можно взять

$$V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, t_0) = \sup_{t \geqslant t_0} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

где

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

является расстоянием от интегральной кривой, проходящей при $t = t_0$ через точку $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ до начала координат. Нетрудно построить и гладкую функцию Ляпунова.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. *Точка покоя* $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *системы уравнений* (31) *равномерно асимптотически устойчива, если существует функция* $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, *удов-*

летворяющая в окрестности начала координат при $t \geqslant t_0$ *следующим условиям*:

1) *функция* V *определенно положительна;*

2) *функция* V *допускает бесконечно малый высший предел* (*т. е.* $V \rightrightarrows 0$ *при* $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to 0$);

3) *производная функция* V *вдоль интегральных кривых определенно отрицательна, т. е.*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i \leqslant -W_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0,$$

где непрерывная функция W_1 *равна нулю лишь при* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Идея доказательства. По заданному $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\sup\limits_{U_\delta,\, t \geqslant t_0} V \leqslant \inf\limits_{S_\varepsilon} W$, где U_δ — δ — окрестность начала координат, а S_ε — сфера радиуса ε с центром в начале координат. В силу существования бесконечно малого высшего предела $\delta(\varepsilon)$ можно выбирать не зависящим от t_0. Траектория, начинающаяся в U_δ, не выйдет за пределы S_ε и должна войти в произвольную малую η-окрестность начала координат. Действительно, в противном случае вдоль траектории

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\alpha < 0, \tag{34}$$

где α — постоянная. Умножая (34) на dt и интегрируя в пределах от t_0 до t, $t > t_0$, получим

$$V - V_0 \leqslant -\alpha(t - t_0). \tag{35}$$

При достаточно большом t из (35) получим $V < 0$, что противоречит первому условию теоремы. Вследствие произвольности выбора η асимптотическая устойчивость доказана. Вследствие независимости $\delta(\varepsilon)$ от t_0 доказана и равномерная асимптотическая устойчивость.

Теорема допускает обращение.

Теорема Четаева о неустойчивости. *Тривиальное решение системы* (31) *неустойчиво, если в сколь угодно малой окрестности начала координат при* $t \geqslant t_0$

существует не зависящая от t область U, в которой функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяет условиям:

1) $V > 0$;

2) $\frac{dV}{dt} > 0$, причем в области $V \geqslant \alpha > 0$ $\frac{dV}{dt} \geqslant \beta > 0$;

3) *В окрестности начала координат при $t \geqslant t_0$ функция V ограничена.*

Идея доказательства. Выбираем начальную точку так, что $V(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, t_0) = \alpha_1 > 0$. Тогда траектория при $t > t_0$ в силу условия 2) остается в области $V \geqslant \alpha_1 > 0$ и, следовательно, вдоль траектории

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \beta_1 > 0. \tag{36}$$

Умножая (36) на dt и интегрируя в пределах от t_0 до t, $t > t_0$, получим

$$V - V_0 \geqslant \beta_1 (t - t_0). \tag{37}$$

Из (37) находим, что при $t \to \infty$ $V \to \infty$, что противоречит условию 3).

Следовательно, при $t \to \infty$ траектория покидает окрестность начала координат. Так как начальную точку в силу условия 1) можно было выбрать сколь угодно близко к началу координат, то неустойчивость доказана.

Очевидно формулировка и доказательство этих трех теорем почти не изменятся, если систему (31) заменить системой дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \ldots, x_1(t - \tau_n(t)), \ldots$$
$$\ldots, x_n(t - \tau_1(t)), \ldots, x_n(t - \tau_n(t))) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

где $\tau \geqslant \tau_i(t) \geqslant 0$, лишь

$$\frac{dV(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$$

будет функцией $n(n+1)+1$ аргументов

$$t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t - \tau_1(t)), \ldots, x_n(t - \tau_n)$$

и ее неположительность в первой теореме (или отрицательная определенность во второй теореме и положительность в теореме о неустойчивости) можно понимать как неположительность при независимо меняющихся аргументах или учесть, что $x_i(t-\tau_k(t))$ является одним из предшествующих значений функции $x_i(t)$.

Однако эффективность этих теорем для уравнений с отклоняющимся аргументом невелика (подробнее см. [78], [48], [50]).

Значительно плодотворнее оказалась идея Н. Н. Красовского (см. [24]), рассматривавшего вместо функций Ляпунова обладающие аналогичными свойствами функционалы.

Определение I. Функционал

$$V[x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s), t] = V[x(s), t],$$
$$-\tau \leqslant s \leqslant 0, \qquad t \geqslant t_0$$

(в дальнейшем s всегда изменяется в указанных пределах), называется определенно-положительным, если существует непрерывная функция $\varphi(r)$, такая, что $\varphi(r) > 0$ при $r \neq 0$ и

$$V[x(s), t] \geqslant \varphi(\| x(s) \|_\tau).$$

Аналогично определяется и определенно-отрицательный функционал.

Норма вектор-функции $x(s)$ может быть взята в различных пространствах. В дальнейшем нам понадобится норма в пространстве C_0 и L_2, но иногда, особенно часто для уравнений нейтрального типа, нужна и норма в пространстве C_1.

Введем обозначения:

$$\| x(s) \|_\tau = \sup_{\substack{-\tau \leqslant s \leqslant 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} | x_i(s) |;$$

$$\| x(s) \|_{\tau 2} = \left[\int_{-\tau}^{0} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(s)\, ds \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\| x \| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |;$$

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2};$$

U_ε — ε-окрестность в метрике C_0 точки покоя $x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \equiv 0$; S_ε — ε-сфера — граница U_ε.

Определение II. Функционал $V[x(s), t]$ имеет бесконечно малый высший предел, если существует непрерывная функция $\varphi_1(r) \geqslant 0$, $\varphi_1(0) = 0$ такая, что

$$V[x(s), t] \leqslant \varphi_1(\|x(s)\|_\tau).$$

Теорема об устойчивости. *Тривиальное решение системы* (38) *устойчиво, если существует непрерывный определенно-положительный функционал*

$$V[x(s), t] \quad (-\tau \leqslant s \leqslant 0), \qquad t \geqslant t_0,$$
$$\|x(s)\|_\tau < H, \qquad H > 0, \qquad V[0, t] = 0,$$

производная которого вдоль интегральных кривых неположительна

$$\frac{dV[\underset{\Phi}{x}(t+s), t]}{dt} \leqslant 0,$$

где $\underset{\Phi}{x}(t+s)$ — *решение уравнения* (38), *определяемое начальной вектор-функцией* $\Phi(t)$ $(t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0)$.

Доказательство. По заданному ε $(0 < \varepsilon < H)$ выбираем $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы

$$\inf_{\substack{\|x(s)\|_\tau = \varepsilon \\ t \geqslant t_0}} V[x(s), t] > \sup_{\|x(s)\|_\tau \leqslant \delta(\varepsilon)} V[x(s), t_0]. \tag{39}$$

Возможность выбора такого $\delta(\varepsilon)$ следует из того, что

$$\inf_{\|x(s)\|_\tau = \varepsilon} V[x(s), t] > 0$$

(в силу определенной положительности функционала $V[x(s), t]$ и непрерывности функционала $V[x(s), t_0]$ в окрестности $x(s) \equiv 0$).

При таком выборе $\delta(\varepsilon)$ любая начальная вектор-функция $\Phi(t)$, удовлетворяющая условию $\|\Phi(t_0 + s)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$, определяет решение $\underset{\Phi}{x}(t)$, $t \geqslant t_0$, для которого

$$\|\underset{\Phi}{x}(t)\|_\tau < \varepsilon,$$

так как вдоль траектории функция, в которую превращается функционал V вдоль интегральной кривой, не возрастает и, следовательно, $\|\underset{\Phi}{x}(t)\|_\tau$ не может в силу неравенства (39) стать равной ε.

Теорема I Н. Н. Красовского (об асимптотической устойчивости). *Тривиальное решение уравнения* (38) *равномерно асимптотически устойчиво, если существует непрерывный определенно-положительный функционал* $V[x(s), t]$ *при* $t \geqslant t_0$ *и* $\|x(s)\|_\tau < H$, $H > 0$, *допускающий бесконечно малый высший предел и такой, что производная от* $V[\underset{\Phi}{x}(t+s), t]$ *по* t *является определенно отрицательной.* $\underset{\Phi}{x}(t+s)$ — *решение уравнения* (38), *определяемое начальной вектор-функцией* $\Phi(t)$, *где* $\|\Phi(t_0+s)\|_\tau < \delta$ *и* $\delta > 0$ *достаточно мало.*

Доказательство. По заданному $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\varphi(\varepsilon) > \varphi_1(\delta)$ (см. определение I и II, стр. 84—85). Тогда вследствие неравенств

$$V[x(s), t] \geqslant \varphi\,(\|x(s)\|_\tau) \quad \text{и} \quad V[x(s), t] \leqslant \varphi_1\,(\|x(s)\|_\tau)$$

получим

$$\sup_{\|x(s)\|_\tau < \delta} V[x(s), t] < \inf_{\|x(s)\|_\tau = \varepsilon} V[x(s), t]. \tag{40}$$

При $\|\Phi(t_0+s)\|_\tau < \delta$ функция $V(t) = V[\underset{\Phi}{x}(t+s), t]$ является монотонно убывающей функцией t. Следовательно, траектория $x = \underset{\Phi}{x}(t)$ при всех $t \geqslant t_0$ остается в области $\|\underset{\Phi}{x}(t)\|_\tau < \varepsilon$, так как в противном случае нарушилось бы неравенство (40). Тем самым устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ доказана.

Зададим произвольно малое η и для него подберем $\delta_1(\eta) > 0$, так чтобы $\sup\limits_{\|x(s)\|_\tau < \delta_1(\eta)} V[x(s), t] < \inf\limits_{\|x(s)\|_\tau = \eta} V[x(s), t]$.

Допустим, что $\delta_1(\eta) \leqslant \|\underset{\Phi}{x}(t)\|_\tau \leqslant H$, приходим к противоречию, так как тогда

$$\frac{dV[\underset{\Phi}{x}(t), t]}{dt} \leqslant -\alpha < 0,$$

откуда

$$V[\underset{\Phi}{x}(t), t] - V[\underset{\Phi}{x}(t_0), t_0] \leqslant -\alpha(t - t_0) \tag{41}$$

при всех $t \geqslant t_0$, что противоречит неотрицательности функции

$V[\underset{\Phi}{x}(t), t]$ (из (41) $V[\underset{\Phi}{x}(t), t] < 0$ при $t > \frac{1}{\alpha}[V[\underset{\Phi}{x}(t_0), t_0] + \alpha t_0]$). Следовательно, существует точка

$$t^* < \frac{1}{\alpha}(V[\underset{\Phi}{x}(t_0)\ t_0] + \alpha t_0) \tag{42}$$

такая, что $\|\underset{\Phi}{x}(t^*)\|_\tau < \delta_1(\eta)$, а следовательно, при $t > t^* + \tau$ $\|\underset{\Phi}{x}(t)\|_\tau < \eta$.

В силу произвольности η асимптотическая устойчивость доказана. В силу независимости $\delta(\eta)$ от t_0 и от оценки (42) асимптотическая устойчивость равномерна.

Замечание I. Доказательство существенно не изменится, если в условии 3) заменить производную правым производным числом $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t}$ (см. [24]). Такая же замена возможна и в теореме об устойчивости.

Замечание II. Теорема I Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости (стр. 86) допускает обращение, т. е. если система уравнений (38) имеет равномерно асимптотически устойчивое тривиальное решение, то существует функционал $V[x(s), t]$, удовлетворяющий всем условиям теоремы I об асимптотической устойчивости и условию Липшица по первому аргументу:

$$|V[x_1(s), t] - V[x_2(s), t]| \leqslant N\|x_2(s) - x_1(s)\|_\tau.$$

Схема доказательства. Из равномерной асимптотической устойчивости следует существование непрерывной монотонно убывающей функции $\psi(t)$ такое, что $\lim\limits_{t \to \infty} \psi(t) = 0$, и удовлетворяющей неравенству $\|\underset{\Phi}{x}(t+s)\|_\tau \leqslant \psi(t - t_0)$ при $t \geqslant t_0$ для любой начальной функции $\|\Phi(t_0 + s)\|_\tau < \delta$. Существует также монотонно возрастающая непрерывно дифференцируемая функция $g(\psi)$ такая, что

1) $g(\psi) > 0$ при $\psi > 0$;

2) $\int\limits_0^\infty g(\psi(s))\, ds = N_0 < \infty$;

3) $\int\limits_0^\infty g'(\psi(s))\, e^{Ls} ds = N_1 < \infty$;

4) $g'(\psi(s))\, e^{Ls} < N_2$ при всех $s \geqslant 0$.

Доказательство существования таких функций ψ и g можно найти в курсах теории устойчивости для уравнений без отклонений аргумента при доказательстве теорем обращения (например, см. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, 1952 или в статье Х. Л. Массера, К теории устойчивости. Сб. переводов, Матем. **1**, 4 (1957), 81—104).

Нетрудно проверить, что функционал

$$V[x(s),\ t]=\int_t^{\infty} g(\| \underset{\Phi}{x}(\sigma+s)\|_\tau\, d\sigma+\sup_{t\leqslant\sigma<\infty} g(\|\underset{\Phi}{x}(\sigma+s)\|_\tau)$$

удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости с учетом замечания I, стр. 87 (подробнее см. [24]).

Для систем, решения которых устойчивы по показательному закону, можно дать более простую конструкцию функционала $V[x(s),\ t]$, обладающего к тому же некоторыми важными дополнительными свойствами.

Теорема. *Если решение системы* (38), *удовлетворяющей условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, асимптотически устойчиво по показательному закону*

$$\|\underset{\Phi}{x}(t+s)\|_\tau\leqslant B\,\|\Phi(t_0+s)\|_\tau\, e^{-\alpha(t-t_0)}\qquad \textit{при}\qquad t\geqslant t_0,$$

где t_0 — *начальная точка, то существует функционал* $V[x(s),\ t]$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

$$C_1\|x(s)\|_\tau\leqslant V[x(s),\ t]\leqslant C_2\|x(s)\|_\tau,$$

$$\lim_{\Delta t\to+0}\sup\frac{\Delta V}{\Delta t}\leqslant -C_3\|x(s)\|_\tau,$$

$$|V[x_1(s),t]-V[x_2(s),\ t]|\leqslant C_4\|x_1(s)-x_2(s)\|_\tau,$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ — *положительные постоянные.*

Идея доказательства. Легко проверить, что функционал

$$V[\Phi(s),\ t_0]=\int_{t_0}^{t_0+T}\|\underset{\Phi}{x}(\sigma+s)\|\,d\sigma+\sup_{t_0\leqslant\sigma\leqslant t_0+T}(\|\underset{\Phi}{x}(\sigma+s)\|_\tau),$$

где $T=\frac{1}{\alpha}\ln 2B$, удовлетворяет всем условиям теоремы (подробнее см. [24]).

При построении функционалов для конкретных уравнений иногда удобнее пользоваться метрикой пространства L_2:

$$\| x(s) \|_{\tau 2} = \left(\int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(s)\, ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В предположении, что в уравнении (38) правые части непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, может быть доказана следующая

Теорема II Н. Н. Красовского (об асимптотической устойчивости). *Решение уравнения* (38) *асимптотически устойчиво, если существует функционал* $V[x(s),\ t]$, *удовлетворяющий условиям:*

$$V[x(s),\ t] \leqslant W_1(\| x(0) \|) + W_2(\| x(s) \|_{\tau 2}), \tag{43}$$

$$V[x(s),\ t] \geqslant W(\| x(0) \|), \tag{44}$$

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \leqslant -\varphi(\| x(0) \|), \tag{45}$$

где $W_1(r)$ *и* $W_2(r)$ — *монотонно возрастающие функции при* $r \geqslant 0$, *причем* $W_1(0) = W_2(0) = 0$, $W(r)$ *и* $\varphi(r)$ — *непрерывные, положительные при* $r > 0$ *функции.*

Доказательство. По заданному $\varepsilon > 0$ выбираем число $\delta > 0$ так, чтобы $W_1(\delta) + W_2(\delta n \tau) < W(\varepsilon)$. Тогда в силу (43) и (44)

$$V[\Phi(s),\ t_0] < W(\varepsilon) \tag{46}$$

при $\| \Phi(t+s) \|_{\tau} < \delta$. Так как вдоль траектории функция $V[\underset{\Phi}{x}(t+s),\ t] = V(t)$ не возрастает, то из (46) следует

$$V[\underset{\Phi}{x}(t+s),\ t] < W(\varepsilon) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0,$$

а следовательно, в силу (44), $\| \underset{\Phi}{x}(t) \|_{\tau} < \varepsilon$. Тем самым доказана устойчивость решения, а асимптотическая устойчивость доказывается так же, как и в теореме I об асимптотической устойчивости (см. стр. 86).

Приведем несколько примеров.

1. Решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b(t)\, x(t-\tau) = 0,$$

где a и τ — постоянные, $\tau > 0$, $b(t)$ — непрерывная функция, асимптотически устойчиво, если $|b(t)| < a$.

Рассмотрим функционал

$$V[x(s),\ t] = x^2(t) + 2\alpha \int_{-\tau}^{0} x^2(t+s)\,ds, \qquad \alpha > 0.$$

При $\alpha > 0$ этот функционал удовлетворяет первым двум условиям теоремы II, стр. 89. Действительно,

1) $V[x(s), t] \leqslant Cr^2$ $(C > 1 + 2\alpha\tau)$, $r = \|x\|$ при достаточно большом C;

2) $$V[x(s),\ t] \geqslant r^2.$$

Проверим выполнения условия 3) $\frac{dV}{dt} \leqslant -W(r)$, $W(r) > 0$ при $r \neq 0$:

$$\frac{dV}{dt} = 2x(t)[-ax(t) - b(t)x(t-\tau)] + 2\alpha[x^2(t) - x^2(t-\tau)] =$$
$$= -2[(a-\alpha)x^2(t) + b(t)x(t)x(t-\tau) + \alpha x^2(t-\tau)].$$

Квадратичная форма, стоящая в квадратных скобках, положительно определена при $(a-\alpha)\alpha - \frac{b^2(t)}{4} > 0$. Максимум левой части достигается при $\alpha = \frac{a}{2}$. При этом получим $a > 0$ (так как $\alpha > 0$) и $a > |b(t)|$. В качестве функции $W(r)$ можно взять r^2.

Тем же методом можно получить достаточные условия асимптотической устойчивости и для системы

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}(t)\,x_j(t-\tau_k)$$

$$(i = 1,\ 2, \ldots,\ n).$$

При этом функционал V можно искать в следующем виде:

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \int_{-\tau_k}^{0} x_j^2(t+s)\,ds.$$

2. Исследуем на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\ddot{x}(t) + \varphi(\dot{x}(t),\ t) + f(x(t-\tau(t))) = 0, \tag{47}$$

где f — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\frac{f(x)}{x} > a > 0 \quad |f'(x)| < N \qquad \text{при} \qquad x \neq 0,$$

$\varphi(y, t)$ и $\tau(t)$ — непрерывные, периодические функции t, причем $\frac{\varphi(y, t)}{y} > b > 0$ при $y \neq 0$,

$$\tau(t) \geqslant 0, \qquad \tau(t) \leqslant \tau_0.$$

При $t > \tau_0$ (если $t_0 = 0$) уравнение (47) можно заменить системой

$$\dot{x}(t) = y,$$

$$\dot{y}(t) = -\varphi(y(t), t) - f(x(t)) + \int\limits_{-\tau(t)}^{0} f'(x(t+s))\, y(t+s)\, ds.$$

Функционал

$$V[x(s), y(s)] = 2\int\limits_0^x f(s)\, ds + y^2 + \frac{a^2}{\tau^2} \int\limits_{-\tau}^{0} \left(\int\limits_{s_1}^{0} y^2(s)\, ds \right) ds_1$$

при $\tau < \frac{a}{N}$ удовлетворяет условиям теоремы II об асимптотической устойчивости (стр. 89) (подробнее см. [24]).

В заключение этой главы заметим, что С. Н. Шиманов в [71] для уравнения с запаздывающим аргументом доказал теорему о неустойчивости, аналогичную теореме Четаева.

§ 7. Исследование на устойчивость по первому приближению

При исследовании на устойчивость тривиального решения системы

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), x_1(t-\tau_1(t)), \ldots x_n(t-\tau_1(t)), \ldots$$
$$\ldots, x_1(t-\tau_m(t)), \ldots, x_n(t-\tau_m(t))) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (48)$$

в предположении дифференцируемости правых частей по всем аргументам, начиная со второго в окрестности нулевых значений тех же аргументов при $t \geqslant t_0$, часто целесообразно выделить линейную часть и представить эту систему в виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_{ijl}(t)\, x_j(t - \tau_l(t)) + R_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t),$$

$$x_1(t-\tau_1(t)), \ldots, x_n(t-\tau_1(t)), \ldots, x_1(t-\tau_m(t)), \ldots, x_n(t-\tau_m(t)))$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \quad \tau_0 \equiv 0, \quad \tau_l(t) \geqslant 0, \tag{49}$$

где R_i имеют порядок выше первого относительно совокупности всех аргументов, начиная со второго.

Во многих случаях исследование на устойчивость нулевого решения системы (49) эквивалентно исследованию на устойчивость нулевого решения более простой линейной системы

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_{ijl}(t)\, x_j(t - \tau_l(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{50}$$

называемой системой первого приближения к системе (49).

Случай переменных коэффициентов и переменных запаздываний $\tau_l(t)$ в линейной части системы (49) еще недостаточно разработан, весьма детально изучены лишь системы (49), для которых система (50) имеет постоянные коэффициенты и постоянные запаздывания. Такие системы называются стационарными в первом приближении.

Доказаны следующие теоремы, аналогичные теоремам Ляпунова:

Теорема I. *Нулевое решение системы*

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_{ijl} x_j(t - \tau_l) +$$

$$+ R_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1(t - \tau_1), \ldots, x_n(t - \tau_m)) \tag{51}$$

асимптотически устойчиво, если:

1) *все корни характеристического уравнения для системы первого приближения* (49)

$$\left| \sum_{l=0}^{m} A_l e^{-k\tau_l} - kE \right| = 0, \tag{52}$$

где матрицы $A_l = (a_{ijl})$, l — *фиксировано, имеют отрицательные действительные части*;

$$2) \qquad |R_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_{n(m+1)})| \leqslant \alpha \sum_{i=1}^{n(m+1)} |u_i|,$$

где α *достаточно малая постоянная, все* $|u_i|$ *достаточно малы,* $|u_i| < H$ *и* $t \geqslant t_0$.

Теорема II. *Если хотя бы один корень характеристического уравнения* (52) *имеет положительную действительную часть и выполнено условие* 2) *предыдущей теоремы, то тривиальное решение уравнения* (51) *неустойчиво.*

Замечание I. Вместо условия 2) можно потребовать, чтобы R_i были в некотором смысле малы в среднем (см. [24], [7]).

Замечание II. Если некоторые корни характеристического уравнения имеют нулевую действительную часть, а у остальных действительная часть отрицательна, то возникает так называемый критический случай, при наступлении которого на устойчивость начинают влиять нелинейные члены R_i. Критический случай изучался С. Н. Шимановым (см. [72], [73], [74]), который в случае одного нулевого корня или пары чисто мнимых корней характеристического уравнения доказал теоремы, сходные с аналогичными теоремами для уравнений без отклонений аргумента.

Замечание III. Теоремы I и II справедливы и для уравнений нейтрального типа, но условие 1) заменяется требованием: все

$$\operatorname{Re} k_i \leqslant -\gamma < 0, \qquad \text{где} \qquad \gamma \text{ — постоянная.}$$

Доказательство теоремы I проводилось различными методами. Наиболее простая и естественная идея лежит в основе следующего метода Н. Н. Красовского.

Условие 1) теоремы I обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость по показательному закону для тривиального решения системы уравнений первого приближения, следовательно (см. теорему на стр. 88), для системы (50) с постоянными коэффициентами и постоянными запаздываниями существует функционал $V[x(s), t]$, удовлетворяющий условиям:

$$1) \qquad C_1 \| x(s) \|_\tau < V[x(s), t] \leqslant C_2 \| x(s) \|_\tau; \tag{53}$$

$$2) \qquad \lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \leqslant -C_3 \| x(s) \|_\tau; \tag{54}$$

$$3) \quad | V[x_2(s), t] - V[x_1(s), t] | \leqslant C_4 \| x_2(s) - x_1(s) \|_\tau. \tag{55}$$

Нетрудно проверить, что этот функционал при достаточно малом α будет удовлетворять условиям теоремы об асимптотической устойчивости (теорема I, стр. 86) и для системы (51).

Замечание. Теорема остается справедливой и для аналогичных уравнений с непрерывно распределенным запаздыванием. Доказательство не изменяется.

Пример 1. Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения

$$\dot{x}(t) + 3 \sin x(t) + 2x(t - \tau) = 0. \tag{56}$$

Уравнение первого приближения имеет вид

$$\dot{x}(t) + 3x(t) + 2x(t - \tau) = 0.$$

Его тривиальное решение асимптотически устойчиво при любом $\tau > 0$ (см. стр. 67), следовательно, решение уравнения (56) асимптотически устойчиво при любом τ, $0 < \tau < \infty$.

Пример 2. Исследовать на устойчивость решение $x \equiv 0$ уравнения

$$\dot{x}(t) + 2x(t) - \operatorname{sh} x(t) - 2x(t - \tau) + \cos x(t - \tau) = 1, \tag{57}$$

$\tau > 0$. Уравнение первого приближения

$$\dot{x}(t) + x(t) - 2x(t - \tau) = 0$$

имеет корни с положительной действительной частью при любом $\tau > 0$ (см. стр. 71), следовательно, решение $x \equiv 0$ уравнения (57) неустойчиво.

§ 8. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

Решение $x_i \equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ системы уравнений

$$\dot{x}_i(t)=f_i(t, x_j(t-\tau_k(t))) \quad (i, j=1, 2, \ldots, n; \; k=1, 2, \ldots, m) \tag{58}$$

называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для каждого $\varepsilon>0$ существуют $\delta_1(\varepsilon)>0$ и $\delta_2(\varepsilon)>0$ такие, что решения возмущенной системы

$$\dot{x}_i(t)=f_i(t, x_j(t-\tau_k(t)))+R_i(t, x_j(t-\tau_k(t))) \quad (i, j=1, 2, \ldots, n; \; k=1, 2, \ldots, m) \tag{59}$$

удовлетворяют неравенствам

$$|x_i(t)|<\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n), \quad t \geqslant t_0,$$

при

$$|R_i|<\delta_1(\varepsilon), \quad |x_i(s)|<\delta_2(\varepsilon), \quad -\tau \leqslant s \leqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где в R_i аргументы $|x_j(t-\tau_k(t))| \leqslant H$, $H>0$.

Теорема. *Если решение* $x_i \equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *системы* (58) *равномерно асимптотически устойчиво, и функции* f_i *удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, то это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Схема доказательства. Существует для системы (58) функционал V, удовлетворяющий условиям теоремы об асимптотической устойчивости (см. стр. 87). Этот функционал вне сколь угодно малой окрестности тривиального решения в силу отрицательной определенности $\lim\limits_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t}$ удовлетворяет для системы (58) условию $\lim\limits_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \leqslant -\alpha<0$, где α — постоянная.

Рассматривая тот же функционал вдоль решений возмущенной системы (59) при достаточно малом δ_2, получим

$\lim\limits_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \leqslant -\alpha+K \sup |R_i|$, где K — постоянная, $K>0$.

Выбирая

$$\delta_1 < \frac{\alpha}{2K}, \tag{60}$$

получим $\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \leqslant -\frac{\alpha}{2} < 0$ и, следовательно, в силу отрицательности $\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t}$ вне сколь угодно малой окрестности тривиального решения, траектория не может выйти за пределы достаточно малой окрестности тривиального решения, а это и означает устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Замечание I. Если функции $f_i(t, x_j)$ и $\tau_k(t)$ являются периодическими функциями t некоторого периода T (или, в частности, не зависят от t), то асимптотическая устойчивость всегда равномерная.

Замечание II. Иногда в понятие устойчивости при постоянно действующих возмущениях включают и устойчивость по отношению к возмущениям отклонений аргумента, т. е. в возмущенной системе (59) допускают малые изменения функций $\tau_k(t)$. В этом случае система (59) принимает вид

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_j(t - h_k(t))) + R_i(t, x_j(t - h_k(t)))$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{все} \quad h_k(t) \geqslant 0$$

и все разности $|h_k(t) - \tau_k(t)| < \delta_3(\varepsilon)$, $\delta_3 > 0$.

При этом формулировка теоремы и схема ее доказательства не изменяются, лишь в оценке (60) появляются новые слагаемые, сколь угодно малые при достаточно малом δ_3. Подробнее см. [24].

Пример 1. Устойчиво ли при постоянно действующих возмущениях тривиальное решение уравнения

$$\dot{x}(t) + 2x(t) + x(t - \tau) = 0, \quad \tau > 0?$$

Тривиальное решение рассматриваемого уравнения равномерно асимптотически устойчиво (см. стр. 67 и замечание I на стр. 96), следовательно, оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

ГЛАВА IV

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

§ 1. Некоторые свойства периодических решений и теоремы существования

Пусть система уравнений с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) = F(t,\ x(t),\ x(t-\tau_1),\ \ldots,\ x(t-\tau_m),\ \dot{x}(t-\tau_1),\ \ldots \\ \ldots,\ \dot{x}(t-\tau_m)), \qquad (1)$$

где $x(t)$ и F — вектор-функции, все τ_i постоянные, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m$, имеет периодическое решение $x_1(t)$ периода T. Подставляя $x_1(t)$ в (1), получим, что в силу периодичности с периодом T левой части этого тождества:

$$F(t+T,\ x_1(t+T),\ x_1(t+T-\tau_1),\ \ldots \\ \ldots,\ x_1(t+T-\tau_m),\ \dot{x}_1(t+T-\tau_1),\ \ldots,\ \dot{x}_1(t+T-\tau_m)) \equiv \\ \equiv F(t,\ x_1(t),\ x_1(t-\tau_1),\ \ldots,\ x_1(t-\tau_m),\ \dot{x}_1(t-\tau_1),\ \ldots \\ \ldots,\ \dot{x}_1(t-\tau_m))$$

или

$$F(t+T,\ x_1(t),\ x_1(t-\tau_1),\ \ldots,\ x_1(t-\tau_m),\ \dot{x}_1(t-\tau_1),\ \ldots \\ \ldots,\ \dot{x}_1(t-\tau_m)) \equiv F(t,\ x_1(t),\ x_1(t-\tau_1),\ \ldots \\ \ldots,x_1(t-\tau_m),\ \dot{x}_1(t-\tau_1),\ \ldots,\ \dot{x}_1(t-\tau_m)),$$

т. е. в случае существования периодического решения периода T вектор-функция F должна быть вдоль этого решения периодической вектор-функцией t периода T.

Следствие I. *Уравнение*

$$\dot{x}(t) = F_1(x(t),\ x(t-\tau_1),\ \ldots,\ x(t-\tau_m),\ \dot{x}(t-\tau_1),\ \ldots \\ \ldots,\ \dot{x}(t-\tau_m)) + F_2(t)$$

может иметь периодические решения лишь в случае периодичности вектор-функции $F_2(t)$, причем период решения может быть лишь равен или кратен периоду функции $F_2(t)$.

Следствие II. *Уравнение*

$$\dot{x}(t)=F_1(x(t),\ x(t-\tau_1),\ \ldots,\ x(t-\tau_m),\ \dot{x}(t-\tau_1),\ \ldots \\ \ldots,\ \dot{x}(t-\tau_m))+F_2(t)+\mu F_3(t,\ x(t),\ x(t-\tau_1),\ \ldots \\ \ldots,\ x(t-\tau_m),\ \dot{x}(t-\tau_1),\ \ldots,\ \dot{x}(t-\tau_m))$$

при достаточно малом μ может иметь периодические решения лишь в случае периодичности вектор-функции $F_2(t)$, и их периоды могут быть лишь равными, или кратными периоду функции $F_2(t)$.

Замечание. Теорема отнюдь не утверждает, что уравнение (1) может иметь периодические решения лишь в случае периодичности вектор-функции F в (1) по первому аргументу, функция F должна стать периодической функцией t лишь вдоль периодического решения. Например, система

$$\dot{x}(t)=\cos t+[x^2(t)+y^2(t)-1]\,\varphi_1(t,\ x(t),\ y(t), \\ x(t-\tau),\ y(t-\tau)),$$
$$\dot{y}(t)=-\sin t+[x^2(t)+y^2(t)-1]\,\varphi_2(t,\ x(t),\ y(t), \\ x(t-\tau),\ y(t-\tau))$$

имеет периодическое решение $x=\sin t$, $y=\cos t$ при любом выборе непрерывных функций φ_1 и φ_2, независимо от того, будут они периодическими по t или не будут.

Теорема I. *Периодическое решение $x(t)=\underset{\varphi}{\Psi}(t)$ уравнения*

$$\dot{x}(t)=F(t,\ x(t),\ x(t-\tau_1(t)),\ \ldots \\ \ldots,\ x(t-\tau_m(t)),\ \dot{x}(t-\tau_1(t)),\ \ldots,\ x(t-\tau_m(t))), \tag{2}$$

где непрерывная вектор-функция F является периодической функцией первого аргумента периода T и все отклонения аргумента $\tau_i(t)$ также являются непрерывными периодическими функциями того же периода (случай постоянных $\tau_i(t)$, конечно, не исключается), начальное множество E_{t_0} является отрезком $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$, определяется начальной вектор-функцией, являющейся периодическим продолжением решения $\Psi(t)$ на начальное множество.

• Доказательство. Выберем целое число n так, чтобы

$$\max_{\substack{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} \tau_i(t) < nT. \tag{3}$$

Решение $\Psi(t)$ при $t \geqslant t_0 + nT$ определяется начальной вектор-функцией $\Psi(t)$, заданной на начальном множестве E_{t_0+nT}, все точки которого удовлетворяют неравенству $t > t_0$. Следовательно, при $t \geqslant t_0 + nT$

$$\dot{\Psi}(t) \equiv F(t, \Psi(t), \Psi(t - \tau_1(t)), \ldots, \Psi(t - \tau_m(t)),$$
$$\dot{\Psi}(t - \tau_1(t)) \ldots, \dot{\Psi}(t - \tau_m(t))).$$

Это тождество в силу периодичности левой и правой частей не нарушится при замене t на $t - nT$, если считать в правой части вектор-функцию $\Psi(t)$ периодически продолженной на E_{t_0}.

Замечание. Теорема I не утверждает, что только периодическое продолжение периодического решения $\Psi(t)$ на начальное множество определяет это решение. Вполне возможно, что решение $\Psi(t)$ определяется и иными начальными вектор-функциями. Например, периодическое решение $x(t) = \sin t$ уравнения

$$\dot{x}(t) = \cos t + (x(t) - \sin t) f(x(t - \tau)),$$

где f — непрерывная функция, постоянная $\tau > 0$, определяется не только начальной функцией $x(t) = \sin t$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$, но и любой другой непрерывной начальной функцией $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию

$$\varphi(t_0) = \sin t_0.$$

Теорема II. *Если в уравнении с запаздывающим аргументом*

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \ldots, x(t - \tau_m(t))) \tag{4}$$

$0 \leqslant \tau_i(t) \leqslant M$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *и вектор-функция* F m *раз дифференцируема, причем случай* $m = \infty$ *не исключен, то периодическое решение этого уравнения дифференцируемо* $m + 1$ *раз.*

Доказательство. Как указано на стр. 14, решения уравнения с запаздывающим аргументом сглаживаются. Поэтому и периодическое решение при достаточно большом t будет

$m+1$ раз дифференцируемо, а в силу периодичности это решение обладает тем же свойством при любых t.

Теорема III. *Если существует равномерно асимптотически устойчивое решение* $\underset{\Phi}{x}(t)$ *уравнения* (4), *такое, что при* $t > T_1 \, \| \underset{\Phi}{x}(t) \| \leqslant N$ *и область влияния этого решения* $\underset{\Phi}{x}(t)$ *содержит множество начальных вектор-функций, удовлетворяющих условию* $\| \Phi \| \leqslant N + \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$, *то существует периодическое решение уравнения* (4), *начальная вектор-функция* $\Phi_1(t)$ *которого удовлетворяет неравенству*

$$\| \Phi_1 \| \leqslant N + \varepsilon.$$

Приводим лишь схему доказательства. Отображение $\Phi(t) \rightarrow \underset{\Phi(t)}{x}(t+nT)$, $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ множества $\| \Phi \| \leqslant N + \varepsilon$ при достаточно большом n удовлетворяет условиям принципа Шаудера, следовательно, при этом отображении существует неподвижная точка, т. е. существует вектор-функция, переходящая сама в себя. Эта вектор-функция и определяет периодическое решение.

§ 2. Периодические решения стационарных линейных однородных уравнений

Если стационарное линейное однородное уравнение с запаздывающим аргументом

$$x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x^{(k)}(t - \tau_j) = 0 \tag{5}$$

имеет чисто мнимые корни характеристического уравнения $\pm p_1 i, \pm p_2 i, \ldots, \pm p_s i$, то, взяв действительные и мнимые части решений $e^{p_1 it}, e^{p_2 it}, \ldots, e^{p_s it}$, получим действительные периодические решения вида

$$\begin{gathered} \cos p_1 t, \ \cos p_2 t, \ldots, \cos p_s t, \\ \sin p_1 t, \ \sin p_2 t, \ldots, \sin p_s t. \end{gathered}$$

Линейные комбинации этих периодических решений с соизмеримыми частотами дают всевозможные периодические решения уравнения (5) (случай $p_j = 0$ не исключается).

При $m=1$, т. е. при наличии одного запаздывания, число различных собственных частот p_j уравнения (5) не превосходит n. Действительно, характеристический квазиполином в этом случае имеет вид

$$P_n(z)+e^{-\tau z}Q_{n-1}(z)=0, \tag{6}$$

где $P_n(z)$ — многочлен степени n, а $Q_{n-1}(z)$ — многочлен степени не выше $n-1$. Предположив, что это уравнение имеет чисто мнимые корни $z=iy$, получим

$$P_n(iy)+Q_{n-1}(iy)e^{-\tau iy}=0, \tag{7}$$

откуда, в частности, следует, что y является корнем алгебраического уравнения степени $2n$:

$$|P_n(iy)|^2=|Q_{n-1}(iy)|^2. \tag{8}$$

Так как чисто мнимые корни уравнения (6) могут появляться лишь сопряженными парами: $z=\pm iy_k$ (за исключением корня $y=0$), то уравнение (8) имеет не более n различных пар корней $\pm y_k$ и, следовательно, уравнение (5) имеет не более n собственных частот.

У линейного однородного стационарного уравнения n-го порядка нейтрального типа с одним отклонением аргумента

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k x^{(k)}(t)+b_k x^{(k)}(t-\tau))=0,\ a_n\neq 0 \tag{9}$$

число собственных частот также, вообще говоря, не превосходит n, однако возможен исключительный случай, при наступлении которого число собственных частот может стать бесконечным. Действительно, характеристическое уравнение для (9) имеет вид

$$P_n(z)+Q_n(z)e^{-\tau z}=0. \tag{10}$$

Полагая $z=iy$, получим

$$P_n(iy)+Q_n(iy)e^{-\tau iy}=0, \tag{11}$$

откуда следует, что y является корнем алгебраического уравнения степени не выше $2n$:

$$|P_n(iy)|^2=|Q_n(iy)|^2. \tag{12}$$

Так как мнимые корни уравнения (10) могут появляться лишь сопряженными парами $\pm iy_k$ (кроме корня $y=0$), то существует не более n пар действительных корней уравнения (12), т. е. не более n собственных частот y_k. Однако возможен исключительный случай, наступающий при обращении уравнения (12) в тождество (что невозможно для уравнения (8)).

Докажем, что в этом исключительном случае характеристическое уравнение (10) имеет счетное множество чисто мнимых корней. Полагая в (10) $z = iy$, получим

$$e^{i\tau y} = -\frac{Q_n(iy)}{P_n(iy)}. \tag{13}$$

При $y \to \infty$ вдоль действительной оси точка $e^{i\tau y}$ вращается по единичной окружности $|z| = 1$, а точка $-\frac{Q_n(iy)}{P_n(iy)}$, расположенная в силу тождества $|P_n(iy)| \equiv |Q_n(iy)|$ также на единичной окружности, приближается к точке $z = 1$ или $z = -1$; так, в силу (12) коэффициенты при старших членах многочленов $P_n(iy)$ и $Q_n(iy)$ или совпадают, или отличаются лишь знаком. Не исключена возможность того, что $-\frac{Q_n(iy)}{P_n(iy)} = \pm 1$ при всех y. Следовательно, уравнение (13) имеет бесконечное множество действительных корней y_k, причем $y_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Этим корням соответствуют точки $e^{-\tau i y_k}$ на единичной окружности, лежащие вблизи точек $z = 1$, или $z = -1$ и приближающиеся к ним при $k \to \infty$. Поэтому при достаточно большом k при соответствующей нумерации корней

$$y_{k+1} - y_k \approx \frac{2\pi}{\tau}.$$

Заметим, наконец, что уравнения (5) или (9) (предполагается, что случай не исключительный), имеющие решение $x = C$, имеют не более $n - 1$ отличных от 0 собственных частот.

Пример 1. Характеристический квазиполином уравнения

$$\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t - \tau) + a^2[x(t) + x(t - \tau)] = 0$$

имеет лишь чисто мнимые корни, причем при $|a| \neq \frac{(2k+1)\pi}{\tau}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ все они простые.

Пример 2.

$$\dot{x}(t) - ax(t) + \dot{x}(t - \tau) + ax(t - \tau) = 0, \qquad a \neq 0.$$

Условие (12) выполнено — существует бесконечное множество собственных частот, причем эти частоты не кратны какой-нибудь одной.

Замечание. Если уравнение (7) записать в виде $e^{-\tau iy} = -\frac{P_n(iy)}{Q_{n-1}(iy)}$, то так как модуль правой части неограниченно возрастает при $y \to \infty$, а модуль левой части при действительных y остается равным единице, то при $y > N$ (N легко оценить), уравнение (7) не имеет действительных корней.

§ 3. Периодические решения линейных неоднородных уравнений со стационарной однородной частью

Периодические решения уравнения

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{ij} x^{(j)}(t - \tau_i) = f(t), \tag{14}$$

где все a_{ij} и τ_i — постоянные $a_{0n} \neq 0$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m$, могут существовать лишь в случае периодичности функции $f(t)$ (см. стр. 97—98), причем период решений может быть лишь равен или кратен периоду функции $f(t)$.

Предположим, что $f(t)$ при $t \geqslant t_0$ является непрерывной периодической функцией периода 2π, разлагающейся в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_p e^{pit} \tag{15}$$

(можно, конечно, записать ряд Фурье и в действительной форме

$$f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (\beta_p \cos pt + \gamma_p \sin pt),$$

однако, вычисление коэффициентов решения уравнения при этом несколько усложнится).

Если период функции $f(t)$ равен T, то, после преобразования $t = \frac{T}{2\pi} t_1$, получим уравнение, правая часть которого имеет период 2π по переменному t_1. Если характеристический квазиполином

$$\varphi(z)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{ij}z^j e^{-\tau_i z}$$

не имеет чисто мнимых целочисленных корней, т. е. случай не резонансный, то, пользуясь принципом наложения, ищем для каждого слагаемого в (15) решение в виде $A_p e^{pit}$, $A_p=\frac{\alpha_p}{\varphi(pi)}$ и, суммируя их, получаем периодическое решение

$$x(t)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_p}{\varphi(pi)}e^{pit}. \tag{16}$$

Ряд (16) сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, так как коэффициенты этого ряда $\frac{\alpha_p}{\varphi(pi)}$ по сравнению с коэффициентами α_p равномерно сходящегося ряда (15) содержат еще в знаменателе $\varphi(pi)=O(p^n)$ при действительном $p\to\infty$.

Если хотя бы один корень квазиполинома $\varphi(z)$ близок к mi, где m — целое число, то при $\alpha_m\neq 0$ или $\alpha_{-m}\neq 0$ наблюдается явление резонанса: коэффициент $\frac{\alpha_m}{\varphi(mi)}$ резко возрастает по модулю по сравнению со случаем отсутствия корней у $\varphi(z)$, близких к mi.

Если один из корней квазиполинома $\varphi(z)$ равен mi и $\alpha_m\neq 0$ или $\alpha_{-m}\neq 0$, то периодических решений не существует.

Если один из корней квазиполинома $\varphi(z)$ равен mi и $\alpha_m=\alpha_{-m}=0$ и других чисто мнимых целочисленных корней нет, то существует двупараметрическое семейство периодических решений вида (16), но только коэффициенты при e^{imt} и e^{-imt} в (16) остаются произвольными.

Пример 1. Уравнение

$$\dot{x}(t)+ax(t)+bx(t-\tau)=f(t), \tag{17}$$

где

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt),$$

в нерезонансном случае имеет лишь одно периодическое решение

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2(a+b)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[\alpha_n (a + b \cos n\tau) - \beta_n (n - b \sin n\tau)] \cos nt}{(a + b \cos n\tau)^2 + (n - b \sin n\tau)^2} + \frac{[\beta_n a + b \cos n\tau) - \beta_u (n - b \sin n\tau)] \sin nt}{(a + b \cos n\tau)^2 + (n - b \sin n\tau)^2} \right\}. \quad (18)$$

Резонанс возможен лишь на одной частоте. В резонансном случае, т. е. если характеристическое уравнение $z + a + be^{-\tau z} = 0$ имеет целочисленные чисто мнимые корни $\pm mi$, периодические решения существуют лишь при

$$\alpha_m = \int_0^{2\pi} f(t) \cos mt\, dt = 0 \quad \text{и} \quad \beta_m = \int_0^{2\pi} f(t) \sin mt\, dt = 0$$

и имеют вид (18), но коэффициентами при $\cos mt$ и $\sin mt$ являются произвольные постоянные.

Пример 2. Уравнение

$$\ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_2 x(t) + b_1 \dot{x}(t-\tau) + b_2 x(t-\tau) = f(t), \quad (19)$$

где

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt),$$

в нерезонансном случае имеет лишь одно периодическое решение

$$x(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos nt + D_n \sin nt), \quad (20)$$

где

$$C_0 = \frac{\alpha_0}{a_2 + b_2}, \qquad C_n = \frac{P_n \alpha_n - Q_n \beta_n}{P_n^2 + Q_n^2},$$

$$D_n = \frac{P_n \beta_n + Q_n \alpha_n}{P_n^2 + Q_n^2},$$

$$P_n = a_2 + b_1 n \sin n\tau + b_2 \cos n\tau - n^2,$$
$$Q_n = a_1 n + b_1 n \cos n\tau - b_2 \sin n\tau.$$

Резонанс возможен на одной или двух частотах (см. стр. 101).

Замечание. Периодическое решение уравнения (17) или (19) проще записывается в комплексной форме (16), но в практических задачах часто удобнее пользоваться записью в действительной форме (18) и (20).

Пример 3. Уравнение

$$\dot{x}(t) - x(t) - \dot{x}(t-2\pi) + x(t-2\pi) = f(t)$$

иллюстрирует исключительный случай, упомянутый на стр. 102. Резонанс наблюдается на всех целочисленных частотах. При любом выборе периодической функции $f(t)$ с периодом 2π (за исключением $f(t) \equiv 0$) наблюдается явление резонанса и периодического решения не существует.

§ 4. Периодические решения квазилинейных уравнений

Для нахождения периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений без отклонений аргумента применяются весьма разнообразные методы: метод разложения по степеням малого параметра, асимптотические методы Крылова и Боголюбова, метод последовательных приближений, метод гармонического баланса и другие.

Все эти методы при некоторых ограничениях могут быть применены и к уравнениям с отклоняющимся аргументом (см. [51], [52], [70], [78]). Применяются также и другие методы (см. [47], [88]).

Мы остановимся лишь на методе разложения решения по степеням малого параметра, полное обоснование которого было дано в работах Н. Н. Красовского ([25]).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = f(t) + \mu F(t, x(t), x(t-\tau), \mu). \quad (21)$$

Предположим, что: 1) непрерывные функции f и F являются периодическими функциями t с периодом 2π; 2) все корни характеристического уравнения $z + a + be^{-\tau z} = 0$ имеют отрицательную действительную часть; 3) F является аналитической функцией своих аргументов, начиная со второго в окрестности периодического решения $\varphi(t)$ порождающего уравнения $\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = f(t)$ и при достаточно малом $|\mu|$; 4) a, b и τ — постоянные, $\tau > 0$.

При этих условиях при каждом достаточно малом по модулю μ существует периодическое решение $\varphi(t, \mu$

уравнения (21) такое, что

$$\lim_{\mu\to 0} \varphi(t, \mu) = \varphi(t),$$

и это решение может быть представлено в виде

$$\varphi(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + R(t, \mu), \qquad (22)$$

где

$$R(t, \mu) = O(\mu^n).$$

Доказательство существования периодического решения при достаточно малых по модулю μ может быть проведено с помощью принципа Шаудера (см. [80], [62]), или при помощи функционалов Н. Н. Красовского и принципа сжатых отображений (см. [25]), или, наконец, методом последовательных приближений (см. [70]).

Оценка остаточного члена $R(t, \mu)$ особенно просто получается в методе последовательных приближений.

Замечание. В предположении аналитичности функции F по всем аргументам, начиная со второго, в окрестности периодического решения порождающего уравнения и при достаточно малых $|\mu|$ можно, опираясь на теорему об аналитической зависимости решения от параметра (см. стр. 27—28), разложить решение в ряд по степеням μ, если начальные функции аналитически зависят от μ. Однако трудно доказать аналитическую зависимость от μ начальных функций, определяющих периодические решения.

Коэффициенты $x_i(t)$ в (22) являются периодическими решениями стационарных линейных уравнений, получающихся при формальной подстановке (22) в (21) и сравнении коэффициентов при одинаковых степенях μ:

$$\dot{x}_0(t) + ax_0(t) + bx_0(t-\tau) = f(t);$$

$$\dot{x}_1(t) + ax_1(t) + bx_1(t-\tau) = F(t, x_0(t), x_0(t-\tau), 0);$$

$$\dot{x}_2(t) + ax_2(t) + bx_2(t-\tau) =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial \mu}\right)_0 + x_1(t)\left(\frac{\partial F}{\partial x(t)}\right)_0 + x_1(t-\tau)\left(\frac{\partial F}{\partial x(t-\tau)}\right)_0,$$

где символ $(\quad)_0$ означает, что в скобках аргументы $x(t)$, $x(t-\tau)$, μ заменены соответственно на $x_0(t)$, $x_0(t-\tau)$, 0.

Замечание. Метод разложения по степеням μ может быть применен к квазилинейным уравнениям n-го порядка, к системам квазилинейных уравнений, к квазилинейным уравнениям нейтрального типа и к автономным квазилинейным системам. Этот метод можно применять и в резонансном случае (см. [25], [78], [80], [70], [59], [63], [64], [75]).

Пример 1. Применить метод разложения по степеням малого параметра к уравнению

$$\ddot{x}(t)+a_1\dot{x}(t)+a_2x(t)+b_1\dot{x}(t-\tau)+b_2x(t-\tau)=$$
$$=f(t)+\mu F(t,\ x(t),\ \dot{x}(t),\ x(t-\tau),\ \dot{x}(t-\tau),\ \mu),$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, τ — постоянные, $\tau>0$.

Ищем решение в виде

$$x(t,\ \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2x_2(t)+\ \dots\ +\mu^nx_n(t)+R_n(t,\ \mu).$$

Коэффициенты $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ определяются из уравнений:

$$\ddot{x}_0(t)+a_1\dot{x}_0(t)+a_2x_0(t)+b_1\dot{x}_0(t-\tau)+b_2x_0(t-\tau)=f(t),$$
$$\ddot{x}_1(t)+a_1\dot{x}_1(t)+a_2x_1(t)+b_1\dot{x}_1(t-\tau)+b_2x_1(t-\tau)=$$
$$=F(t,\ x_0(t),\ \dot{x}_0(t),\ x_0(t-\tau),\ \dot{x}_0(t-\tau),\ 0),$$
$$\ddot{x}_2(t)+a_1\dot{x}_2(t)+a_2x_2(t)+b_1\dot{x}_2(t-\tau)+b_2x_2(t-\tau)=$$
$$=\left(\frac{\partial F}{\partial\mu}\right)_0+x_1(t)\left(\frac{\partial F}{\partial x(t)}\right)_0+\dot{x}_1(t)\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}(t)}\right)_0+$$
$$+x_1(t-\tau)\left(\frac{\partial F}{\partial x(t-\tau)}\right)_0+\dot{x}_1(t-\tau)\left(\frac{\partial F}{\partial\dot{x}(t-\tau)}\right)_0.$$

Пример 2. Приближенно найти периодическое решение уравнения

$$\dot{x}(t)-x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t+\mu x^2(t),$$

ограничиваясь лишь двумя членами разложения по степеням μ.

$$x(t,\ \mu)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\ \dots\ +\mu^nx_n(t)+R(t,\ \mu),$$

$$\dot{x}_0(t)-x_0\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t.$$

Случай не резонансный, и решение можно искать в виде

$$x_0(t) = A\cos t + B\sin t,$$

откуда

$$x_0(t) = -\frac{1}{2}\cos t.$$

Далее

$$\dot{x}_1(t) - x_1\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = x_0^2(t),$$

или

$$\dot{x}_1(t) - x_1\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}(1 + \cos 2t),$$

и тем же методом находим

$$x_1(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\cos 2t.$$

Следовательно,

$$x(t, \mu) \approx -\frac{1}{2}\cos t + \frac{\mu}{16}(\cos 2t - 2).$$

ГЛАВА V

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И КРАТКИЙ ОБЗОР РАБОТ ПО ДРУГИМ РАЗДЕЛАМ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

§ 1. Некоторые обобщения

В процессах с последствием часто встречается случай «распределенного» запаздывания. Это означает, что $\dot{x}(t)$ зависит не от значений неизвестной функции (или вектор-функции) в какие-то фиксированные моменты времени $t-\tau_i(t)$, а от всех значений $x(s)$ при s, изменяющемся на отрезке $a_t \leqslant s \leqslant b_t$. Например,

$$\dot{x}(t)=f\left(t,\ x(t),\ \int_{a_t}^{b_t} K(t,\ s)\, x(s)\, ds\right).$$

При этом мы приходим к некоторым типам интегро-дифференциальных уравнений.

Часто теорию дифференциальных уравнений с последствием излагают так, чтобы сразу охватить и случай сосредоточенного и случай распределенного запаздывания, рассматривая с этой целью интегро-дифференциальные уравнения, содержащие интегралы Стилтьеса. Например, теорию линейных уравнений можно, как это делает в [36] А. Д. Мышкис, излагать для уравнений вида

$$\dot{x}(t)=\int_{0}^{\infty} x(t-s)\, d_s K(t,\ s)+f(t) \tag{1}$$

и для системы таких уравнений

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} x_j(t-s)\, d_s K_{ij}(t, s) + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (2)$$

Если функция $K(t, s)$ (или $K_{ij}(t, s)$) с конечным изменением по s кусочно-постоянна по s, то уравнение (1) (или система (2)) является линейным уравнением (системой) с сосредоточенным запаздыванием, рассмотренным в гл. II.

Изложенная в гл. II теория без существенных изменений переносится на уравнения вида (1) (или (2)).

В частности, если ядро $K(t, s)$ (или ядра $K_{ij}(t, s)$) не зависит от t, то уравнения (1) или (2) являются обобщением линейных уравнений с постоянными коэффициентами и с постоянными запаздываниями, и частные решения соответствующих однородных уравнений можно искать в виде показательных функций. Например, уравнение

$$\dot{x}(t) = \int_0^{\infty} x(t-s)\, dK(s)$$

имеет решение вида e^{kt}, где k удовлетворяет характеристическому уравнению

$$k = \int_0^{\infty} e^{-ks} dK(s).$$

И в этом случае можно доказать теорему о разложении решения $x_{\varphi}(t)$ по основным решениям вида $t^{\alpha} e^{k_i t}$, аналогичную теореме стр. 50—53. Можно также доказать и теоремы о расположении корней характеристического уравнения, аналогичные теоремам § 3 гл. II. Интересующегося этим вопросом читателя мы отсылаем к [47].

Несколько в ином направлении обобщает уравнения с запаздывающим аргументом Н. Н. Красовский (см. [24]). Он рассматривает уравнения вида

$$\dot{x}_i(t) = X_i(x_1(t+s), x_2(t+s), \ldots, x_n(t+s), t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \quad (3)$$

где правые части $X_i(x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s), t)$ являются функционалами, определенными на непрерывных (или кусочнонепрерывных) функциях $x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)$, где $-h \leqslant s \leqslant 0$, постоянная $h > 0$. Уравнения (3) охватывают как уравнения с распределенным запаздыванием, так и уравнения с сосредоточенным запаздыванием. Подробнее о таких уравнениях см. [24].

Можно также рассматривать уравнения вида

$$\dot{x}(t) = Tx(t),$$

где $x(t)$ — функция или вектор-функция в любом линейном топологическом пространстве, а T — оператор типа Вольтерра, т. е. оператор, значения $Tf(a)$ которого зависят лишь от значений $f(t)$ при $t \leqslant a$. Точнее, если $f_1(t) \equiv f_2(t)$ при $t \leqslant a$, то и $Tf_1(t) \equiv Tf_2(t)$ при $t \leqslant a$.

Уравнения такого и сходного типов рассматривались в [37], [57], при этом обычно дополнительно предполагалась ограниченность последствия, т. е. предполагалось существование числа $H \geqslant 0$ такого, что при любом выборе a и f значение $Tf(a)$ зависит лишь от значений $f(t)$ при $a - H \leqslant t \leqslant a$.

§ 2. Краевые задачи

Основным источником краевых задач для обыкновенных уравнений без отклонения аргумента являются краевые задачи уравнений в частных производных, которые после разделения переменных приводятся к краевым задачам для обыкновенных уравнений.

В задачах математической физики нередко возникают краевые задачи для уравнений в частных производных с отклоняющимися аргументами, и к ним во многих случаях может быть применен метод разделения переменных (см. стр. 117—120), однако на этом пути обычно не возникает краевых задач для обыкновенных уравнений с отклоняющимся аргументом, так как отклонение аргумента происходит по времени, а не по пространственным координатам. Такие задачи математической физики сводятся к краевым задачам для уравнений без отклонения аргумента по пространственным координатам и к основной начальной задаче для уравнения с отклоняющимся аргументом. Поэтому в настоящее время основным источником краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом являются вариационные задачи с отклоняющимся аргументом и баллистические задачи.

Совсем кратко остановимся на этих вариационных задачах, чтобы понять и оправдать постановку основных краевых задач.

Простейшая вариационная задача с отклоняющимся аргументом ставится следующим образом: требуется исследовать на экстремум функционал

$$V[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(t,\ x(t),\ x(t-\tau),\ \dot{x}(t),\ \dot{x}(t-\tau))\,dt \qquad (4)$$

с закрепленными или изменяющимися граничными значениями и начальной функцией. Экстремум может достигаться лишь на решениях обобщенного уравнения Эйлера — уравнения нейтрального типа. При этом вариационные задачи приводят к следующим простейшим постановкам краевых задач.

1) Найти непрерывные и гладкие при $t_0 < t < t_1$ решения уравнения

$$\ddot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t-\tau_1(t)),\ \ldots$$
$$\ldots,\ x(t-\tau_m(t)),\ \dot{x}(t),\ \dot{x}(t-\tau_1(t)),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \dot{x}(t-\tau_m(t)),\ \ddot{x}(t-\tau_1(t)),\ \ldots,\ \ddot{x}(t-\tau_m(t))), \qquad (5)$$

имеющие заданную на E_{t_0} начальную функцию $\varphi(t)$ и заданное граничное значение $x(t_1) = x_1$. Предполагается, что $\varphi(t_0 - 0) = x(t_0 + 0)$, но гладкости в точке t_0 не предполагается. Эта основная краевая задача и ее естественные обобщения на случай уравнений n-го порядка могут быть решены методом шагов, если, конечно, решение существует и метод шагов на всем отрезке $[t_0,\ t_1]$ применим.

На первом шаге определяется решение уравнения (5) $x(t,\ C)$, зависящее от одного параметра (например, от $C_1 = \dot{x}(t_0 + 0)$). На следующем шаге число произвольных постоянных не увеличивается, так как две новые произвольные постоянные определяются из условий непрерывности и гладкости решения в правой граничной точке отрезка, на котором было найдено решение на первом шаге. Продолжая продвигаться «шагами», дойдем, наконец, до точки t_1 и определим C_1 из условия $x(t_1) = x_1$.

В конкретных задачах этим методом часто может быть доказано и существование решения.

Рассматриваемая краевая задача решается также методом Галеркина, сходимость которого для уравнений с отклоняющимся аргументом может быть доказана методами, применяющимися для уравнений без отклонений аргумента (см. [6]).

Для линейных однородных уравнений второго порядка решение рассматриваемой краевой задачи можно получить также следующим методом. Находим гладкое в точке t_0 решение рассматриваемой основной начальной задачи $\underset{\varphi}{x}(t)$ и решение основной начальной задачи $\underset{\varphi_1}{x}(t)$, определяемое следующими начальными условиями: $\varphi_1(t)\equiv 0$ на E_{t_0} и $\underset{\varphi_1}{\dot{x}}(t_0+0)=1$. Тогда всякое решение исходного линейного уравнения, имеющее заданную начальную функцию $\varphi(t)$ и допускающее угловую точку при $t=t_0$, имеет вид $\underset{\varphi}{x}(t)+C\underset{\varphi_1}{x}(t)$, где C — произвольная постоянная. Остается лишь выбрать C так, чтобы удовлетворялось условие $x(t_1)=x_1$ или $\underset{\varphi}{x}(t_1)+C\underset{\varphi_1}{x}(t_1)=x_1$. Если $\underset{\varphi_1}{x}(t_1)\neq 0$, то постоянная C определяется. Следовательно, в рассматриваемом случае существует единственное решение краевой задачи

$$x(t)=\underset{\varphi}{x}(t)+\frac{x_1-\underset{\varphi}{x}(t_1)}{\underset{\varphi_1}{x}(t_1)}\underset{\varphi_1}{x}(t).$$

Если же $\underset{\varphi_1}{x}(t_1)=0$, то краевая задача при $\underset{\varphi}{x}(t_1)\neq x_1$ решений не имеет, а при $\underset{\varphi}{x}(t_1)=x_1$ имеет однопараметрическое семейство решений $\underset{\varphi}{x}(t)+C\underset{\varphi_1}{x}(t)$.

2) Найти решение $x(t)$ уравнения (5), удовлетворяющее на начальном множестве E_{t_0} требованию $x(t)=\varphi(t)$ и в точке t_1 условию

$$\Phi(t_1,\ x(t_1),\ \dot{x}(t_1))=0. \tag{6}$$

В точке t_0 гладкости не требуется.

Для решения этой задачи также применимы: метод шагов, метод Галеркина, а в линейном однородном случае метод представления решения в виде $\underset{\varphi}{x}(t)+C\underset{\varphi_1}{x}(t)$, причем C определяется из условия (6).

3) Найти решение уравнения (5) в предположении, что правая граничная точка неподвижна $x(t_1)=x_1$, а левая граничная точка (t_0, x_0) может перемещаться, $x_0=\psi(t_0)$, при этом соответственно меняется и начальная функция $x(t)=\varphi(t, x_0)$ на E_{t_0}. Функция $\psi(t)$ предполагается непрерывно дифференцируемой, причем $\psi'(t)\neq 0$, $\varphi(t, x_0)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция t, $\varphi(t_0, x_0)=x_0$. В каждой точке кривой $x_0=\psi(t_0)$ задан скачок производной решения $K(x_0)$.

К этой задаче также может быть применен метод шагов, а для линейных однородных уравнений решение может быть записано в виде

$$\underset{\varphi(t, x_0)}{x}(t)+K(x_0)\underset{\varphi_1}{x}(t),$$

причем x_0 определяется из условия

$$\underset{\varphi(t, x_0)}{x}(t_1)+K(x_0)\underset{\varphi_1}{x}(t_1)=x_1.$$

Возможны и иные постановки граничных задач. Читателя, желающего подробнее ознакомиться с затронутым в этом параграфе кругом идей, мы отсылаем к [21], [78], [41], [42], [39], [40], [6].

§ 3. Точки покоя

Точкой покоя дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t)=F(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t)))$$

с запаздывающим аргументом, или уравнения нейтрального типа

$$\dot{x}(t)=F(t, x(t) x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t)), \dot{x}(t-\tau_1(t)), \ldots \\ \ldots, \dot{x}(t-\tau_m(t))),$$

где все $\tau_i(t)\geqslant 0$, а $x(t)$ и F являются вектор-функциями, называется решение $x(t)=x_0$, равное постоянному вектору как на начальном множестве, так и при $t>t_0$.

Для линейных, однородных, стационарных уравнений

$$\sum_{i=0}^{m}(A_i x(t-\tau_i)+B_i\dot{x}(t-\tau_i))=0,$$

где $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_m$, все τ_i постоянные, все A_i и B_i

постоянные $(n \times n)$-матрицы, определитель $|A_0| \neq 0$, точки покоя в начале координат классифицируются по свойствам корней характеристического уравнения $\varphi(k)=0$.

Точка покоя имеет тип (p, q, s), если p корней характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть, q корней имеют положительную действительную часть и у s корней действительная часть равна нулю. Говоря о числе корней, мы имеем в виду сумму их кратностей. Некоторые из чисел p, q, s могут равняться ∞.

Точку покоя типа $(\infty, 0, 0)$ называют обобщенным устойчивым узлом (или фокусом), точку $(0, \infty, 0)$ — обобщенным неустойчивым узлом (или фокусом), точку типа $(0, 0, \infty)$ — центром. Заметим, что точка покоя последнего типа может существовать лишь у уравнений нейтрального типа (см. стр. 45—47) и что в этом случае далеко не все траектории являются периодическими или почти периодическими.

Возможна, конечно, более полная характеристика точек покоя путем указания числа отрицательных корней характеристического квазиполинома, числа положительных корней, числа комплексных корней с отрицательной действительной частью, числа комплексных корней с положительной действительной частью, числа чисто мнимых корней, можно также выделить случай корня, равного нулю.

Вопрос об оценке минимального числа точек покоя динамической системы

$$\dot{x}(t)=F(x(t-\tau_0(t)),\ x(t-\tau_1(t)), \ldots,\ x(t-\tau_m(t))) \tag{7}$$

сводится к оценке числа точек покоя динамической системы без запаздывания

$$\dot{x}(t)=F(x(t),\ x(t), \ldots,\ x(t)). \tag{8}$$

Очевидно, что точки покоя систем (7) и (8) совпадают. Очевидно также, что для каждой системы (8) можно подобрать бесконечное множество систем (7). Тем самым вопрос об оценке минимального числа точек покоя систем (7) сведен к хорошо разработанному вопросу об оценке минимального числа точек покоя систем (8).

Заметим, что для уравнений с отклоняющимся аргументом изучение особых точек непосредственно не сводится к изучению точек покоя. Простейшие особые точки изучались в статьях [66], [67], [81].

§ 4. Уравнения в частных производных с отклоняющимися аргументами

Теория дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимися аргументами разработана очень слабо (см. [8], [9], [78]).

В приложениях пока встречались лишь уравнения с отклонением по одному аргументу — по времени.

Рассмотрим простейшее уравнение такого типа

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=F\left(t, u(t,x), \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, u\ (t-\tau(t), x),\right.$$
$$\left.\frac{\partial u(t-\tau(t),x)}{\partial t}, \frac{\partial u(t-\tau(t),x)}{\partial x}\right), \quad \tau(t)>0. \quad (9)$$

В основной начальной задаче уравнения вида (9) при t, изменяющемся на начальном множестве E_{t_0} (определение начального множества не изменяется, см. стр. 10), и при произвольных или удовлетворяющих некоторым ограничениям значениях x задается начальная функция $\varphi_0(t,x)$. Требуется найти при $t>t_0$ дифференцируемую функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую уравнению (9) при $t>t_0$, если на начальном множестве ее считать совпадающей с $\varphi_0(t,x)$. Переход от функции $u(t,x)$ к $\varphi(t,x)$ должен быть непрерывным.

Если применим метод шагов (например, если $\tau(t)\geqslant\tau_0>$ >0), то основная начальная задача на каждом шаге сводится к решению задачи Коши для уравнения без отклонений аргумента

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=F\left(t, u(t,x), \frac{\partial u(t,x)}{\partial x},\ \varphi_k(t-\tau(t), x),\right.$$
$$\left.\frac{\partial\varphi_k(t-\tau(t),x)}{\partial t}, \frac{\partial\varphi_k(t-\tau(t),x)}{\partial x}\right),$$

где $\varphi_k(t,x)$ — решение аналогичного уравнения на предыдущем шаге.

Однако обычно в приложениях для уравнений в частных производных приходится решать не основную начальную задачу, а различные краевые задачи. При этом во многих случаях может быть применен метод разделения переменных, общая схема которого почти не отличается от схемы применения этого метода к решению краевых задач для уравнений без отклонений аргумента. При применении этого метода по пространственным координатам, по которым нет отклонений аргумента, возникает обычная краевая задача без отклонений аргумента, а по времени приходится решать основную начальную задачу для уравнения с отклоняющимся аргументом.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующие два примера:

1) Обобщенное уравнение диффузии

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u(t-\tau,x)}{\partial x^2}, \tag{10}$$

где a, b и τ — постоянные, $\tau>0$,

$$u(t,x)=\varphi(t,x) \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\ 0\leqslant x\leqslant l,$$

начальная функция $\varphi(t,x)$ непрерывна по t и дважды непрерывно дифференцируема по x. Кроме того, заданы какие-нибудь однородные граничные условия, например

$$u(t,0)=u(t,l)=0.$$

2) Уравнение колебаний с упругим последействием

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u(t-\tau,x)}{\partial x^2},$$

где a, b и τ — постоянные, $\tau>0$, $u(t,x)=\varphi(t,x)$ при $0\leqslant t\leqslant\tau$, $0\leqslant x\leqslant l$, начальная функция $\varphi(t,x)$ непрерывна по t и дважды непрерывно дифференцируема по x. Заданы какие-нибудь однородные граничные условия, например,

$$u(t,0)=u(t,l)=0.$$

Несколько подробнее решим первую из этих задач. Применяем метод разделения переменных, т. е. ищем решение в виде $u(t,x)=T(t)X(x)$. При этом получим

$$T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)+b^2T(t-\tau)X''(x),$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)+b^2(t-\tau)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2.$$

Следовательно, $X(x)$ является решением краевой задачи

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \qquad X(0)=X(l)=0,$$

откуда

$$\lambda^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

а собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Функция $T(t)$ является решением уравнения

$$T'(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\left[a^2 T(t) + b^2 T(t-\tau)\right] = 0, \tag{11}$$

где $T(t) = B_n(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$,

$B_n(t)$ — коэффициент Фурье при $\sin\frac{n\pi}{l}x$ в разложении начальной функции $\varphi(t, x)$ в ряд Фурье по собственным функциям $\sin\frac{n\pi}{l}x$:

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Решение уравнения (10), как указано на стр. 42, может быть представлено в виде *)

$$\underset{B_n(t)}{T}(t) = \frac{b^2 B_n(0) + a^2 B_n(\tau)}{a^2 + b^2}\underset{1}{T_n}(t) + \frac{b^2}{a^2+b^2}\int_0^{\tau}\underset{1}{T_n}(t-s)\,B'_n(s)\,ds.$$

Следовательно, решение исходной краевой задачи имеет вид

$$\underset{\varphi(t,x)}{u}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{b^2 B_n(0) + a^2 B_n(\tau)}{a^2+b^2}\underset{1}{T_n}(t) + \frac{b^2}{a^2+b^2}\int_0^{\tau}\underset{1}{T_n}(t-s)\,B'_n(s)\,ds\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

*) Как указано на стр. 41, требования дифференцируемости $B_n(t)$ можно избежать, записав решение уравнения (11) в несколько ином виде.

Совершенно так же решается краевая задача для уравнения колебаний струны с упругим последействием, полагая $u(t, x) = T(t) X(x)$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t) + b^2 T(t-\tau)} = -\lambda^2,$$

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\varphi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$T_n''(t) = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\left(a^2 T_n(t) + b^2 T_n(t-\tau)\right), \quad (12)$$

где $T_n(t) = B_n(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Решение уравнения (12) можно получить методом, изложенным на стр. 42 и стр. 50—53.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Валеев К. Г., Линейные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента. Симпозиум по нелинейным колебаниям, Киев 1961 г.
2. Валеев К. Г., Исследование устойчивости решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента методом Хилла, ПММ **26**, № 4 (162), 755—761.
3. Ван-Линь, Об устойчивости решений уравнений с запаздывающим аргументом, Sci. Record N. S. **3**, 7 (1959), 280—288.
4. Васильева А. Б., Уравнения нейтрального типа с малыми запаздываниями. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов **2** (1963), 50—67.
5. Васильева А. Б., Родионов А. М., Применение метода возмущений к уравнению с запаздывающим аргументом в случае малого запаздывания. Там же, 1 (1962), 20—27.
6. Гайсарян С. С., К обоснованию метода Б. Г. Галеркина решения краевых задач для уравнений с отклоняющимся аргументом. Там же, 1 (1962), 69—75.
7. Гермаидзе В. Е., Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом, УМН **14**, 4 (88), (1959), 149—156.
8. Гуль И. М., Дифференциальные уравнения с функциональными аргументами в частных производных. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, У-нт дружбы народов **1** (1962), 94—102.
9. Гуль И. М., Задача Коши для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных с функциональным аргументом, УМН **10**, 2 (64), (1955), 153—156.
10. Гусейнов А. И., Мамедов Я. Д., Исследование решения нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом, Уч. зап. Азерб. ун-та, физ.-мат. и хим. науки **3** (1960), 3—9.
11. Зверкин А. М., Теоремы существования и единственности для уравнений с отклоняющимся аргументом в критическом случае. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов, 1 (1962), 37—46.
12. Зверкин А. М., О полноте одной системы частных решений дифференциального уравнения с запаздыванием и периодическими коэффициентами. Там же **2** (1963), 94—112.

13. Зверкин А. М., К теории линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами, ДАН **128** (1959), 882—885.
14. Зверкин А. М., Общее решение линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, Научн. докл. высш. школы, физ.-мат. науки **1** (1959), 30—37.
15. Зверкин А. М., Зависимость устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от выбора начального момента, Вест. МГУ, сер. матем., мех., астроном., физ., хим. **5** (1959), 15—20.
16. Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, УМН **17**, 2 (104), (1962), 77—164.
17. Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, 2. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов **2** (1963), 3—49.
18. Зубов В. И., Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., Судпромгиз, 1959.
19. Каменский Г. А., Об асимптотическом поведении решений дифференциально-разностных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом. Учен. зап. МГУ **165**, Матем., 7 (1954), 195—204.
20. Каменский Г. А., О существовании и единственности решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, Учен. зап. МГУ **181**, Матем. **8** (1956), 83—89.
21. Каменский Г. А., Краевая задача для нелинейных уравнений с отклоняющимся аргументом. Научн. докл. высш. школы, физ.-мат. науки **2** (1958), 60—66.
22. Каменский Г. А., Существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных условий решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, Мат. сборник **55** (97), 4 (1961), 363—378.
23. Клямко Э. И., Некоторые применения метода Чаплыгина к приближенному решению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМН **12**, 4 (76), (1957), 305—312.
24. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
25. Красовский Н. Н., О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, ДАН **114** (1957), 252—255.
26. Лабазин В. Г., Некоторые свойства больших по абсолютной величине корней трансцендентных уравнений. Вестник ЛГУ, II, вып. 4 (1953), 13—23.
27. Лабазин В. Г., О распределении корней уравнения с двумя параметрами. Записки Ленинградского горного института имени Г. В. Плеханова. Мат., физ. **37**, 3 (1961), 21—29.
28. Леонтьев А. Ф., О некоторых решениях линейного разностного уравнения с линейными коэффициентами. Матем. сб. **45** (87), (1958), 323—332.

29. Леонтьев А. Ф., Дифференциально-разностные уравнения. Матем. сб. **24** (66), (1949), 347—374.
30. Мейман Н. Н. и Чеботарев Н. Г., Проблемы Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций. Труды матем. института им. Стеклова **26** (1949), 1—331.
31. Миролюбов А. А., Решение одного класса линейных дифференциально-разностных уравнений, Матем. сб. **34** (76), 2 (1954), 357—384.
32. Миролюбов А. А., Решение линейных дифференциально-разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Матем. сб. **42** (84), 1 (1957), 65—78.
33. Муравьев П. А., Решение операционным методом некоторых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Матем. сб. **44** (86), 2 (1958), 157—178.
34. Мышкис А. Д., Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМН **4**, 5 (33), (1949), 99—141.
35. Мышкис А. Д., Дополнительные библиографические материалы к статье «Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом», УМН **5**, 2 (36), (1950), 148—154.
36. Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, М.—Л., Гостехиздат, 1951 (Исправленное издание вышло на немецком языке в Берлине в 1955 г.).
37. Мышкис А. Д., Шиманов С. Н., Эльсгольц Л. Э., Устойчивость и колебания систем с запаздыванием. Симпозиум по нелинейным колебаниям. Киев, 1961.
38. Неймарк Ю. И., Структура D-разбиения пространства квазиполиномов и диаграммы Вышнеградского и Найквиста, ДАН **60** (1948), 1503—1506.
39. Нерсесян А. Б., Разложение по собственным функциям краевой задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук **12**, 6 (1959), 37—68.
40. Нерсесян А. Б., О некоторых краевых задачах для уравнений нейтрального типа. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов **2** (1963), 118—135.
41. Норкин С. Б., О периодических решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Матем. сб. **45** (87), 1, (1958), 71—104.
42. Норкин С. Б., О краевой задаче типа Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Изв. ВУЗ, Матем. **6** (7), (1958), 203—214.
43. Норкин С. Б., Об асимптотическом поведении колеблющихся решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Научн. докл. высш. школы, физ.-мат. науки **3** (1959), 48—56.
44. Норкин С. Б., О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. УМН **14**, 1 (85), (1959), 199—206.

45. Норкин С. Б., О решениях линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, УМН **16**, 2 (98), (1961), 143—148.

46. Ожиганова И. А., Определение области асимптотической устойчивости для дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов **1** (1962), 52—62.

47. Пинни, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., ИЛ., 1961.

48. Разумихин Б. С., Об устойчивости систем с запаздыванием, ПММ **20** (1956), 500—512.

49. Разумихин Б. С., Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием. Инж. сборник, **29** (1960), 21—29.

50. Разумихин Б. С., Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием. Авт. и телемех. **21**, 6 (1960), 740—748.

51. Рубаник В. П., Обоснование применимости принципа усреднения к системам дифференциально-разностных уравнений. Науч. ежегодник Черновицкого ун-та за 1959 год, физ.-мат. факультет (1960), 533—535.

52. Рубаник В. П., Применение асимптотического метода Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова к квазилинейным дифференциально-разностным уравнениям, Укр. матем. журн. **9**, 4 (1959), 446—450.

53. Рябов Ю. А., Метод малого параметра в теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов **1** (1962), 103—113.

54. Рябцев И. И., О переменном запаздывании, Изв. высш. учебн. завед., Матем. **1** (8), (1959), 164—173.

55. Соболь И. М., Положительные решения линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Уч. зап. МГУ **181**, Матем. **8** (1956), 45—56.

56. Солдатов М. А., Решение линейных разностных уравнений с линейными коэффициентами, Матем. сб. **47** (89), 2 (1959), 221—236.

57. Тихонов А. Н., О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики. Бюлл. МГУ **1**, секция А, вып. 8 (1938), 1—25.

58. Халанай А., Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Revue math. pures et appl. Acad. RPR **4** (1959), 467—483.

59. Халанай А., Периодические и почти периодические решения систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Там же **4**, 4 (1959), 685—691.

60. Халанай А., Периодические решения линейных систем с запаздыванием. Там же **6**, 1 (1961), 141—158.

61. Халанай А., Интегральная устойчивость в случае систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Там же **5**, 3—4 (1960) 541—548.
62. Халанай А., Асимптотическая устойчивость и малые возмущения периодических систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. УМН **17**, 1 (103), (1962), 231—233.
63. Халанай А., Периодические решения систем с запаздыванием с малым параметром в критическом случае. Revue math. pures et appl. Acad. RPR **6**, 3 (1961), 487—491.
64. Халанай А., Автономные системы с запаздывающим аргументом с малым параметром. Там же (1962) **7**, 1, 81—89.
65. Хан В., Обзор теории дифференциально-разностных уравнений с постоянными и переменными отклонениями, Сб. переводов, Матем. **5**:6 (1961), 73—98.
66. Цванг Х. Г., Об особых точках дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, Учен. зап. МГУ **186**, Матем. **9** (1959), 211—218.
67. Цванг Х. Г., Об особых точках дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов **2** (1963), 171—181.
68. Цыпкин Я. З., Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью, Авт. и телемех. **7**, 2—3 (1946), 107—129.
69. Цыпкин Я. З., Устойчивость систем автоматического регулирования, М., 1953 г.
70. Шиманов С. Н., К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием, ПММ **23**, 5 (1959), 836—844.
71. Шиманов С. Н., О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени, ПММ **24**, 1 (1960), 55—63.
72. Шиманов С. Н., Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последствием, ПММ **3** (1960), 447—457.
73. Шиманов С. Н., Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием (особый случай), Изв. ВУЗ, матем. **1** (20), (1961), 152—162.
74. Шиманов С. Н., Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием, Сиб. мат. журн. **2**, 3 (1961), 467—480.
75. Шиманов С. Н., Об устойчивости квазигармонических систем с запаздыванием, ПММ **25**, 6 (1961), 992—1002.
76. Эльсгольц Л. Э., Вид общего решения некоторых линейных стационарных уравнений с отклоняющимися аргументами, Вестник МГУ, сер. 1, мат. и мех. **6** (1961), 28—32.
77. Эльсгольц Л. Э., Естественный гомоморфизм в теории линейных однородных уравнений с отклоняющимся аргументом. Там же **6** (1961), 33—37.
78. Эльсгольц Л. Э., Качественные методы в математическом анализе, М., Гостехиздат, 1955.
79. Эльсгольц Л. Э., Вариационные задачи с запаздывающим аргументом, Вестник МГУ **10** (1952), 57—62.

80. Эльсгольц Л. Э., Некоторые свойства периодических решений линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами, Вестник МГУ, сер. матем., мех., астроном., физ., хим. **5** (1959), 65—72.
81. Эльсгольц Л. Э., Особые точки дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов **2** (1963), 113—117.
82. Bellman R., On the existence and boundedness of solutions of nonlinear differential — difference equations, Ann. Math. **50**, 2 (1949), 347—355.
83. Bellman R., On the boundedness of non-linear differential and difference equations, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 357—386.
84. Bellman R., A survey of the theory of the boundedness, stability and asymptotic behavior of solutions of linear and nonlinear differential and difference equations, Office of naval research, Wachington D. C., 1949.
85. Bellman R., and Cooke K. L., Stability theory and adjoint operators for linear differential-difference equations, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 470—500.
86. Bellman R. and Cooke K. L., Asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations, Providens, 1959 (Mem. Amer. Math. Soc. № 35).
87. Bellman R. and Cooke K. L., Differential-Difference Equations, New York — London (1963), Acad. Press.
88. Brownell F. H., Non-linear delay differential equations, Ann. Math. Studies. **20** (1950) (Contributions to the theory of non-linear oscillations), 89—149.
89. Verblunsky S., On a class of differential-difference equations, Proc. Lond. Math. Soc. Third series **4**, **23** (1956), 355—365.
90. Pitt H. R., On a class of linear integro-differential equations, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **43** (1947), 153—163.
91. Wright E. M., The non-linear difference-differential equation, The Quart. Journ. Math. Oxford series 17 (1946), 245—252.
92. Wright E. M., The linear difference-differential equation with asymptotically constant coefficients, American Journ. Math. **70**, 2 (1948), 221—238.
93. Wright E. M., Linear difference-differential equations, Proc. Cambridge phil. Soc. **44**, 2 (1948), 179—185.
94. Wright E. M., The linear difference-differential equation with constant coefficients, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sec. A **62**, 4 (1949), 387—393.
95. Wright E. M., The stability of solutions of non-linear difference-differential equation, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sec. **A 63**, 1 (1950), 18—26.
96. Wang Lian, On the equivalence problem of differential equations and difference-differential equations in the theory of stability of first critical case Acta Math. Sinica **10**, 1 (1960), 104—124.

97. Q i n Y u a n - z u n, L i o u Y o u n g - c h i n g, Wang Lian, Scientia sinica, 9, 6 (1960), 719—747 Effect of time — lags on stability of dynamical systems.
98. H a h n W., Bericht über Differential—Differenzengleichungen mit festen und veranderlichen Spannen, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. **57**, 2 (1954), 55—84.
99. H a h n W., Ergänzung zu W. Hahn Bericht über Differential — Differenzengleichungen, Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 57, 3 (1955), 132.
100. H a h n W., Über Differential — Differenzengleichungen mit anomalen Lösungen, Math. Ann. **133** (1957), 251 — 255.
101. H a h n W., Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen, Math. Ann. **136**, 5 (1958), 430—441.
102. H a h n W., Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete), 1959.
103. H a l a n a y A., Solutions périodiques des systèmas généraux à retardement. C. R. Acad. Sci. **250**, 22 (1960), 3557—3559.
104. H a l a n a y A., Solutions périodiques des systèmes génèraux à retardement dans le cas de la rèsonance. C. R. Acad. Sci. **251**, 18 (1960), 1856—1858.
105. L a r s s o n R. D., Characteristic roots of a mixed difference — differential equation, Amer. Math. Monthly **68**, 9 (1961), 903—904.
106. D r i v e r R. D., Existence and Stability of Solutions of a Delay — Differential System «Archive for Rational Mechanics and Analysis», Vol. 10, 5 (1962), 401—426.
107. S a n s o n e G., Teorema di esistenza di soluzioni per un sistema di equazioni funzionali differenziali, Ann. Matem. pura ed appl., ser. 4, 39 (1955), 65—67.
108. L i u Y i n g - c h i n g, Effects of large time lags on stability of dynamical systems, Sci. Rec., 1960, 4, № 2, 83—87.

Лев Эрнестович Эльсгольц

Введение в теорию
дифференциальных уравнений
с отклоняющимся аргументом

М., Издательство «Наука»,
1964 г., 128 стр. с илл.

Редактор *С. Б. Норкин*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректор *Л. О. Сечейко*

Сдано в набор 15/VIII 1963 г. Подписано к печати 21/XII 1963 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л 4. Условн. печ. л. 6,56. Уч.-изд л. 5,64. Тираж 8000 экз. Т-17310. Цена книги 28 коп. Заказ № 548.

Издательство «Наука».
Редакция математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Главполиграфпрома» Государственного комитета Совета Министров СССР по печати, Гатчинская, 26.

Цена 28 коп.