

MATHEMATISCH-
PHYSIKALISCHE BIBLIOTHEK

BAND 34

E. LÖFFLER
ZIFFERN
UND ZIFFERNSYSTEME

II. TEIL
DIE ZAHLZEICHEN IM MITTELALTER
UND IN DER NEUZEIT



Springer Fachmedien  Wiesbaden GmbH

Mathematisch-Physikalische Bibliothek

Gemeinverständliche Darstellungen aus der Mathematik
u. Physik. Unter Mitwirkung von Fachgenossen hrsg. von

Dr. W. Lietzmann

und

Dr. A. Witting

Direktor der Oberrealschule zu Jena

Studienrat, Gymnasialprof. in Dresden

Fast alle Bändchen enthalten zahlreiche Figuren. kl. 8. Kart. je M. 1.—

Hierzu Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen

Die Sammlung, die in einzeln käuflichen Bändchen in zwangloser Folge herausgegeben wird, bezweckt, allen denen, die Interesse an den mathematisch-physikalischen Wissenschaften haben, es in angenehmer Form zu ermöglichen, sich über das gemeinhin in den Schulen Gebotene hinaus zu belehren. Die Bändchen geben also teils eine Vertiefung solcher elementaren Probleme, die allgemeinere kulturelle Bedeutung oder besonderes wissenschaftliches Gewicht haben, teils sollen sie Dinge behandeln, die den Leser, ohne zu große Anforderungen an seine Kenntnisse zu stellen, in neue Gebiete der Mathematik und Physik einführen.

Bisher sind erschienen (1912/18):

- Der Begriff der Zahl in seiner logischen und historischen Entwicklung. Von H. Wieleitner. 2., durchgeseh. Aufl. (Bd. 2.)
Ziffern und Ziffernsysteme. Von E. Löffler. 2., neubearb. Aufl. I.: Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker. (Bd. 1.) II.: Die Z. im Mittelalter und in der Neuzeit. (Bd. 34.)
Die 7 Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Von H. Wieleitner. (Bd. 7.)
Einführung in die Infinitesimalrechnung. Von A. Witting. 2. Aufl. (Bd. 9.)
Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. O. Meißner. 2. Auflage. I. Grundlehren (Bd. 4.) II. Anwendungen. (Bd. 33.)
Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie. Von A. Leman. (Bd. 19.)
Der pythagoreische Lehrsatz mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 3.)
Darstellende Geometrie des Geländes. Von R. Rothe. (Bd. 14.)
Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben. Von B. Kerst. (Bd. 26.)
Einführung in die projektive Geometrie. Von M. Zacharias. (Bd. 6.)
Konstruktionen in begrenzter Ebene. Von P. Zühke. (Bd. 11.)
Nichteuclidische Geometrie in der Kugelfläche. Von W. Dieck. (Bd. 31.)
Einführung in die Nomographie. Von P. Luckey. I. Teil: Die Funktionsleiter. (Bd. 28.) II. Teil: Die Zeichnung als Rechenmaschine. (Bd. 37.)
Theorie und Praxis des Rechenschleiers. Von A. Rohrberg. (Bd. 23.)
Die Anfertigung mathemat. Modelle. (Für Schülermittl. Kl.) Von K. Giebel. (Bd. 16.)
Karte und Krok. Von H. Wolff. (Bd. 27.)
Ionentheorie. Von P. Bräuer. (Bd. 38.)
Die Grundlagen unserer Zeitrechnung. Von A. Baruch. (Bd. 29.)
Soldaten-Mathematik. Von A. Witting. 2. Aufl. (Bd. 22.)
Die mathemat. Grundlagen d. Variations- u. Vererbungslehre. Von P. Riebesell. (24.)
Mathematik und Malerei. 2 Teile in 1 Bande. Von G. Wolff. (Bd. 20/21.)
Der Goldene Schnitt. Von H. E. Timerding. (Bd. 32.)
Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Von A. Witting und M. Gebhardt. (Bd. 15.)
Mathematiker-Anekdoten. Von W. Ahrens. (Bd. 18.)
Die Quadratur d. Kreises. V. E. Beutel. (12.)
Wo steckt der Fehler? Von W. Lietzmann und V. Trier. 2. Aufl. (Bd. 10.)
Geheimnisse der Rechenkünstler. Von Ph. Maennchen. 2. Aufl. (Bd. 13.)
Riesen und Zwerge im Zahlenreiche. Von W. Lietzmann. 2. Aufl. (Bd. 25.)
Was ist Geld? Von W. Lietzmann. (Bd. 30.)
Dreht sich die Erde? Von W. Brunner. (Bd. 17.)
Theorie der Planetenbewegung. Von P. Meth. (Bd. 8.)
Die Fallgesetze. V. H. E. Timerding. (Bd. 5.)

In Vorbereitung:

Doehlemann, Mathematik und Architektur. Pfeifer, Photogrammetrie. Müller, Der Gegenstand der Mathematik. Winkelmann, Der Kreisels. Wolff, Einführ. in die Photogrammetrie.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE
BIBLIOTHEK

HERAUSGEGEBEN VON W. LIETZMANN UND A. WITTING

34

ZIFFERN
UND ZIFFERNSYSTEME

II. TEIL

DIE ZAHLZEICHEN IM MITTELALTER
UND IN DER NEUZEIT

VON

DR. EUGEN LÖFFLER

REGIERUNGSRAT BEI DER MINISTERIALABTEILUNG
FÜR DIE HÖHEREN SCHULEN IN STUTT GART

ZWEITE, NEUBEARBEITETE AUFLAGE



1919

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	3
I. Abschnitt: Die römischen Ziffern	4
II. Abschnitt: Der Stellenwert und die Null	9
III. Abschnitt: Entwicklung der Ziffernschrift in Indien	17
IV. Abschnitt: Ausbreitung der Stellungsziffern bei den Arabern und im Abendlande	29
V. Abschnitt: Die Zahlzeichen der Ostasiaten	43
VI. Abschnitt: Vergleichende Übersicht über die Grundformen der Ziffernschrift	52
Literatur.	58
Namenverzeichnis	60

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA:
COPYRIGHT 1919 BY Springer Fachmedien Wiesbaden

Ursprünglich erschienen bei B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1919

ISBN 978-3-663-18776-9

ISBN 978-3-663-19023-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-19023-3

EINLEITUNG

Im ersten Teil haben wir gezeigt, daß die Kulturvölker des Altertums sich verschiedener Ziffernsysteme bedienten, die im einzelnen zwar mannigfache Abweichungen zeigen, im Grunde aber sich auf wenige Methoden zurückführen lassen. Auch heute werden bei den Völkern der Erde die verschiedensten Ziffernsysteme und Ziffernformen verwendet. Es wäre ein großer Irrtum zu glauben, daß die uns geläufigen sogenannten indisch-arabischen Ziffern bei allen Völkern bekannt und in allen Teilen der Welt im Gebrauch seien. In weiten Gebieten Zentralasiens, Afrikas und Amerikas sind sie unbekannt; in manchen Teilen Indiens, Ostasiens und auf den malaiischen Inseln sind neben ihnen noch andere Ziffernsysteme im Gebrauch. Aber wenn wir uns in diesem Bande mit der bei neuzeitlichen Völkern üblichen Ziffernschrift beschäftigen, so können wir uns doch im wesentlichen darauf beschränken, diejenigen Systeme zu schildern, welche die weiteste Verbreitung und die größte Bedeutung erlangt haben; nämlich das System der *römischen*, der *indisch-arabischen* und der *ostasiatischen* Ziffern. Wir dürfen uns jedoch nicht damit begnügen, sie einfach nach ihrer äußeren Gestalt und nach ihrer Verwendung zu schildern. Wer ihr Wesen und ihre Bedeutung verstehen will, muß ihre Entwicklung und ihr allmähliches Entstehen kennen lernen und andere Ziffernsysteme zum Vergleich heranziehen. Wir werden deshalb besonders bei den römischen und indischen Ziffern die Entwicklung dieser Zahlenschriften vom Altertum an durch das Mittelalter hindurch bis in die Neuzeit zu verfolgen haben und setzen dabei die Ausführungen des ersten Bandes als bekannt voraus.

ERSTER ABSCHNITT

DIE RÖMISCHEN ZIFFERN

Die Zahlzeichen, die unter diesem Namen von allen Völkern der Neuzeit zu gewissen besonderen Zwecken, namentlich bei Inschriften, verwendet werden, sind schon in grauer Vorzeit auf italischem Boden nachweisbar. Wie die griechische Geschichte mit der Entdeckung Griechenlands durch die Phöniker, so beginnt die italische mit der Entdeckung Italiens durch die Griechen. Während aber dort die ersten Anfänge in tiefes Dunkel gehüllt sind, können wir hier den Eintritt der italischen Stämme in den Bereich der Kultur Schritt für Schritt verfolgen. Die Entwicklung schritt langsam von Süden nach Norden und von Westen nach Osten vor, und auch der Schwerpunkt der Geschichte verschob sich in dieser Richtung.

Die Ethnographie der italischen Halbinsel bietet ein buntes Bild. Für uns sind nur wichtig die *Etrusker* und diejenigen indogermanischen Stämme, die den Hauptteil der Halbinsel einnahmen, und die man unter dem Namen *Italiker* zusammenfaßt. Die Stellung der Etrusker in der Völkerkunde ist bis heute noch dunkel; zwar haben sie uns Tausende von Inschriften hinterlassen, in denen die Zahlzeichen und auch einzelne Wörter entziffert sind, aber von einem wirklichen Verständnis ihrer Sprache sind wir noch weit entfernt. Sie bildeten wahrscheinlich einen Bestandteil der ältesten Bevölkerung Norditaliens und saßen ursprünglich zu beiden Seiten des Apennin, von wo aus sie nach Norden und Süden ihr Gebiet ausdehnten und die Stämme der indogermanischen Italiker teilweise vertrieben. Die Gewinnung der Oberherrschaft über Latium und Campanien seit dem Ende des 7. vorchristlichen Jahrhunderts ist nur die Fortsetzung dieser vorschreitenden Bewegung. Diese vollzog sich natürlich auf Kosten der Italiker, unter denen einerseits die *Latiner*, *Falisker* und *Osker*, andererseits die *Sabiner* und die *Umbrier* hervorzuheben sind. Die fortwährenden Kämpfe, welche diese Stämme untereinander und gegen die Etrusker führten, sind

bekannt; namentlich Rom, eine Pflanzstadt der Latiner, steht im Mittelpunkt dieser Fehden. Es geriet selbst im 6. Jahrhundert v. Chr. vorübergehend unter etruskische Herrschaft, und die ganze weitere Entwicklung der römischen Kultur steht unter etruskischem Einfluß. Die Schöpfung der italischen Einheit durch Rom führte allerdings eine Vereinigung der Italiker herbei, aber diese Vereinigung war nicht auf Stammverwandtschaft, sondern nur auf politischer Grundlage aufgebaut, wie etwa heute das englische Weltreich.

Wir wissen, daß die Bewohner der Apenninenhalbinsel ihre *Schrift* etwa im 8. Jahrhundert von den Griechen bekamen. Ein gemeinsames Alphabet von 26 Buchstaben (das Ω fehlt in allen italischen Alphabeten) hat man mehr als einmal in südetruskischen Städten gefunden. Es ist wahrscheinlich, daß die Etrusker, deren Machtgebiet bis zum Golf von Neapel reichte, am frühesten von allen Völkern Italiens schreiben lernten. Sie haben das Alphabet dem Charakter ihrer Sprache angepaßt und weitergebildet und es den übrigen Stämmen überliefert. Es entwickelte sich hierauf eine große Anzahl von Alphabeten, jedes mit besonderen Eigentümlichkeiten; unter diesen gehören das etruskische, umbrische und oskische einerseits, das faliskische und lateinische andererseits zusammen.

In allen diesen Alphabeten sind uns Inschriften erhalten, und auf diesen finden sich auch *Zahlzeichen*. Abgesehen von der Stellung (die Schrift der Umbrer, Osker und Etrusker ist linksläufig) stimmen diese Zahlzeichen im wesentlichen nach Form und Verwendung mit den römischen überein, so daß man von *gemeinsamen italischen Zahlzeichen* sprechen darf, wenigstens was die Zahlen unter 1000 betrifft. Für die Zahlen über 1000 sind uns nur von den Römern Zeichen überliefert.

Die Frage nach der *Herkunft dieser* allgemein bekannten *italisch-römischen Zahlzeichen* ist schon sehr oft gestellt und fast ebensooft verschieden beantwortet worden. Eine völlig befriedigende Erklärung ihrer Entstehung haben wir heute noch nicht. Sicher ist jedenfalls, daß sie ursprünglich mit den Buchstaben, denen sie gleichen, nichts zu tun hatten. Sicher ist ferner, daß die Buchstaben des griechischen Alphabets, als dieses zu den Römern kam, noch keinen Zah-

lenwert besaßen; damals waren ja bei den Griechen noch die herodianischen Ziffern gebräuchlich. Diese Ziffern aber, die die Italiker wohl im Verkehr mit den Griechen in Unteritalien und Sizilien kennen lernten, waren für sie natürlich ungeeignet. Th. Mommsen hat deshalb zuerst die Behauptung aufgestellt, daß die römischen Ziffern auf italischem Boden lange vor der Einführung des Alphabets in Italien entstanden sein müssen. Daß einzelne senkrechte Striche und Zusammenstellungen von Strichen wie V und X häufig vorkommen und sich von der ältesten Steinzeit an bis ins geschichtliche Altertum und in die Neuzeit verfolgen lassen, haben wir wiederholt gesehen. Es ist auch nach F. Lindemann nicht ausgeschlossen, daß das hieratische Zeichen für 10 durch die Vermittlung der Phöniker nach Italien gekommen ist (Abbildung siehe I, 20)¹⁾.

Im einzelnen denken wir uns die Entstehung der römischen Zahlzeichen nach K. Zangemeister in folgender Weise: Die Zahlen 1 bis 9 wurden ursprünglich durch ebensoviele senkrechte Striche dargestellt. Die übrigen Ziffern erklären sich durch die sogenannte *decussatio*, d. h. durch Kreuzung mit einer weiteren Linie, was eine verzehnfachende Wirkung hatte. So entstand das Zeichen $\lambda = 10$. Ein Beweis für die Richtigkeit dieser Ansicht ist das Vorkommen der Formen $\text{H} = 20$, $\text{HH} = 30$ und $\text{HHH} = 40$. Um die weitläufige Wiederholung der senkrechten Striche zu vermeiden, bildete man durch Halbieren der etwas gedrehten Form X ein Zeichen für die Zahl 5; die Etrusker benützten die untere Hälfte Λ , die Römer zogen die obere vor V; bei den Oskern findet sich beides. Um 10 mal 10 auszudrücken, verwendete man einen weiteren Strich und erhielt \times . Dieses Zeichen hat sich in stilisierter Gestalt am besten auf etruskischen Münzen erhalten in der Form XIC ; die Lateiner vereinfachten es zu C wohl in Anlehnung an den Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes *centum* (= hundert). Derselbe Beweggrund, der zur Halbierung von X führte, veranlaßte auch die Bildung eines Zeichens für 50 durch Halbierung von \times ; bei den Etruskern finden wir T , bei den Römern J ; daraus wurde später L , dann L , und schließlich ging das Zeichen durch Anpassung an eine Buchstaben-

1) In dieser Weise wird auf die Seitenzahlen im I. Teile dieser Schrift verwiesen (Band 1 dieser Sammlung).

form in L über. Aus X entstand durch zweifache *decussatio* zunächst das Zeichen (X) für 1000, und dieses ging allmählich über in (X) bzw. (X). Diese Form findet sich häufig in geschriebenen Urkunden bei Römern und Oskern; sogar auf Steininschriften aus der Kaiserzeit ist sie nicht selten, z. B. (X)CII = 1152. Aus der eckigen Form entstanden nach und nach die runden Formen ∞ und (I). Die Halbierung dieses Zeichens für 1000 führte durch allmähliche Anpassung an eine Buchstabenform schließlich zu dem Zeichen D = 500. Das Zeichen M = 1000 erscheint erst in späterer republikanischer Zeit und ist lediglich als Abkürzung des lateinischen Wortes *mille* (= tausend) anzusehen.

Verhältnismäßig spät erst entstand bei den Römern und im lateinischen Mittelalter das Bedürfnis, auch größere Rangzahlen zu bezeichnen. Dabei bildeten sich im Laufe der Zeit verschiedene Methoden heraus. Ausgehend von dem Zeichen (I) für 1000 wurden zunächst die Rangzahlen 10^4 , 10^5 usw. durch weiteres Einschließen in zwei Halbkreise gebildet und durch Unterdrückung der linken Halbkreise wieder Zeichen für 5000, 50 000 usw. geschaffen. Dann wurde einem über ein Zahlzeichen gesetzten wagrechten Strich eine vertausendfachende Wirkung beigelegt; so ist z. B. die Zahl XV̄ = 15 000 aus dem Jahre 712 n. Chr. belegt; und schließlich wurden durch Vorsetzen der Ziffern X und C vor das Zeichen M mit multiplikativer Wirkung Zeichen für 10 000 und 100 000 geschaffen. Endlich wurde durch Einrahmen mittels eines unten offenen Rechtecks eine Multiplikation mit 10^5 ausgedrückt. Weitere Einzelheiten sind aus folgender Übersicht zu ersehen.

Dezimale Stufenzahlen	Zwischenstufen
I = 1	V = 5
X = 10	↓, ↓, ⊥, L . . = 50
C = 10^2	D = 500
(I), (X), ∞, M, Ī . . = 10^3	(I), (D), VM, V̄ = 5000
((I)), XM, X̄ . . . = 10^4	(I)), LM, L̄ . . = 50 000
((I)), CM, C̄ . . . = 10^5	(I)), DM, D̄ . . = 500 000
((I)), [X] . . . = 10^6	[L] = 5 000 000
[C] . . . = 10^7	
[M] . . . = 10^8	

Beim Anschreiben beliebiger Zahlen werden diese römischen Zahlzeichen bekanntlich im wesentlichen *additiv* verwendet unter Beachtung des Gesetzes der Größenfolge. Um so auffälliger ist deshalb der Funktionswechsel, der eintritt, wenn eine der Ziffern I, X oder C der nächst größeren Stufen- oder Halbstufenzahl (mit Ausnahme von M) im Sinne der Schrift vorangeht; sie werden dann subtrahiert, also $IV = 4$, $IX = 9$, $XL = 40$, $XC = 90$, $CD = 400$. Diese Subtraktionsstellung findet sich auch bei Etruskern, Umbrenn und Oskern; bei ihnen ist aber wegen der linksläufigen Schrift $XI = 9$ und $IX = 11$. Die Verwendung der Subtraktion¹⁾ ist das auffallendste Merkmal der römischen Ziffern; sie kommt bei anderen Völkern nur vereinzelt vor (vgl. die in I, 26 angeführten Beispiele aus der altbabylonischen Zahlenschreibung) und wurde wohl zum Zwecke der Raumerparnis erfunden.

Wenn man den Versuch macht, mit den römischen Ziffern auch nur die kleinste *Rechnung* auszuführen, etwa die einfache Addition $\overline{X} \overline{CXXXDCL} + \overline{X} \overline{CCXXIX}$ ($1130650 + 10229$), so wird man sich leicht von der Unbeholfenheit dieses Ziffernsystems überzeugen, bei dem jede deutliche Unterscheidung der Stufenzahlen unmöglich ist. Schon beim Lesen dieser Zahlen muß man immer eine kleine Rechnung im Kopfe ausführen. Man wird sich deshalb nicht wundern, daß ein Volk, bei dem ein solches Ziffernsystem üblich war, in der Mathematik keine großen Leistungen aufzuweisen hat. In der Tat ging den nüchternen und fürs Praktische veranlagten Römern, die doch auf dem Gebiet der Rechts- und Kriegswissenschaft und der Geschichtschreibung Hervorragendes geleistet haben, jeder Sinn und alle Begabung für *theoretische Mathematik* ab. Sie haben gar nichts zur Fort-

1) Bei den *Zahlwörtern* finden sich subtraktive Bildungen nicht nur im Lateinischen (z. B. *undeviginti*), sondern auch im Griechischen, im Sanskrit und in anderen Sprachen. Es sei noch auf die merkwürdige Tatsache hingewiesen, daß diese subtraktiven Bildungen in der Reihe der *Zahlwörter* und der *Zahlzeichen* an ganz verschiedenen Stellen des Zahlensystems vorkommen und sich nirgends decken; denn in der Sprache treten sie nur bei den durch 10 teilbaren Zahlen (mit Ausnahme von 10 selbst) auf und beschränken sich auf die Subtraktion von eins und zwei; vgl. *IV* (*quattuor*) und *duodeviginti* (*XVIII*)).

führung und nur wenig zur Verbreitung dieser Wissenschaft getan. Auf dem Gebiet der Geometrie hinterließen sie nur eine Anzahl praktischer Regeln für die Landvermessung, und auf dem Gebiet der Arithmetik begnügten sie sich mit den einfachsten Regeln des praktischen Rechnens auf dem Abakus, den wir im nächsten Abschnitt kennen lernen werden. Trotzdem sind ihre Zahlzeichen mit ihrer Sprache über die ganze Welt verbreitet worden, haben wie diese sich gehalten, als das römische Reich längst untergegangen war, haben, wie wir sehen werden, dem Eindringen eines anderen weit bequemeren Ziffernsystems den zähesten Widerstand entgegengesetzt und leben heute noch unter uns fort, obwohl sie zum Rechnen längst nicht mehr benutzt werden.

ZWEITER ABSCHNITT

DER STELLENWERT UND DIE NULL

Ehe wir die Entwicklung unseres eigenen, jedermann bekannten Ziffernsystems schildern, wollen wir das Prinzip des Stellenwertes, auf dem es beruht, einer gesonderten Betrachtung unterwerfen und zeigen, daß verschiedene räumlich und zeitlich weit voneinander getrennte Völker diesem einfachen und wichtigen Gedanken nahe gekommen sind, ja sogar ihn auf bemerkenswerte Art und Weise verwirklicht haben. Wir haben schon in I, 27 hervorgehoben, daß bei diesem Prinzip die Zahlzeichen nicht bloß einen *Wert an sich* haben, sondern daß ihre Bedeutung auch noch abhängt von der *Stellung*, die sie im Verbande mit anderen Zahlzeichen bei der symbolischen Darstellung einer Zahl einnehmen. Für das Wesen des Stellenwertes ist es gleichgültig, auf welcher Grundzahl das betreffende Ziffernsystem aufgebaut ist, und wieviele Ziffern es enthält. Ein vollkommenes Stellensystem aber, das auf der Grundzahl n aufgebaut ist und dessen Stufenzahlen also $1, n, n^2, n^3, \dots$ sind, muß, theoretisch betrachtet, für jede Zahl, die kleiner als n ist, ein besonderes Zeichen besitzen, und es muß ferner ein Zeichen haben, durch welches nötigenfalls angedeutet werden kann, daß in einer gegebenen Zahl die Einheiten einer bestimmten Stufe fehlen,

d. h. also das Zeichen, das wir heute eine *Null* nennen. Die Gesamtzahl der Ziffern eines solchen Systems wäre demnach gleich der Grundzahl n . Aus praktischen Gründen folgt, daß n nicht allzu groß sein darf, daß es aber auch nicht zweckmäßig wäre, wenn n gleich 2, 3 oder 4 gesetzt würde. Ein derartiges Ziffersystem gestattet, ohne Einführung neuer Zeichen, Zahlen von beliebiger Größe darzustellen; es erfüllt aufs vollkommenste die Forderung Hankels, die wir in I, 9 angeführt haben. Geistige Konstruktion und zweckmäßige Bezeichnung machen jede in einem solchen System geschriebene Zahl anschaulich und plastisch. In unserem *Dezimalsystem* kommt noch der weitere Vorteil hinzu, daß n gleich der Zahl unserer Finger ist.

Die *Abhängigkeit des Wertes der Ziffern von der Stellung* ist auf verschiedene Weise denkbar; es kann der Wert einer Ziffer zunehmen mit ihrer Verschiebung im Zahlenbild von rechts nach links oder von links nach rechts oder von unten nach oben. Das wird in der Hauptsache von der Richtung der Schrift und von der Art abhängen, wie die Zahlen ausgesprochen werden. Wesentlich ist aber, daß in einem Stellensystem mit der Grundzahl n jede Ziffer bei der Verschiebung um eine Stelle einen n -mal größeren oder n -mal kleineren Wert annimmt. Da bei unserem dezimalen Stellensystem der Wert einer Ziffer bei einer Verschiebung um eine Stelle von rechts nach links zehnmal so groß wird, so daß die höheren Stufenzahlen links von den niederen stehen, so dürfen wir im Hinblick auf das Gesetz der Größenfolge schließen, daß unser Ziffersystem bei einem Volke entstand, dessen Schrift wagrecht von links nach rechts lief. Dieses unser Ziffersystem ist das einzige, das nach den angeführten theoretischen Grundsätzen als schlechthin vollkommen bezeichnet werden darf.¹⁾

In mehr oder weniger unvollkommener Form findet sich aber das Stellensystem schon *in früher Zeit bei verschiede-*

1) Der Leser möge nach der in I, 27 gegebenen Anleitung versuchen, eine beliebige, im Dezimalsystem geschriebene Zahl in ein Stellensystem mit anderer Grundzahl umzuschreiben. Es ist z. B., wenn wir die Grundzahl jeweils als Index der Zahl anhängen, $3432_{10} = 102\ 212_5 = 13002_7 = 4633_9 = 1\ b\ a\ 0_{12}$. Dabei sind im Zwölfersystem die „Ziffern“ 10 und 11 durch a bzw. b dargestellt.

nen Völkern. Schon im ersten Teil (S. 27 ff.) haben wir das auf der Grundzahl $n = 60$ beruhende Stellenwertsystem der *Babylonier* geschildert, in welchem allerdings nur die zwei Ziffern Υ und \langle verwendet wurden. Wir haben dort auch erwähnt, daß die Babylonier bei Sexagesimalbrüchen hin und wieder an die Stelle fehlender Einheiten einer Stufe das Zeichen \supset setzten, das auch sonst in babylonischen Texten vorkommt und als Trennungs- oder Füllungszeichen benutzt wurde. Bei ganzen Zahlen ist es aber noch nie gefunden worden; offenbar hatten also die Babylonier *die Bedeutung der Zahl Null* und den Wert eines besonderen Zeichens für sie *nicht klar erkannt*.

Auch bei den *Griechen* spricht manches dafür, daß sie dem Gedanken des Stellenwertes recht nahe kamen. Zwar ändern ihre Zahlzeichen im allgemeinen ihren Wert nicht mit der Stellung, sondern sie bekommen ein unterscheidendes Zeichen, wenn sie etwas anderes bedeuten sollen. Aber wenn in der Zahl $\overline{\beta\omega\lambda\alpha} = 2831$ zuweilen der Strich bei β weggelassen und $\beta\omega\lambda\alpha$ geschrieben wird (I, 38), so ist dies doch eine erste Spur des Stellengedankens. Daß dessen Keim auch in der von Archimedes und Apollonius geschaffenen Weiterbildung des griechischen Zahlensystems und in der Verwendung der *Pythmenes* steckt, haben wir schon in I, 41 hervorgehoben. Griechische Astronomen verwendeten in ihren Zahlentafeln mit den von den Babyloniern übernommenen Sexagesimalbrüchen zur Bezeichnung von fehlenden Einheiten den Buchstaben σ , wohl als Anfangsbuchstaben des Wortes $\sigma\delta\delta\acute{\epsilon}\nu =$ nichts; auch sind Beispiele bekannt, wo ein leerer Platz sowohl bei Zahlen als im Text durch einen Strich | bezeichnet wird, und in jüngeren Papyrusurkunden der arabischen Zeit wird das Fehlen einer Zahl durch einen schrägen Doppelstrich // angedeutet. Doch finden sich alle diese Fälle nur vereinzelt, und wir möchten deshalb diese Zeichen *nicht als Symbole für die Zahl Null*, sondern lediglich als *Füllungszeichen* eines leerbleibenden Platzes ansehen.

Deutlicher erscheint der Gedanke des Stellenwertes in der Anlage des griechischen und römischen Rechenwesens. Da die Ziffernsysteme der Alten für die *Zwecke des Rechnens* wenig geeignet waren, und da außerdem passende

\bar{X}	M	C	X	I
	•		•	•
		•	•	•
		•	•	•
		•	•	•
		•	•	•

Schreibstoffe erst spät bekannt wurden, so erwies sich eine instrumentale Form des Rechnens als nötig. Bei allen Völkern des Altertums bis weit hinein ins Mittelalter finden wir deshalb den *Rechentisch* oder *Abakus* verbreitet. Im einzelnen zeigten diese Rechentische wohl verschiedene Formen, auf die wir nicht einzugehen brauchen. Im wesentlichen aber bestanden sie bei Griechen

und Römern aus einer Tafel von Holz, Stein oder Metall, auf welcher senkrecht gegen den Rechner oder parallel zu ihm Striche eingeritzt waren. Die dadurch entstehenden Spalten oder Einschnitte waren häufig mit den dezimalen Stufenzahlen überschrieben. Um *beim Rechnen* irgend eine Zahl darzustellen, legte man in jede Spalte, oder auch auf jede Linie, die entsprechende Anzahl von Steinchen (lateinisch *calculi*, daher *calcularre* = rechnen), und es war nun lediglich Übungssache, durch Hin- und Herschieben dieser Steinchen die einfachsten Rechnungen auszuführen. Häufig war dieses Liniensystem durch eine dazu senkrechte Linie in zwei Hälften geteilt; in der einen (oberen) Hälfte bedeutete jeder Stein eine, in der anderen (unteren) fünf Einheiten (vgl. die obenstehende Abbildung). In diesem griechisch-römischen Abakus spielt der Stellenwert insofern eine Rolle, als jede Stelle durch eine Spalte oder einen Einschnitt dargestellt ist und jeder Stein je nach seiner Lage in jenem Liniensystem verschiedene Werte annehmen kann. N. Bubnow ist der Ansicht, daß schon die Griechen zur Verwendung von *gemerkten Steinen* übergingen, d. h. daß sie auf die Rechensteine die Zeichen des griechischen Zahlenalphabets von 1 bis 9 malten und dann in jede Spalte nur noch *einen* mit der gewünschten Ziffer bezeichneten Stein

M	X	H	Δ	I
⊕	○	⊖	⊙	⊗

zu legen brauchten; zur Andeutung der Null wäre die betreffende Spalte einfach leer zu lassen, oder durch eine runde, nicht bezeichnete Marke zu besetzen gewesen (vgl. die Abbildung). Irgend eine sichere Nachricht über die Verwendung derartig bezeichneter Rechensteine bei Griechen und Römern haben wir aber nicht. Daß das Rechnen mit Rechensteinen auf dem Abakus in Griechenland schon

in sehr alter Zeit geübt wurde, und daß diese Rechensteine ihren Wert mit der Stellung änderten, geht aus verschiedenen Zeugnissen griechischer Schriftsteller hervor.¹⁾ Für die *schriftliche Darstellung* der Zahlen wurden aber bei Griechen und Römern stets die früher geschilderten Ziffernsysteme verwendet.

Neuere Forschungen von E. Förstemann und E. Seler haben gezeigt, daß auch im mittelamerikanischen Kulturkreise ein Stellenwertsystem benützt wurde, das bei dem Volksstamm der *Maya* zu größter Vollkommenheit ausgebildet war. Die *Maya* waren eine Gruppe hochkultivierter Indianerstämme, die die atlantischen Küstenebenen des südlichen Mexiko und nördlichen Zentralamerika bewohnten, aber heute fast ganz ausgestorben sind. Ihre Kultur, die manche Berührungspunkte mit der der *Azteken* aufweist und ganz auf religiöser Grundlage ruht, erhob sich etwa im ersten oder zweiten Jahrhundert n. Chr. zu besonderer Eigenart, entwickelte sich vielseitig und erreichte ums sechste Jahrhundert einen gewissen Höhepunkt, der aber bald überschritten war. Nach mancherlei Schwankungen, die mit der Gründung von Kolonien und der Ausdehnung ihrer Herrschaft nach Süden zusammenhängen, läßt sich in der Kulturgeschichte der *Maya* im 11. Jahrhundert eine Art Renaissance feststellen, die etwa 200 Jahre dauerte. Dann begannen blutige Bürgerkriege, die die Vorherrschaft der *Maya* in Mittelamerika bedrohten und ihre Unterjochung durch die Spanier in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts vorbereiteten. Seither ist das Volk im Aussterben, die alte bedeutende Zivilisation ist dahin, die alten Sitten und Gebräuche sind fast in Vergessenheit geraten.

Zahlreiche Tempelinschriften und einige Handschriften der *Maya*²⁾ sind uns erhalten. Die *Schriftzeichen*, die erst etwa zur Hälfte entziffert sind, gehören einer äußerst verwickelten *Hieroglyphenschrift* an; sie wurden beim Schreiben in senk-

1) So sagt z. B. Polybios um die Mitte des 2. Jahrh. v. Chr., die Höflinge gleichen den Marken auf dem Abakus, weil sie bald wenig, bald viel gelten. Nach Diogenes Laërtius (250 n. Chr.) soll dieser Ausspruch sogar auf Solon zurückgehen. Einige Exemplare des griechischen und des römischen Abakus sind uns noch erhalten geblieben.


2) Die berühmteste befindet sich in Dresden.

rechten Spalten angeordnet, von denen je zwei zugleich von links nach rechts und von oben nach unten gelesen wurden. Die Anzahl der Zeichen ist verhältnismäßig klein; aber die Lesung der Maya-Hieroglyphen, die teils Silbenwert haben, teils Begriffe darstellen, ist außerordentlich schwierig; denn die *Grundzeichen* sind oft durch Beifügung von Verzierungen aller Art zu Figuren, kleinen Gemälden und zu sog. *Kopfformen* erweitert, d. h. zu Hieroglyphen, die das Aussehen eines menschlichen, tierischen oder grotesken Kopfes haben, in denen aber das wesentliche Element des betreffenden Grundzeichens irgendwie enthalten ist.

Fast alle bisher entzifferten Handschriften und Inschriften handeln von der Zeitrechnung oder von astrologischen, astronomischen und historischen Dingen. Das *Zahlzeichensystem* der Maya beruht im wesentlichen auf der Grundzahl 20¹⁾ und hängt aufs engste mit ihrer *Zeitrechnung* zusammen, die ebenso wie die Schrift von der Priesterschaft ausgebildet wurde. Die Grundlage der Zeitrechnung ist der Tag; die nächst höhere Zeiteinheit, der Monat, umfaßt eine Gruppe von 20 Tagen. Das amtliche Jahr der Maya unterscheidet sich von dem ihnen ebenfalls wohlbekannten Sonnenjahr und umfaßt 18 Monate, also 360 Tage. Jede weitere Zeitperiode, bis hinauf zu einer Periode von $2880000 = 18 \cdot 20^4$ Tagen, ist das 20fache der vorhergehenden und wird ebenso wie der Tag, der Monat und das Jahr durch eine bestimmte Hieroglyphe dargestellt. Dieses Kalendersystem ist also vigesimal gebaut mit der einzigen Ausnahme, daß das Jahr 18 Monate umfaßt, und der Grund hierfür scheint der zu sein, daß dadurch das künstlich geschaffene amtliche Jahr wenigstens einigermaßen mit dem wirklichen Sonnenjahr in Übereinstimmung gebracht wurde.

In den Mayatexten sind die Zahlen mit zwei verschiedenen Arten von *Zahlzeichen* geschrieben, nämlich entweder mit *Grundformen* oder mit *Kopfformen*. In den Inschriften finden sich beide Arten, in den Handschriften nur Grundformen. Das Zahlzeichensystem umfaßt 20 Zeichen, deren Grundformen aus Strichen und Punkten bestehen und in folgender Abbildung zusammengestellt sind:

1) Auch ihr sprachliches Zahlensystem ist vigesimal; vgl. A. F. Pott, *Die quinare und vigesimale Zählmethode*, Halle 1847, S. 93.

.	∴	—	•	••	•••	••••	≡
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
≡	••	•••	••••	≡	•	••	•••	••••	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	0







Das Zeichen für die Null ist in der Regel mit roter Farbe geschrieben; es hat die Form einer Linse oder eines Auges und spielt in den Kalenderrechnungen der Maya eine große Rolle; zuweilen findet sich auch ein besonderes Zeichen für die Zahl 20.

Um mit diesen Zahlzeichen eine beliebige Zahl zu schreiben, gab es zwei Methoden. Die *erste Methode*, die sich nur in den Inschriften findet und teils Grund-, teils Kopfformen¹⁾ verwendet, stellt eine Verbindung des additiven und des multiplikativen Verfahrens dar und deckt sich im wesentlichen mit der Zahlenschreibung der ägyptischen Hieroglyphenschrift: die Zeichen von 0 bis 19 treten als Faktoren vor die oben erwähnten Hieroglyphen für die vigesimalen Zeichen der Zeitperioden, die somit zugleich als Zeichen für die Stufenzahlen dienten. Diese Produkte wurden nach dem Gesetz der Größenfolge additiv von oben nach unten aneinandergesetzt, so daß wir z. B. für die Zahl 143567 das aus acht verschiedenen Zeichen zusammengesetzte

	19 · 7200
	18 · 360
	14 · 20
	7 · 1

(nebenstehende) Bild bekommen. Die *zweite Methode* aber, die nur in den Handschriften vorkommt und nur Grundformen verwendet, *beruht auf dem Stellenwertsystem* mit der Grundzahl 20; nur bei der Verschiebung einer Ziffer von der zweiten nach der dritten Stelle wird ihr Wert 18mal größer statt 20mal. Der Wert einer Ziffer ist um so größer, je weiter sie vom unteren Ende der Zahl absteht. Nach den früheren Ausführungen wird es genügen, an einigen aus der Dresdener Handschrift entnommenen Beispielen dieses Stellenwertsystem zu veranschaulichen; die jeweiligen Werte der einzelnen „Ziffern“ sind rechts daneben geschrieben.

1) Für die in Inschriften vorkommenden *Kopfformen* muß auf die Abbildungen bei S. G. Morley, S. 96—104 verwiesen werden.

$\overline{\cdot}$ 6 · 20 \cdot 1 121	 15 · 20  0 300	\cdot 1 · 360 $\overline{\cdot\cdot}$ 7 · 20 $\overline{\cdot}$ 11 · 1 511	 10 · 144 000  19 · 7200 $\overline{\cdot}$ 6 · 360  0 · 20  8 1 578 968
---	---	---	---

In sämtlichen Mayatexten scheinen die Zahlen nur den einen Zweck gehabt zu haben, *Zeiträume und Daten* anzugeben; auch einfache, auf das Kalenderwesen bezügliche Rechnungen scheinen mit ihnen ausgeführt worden zu sein. Von einem eigentlichen *Rechnen mit Stellenwert* ist jedoch bis jetzt nichts Sicheres bekannt. Aber dieses Stellensystem könnte, wenn es jenen Knick bei der dritten Stufenzahl nicht hätte, als ebenso vollkommen bezeichnet werden wie unser dezimales Stellensystem.

Wir erkennen aus diesen knappen Schilderungen, daß der Gedanke des Stellenwertes der Zahlzeichen in den ältesten Zeiten schon in Mesopotamien Wurzel faßte, daß er den Völkern des mittelmeeischen Kulturkreises nicht ganz fremd war, und daß er im mittelamerikanischen Kulturkreise in Verbindung mit der Null zu hoher Vollendung gelangte. Die nächsten Abschnitte werden seine Entwicklung auf indischem und europäischem Boden sowie in Ostasien zu schildern haben. Ob es sich in den verschiedenen örtlich und teilweise auch zeitlich weit voneinander entfernten Kulturmittelpunkten (Mesopotamien, Indien, Ostasien, Mittelamerika) jedesmal um eine *Neuerfindung* handelt, oder ob eine *Wanderung des Gedankens* anzunehmen ist, läßt sich nach den bis jetzt bekannten Tatsachen kaum entscheiden. F. Bork und andere haben dargetan, daß gewisse astronomische Vorstellungen des mittelamerikanischen, iranischen und babylonischen Gedankenkreises in enger Beziehung miteinander stehen, und die nächsten Abschnitte werden zeigen, daß auch zwischen Ostasien, Indien, Babylonien und Griechenland Beziehungen bestanden, die eine gegenseitige Beeinflussung dieser Länder bei der Verwendung des Stellenwertsystems als möglich und teilweise als glaubhaft erscheinen lassen.

DRITTER ABSCHNITT

ENTWICKLUNG DER ZIFFERSCHRIFT IN INDIEN

Wie in Ägypten, Babylonien und Griechenland, so weckten auch in Indien die Vorzüge einer großartigen, überaus fruchtbaren Natur ein reiches geistiges Leben. Die Kultur der Inder ist beträchtlich jünger als die der Ägypter und Babylonier; ihre erste Blütezeit fällt ungefähr mit dem Höhepunkt griechischen Lebens zusammen. Um die Wende des dritten zum zweiten Jahrtausend v. Chr. brachte das Auftreten der *Indogermanen* oder *Arier* die vorderasiatische Welt in Bewegung. Ob sie vorher auf dem Hochlande von Iran ihre Herden weideten, oder ob, wie neuere Forscher glauben, das Gebiet nördlich des Schwarzen Meeres und der Balkanhalbinsel ihre Heimat war, berührt uns hier nicht. Tatsache ist, daß etwa am Anfang des zweiten vorchristlichen Jahrtausends vorgeschobene Stämme der Indogermanen in Iran, am Indus und auf den südlichen Halbinseln Europas erschienen. In Europa führte die Vermischung dieser Stämme mit den hochgebildeten Urbewohnern der Ägäis zur Entwicklung der griechischen Kultur; im Osten, wo die indogermanischen Stämme der Inder und Perser unter dem Namen Arier im engeren Sinne zusammengefaßt werden, drangen sie allmählich im Pandschab und in Dekhan ein. Die Einwanderer unterdrückten die nicht-arischen, dunkelhäutigen Ureinwohner, die, soweit sie nicht ausgerottet wurden oder durch Mischung in indischen Volke aufgegangen sind, heute noch in manchen Gebieten Indiens als niederste, dienende und verachtete Kaste leben.

Bei den beiden obersten Kasten, den Priestern (*Brahmanen*) und Kriegern, entwickelte sich ein reges wissenschaftliches Leben und ein hoher Bildungsstand, der allerdings im wesentlichen auch auf diese beiden Kasten beschränkt blieb. Am glänzendsten zeigt sich die *wissenschaftliche Begabung* der Inder auf dem Gebiet der Grammatik. Ihre poetischen Schöpfungen gehören zum Besten, was die Weltliteratur hervorgebracht hat; ihre Götterlehre und Philosophie enthalten erhabene Gedanken. Aber *es fehlt ihnen jeder ge-*

schichtliche Sinn, und daher mag es kommen, daß sie in ihren wissenschaftlichen Werken kaum jemals die Vorgänger oder Lehrer erwähnen, aus denen sie geschöpft haben.

Die älteste überlieferte *Mundart* ist die Sprache der *Veden*, d. h. der kanonischen Bücher der Brahmanenreligion (Veda heißt Wissen). Die Entstehungszeit der ältesten Veden darf etwa um 1600 v. Chr. vermutet werden; sie enthalten Hymnen auf die Götter, religiöse Satzungen, gottesdienstliche Vorschriften und Gebräuche, sowie astronomische Erkenntnisse.

Diejenige *Sprache*, die wir aus der späteren indischen Literatur kennen, wird *Sanskrit* (d. h. rein oder heilig gemacht) genannt. Schon im 3. Jahrhundert v. Chr. aber war das Sanskrit aus der Reihe der gesprochenen Sprachen verschwunden und durch Tochtersprachen ersetzt, die zu dem alten Veda-Sanskrit etwa in demselben Verhältnis stehen wie das Französische zum Lateinischen. Als Gelehrtensprache bestand jedoch das Sanskrit ununterbrochen fort, und noch heute pflegt ein tüchtiger Brahmane im Sanskrit fließender zu schreiben als in seiner Muttersprache. Wie das Latein im Mittelalter, so war und ist das Sanskrit die Sprache der Literatur und Religion der Inder.

Alle Macht und alles Wissen war in der alten Zeit in den Händen der *Brahmanen*. Ihre Bedeutung für die Kulturgeschichte besteht darin, daß sie alles, was sie bei anderen Völkern kennen lernten, ständig vertieft und weiter gebildet, dem indischen Geiste angepaßt und dabei von Grund aus neu geschaffen haben. Das gemeine Volk lebte in Unkenntnis dahin und litt unter heftiger Bedrückung. Es war deshalb ein Hauptziel *Buddhas* bei der Gründung seiner neuen Religion (im 6. Jahrhundert v. Chr.), diese Lage des Volkes zu heben. Der Buddhismus verbreitete sich rasch und wurde im 3. Jahrhundert v. Chr. zur Staatsreligion erhoben. Aber kurz vor Christi Geburt gewann der Brahmanismus wieder an Boden und verdrängte den Buddhismus in allen Gebieten westlich vom Ganges; heute noch ist er in Vorderindien die herrschende Religion.

Es darf als sicher angenommen werden, daß schon in früher Zeit Indien einen regen Verkehr nach Westen, Norden und Osten hin mit Ägypten und Griechenland, Babylonien, Persien und China unterhielt. Eine wechselseitige

Übertragung von Kulturerrungenschaften zwischen diesen Völkern ist also sehr wahrscheinlich. Dies zeigt sich auch bei *den mathematischen Wissenschaften*. Zur Zeit als die Veden entstanden, waren die Inder in ihrer Astronomie und Rechenkunst wohl von den Babyloniern abhängig; aber aus dieser Zeit ist uns gar nichts Sicheres über ihre mathematischen Fertigkeiten bekannt. Später ist deutlich griechischer Einfluß festzustellen, obwohl eigene Leistungen und eigenartige Auffassung bei den Indern keineswegs fehlen. Die ältesten mathematischen Kenntnisse der Inder finden sich in den *Sulvasutras*, d. h. Schnurregeln, die wohl in der Zeit zwischen 1000 und 200 v. Chr. entstanden sind. Sie enthalten in Versform neben anderen auf den Gottesdienst bezüglichen Dingen geometrische Regeln für die Konstruktion von Altären, zahlreiche Sonderfälle des pythagoreischen Satzes und einige Sätze über die Verwandlung des Kreises in geradlinig begrenzte Figuren. Der Zweck dieser zweifellos bodenständigen geometrischen und arithmetischen Regeln ist weniger mathematischer als vielmehr religiöser Art, und deshalb enthalten sie nur Tatsachen, keine Beweise. Nach der Zeit der *Sulvasutras* folgt ein Zeitraum von etwa 600 Jahren, aus dem über mathematische Leistungen der Inder fast nichts bekannt ist. Aber es ist wohl möglich, daß die bei den Brahmanen so sehr beliebte mündliche Unterweisung in den Priesterschulen viel mehr und umfassendere mathematische Kenntnisse lehrte als wir heute wissen. Der Inder achtet selbst heutigen Tages das geschriebene Wort geringer als das gesprochene; sein wissenschaftlicher Verkehr gründet sich auf mündliche Mitteilung, die Wissenschaft besteht für ihn nur im Munde des Lehrers und kann nur von einem Lehrer, nicht aus Büchern gelernt werden. Deshalb darf bei den Indern aus dem Fehlen von schriftlichen Quellen nicht ohne weiteres auf einen Mangel an mathematischen Leistungen und Kenntnissen geschlossen werden. Die spätere Entwicklung der indischen Mathematik haben wir hier nicht zu schildern; bei Gelegenheit werden wir auf einzelne hervorstechende Tatsachen hinweisen.

Die alten Inder haben *Schrift und Alphabet* von den Semiten entlehnt. Die älteste Form des sog. *Brahmi-Alphabets* der Inder stimmt in der Mehrzahl der Zeichen mit den

ältesten Formen der nordsemitischen Buchstaben überein. Die Einführung dieser semitischen Zeichen erfolgte wohl ums Jahr 800 v. Chr. von Mesopotamien her durch indische Kaufleute, die am dringendsten eines Mittels zur Aufzeichnung ihrer geschäftlichen Beziehungen bedurften. Gewisse Angaben der buddhistischen Literatur beweisen das Vorhandensein der Schrift im 6. oder 5. Jahrhundert v. Chr.; die Zeichen wurden auf Holz, Bambus, Rinde, Blätter und Goldplatten eingeritzt. Die Brahmanen scheinen sich bald dieses Mittels zur Festlegung ihrer literarischen Erzeugnisse bemächtigt zu haben. Als älteste Form der Brahmi-Schrift finden wir ums Jahr 500 v. Chr. ein von gelehrten Brahmanen in Anpassung an die Sanskritsprache verbessertes und vervollständigtes Alphabet von 46 Grundzeichen, in welchem von links nach rechts geschrieben wurde. Daneben waren noch andere Alphabete im Gebrauch, die teils aus der Brahmi abgeleitet sind, teils neuere Entlehnungen von anderen Völkern enthalten. Wir erwähnen hier nur noch die sog. *Kharosthi-Schrift*, die auf Inschriften, Münzen und in Handschriften religiösen Inhalts im nordwestlichen Indien benutzt wurde. Als im 5. Jahrhundert v. Chr. die Perser in Indien herrschten, brachten sie ihre aramäischen Schreiber in die indische Provinz mit und zwangen die Schreiber der indischen Würdenträger, die aramäische Schrift zu lernen und sie im Verkehr zwischen den persischen und indischen Kanzleien anzuwenden. Das Aramäische war ja, wie wir schon in I, 43 erwähnt haben, im letzten Jahrtausend v. Chr. die internationale Verkehrsschrift in Vorderasien. Aus dieser aramäischen Schrift entstand dann durch Anpassung an die indischen Mundarten und unter Heranziehung der Regeln der Brahmi die Kharosthi-Schrift. Sie ist linksläufig und wurde vom 4. Jahrhundert v. Chr. bis zum 3. Jahrhundert n. Chr. neben der Brahmi gebraucht.

Wenn wir uns nun zu der *indischen Zahlbezeichnung* wenden, so ist vor allem darauf hinzuweisen, daß aus den schon angeführten, mit der indischen Eigenart zusammenhängenden Gründen das schriftliche Material, auf das wir uns stützen können, sehr spärlich ist. Vor dem fünften vorchristlichen Jahrhundert werden die Inder wie alle alten Völker ihre Zahlen mit Stäbchen, Steinen und Knoten bezeichnet haben,

wie das heute noch in gewissen Teilen Südindiens vorkommt. Die ältesten indischen Zahlzeichen zerfallen in zwei Gruppen, die *Kharosthi-* und die *Brahmi-Ziffern*.

In den alten *Kharosthi*-Inschriften des Königs Asoka aus dem 3. Jahrhundert v. Chr. finden sich nur wenige *Zahlzeichen*; sie bestehen aus einzelnen Strichen für die Zahlen 1 bis 5. Dagegen fand man in Inschriften aus dem 1. Jahrhundert v. Chr. und in späteren Urkunden das hier abgebildete Ziffernsystem.

ZAHLZEICHEN DER KHAROSTHI-SCHRIFT¹⁾

(1. Jahrhundert v. Chr.)

I	II	III	X	IX	II X	XX	ʎ	ʑ	ʒʒ	ʒʒʒ	ʒʒʒʒ	ʒʒʒʒʒ	ʒʒʒʒʒʒ
1	2	3	4	5	6	8	10	20	50	60	100	200	

Es ist wahrscheinlich ebenso wie die Buchstaben aramäischen Ursprungs und mit diesen zu einer Zeit eingeführt worden, als die Aramäer noch das alte in I, 45 besprochene Ziffernsystem verwendeten. Den Zeichen für 4, 10, 20 und 100 sind wir schon bei den Aramäern und Nabatäern begegnet; wir haben auch ihre mutmaßliche Entstehung kennen gelernt. Alle übrigen Zahlen wurden aus den Grundformen unter Beachtung des Gesetzes der Größenfolge gebildet. Zur Bezeichnung von 200, 300 usw. treten die Ziffern für 2, 3 usw. mit multiplikativer Wirkung vor das Zeichen für 100.

Weit wichtiger ist für uns die *Bezeichnung der Zahlen in der Brahmi-Schrift*. Auch diese ist erst nachweisbar auf Inschriften aus der Zeit des Königs Asoka im 3. Jahrhundert v. Chr., und dann wieder in Höhleninschriften aus dem 2. Jahrhundert n. Chr. Sie war von da an viele Jahrhunderte lang in ganz Indien auf Inschriften, Münzen und in Handschriften fast allgemein im Gebrauch und wird gelegentlich heute noch benutzt. Die äußeren Formen dieser Zahlzeichen sind je nach der Entstehungszeit und dem Fundort der Urkunden etwas verschieden; aber im ganzen zeigen sie nach Form und Verwendung durch ganz Indien denselben Typus. Dieses Ziffernsystem, von dem eine Anzahl Formen in Spalte I–VII auf S. 26 abgebildet sind, hat besondere Zeichen für die 9 Einer, die 9 Zehner, sowie für 100 und 1000. Die Zeichen

1) G. Bühler, *Indische Paläographie*, S. 73 und Tafel I.

für 1, 2, 3 sind einfache Striche, wie bei fast allen Völkern; auf den ältesten Asoka-Inschriften stehen sie senkrecht, später, vielleicht unter chinesischem Einfluß (s. S. 46), wagrecht. Für die Zahlen 4 bis 50 läßt sich kein erkennbares Entstehungsgesetz auffinden; vielleicht ist 70 aus 60 und 90 aus 80 je durch Hinzufügung eines Strichs entstanden. Ziemlich deutlich ist die Entstehung der Zeichen für 200 und 300, 2000 und 3000 auf diese Weise aus den Zeichen für 100 und 1000 zu erkennen. Die Zahlen 400 bis 900 und 4000 bis 70000 (die größte bis jetzt gefundene Zahl) werden durch Verbindung und Verschlingung der Zeichen für 100 und 1000 mit den Grundzeichen für 4 bis 9, bzw. 4 bis 70 dargestellt. Die übrigen Zahlen werden additiv durch Zusammensetzung und Verschlingung dieser Grundformen unter Beachtung des Gesetzes der Größenfolge bezeichnet, in ähnlicher Weise wie wir dies bei der Schilderung der hieratischen und demotischen Ziffernschrift näher ausgeführt haben (I, 21). Unter den Gelehrten und nicht-arischen Eingeborenen der Insel *Ceylon* hat sich bis heute ein ganz ähnliches Ziffernsystem erhalten (Spalte VIII), das vermutlich von der Brahmi-Ziffernschrift abstammt.

Zahlreiche Theorien über die *Entstehung* und *Weiterbildung der Brahmi-Ziffernschrift* sind schon aufgestellt worden; keine von ihnen ist allgemein anerkannt oder vermag voll zu befriedigen. Die Ähnlichkeit, die dieses Ziffernsystem mit der hieratischen und demotischen Zahlenschreibung aufweist, sowohl hinsichtlich der äußeren Form einzelner Zeichen und der multiplikativen Bildung gewisser Zehner, Hunderter und Tausender als auch hinsichtlich der Verwendung der Ziffern zur Zusammensetzung beliebiger Zahlen¹⁾, hat zu der von verschiedenen Gelehrten angenommenen Hypothese geführt, daß die Elemente des indischen Systems aus Ägypten entlehnt, daß aber die übernommenen Zeichen von den brahmanischen Schulmännern in eigenartiger Weise weiter entwickelt und dabei in ihrer äußeren Form immer mehr gewissen Buchstaben und Silbenzeichen des Brahmi-Alphabets angepaßt worden seien.

1) Wir empfehlen dem Leser eine Vergleichung der Zeichen in Spalte I—VIII auf S. 26 miteinander und mit den ägyptischen Zeichen in I, 20.

Wie man sieht, unterscheidet sich das Ziffernsystem der Brahmi grundsätzlich in keiner wesentlichen Hinsicht von den Ziffernsystemen der Ägypter, Griechen und Semiten. Aber es gewinnt für uns erhöhte Bedeutung dadurch, daß seine Zeichen für 1 bis 9 aller Wahrscheinlichkeit nach *die Urformen unserer heutigen Ziffern* sind. Etwa vom 6. Jahrhundert n. Chr. an werden nämlich in Indien die ersten neun Zeichen der Brahmi-Ziffern in Verbindung mit dem Stellenwert benutzt, und das eben geschilderte Ziffernsystem wird etwa vom 12. Jahrhundert an allmählich in den Hintergrund gedrängt. Ob die Anregung zur Einführung des Stellenwertes von außen her zu den Indern kam, etwa von den Babyloniern oder Chinesen oder gar, wie N. Bubnow meint, von den Griechen, oder ob es sich um eine selbständige Schöpfung der Brahmanen handelt, darüber wissen wir nichts Sicheres. Jedenfalls aber fiel der Gedanke des Stellenwertes in Indien, wo schon von alters her eine gewisse Zahlenfreudigkeit herrschte, auf einen günstigen Boden und fand dort in der Ausbildung des Rechnens mit Stellenwert seine Entwicklung. Während nämlich unsere Sprache ursprünglich nur bis zur dritten Potenz von 10 besondere Stufennamen hatte (zehn, hundert, tausend) und alle höheren Potenzen durch umständliche Zusammensetzungen ausdrücken mußte (die Worte Million, Milliarde usw. sind ganz jungen Ursprungs), finden sich in Indien (z. B. in dem Lehrgedicht *Mahabharatta*) für alle dezimalen Stufenzahlen bis zu phantastischer Höhe hinauf besondere Namen. So wird z. B. die Zahl 86 789 325 178 folgendermaßen ausgesprochen: 8 *kharva*, 6 *vrinda*, 7 *vyrbuda*, 8 *kôti*, 9 *prayuta*, 3 *niyuta*, 2 *ayuta*, 5 *sahasra*, 1 *çata*, 7 *daçan*, 8. Dadurch kam den Indern die *Gleichberechtigung jeder einzelnen Rangordnung* viel mehr zum Bewußtsein als anderen Völkern. Alles Rechnen ließ sich auf Operationen mit Einern zurückführen, und wenn man in dem angeführten Beispiel die Namen der Stufenzahlen unterdrückt, so bietet sich der Gedanke des Stellenwertes eigentlich von selbst dar. Dieser Gedanke mußte sich noch mehr aufdrängen, wenn, wie wir auf Grund der Angaben F. Woepckes vermuten dürfen, in Indien schon in früher Zeit beim Rechnen ein mit Staub bedecktes Brett, also eine Art Abakus, gebräuchlich war. Nur *ein* Schritt war dann noch zu tun, allerdings

ein Schritt von wesentlicher Bedeutung, nämlich die Erfindung der Null. Wann, wo und von wem ein solches Zeichen in Indien zuerst benutzt wurde, wissen wir nicht; wir werden es wohl auch nie mit Sicherheit feststellen können. Aus der Tatsache, daß die Sanskritwörter, mit welchen die Null bezeichnet wird, alle die Bedeutung Leere, Himmel, Äther usw. haben, hat man zu schließen versucht, daß mit diesem Wort die leere Stelle auf dem Rechenbrett angedeutet werden sollte. Auch hat man darauf hingewiesen, daß es gerade der indischen Philosophie und Geistesrichtung ganz entspräche, dem Nichts diese besondere Bedeutung beizulegen und ein eigenes Zeichen dafür zu erfinden. Aber die sicher beglaubigten Nachrichten über Stellungsziffern in Indien und die inschriftlichen Belege aus der Zeit vor dem 9. Jahrhundert n. Chr. sind so spärlich, daß die ganze Theorie einer indischen Herkunft unserer Ziffernschrift in neuerer Zeit von G. R. Kaye ernstlich in Zweifel gezogen wurde, allerdings ohne daß er imstande wäre, eine positive Behauptung an ihre Stelle zu setzen. Ehe daher sichere Beweise für eine andere Ansicht beigebracht sind, schließen wir uns den hervorragenden Indologen G. Thibaut, G. Bühler u. a. an, die in ihrem Urteil darin übereinstimmen, daß das Ziffernsystem mit Stellenwert und mit der Null etwa im 6. Jahrhundert in Indien seinen Ursprung genommen habe.

Wir halten es also für *wahrscheinlich*, daß die indischen Gelehrten zu Anfang unserer Zeitrechnung mit Hilfe eines in den Sand oder Staub gezeichneten Abakus gerechnet haben, wobei vielleicht die einzelnen Spalten mit den erwähnten Namen der Stufenzahlen überschrieben wurden. Statt aber in den Spalten die Anzahl der betreffenden Einheiten durch ebensoviele Striche oder Marken zu bezeichnen, wie es die Römer und Griechen taten, schrieb man wohl die Einer der Brahmi-Ziffern auf die Rechenmarken. Später, als zur Andeutung einer leeren Stelle ein besonderes Zeichen erfunden war, konnte man die zur Trennung der Spalten dienenden Striche des Rechenrahmens weglassen, und schließlich lösten sich die Zahlzeichen von den Marken und wurden auf das reichlich vorhandene pflanzliche Schreibmaterial geschrieben. Es ist wohl möglich, daß in engeren Fachkreisen der indischen Gelehrten schon im 5. Jahrhundert oder noch früher die Bedeutung des Stellen-

wertes und der Null erkannt wurde. Das Fehlen von inschriftlichen Belegen aus dieser an Urkunden armen Zeit ist kein zwingender Grund gegen diese Ansicht, wenn man sich an die schon erwähnte Eigenart der brahmanischen Überlieferung erinnert, und wenn man bedenkt, daß die in den Sand geschriebenen Rechnungen doch immer wieder zerstört werden mußten.

Ein Blick auf die Spalten IX bis XIV unserer Abbildung legt in der Tat die Vermutung nahe, daß die ältesten uns bekannten indischen Stellungsziffern sich aus den Brahmi-Ziffern entwickelt haben. Wie diese weisen sie örtliche und zeitliche Unterschiede in der äußeren Form auf. Die Zeichen der Zahl 346 auf einer in Südindien gefundenen Kupferplatte, die aus dem Jahre 595 n. Chr. stammen soll, gelten als die ältesten epigraphischen Beispiele von Ziffern mit Stellenwert (Spalte IX). Weitere Beispiele, die vermutlich aus dem 8. und 9. Jahrhundert stammen, reißen sich an. Die Null wurde, wie es scheint, ursprünglich durch einen Punkt bezeichnet. Dieser Punkt bedeutet wohl zunächst einfach einen leeren Platz in der Zahlenreihe¹⁾, der nicht ausgefüllt werden konnte oder erst ausgefüllt werden sollte; im *Bakshali-Manuskript* z. B., einem auf Birkenrinde geschriebenen Rechenbuch, das im Jahre 1882 im nordwestlichen Indien gefunden wurde, bezeichnet der Punkt sowohl die Null als die unbekannte Größe (Spalte XII). Später wurde für die Null ein Kreis benutzt, vielleicht in Anlehnung an das Zeichen für 10 (Spalte I bis III). Das früheste unzweifelhafte Vorkommen der kreisförmigen Null in Indien ist nach F. Hill aus dem Jahre 876 belegt; die Datierung einer Kupferplatte, die die Null ebenfalls enthält und aus dem Jahre 738 stammen soll, ist zweifelhaft. Vom 10. Jahrhundert an haben sich die Ziffern mit Stellenwert nebst der Null über einen großen Teil Indiens ausgebreitet.

Zu diesen spärlichen inschriftlichen Belegen²⁾ für das Vor-

1) Die Araber bezeichnen die Null heute noch durch einen Punkt (Spalte XXII).

2) Es hat sich herausgestellt, daß zahlreiche südindische Inschriften, die angeblich aus früherer Zeit stammen, gefälscht sind und erst im 11. Jahrhundert hergestellt wurden. Deshalb hat G. R. Kaye die Datierung der erwähnten Belege angezweifelt und in viel jüngere Zeit gesetzt; vgl. besonders *Journal and Proc. of the Asiatic Society of Bengal (New Series)*. Bd. 3 (1907) S. 475—508.

ERLÄUTERUNGEN
ZU NEBENSTEHENDER TAFEL

- Spalte I: Aus einer Höhleninschrift vom westlichen Dekhan; 2. Jahrhundert v. Chr.
- Spalte II: Auf indischen Münzen; 2. bis 3. Jahrhundert n. Chr.
- Spalte III: Aus einer Inschrift vom nördlichen Indien; 4. bis 6. Jahrhundert n. Chr.
- Spalte IV: Aus einer Inschrift vom südlichen Indien (*Valhabinschrift*); 6. bis 8. Jahrhundert n. Chr.
- Spalte V: Aus einer auf Birkenrinde geschriebenen Handschrift (*Bower-Manuskript*); 5. Jahrhundert n. Chr.
- Spalte VI und VII: Aus nordindischen Handschriften; 12. Jahrhundert n. Chr.
- Spalte VIII: Zahlzeichen der Singhalesen nach Pihan, S. 140.
- Spalte IX: Die ältesten Stellungsziffern aus Südindien; 595 n. Chr. (?)
- Spalte X: Ziffern der Zahl 675, auf eine Kupferplatte geschrieben; 8. Jahrhundert.
- Spalte XI: Aus einer indischen Inschrift vom 11. bis 12. Jahrhundert.
- Spalte XII: Ziffern des „Rechenbuchs von *Bakshali*“ (nordwestl. Indien); nach Hoernle im 8. bis 9. Jahrhundert, nach Kaye nicht vor dem 12. Jahrhundert geschrieben.
- Spalte XIII und XIV: Aus verschiedenen indischen Inschriften und Handschriften.
- Spalte XV: Westarabische Gobarziffern nach Pihan, S. 208.
- Spalte XVI: Apices aus der sog. Geometrie des Boethius (lateinische Handschrift aus dem 11. Jahrhundert) nach Pihan, S. XX.
- Spalte XVII bis XX: Europäische Ziffern aus dem 12., 13., 14. und 15. Jahrhundert nach Hankel, S. 325 und Pihan, S. XXII.
- Spalte XXI: Moderne indische (*Devanagari*) Ziffern nach Pihan, S. 54.
- Spalte XXII: Moderne Ziffern der Araber nach Pihan, S. 207.

Wo nichts anderes angegeben ist, sind die Zeichen gezeichnet nach G. Bühler, *Indische Paläographie*, Tafel IX. Sämtliche Zeitangaben für indische Inschriften sind unsicher.

kommen der Stellungsziffern in Indien vor dem 10. Jahrhundert kommen nun aber noch *andere Gründe*, die dafür sprechen, daß in Indien der Gedanke des Stellenwerts und die Bedeutung der Null schon frühzeitig unter den Gelehrten bekannt und verbreitet waren. Nach Thibaut setzen die Rechenregeln, welche der ums Jahr 500 n. Chr. schreibende Astronom Aryabhata gibt, die Kenntnis des Stellenwerts voraus. Der indische Mathematiker Brahmagupta, der am Anfang des 7. Jahrhunderts n. Chr. lebte, behandelte eingehend *die Eigenschaften der Null* und das Rechnen mit ihr; über besondere Zeichen für die Ziffern sagt er aber nichts. Etwa vom 6. Jahrhundert an werden in den mathematischen und astronomischen Schriften der alten Inder, die, wie übrigens fast alle ihre wissenschaftlichen Werke, in Versen abgefaßt sind, die Zahlen durch *symbolische Worte* ersetzt. Dabei wurden die Namen solcher Dinge, Wesen oder Begriffe verwendet, die entweder in Wirklichkeit oder nach dem Glauben der Inder in bestimmter Anzahl vorkommen. So wird z. B. Null dargestellt durch die oben schon erwähnten Wörter, die Zahl 1 durch das Wort Mond oder Erde, 2 durch Auge, Hände, 3 durch Eigenschaft (weil der Inder drei Charaktereigenschaften unterschied), 32 durch Zähne usw. Größere Zahlen wurden durch Zusammensetzung dieser Wörter nach dem *Prinzip des Stellenwertes* gebildet, wobei diese Wortungetüme von rechts nach links zu lesen sind, die Einer also im Sinne der Schrift voranstehen.¹⁾ Bei den zahlreichen Synonymen, welche die Sanskritsprache für die meisten Wörter besitzt, konnte auf diese Weise jede beliebige Zahl in jedem beliebigen Versmaß bequem untergebracht werden. Diese Zahlbezeichnung war in Indien sehr verbreitet und wird heute noch benutzt. Das älteste, uns bekannte Beispiel stammt aus dem Jahre 604 n. Chr. Endlich erwähnen wir noch einige südindische Systeme, in denen die *Zeichen des* nach phonetischen Grundsätzen geordneten *Alphabets* zur Bezeichnung der zehn Ziffern verwendet und beliebige Zahlen durch Aneinanderfügen dieser Buchstaben unter Benutzung des Stellenwertes ausgedrückt wurden. Das älteste bekannte Beispiel für diese Bezeichnungsweise stammt allerdings erst aus dem 12. Jahrhundert.

1) Z. B.: Vier Leeren-Zahn-Ozean = 4320000.

Die Schriftart, die in Indien heute für das Sanskrit vorwiegend im Gebrauch ist, wird *Devanagari* genannt; sie hat zahlreiche Abarten, die aber alle von der Brahmi abstammen. Die modernen Ziffern der Inder sind Abkömmlinge der alten Stellungsziffern (s. Spalte XXI der Abbildung). Es gibt aber bei den verschiedenen indischen Völkerschaften zahlreiche Formen, auf die wir nicht eingehen können; auch die Null in Punktform kommt noch vor. Einige südindische Volksstämme, wie z. B. die *Tamulen* und *Malabaren*, benutzen die Devanagari-Ziffern und die Null nicht, sondern verwenden außer den Ziffern 1 bis 9 noch besondere Zeichen für 10, 100 und 1000. Das Stellungsprinzip tritt aber auch bei ihnen hervor, soweit dies ohne Verwendung der Null möglich ist.

Endlich sei erwähnt, daß die Erfindung der Stellungsziffern und der Null, sowie des Rechnens mit ihnen schon vom 9. Jahrhundert an von vielen arabischen und westeuropäischen Schriftstellern den Indern zugeschrieben wurde; der nächste Abschnitt wird einige Beispiele dafür bringen.

VIERTER ABSCHNITT

AUSBREITUNG DER STELLUNGSZIFFERN BEI DEN ARABERN UND IM ABENDLANDE

Wann und wie unsere heutigen Ziffern in Europa eingeführt wurden, ist eine vielumstrittene Frage. Ebenso wie über dem Ursprung der Zifferformen und über der Entstehung des Stellenwertgedankens noch manche Dunkelheit liegt, so sind auch aus der Geschichte des Übergangs dieser Ziffern nach dem Abendlande nur einzelne Daten sicher bekannt. Wir müssen uns deshalb damit begnügen, das Wesentliche und mit einiger Sicherheit Bekannte zu erzählen; wegen der Einzelheiten sei auf das Buch von D. E. Smith und L. C. Karpinski verwiesen.

Wir haben viele gut beglaubigte Nachrichten, daß schon zu Beginn unserer Zeitrechnung zahlreiche *Beziehungen zwischen dem Orient und den europäischen Ländern* bestanden. Insbesondere fand ein fortwährender geistiger Verkehr statt zwischen den Ländern an den Ufern des mittelländischen

Meeres und den Mittelpunkten indischen Handels und indischen Geisteslebens. Kaufleute, höfische Gesandte, Offiziere und Gelehrte verkehrten zu Wasser und zu Land zwischen Indien, Arabien, Mesopotamien und Europa. Es ist deshalb wohl möglich, daß die Formen der frühesten indischen Ziffern, längst ehe die Null hinzuerfunden und damit erst die Vollkommenheit des Stellensystems erreicht war, bei Kaufleuten und Händlern und vielleicht auch bei einzelnen Gelehrten in Nordägypten, Spanien und Italien bekannt waren. Diese Leute hatten aber weder Anlaß noch die Fähigkeit, die fremdartigen Zeichen aufzuschreiben und zu sammeln, und so dürfen wir uns nicht wundern, daß aus den Zeiten des frühen Mittelalters keinerlei schriftliche Beweise für die Bekanntschaft des Abendlandes mit den indischen Zifferformen vorhanden sind.

Ebenso wie mit dem Abendland hatte Indien einen lebhaften Handelsverkehr mit Arabien, Syrien, Persien und China, so daß auch die Kaufleute dieser Länder mit den indischen Ziffern mehr oder weniger bekannt werden mußten. Mit der Ausbreitung der arabischen Macht seit dem Jahre 622 n. Chr. wurden diese Beziehungen natürlich lebhafter. Als das Kalifengeschlecht der Abbasiden sich um die Mitte des 8. Jahrhunderts in Bagdad einen Herrsersitz geschaffen hatte, begann bei den Arabern das Streben, sich nicht bloß durch kriegerische Taten, sondern auch durch friedliche Eroberungen im Reiche der Wissenschaften und Künste auszuzeichnen. Bagdad wurde der Mittelpunkt geistigen und wissenschaftlichen Lebens. An diesen *Verdiensten um die Wissenschaft* sind jedoch auch die von den Arabern unterworfenen Völkerschaften in hohem Maße beteiligt. Unter den echten Arabern war die Schreibkunst anfänglich wenig verbreitet; aber die unterjochten Christen, Juden, Syrer und Perser waren damit wohl vertraut. Sie besorgten das staatliche Verwaltungswesen, waren als Ärzte überall gesucht, und manche Teile der arabischen Wissenschaft sind geistiges Eigentum der Syrer und Perser. Aber das Bedürfnis und die Gelegenheit zu wissenschaftlicher und literarischer Tätigkeit war doch von den Arabern geschaffen worden; in arabischer Sprache wurde alles aufgezeichnet, und die arabischen Dynastien und vornehmen Familien taten viel zur Förderung der Wissenschaften.

Während der Regierung der Abbasiden, unter denen Harun

al Raschid als Zeitgenosse und Freund Karls des Großen der bekannteste ist, begann eine äußerst rege und fruchtbare *Übersetzertätigkeit*. Durch eingeborene Andersgläubige wurden viele wertvolle wissenschaftliche Werke aus dem Syrischen, dem Griechischen, dem Persischen, dem Indischen ins Arabische übersetzt. Am meisten unter allen Zweigen der Wissenschaft aber entsprachen dem arabischen Geiste die *Mathematik* und die *Astronomie*. Die christlichen Syrer, die ihren geistigen Mittelpunkt in Edessa im westlichen Mesopotamien hatten, waren von jeher in steter Berührung mit hellenischem Geistesleben geblieben und hatten auch Beziehungen zu Indien; sie waren die Vermittler zwischen griechischer, indischer und arabischer Gelehrsamkeit. Angehörige der christlichen Sekte der Nestorianer hatten die griechischen Klassiker ins Syrische übersetzt, und nun wurden sie aus dieser Sprache in die verwandte arabische übertragen. Bald waren Euklid, Archimedes, Apollonius, Ptolemäus den Arabern mundgerecht gemacht; sie wurden von ihnen mit Erläuterungen versehen und dem Unterricht zugrunde gelegt. Auch die reichen Schätze mathematischer und astronomischer Kenntnisse, welche die Inder aufgespeichert hatten, fanden an den Arabern dankbare Erben. Daß sie mit Erfolg bemüht waren, sich den ihrem Denken ursprünglich fremden Schatz griechischer und indischer Weisheit völlig anzueignen, geht daraus hervor, daß sie die Geometrie und Algebra um wertvolle Untersuchungen bereichert und daß die Leistungen ihrer Gelehrten den glänzenden Aufschwung, den die Mathematik am Ende des Mittelalters in Europa nahm, vorbereitet haben.

Es ist bekannt, daß schon unter den Abbasiden die Völker Nordafrikas und Spaniens eigene Bahnen der Entwicklung einschlugen, und daß neben dem *ostarabischen* ein *westarabisches* Reich mit der Hauptstadt Cordoba entstand. Aber die Gemeinsamkeit der Religion und der Sprache bildeten trotz der politischen Trennung ein einigendes Band. In Spanien und Sizilien wurde dasselbe Arabisch gesprochen und gelehrt wie in Bagdad, und so war für die Wissenschaft Griechenlands und Indiens der Weg gebahnt, auf dem sie über Nordafrika und Spanien nach dem Herzen Europas wandern konnte. Allerdings blieb die durch politische Feindseligkeiten hervorgerufene Kluft zwischen Ost- und Westarabern nicht ohne

Einfluß auf den wissenschaftlichen Verkehr, und so erklärt es sich, daß manche Errungenschaften der Ostaraber nicht oder erst sehr spät nach dem Westen gelangten, und daß die wissenschaftliche Blüte des Maurenreichs erst im 9. Jahrhundert unserer Zeitrechnung eintrat.

Die älteste einwandfreie außerindische *Nachricht über das indische Rechnen* findet sich in einer Schrift des Syrers Severus Sebokt aus dem Jahre 662. Dieser Mann war seit 640 Bischof eines Klosters am oberen Euphrat. Er widmete sich dort dem Studium der Philosophie, der Mathematik und der Theologie, war weithin bekannt als ausgezeichnete Kenner des Griechischen und hatte zahlreiche Schüler. In jener Schrift verwarft sich Severus gegen die Anmaßung der Griechen, die alles zu wissen und zu können glauben. Er stellt ihrem Hochmut die Kenntnisse der Babylonier und Inder entgegen, die in der Astronomie äußerst scharfsinnige Entdeckungen gemacht haben, und dabei erwähnt er das geschickte Rechenverfahren der letzteren, das alle Beschreibung übersteige und mit neun Ziffern bewerkstelligt werde. Die Form dieser Ziffern überliefert er nicht; aber es ist anzunehmen, daß er sie kannte und seinen Schülern übermittelte. Im Jahre 773 besuchte ein indischer Astronom den Kalifen Almansor in Bagdad und überreichte ihm ein astronomisches Tafelwerk, das auf des Kalifen Befehl ins Arabische übersetzt wurde. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die indischen Zahlzeichen mit diesem Werk nach Bagdad kamen, wenn sie auch vereinzelt den arabischen Kaufleuten schon vorher bekannt gewesen sein mögen.

Zwischen 800 und 825 schrieb der ostarabische Mathematiker Muhammed ibn Musa Alchwarazmi, der aus der ostpersischen Provinz Khorassan¹⁾ stammte und später in Bagdad lebte, ein berühmt gewordenes Werk über das angewandte Rechnen (die Algebra) und ein Buch über das Rechnen mit indischen Zahlzeichen. In diesen Werken stützt sich der Verfasser auf persische und indische Überlieferungen sowie auf indische Schriften über Mathematik; für die Algebra sind auch griechische Vorlagen benutzt worden. Alchwarazmi erwähnt die Ziffern in einer Weise, die voraussetzt, daß sie damals bei den Arabern bekannt waren. Die Null

1) Sein Beinamen bedeutet „der aus Khorassan“.

beschreibt er als „einen kleinen Kreis“¹⁾; aber die Form der übrigen Ziffern, die er etwa benutzt hat, ist uns nicht überliefert. Gleichzeitig mit Alchwarazmi schrieb auch ein jüdischer Astronom in Bagdad über die indische Rechenkunst. Zahlreiche arabische Schriftsteller der folgenden Jahrhunderte bezeichnen in ihren Werken die Arithmetik als indisch. Da andererseits noch ums Jahr 700 der Kalif Alwalid zu Damaskus den Gebrauch der griechischen Sprache bei der Führung der Steuerlisten verboten, aber die griechischen Zahlbuchstaben ausdrücklich erlaubt hatte mit der Begründung, daß es im Arabischen keine geeigneten Zahlzeichen gebe, so erscheint die Annahme gerechtfertigt, daß die indischen Ziffern etwa gegen das Ende des 8. Jahrhunderts bei den Ostarabern allmählich bekannt wurden, und daß sie sich im Laufe des 9. Jahrhunderts in der islamischen Welt ausgebreitet haben.

Die ältesten *arabischen Manuskripte mit indischen Ziffern* stammen aus den Jahren 874 und 888; das erstere enthält die Zahl 260, also zugleich die älteste arabische Null in Form eines Punktes. Das älteste uns bekannte arabische Werk, das *alle 10 Zahlzeichen* enthält, wurde im Jahre 970 in Schiras in Persien geschrieben. Aus diesen *ostarabischen Ziffern* haben sich die heute noch bei Arabern und Türken im praktischen Leben gebräuchlichen Formen entwickelt, die in Spalte XXII (S. 26) dargestellt sind. Beim Vergleich mit den modernen *Devanagari-Ziffern* (Spalte XXI) ist zu beachten, daß Drehungen der einzelnen Zeichen um 90° oder 180° als unwesentlich anzusehen sind.

Neben den Zahlzeichen der Ostaraber und den Devanagari-Ziffern der Inder ist noch eine dritte Zifferngruppe zu unterscheiden, die sich vorzugsweise bei den *Westarabern* in Spanien und Nordafrika findet und unter dem Namen *Gobar* bekannt ist. Dieses Wort bedeutet *Staub*; wahrscheinlich wurden die Ziffern beim Rechnen in den Staub oder Sand geschrieben. Das System der Gobarziffern besteht aus 9 Zeichen; die Null wurde ursprünglich in Form eines Punktes über die betreffende Ziffer gesetzt, so daß $5 = 50$, $\ddot{5} = 500$, $\ddot{\ddot{5}} = 5000$ ist. Diese Punkte sind aber für die Gobarformen nicht wesentlich. Sie

1) Diese Worte stammen allerdings aus einer späteren lateinischen Bearbeitung von Muhammeds Werk.

finden sich auch bei ostarabischen Ziffern, und von den Indern berichten ostarabische Schriftsteller des 10. Jahrhunderts, daß sie die Zehner, Hunderter und Tausender durch untergesetzte Punkte bezeichnet haben. Es mag sein, daß wir es hier mit einem Versuch der Araber zu tun haben, sich die unverstandene Null mundgerecht zu machen. Denn dieses Verfahren der über- und untergesetzten Punkte mußte ihnen besonders einleuchten, da sie aus der älteren syrischen Zahlbezeichnung (I, 48) mit der Verwendung unterscheidender Punkte zum Zweck der Wertänderung eines Zahlzeichens wohl vertraut waren. Die *Formen der Gobarziffern* (Spalte XV) unterscheiden sich teilweise erheblich von denen der ostarabischen und Devanagari-Ziffern; unsere modernen Ziffern stehen ihnen näher als den letzteren.

Wir dürfen wohl annehmen, daß die Ziffern sich von Indien aus durch Kaufleute und Gelehrte längs den Gestaden des Mittelmeers westwärts bis nach Spanien ausbreiteten, und daß sie sich dort im 8. Jahrhundert in den Händen der Westaraber allmählich zu den Gobar-Formen entwickelten. Vielleicht geschah dies in Verbindung mit dem griechisch-römischen Abakus, den die Araber wohl in Spanien vorfanden. Unterdessen war in Indien das schriftliche *Rechnen mit Stellungswert* ausgebildet worden, hatte sich zu den Ostarabern verbreitet und gelangte schließlich auch zu den Westarabern. Diese machten sich die indischen Rechenmethoden zu eigen, behielten aber ihre Gobar-Formen bei. So mag etwa der Stand der Dinge um die Wende des 9. Jahrhunderts gewesen sein, kurz ehe die Gobarziffern ins christliche Abendland eindringen und in weiteren Kreisen bekannt wurden. Dies geschah wohl zuerst in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts.

Bei dem starken Verkehr, der auch im 6. bis 10. Jahrhundert zwischen Europa und dem Orient fort dauerte, ist es nicht unwahrscheinlich, daß europäische Kaufleute und höfische Gesandte¹⁾ auf ihren Reisen die indischen oder arabischen Ziffern und ihre Verwendung mit dem Stellenwert schon im 9. Jahrhundert oder früher kennen gelernt hatten. Aber Kaufleute und Hofmänner pflegen keine Rechenbücher zu schreiben, und deshalb blieb diese Kenntnis auf einzelne

1) Wir erinnern z. B. an die Gesandtschaft, die Karl der Große ums Jahr 800 zu Harun al Raschid nach Bagdad schickte.

beschränkt, bis die Ziffern in den Kreisen der Gelehrten bekannt wurden. Im christlichen Abendland waren zunächst fast ausschließlich die römischen Ziffern im Gebrauch gewesen. Zum Rechnen wurde der griechisch-römische Abakus benutzt. *Mit diesem Abakus wurden nun vom 10. Jahrhundert an die Gobarziffern in Verbindung gebracht.* Man stellte 9 Marken aus Holz oder Horn her, auf welche die 9 Ziffern der Westaraber gezeichnet waren, und diese 9 Marken, welche man *caracteres* oder *apices* nannte, dienten in Verbindung mit dem Abakus zur Darstellung jeder beliebigen Zahl (siehe die Abbildung auf S. 57). Natürlich fand die Null bei diesem Verfahren keine Stelle; denn wenn von irgendeiner Stufe keine Einheit vorhanden war, so blieb eben die betreffende Stelle im Abakus leer, oder es wurde eine Marke ohne jede Bezeichnung hingelegt (vgl. S. 12).

Einer der ersten Gelehrten, die nachweislich die Gobarziffern in Verbindung mit den Marken auf dem Abakus benutzten und die Rechenmethoden auf diesem Instrument lehrten, war Gerbert, der spätere Papst Sylvester II. (etwa 940–1003), ein mit großen Fähigkeiten und umfassenden Kenntnissen ausgerüsteter Mann, der als Lehrer weithin gefeiert war. Er scheint die Gobarziffern in der spanischen Mark von Kaufleuten kennen gelernt zu haben. Über die Bedeutung des Stellenwertes und der Null war er sich wohl kaum klar; denn im Text seiner Schriften stellte er die Zahlen immer durch römische Ziffern dar. Zahlreiche Gelehrte haben im 10. bis 12. Jahrhundert dieses instrumentale Rechnen auf dem Abakus gelehrt; man nennt sie *Abazisten*. Auf ihren Marken sind neben den Gobarziffern manchmal auch griechische und römische Zahlzeichen aufgemalt. Eine Verwendung der neuen Zahlzeichen außerhalb des Abakus findet sich jedoch bis zum 12. Jahrhundert nur vereinzelt,¹⁾ und auch die Null und ihre Bedeutung wurde sehr langsam bekannt. Erst als die Abazisten eine *schriftliche Darstellung* ihres

1) Bemerkenswert ist, daß sich in jener Zeit Zahlzeichen verschiedener Art mit Stellenwert verbunden finden, z. B. I·O·VIII·IX = 1089, δβ€0 = 4250; ١٠٠٨ = 1048. Auch die in I, 50 geschilderten arabischen Zahlbuchstaben wurden von dem Ostaraber Alberuni (973–1048), der viele Jahre in Indien zubrachte, in dieser Weise verwendet.

Systems begannen, mußten sie der Vollständigkeit halber auch den ungemerkten Stein aufzeichnen; sie malten darauf einen Kreis mit einem kleinen konzentrischen Loche.¹⁾ Um die Wende des 11. Jahrhunderts traten bei den Abazisten rätselhaft, fremdartige Namen für die zehn Zeichen auf, die in der Geschichte des Rechnens eine gewisse Berühmtheit erlangt haben und erst im 15. Jahrhundert ganz verschwanden. Neuerdings hat J. Rusk a nachgewiesen, daß diese Namen nichts anderes sind als Verstümmelungen der entsprechenden arabischen *Zahlwörter*, die von Abschreibern mit ungenügenden arabischen Sprachkenntnissen für fremde Namen der *Zahlzeichen* gehalten wurden.

Von der Mitte des 11. Jahrhunderts an machte sich *ein gewaltiger Aufschwung im wissenschaftlichen Leben Europas* bemerkbar. Insbesondere trat die Neigung hervor, mit den Schriften der Griechen bekannt zu werden. Da aber damals nur wenige das Griechische beherrschten, und andererseits die griechischen Texte sehr selten und kaum auffindbar waren, so sah man sich notwendigerweise auf die Araber angewiesen, bei denen Übersetzungen und Erläuterungen griechischer Klassiker vorhanden waren. Einerseits haben die damals beginnenden Kreuzzüge, die die Christenheit mit den Ostarabern in nähere Berührung brachten, dazu beigetragen, solche Übersetzungen im Abendland bekannt zu machen; andererseits lernten die Gelehrten von ganz Europa auf den hohen Schulen zu Toledo, Sevilla und Granada dieselben kennen und übertrugen sie samt den dazugehörigen Erläuterungen ins Lateinische.

Unter den ins Lateinische übersetzten Werken befanden sich auch die oben erwähnten Schriften des Muhammed ibn Musa Alchwarazmi. Durch diese arabischen Werke, sowie durch unmittelbaren Verkehr zwischen den Westarabern und den christlichen Gelehrten und Kaufleuten fand das *Rechnen mit den indischen Ziffern* im Abendlande Eingang und wurde neben den Rechenmethoden auf dem Abakus angewandt. Diese neue Rechenkunst bezeichnete man von der Mitte des 12. Jahrhunderts an in Europa mit dem Namen *Algorithmus*, was nichts anderes ist als eine Verstümmelung

1) Durch dieses Loch wurde wohl die Schnur gezogen, an der die Rechenmarken aufbewahrt wurden.

von Muhammeds Beinamen Alchwarazmi. Die Gelehrten, die dieses schriftliche Rechnen mit Stellenwert lehrten, hießen *Algorithmiker* im Gegensatz zu den *Abazisten*.

Das größte Verdienst um die *Einführung der indisch-arabischen Ziffern und Rechenmethoden in Europa* hat sich Leonardo von Pisa erworben. Dieser bedeutende Mann wurde ums Jahr 1175 in Pisa als Sohn eines Großkaufmanns geboren und in einer Hafenstadt der nordafrikanischen Küste erzogen. Er machte später weite Reisen, auf denen er mit Gelehrten und Kaufleuten aller Länder zusammenkam und die bei ihnen üblichen verschiedenen Ziffernsysteme und Rechenmethoden kennen lernte. Im Jahre 1202 schrieb er ein Werk mit dem Titel *Liber abaci*, in dem er unter ausdrücklicher Erwähnung der Inder die neuen Zahlzeichen erklärte und zur Ausführung der wichtigsten kaufmännischen Rechnungsarten ohne Verwendung des Abakus benutzte. Um die Mitte des 13. Jahrhunderts erschienen noch einige weitere, ebenfalls in lateinischer Sprache abgefaßte Werke über den *Algorithmus*, die als Lehrbücher viel benutzt wurden. Um diese Zeit kam auch die Bezeichnung *arabische Ziffern* auf, obwohl der indische Ursprung der neuen Methoden vielen Schriftstellern des Mittelalters bekannt war.

Die Ansicht N. Bubnows, daß unsere Ziffern aus *bodenständigen Zeichen europäischer Abazisten* entstanden seien, und daß unsere Rechenmethoden nebst dem Stellenwertsystem auf den griechischen Spaltenabakus zurückgehen, wollen wir hier erwähnen, ohne sie uns zu eigen zu machen. Sie beruht auf einseitiger Überschätzung lateinischer und griechischer Texte unter Vernachlässigung arabischer Urkunden und einwandfreier geschichtlicher Tatsachen.

Man sollte denken, daß die praktischen neuen Zahlzeichen und das bequeme neue Rechnungsverfahren bald weiteste *Verbreitung* erlangt und die römischen Ziffern sowie das Rechnen auf dem Abakus verdrängt hätten. Dem ist aber nicht so. Mancherlei Gründe wirkten zusammen, um ihre Verbreitung zu hemmen. Vor allem müssen wir bedenken, daß zu jener Zeit, wo die Buchdruckerkunst noch nicht erfunden und der Erwerb von Büchern nur den reichsten Leuten möglich war, wo auch die Kunst des Schreibens und Lesens auf verhältnismäßig kleine Kreise beschränkt blieb,

die Ausbreitung neuer Gedanken und Methoden auf erhebliche Schwierigkeiten stieß. Die Verbreitung wissenschaftlicher und praktischer Kenntnisse geschah im wesentlichen durch mündlichen Unterricht. Auf den alten Universitäten spielte die Rechenkunst in jener Zeit nur eine untergeordnete Rolle. Dazu kam, daß Leonardos Werk für kaufmännische Kreise etwas schwer verständlich war, daß bei dem Mangel an geeigneten Schreibmaterialien kein Anlaß bestand, von der Verwendung des Abakus mit den Apices abzugehen, und daß die modernen, bequemen Rechenmethoden erst allmählich ausgebildet wurden und in weitere Kreise drangen. Endlich müssen wir an die Zähigkeit des durchschnittlichen menschlichen Geistes denken, die sich allen Neuerungen hemmend entgegensetzt. Zwar verbreiteten die zahlreichen fremden Studenten, die im 13. Jahrhundert in Italien studierten, langsam die Kenntnis von Leonardos Werk in weiteren Kreisen des Abendlandes, und in den Kreisen der Klostergelehrsamkeit waren deshalb die neuen Ziffern schon zu Beginn des 13. Jahrhunderts mehr oder weniger genau bekannt. Aber das gemeine Volk bediente sich im allgemeinen noch bis ins 16. Jahrhundert der schwerfälligen römischen Ziffern zum Anschreiben von Zahlen und benützte zur Ausführung der einfachen Rechnungen des täglichen Lebens die Finger oder andere instrumentale Hilfsmittel. In Osteuropa hat erst der aus Kleinasien stammende Mönch Maximus Planudes zu Anfang des 14. Jahrhunderts in einem griechisch geschriebenen Rechenbuch seine Landsleute auf die Feinheiten der indischen Rechenmethoden hingewiesen unter Verwendung ostarabischer Zifferformen. Aber noch am Ende des 14. Jahrhunderts wurden dort die griechischen Zahlbuchstaben mit Stellenwert benutzt, und erst im 16. Jahrhundert findet man bei byzantinischen Schriftstellern den Gebrauch der indisch-arabischen Ziffern in größerem Umfang.

Zur Belebung dieses allgemeinen Bildes geben wir schließlich noch einige *Einzelheiten*. Die ältesten europäischen Schriftstücke mit einwandfreier Datierung, die alle neun Ziffern ohne die Null in der Gobarform enthalten, sind zwei lateinische Manuskripte, von denen das eine im Jahre 976 in einem Kloster bei Logrono am oberen Ebro geschrieben wurde, während das andere eine ebenfalls in Spanien her-

gestellte Abschrift davon aus dem Jahre 992 ist. Zahlreiche Beispiele von Ziffern verschiedener Gestalt in europäischen Manuskripten aus dem 11. und 12. Jahrhundert reihen sich an. Die früheste Spur einer Rechnung mit indisch-arabischen Ziffern findet sich in einer lateinischen Algorithmus-Schrift aus dem Jahre 1143. Bemerkenswert ist ferner ihr Vorkommen in einer Regensburger Chronik vom Jahre 1167, weil sie sich sonst in Deutschland außerhalb der wissenschaftlichen Werke vor dem 14. Jahrhundert nur vereinzelt nachweisen lassen. In Frankreich und Italien dagegen scheinen sie etwas weiter verbreitet gewesen zu sein. So ist z. B. eine sizilianische Münze mit indisch-arabischen Ziffern aus dem Jahr 1138 bekannt, und in Florenz wurden sie im Jahre 1299 verboten, wahrscheinlich weil die städtischen Beamten sie nicht lesen konnten. Im 14. Jahrhundert erscheinen sie in Deutschland auf Grabsteinen (Ulm 1388) und Denkmälern, an Kirchen und Privathäusern, im 15. auch auf Münzen und Siegeln. In einem 1471 zu Köln gedruckten Werke Petrarca werden sie zum erstenmal zur Numerierung der Seiten angewandt. In den Kalendern aber, die unter den Volksbüchern den ersten Rang einnehmen, sind bis ins erste Drittel des 16. Jahrhunderts fast alle Zahlen in römischen Ziffern gedruckt, und auch in Protokollen und Rechnungen treten die neuen Ziffern erst um die Mitte des 16. Jahrhunderts auf. Oft sind sie in der Übergangszeit in eigentümlicher Weise mit den römischen Ziffern vermischt,¹⁾ welche *die gewenlich teutsch Zal* genannt wurden und sich ihrer Verdrängung durch die fremden Eindringlinge, die *Ziffern Zale*, mit beispielloser Zähigkeit widersetzen. Aber die Buchdruckerkunst verhalf den indisch-arabischen Ziffern doch schließlich zum Sieg, und als die deutschen Rechenmeister, besonders Adam Riese (1492–1559), das Rechnen mit ihnen lehrten²⁾, konnte nichts mehr ihre Verbreitung hindern. Diese Rechenmeister erleichterten zunächst dem gemeinen Volk die indischen Methoden dadurch, daß sie das *Rechnen auf den Linien* lehrten; das war ein Verfahren, bei dem mit Hilfe von Marken (Rechenpfennigen) auf einem wagrecht

1) Formen wie m.cccc8II = 1482, IVGII = 1502, MCCCC50 = 1450, IV0jj = 1502 kommen vor.

2) Vgl. Bd. 15 dieser Sammlung, S. 31 ff.

laufenden Linienschema (Rechenbank) die Zahlen dargestellt und die Operationen vollzogen wurden. Wer das verstand, konnte dann leicht zum freien schriftlichen Rechnen (dem *Rechnen auf der Feder*) übergehen, bei dem die indisch-arabischen Ziffern benutzt wurden. Seit jener Zeit haben sich die Rechenmethoden nur noch wenig geändert, und im 17. Jahrhundert verschwand das Abakusrechnen völlig.

Besonders interessant ist die *Geschichte der Null*. Die Indier nannten sie *sunya*, d. h. das Leere, weil sie ein Zeichen für die leere Stelle war. Die Araber übersetzten dies wörtlich durch das alt-arabische Wort *sifr*, welches leer bedeutet und später die Bedeutung Null annahm. Dies gab Anlaß zu dem spätlateinischen Wort *zefirum*, das z. B. Leonardo von Pisa benützte; im 15. Jahrhundert erscheint es in der zusammengezogenen Form *zéro*. Von anderen Algorithmikern wurde das arabische Wort seit dem 12. Jahrhundert neben anderen Bezeichnungen mit *cifra* übersetzt. Daraus wurde das französische *chiffre* und das deutsche *Ziffer*, welches Wort heute nicht mehr die Null allein, sondern alle 10 Zeichen bedeutet. Bis zur Zeit Eulers (18. Jahrhundert) kam es aber in beiden Bedeutungen vor, wie heute noch im Englischen, Schwedischen, Portugiesischen und Neuarabischen. Diese Entwicklung zeigt, daß unbewußt die Null¹⁾ als das Wesentliche in der Reihe der indisch-arabischen Ziffern erkannt wurde.

Die *Form der Ziffern* hat sich natürlich im Laufe dieser langen Entwicklung stark verändert. Die Zeichen der Abazisten blieben zwar im 10. bis 12. Jahrhundert ziemlich unverändert; auch sind sie bei allen dieselben. Der Grund ist wohl der, daß sie auf die Marken aufgezeichnet und deshalb der Mode und der willkürlichen Gestaltung einzelner Gelehrter weniger ausgesetzt waren. Die Zeichen der Westaraber und der Algorithmiker aber, die beim Rechnen auf Papier oder auf die Tafel geschrieben wurden, waren natürlich stärker veränderlich; denn sie waren allen möglichen Verzierungen und Schnörkeln der Schreiber sowie dem Einfluß der verschiedenen Schriftmittel

1) Null kommt natürlich vom lat. *nulla (figura)*, d. h. keine Ziffer; das Wort kam in Deutschland um die Wende des 15. Jahrhunderts auf, nachdem es in Italien längst eingebürgert war.

unterworfen. So erklärt es sich, daß die arabischen Ziffern, die im 12. Jahrhundert ins christliche Abendland gelangten, von denen der Abazisten einigermaßen verschieden waren, und daß auch weiterhin oft ganz wunderliche Formen zum Vorschein kamen. Ein im 14. Jahrhundert lebender Mensch konnte manchmal die Ziffern des 13. Jahrhunderts kaum mehr lesen. Auch heute sind ja die geschriebenen Ziffern nicht bei allen Menschen gleich. Seit der Erfindung der Buchdruckerkunst hat sich aber ihre Gestalt nur noch wenig verändert, und heute zeigen sich auch bei den verschiedenen Völkern, die sie benutzen, nur noch geringe Formunterschiede. Einige Beispiele für die verschiedene Gestalt der Ziffern finden sich in Spalte XVI bis XX unserer Abbildung (S. 26); im übrigen muß auf die Tafeln von G. F. Hill und auf das Werk von D. E. Smith und L. C. Karpinski verwiesen werden.

Die uns heute ganz geläufige *Ausdehnung des Stellenwertgedankens auf Brüche*, die wir schon beim babylonischen Sexagesimalsystem auftauchen sahen, trat in Europa erst gegen das Ende des 16. Jahrhunderts auf. Der Gedanke der *Dezimalbrüche* erscheint zum ersten Male im Jahre 1585 bei dem niederländischen Mathematiker Simon Stevin (1548 bis 1620). In der Bezeichnungsweise finden wir zunächst einen gewissen Rückschritt; die Stufe wurde nämlich nicht einfach durch die Stellung, sondern durch Beifügung von Strichen oder besonderen Zeichen angedeutet. Man schrieb z. B.

94 1' 3" 0''' 5'''' oder 94 ① ① 3 ② 0 ③ 5 ④
für 94,1305.

Unsere heutige Schreibweise, die die ganze Zahl von den Bruchzahlen durch ein Komma oder einen Punkt trennt, stammt von den Erfindern der Logarithmen, dem Schweizer Jobst Bürgi (1552–1632) und dem Schotten John Napier (1550 bis 1617), wurde aber erst im 18. Jahrhundert allgemein angenommen.

Endlich wollen wir noch darauf hinweisen, daß in neuester Zeit in den *Rechenmaschinen* die Grundgedanken des Stellen-systems in genialer Weise mit mechanischen Hilfsmitteln verbunden und zu einer neuen Art instrumentalen Rechnens von großer Vollkommenheit ausgebildet worden sind. Zwar hat schon Leibniz die erste Rechenmaschine erdacht; aber ihre

Verbesserung und weite Verbreitung fand sie erst im 19. und 20. Jahrhundert.¹⁾

Die Erfindung und allmähliche Vervollkommnung des Stellenwertsystems mit seinen 10 Zeichen gehören zu den wichtigsten Ereignissen in der Geschichte der menschlichen Geisteskultur. Der Gedanke des Stellenwerts erscheint uns zwar heute so einfach und selbstverständlich, daß wir leicht vergessen, welche Bewunderung er verdient. Auch ist es richtig, daß das Stellenwertsystem die Kulturwelt nur schüchtern und langsam erobert hat. Aber diese Verbreitung der Ziffern unter den Völkern des Abendlandes ist trotzdem eine der folgenreichsten Tatsachen der mathematischen Frührenaissance, der höchstens noch die Aufstellung des kopernikanischen Weltsystems an die Seite zu stellen wäre. Zahlen von jeder beliebigen, begrifflich und anschaulich ganz unvorstellbaren Größe und Kleinheit lassen sich mit diesen 10 Zeichen ohne jede Schwierigkeit darstellen, und so vermitteln sie den Zugang zum Abgrund des unendlich Großen und zu den Pforten des unendlich Kleinen. Mit ihrer Hilfe erlernen unsere Kinder mit Leichtigkeit Rechenmethoden, die im Altertum den größten Geistern Schwierigkeiten bereiteten und noch im Mittelalter dem Hochschulstudium vorbehalten waren. Mit ein paar Federstrichen leistet heute ein Kind das, was Jahrhunderte der Entwicklung bedurfte. Die Bewegung vom Einfachen und Natürlichen zum sinnvoll Zusammengesetzten und Künstlichen, wie sie die Entwicklung der modernen Ziffernschrift zeigt, sowie das Streben nach Konzentration, d. h. nach Arbeitersparnis durch Verdichtung geistiger Arbeit, wie es in der Geschichte der Rechenkunst auftritt, scheinen uns typische Beispiele für das Wesen des menschlichen Fortschritts zu sein.

1) Näheres bei K. Lenz, *Die Rechenmaschine und das Maschinenrechnen* (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 490) Leipzig 1915.

FÜNFTER ABSCHNITT

DIE ZAHLZEICHEN DER OSTASIATEN

Die *Chinesen* sind eine der ältesten Nationen der Welt. Das begabte und merkwürdige Volk, das im Lande der Mitte seit Jahrtausenden ein gleichförmiges, von äußeren Strömungen fast unberührtes Leben führt und erst in der Gegenwart anfängt, sich europäischen Einflüssen zu erschließen, hat eine alte und hohe Kultur. Es hat selbständig eine Reihe bemerkenswerter Entdeckungen gemacht, besitzt eine erstaunlich große Literatur und hat an staatlichen Einrichtungen Bewundernswertes geschaffen. Aber die treibenden Kräfte in seiner Kulturentwicklung sind stets überwiegend aus religiösen und praktischen Gesichtspunkten hervorgewachsen; der Trieb nach wissenschaftlicher Vertiefung fehlt den Chinesen. Daher mag es kommen, daß die bodenständige *chinesische Mathematik*, von der wir in neuester Zeit durch die Arbeiten japanischer Mathematiker genauere Kenntnis erlangt haben, keine hohe Entwicklung zeigt, sondern daß gerade in dieser Wissenschaft zu verschiedenen Zeiten fremde Einflüsse sich mittelbar und unmittelbar geltend machten.

Seit den ältesten Zeiten haben sich die Chinesen viel mit Kalenderfragen abgegeben, und deshalb ist auch die Rechenkunst früh gepflegt worden. Da sie ihr Land von Westen her besiedelten und möglicherweise mit den alten Bewohnern Babyloniens verwandt waren, so könnten sie ihre arithmetischen Kenntnisse von dorthier mitgebracht haben. Darauf würde ein altes Sexagesimalsystem hinweisen, das seit dem 27. Jahrhundert v. Chr. bis auf die Gegenwart zum Abzählen von Jahren und Tagen dient und auch der Kreisteilung zugrunde gelegt ist. Einzelfälle des pythagoreischen Satzes waren schon ums Jahr 1000 v. Chr. bekannt; zahlreiche Mathematiker beschäftigten sich seit den ältesten Zeiten mit arithmetischen, algebraischen und geometrischen Fragen, die sie in eigenartigem Gewande darstellten. Infolge der lebhaften Beziehungen Chinas zu Zentralasien drangen schon frühzeitig mathematische Kenntnisse von Westen her in China ein; indische Wissenschaft wanderte mit dem Buddhismus, der im Jahre 65 n. Chr. in China eingeführt wurde, dorthin; Sanskrit-

Werke wurden ins Chinesische übersetzt; chinesische Buddhisten besuchten Indien und brachten bei ihrer Heimkehr indische Wissenschaft mit. Vom 8. Jahrhundert an kamen arabische Kaufleute nach China, und seit dem 13. und 14. Jahrhundert waren Araber vielfach Lehrer der Chinesen in Astronomie und im Kalenderwesen. Vom 16. Jahrhundert an macht sich auch europäischer Einfluß in größerem Maße geltend, nachdem schon früher einzelne Europäer nach China gekommen waren. Von den Jesuitenmissionaren lernten die Chinesen europäische Mathematik und Astronomie, und im 19. Jahrhundert haben sie angefangen, sich eingehender mit den mathematischen Problemen des Abendlandes zu beschäftigen. Allerdings darf man den Chinesen nicht jede Originalität in der Mathematik absprechen; sie weisen sowohl in der Arithmetik und Algebra als auch in der Geometrie schon in früher Zeit eigene Leistungen auf. Doch ist hier nicht der Ort, diese zu würdigen.

Die Geschichte *Japans* kann nicht weiter als bis in die Mitte des 5. Jahrhunderts n. Chr. zurück verfolgt werden. Die geistigen Eigenschaften des gut begabten japanischen Volkes weichen von denen der anderen Ostasiaten zwar wesentlich ab, aber in den vielen Jahrhunderten seiner Geschichte hat es mehr Geschick zur Nachahmung als schöpferische Eigenkraft gezeigt, und erst in neuester Zeit scheint es eigene Wege gehen zu wollen.


Von *mathematischen Leistungen der Japaner* ist vor dem 6. Jahrhundert kaum etwas bekannt. Im Jahre 552 wurde in Japan der Buddhismus eingeführt, und in den buddhistischen Tempeln wurde die Mathematik unter chinesischem Einfluß für Zwecke des Kalenderwesens geübt. Im Anfang des 17. Jahrhunderts begann in Japan das Interesse an der Mathematik zu erwachen; die chinesische Wissenschaft wurde in weiten Kreisen gelehrt, und auch europäische Einflüsse machten sich durch die Vermittlung der holländischen Handelsstation Nagasaki und durch die Tätigkeit einiger europäischer Missionare in einem gewissen, wenn auch geringen, Umfange geltend. In dem Jahrhundert von 1675—1775 erhob sich die japanische Mathematik zu einer bemerkenswerten Blüte; es wurde von eingeborenen Mathematikern nach eigentümlichen Methoden nicht nur das Problem von der Quadratur des Kreises sach-

gemäß behandelt, sondern auch der binomische Satz und die Grundlagen der Infinitesimalrechnung wurden selbständig gefunden und auf eigenartige Probleme angewandt. Die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts brachte den Höhepunkt der alten einheimischen Mathematik der Japaner, die allmählich auch von europäischem Wissen befruchtet wurde. Seit aber im Jahre 1868 Japan der abendländischen Kultur sich erschloß, beginnt die alte bodenständige japanische Mathematik abzuklingen und der abendländischen internationalen Wissenschaft Platz zu machen. Heute wird in den Schulen nur noch die europäische Mathematik gelehrt. Im ganzen genommen ist die japanische Mathematik mehr eine Kunst als eine Wissenschaft; sie entbehrt der Größe und der allgemeinen Gesichtspunkte. In der Einzelausführung aber zeigen die japanischen Mathematiker eine Feinheit und Genialität im Lösen von Problemen und im Entwirren von Schwierigkeiten, die ihresgleichen sucht.

Die chinesische *Schrift*, die schon im 18. Jahrhundert v. Chr. auf Inschriften ziemlich entwickelt vorkommt, ist eine aus ursprünglich rohen Bildern entstandene Wortschrift, in der jedes Zeichen ein Wort bedeutet, entsprechend der Einfachheit der *Sprache*, die nur aus einsilbigen Wörtern besteht und jeder Beugung ermangelt. Die Neigung, neue Begriffe durch Verbindung altbekannter Zeichen auszudrücken, führte zur Entstehung zahlreicher Schriftzeichen, deren Bedeutung im Satze durch die Stellung angedeutet wird. Diese Zeichen werden heutzutage mit Pinsel und Tusche auf Papier gemalt und in senkrechten Spalten angeordnet, die sich von rechts nach links aneinander fügen. Die japanische Sprache ist aus einem heimischen Dialekt und dem Chinesischen hervorgegangen, und auch die japanische Silbenschrift hat sich aus der chinesischen Wortschrift entwickelt, wie überhaupt die chinesische Schrift in ganz Ostasien verstanden, aber von den einzelnen Völkern verschieden gelesen wird.

Ebenso wie die Schrift, so sind auch die chinesischen *Zahlzeichen* nicht nur auf das eigentliche China beschränkt, sondern sie haben in ganz Ostasien, einschließlich Koreas und Japans, Geltung. Je nachdem die Zahlen nur geschrieben und gedruckt oder bei rechnerischen und mathematischen Operationen verwendet werden, müssen wir verschiedene

Um mit diesen 13 Zeichen beliebige Zahlen zu schreiben, benützen die Ostasiaten eine additive und multiplikative Methode unter Beachtung des Gesetzes der Größenfolge. Das Beispiel in unserer Abbildung zeigt das Verfahren deutlich, so daß keine weitere Erläuterung nötig erscheint. Es zeigt auch, daß das ganze Ziffernsystem auf streng dezimaler Grundlage ruht. Es ist wohl nicht zufällig, daß es gerade mit einem Zeichen für 10000 abschließt, denn im japanischen und chinesischen Zahlwortsystem spielt seit den ältesten Zeiten, ähnlich wie im Griechischen, die Myriade eine besondere Rolle, und dieses Myriadensystem, das in Griechenland, Indien, China, Japan auftritt, ist eines der bedeutsamsten Anzeichen eines frühzeitigen Verkehrs zwischen Gelehrten des Westens und des Ostens. Wann und von wem diese altchinesische Methode der Ziffernschreibung geschaffen wurde, ist nicht bekannt. Sehr merkwürdig ist es aber, daß von der Mitte des 13. Jahrhunderts an die Zeichen für 1 bis 9 in Verbindung mit dem um jene Zeit in China eindringenden kreisförmigen Zeichen für die Null und unter Weglassung der Zeichen für die Stufenzahlen zur Darstellung von beliebigen Zahlen nach dem Stellenwertprinzip verwendet wurden, wobei natürlich entsprechend der Richtung der Schrift die für den Wert der einzelnen Zeichen maßgebenden Stellen von unten nach oben zu zählen sind. Diese Schreibweise findet sich bis in die Neuzeit in Logarithmentafeln, in magischen Quadraten und im Text mathematischer Werke. In der Gegenwart allerdings gehen besonders die Japaner in mathematischen Abhandlungen, selbst wenn sie in japanischer Sprache und Schrift geschrieben sind, dazu über, die Zahlen mit indisch-arabischen Ziffern zu schreiben.

In der Praxis des täglichen Lebens und im kaufmännischen Verkehr werden auch noch andere Zeichen benutzt, die wohl als eine kursive Form der altchinesischen anzusehen sind, und die wir *Verkehrsziffern* nennen wollen. Das Zeichen für 4, das an das Zeichen der Nabatäer und der Kharosthi in Indien erinnert, wird wohl aus vier Strichen  entstanden sein. In der Ableitung der Zeichen für 7 und 8 aus dem für 6 durch Zufügung von Strichen klingt ein Sechzersystem an. Besonders auffallend ist aber, daß die Zahlen mit diesen Zeichen von links nach rechts unter Beachtung des Gesetzes der

Größenfolge geschrieben und die Multiplikatoren der Rangzahlen nicht vor, sondern über diese gesetzt werden, wie es die Beispiele in der Abbildung veranschaulichen. Die Null wird nur im Innern der Zahlen verwendet, um anzudeuten, daß Einheiten einer gewissen, aus den Nachbarziffern zu ersehenden Ordnung fehlen. Wie man aber leicht bemerkt, ist dieses Füllungszeichen zum Verständnis einer mit Verkehrsziffern geschriebenen Zahl durchaus entbehrlich.

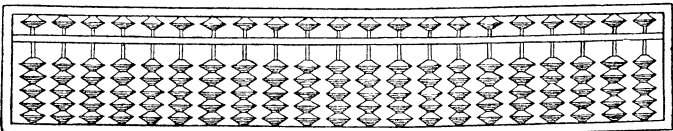
Zwischen Indien und China bestanden, wie wir schon hervorgehoben haben, seit alters lebhaft wissenschaftliche und Handelsbeziehungen. Es ist deshalb sehr wohl möglich, daß zwischen den chinesischen Ziffernsystemen und einer früheren Form der indischen Ziffern ein Zusammenhang besteht. Ein gewichtiger Grund für diese Annahme scheint uns in der Tatsache zu liegen, daß im 7. Jahrhundert ein indisches Kalenderwerk, in dem geschriebene Berechnungen vorkamen, ins Chinesische übersetzt wurde, und daß das Zeichen für die Null, das allerdings erst im Jahre 1247 in einem chinesischen Werke auftritt, aber wohl schon früher in China im Gebrauch war, dasselbe ist wie in Indien.

Eine weitere Stütze für die Möglichkeit eines ursächlichen Zusammenhangs zwischen dem indischen und chinesischen Ziffernsystem ist die Bekanntschaft der Chinesen mit dem *Gedanken des Stellenwertes*, der nicht bloß in neuerer Zeit in Verbindung mit den alchinesischen und den Verkehrsziffern Anwendung findet, sondern der den Ostasiaten schon seit alter Zeit in Verbindung mit dem *dritten Ziffernsystem* vertraut war, das wir jetzt noch zu besprechen haben.

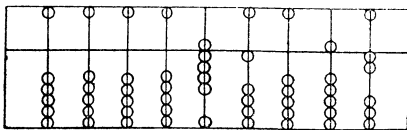
Für die Zwecke des praktischen Rechnens sind die alchinesischen Ziffernsymbole ungeeignet. Wir finden deshalb in Ostasien, ebenso wie bei den Griechen und Römern, verschiedene Formen des Rechenbretts und des instrumentalen Rechnens, und diese Hilfsmittel sind heute noch wie bei den russischen Kaufleuten und in den Bazaren Persiens so auch ganz allgemein in China, Korea und Japan verbreitet. Das älteste Hilfsmittel des instrumentalen Rechnens in China ist, wenn wir von der uralten Verwendung der Knotenschnüre absehen, ein Satz von runden *Bambusstäbchen*. Wir finden sie erstmals im Jahre 80 n. Chr. erwähnt, aber sie sind jedenfalls viel älter. Mit ihrer Hilfe wurden die Zahlen in folgen-

Auf dieses Ziffersystem, wenn man es so nennen will, gründet sich die chinesische und japanische *Stäbchenrechnung*; in dieser wurden nicht nur die arithmetischen Grundoperationen ausgeführt, sondern auch die schwierigen und eigenartigen japanischen Rechenmethoden und mathematischen Entdeckungen dargestellt, von denen wir oben sprachen. Auf die ganze Entwicklung der ostasiatischen Mathematik hat dieses System der *Stäbchenziffern* einen starken Einfluß ausgeübt.

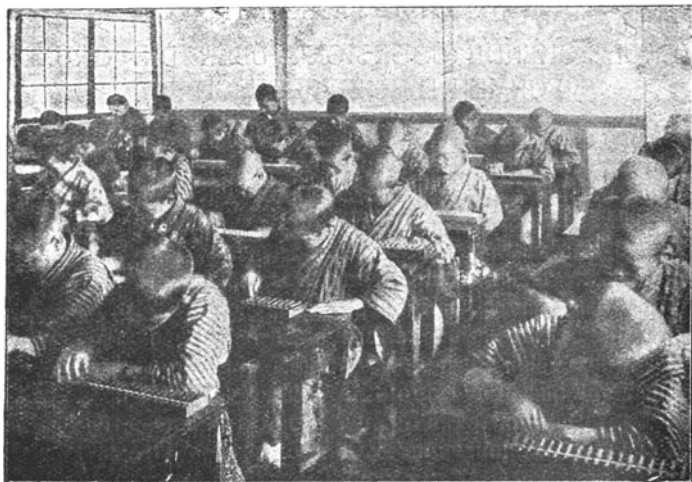
Neben der Stäbchenrechnung entwickelte sich etwa vom 12. Jahrhundert an der eigentliche Abakus, zuerst der chinesische *Swanpan*, dann der japanische *Soroban*, die beide seit dem 14. Jahrhundert bis heute allüberall in Ostasien und, wo Chinesen wohnen, im Gebrauch sind, und von denen auch die in unseren Schulen gebräuchlichen „Rechenmaschinen“ abstammen. Diese Art Abakus ist in der vollkommensten Form ein rechteckiger Rahmen mit senkrechten Stäben, an denen Kugeln verschiebbar sind. Durch eine wagrechte Leiste ist er in zwei Teile geteilt; der obere Teil enthält an jedem Stabe nur eine Kugel, die fünf Einheiten wert ist, der untere Teil enthält an jedem Stabe fünf Kugeln, von denen jede den Wert einer Einheit besitzt. Die erste der folgenden Figuren sucht eine Vorstellung von der Gestalt des Soroban zu geben, während die zweite schematisch die Zahl 91 052 abbildet.



An diesem Abakus lassen sich die Rechenoperationen des täglichen Lebens mit besonderer Leichtigkeit ausführen. In der Praxis verdrängte er deshalb im 17. Jahrhundert die Stäbchenrechnung, die aber für die Lösung algebraischer Gleichungen bis ins 19. Jahrh. beibehalten wurde. Heute lernen die Kinder in den Schulen Japans und Chinas den Gebrauch des Swanpan und des Soroban (s. die Abbildung¹⁾).



1) Nach G. Wolff, a. a. O. Seite 347.



Man erkennt ohne weiteres die Ähnlichkeit des ostasiatischen Abakus mit dem der Römer. Es darf als wahrscheinlich angenommen werden, daß bei den zahlreichen Beziehungen zwischen Rom und China der römische Abakus in irgendeiner Form den Chinesen bekannt und von ihnen weiter ausgebildet wurde. Die Erkenntnis von der Bedeutung und Tragweite des Stellenwertes erhob sich aber bei den Ostasiaten vor dem 12. oder 13. Jahrhundert nirgends über die Stufe, die wir bei den Babyloniern, bei den Griechen und Römern oder bei den Maya kennen gelernt haben. Ansätze zu einem eigentlichen *Rechnen mit Stellenwert* finden sich erst, als der europäische Einfluß sich auch auf anderen Gebieten deutlich fühlbar machte.

SECHSTER ABSCHNITT

VERGLEICHENDE ÜBERSICHT ÜBER DIE GRUND-
FORMEN DER ZIFFERSCHRIFT

Wir haben den Leser, der uns bis hierher gefolgt ist, *nur* mit den Ziffernsystemen der *wichtigsten* Kulturvölker bekannt gemacht; bei allen anderen bekannten Ziffernsystemen sind im wesentlichen dieselben Methoden verwendet. Wir beschließen deshalb unsere Ausführungen mit einem Überblick über die Grundformen der Zifferschrift und benutzen dabei, um *das Wesen der Methoden* klar hervortreten zu lassen, meist römische und indisch-arabische Zahlzeichen.

Zunächst bemerken wir, daß bei den meisten Völkern die Ziffernsysteme auf *der Zahl 10* aufgebaut sind. Daneben findet sich das sumerisch-babylonische *Sechzigersystem*, das *Zwanzigersystem*, welches der Zahlzeichenschrift der Maya zugrunde liegt und bei den altsemitischen und Kharosthi-Ziffern hereinspielt, und endlich das *Fünfersystem*, das im griechisch-römischen Abakus, bei den herodianischen und römischen Zahlzeichen, bei den Grundformen der Mayaziffern und in der ostasiatischen Zahlendarstellung mit Rechenstäbchen anklingt.

In bezug auf die *Anzahl* der Zeichen können wir *vollständige* und *abgekürzte* Ziffernsysteme unterscheiden. *Vollständig* nennen wir diejenigen, die für alle Einer, Zehner, Hunderter und Tausender besondere Zeichen haben, die also zur Darstellung aller Zahlen bis zu 1000 im ganzen 28 Zeichen brauchen. *Abgekürzte* Systeme dagegen sind solche, die nur für einzelne Einer, Zehner, Hunderter und Tausender, häufig bloß für die Stufenzahlen, besondere Zeichen besitzen; selbst die Einer werden nicht selten nur durch Wiederholung des Einheitsstriches dargestellt. Wir sahen jedoch, daß zahlreiche Übergänge und Zwischenstufen zwischen den beiden angeführten äußersten Fällen vorkommen.

Betrachten wir die *Zeichen selbst*, so finden wir, abgesehen von der selbstverständlichen und rohen Darstellung der Einer durch einzelne Striche, *drei Gruppen*. Zur *ersten* Gruppe rechnen wir die Ziffernsysteme, welche die Anfangsbuchstaben oder andere Abkürzungen der Zahlwörter benutzen; zur *zweiten* Gruppe gehören diejenigen, welche beliebige, mit dem

Zahlwort in keiner Beziehung stehende Buchstaben oder Silbenzeichen verwenden. In beiden Fällen verlieren die Buchstaben ihren Lautwert, sobald sie als Zahlzeichen benützt werden, und häufig wird einer Verwechslung durch besondere Merkzeichen vorgebeugt. Zur *dritten* Gruppe endlich rechnen wir die Zahlzeichensysteme, welche besondere, von den Buchstaben und Silbenzeichen abweichende „Ziffern“ benützen, sowie diejenigen, deren Zeichen vielleicht ursprünglich Buchstaben waren, heute aber diesen Ursprung nicht mehr erkennen lassen. Im einzelnen finden sich natürlich mannigfache Übergänge zwischen diesen drei Gruppen. Mit Hilfe der folgenden Tabelle (s. nächste Seite) wird es dem Leser leicht gelingen, die verschiedenen Ziffernsysteme, die wir an seinem Auge vorbeiziehen ließen, zu ordnen und zu überschauen.

Fassen wir endlich die *Methoden* ins Auge, nach denen die zusammengesetzten Zahlen aus den Grundzeichen der Ziffernsysteme bei den verschiedenen Völkern gebildet wurden, so können wir fünf verschiedene Fälle unterscheiden. Sie sollen in Kürze gekennzeichnet werden; in der anschließenden Übersichtstabelle (S. 56) findet der Leser die besprochenen Ziffernsysteme unter diesem Gesichtspunkte geordnet.

1. Die zusammengesetzten Zahlen werden durch *additive* Nebeneinanderstellung der Grundzeichen gebildet, wobei im allgemeinen das Gesetz der Größenfolge gilt. Die Tabelle zeigt zunächst eine rohere Methode, die in den abgekürzten Systemen zur Anwendung kommt. Die Unbequemlichkeit, die in der häufigen Wiederholung desselben Zeichens liegt, wird gemildert teilweise durch die Einschiebung besonderer Zeichen für das Fünffache der Stufenzahlen, teilweise durch subtraktive Bildungen (IV statt III). Die nur bei den vollständigen Systemen mögliche feinere Methode hat demgegenüber vor allem den Vorzug größerer Kürze.

2. Die Bildung zusammengesetzter Zahlen erfolgt mit Hilfe eines *multiplikativen* Verfahrens. Dabei steht zur Vermeidung von Verwechslungen der Multiplikator entweder als *Koeffizient* vor der Stufenzahl (im Sinne der Schrift) oder als *Exponent* über ihr. Obwohl dieses Verfahren nahe zu liegen scheint, ist es doch wenig verbreitet. Das Bild a) der Tabelle zeigt, daß die Verwendung von Koeffizienten vor den Stufenzahlen

	Vollständige Ziffernsysteme	Abgekürzte Ziffernsysteme
I. Anfangsbuchstaben oder andere Abkürzungen der Zahlwörter.		<ol style="list-style-type: none"> 1. Herodianische Ziffern (I, 34). 2. Diwan- oder Kanzleiziffern (ein altes und seltenes persisch-arabisches Ziffernsystem). 3. Altchinesische Zahlzeichen (S. 46).
II. Buchstaben in beliebiger oder alphabetischer Reihenfolge, sowie Silbenzeichen als Zahlzeichen	<ol style="list-style-type: none"> 1. Griechische Ziffern (I, 37). 2. Spätsemitische Ziffern (bei den Syrern und Aramäern, Hebräern Arabern, Persern und Turken, I, 47 ff.). 	Alphabetische und Wort-symbolische Zahlbezeichnung der Inder (S. 28).
III. Nichtalphabetische Zeichen, bzw. solche, die ihren Ursprung aus Buchstaben nicht mehr erkennen lassen.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Hieratische Ziffern (I, 20). 2. Demotische Ziffern (I, 20). 3. Ziffern der Brahmi (S. 26). 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Hieroglyphische Ziffern (I, 18). 2. Keilschriftliche Ziffern (I, 26 ff). 3. Altsemitische Ziffern (I, 44) (phönikische, palmyrenische, syrisch-aramäische). 4. Ziffern der Kharosthi (S. 21). 5. Chinesisch - japanische Verkehrsziffern (S. 46). 6. Ostasiatische Stäbchenziffern (S. 49). 7. Italische Ziffern (S. 7). 8. Zahlzeichen der Maya (Grund- und Kopfformen) (S. 15). 9. Moderne europäische Ziffern.



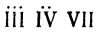
zum Gedanken des Stellenwertes hätte führen können. Denn wenn man hier die Bezeichnung der Stufenzahlen unterdrückt hätte, so wäre man zum Stellenwert gelangt und hätte mit den Zeichen für die neun Einer jede Zahl, in der die einzelnen Stufenzahlen in einer bestimmten (nicht verschwindenden) Anzahl von Einheiten enthalten sind, darstellen können. Diesen Schritt haben einige indische Stämme, wie z. B. die *Tamulen* und *Malabaren*, getan. Zu dem gleichen Ergebnis kamen die Ostasiaten mit den altchinesischen Ziffern; bei ihnen tritt dann in neuerer Zeit noch die Null hinzu, die natürlich zur vollständigen Durchführung des Stellengedankens unentbehrlich ist. Auch die Maya scheinen auf diesem Wege zu dem Stellen-system gelangt zu sein. (S. 15).

3. Die Bildung zusammengesetzter Zahlen erfolgt dadurch, daß die Zahlenwerte der Grundzeichen *durch beigesezte Striche* oder *Punkte* verändert werden. Diese Methode ist in gewissem Sinne eine Umkehrung der vorigen. Während nämlich dort das Zeichen der Stufenzahl als die Hauptsache und die Anzahl, in der sie in der gegebenen Zahl enthalten ist, als eine Art Anhängsel erscheint, namentlich da, wo diese Anzahl in Form eines Exponenten über das Zeichen für die Stufenzahl gesetzt wird, ist hier diese Anzahl (d. h. die Einerzahl) der wesentliche Teil, und die Stufe wird nicht einmal durch ihr charakteristisches Zeichen, sondern nur durch farblose Striche, Häkchen oder Punkte angedeutet. Der das Zeichen μ bei den Griechen zuweilen ersetzende Punkt (vgl. I, 38) bildet eine Art Übergang zwischen der zweiten und dritten Methode. Auch dieses Verfahren hätte bei folgerichtiger Verwendung zum Stellengedanken führen können; z. B. wenn die Griechen die Zahl 10 mit α , 100 mit σ usw. bezeichnet hätten.

4. Die zusammengesetzten Zahlen werden mit Hilfe eines materiellen oder eines gezeichneten *Abakus* gebildet. Dieses Verfahren haben wir in seinen verschiedenen Abarten ausführlich geschildert, und wir haben auch gezeigt, wie es auf die letzte und beste Art der Zahlbezeichnung führen konnte, nämlich auf

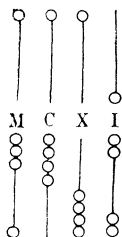
5. die Bildung zusammengesetzter Zahlen mit Hilfe des *Stellenwertes*, über den wir gleichfalls keine weitere Bemerkung mehr zuzufügen brauchen.

SCHEMATISCHE DARSTELLUNG DER ZAHL 3407 DURCH DIE VERSCHIEDENEN IN DER ZIFFERNSCHRIFT DER VÖLKER BENÜTZTEN METHODEN.

<p>1. Methode der Addition. a) Rohe Methode: MMMCCCCIIIIII bzw.: MMMCCCCVII</p>	<p>Hieroglyphische, keilschriftliche, altsemitische, herodianische, italische, Kharosthi-, Diwanî- und ostasiatische Stäbchen-Ziffern.</p> <p>Abgekürzte Systeme.</p>
<p>b) Feinere Methode:  </p>	<p>Hieratische, demotische, griechische, spätsemitische, Brahmi-Ziffern.</p> <p>Vollständige Systeme.</p>
<p>2. Methode der Multiplikation. a) Multiplikator als <i>Koeffizient</i>: 3M 4C 7.</p>	<p>Konsequente Befolgung bei den Ziffern einiger indischer Stämme (Tamulen, Malabaren) sowie bei den altchinesischen Zahlzeichen und den Kopfformen der Maya. Gelegentliche Befolgung a) in der Keilschrift, der Kharosthi und Brahmi, im hierat., demot. u. altsemit. Ziffernsystem (besonders bei Hundertern und Tausendern) sowie bei den Grundformen der Maya b) im griech. u. röm. Ziffernsystem (nur bei Tausendern u. Zehntausendern).</p>
<p>b) Multiplikator als <i>Exponent</i>: M³C⁴I⁷.</p>	<p>Konsequente Befolgung bei den ostasiatischen Verkehrsziffern. In einzelnen Fällen bei den herodianischen und Brahmi-Ziffern, sowie bei den griechischen zur Bezeichnung mehrerer Myriaden.</p>
<p>3. Methode der Marken und diakritischen Punkte. </p>	<p>Bezeichnung der Tausender bei den Griechen und in einzelnen Fällen bei den Römern. Bezeichnung der Hunderter, Tausender, Zehntausender usw. bei den semitischen Buchstabenziffern, den Gobarziffern der Araber und in einzelnen Fällen bei den Persern, Indern und Byzantinern (Maximus Planudes). Siehe auch älteste Schreibweise der Dezimalbrüche (S. 41).</p>

4. Abakusmethode (meist nur zum Rechnen).

a) Rohe Methode:



b) Feinere Methode:

M	C	X	I
③	④		⑦

Im Abendland besonders bei den Griechen u. Romern, sowie im Mittelalter gebräuchlich; in Rußland, Persien, der Türkei und Ostasien heute noch in verschiedener Gestalt überall zu finden.

(Jede Marke des oberen Teils bedeutet, wenn sie nach unten geschoben ist, 5 Einheiten der betr. Stufe; nach oben geschoben, zählt sie nicht mit. Jede Marke des unteren Teils bedeutet, nach oben geschoben, eine Einheit der betr. Stufe; nach unten geschoben zählt sie nicht mit. Die Marken werden entweder auf die Linien oder in die Zwischenräume (Spalten) gelegt.

Im Abendland vom 10. Jahrhundert an; in Ostasien in Verbindung mit den Rechenstäbchen; vielleicht auch ähnlich bei den Indern und Griechen.

5. Methode des Stellenwerts.

a) Unvollkommene Methode

a) mit der Grundzahl 60:

$$\begin{array}{cccc} \lll & \text{VVV} & \lll & \text{VVV} \\ \lll & \text{VVV} & \lll & \text{VV} \\ (56 & 60 & + & 47) \end{array}$$

b) mit der Grundzahl 20:

$$\begin{array}{r} \dots & 9 \cdot 360 \\ \dots & + 8 \cdot 20 \\ \dots & + 7 \end{array}$$

b) Vollkommene Methode mit der Grundzahl 10:

3407

Sumerisch-babylonisch-assyrisches Ziffernsystem.

Ziffernsystem in den Handschriften der Maya unter Verwendung der Grundformen.

Bei den Indern, Arabern, Europäern und bei den meisten anderen Kulturvölkern der Jetztzeit unter Verwendung der indisch-arabischen, der altchinesischen und der ostasiatischen Stäbchen-Ziffern.

ANHANG

LITERATUR

- Babelon, E., *Traité des monnaies*. I. Paris 1901.
- Bayley, E. Cl., *On the Genealogy of modern numerals*. *Journal of the Royal Asiatic Society, New Series*. Bd. 14 (1882) S. 335–376 und Bd. 15 (1883) S. 1–72.
- Biernatzki, *Die Arithmetik der Chinesen*. *Crelle's Journal*. Bd. 52 (1856) S. 52–96.
- Bork, F., *Amerika und Westasien*. *Orientalisches Archiv*. Bd. 3 (1912) S. 1–9.
–, *Weitere Verbindungslinien zwischen der alten und der neuen Welt*, ebenda S. 151–168.
- Brockhaus, H., *Zur Geschichte des indischen Zahlensystems*. *Zeitschr. für die Kunde des Morgenlandes*. Bd. 4 (1842) S. 74–83.
- Bubnow, N., *Arithmetische Selbständigkeit der europäischen Kultur*. Berlin 1914.
- Bühler, G., *Indische Paläographie*. Straßburg 1896 (1904 in verbesserter englischer Übersetzung als Anhang zu Bd. 33 von „*the Indian Antiquary*“, Bombay, erschienen).
- Burnell, A. C., *Elements of South-Indian Palaeography from the 4th to the 17th century A. D.* Mangalore 1874.
- Förstemann, E., *Erläuterungen zur Mayahandschrift der Kgl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden*. Dresden 1886.
- Friedlein, G., *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert*. Erlangen 1869.
- Gardthausen, V., *Die römischen Zahlzeichen*. *German.-roman. Monatsschrift*. Bd. I (1909) Heft 7.
- Gerhardt, C. I., *Über die Entstehung und Ausbreitung des dekadischen Zahlenrechnens*. Programm Salzwedel 1853.
–, *Etudes historiques sur l'arithmétique de position*. Programm Berlin 1856.
- Günther, S., *Ethnologisch-Mathematisches*. *Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften*. München 1917. S. 111–125.
- Harzer, P., *Die exakten Wissenschaften im alten Japan*. *Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung*. Bd. 14 (1905) S. 312–339.
- Hayashi, T., *A Brief History of Japanese Mathematics*. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2). Bd. 6 (1905) S. 296–361 und Bd. 7 (1907) S. 105–163.
- Hill, G. F., *On the early use of arabic numerals in Europe*. *Archaeologia*. Bd. 62 (1910) S. 137–190.
- Hoernle, R., *The Bakshali Manuscript*. *The Indian Antiquary*. Bd. 17 (1888) S. 33–48 und 275–279.
- Hübner, E., *Römische Epigraphik*. 2. Aufl. München 1892.
- Humbold, A. v., *Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerts in den indischen Ziffern*. *Crelles Journal*. Bd. 4 (1829) S. 205–231.

- Karpinski, L. C., Hindu Numerals in the Fihrist. *Bibliotheca Mathematica* (3). Bd. 11 (1911) S. 121–124.
- Kaye, G. R., *Indian Mathematics*. Calcutta 1915.
- , Zahlreiche Aufsätze in englisch-indischen Zeitschriften.
- Löffler, E., Zur Geschichte der indischen Ziffern. *Archiv der Mathematik und Physik* (3). Bd. 19 (1912) S. 174–178.
- , Über die Entstehung und Ausbreitung unserer Ziffern. Mitteilungen des Vereins für Mathematik und Naturwissenschaft zu Ulm. Heft 15 (1912) S. 41–59.
- Meringer, R., *Indogermanische Sprachwissenschaft*. Leipzig 1903
- Mikami, Y., *The Development of Mathematics in China and Japan*. Leipzig 1912.
- Mischke, K., *Naturgeschichte der Ziffern*. Bremen 1907.
- Mommsen, Th., *Untertalische Dialekte*. Leipzig 1850.
- Morley, S. G., *An Introduction to the Study of the Maya Hieroglyphs*. Washington 1915.
- Nagl, A., Die Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus. *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*. Heft 9 (1899) S. 337–357.
- Nau, F., La plus ancienne mention orientale des chiffres indiens. *Journal asiatique* (10). Bd. 16 (1910) S. 225–227.
- Schroeder, L. v., *Indiens Literatur und Kultur in historischer Entwicklung*. Leipzig 1887.
- Schubert, H., *Zählen und Zahl*. Hamburg 1887.
- Seler, E., *Gesammelte Abhandlungen zur amerikanischen Sprach- und Altertumskunde*. Bd. 1–5. Berlin 1902 ff.
- , Förstemann, E. u. a., *Mexican and central American antiquities, Calendar systems and History*. 24 Aufsätze. Washington 1904.
- Smith, D. E. and Karpinski, L. C., *The Hindu-Arabic numerals*. Boston and London 1911.
- Smith D. E. and Mikami, Y., *A History of Japanese Mathematics*. Chicago 1914.
- Steffens, F., *Lateinische Palaographie*. Freiburg (Schweiz) 1903.
- Steinschneider, M., *Die Mathematik bei den Juden*. *Bibliotheca Mathematica* (2). Bd. 8 (1895) S. 37 ff.
- Stoy, H., *Zur Geschichte des Rechenunterrichts*. I. Teil. Jena 1876 (Dissertation).
- Thibaut, G., *Astronomie, Astrologie und Mathematik der Inder*. Straßburg 1899.
- Treutlein, P., *Zur Geschichte unserer Zahlzeichen*. Programm. Karlsruhe 1857.
- Weißborn, H., *Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa*. Berlin 1892.
- Woeppke, F., Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. *Journal asiatique* (6). Bd. 1 (1863) S. 27–29, 234–290 und 442–529.
- Wolff, G., *Der mathematische Unterricht in Japan*. *Ztschr. für math. und naturw. Unterr.* Bd. 45 (1914) S. 341–358.
- Zangemeister, K., *Die Entstehung der römischen Zahlzeichen*. *Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*. II (1887) S. 1011–1028.
- Außerdem ist die in I, S. 53–54 aufgeführte Literatur zu vergleichen.

NAMENVERZEICHNIS

- Abraham I, 52
 Adam I, 30, 53
 Ahmes I, 17, 20
 Alberuni II, 35
 Alexander d. Gr. I, 15, 16
 Almansor II, 32
 Alwalid II, 33
 Apollonius I, 33, 41. II, 11, 31
 Archimedes I, 33, 41. II, 11, 31
 Aristoteles I, 40
 Aryabhatta II, 28
 Asoka II, 21
 Assurbanipal I, 23, 24
 Babelon II, 58
 Bayley II, 58
 Bezold I, 53
 Biernatzki II, 58
 Boethius II, 27
 Bork II, 16, 58
 Brahmagupta II, 28
 Brockelmann I, 53
 Brockhaus II, 58
 Bubnow II, 12, 23, 37, 58
 Buddha II, 18
 Bühler II, 21, 24, 27, 58
 Bürgi II, 41
 Burnell II, 58
 Cantor I, 53
 Champollion I, 17
 Descartes I, 42
 Diogenes Laërtius II, 13
 Diokletian I, 17
 Diophant I, 33, 34, 38, 39, 42
 Elieser I, 52
 Eratosthenes I, 33
 Erman I, 53
 Euklid I, 33, 34. II, 31
 Euler II, 40
 Evans I, 32
 Förstemann II, 13, 58, 59
 Friedlein II, 58
 Gardthausen I, 53. II, 58
 Gerbert II, 35
 Gerhardt II, 58
 Grotefend I, 25
 Gundermann I, 53
 Günther I, 53. II, 58
 Hammurabi I, 23
 Hankel I, 9. II, 10, 27
 Harunal Raschid II, 30, 34
 Harzer II, 58
 Havashi II, 58
 Hell I, 53
 Herodian I, 35
 Herodot I, 14
 Heron I, 39
 Hill II, 25, 41, 58
 Hilprecht I, 24, 30, 53
 Hoernle II, 27, 58
 Hoppe I, 31, 53
 Hübner II, 58
 Hultsch I, 30, 53
 Humboldt II, 58
 Jeremias I, 30, 53
 Karl d. Gr. II, 31, 34
 Karpinski II, 29, 41, 59
 Kaye II, 24, 25, 27, 59
 Kewitsch I, 31, 53
 Kleopatra I, 16
 Kugler I, 28, 53
 Larfeld I, 39, 53
 Leibniz I, 8. II, 41
 Lenz II, 42
 Leonardo von Pisa II, 37, 38, 40
 Lidzbarski I, 44, 45, 53
 Lietzmann I, 41
 Lindemann I, 20, 54. II, 6
 Löffler I, 31, 54. II, 59
 Maximus Planudes II, 38, 56
 Menes I, 15, 16
 Meringer II, 59
 Mesa I, 5
 Meyer I, 54
 Mikami II, 59
 Mischke II, 46, 59
 Mommsen II, 6, 59
 Morley II, 15, 59
 Muhammed I, 49
 Muhammed ibn Musa Alchwarazmi II, 32, 33, 36
 Nagel II, 59
 Napier II, 41
 Napoleon I, 17
 Nau II, 59
 Nebukadnezar I, 23
 Nero I, 51
 Nesselmann I, 54
 Pappus I, 42
 Petrarca II, 39
 Pihan I, 18, 20, 44, 54. II, 27, 46
 Plato I, 30, 33, 40
 Polybios II, 13
 Pott I, 13. II, 14
 Ptolemäus II, 31
 Pythagoras I, 33
 Ramses I, 15
 Riese II, 39
 Rödiger I, 46
 Ruska I, 54. II, 36
 Schliemann I, 32
 Schneider I, 5, 54
 Schröder II, 59
 Schubert II, 59
 Seler II, 13, 59
 Sethe I, 19, 54
 Severus Sebokt II, 32
 Simon I, 54
 Smith II, 29, 41, 59
 Solon I, 6. II, 13
 Steffens II, 59
 Steinschneider II, 59
 Stevin II, 41
 Stoy II, 59
 Sylvester II. (Papst) II, 35
 Taylor I, 54
 Thibaut II, 24, 28, 59
 Thureau-Dangin I, 54
 Tiglath-Pileser I, 29
 Treutlein II, 59
 Tropfke I, 54
 Verworn I, 54
 Vieta I, 42
 Weissenborn II, 59
 Weule I, 54
 Wieleitner I, 1
 Winckler I, 54
 Woepcke II, 23, 59
 Woisin I, 54
 Wolff II, 50, 59
 Zangemeister II, 6, 59

Zahlentheorie.

Zahlentheorie. Von Prof. Dr. *F. Bachmann* in Weimar. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. In 6 Teilen. I. Teil: Die Elemente der Zahlentheorie. [XII u. 264 S.] gr. 8. Neudruck 1919. (U. d. Pr.) II. Teil: Die analytische Zahlentheorie. [XVIII u. 494 S.] gr. 8. 1894. Geh. M. 12.—, geb. M. 13.— III. Teil: Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Mit Holzschnitten und 1 lithogr. Tafel. [XII u. 300 S.] gr. 8. Neudruck 1910. Geh. M. 7.—, geb. M. 8.— IV. Teil: Die Arithmetik der quadratischen Formen. I. Abt. [XVI u. 668 S.] gr. 8. 1898. Geh. M. 18.—, geb. M. 19.— V. Teil: Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper [XXII u. 548 S.] gr. 8. 1905. Geh. M. 16.—, geb. M. 17.— VI. Teil. [In Vorb.]

Niedere Zahlentheorie. Von Prof. Dr. *P. Bachmann* in Weimar. I. Teil. [X u. 402 S.] gr. 8. 1902. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.— II. Teil. [X u. 480 S.] gr. 8. 1910. (TmL 10, 1 u. 2.) Geh. M. 16.—, geb. M. 17.—

„Als besonders lobenswert fällt die klare und scharfe, durchaus mustergültige Darstellung auf. Die eigenartige Behandlung der Probleme wie die strenge Systematik lassen das Werk allezeit interessant und meisterhaft erscheinen. Der erste Teil behandelt die Theorie der multiplikativen Zusammensetzung der ganzen Zahlen, der zweite ist der sogenannten 'additiven' Zahlentheorie gewidmet.“
(Allgemeines Literaturblatt.)

Vorlesungen über Zahlentheorie. Von Prof. Dr. *L. Kronecker* in Berlin, hrsg von Geh. Reg.-Rat Dr. *K. Hensel*, Prof. an der Univ. Marburg. In 2 Bänden. Mit 7 Fig. I. Bd. [XVI u. 510 S.] gr. 8. 1901. Geh. M. 18.—

Die Anwendbarkeit der allgemeinen Prinzipien wird in verschiedenen geometr. Anwendungen gezeigt sowie in den wesentlichen Vereinfachungen, welche die Theorie der Kreisteilungsgleichungen, die Beweise für das quadratische, das kubische und das biquadratische Reziprozitätsgesetz und die Theorie der quadratischen Formen durch sie erfährt.

Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie. Von Dr. *H. Minkowski*, weil. Prof. a. d. Univ. Göttingen. Mit 82 Textfig. [VIII u. 236 S.] gr. 8. 1907. Geh. M. 8.—

„Der Verfasser hat in diesem Buch eine möglichst elementar gehaltene Einführung in seine eigenen großartigen und bewundernswürdigen Schöpfungen gegeben, die man zum Schönsten rechnen darf, was während der letzten Jahrzehnte auf dem Gebiete der Zahlentheorie geschaffen worden ist.“
(Archiv der Mathematik u. Physik.)

Geometrie der Zahlen. Von Dr. *H. Minkowski*, weil. Prof. a. d. Univ. Göttingen. [VIII u. 256 S.] gr. 8. 1910. Geh. M. 9.—, geb. M. 10.— Auch in 2 Lieferungen. I Lief. [240 S.] 1896. Geh. M. 8.— II. Lief. [VIII u. S. 241—256] 1910. Geh. M. 1.—

Diese Schrift enthält eine neue Art Anwendungen der Analysis des Unendlichen auf die Zahlentheorie oder, besser gesagt, knüpft ein neues Band zwischen diesen beiden Gebieten.

Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Von Dr. *E. Landau*, Prof. a. d. Univ. Göttingen. Mit 14 Textfig. [VII u. 143 S.] gr. 8. 1918. Geh. M. 6.—

Der erste Teil gibt für einen Leser, der nur die Elemente der Algebra und aus der Zahlentheorie den Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit der Zahlen in Primfaktoren zu kennen braucht, eine Einführung in die von Dedekind begründete Theorie der algebraischen Zahlen. Vor allem wird auf möglichst einfachem Wege der Hauptsatz von der eindeutigen Zerlegung der Ideale eines Körpers in Primideale bewiesen. — Der zweite Teil, der die Elemente der Funktionentheorie voraussetzt, entwickelt die moderne analytische Theorie der Ideale und Primideale bis zur neuesten Errungenschaft von Hecke (Funktionalgleichung der zu einem beliebigen algebraischen Körper gehörigen Zetafunktion) und darüber hinaus.

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Mathematik und Philosophie.

Über das Wesen der Mathematik. Von Geh. Hofrat Dr. *A. Voss*, Prof. an der Universität München. 2., vermehrte Auflage. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1913. Steif geh. M. 4.—

In dieser kleinen Schrift ist der Versuch gemacht, an der Hand der historischen Entwicklung der Mathematik ihr Wesen in einer auch dem nicht speziell mathematisch Gebildeten zugänglichen Form zu schildern.

Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Von Geh. Reg.-Rat Dr. *P. Natorp*, Prof. an der Universität Marburg. [XX u. 416 S.] 8. 1910. (WuH XII.) Geb. M. 6.60.

Das Buch versucht eine in den Hauptzügen vollständige, geschlossene Philosophie der exakten Wissenschaften zu bieten, wobei ein strenger Systemzusammenhang angestrebt ist.

Wissenschaft und Wirklichkeit. Von Dr. *M. Frischeisen-Köhler*, Prof. an der Univ. Berlin. [VI u. 478 S.] 8. 1912. (WuH XV.) Geb. M. 8.—

Das Buch, das aus umfassenderen Studien über die philosophischen Grundlagen der Natur- und Geisteswissenschaften hervorgegangen ist, gibt eine neue Grundlage des kritischen Realismus.

Probleme der Wissenschaft. Von *F. Enriques*, Prof. an der Universität Bologna. Deutsch von *K. Grelling* in Göttingen. 2 Teile. 8. 1910. (WuH XI, 1, 2.) I. Teil: Wirklichkeit u. Logik. [X, 258 u. 16 S.] Geb. M. 4.— II. Teil: Die Grundbegriffe der Wissenschaft. [XI u. S. 259—599.] Geb. M. 5.—

Der Verfasser entwickelt durch eine Analyse der Fragen der Logik und Psychologie eine neue Theorie der Erkenntnis, dabei die verschiedenen Zweige der Wissenschaft, von der Mathematik bis zur Biologie, Wirtschaftslehre und Geschichte berührend.

Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft. Von *É. Picard*, membre de l'Institut, Prof. in Paris. Deutsch von Geh. Hofrat Dr. *F. Lindemann*, Prof. an der Universität München, und *L. Lindemann* in München. [IV u. 292 S.] 8. 1913. (WuH XVI.) Geb. M. 6.—

Der Verfasser hat versucht, in diesem Buche eine zusammenfassende Übersicht über den Stand unseres Wissens in Mathematik, Physik und Naturwissenschaften in den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts zu geben.

Wissenschaft und Hypothese. Von *H. Poincaré*, membre de l'Institut, weil. Prof. in Paris. Deutsch von Geh. Hofrat Dr. *F. Lindemann*, Prof. an der Univ. München, u. *L. Lindemann* in München. 3., verbesserte Auflage. [XVII u. 357 S.] 8. 1914. (WuH I.) Geb. M. 4.80.

Wissenschaft und Methode. Von *H. Poincaré*, membre de l'Institut, weil. Prof. in Paris. Deutsch von Geh. Hofrat Dr. *F. Lindemann*, Prof. an der Universität München, u. *L. Lindemann* in München. [VI u. 283 S.] 8. 1914. (WuH XVII.) Geb. M. 5.—

Der Wert der Wissenschaft. Von *H. Poincaré*, membre de l'Institut, weil. Prof. in Paris. Deutsch von *E. Weber* in Straßburg u. Dr. *H. Weber*, Prof. an der Universität Straßburg. Mit einem Bildnis des Verfassers. 2. Auflage. [VIII u. 251 S.] 8. 1910. (WuH 2.) Geb. M. 3.60.

Im ersten der drei genannten Werke erörtert der Verfasser geistvoll Bedeutung und Wert der Hypothese im modernen Wissenschaftsbetriebe, insbesondere in der reinen und angewandten Mathematik. „Wissenschaft und Methode“ gibt dann eine summarische Darstellung des gegenwärtigen Zustandes der Wissenschaften, ihrer Methoden und Tendenzen, während das letzte Werk die Objektivität der wissenschaftlichen Erkenntnisse untersucht.

Auf sämtliche Preise Teuerungszuschläge des Verlags und der Buchhandlungen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Leubners Naturwissenschaftliche Bibliothek

Die Sammlung will Lust und Liebe zur Natur wecken und fördern, indem sie in leichtfasslicher Weise über die uns umgebenden Erscheinungen aufklärt und die Selbsttätigkeit anzuregen sucht, sei es durch bewußtes Schauen und sorgfältige Beobachten in der freien Natur oder durch Anstellung von planmäßigen Versuchen dabei. Zugleich soll der Leser einen Einblick gewinnen in das Leben und Schaffen großer Forscher und Denker, durch Lebensbilder, die von Ausdauer, Geduld und Hingabe an eine große Sache sprechen. — Die mit zahlreichen Abbildungen geschmückten Bändchen, die auf einen geordneten Anfangsunterricht in der Schule aufgebaut sind, sind nicht nur für Schüler bestimmt, sie werden auch erwachsenen Naturfreunden, denen daran liegt, die in der Schule erworbenen Kenntnisse zu verwerthen und zu vertiefen, — vor allem aber Studirenden und Lehrern — nützlich sein.

Serie A. Für reifere Schüler, Studierende und Naturfreunde.

Alle Bände sind reich illustriert und geschmackvoll gebunden.

- | | |
|--|---|
| <p>Große Physiker. Von Direktor Prof. Dr. Joh. Keferstein. Mit 12 Bildnissen M. 3.-</p> <p>Physikalisches Experimentierbuch. V. Student. Prof. H. Kedenstorf. In 2 Teilen. I. Teil. Mit 99 Abb. M. 3.-. II. Teil. Mit 87 Abb. M. 3.-</p> <p>Chemisches Experimentierbuch. Von Prof. Dr. Karl Scheid. In 2 Teilen. I. Teil. 4. Auflage. Mit 77 Abb. M. 4.-. II. Teil. Mit 51 Abb. M. 3.-</p> <p>An der Werkbank. Von Prof. E. Oschelden. Mit 10 Abbildungen und 44 Tafeln M. 4.-</p> <p>Hervorragende Leistungen der Technik. Von Prof. Dr. K. Schreder. I. Teil. Mit 56 Abbildungen M. 3.-</p> <p>Vom Einbaum zum Linienschiff. Streifzüge auf dem Gebiete der Schifffahrt und des Seewesens. Von Ing. Karl Kadunz. Mit 90 Abbildungen . . M. 3.-</p> <p>Die Luftschifffahrt. Von Dr. K. Nimsführ. Mit 99 Abbildungen M. 3.-</p> <p>Aus dem Luftmeer. Von Oberl. M. Sassenfeld. Mit 40 Abbildungen M. 3.-</p> <p>Himmelsbeobachtung mit bloßem Auge. Von Oberlehrer Franz Rusch. Mit 30 Figuren und 1 Sternkarte M. 3.50</p> <p>Am der See. Geogr.-geologische Betrachtungen. Von Prof. Dr. P. Dahms. Mit 61 Abb. . . M. 3.-</p> | <p>Küstenwanderungen. Biologische Ausflüge. Von Dr. V. Franz. Mit 92 Figuren M. 3.-</p> <p>Geologisches Wanderbuch. Von Dir. Prof. Dr. K. G. Volt. 2 Teile. I. M. 169 Abb. u. 1 Orientierungstafel. M. 4.-. II. M. 193 Abbild. M. 4.40</p> <p>Große Geographen. Bilder aus der Geschichte der Erdkunde. Von Prof. Dr. Felix Lampe. Mit 6 Porträts, 4 Abb. und Kartenstücken . . M. 4.-</p> <p>Geographisches Wanderbuch. Von Priv.-Doz. Dr. A. Berg. 2. Aufl. Mit 212 Abb. M. 4.40</p> <p>Anleitung zu photograph. Naturaufnahmen. V. Lehr. G. E. J. Schulz. M. 41 photogr. Aufn. M. 3.-</p> <p>Vegetationsbilderungen. Von Prof. Dr. P. Gräbner. Mit 40 Abbildungen M. 3.-</p> <p>Unsere Frühlingspflanzen. Von Prof. Dr. Fr. Höp. Mit 76 Abbildungen M. 3.-</p> <p>Große Biologen. Bilder a. d. Geschichte d. Biologie. Von Prof. Dr. W. Maß. Mit 21 Bildnissen M. 3.-</p> <p>Biologisches Experimentierbuch. Anleitung z. selbst. Stud. d. Lebenserscheinung. f. jugendl. Naturfreunde. V. Prof. Dr. E. Schäffer. M. 100 Abb. M. 4.-</p> <p>Erlebte Naturgeschichte. Von Schulvorstand E. Schmitt. Mit 30 Abbildungen. . . . M. 4.-</p> <p>Das Leben unserer Vögel. Von J. Thiene-mann ca. M. 4.-</p> |
|--|---|

In Vorbereitung:

- | | |
|---|--|
| <p>Hervorrag. Leistung. d. Techn. II. V. K. Schreder.</p> <p>Große deutsche Industriebegründer. Von E. Matschoß.</p> <p>Große Chemiker. V. D. Ohmann u. K. Winderlich.</p> | <p>Große Mathematiker. Von E. Löffler.</p> <p>Insektenbiologie. Von Chr. Schröder.</p> <p>Aquarium und Terrarium. Von J. Urban.</p> |
|---|--|

Serie B. Für jüngere Schüler und Naturfreunde.

- | | |
|---|--|
| <p>Physikalische Blaudereien für die Jugend. Von Oberlehrer E. Wunder. Mit 15 Abb. Kart. M. 1.-</p> <p>Chemische Blaudereien für die Jugend. Von Oberl. E. Wunder. Mit 5 Abb. . . Kart. M. 1.-</p> <p>Mein Handwerkszeug. Von Professor D. Freß. Mit 12 Abbildungen Kart. M. 1.-</p> <p>Vom Tierleben in den Tropen. Von Prof. Dr. K. Guenther. Mit 7 Abbildungen. Kart. M. 1.-</p> | <p>Versuche mit lebenden Pflanzen. Von Dr. M. Dettl. Mit 7 Abbildungen Kart. M. 1.-</p> <p>Jungdeutschland im Gelände. Unter Mitarbeit von E. Doernberger, K. Loeser, M. Sassenfeld, Chr. E. Silberhorn hsg. von Prof. Dr. Bastian Schmid. Mit 36 Abb. u. 8 Karten. Kart. M. 1.-. 10 Expl. u. mehr je 95 Pf., 25 Expl. u. mehr je 90 Pf., 100 Expl. u. mehr je 85 Pf., 100 Expl. u. mehr je 80 Pf.</p> |
|---|--|

In Vorbereitung: Unser Hausgarten. Von J. Fests.

Auf sämtliche Preise Steuerzuschläge des Verlages und der Buchhandlungen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH