

Eugen Gruschwitz

# Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg

*SONDERDRUCK AUS*  
**INGENIEUR-ARCHIV**

UNTER REDAKTIONELLER MITWIRKUNG VON

**DR. A. BETZ**  
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

**DR.-ING. A. HERTWIG**  
GEH. REG.-RAT, PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
BERLIN

**K. v. SANDEN**  
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN  
HOCHSCHULE KARLSRUHE

HERAUSGEGEBEN VON

**DR. ING. DR. R. GRAMMEL**  
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE STUTTGART

SPRINGER-VERLAG WIEN GMBH

---

---

**E. Gruschwitz,**  
**Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung**  
**bei Druckabfall und Druckanstieg.**

---

**ISBN 978-3-662-40879-7**  
**DOI 10.1007/978-3-662-41363-0**

**ISBN 978-3-662-41363-0 (eBook)**

Das

## INGENIEUR-ARCHIV

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften von 5 bis 10 Druckbogen Umfang, die zu Bänden von 30 bis 40 Druckbogen vereinigt werden. Der Preis eines Heftes wird sich nach seinem Umfang und den entstandenen Herstellungskosten richten.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber Herrn Professor Dr. Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart, Bopserwaldstr. 16 oder an die Herren

Professor Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstr. 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg, Technische Hochschule, Berliner Str. 171—172

Professor K. v. Sanden, Karlsruhe, Weinbrennerstr. 2 einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Verfasser erhalten bei Arbeiten bis zu 24 Seiten auf Wunsch bis 100 Sonderdrucke, bei größeren Arbeiten bis 60 Sonderdrucke unberechnet.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf die Leitsätze des Merkblatts für Technisch-Wissenschaftliche Veröffentlichungen (Verlag: Deutscher Verband Technisch-Wissenschaftlicher Vereine, Berlin NW 7) hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

### Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstr. 23/24

Fernsprecher: Sammel-Nrn. Kurfürst 6050 u. 6326. — Drahtanschrift: Springerbuch Berlin

Bank- und Postscheckkonten:

für Anzeigen, Beilagen, Sonderdrucke: Reichsbank-Girokonto, Deutsche Bank und Disconto-Gesellschaft, Dep.-Kasse C, Berlin W 9. Postscheckkonto Berlin Nr. 118935 Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9

für Bezug von Büchern, Zeitschriften und einzelnen Heften: Hirschwaldsche Buchhandlung, Berlin NW 7 Postscheckkonto Berlin Nr. 33700. Deutsche Bank u. Disconto-Gesellschaft, Dep.-Kasse Berlin W 8, Unter den Linden 11

---

## Maschinenelemente

Leitfaden zur Berechnung und Konstruktion für Maschinenbauschulen und für die Praxis mittlerer Techniker. Von Professor Dipl.-Ing. **W. Tochtermann**, Eßlingen. Fünfte, völlig neubearbeitete Auflage der „Maschinenelemente“ von Ing. **H. Krause**. Mit 511 Textabbildungen. X, 456 Seiten. 1930. RM 15.—; gebunden RM 16.50

## Vorlesungen über Maschinenelemente

Von Dipl.-Ing. **M. ten Bosch**, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich.  
Erstes Heft: Festigkeitslehre. Mit 104 Textabbildungen. IV, 72 Seiten. 1929. RM 6.—  
Zweites Heft: Allgemeine Gesichtspunkte und Verbindungen. Mit 207 Textabbildungen. II, 74 Seiten. 1930. RM 6.—  
Drittes Heft: Wellen und Lager. Mit 141 Textabbildungen. II, 86 Seiten. 1929. RM 6.60  
Viertes Heft: Reib- und Rädertriebe. Mit 196 Textabbildungen. II, 97 Seiten. 1929. RM 7.80  
Fünftes Heft (Schlußheft): Elemente der Kolbenmaschinen. Rohrleitungen. Mit 153 Textabbildungen. II, 86 Seiten. 1931. RM 7.—  
Heft I—V opl. Gebunden RM 36.—

Einbanddecke zu Heft I—V RM 2.—

## Wellenkupplungen und Wellenschalter

Von Dr.-Ing. **E. vom Ende**, Berlin. (Bildet Heft 11 der „Einzelkonstruktionen aus dem Maschinenbau“.) Mit 245 Textabbildungen. III, 107 Seiten. 1931. RM 10.50

## Die Gelenkmethode

Ein Verfahren zur Ermittlung statisch unbestimmter Größen und deren Einflußlinien. Von Dr. sc. techn. **Sayed Abd El-Wahed**, Ingenieur der ägyptischen Staatseisenbahnen. Mit 44 Abbildungen im Text. V, 46 Seiten. 1931. RM 4.50

---

Springer-Verlag Wien GmbH

---

# Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg<sup>1</sup>.

Von E. Gruschwitz in Göttingen.

## Einleitung.

Die Grenzschicht, die nach der bekannten Prandtlschen Theorie für den Mechanismus des Flüssigkeitswiderstandes von ausschlaggebender Bedeutung ist, geht an größeren Körpern und bei genügend großen Geschwindigkeiten in einiger Entfernung vom Stau- punkt in einen turbulenten Strömungszustand über. Das dann an die Stelle der „laminaren“ Grenzschicht tretende Gebiet mit turbulenter Strömung kann man nun, ebenso wie es in der Grenzschichttheorie mit der laminaren Grenzschicht geschieht, als ein Gebiet von geringer Ausdehnung in der Richtung senkrecht zur Oberfläche von der übrigen Strömung getrennt behandeln, indem man annimmt, daß Reibung nur in dieser Schicht vorhanden und die übrige Strömung Potentialströmung sei.

Diese turbulente Reibungsschicht kann sich ebenso wie die laminare Grenzschicht von der Wand ablösen, wenn längs der Wand in der Strömungsrichtung ein Druckanstieg vorhanden ist. Dieser Vorgang ist nach der erwähnten Prandtlschen Theorie dadurch zu erklären, daß die Flüssigkeit in der Reibungsschicht einen Teil ihrer kinetischen Energie eingebüßt hat und daher nicht mehr gegen einen erheblichen Druckanstieg vordringen kann, sondern durch diesen zur Umkehr gezwungen wird. Während sich eine Strömung, in der keine Ablösung stattfindet, in den meisten Fällen angenähert durch eine Potentialströmung darstellen läßt, weil sich der Einfluß der Reibung auf das verhältnismäßig kleine Gebiet der Reibungsschicht beschränkt, ist das im Falle der Ablösung nicht mehr möglich. Durch das dabei entstehende ausgedehnte Wirbelgebiet wird vielmehr ein hoher Energieverlust verursacht. Will man entscheiden, ob sich eine gerechnete Potentialströmung angenähert realisieren läßt, so muß man also untersuchen, ob Ablösung stattfindet. Da in den weitaus meisten Fällen die sich ablösende Reibungsschicht turbulent ist, so lag ein dringendes praktisches Bedürfnis vor, Unterlagen für die Berechnung der Ablösungsstelle bei turbulenter Reibungsschicht zu gewinnen<sup>2</sup>.

Während die bisherigen Arbeiten über die turbulente Reibungsschicht<sup>3</sup> sich hauptsächlich mit dem Reibungswiderstand an der Wand befassen, soll deshalb in der vorliegenden Arbeit die Reibungsschicht im Hinblick auf den Ablösungsvorgang untersucht werden. Um voraussagen zu können, ob bei einem vorgegebenen Druckverlauf längs einer Wand Ablösung eintritt, ist es nötig, die Reibungsschicht vorher zu berechnen. Es soll versucht werden, auf Grund von Messungen ein Verfahren zu entwickeln, das diese Aufgabe für ebene Strömungen näherungsweise erfüllt. Da die Einzelvorgänge in turbulenten Strömungen noch unbekannt sind, kann das nur in der Weise geschehen, daß aus Versuchen Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden, die für das einzelne Geschwindigkeitsprofil, d. h. die Geschwindigkeitsverteilung längs einer Senkrechten zur Oberfläche, als Ganzes gelten.

---

<sup>1</sup> Göttinger Dissertation. Referent: Prof. Dr. L. Prandtl.

<sup>2</sup> Über ein Näherungsverfahren zur Berechnung laminarer Grenzschichten vgl. K. Pohlhausen, ZS f. ang. Math. u. Mech. 1 (1921) S. 252.

<sup>3</sup> Th. v. Kármán, ZS f. ang. Math. u. Mech. 1 (1921) S. 233. B. G. van der Hegge Zijnen, Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Thesis, Delft 1924. M. Hansen, ZS f. ang. Math. u. Mech. 8 (1928) S. 185. A. Fage u. V. M. Falkner, Proc. of Roy. Soc., London A 129 (1930).

Die Versuche sind im Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung zu Göttingen und in der damit verbundenen aerodynamischen Versuchsanstalt ausgeführt worden.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Prof. **Prandtl**, dem ich auch für die mir gewährte Beratung und wohlwollende Förderung zu Dank verpflichtet bin.

## I. Die Versuche.

**1. Messungen am Tragflügel.** Zunächst wurden Messungen an der Saugseite eines Tragflügelmodells im großen Windkanal<sup>1</sup> der aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen ausgeführt (Strahldurchmesser 2,25 m). Das untersuchte Tragflügelmodell hatte Profil 387 der Göttinger Profilsammlung<sup>1</sup> und war 40 cm tief. Es war in der in Göttingen üblichen Weise<sup>1</sup> mit einer Oberfläche aus Gips versehen, außer in der Mitte des Flügels, wo die Oberfläche durch einen 10 cm breiten Messingstreifen gebildet wurde. Der Flügel war so lang, daß er durch den Strahl hindurchreichte und war zu beiden Seiten außerhalb des Strahles derart befestigt, daß sich der Messingstreifen in der Mitte des Strahles befand, so

daß man an dieser Stelle ebene Strömung erwarten durfte.

Zur Untersuchung der Reibungsschicht wurden Pitotrohre verwendet. Da die Entfernungen des Pitotrohrs von der Oberfläche des Flügels auf Beträge genau gemessen werden mußten, die weit unterhalb der Größe der Durchbiegungen lagen, die das Flügelmodell durch die darauf wirkenden Luftkräfte erlitt, war es nötig, das Pitotrohr am Flügel selbst zu befestigen.

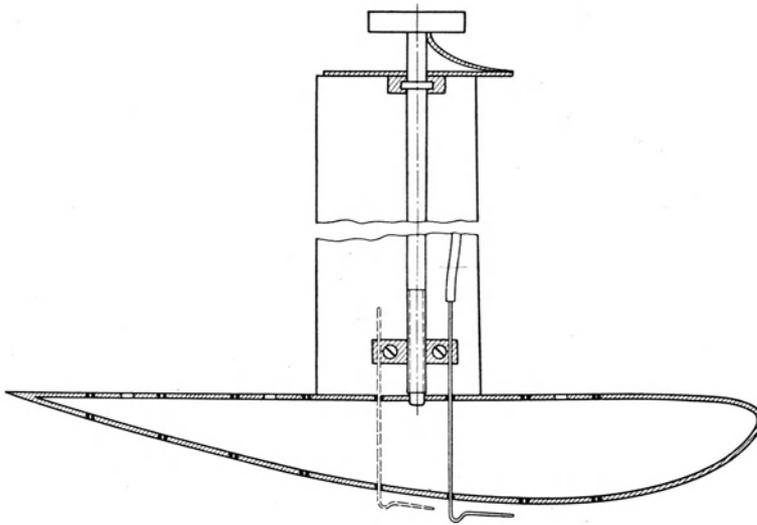


Abb. 1. Die Meßeinrichtung am Tragflügel.

Die Einrichtung zum Verschieben des Pitotrohrs war in ein Profilrohr aus Stahl eingebaut, dessen eines Ende auf der Druckseite des Flügels an dem Messingstreifen befestigt war, während das andere Ende aus dem Strahl herausragte (s. Abb. 1). In dem Profilrohr war eine Welle gelagert, die durch das ganze Rohr hindurchlief und in die an dem einen, dem Flügel zugewandten Ende ein Gewinde von 1 mm Steigung geschnitten war. Das andere, aus dem Strahl herausragende Ende trug einen Zeiger, der über einem in 100 Teile geteilten Kreis lief. Auf dem Gewinde lief eine Klemme, die durch zwei Schlitze im Profilrohr geführt wurde und in der sich das Pitotrohr durch Anziehen einer Schraube festklemmen ließ, und zwar konnte es an zwei Stellen der Klemme, vor und hinter der Welle, festgeklemmt werden, so daß mit einer Stellung des Profilrohrs die Gesamtdruckverteilung an zwei Stellen gemessen werden konnte. Das Pitotrohr ging dann von hier aus durch Bohrungen im Flügel nach der Saugseite.

Das Profilrohr konnte an vier verschiedenen Stellen auf der Druckseite festgeschraubt werden, so daß das Pitotrohr an acht verschiedene Stellen gebracht werden konnte. Es mußten dementsprechend je acht Bohrungen in der Saug- und in der Druckseite angebracht werden. Durch verschiedene Längen der Pitotrohre konnten noch mehr Stellen der Rei-

<sup>1</sup> Siehe Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, I. Lieferung, München 1921.

bungsschicht erreicht werden. Die jeweils nicht benötigten Bohrungen wurden mit einem steifen Fett verschlossen, wobei besonders auf Herstellung einer möglichst glatten Oberfläche geachtet wurde.

Die Pitotrohre waren aus dünnem Stahlrohr hergestellt; die meisten Messungen wurden mit einem solchen von 0,60 mm Außendurchmesser (Innendurchmesser 0,40 mm) ausgeführt, in den dickeren Teilen der Reibungsschicht wurde auch ein Rohr von 1,04 mm Außendurchmesser (Innendurchmesser 0,74 mm) verwendet.

Um die Lage des Pitotrohrs an der Stelle, an der es die Oberfläche gerade berührt, genau feststellen zu können, war es isoliert durch die Bohrungen im Flügel geführt, so daß diese Lage durch Schließen eines Stromes (der, um Funkenbildung zu vermeiden, sehr schwach sein muß) angezeigt werden konnte. Auf diese Weise konnte die Anfangslage und damit der Abstand von der Wand auf 0,01 mm genau festgestellt werden.

Im ganzen wurden neun Meßreihen durchgeführt: Bei Geschwindigkeiten von 15,3, 30,8 und 46,2 m/sek und (geometrischen) Anstellwinkeln  $\alpha = 6^\circ$ ,  $12^\circ$  und  $15^\circ$ . Zu jeder Meßreihe wurden neun Gesamtdruckprofile gemessen. Außerdem wurde noch durch Bohrungen von 0,8 mm Durchmesser, die sich ebenfalls in dem Messingstreifen befanden, der statische Druck an der Oberfläche des Flügels gemessen.

Zu den Druckmessungen wurde ein Manometer Prandtlscher Bauart<sup>1</sup> verwendet, wobei als Nullpunkt der Druck im Versuchsraum diente.

Die Versuche wurden in solcher Reihenfolge ausgeführt, daß jedes Gesamtdruckprofil unmittelbar nacheinander mit den drei Geschwindigkeiten gemessen, der Anstellwinkel aber während der Durchführung der drei entsprechenden Meßreihen unverändert gelassen wurde.

**2. Messungen am Gebläse.** Da die Messungen am Tragflügel noch nicht das für die Auswertung gewünschte Material lieferten, wurden noch Versuche mit einer Anordnung gemacht, die auf einen Vorschlag zurückgeht, den ich Herrn **H. Peters** verdanke. Sie ist in Abb. 2 skizziert. Ein von einem Elektromotor (Leistung 14,5 kW) angetriebenes zweistufiges Axialgebläse saugt durch radiale Leitschaufeln, die gleichmäßige Zuströmung gewährleisten sollen, Luft an, die dann durch einen Gleichrichter  $g$  und eine Übergangsstrecke, in der der kreisförmige Querschnitt in einen rechteckigen übergeleitet wird, in einen Beruhigungskanal  $b$  von 65 cm Höhe, 45 cm Breite und 250 cm Länge gelangt. Von diesem leitet eine Verengung, die die Breite des Kanals jedoch unverändert läßt, zu der Versuchsstrecke über. Die Untersuchung der Reibungsschicht geschieht an der Platte  $p$ . Diese, 1 m lang und 45 cm breit, ist aus Holz gefertigt. Ihre Oberfläche ist poliert, und in der Mitte ist, parallel zur langen Seite der Platte, ein 10 cm breiter Messingstreifen eingelassen, der zur Aufnahme der Meßeinrichtungen dient, mit denen die Reibungsschicht längs dieses Streifens verfolgt wird. Am Beginn der Platte befindet sich in der Oberseite des Kanals ein 1,7 cm breiter Spalt  $s$ , der den Zweck hat, die von der Kanalwand herrührende Reibungsschicht aus dem Kanal herausströmen zu lassen, so daß an die Meßplatte nur von der Wandreibung unbeeinflusste Luft gelangt. Der der Platte gegenüberliegenden Seite des Kanals kann man nun verschiedene Formen geben, so daß man den Druckverlauf längs der Platte in der jeweils gewünschten Weise festlegen kann. Diese verschiedenen Formen werden durch auswechselbare Einlagen hergestellt, die man in den Kanal einschieben kann und die aus 1 mm starkem Zinkblech bestehen, das auf entsprechend ausgeschnittene Holzleisten aufgeschraubt ist. Die Entfernung zwischen der Meßplatte und der Unterseite des Kanals muß natürlich immer so groß gehalten werden, daß zwischen den beiden Reibungsschichten noch ein Gebiet mit von Reibung unbeeinflusster Strömung bleibt.

Um die Windgeschwindigkeit möglichst genau konstant halten zu können, ist das Gebläse mit einem Regler in der von Herrn **O. Schrenk** entwickelten Bauart<sup>2</sup> versehen. Er

<sup>1</sup> Siehe Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 1. Lieferung, S. 44.

<sup>2</sup> **O. Schrenk**, Ing.-Arch. 1 (1930) S. 350.

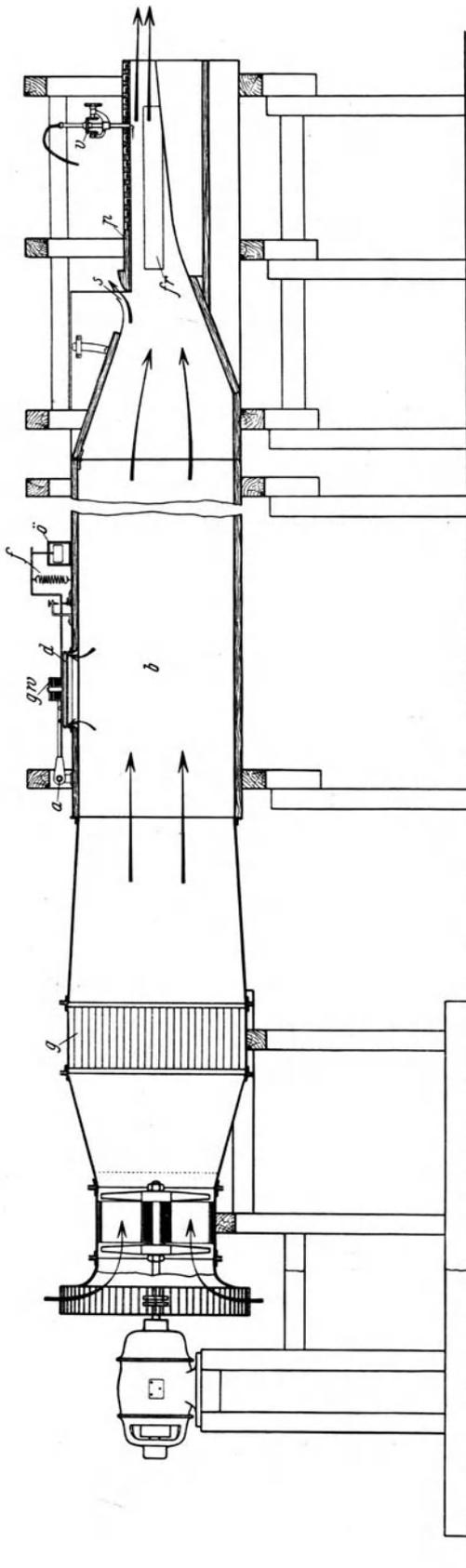


Abb. 2. Die Versuchsanordnung am Gebläse.

*g* Gleichrichter, *b* Beruhigungskanal, *s* Spalt, *p* Meßplatte, *v* Verschiebevorrichtung für das Pitotrohr, *f*r Fenster, *d* Deckel des Reglers, *a* Achse des Reglers, *ö* Öldämpfung, *gw* Gewichte, *f* Feder.

besteht hier im wesentlichen aus einem kreisförmigen Deckel *d* (Durchmesser 32,5 cm), der sich über einer gleich großen Öffnung im Beruhigungskanal befindet und der um eine Achse *a* beweglich ist. Die Reibung wird hierbei durch Kugellager möglichst klein gehalten. Die Bewegungen des Deckels werden durch eine Öldämpfung *ö* gedämpft. Der Regler arbeitet in der Weise, daß der durch aufsteckbare Gewichte *gw* dem gewünschten Druck entsprechend belastete Deckel durch den Druck im Kanal über der Öffnung schwebend gehalten wird, so daß durch einen schmalen Schlitz zwischen dem Deckel und dem Rand der Öffnung dauernd Luft abbläst. Es verursacht dann z. B. eine Vergrößerung des Druckes im Kanal ein Anheben des Deckels und damit vermehrtes Ausströmen von Luft, wodurch der Druck wieder herabgemindert wird. Es zeigte sich zunächst, daß der Druck im Kanal mit veränderter Schlitzgröße nicht genau konstant war, sondern bei höher gehobenem Deckel etwas abnahm, was dadurch verursacht wird, daß die Strömung und damit der Druck unter dem Deckel durch die Änderung der Schlitzbreite verändert wird. Wie Herr **Schrenk** gefunden hat, kann man diese Abhängigkeit des Druckes von der Schlitzgröße durch Veränderung der Höhe des Deckels beseitigen. In unserem Falle wird sie durch eine Feder *f* kompensiert, da das eine einfache anzubringende Veränderung ergab. Die Dimensionierung dieser Feder muß aber für jeden im Kanal gewünschten Druck besonders erfolgen. Sie wurde durch Probieren in der Weise vorgenommen, daß durch Veränderung der Länge der Feder die Federkonstante so lange geändert wurde, bis der Druck für einen gewissen Bereich des Deckelausschlages bis auf etwa 1<sup>0</sup>/<sub>100</sub> konstant war. Der Ausschlag des Deckels ist nach oben und unten durch Kontakte begrenzt, an die eine elektrische Klingel angeschlossen ist, durch die das Überschreiten des zulässigen Spielraumes

angezeigt wird. Die Grobregelung erfolgt mit der Hand durch Veränderung des Motorfeldes.

Die Reibungsschicht wurde auch hier mit Pitotrohren untersucht. In dem in die Meßplatte eingelassenen Messingstreifen befinden sich in Abständen von 5 cm Bohrungen mit Gewinde, in die eine Verschiebevorrichtung  $v$  für das Pitotrohr eingeschraubt werden kann. Diese besteht im wesentlichen aus einer Schraubenspindel und gestattet die Verschiebung des Pitotrohrs auf 0,01 mm genau abzulesen. Die Stellung des Pitotrohrs, in der es die Wand berührt, wurde auch hier durch Schließen eines Stromes festgestellt. Die jeweils nicht benutzten Bohrungen in dem Messingstreifen lassen sich durch Schrauben verschließen, die mit der Oberfläche genau abschließen.

Der Gesamtdruck wurde mit zwei Pitotrohren gemessen, die 4,5 bzw. 2 cm lang sind, so daß Gesamtdruckprofile in Abständen von 2,5 cm aufgenommen werden konnten. Die Pitotrohre sind aus Stahl und haben 0,6 mm Außendurchmesser (Innendurchmesser 0,4 mm). Damit die Entfernung der Meßpunkte von der Wand besser definiert ist, sind ihre Spitzen etwas breitgedrückt, so daß sie ungefähr elliptischen Querschnitt haben, wobei die kleine Achse senkrecht zur Wand steht. Die lichte Öffnung in dieser Richtung beträgt 0,30 bzw. 0,23 mm. Die Entfernung der Spitze von der Wand in dem Fall, in dem das Pitotrohr die Wand berührt, wurde unter dem Mikroskop festgestellt, indem die Entfernung der Spitze von ihrem Spiegelbild in einer blanken Metallplatte gemessen wurde. Es wurde angenommen, daß das Pitotrohr den in der Mitte seiner Öffnung herrschenden Gesamtdruck anzeigt.

Zur Erleichterung des Einbaus des Pitotrohrs ist in der Seitenwand des Versuchskanals ein Fenster  $f$  angebracht.

In dem Messingstreifen befinden sich noch in Abständen von 2,5 cm Anbohrungen von 0,6 mm Durchmesser zur Messung des statischen Druckes. Gesamtdruck und statischer Druck wurden auch hier mit einem Prandtl'schen Manometer gegenüber dem Druck im Versuchsraum gemessen.

Mit dieser Anordnung wurden 5 Meßreihen durchgeführt. Die Meßreihe 1 lieferte jedoch kein für die Auswertung brauchbares Material. Sie wurde mit der in Abb. 2 eingezeichneten Einlage ausgeführt; es war also längs der Platte nur Druckabfall vorhanden. Die Geschwindigkeit am Ende des Kanals war dabei  $W_0 = 38,0$  m/sek. Es zeigte sich hierbei ein ganz allmählicher Übergang von laminaren zu turbulenten Geschwindigkeitsverteilungen, der sich fast auf die ganze Länge der Platte erstreckte.

Die zu Meßreihe 2 verwendete Einlage ist in Abb. 3 dargestellt. Hiermit sollte ein starker Druckanstieg erzeugt werden, der zur Ablösung der Reibungsschicht führt. Damit die Ablösung an der Meßplatte stattfindet und nicht an der Unterseite des Kanals, befindet sich in letzterer ein 1 cm breiter Spalt, durch den die Reibungsschicht der Unterseite nach außen strömen kann. Der zu diesem Zweck nötige Überdruck an der Stelle des Spaltes wird dadurch hervorgerufen, daß sich der Kanal in seinem letzten Teil wieder verengt. Es ist das also eine Anwendung der bekannten Methode der Grenzschichtabsaugung. Diese Vorkehrung allein genügte aber noch nicht, um die gewünschte Ablösung an der Meßplatte hervorzurufen. Die Ablösung begann hierbei zuerst in den Ecken des Kanals, was auch verständlich ist, da sich dort die Wirkungen zweier Wände überlagern. Die von den Ecken ausgehenden Wirbelgebiete engten dann den Luftstrom so ein, daß die Reibungsschicht an der Meßplatte anliegen blieb. Um diese Erscheinung zu beseitigen, wurden von den Rändern des Bleches, aus dem die Einlage besteht, von  $a$  bis  $b$  (Abb. 3) etwa 2 mm breite Streifen weggeschnitten. Aus den dadurch entstandenen Schlitzen kann ein großer Teil der durch die Reibung gebremsten Luft ausströmen. Es genügte, solche Schlitze nur in den unteren Ecken anzubringen. Da von einem seitlichen Druckgradienten die langsamer strömende Luft unter einem größeren Winkel abgelenkt wird als die schneller strömende, wird durch die Schlitze offenbar auch der größte Teil der Reibungsschicht an den schmalen

Seitenwänden entfernt. Auf diese Weise ist es gelungen, die Strömung an der Unterseite und den Seitenwänden zum Anliegen zu bringen, während an der Meßplatte Ablösung vorhanden ist. Die Austrittsgeschwindigkeit am Ende des Kanales war bei dieser Meßreihe

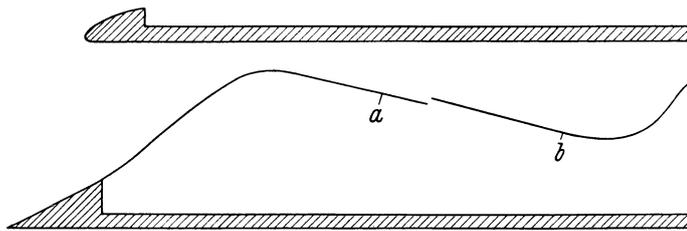


Abb. 3. Einlage zu Meßreihe 2.

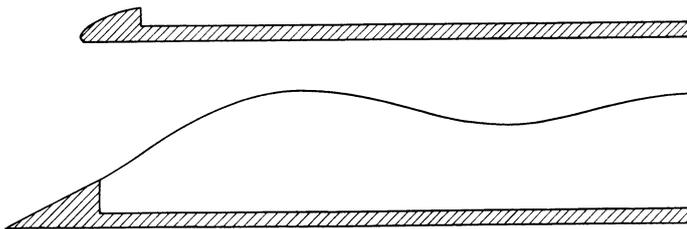


Abb. 4. Einlage zu Meßreihe 4.

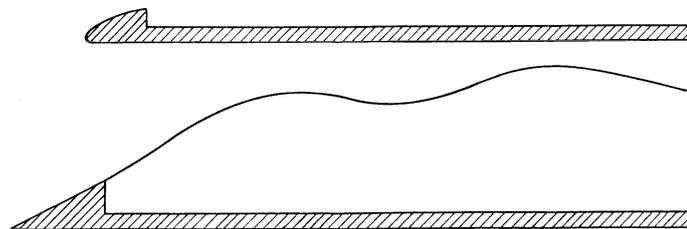


Abb. 5. Einlage zu Meßreihe 5.

Strecke Druckanstieg herrscht, wodurch Übergang zur Turbulenz hervorgerufen wird. Hieran schließt sich dann erst die Strecke mit Druckabfall und an diese wieder die mit dem Druckanstieg an. Ablösung fand bei den beiden letzten Meßreihen nicht statt. Die Austrittsgeschwindigkeiten waren für Meßreihe 4  $W_0 = 37,0$  m/sek und Meßreihe 5  $W_0 = 39,2$  m/sek.

## II. Berechnung von Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilungen.

Mit dem Pitotrohr mißt man in turbulenten Strömungen den zeitlichen Mittelwert des Gesamtdruckes. Ebenso wird durch die Anbohrungen in der Oberfläche der zeitliche Mittelwert des statischen Druckes gemessen. Bezeichnen wir den Gesamtdruck mit  $g$ , den statischen Druck mit  $p$ , den Betrag der Geschwindigkeit mit  $w$ , die Dichte mit  $\rho$  und die zeitlichen Mittelwerte durch Überstreichen, so ist

$$\bar{g} = \bar{p} + \frac{\rho}{2} \bar{w}^2. \quad (1)$$

Nun kann man setzen

$$w = \bar{w} + w',$$

wobei  $w'$  die Schwankung um den zeitlichen Mittelwert bedeutet. Damit wird

$$\overline{w^2} = \overline{\bar{w}^2} + 2\bar{w}\overline{w'} + \overline{w'^2}$$

$W_0 = 39,0$  m/sek.

Zur Meßreihe 3 wurde dieselbe Einlage mit einer geringfügigen Veränderung (der Absaugespalt war nur 0,6 cm breit) benutzt. Die Austrittsgeschwindigkeit war hierbei  $W_0 = 23,85$  m/sek.

Mit Meßreihe 4 (Abb. 4) wurde eine Reibungsschicht untersucht, die erst einem Druckanstieg und dann einem Druckabfall ausgesetzt war, während mit Meßreihe 5 (Abb. 5) umgekehrt eine Reibungsschicht untersucht wurde, die erst einem Druckabfall und dann einem Druckanstieg unterworfen war. Da, wie Meßreihe 1 gezeigt hatte, der Turbulenzübergang bei Druckabfall nur sehr allmählich vor sich geht, wurde die Einlage zu Meßreihe 5 so geformt, daß zunächst auf einer kurzen

oder, da  $\overline{w'} = 0$ ,

$$\overline{w^2} = \overline{w}^2 + \overline{w'^2}.$$

Da man nach der Gleichung (1) nur  $\overline{w^2}$  berechnen kann und da die Größe  $\overline{w'^2}$  unbekannt ist, kann man  $\overline{w}$  aus den Messungen nicht genau berechnen. Die Größe  $\overline{w'^2}$  ist aber sicher in der Regel klein gegenüber  $\overline{w}^2$ , so daß man sie vernachlässigen und also  $\overline{w} = \sqrt{\overline{w^2}}$  setzen kann. Da  $\overline{w'^2}$  immer positiv ist, erhält man durch diese Vernachlässigung  $\overline{w}$  immer etwas zu groß. In den Teilen der Reibungsschicht, in denen  $\overline{w}$  klein ist, also in der Nähe der Ablösungsstelle, können dadurch jedoch die Geschwindigkeiten wahrscheinlich beträchtlich gefälscht werden, zumal dort große Schwankungen der Geschwindigkeit zu erwarten sind. Dieser Fehler wird dort, wo schon Schwankungen vorkommen, die größer als  $\overline{w}$  sind, so daß das Pitotrohr zeitweilig von hinten angeströmt wird, noch dadurch vergrößert, daß das Pitotrohr diese Rückwärtsgeschwindigkeiten bei der Mittelwertbildung so gut wie gar nicht berücksichtigt. Es wird weiter unten noch auf diese durch die turbulenten Schwankungen hervorgerufenen Fehler zurückzukommen sein.

Im folgenden wollen wir der Einfachheit halber die die Mittelwertbildung bezeichnenden Striche weglassen und unter allen vorkommenden Größen die zeitlichen Mittelwerte verstehen. Als Koordinaten sollen die Entfernung  $x$  auf der Oberfläche des beströmten Körpers in der Strömungsrichtung und der senkrechte Abstand  $y$  von der Wand gewählt werden. Am Tragflügel ist  $x$  die Bogenlänge längs der Saugseite des Profils vom vordersten Punkt an gemessen (die Gesamtlänge von diesem Punkt bis zur Hinterkante beträgt 42,7 cm), an der Meßplatte der geradlinige Abstand von der Vorderkante der Platte. Ferner sei  $W$  der Betrag der Geschwindigkeit außerhalb der Reibungsschicht,  $q$  der dieser Geschwindigkeit entsprechende Staudruck, also  $q = \frac{\rho W^2}{2}$ ,  $g_0$  der konstante Gesamtdruck außerhalb der Reibungsschicht und  $W_0$  der dem statischen Druck  $p = 0$  entsprechende Wert von  $W$  (bei den Messungen am Tragflügel ist  $W_0$  die ungestörte Geschwindigkeit, bei den Messungen am Gebläse die Geschwindigkeit am Ende des Kanals). Außerhalb der Reibungsschicht gilt ja die Bernoullische Gleichung:

$$p + q = g_0 = \frac{\rho W_0^2}{2}.$$

Es erweist sich für die folgenden Betrachtungen als zweckmäßig, die Bewegungsgleichungen in solcher Form anzuwenden, daß sie für jeden Punkt in der Richtung der hindurchgehenden Stromlinie und der senkrechten Trajektorie zu den Stromlinien gelten. Bezeichnet man die Schubspannung mit  $\tau$ , die Richtung der Stromlinie mit  $s$  und die der senkrechten Trajektorie mit  $n$ , ferner die Krümmungen der Stromlinie und die der senkrechten Trajektorie mit  $k_s$  bzw.  $k_n$ , so lauten die Bewegungsgleichungen für stationäre Strömungen in dieser Form:

$$\rho w \frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n} + 2\tau k_s, \quad (2)$$

$$\rho w^2 k_s = \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial \tau}{\partial s} - 2\tau k_n. \quad (3)$$

Dabei sind  $k_s$  und  $k_n$  positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt in der negativen  $n$ - bzw.  $s$ -Richtung liegt. Zur ersten dieser beiden Gleichungen kann man gelangen, indem man ein Flüssigkeitselement betrachtet, das von einer Stromlinie, einer Parallelkurve dazu und zwei senkrechten Trajektorien begrenzt wird, und die Komponenten in der  $s$ -Richtung des darauf wirkenden statischen Druckes und der Schubspannungen gleich der mit seiner Masse multiplizierten Beschleunigung setzt, zur zweiten, indem man die Kräfte, die in der  $n$ -Richtung auf ein Flüssigkeitselement wirken, das von einer senkrechten Trajektorie, einer Parallelkurve dazu und zwei Stromlinien begrenzt wird, gleich der mit der Masse des

Flüssigkeitselementes multipliziert Zentripetalbeschleunigung setzt. Dabei sind die Komponenten der Schubspannungen in der  $s$ - bzw.  $n$ -Richtung in der in Abb. 6 dargestellten Weise zu berücksichtigen. Aus dem dort gezeichneten Kräfteplan findet man für die Resultierende der Schubspannungen in der  $s$ -Richtung:

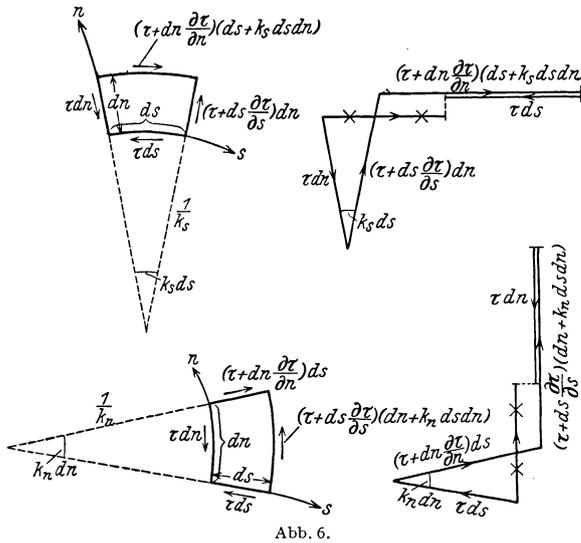


Abb. 6.

Aus dem statischen Druck resultiert in der  $s$ -Richtung die Kraft  $-dsdn \frac{\partial p}{\partial s}$ , ferner ist Masse mal Beschleunigung  $=\rho dsdn \cdot w \frac{\partial w}{\partial s}$ . Geht man in der aus diesen drei Bestandteilen zusammengesetzten Bewegungsgleichung nach Wegkurven von  $dsdn$  zur Grenze  $ds, dn \rightarrow 0$  über, so erhält man Gleichung (2). Auf dieselbe Weise leitet man Gleichung (3) ab.

$$\frac{1}{2} \tau k_s ds dn + \frac{1}{2} \left( \tau + ds \frac{\partial \tau}{\partial s} \right) k_s ds dn + \left( \tau + dn \frac{\partial \tau}{\partial n} \right) (ds + k_s ds dn) - \tau ds.$$

Aus dem statischen Druck resultiert in der  $s$ -Richtung die Kraft  $-dsdn \frac{\partial p}{\partial s}$ , ferner ist Masse mal Beschleunigung  $=\rho dsdn \cdot w \frac{\partial w}{\partial s}$ . Geht man in der aus diesen drei Bestandteilen zusammengesetzten Bewegungsgleichung nach Wegkurven von  $dsdn$  zur Grenze  $ds, dn \rightarrow 0$  über, so erhält man Gleichung (2). Auf dieselbe Weise leitet man Gleichung (3) ab.

Indem man den Gesamtdruck  $g = p + \frac{\rho w^2}{2}$  einführt, kann man Gleichungen (2) und (3) auch schreiben:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial \tau}{\partial n} + 2\tau k_s, \quad (4)$$

$$2k_s (g - p) = \frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\partial \tau}{\partial s} - 2\tau k_n. \quad (5)$$

Um nach Gleichung (1) die Geschwindigkeit zu berechnen, braucht man außer dem Gesamtdruck den statischen Druck. Diesen in der Reibungsschicht unmittelbar zu messen war unmöglich, da die statischen Sonden in turbulenten Strömungen fehlerhaft anzeigen. Es ist jedoch innerhalb der Reibungsschicht keine erhebliche Änderung des statischen Druckes in der Richtung senkrecht zur Oberfläche zu erwarten, und er wurde deshalb dem an der Oberfläche gemessenen statischen Druck entnommen. Bei den Messungen am Tragflügel wurde dabei noch wegen der Wölbung der Oberfläche eine Korrektur angebracht, die sich wie folgt ergibt: In einer Strömung, deren Stromlinien alle konzentrische Kreise mit dem Radius  $r$  sind, gilt nach Gleichung (5) unter Vernachlässigung von  $\frac{\partial \tau}{\partial s} + 2\tau k_n$ :

$$\frac{2}{r} (g - p) = \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung für  $p$ , deren Lösung lautet:

$$p = \frac{r_0^2}{r^2} p_0 + \frac{2}{r^2} \int_{r_0}^r g r dr,$$

falls  $p = p_0$  für  $r = r_0$  ist. Nimmt man an, daß für ein kurzes Stück der Reibungsschicht alle Stromlinien konzentrische Kreisbögen sind, so hat man in dieser Gleichung  $r = r_0 + y$  zu setzen, wenn man unter  $r_0 = \frac{1}{k_0}$  den Krümmungsradius der Flügeloberfläche versteht. Dabei kann man dann noch wegen der Kleinheit von  $y$  gegen  $r_0$  im Nenner des ersten Gliedes

auf der rechten Seite der Gleichung  $y^2/r_0^2$  vernachlässigen und im zweiten Glied  $r = r_0$  setzen. Man erhält so:

$$p \approx \frac{p_0}{1 + 2k_0 y} + 2k_0 \int_0^y g dy,$$

wobei  $p_0$  der statische Druck an der Oberfläche ist.

Die hiernach anzubringende Korrektur ist ziemlich gering; sie brachte selten eine Änderung von mehr als 1% des Staudrucks.

In Abb. 7 bis 9 sind die am Tragflügel bei der Geschwindigkeit  $W_0 = 30,8$  m/sek erhaltenen Geschwindigkeitsprofile aufgetragen und in Abb. 11 bis 19 die aus den Meßreihen 2 bis 5 am Gebläse. Man sieht deutlich den Unterschied zwischen laminaren und turbulenten Profilen. Bei den Messungen am Gebläse sind immer die ersten drei Profile jeder Meßreihe

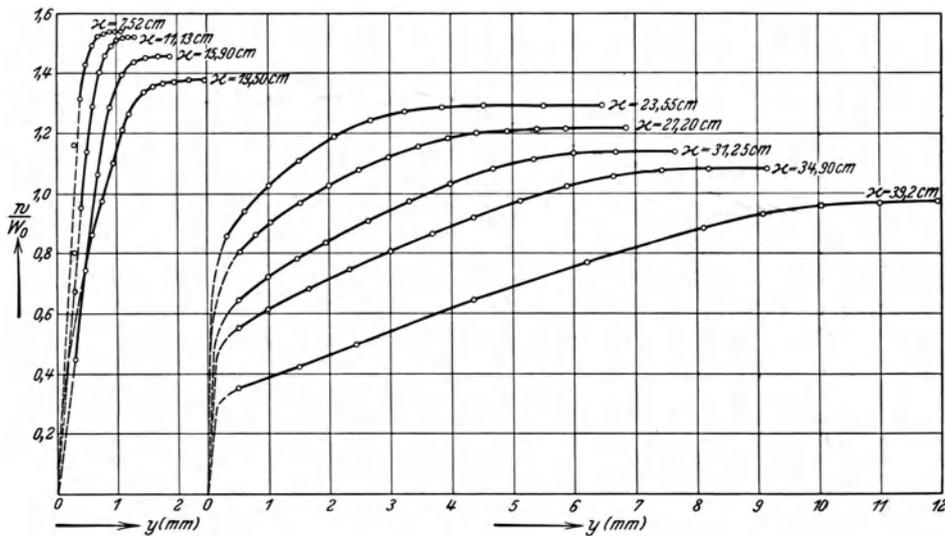


Abb. 7. Geschwindigkeitsprofile am Tragflügel. Anstellwinkel  $\alpha = 6^\circ$ , ungestörte Geschwindigkeit  $W_0 = 30,8$  m/sek.

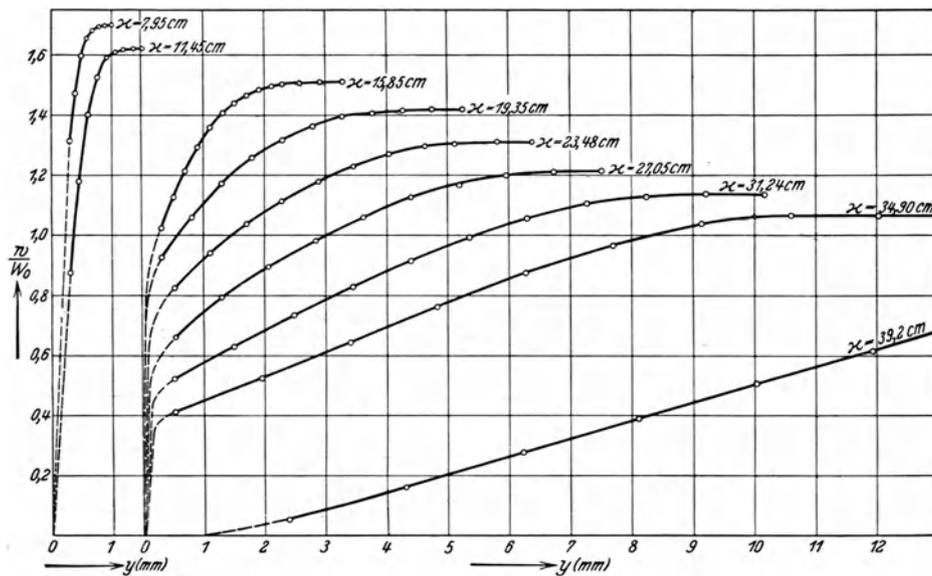


Abb. 8. Geschwindigkeitsprofile am Tragflügel.  $\alpha = 12^\circ$ ,  $W_0 = 30,8$  m/sek.

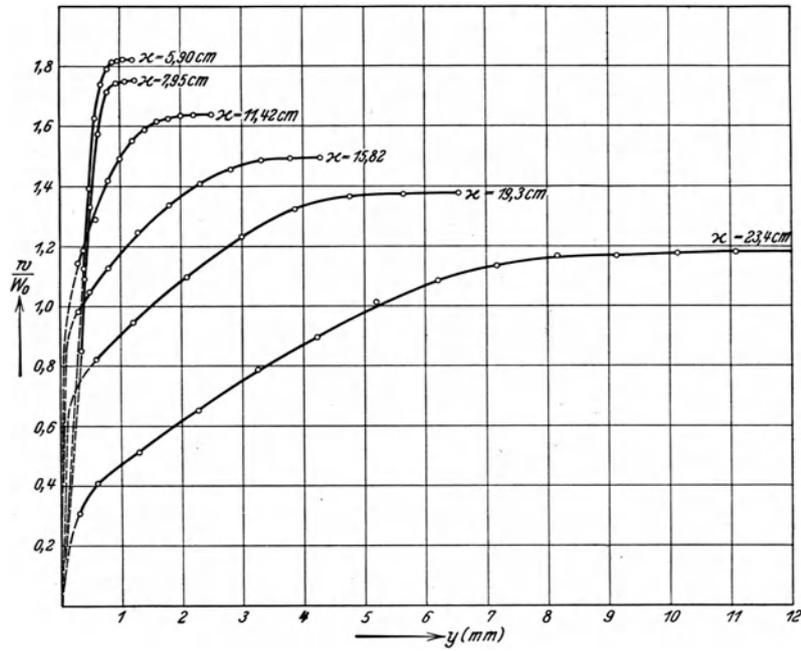


Abb. 9. Geschwindigkeitsprofile am Tragflügel.  $\alpha = 15^\circ$ ,  $W_0 = 30,8$  m/sek.

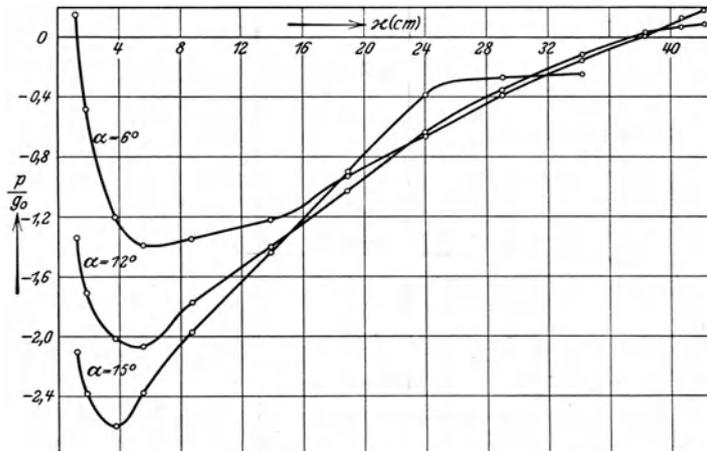


Abb. 10. Statischer Druck  $p$  an der Saugseite des Tragflügels, bezogen auf  $p_0 = \frac{\rho W_0^2}{2}$ .  $W_0 = 30,8$  m/sek.

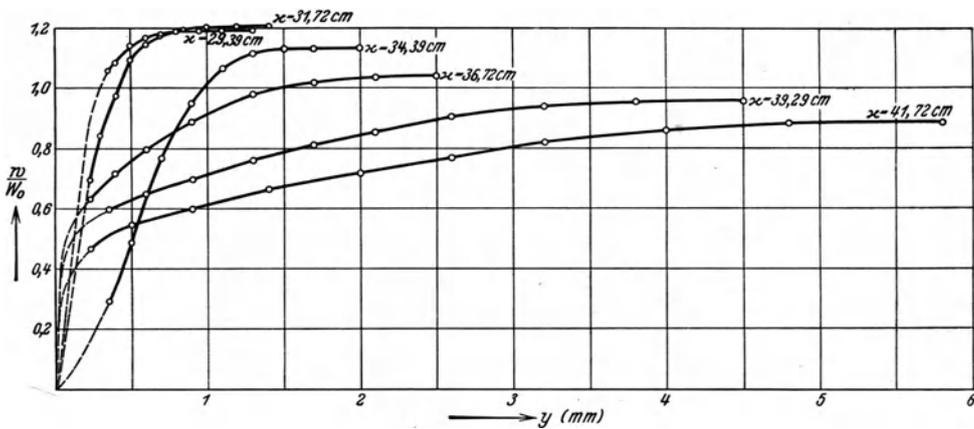


Abb. 11. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 2.

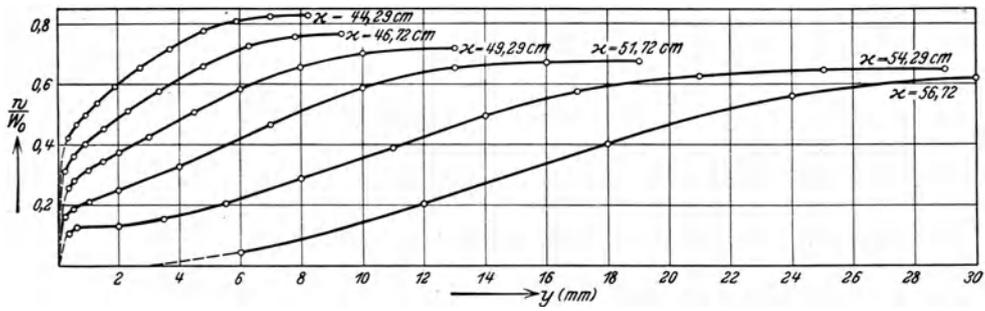


Abb. 12. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 2.

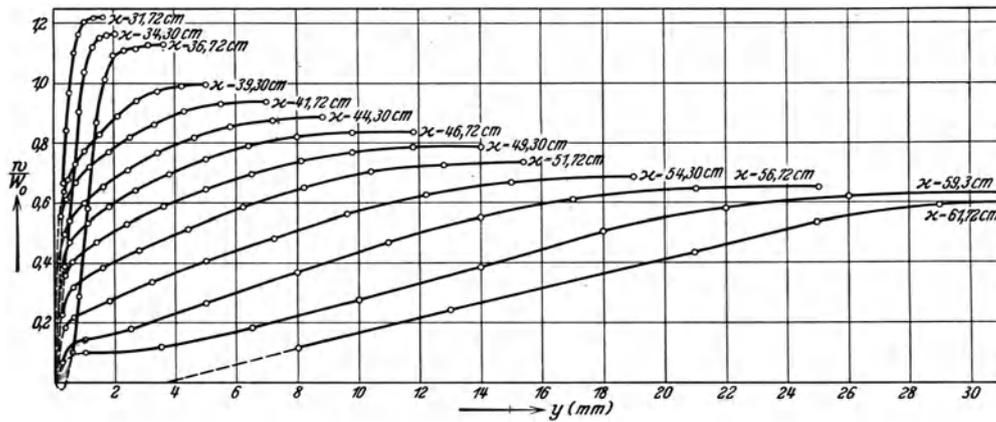


Abb. 13. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 3.

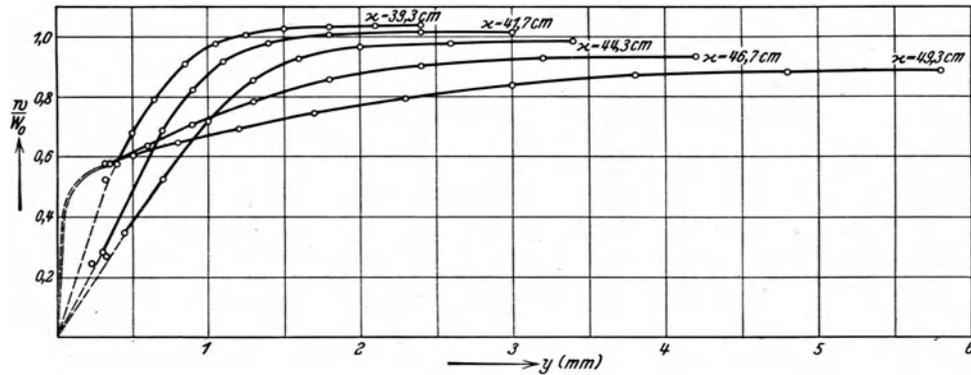


Abb. 14. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 4.

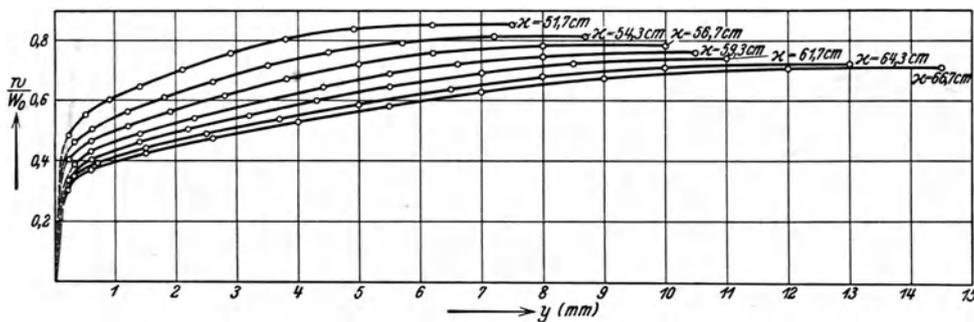


Abb. 15. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 4.

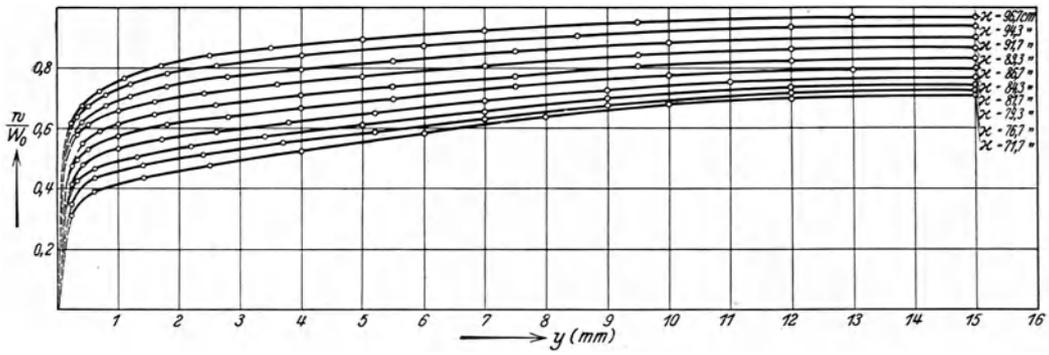


Abb. 16. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 4.

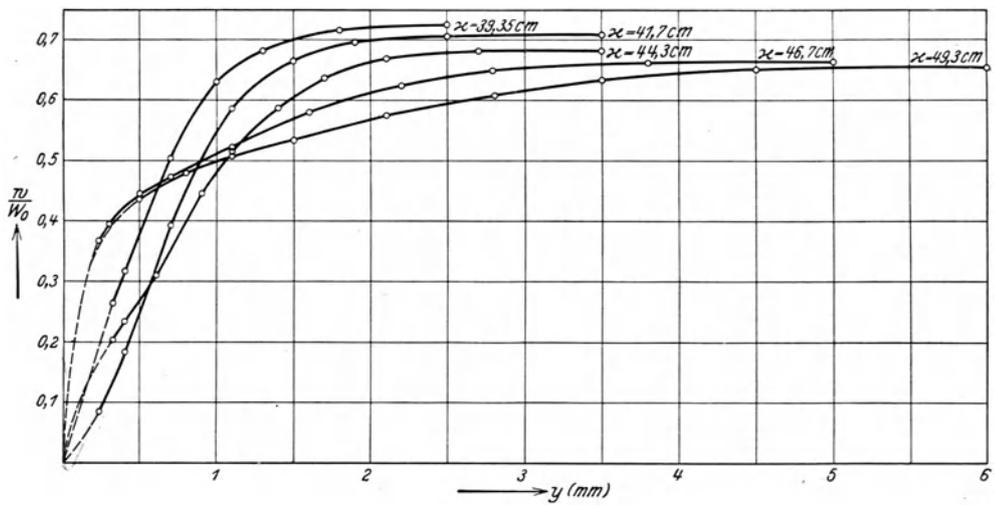


Abb. 17. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 5.

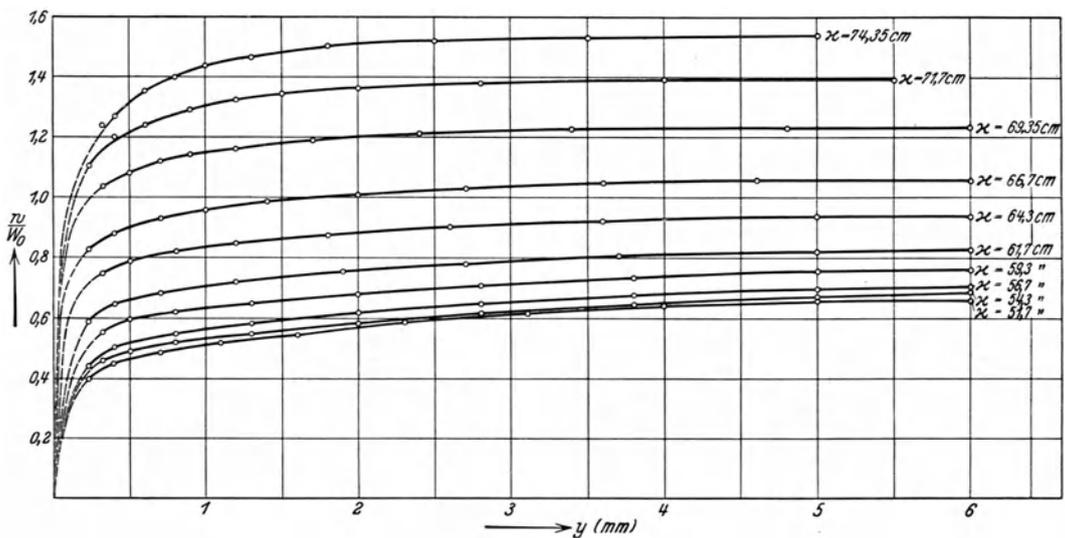


Abb. 18. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 5.

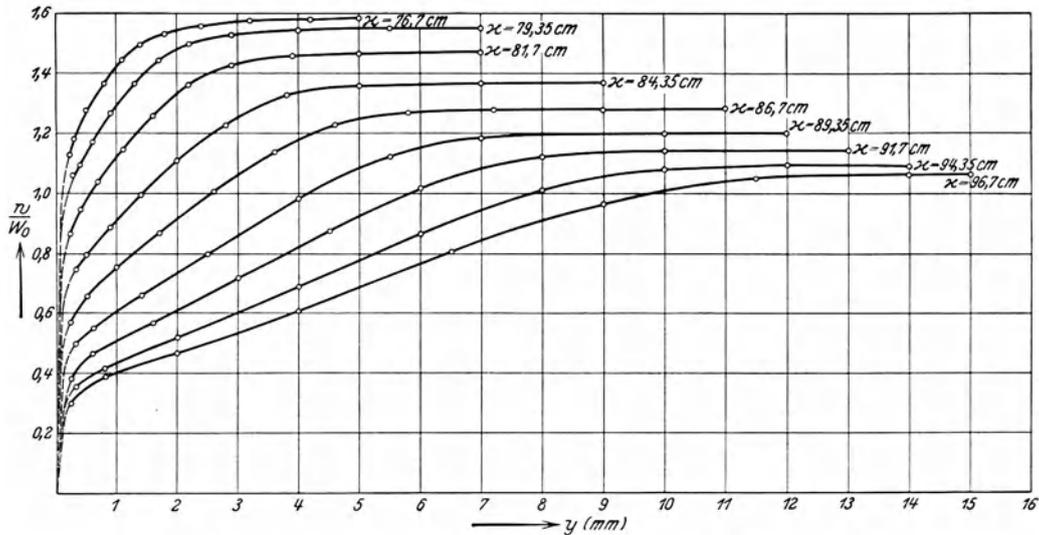


Abb. 19. Geschwindigkeitsprofile zu Meßreihe 5.

laminar. Bemerkenswert ist, daß in Abb. 13 (wie übrigens auch bei einigen Messungen am Tragflügel mit  $W_0 = 15,3$  m/sek) das letzte laminare Profil Rückströmung zeigt. Der Übergang zur Turbulenz wird hier offenbar durch beginnende Ablösung der laminaren Grenzschicht ausgelöst. In diesen Fällen ist der Turbulenzübergang auch mit einer erheblichen Störung des statischen Druckes verbunden (s. Abb. 20). Wie schon oben erwähnt wurde, dürften die turbulenten Geschwindigkeitsprofile unmittelbar vor der Ablösungsstelle, z. B. in Abb. 12 die Profile bei  $x = 51,72$  und  $x = 54,29$ , durch die turbulenten Schwankungen erheblich gefälscht sein, so daß die Einbuchtungen, die dieselben zeigen,

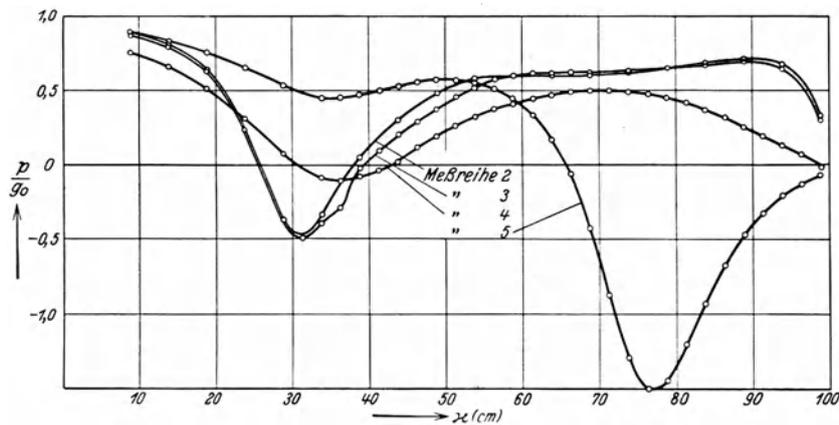


Abb. 20. Statischer Druck  $p$  an der Meßplatte, bezogen auf den außerhalb der Reibungsschicht herrschenden Gesamtdruck  $p_0$ .

gewiß nicht dem wirklichen Verlauf der Geschwindigkeit entsprechen, sondern wahrscheinlich dadurch hervorgebracht werden, daß in der Nähe der Wand die Geschwindigkeit viel zu groß angegeben wird. Möglicherweise herrscht in Wirklichkeit bei  $x = 54,29$  (Abb. 12) schon Rückströmung.

Das Abreißen der Strömung beginnt am Tragflügel bei  $\alpha = 12^\circ$  nahe der Hinterkante, während bei  $\alpha = 15^\circ$  die Strömung schon ungefähr in der Mitte des Profils abreißt, und zwar wandert sowohl die Ablösungsstelle wie auch die Stelle des Turbulenzüberganges mit wachsender Geschwindigkeit nach vorn.

Für einige Meßreihen am Tragflügel wurde auch die Schubspannungsverteilung ausgerechnet. Hierzu wurde Gleichung (4) benutzt, wobei das Glied  $2\tau k_s$  zunächst vernachlässigt wurde. Um  $\partial g/\partial s$  zu gewinnen, muß man Stromlinien berechnen. (Da  $\partial g/\partial y$  groß ist, kann man nicht etwa  $\partial g/\partial s$  näherungsweise durch  $\partial g/\partial x$  ersetzen.) Die Stromlinien wurden als die Kurven  $\psi = \int_0^y w \, dy = \text{konst}$  berechnet. Es ist hierin insofern eine geringe Vernachlässigung, als man eigentlich nach  $n$  integrieren müßte. Da sich die Bogenlänge  $s$  der Stromlinien nicht merklich von der Bogenlänge  $x$  auf der Oberfläche unterscheidet, wurde der Gesamtdruck für konstantes  $\psi$  über  $x$  aufgetragen und dieser Auftragung die Ableitung  $\partial g/\partial s$  entnommen. Abb. 21 zeigt eine solche Auftragung. Bei der Berechnung von  $\tau$  wurde dann wieder anstatt normal zu den Stromlinien normal zur Oberfläche integriert, und als Anfangswert hat man außerhalb der Reibungsschicht  $\tau = 0$ . Mit dem so

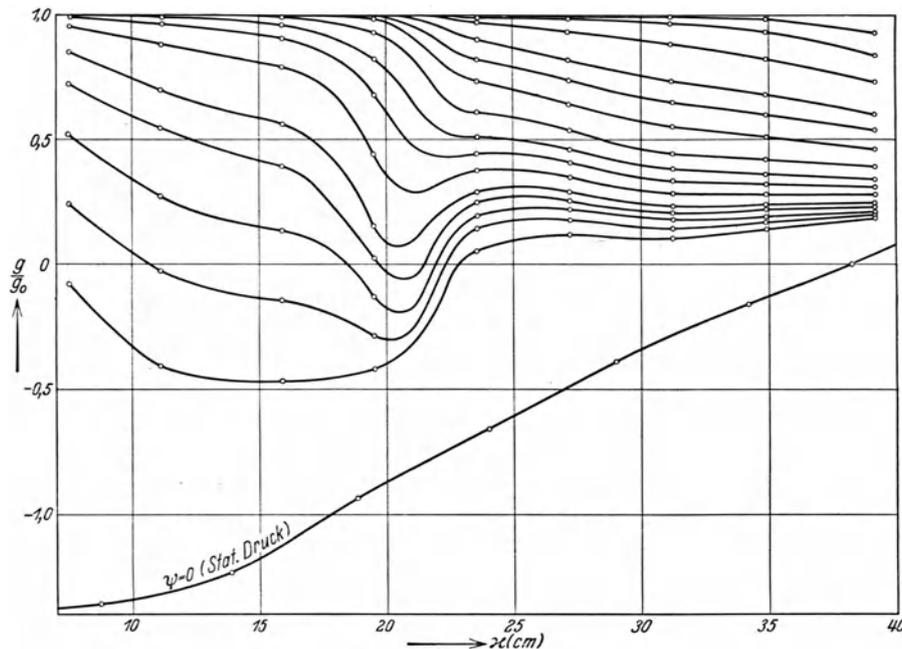


Abb. 21. Gesamtdruck längs Stromlinien in der Reibungsschicht am Tragflügel bei  $\alpha = 6^\circ$ ,  $W_0 = 30,8$  m/sek.

berechneten  $\tau$  kann man dann nachträglich das zunächst vernachlässigte Glied  $2\tau k_s$  angenähert ausrechnen, indem man für  $k_s$  die Krümmung der Oberfläche einsetzt. Es brachte aber keine merkliche Änderung. Abb. 22 zeigt ein Beispiel der erhaltenen Schubspannungsverteilungen.

Abb. 21 zeigt gleichzeitig sehr anschaulich den Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung. Man sieht, wie an der Übergangsstelle (die etwa bei  $x = 19$  cm beginnt) der Gesamtdruck auf den nahe der Wand gelegenen Stromlinien vermöge des durch die Turbulenz übertragenen Impulses rasch zunimmt, während er auf den äußeren Stromlinien sinkt. Um nachzuweisen, daß vor diesem Übergang die Strömung tatsächlich laminar ist, habe ich die Schubspannungsverteilung bei  $x = 11,15$  cm und  $x = 15,9$  cm berechnet und die Größe  $\frac{\tau}{\frac{\partial w}{\partial y}}$  ausgerechnet. Es ergaben sich für diese Größe tatsächlich Werte, die um den Wert für die Zähigkeit  $\mu$  streuten. (In laminarer Strömung ist ja  $\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$ ).

Aus den Verteilungen der Schubspannung und der Geschwindigkeit kann man den Prandtl'schen Mischungsweg bestimmen. Prandtl hat für die Schubspannung in stationärer

turbulenter Strömung den Ansatz  $\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right| \frac{\partial w}{\partial n}$  eingeführt<sup>1</sup>. Dabei ist die Größe  $l$ , der „Mischungsweg“, eine empirisch zu bestimmende Länge, die eine Funktion des Ortes ist.

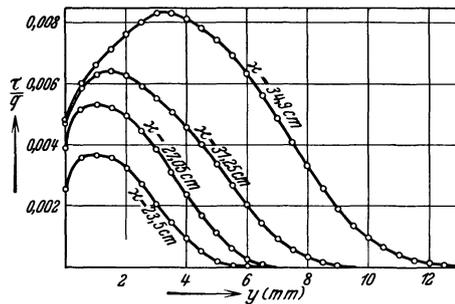


Abb. 22. Schubspannungsverteilungen in der Reibungsschicht am Tragflügel bei  $\alpha = 12^\circ$ ,  $W_0 = 30,8$  m/sek.

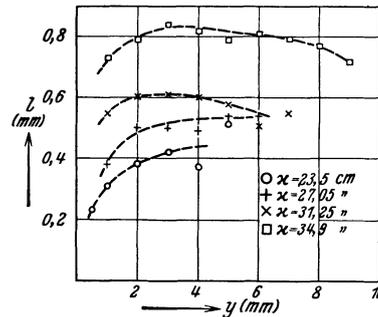


Abb. 23. Mischungsweg in der Reibungsschicht am Tragflügel bei  $\alpha = 12^\circ$ ,  $W_0 = 30,8$  m/sek.

In Abb. 23 ist der Mischungsweg über dem Wandabstand aufgetragen. Da sich sowohl  $\tau$  als auch  $\partial w/\partial n$  nicht sehr genau bestimmen lassen, ist die Bestimmung des Mischungsweges ziemlich unsicher.

### III. Weitere Auswertung des Versuchsmaterials.

**1. Maße für die Dicke der Reibungsschicht.** Für die folgenden Betrachtungen ist es nötig, ein Maß für die Dicke der Reibungsschicht zu besitzen, das sich aus den Messungen genügend genau ermitteln läßt. Als solches bieten sich verschiedene Größen dar. Man könnte z. B. die Länge

$$\delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{w}{W} \right) dy$$

wählen.  $\delta$  ist dabei eine genügend große Entfernung von der Oberfläche, in der praktisch  $w = W$  ist. Die Größe  $\delta^*$ , die sog. „Verdrängungsdicke“, ist die Entfernung, um die die Stromlinien der Potentialströmung durch das Vorhandensein der Reibungsschicht von der Oberfläche abgedrängt sind.

Eine zweite als solches Maß verwendbare Größe ist die Länge

$$\lambda = \int_0^\delta \left\{ 1 - \left( \frac{w}{W} \right)^2 \right\} dy = \frac{1}{q} \int_0^\delta (g_0 - g) dy.$$

Eine dritte solche Größe ist schließlich die Länge

$$\vartheta = \int_0^\delta \frac{(W - w)w}{W^2} dy.$$

Diese Größe ist ein Maß für den Impulsverlust, der in der Reibungsschicht stattgefunden hat. Zwischen der Oberfläche und der Entfernung  $\delta$  strömt pro Zeiteinheit die Masse  $\rho \int_0^\delta w dy$  durch. Wenn diese Masse die Geschwindigkeit  $W$  besäße, wäre ihr Impuls  $\rho W \int_0^\delta w dy$ , mit der Geschwindigkeit  $w$  in der Reibungsschicht besitzt sie aber den Impuls  $\rho \int_0^\delta w^2 dy$ . Die Differenz ist  $\rho \int_0^\delta (W - w)w dy = \rho W^2 \vartheta$ .

<sup>1</sup> L. Prandtl, ZS f. ang. Math. u. Mech. 5 (1925) S. 137.

Zwischen den drei Größen  $\delta^*$ ,  $\lambda$  und  $\vartheta$  besteht, wie man auf Grund ihrer Definitionen leicht ausrechnet, die Beziehung

$$\vartheta = \lambda - \delta^*. \quad (6)$$

Zur Orientierung möge angegeben werden, daß für die Geschwindigkeitsverteilung  $\frac{w}{W} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$ , die angenähert in Reibungsschichten ohne Druckgefälle vorhanden ist<sup>1</sup>,  $\delta^* = \frac{1}{8} \delta$ ,  $\lambda = \frac{2}{9} \delta$  und  $\vartheta = \frac{7}{72} \delta$  wird.

Es erweist sich für die weitere Rechnung als zweckmäßig, als Maß für die Dicke der Reibungsschicht die Länge  $\vartheta$  zu verwenden.

**2. Der Formparameter  $\eta$ .** Indem wir den Abstand von der Wand auf  $\vartheta$  und die Geschwindigkeit auf  $W$  beziehen, können wir die Geschwindigkeitsprofile dimensionslos auf-

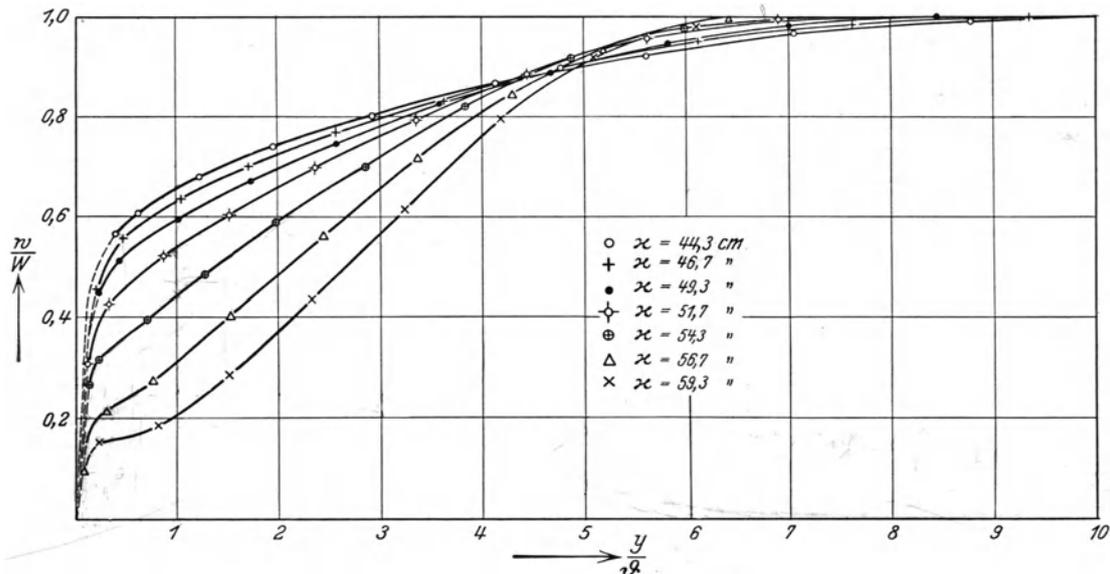


Abb. 24. Geschwindigkeitsprofile aus Meßreihe 3, dimensionslos aufgetragen.

tragen. Abb. 24 zeigt als Beispiel eine solche Auftragung. Wenn wir annehmen, daß alle Kurven, die wir auf diese Weise erhalten, eine einparametrische Schar bilden, so ergibt sich aus Abb. 24, daß offenbar der Wert von  $w/W$  für einen festen Wert von  $y/\vartheta$  als Scharparameter verwendet werden kann, wenn dieser feste Wert nur klein genug ist, damit sich an dieser Stelle und für kleinere Werte von  $y/\vartheta$  die Kurven nirgends schneiden. Man darf diesen Wert aber auch nicht zu klein wählen, da in unmittelbarer Nähe der Wand der Geschwindigkeitsverlauf nicht gemessen worden ist. Als eine geeignete Entfernung wurde  $\frac{y}{\vartheta} = 1$  gewählt.

Der Wert von  $w$  an der Stelle  $y = \vartheta$  möge mit  $w_1$  bezeichnet werden, und anstatt  $w_1/W$  selbst als Parameter zu benutzen, erweist es sich als günstiger,

$$\eta = 1 - \left(\frac{w_1}{W}\right)^2$$

einzuführen. Bezeichnet man den Wert des Gesamtdruckes für  $y = \vartheta$  mit  $g_1$ , so wird

$$\eta = 1 - \frac{g_1 - p}{q} = \frac{g_0 - g_1}{q}. \quad (7)$$

Durch den Wert von  $\eta$  ist also nach unserer Annahme die Form des Geschwindigkeitsprofils vollständig bestimmt; wir können demgemäß  $\eta$  kurz als „Formparameter“ bezeichnen und

<sup>1</sup> Vgl. die Arbeiten von v. Kármán, van der Hegge Zijnen und Hansen (Fußnote S. 321).

können schreiben:

$$\frac{w}{W} = f\left(\frac{y}{\vartheta}, \eta\right).$$

Bilden wir weiterhin

$$H = \int_0^{\frac{\delta}{\vartheta}} \left(1 - \frac{w}{W}\right) d\left(\frac{y}{\vartheta}\right) = \frac{\delta^*}{\vartheta}, \quad (8)$$

so muß demnach diese Größe eine Funktion von  $\eta$  sein. (Man könnte sonach auch  $H$  als Formparameter ansehen.) In Abb. 25 ist  $H$  in Abhängigkeit von  $\eta$  aufgetragen. Man sieht, daß die Punkte gut auf einer Kurve liegen, und es erscheint somit die Annahme, daß sich die Geschwindigkeitsprofile durch eine einparametrische Kurvenschar darstellen lassen, berechtigt. (Gleichwohl ist zu betonen, daß es sich dabei natürlich nur um eine Näherungsannahme handelt.)

Die Bestimmung von  $\vartheta$  und  $H$  aus dem Versuchsmaterial ist in der Weise erfolgt, daß erst  $\delta^*$  und  $\lambda$  durch Planimetrieren der Geschwindigkeits- bzw. Gesamtdruckprofile festgestellt und daraus nach Gleichung (6)  $\vartheta$  bestimmt wurde.

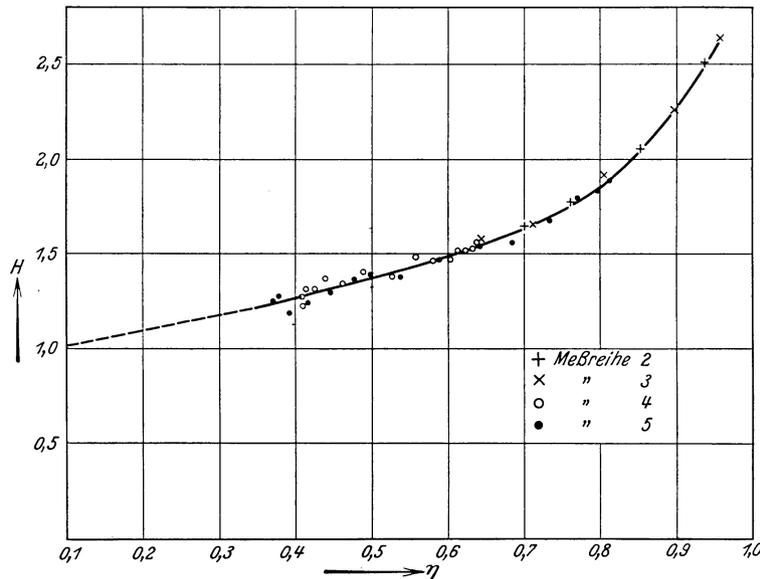


Abb. 25.

Zur Ableitung des in diesem Abschnitt zu entwickelnden Rechenverfahrens wurden nur die Messungen am Gebläse benutzt, da nur diesen eine dafür ausreichende Genauigkeit zukommt. Bei den Versuchen am Tragflügel ist das zur Verfügung stehende Stück der Reibungsschicht auch in den meisten Fällen zu kurz, zumal bei der Auswertung das Übergangsgebiet, mit dem die turbulente Reibungsschicht beginnt, natürlich ausgeschieden werden mußte.

**3. Ableitung zweier Differentialgleichungen für  $\eta$  und  $\vartheta$ .** Es ist nun unser Ziel, für den Formparameter  $\eta$  und die Größe  $\vartheta$  ein Differentialgleichungssystem zu gewinnen, das es gestattet, bei vorgegebenem Druckverlauf längs eines Körpers und vorgegebenen Anfangswerten die Größen  $\eta$  und  $\vartheta$  längs der Oberfläche zu verfolgen. Durch  $\eta$ ,  $\vartheta$  und die vorgegebene Potentialgeschwindigkeit ist ja das Geschwindigkeitsprofil vollständig bestimmt. Über den statischen Druck machen wir dabei die Annahme, daß er sich senkrecht zur Oberfläche nicht ändere.

Wie oben gezeigt worden ist, läßt sich die Form der Geschwindigkeitsprofile durch das Verhältnis der Geschwindigkeit im Abstand  $\vartheta$  von der Wand zur Geschwindigkeit in der Potentialströmung charakterisieren. Die Kurve  $y = \vartheta$  entfernt sich mit zunehmender Reibungsschichtdicke von der Wand und nähert sich ihr bei abnehmender Dicke, hat also ungefähr den Verlauf einer Stromlinie. Der Verlauf der Schubspannung in der Richtung senkrecht zur Oberfläche ist vermutlich durch die Form und die Ausdehnung des Geschwindigkeitsprofils bestimmt, d. h. also durch  $\eta$ ,  $\vartheta$  und  $W$ . Außerdem gehen natürlich noch die Dichte  $\rho$  und die Zähigkeit  $\mu$  in die Beziehung ein. Es ist demnach mit Rücksicht auf Gleichung (4) (in der das Glied  $2\tau k_s$  vernachlässigt werden möge) zu vermuten, daß eine Beziehung der Form

$$\frac{dg_1}{dx} = f(\eta, \vartheta, W, \rho, \mu) \quad (9)$$

besteht. Aus den sechs Größen, die in dieser Gleichung vorkommen, kann man drei voneinander unabhängige<sup>1</sup> dimensionslose Größen bilden. Wir wollen als solche  $\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx}$ ,  $\eta$  und  $\frac{W\vartheta}{\nu} = R$  wählen (dabei ist  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ). Gleichung (9) muß sich als eine Beziehung

zwischen diesen drei Größen schreiben lassen, also

$$\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx} = F(\eta, R). \quad (10)$$

In Abb. 26 sind die aus den Versuchen am Gebläse gewonnenen Werte von  $\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx}$  über den zugehörigen Werten von  $\eta$  aufgetragen. Man sieht, daß innerhalb der Genauigkeit, mit der sich die Größen gewinnen lassen ( $dg_1/dx$  läßt sich als Ableitung nicht sehr genau bestimmen), eine Beziehung von der Form der Gleichung (10) besteht, wobei sich zeigt,

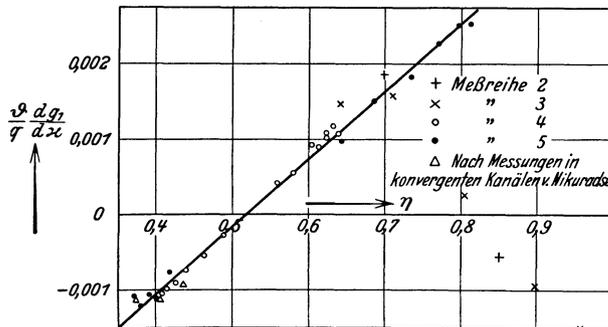


Abb. 26.

daß eine Abhängigkeit von der Größe  $R = \frac{W\vartheta}{\nu}$  (also einer mit  $\vartheta$  gebildeten Reynoldsschen Zahl) innerhalb der bei den vorliegenden Versuchen vorkommenden Werte von  $R$  nicht festzustellen ist. Die zu den einzelnen Punkten gehörigen Reynoldsschen Zahlen sind der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen. In Abb. 26 sind drei Punkte mit eingezeichnet, die ich aus den Messungen von **Nikuradse**<sup>2</sup> in konvergenten Kanälen berechnet habe. Diese Berechnung ist unter der durch die Messungen von Herrn **Nikuradse** bestätigten Voraussetzung erfolgt, daß die Geschwindigkeitsprofile in einem Kanal zueinander affin sind. Es konnten nur die Messungen in konvergenten Kanälen verwendet werden, da nur in diesen eine eigentliche Reibungsschicht vorhanden ist, während in divergenten Kanälen die Reibungsschichten der beiden Wände ineinandergreifen. Man sieht, daß sich diese drei Punkte gut in die übrigen einordnen.

Die erhaltene Beziehung läßt sich für  $\eta < 0,8$  durch eine Gerade interpolieren, für größere Werte von  $\eta$  fallen die Punkte plötzlich ab. Man kann sich aber bei der Anwendung des hier zu entwickelnden Rechenverfahrens damit begnügen, den Formparameter bis  $\eta = 0,8$  zu verfolgen. Wenn einmal dieser Wert erreicht ist, so ist sehr bald danach

<sup>1</sup> In dem Sinne, daß nicht eine dieser Größen mit dem Produkt der in irgendwelche Potenzen erhobenen übrigen identisch ist.

<sup>2</sup> **J. Nikuradse**, Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, herausgegeben vom VDI, H. 289.

Tabelle zu Abb. 26.

Meßreihe 2				Meßreihe 4				Meßreihe 5			
$x$ [cm]	$\eta$	$\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx}$	$R$	$x$ [cm]	$\eta$	$\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx}$	$R$	$x$ [cm]	$\eta$	$\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx}$	$R$
46,72	0,700	0,00185	2290	59,30	0,612	0,00090	2050	59,30	0,416	-0,00076	943
51,72	0,851	-0,00056	4030	61,70	0,622	0,00102	2260	61,70	0,391	-0,00106	895
Meßreihe 3				64,30	0,637	0,00107	2480	64,35	0,371	-0,00108	771
$x$ [cm]	$\eta$	$\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx}$	$R$	66,70	0,632	0,00117	2650	66,70	0,379	-0,00121	704
49,30	0,642	0,00184	1750	69,30	0,622	0,00108	2860	69,35	0,400	-0,00111	620
51,72	0,710	0,00156	2180	71,70	0,604	0,00093	2910	84,35	0,641	0,00096	2170
54,30	0,804	0,00027	2740	74,30	0,580	0,00055	2900	86,70	0,684	0,00150	2780
56,72	0,899	-0,00093	3410	76,70	0,557	0,00041	2780	89,35	0,734	0,00182	3440
59,30	0,958	-0,0015	4360	81,70	0,489	-0,00027	2530	91,70	0,769	0,00226	4040
Versuche von Nikuradse				84,30	0,462	-0,00055	2440	94,35	0,796	0,00252	4810
Halber Öffnungs- winkel	$\eta$	$\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx}$	$R$	86,70	0,439	-0,00074	2320	96,70	0,811	0,00252	5450
- 2°	0,404	-0,00111	1370	89,30	0,425	-0,00091	2250				
- 4°	0,373	-0,00112	720	91,70	0,414	-0,00098	2150				
- 8°	0,435	-0,00092	252	94,30	0,408	-0,00106	2110				

Ablösung zu erwarten. Die in Abb. 26 eingezeichnete Gerade ist so durchgelegt, daß die Quadratsumme der Abweichungen in der Ordinatenrichtung ein Minimum ist. Ihre Gleichung ist

$$\frac{\vartheta}{q} \frac{dg_1}{dx} = 0,00894 \eta - 0,00461$$

oder, wenn  $g_0 - g_1 = q\eta = \zeta$  gesetzt wird [vgl. Gleichung (7)],

$$\vartheta \frac{d\zeta}{dx} = -0,00894 \zeta + 0,00461 q. \tag{II}$$

Eine zweite Gleichung liefert der auf die Reibungsschicht angewandte Impulssatz. Wir wollen ihn auf einen Teil des Strömungsgebietes anwenden, der von einem Rechteck begrenzt wird, dessen eine Seite von einem Stück der Wand von der Länge  $dx$  gebildet wird, während die dazu senkrechten Seiten die Länge  $c$  haben.  $c$  ist dabei eine für die ganze Reibungsschicht konstante Länge, die so groß ist, daß für  $y = c$  überall praktisch Potentialströmung vorhanden ist. Auf dieses Rechteck wollen wir den Impulssatz in der  $x$ -Richtung anwenden, wobei wir die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit mit dem Betrag der Geschwindigkeit vertauschen wollen, was wegen des kleinen Winkels, den die Stromlinien mit der  $x$ -Richtung bilden, erlaubt ist. In das Rechteck strömt auf der einen Seite die Masse  $\rho \int_0^c w dy$  ein, auf der entgegengesetzten die Masse  $\rho \int_0^c w dy + dx \frac{d}{dx} \rho \int_0^c w dy$  aus, auf der der Wand gegenüberliegenden Seite strömt also die Masse  $dx \frac{d}{dx} \rho \int_0^c w dy$  ein. Der Impuls der einströmenden Masse ist demnach  $\rho \int_0^c w^2 dy + W dx \frac{d}{dx} \rho \int_0^c w dy$ , der der ausströmenden  $\rho \int_0^c w^2 dy + dx \frac{d}{dx} \rho \int_0^c w^2 dy$ . Die Anwendung des Impulssatzes ergibt also,

wenn man noch die Differenz des statischen Druckes auf den beiden zur Wand senkrechten Seiten und die Schubspannung  $\tau_0$  an der Wand berücksichtigt:

$$W \varrho \frac{d}{dx} \int_0^c w dy - \varrho \frac{d}{dx} \int_0^c w^2 dy - c \frac{dp}{dx} - \tau_0 = 0. \quad (12)$$

Nach der Bernoullischen Gleichung ist

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{\varrho}{2} \frac{dW^2}{dx},$$

was man auch umformen kann in

$$c \frac{dp}{dx} = - \varrho \frac{d}{dx} \int_0^c W^2 dy + \varrho W \frac{d}{dx} \int_0^c W dy.$$

Das in Gleichung (12) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{d}{dx} \int_0^c (W^2 - w^2) dy - W \frac{d}{dx} \int_0^c (W - w) dy = \frac{\tau_0}{\varrho} \quad (13)$$

oder

$$\frac{d}{dx} \int_0^c (W - w) w dy + \frac{d}{dx} \left\{ W \int_0^c (W - w) dy \right\} - W \frac{d}{dx} \int_0^c (W - w) dy = \frac{\tau_0}{\varrho},$$

woraus man weiter durch Ausdifferenzieren des zweiten Gliedes erhält:

$$\frac{d}{dx} \int_0^c (W - w) w dy + \frac{dW}{dx} \int_0^c (W - w) dy = \frac{\tau_0}{\varrho}.$$

Erinnern wir uns an die Definitionen der Größen  $\vartheta$  und  $\delta^*$ , so können wir hierfür schreiben

$$\frac{d}{dx} (W^2 \vartheta) + W \delta^* \frac{dW}{dx} = \frac{\tau_0}{\varrho}$$

und, wenn wir die Gleichung (8) berücksichtigen,

$$\frac{d\vartheta}{dx} + (H + 2) \frac{\vartheta}{W} \frac{dW}{dx} = \frac{\tau_0}{\varrho W^2} \quad (14)$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{H+2}{2} \frac{\vartheta}{q} \frac{dq}{dx} = \frac{\tau_0}{\varrho W^2}. \quad (15)$$

(Die Anwendung des Impulssatzes ist auch der Grund zur Einführung von  $\vartheta$  als Maß für die Dicke der Reibungsschicht, da man damit die einfachste Formulierung erhält.)

Nimmt man an, daß die dimensionslose Größe  $\frac{\tau_0}{\varrho W^2}$  eine Funktion des Formparameters und der mit  $\vartheta$  gebildeten Reynoldsschen Zahl ist, was der Fall ist, wenn eine Beziehung zwischen  $\tau_0$ ,  $\eta$ ,  $\vartheta$ ,  $W$ ,  $\varrho$  und  $\mu$  besteht (d. h. die Schubspannung an der Wand ist durch Form und Ausdehnung des Geschwindigkeitsprofils bestimmt), so hat man in Gleichung (14) bzw. (15), da ja weiter oben festgestellt worden ist, daß  $H$  eine Funktion von  $\eta$  ist (s. Abb. 25), eine zweite Differentialgleichung für  $\eta$  und  $\vartheta$ .

Es wäre also nur noch die Abhängigkeit der Größe  $\frac{\tau_0}{\varrho W^2}$  von  $\eta$  und  $R$  festzustellen. Zur Berechnung von  $\frac{\tau_0}{\varrho W^2}$  aus den Messungen könnte man Gleichung (15) benutzen. In den meisten Fällen ist das jedoch unzweckmäßig, da in der Regel die beiden Glieder auf

der linken Seite von Gleichung (15) im Vergleich zu  $\frac{\tau_0}{\rho W^2}$  so groß sind, daß ihre Fehler von derselben Größenordnung sind wie  $\frac{\tau_0}{\rho W^2}$  selbst. Man kann aber Gleichung (15) leicht so umformen, daß man es als Differenz zweier kleinerer Glieder erhält, z. B. kann man schreiben:

$$\frac{1}{q^2} \frac{d}{dx} (q^2 \vartheta) - \frac{2-H}{2} \frac{\vartheta}{q} \frac{dq}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho W^2}.$$

[Durch Ausdifferenzieren des ersten Gliedes bestätigt man leicht die Übereinstimmung mit Gleichung (15).] Da die Werte von  $H$  sich nicht weit von 2 entfernen, wird in dieser Form der Gleichung das zweite Glied kleiner und somit auch das erste. Für manche Fälle ist auch die Form

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dx} \int_0^c (g_0 - g) dy - \frac{1}{W} \frac{d}{dx} \int_0^c (W - w) dy = \frac{\tau_0}{\rho W^2} \quad (16)$$

bequem, die man aus Gleichung (13) erhält, indem man den Gesamtdruck einführt. Bei der Berechnung der Schubspannung hat sich nun herausgestellt, daß in Reibungsschichten mit erheblichem Druckanstieg der schon mehrfach erwähnte Fehler in den Geschwindigkeiten, der durch die turbulenten Schwankungen entsteht, das Ergebnis ganz beträchtlich fälschen kann. Man sieht wohl am einfachsten aus Gleichung (16), wie diese Fälschung zustande kommt: Da die turbulenten Schwankungen mit Annäherung an die Ablösungsstelle offenbar größer werden, wird der Fehler von  $w$  auch größer, und da dieser immer positiv ist,

wird  $\frac{d}{dx} \int_0^c (W - w) dy$  zu klein,  $\frac{\tau_0}{\rho W^2}$  somit zu groß. An der Ablösungsstelle muß  $\tau_0 = 0$

sein, es ist also zu erwarten, daß  $\frac{\tau_0}{\rho W^2}$  mit zunehmendem  $\eta$  sinkt. Das ist für die berechneten Werte zunächst auch der Fall, jedoch bei größeren Werten von  $\eta$  steigen sie mit zunehmendem  $\eta$  an. Die Fehler werden in der Nähe der Ablösungsstelle so groß, daß man für  $\frac{\tau_0}{\rho W^2}$  Werte bekommt, die von viel höherer Größenordnung als die zu erwartenden sind. Für  $\eta$ -Werte, die nicht weit von dem Wert entfernt sind, der den in Strömungen ohne Druckgefälle vorkommenden Geschwindigkeitsprofilen entspricht, stimmen hingegen die für  $\frac{\tau_0}{\rho W^2}$  erhaltenen Werte mit den bisher bekannten überein.

Aus der Annahme einer Geschwindigkeitsverteilung, bei der die Geschwindigkeit proportional der 7. Wurzel aus dem Wandabstand ist, folgt in Reibungsschichten ohne Druckgefälle<sup>1</sup>:  $\frac{\tau_0}{\rho W^2} = 0,0225 \left(\frac{\nu}{W\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$ ; dabei ist  $\delta$  derjenige Wert von  $y$ , bei dem die Reibungsschicht in die Potentialströmung übergeht. Auf die mit  $\vartheta$  gebildete Reynoldssche Zahl umgerechnet ergibt das

$$\frac{\tau_0}{\rho W^2} = 0,01255 R^{-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Da in Gleichung (15)  $\frac{\tau_0}{\rho W^2}$  im Vergleich mit den beiden anderen in der Gleichung vorkommenden Größen ziemlich klein ist, wenn das Druckgefälle eine nennenswerte Größe hat, genügt es, einen Näherungswert dafür einzusetzen. Man kann dafür nach (17)  $0,01255 R^{-\frac{1}{2}}$  einsetzen, für viele Fälle kommt man aber schon damit aus,  $\frac{\tau_0}{\rho W^2} = \text{konst}$  zu setzen.

**4. Verfahren zur näherungsweise Integration der Differentialgleichungen.** Wir haben also zur Berechnung von  $\eta$  (bzw.  $\zeta = q\eta$ ) und  $\vartheta$  das aus den Gleichungen (11) und (15)

<sup>1</sup> Vgl. v. Kármán, a. a. O.

bestehende Differentialgleichungssystem:

$$\frac{d\zeta}{dx} + 0,00894 \frac{\zeta}{\vartheta} = 0,00461 \frac{q}{\vartheta},$$

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{H+2}{2} \frac{\vartheta}{q} \frac{dq}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho W^2}.$$

Dieses System, in dem  $q = \frac{\rho W^2}{2}$  als Funktion von  $x$  vorgegeben und  $H$  eine gegebene Funktion von  $\eta = \frac{\zeta}{q}$  ist, integriert man am einfachsten durch ein Verfahren der sukzessiven Approximation. Eine erste Näherung für  $\vartheta$  erhält man, indem man in der zweiten Gleichung  $H$  und  $\frac{\tau_0}{\rho W^2}$  durch Konstante ersetzt. Man hat dann für die erste Näherung  $\vartheta_1$  eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Setzt man  $\vartheta_1$  an Stelle von  $\vartheta$  in die erste Gleichung ein, so hat man eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für eine erste Näherung für  $\zeta$ , die mit  $\zeta_1$  bezeichnet werden möge, und damit auch eine erste Näherung  $\eta_1$  für  $\eta$ . Mit  $\eta_1$  stellt man nun nach Abb. 25 den Verlauf von  $H$  fest und, wenn man  $\frac{\tau_0}{\rho W^2} = 0,01255 R^{-\frac{1}{2}}$  setzen will, mit  $\vartheta_1$  den Verlauf dieser Größe. Setzt man beide in die zweite Gleichung ein, so erhält man wieder eine lineare Differentialgleichung für eine zweite Näherung  $\vartheta_2$ .  $\vartheta_2$  setzt man wieder in die erste Gleichung ein usw.

Da die Integrale, die bei der Integration der linearen Differentialgleichungen entstehen, numerisch sehr umständlich zu behandeln sind, löst man die linearen Differentialgleichungen am einfachsten graphisch nach einem Verfahren von **E. Czuber**<sup>1</sup>, das darauf beruht, daß alle Linienelemente einer Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x),$$

die auf einer Geraden  $x = \text{konst}$  liegen, nach einem Punkt strahlen. Die Koordinaten dieses Punktes in der  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung sind

$$\xi = x + \frac{1}{f(x)}, \quad \chi = \frac{g(x)}{f(x)},$$

Man hat also nur eine genügende Anzahl dieser Punkte zu berechnen und kann damit leicht einen die Integralkurve annähernden Polygonzug zeichnen<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> **E. Czuber**, ZS f. Math. u. Physik 44 (1899) S. 41. Siehe z. B. auch **W. Hort**, Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, S. 237, Berlin 1925.

<sup>2</sup> In einer bisher noch nicht im Druck erschienenen Arbeit von Herrn **A. Buri** in Zürich, die auch auf eine Anregung von Herrn Prof. **Prandtl** zurückgeht, wird ebenfalls ein Verfahren zur Berechnung der turbulenten Reibungsschicht angegeben. Herr **Buri** hat darüber im Sommersemester 1930 in einem Kolloquium in Göttingen berichtet. Das Verfahren geht von der Annahme aus, daß der Wert von  $\partial\tau/\partial y$  für  $y = 0$  für die gesamte Schubspannungsverteilung und damit auch für die Geschwindigkeitsverteilung charakteristisch sei. Nun ist für  $y = 0$  [nach Gleichung (2) S. 327]  $\frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}$ , und es wird somit  $\frac{\vartheta}{\tau_0} \frac{dp}{dx}$  als ein Formparameter angesehen. Für  $\tau_0$  wird dann noch ein Ansatz eingeführt, der der von **v. Kármán** (a. a. O.) aus dem Blasiuschen Rohrreibungsgesetz gefolgerten Gesetzmäßigkeit entspricht, was dazu führt,  $\frac{\vartheta}{\rho W^2} \frac{dp}{dx} R^{\frac{1}{2}}$  als Formparameter zu verwenden (vgl. auch **L. Prandtl**, Journal of the Aeronautical Research Institute Tokyo, Nr. 65, 1930). Den erwähnten Ansatz für  $\tau_0$  führt Herr **Buri** dann in den auf die Reibungsschicht angewandten Impulssatz [Gleichung (14) S. 340] ein und kann daraus schließlich folgern, daß  $\frac{d}{dx} (\vartheta R^{\frac{1}{2}})$  eine Funktion von  $\frac{\vartheta}{\rho W^2} \frac{dp}{dx} R^{\frac{1}{2}}$  sein muß. Für diese Funktion erhält er aus Experimenten eine Gerade. Vernachlässigt man die geringe Abhängigkeit von  $R^{\frac{1}{2}}$ , so entspricht das genau dem, daß man in Gleichung (14) S. 340  $H$  und  $\frac{\tau_0}{\rho W^2} = \text{konst}$  setzt. Man erhält also auf diese Weise für  $\vartheta$  eine Näherung, die ungefähr der ersten Näherung für  $\vartheta$  bei dem in der vorliegenden

**5. Anfangswerte.** Die turbulente Reibungsschicht beginnt mit einem ziemlich langen Übergangsgebiet (bei den Versuchen am Gebläse 10 bis 16 cm). Es zeigt sich nun, daß man bei der Rechnung mit einer Idealisierung auskommt, indem man so rechnet, als ob die laminare Grenzschicht sprunghaft in die turbulente Reibungsschicht überginge, die dann an der Übergangsstelle mit einem konstanten Wert von  $\eta$  beginnt und mit dem Wert von  $\vartheta$ , den die laminare Grenzschicht an ihrem Ende aufweist (stetiger Übergang des Impulsinhalts). Als passendsten Wert für den Anfangswert von  $\eta$  habe ich  $\eta = 0,1$  gefunden. Es kommt übrigens auf die Genauigkeit dieses Wertes nicht sehr an, da die Integralkurven für  $\eta$  am Anfang sehr steil verlaufen und stark untereinander konvergieren. Die Übergangsstelle wurde in der z. B. aus Abb. 28 ersichtlichen Weise festgestellt. Es wurde zu diesem Zweck der Formparameter  $\eta$  genau wie für die Geschwindigkeitsprofile der turbulenten Reibungsschicht auch für die laminaren Grenzschichtprofile festgestellt. Die Übergangsstelle läßt sich jedoch nicht sehr genau bestimmen.

**6. Anwendung auf gemessene Reibungsschichten.** Ich habe das hier vorgeschlagene Rechenverfahren für einige Fälle durchgeführt, indem ich der Rechnung den gemessenen statischen Druck und den ebenfalls den Messungen entnommenen Wert von  $\vartheta$ , mit dem die laminare Grenzschicht aufhört, zugrunde gelegt habe. Dabei habe ich überall  $\frac{\tau_0}{\rho W^2} = 0,002$  und zur Berechnung von  $\vartheta_1$  die Größe  $H = 1,5$  gesetzt. Es genügt in allen Fällen, bis zur zweiten Näherung zu rechnen. Abb. 27 bis 29 zeigen die berechneten und gemessenen Werte von  $\vartheta$  und  $\eta$  für die Meßreihen 2, 4 und 5 am Gebläse, Abb. 30 für eine Meßreihe am Tragflügel und Abb. 31 für eine von **Fage** und **Falkner**<sup>1</sup> an einem symmetrischen Tragflügelprofil vorgenommene Messung. Bei der letzteren ist auffällig, daß die berechnete  $\vartheta$ -Kurve der Richtung folgt, die von den ersten Punkten, die ich aus den von **Fage** und **Falkner** angegebenen Geschwindigkeitsprofilen festgestellt habe, angegeben wird, während die drei letzten Punkte darunter fallen. Die Übereinstimmung der  $\eta$ -Werte ist hingegen befriedigend. Die Abweichungen

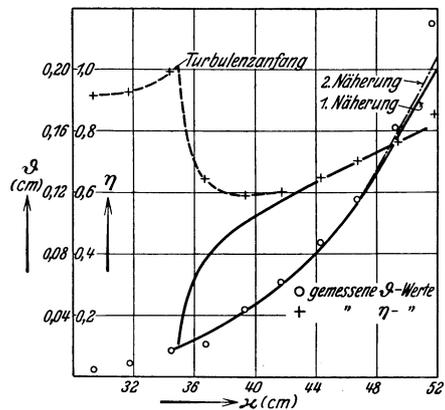


Abb. 27. Meßreihe 2.

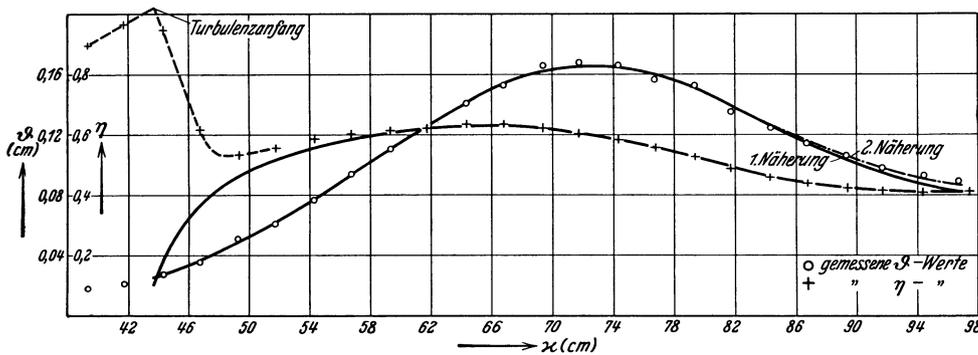


Abb. 28. Meßreihe 4.

Arbeit vorgeschlagenen Verfahren entspricht, ganz unabhängig davon, ob  $\frac{\vartheta}{\rho W^2} \frac{dp}{dx} R^{\frac{1}{2}}$  wirklich ein Formparameter ist. Nach den in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Versuchen ist diese Annahme jedoch nur in unbefriedigendem Maße erfüllt, und für die Berechnung der Ablösungsstelle, wobei es gerade auf die Berechnung der Form der Geschwindigkeitsprofile ankommt, erscheint sie daher weniger geeignet.

<sup>1</sup> Siehe Fußnote S. 321.

in Abb. 30 entsprechen der geringeren Meßgenauigkeit an dem verhältnismäßig kleinen Tragflügelmodell.

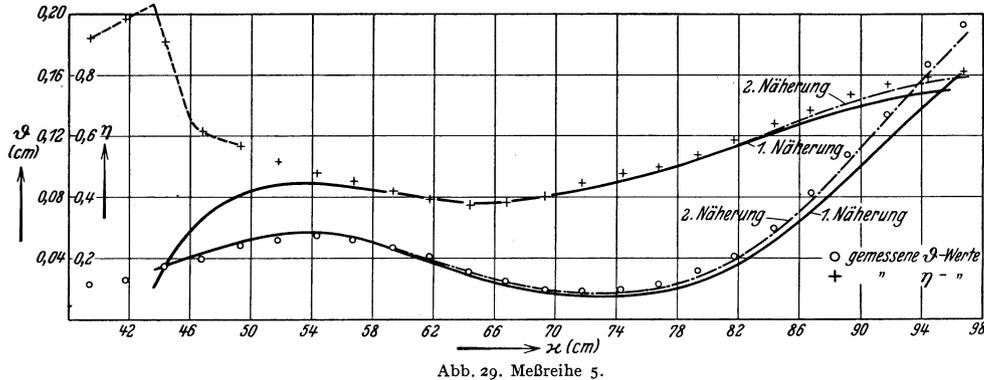


Abb. 29. Meßreihe 5.

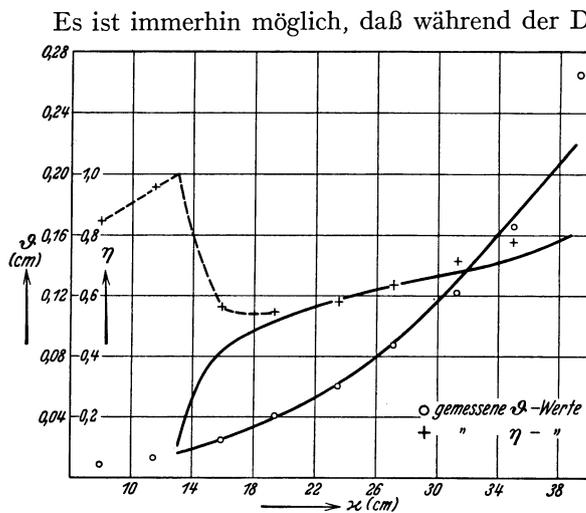


Abb. 30. Messung am Tragflügel.  $\alpha = 12^\circ$ ,  $W_0 = 30,8$  m/sek.

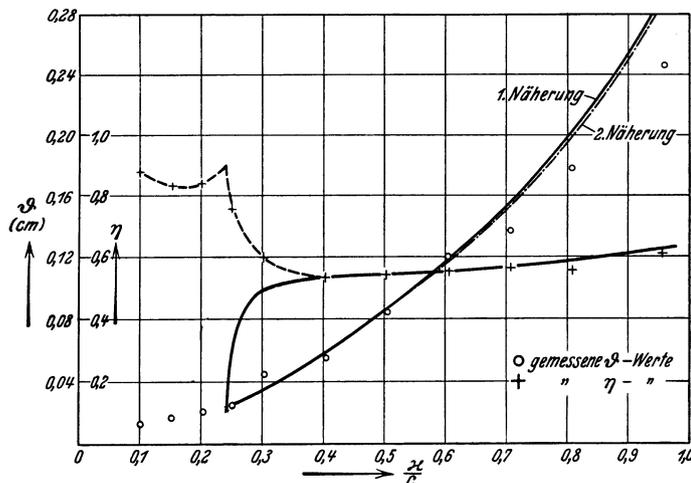


Abb. 31. Werte nach Messungen von Fage u. Falkner an einem Tragflügel mit symmetrischem Profil. Flügeltiefe  $c = 100,8$  cm, Anstellwinkel  $\alpha = -0,18^\circ$ , ungestörte Geschwindigkeit  $W_0 = 24,35$  m/sek.

Es ist immerhin möglich, daß während der Durchführung einer Versuchsreihe durch irgend eine geringfügige Änderung an der Versuchsanordnung sich einmal die Stelle des Turbulenzüberganges etwas ändert und damit die ganze Reibungsschicht. (Auch an der Wand haftender Staub beeinflusst die Reibungsschicht merklich.) Vielleicht ist das Abfallen der drei letzten Punkte in Abb. 31 durch eine solche Veränderung zu erklären.

**7. Einfluß der Krümmung.** An gekrümmten Wänden ist ein Einfluß der Krümmung auf die Reibungsschicht zu erwarten, denn durch die Zentrifugalkraft wird bei konvexer Oberfläche der Impulsaustausch erschwert und bei konkaver begünstigt, da auf die nahe an der Wand befindlichen, mit kleiner Geschwindigkeit strömenden Flüssigkeitsteile eine geringere Zentrifugalkraft wirkt als auf die weiter entfernten und daher schneller strömenden Teile<sup>1</sup>. Man wird jedoch annehmen dürfen, daß dieser Einfluß in den Fällen, in denen die Dicke der Reibungsschicht klein gegenüber dem Krümmungsradius ist, vernachlässigt werden kann und

<sup>1</sup> Über den Einfluß der Krümmung auf turbulente Reibungsschichten liegen Versuche von H. Wilcken vor. Ing.-Arch. 1 (1930) S. 357.

daß demzufolge die oben abgeleiteten Differentialgleichungen in diesen Fällen anwendbar sind, also z. B. auch auf Tragflügelprofile von den üblichen Formen.

**8. Strömungen ohne Druckgefälle.** Schreibt man Gleichung (11) in der Form

$$\vartheta \frac{d\eta}{dx} = \eta \left( -0,00894 - \frac{\vartheta}{q} \frac{dq}{dx} \right) + 0,00461$$

und setzt für  $\vartheta$  eine Näherungslösung ein, so sieht man, daß alle Integralkurven der so erhaltenen linearen Differentialgleichung für  $\eta$  mit zunehmendem  $x$  sich einander nähern, falls  $-\frac{\vartheta}{q} \frac{dq}{dx} < 0,00894$ ; denn in diesem Fall ist der Koeffizient von  $\eta$  negativ und  $d\eta/dx$  nimmt somit mit zunehmendem  $\eta$  ab.

Für den Fall, daß  $\frac{dq}{dx} = 0$  ist, ist  $\eta = \frac{0,00461}{0,00894} = 0,516$  eine Lösung von Gleichung (11). Da  $\eta$  an der Stelle des Turbulenzüberganges mit einem kleineren Wert beginnt, muß es sich asymptotisch dem Wert 0,516 nähern, aber immer darunter bleiben.

Für ein Geschwindigkeitsprofil, bei dem die Geschwindigkeit proportional der 7. Wurzel aus dem Wandabstand ist, wird, wie man leicht ausrechnet,  $\eta = 0,486$ .

**9. Der Turbulenzübergang.** Die Werte von  $R = \frac{W\vartheta}{\nu}$ , bei denen die laminare Grenzschicht in Turbulenz überzugehen beginnt (die sog. kritischen Reynoldsschen Zahlen), schwanken bei den Messungen am Tragflügel und denen am Gebläse zwischen 360 und 680. Dabei entsprechen die kleinsten Werte den Fällen, in denen der Turbulenzübergang durch beginnende Ablösung der laminaren Grenzschicht ausgelöst wird.

Eine Abhängigkeit der kritischen Reynoldsschen Zahlen von der für das Druckgefälle charakteristischen dimensionslosen Zahl  $\frac{\vartheta}{q} \frac{dp}{dx}$ , die man vermuten könnte, ließ sich jedoch nicht feststellen.

**10. Der Einfluß der Reynoldsschen Zahl auf die Ablösungsstelle.** Setzt man in Gleichung (15)  $\frac{\tau_0}{\rho W^2} = \text{konst}$ , so kommt in den beiden Differentialgleichungen  $R = \frac{W\vartheta}{\nu}$  nicht vor. (Die geringe Abhängigkeit der Schubspannung von  $R$  ist um so eher zu vernachlässigen, als bei starkem Druckanstieg die Schubspannung ohnehin nur sehr wenig ins Gewicht fällt.) Eine Abhängigkeit der Reibungsschicht von der mit einer bestimmten Länge des beströmten Körpers und der Anströmgeschwindigkeit gebildeten Reynoldsschen Zahl besteht also nur insofern, als sich die Stelle des Turbulenzüberganges und der Wert von  $\vartheta$  an dieser Stelle ändern. Im allgemeinen wird der Turbulenzübergang mit wachsender Reynoldsscher Zahl nach vorn wandern, während der zugehörige Wert von  $\vartheta$  entsprechend dem Verhalten der laminaren Grenzschicht mit wachsender Reynoldsscher Zahl relativ kleiner wird. Findet der Turbulenzübergang z. B. an einem Tragflügel auf der Saugseite hinter dem Druckminimum statt, so werden beide Einflüsse einander entgegenwirken: Wenn die Reibungsschicht weiter vorn beginnt, hat sie auch einen größeren Druckanstieg zu überwinden und wird daher eher in Gefahr kommen, sich abzulösen. Der Beginn mit einem relativ kleineren Wert von  $\vartheta$  begünstigt indessen längeres Anliegen, denn nach Gleichung (11) ist  $d\zeta/dx$  für  $\eta > \frac{0,00461}{0,00894} = 0,516$  (und solche Werte kommen bei Druckanstieg, abgesehen von dem kurzen Anfangsstück der Reibungsschicht, nur vor) negativ, und es wird dann für kleineres  $\vartheta$  die Ableitung  $d\zeta/dx$  kleiner und damit auch  $\eta$ . Dieser Einfluß wird aber offenbar von dem Einfluß der Veränderung der Übergangsstelle bedeutend überwogen. Bei den Messungen am Tragflügel zeigt sich denn auch, daß sowohl die Übergangsstelle wie auch die Ablösungsstelle mit wachsender Reynoldsscher Zahl nach vorn rücken. Bei weiterem Anwachsen der Reynoldsschen Zahl muß schließlich die Übergangsstelle in das Druckminimum fallen, und es ist nach den bei den Messungen am Gebläse gemachten Erfahrungen kaum anzu-

nehmen, daß selbst bei ziemlich großen Reynoldsschen Zahlen die Übergangsstelle vor das Druckminimum wandert. Sie bliebe dann also an dieser Stelle, und es wäre nur noch der Einfluß der Verkleinerung von  $\vartheta$  vorhanden, so daß dann wieder ein etwas längeres Anliegen der Reibungsschicht zu erwarten wäre.

Vor längerer Zeit in Göttingen ausgeführte Kraftmessungen an Flügelprofilen bei verschiedenen Reynoldsschen Zahlen<sup>1</sup> haben auch gezeigt, daß der Höchstauftrieb von Tragflügeln mit Profilen, die ungefähr wie dasjenige des in der vorliegenden Arbeit untersuchten geformt sind (also ziemlich dick sind), mit wachsender Reynoldsscher Zahl abnimmt. (Der Höchstauftrieb von Tragflügeln tritt wahrscheinlich bei dem Anstellwinkel auf, bei dem die Ablösung gerade an der Hinterkante des Flügels beginnt.) Zu so hohen Reynoldsschen Zahlen, daß man das schließlich zu erwartende Ansteigen des Höchstauftriebes beobachten könnte, ist man indessen bei diesen Versuchen nicht gekommen. Hingegen hat man bei dünnen Profilen ein Ansteigen des Höchstauftriebes mit zunehmenden Reynoldsschen Zahlen bekommen, was man sich dadurch erklären könnte, daß hier der Turbulenzübergang durch die Vorderkante des Flügels erzwungen wird und somit an derselben Stelle bleibt.

Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung in Göttingen.

---

<sup>1</sup> Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 1. Lieferung, S. 54.

(Eingegangen am 11. Mai 1931.)

---

## Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik

Für Mathematiker und Ingenieure dargestellt von **H. Schwerdt**, Studienrat am Falk-Realgymnasium in Berlin, Dozent an der Lehr- und Forschungsanstalt für Gartenbau, Dahlem. Mit 240 Abbildungen im Text und auf 104 Tafeln. VII, 116 Seiten. 1931. Gebunden RM 28.—

Wer von der Ingenieurwissenschaft her an die Nomographie herantritt, wird sie leicht unter dem Gesichtspunkt der Rationalisierung ansehen. Hierin darf der Sinn der Nomographie sich nicht erschöpfen, diese Frage tritt daher in dem vorliegenden Buche bewußt zurück. Im Vordergrund steht die Bedeutung der Nomographie als Darstellungsmittel, und als Leitgedanke wird überall die abbildungsgeometrische Grundlage betont. So lehnt sich das Buch nicht nur in Bezeichnungswiese und Herleitung an das 1924 vom Verfasser geschriebene „Lehrbuch der Nomographie“ an, es entwickelt auch die dort behandelten Transformationen weiter. Daher sind nicht lediglich Rechentafeln und Darstellungen für numerische Beziehungen gegeben, sondern auch rein geometrische Mannigfaltigkeiten mit nomographischen Hilfsmitteln abgebildet. Diese weitergehende Auffassung und Zielsetzung des Buches wird in der Einleitung näher umrissen. Die Gegenstände der getroffenen Auswahl sind nach inhaltlichen Gesichtspunkten in fünf Hauptgruppen geordnet, zwischen denen in nomographischer Hinsicht naturgemäß mehrfach Beziehungen bestehen. Die in der nomographischen Praxis wesentliche Fragestellung nach den Bereichen erfährt eine gewisse Verschiebung. Während physikalische und technische Größen stets innerhalb eines Teilbereiches ihrer funktional möglichen Veränderung liegen, sind in mathematischen Änderungsbildern oft Zusammenhänge im großen und die Annäherung an Ausartungen von Interesse. In derartigen Fällen erschien es angezeigt, für einen Gegenstand mehrere, in ihren Bereichen verschiedene Nomogramme zu entwickeln. Alle mitgeteilten Darstellungen sind Neuentwürfe. Wo sich Figuren an Vorbilder anderer Autoren bewußt anlehnen, ist dies im Text ausdrücklich hervorgehoben; auch dann wurde, um die einheitliche Ausgestaltung und Ausdrucksform des Bildmaterials zu wahren, eine Neukonstruktion vorgenommen. Schließlich gehören einige Nomogramme für Gleichungen und zur Trigonometrie bereits zum Bestand des Lehrschrifttums; sie durften hier nicht fehlen, sind aber in durchaus neuer Bearbeitung gegeben. Einige rein graphische Darstellungen sind hier und da eingestreut.

## Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen

Von **Leon Lichtenstein**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. X, 164 Seiten. 1931. RM 16.80

Der Verfasser hat in einer Reihe von Arbeiten der letzten Jahre, die sich mit Problemen der Variationsrechnung, der Hydrodynamik, der Theorie der Figur der Himmelskörper usw. befassen, einige spezielle Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen behandelt. Diese Untersuchungen faßte er in einheitlicher Weise erstmalig für Gastvorlesungen an der Universität Lwów zusammen. Die vorliegende Monographie, anknüpfend an diese Vorlesungen, enthält neben bereits Bekanntem manches methodisch und sachlich Neue. Auch das Bekannte ist oft in einer neuen, einfacheren Form dargestellt.

Das erste Kapitel behandelt die Auflösung nichtlinearer Integralgleichungen „im kleinen“, d. h. wenn die als gegeben zu betrachtenden Funktionen absolut hinreichend klein sind. Die Auflösung zahlreicher Integro-Differentialgleichungen im kleinen gelingt nach den Überlegungen des Verfassers durch sukzessive Approximationen in völlig einheitlicher Weise. Das Problem wird bis ins einzelne diskutiert. — Ein weiterer Abschnitt bringt Anwendungen der Integralgleichungen: ein nichtlineares Problem der Wärmeleitung mit Ausstrahlung, der Existenzbeweis zweidimensionaler Oberflächenwellen, Randwertprobleme usw. — Die folgenden Kapitel führen die Theorie weiter fort.

## Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen

Von Dr. **Konrad Knopp**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen. (*Band II der „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“.*) Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 14 Textfiguren. XII, 582 Seiten. 1931. RM 38.—; gebunden RM 39.60

Inhaltsübersicht: Einleitung. Erster Teil: **Reelle Zahlen und Zahlenfolgen**: Grundsätzliches aus der Lehre von den reellen Zahlen. — Reelle Zahlenfolgen. — Zweiter Teil: **Grundlagen der Theorie der unendlichen Reihen**: Reihen mit positiven Gliedern. — Reihen mit beliebigen Gliedern. — Potenzreihen. — Die Entwicklungen der sog. elementaren Funktionen. — Unendliche Produkte. — Geschlossene und numerische Auswertung der Reihensumme. — Dritter Teil: **Ausbau der Theorie**: Reihen mit positiven Gliedern. — Reihen mit beliebigen Gliedern. — Reihen mit veränderlichen Gliedern (Funktionenfolgen). — Reihen mit komplexen Gliedern. — Divergente Reihen. — Die Eulersche Summenformel. Asymptotische Entwicklungen. — Literatur. — Namen- und Sachverzeichnis.

## Die elliptischen Funktionen von Jacobi

Fünfstellige Tafeln, mit Differenzen, von  $sn u$ ,  $cn u$ ,  $dn u$  mit den natürlichen Zahlen als Argument, nach Werten von  $m (= k^2)$  rangiert, nebst Formeln und Kurven. Von **L. M. Milne-Thomson**, Assistant Professor of Mathematics in the Royal Naval College, Greenwich. XIV, 69 Seiten. 1931. Gebunden RM 10.50

Für viele Anwendungen der elliptischen Funktionen haben sich die Jacobischen Funktionen als zweckmäßig erwiesen. Bisher fehlten brauchbare Tafeln, die vor allem dem Ingenieur und Physiker, aber auch dem Mathematiker das Rechnen mit den Jacobischen Funktionen erleichtern. Diese Lücke wird von den hier angezeigten Tafeln von Milne-Thomson ausgefüllt. Die Tafeln sind nach  $k^2$  ( $k =$  Modul der Funktion) geordnet.

---

## **Angewandte Hydromechanik**

Von Dr.-Ing. **Walther Kaufmann**, o. Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Hannover.

**Erster Band: Einführung in die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten.** Mit 146 Textabbildungen. VIII, 232 Seiten. 1931.

RM 12.50; gebunden RM 14.—

Der Verfasser hat hier ein Lehrbuch der technischen Hydromechanik für Ingenieure und technische Physiker geschaffen, in dem er sowohl die Grundlagen der theoretischen Hydrodynamik als auch weitgehende Anwendungen auf technische Strömungsprobleme behandelt. — Im Gegensatz zu der über dieses Gebiet vorhandenen Literatur, die im allgemeinen stark im mathematisch-physikalischen Sinn aufgezo-gen ist, dient dieses Werk technischen Zwecken. Das Werk wird in zwei Bänden erscheinen. Der zweite in Jahresfrist erscheinende Band wird die „Grundzüge der Hydraulik“ bringen.

## **Hydro- und Aeromechanik**

nach Vorlesungen von **L. Prandtl**. Von Dr. phil. **O. Tietjens**. Mit einem Geleitwort von Professor Dr. **L. Prandtl**, Direktor des Kaiser-Wilhelm-Institutes für Strömungsforschung in Göttingen. In zwei Bänden.

**Erster Band: Gleichgewicht und reibungslose Bewegung.** Mit 178 Textabbildungen. VIII, 238 Seiten. 1929. Gebunden RM 15.—

**Zweiter Band: Bewegung reibender Flüssigkeiten und technische Anwendungen.** Mit 238 Textabbildungen und 69 Strömungsbildern auf 28 Tafeln. Etwa 304 Textseiten.

Erscheint im September 1931

Die von Dr. Tietjens herausgegebenen Vorlesungen des Göttinger Professors Prandtl wurden von diesem im Manuskript durchgesehen und neue Resultate, die nach dem Ausscheiden von Tietjens in die Vorlesungen aufgenommen worden sind, neu hinzugefügt.

Das Buch erscheint aus praktischen Gründen in zwei Teilen, die so abgefaßt sind, daß jeder Teil für sich allein benutzbar ist. Der erste Band enthält die Lehre vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten und Gase samt praktischen Anwendungen, und er enthält ferner den Aufbau der Lehre von der strömenden Bewegung einer idealen reibungslosen Flüssigkeit in einer verhältnismäßig strengen Darstellung. Der zweite Band ist vor allem den technischen Anwendungen gewidmet und bevorzugt in seinem überwiegenden Teil Darstellungsweisen, die mehr dem Gedankenkreise des Praktikers angepaßt sind.

## **Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929)**

Herausgegeben von Dipl.-Ing. Oberingenieur **A. Gilles**, Aachen, Professor Dr. **L. Hopf**, Aachen Professor Dr. **Th. v. Kármán**, Aachen. Mit 137 Abbildungen im Text. IV, 221 Seiten. 1930.

RM 18.50; gebunden RM 20.—

Die Mannigfaltigkeit der behandelten Themen gibt ein buntes und imponantes Bild. Die wichtigsten Vorträge befassen sich mit der Theorie der Turbulenz und der Grenzschicht, mit Widerstand in Rohren, mit Tragflügeln, Propellern und anderen flugtechnischen Fragen. Unter den Autoren befinden sich viele der bekanntesten Aerodynamiker aus ganz Europa. Die in der Sprache der Vortragenden abgedruckten Beiträge sind durchweg kurz und klar und durch den Abdruck der Diskussionen belebt. „Zeitschrift für technische Physik“.

## **Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen**

Herausgegeben von Professor Dr. **Th. v. Kármán**.

Heft 10: Herrn Professor Dr. Dr.-Ing. E. h. **Theodor v. Kármán** zum 50. Geburtstag gewidmet von Freunden und Schülern.

**Inhalt:** Beschreibung des Aerodynamischen Instituts der Technischen Hochschule Aachen und seiner Versuchseinrichtungen. Von A. Gilles. — Flugtypen beim Überziehen. Von L. Hopf und S. del Proposto. — Über Schwankungsmessungen im Aachener Windkanal. Von H. Doetsch und P. von Mathes. — Über Schwankungsmessungen in der Grenzschicht. Von P. v. Mathes. — Über Beschleunigungsmessungen im Fluge. Von F. N. Scheubel. — Zur Berechnung von Schraubenventilatoren. Von Th. Troller. — Die Wirkung einer Luftschaube auf eine Wand. Von C. Wieselsberger. — Die zeitliche und örtliche Änderung der Härte bei der Alterung von Duralumin. Von F. Bollenrath. — Beitrag zur Schubsteifigkeit und Knickfestigkeit von gelochten dünnen Platten. Von J. Mathar. Mit 92 Abbildungen im Text. III, 68 Seiten. 1931. RM 12.—

---

**Verlag von Julius Springer in Berlin**

---