

Theorie der Wechselströme

von

Dr. A. Fraenckel

Theorie der Wechselströme

Von

Dr. Ing. Alfred Fraenckel

Mit 198 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1914

Alle Rechte, insbesondere das der
Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1914
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1914
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1914

ISBN 978-3-662-22980-4 ISBN 978-3-662-24925-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-24925-3

Vorwort.

Die Anforderungen an die Kenntnisse des Starkstromtechnikers in der Theorie der Wechselströme haben sich in den letzten Jahren erheblich gesteigert.

Nicht nur die Erkenntnis des Zusammenhangs der Vorgänge in Wechselstromkreisen, auch die graphischen und analytischen Methoden zu deren Untersuchung sind wesentlich erweitert und ausgebaut worden. Die neueren Methoden finden immer mehr Eingang in die Fachliteratur, und die Notwendigkeit, sie sich anzueignen, bietet sich allen, die die Literatur verfolgen wollen.

Ferner wird auch vom Starkstromtechniker heute eine mehr als nur gefühlsmäßige Kenntnis der nichtstationären Vorgänge im Hinblick auf Überströme und Überspannungen verlangt.

In das erweiterte Gebiet in gedrängter, aber dennoch streng wissenschaftlicher Form einzuführen, ist die Aufgabe, die das vorliegende Buch erfüllen will. Es wendet sich einerseits an den Ingenieur, andererseits will es auch Studirenden als Leitfaden dienen.

Bei dem beabsichtigten geringen Umfang waren gewisse Einschränkungen nötig.

Als bekannt sind die elektromagnetischen Grundgesetze vorausgesetzt. Dagegen werden die für das Verständnis der Wechselstromerscheinungen erforderlichen Begriffe eingehend erläutert, um auch dem Anfänger in dem Gebiet die Einarbeitung zu erleichtern.

Die jeweils gewonnenen Ergebnisse werden auf einfache technische Probleme angewendet, und wo angängig wird auf Messungen eingegangen.

Sondergebiete, wie z. B. die Theorie der Meßinstrumente, der Lichtbogenvorgänge u. a. mußten ausgeschieden werden.

Um die mathematischen Hilfsmittel auf ein möglichst geringes Maß herabzusetzen, wurden die Ausgleichsvorgänge in Leitungen neu bearbeitet. Durch Beschränkung auf die verzerrungsfreie Leitung ist es möglich, ausschließlich die d'Alembertsche Lösung der Schwingungsgleichung zur Behandlung aller Aufgaben zu verwenden.

Bei der Durchsicht des Textes und der Korrekturen war Herr Dr.-Ing. W. O. Schumann mir in liebenswürdigster Weise behilflich; ich möchte ihm auch an dieser Stelle für seine wertvolle Unterstützung meinen besten Dank aussprechen.

Zürich, im Februar 1914.

A. Fraenckel.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.		Seite
Einwellige Wechselströme		1
Allgemeines, Definitionen S. 1. — Erzeugung einwelliger Spannungen S. 2. — Addition von einwelligen Strömen S. 6. — Mittelwert und Effektivwert einwelliger Ströme S. 8. — Die Leistung eines einwelligen Wechselstromes S. 10.		
Zweites Kapitel.		
Selbstinduktion und Kapazität in Wechselstromkreisen . .		12
Selbstinduktion in Wechselstromkreisen S. 12. — Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion S. 18. — Kapazität in Wechselstromkreisen S. 21. — Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität S. 26.		
Drittes Kapitel.		
Graphische und analytische Methoden		29
Darstellung von Wechselströmen durch Vektoren S. 28. — Symbolische Darstellung von Wechselströmen S. 32. — Wechselstromdiagramme S. 37. — Inversion S. 42.		
Viertes Kapitel.		
Reihenschaltung von Stromkreisen		44
Grundgesetz für die Reihenschaltung mehrerer Stromkreise S. 44. — Der Spannungsabfall in einer Leitung S. 45. — Beispiel S. 49. — Leistungsmessung nach der Drei-Voltmeter-Methode S. 54.		
Fünftes Kapitel.		
Parallelschaltung von Stromkreisen		55
Grundgesetz für die Parallelschaltung von Stromkreisen S. 55. — Die resultierende Impedanz zweier parallelgeschalteter Impedanzen S. 56. — Stromresonanz S. 58. — Leistungsmessung nach der Drei-Ampere-meter-Methode S. 60. — Korrektionsformeln für Leitungsmesser S. 60.		
Sechstes Kapitel.		
Zusammengesetzte Stromkreise		62
Zwei parallelgeschaltete Impedanzen in Reihe mit einer dritten S. 62. — Die Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom S. 63. — Erzeugung von 90° Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung S. 66. — Die Schaltungen von Boucherot S. 68.		

	Seite
Siebentes Kapitel.	
Mehrwellige Ströme	71
Darstellung durch Fouriersche Reihen S. 71. — Ermittlung der Amplituden der Fourierschen Reihe S. 73. — Besondere Kurvenformen S. 75. — Arithmetische Analyse S. 80. — Graphische Verfahren S. 86. — Die Summe von zwei mehrwelligen Strömen S. 88. — Veränderung der Kurvenform durch Selbstinduktion und Kapazität S. 89. — Effektivwert und Leistung mehrwelliger Wechselströme S. 90. — Formfaktor und Scheitelfaktor mehrwelliger Ströme S. 92. — Mehrwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität S. 94. — Graphische Darstellung von mehrwelligen Strömen S. 98.	
Achstes Kapitel.	
Mehrphasenströme	103
Die Mehrphasensysteme S. 103. — Symmetrische Mehrphasensysteme S. 104. — Verkettete Mehrphasensysteme S. 105. — Balancierte und unbalancierte Mehrphasensysteme S. 109. — Das Dreiphasensystem S. 110. — Berechnung einer Sternschaltung S. 110. — Dreieckschaltung. Die Beziehung der Phasenströme zu den Linienströmen S. 116. — Transfigurierung einer Dreieckschaltung in eine Sternschaltung S. 119. — Berechnung der Spannungserhöhung bei einem Mehrphasensystem S. 121. — Das Zweiphasen-Dreileitersystem S. 123. — Mehrwellige Ströme in Mehrphasensystemen S. 125. — Messung der Leistung von Mehrphasenströmen S. 127.	
Neuntes Kapitel.	
Stromkreise mit gegenseitiger Induktion	132
Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise S. 132. — Der Lufttransformator S. 137. — Messung der gegenseitigen Induktion S. 145. — Gegenseitige Induktion mehrphasiger Stromkreise S. 146. — Die Stromverteilung in massiven Leitern S. 151.	
Zehntes Kapitel.	
Wechselstromkreise mit Eisen	157
Der Erregerstrom S. 157. — Eisenverluste S. 166. — Die Vektordiagramme des Transformators S. 171. — Das magnetische Feld einer Maschine mit verteiltem Eisen S. 175. — Erzeugung eines Drehfeldes S. 177. — Energieübertragung durch das Drehfeld S. 180.	
Elfte Kapitel.	
Leitungen mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität	185
Die Konstanten einer Leitung mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität S. 184. — Strom- und Spannungsgleichungen S. 187. — Verlustfreie Leitung S. 192. — Leitung mit Verlusten S. 198. — Ermittlung der Konstanten einer Leitung durch den Leerlauf- und den Kurzschlußversuch S. 204. — Über die Berechnung der Leitungskonstanten bei Mehrfachleitungen S. 208.	

Zwölftes Kapitel.

Die Gleichungen und Diagramme des allgemeinen Wechselstromkreises 216

Leerlauf und Kurzschluß des allgemeinen Wechselstromkreises S. 216. — Superposition von Leerlauf und Kurzschluß zum Belastungszustand S. 218. — Experimentelle Bestimmung der Konstanten S. 219. — Spannungsänderung S. 222. — Berechnung der maximalen abgegebenen Leistung S. 223. — Das Arbeitsdiagramm des allgemeinen Wechselstromkreises S. 224. — Beispiele S. 229.

Dreizehntes Kapitel.

Ausgleichsvorgänge in quasistationären Stromkreisen . . . 238

Ausgleichströme S. 238. — Stromkreis mit konstantem Widerstand und konstanter Induktivität S. 240. — Stromkreise mit Widerstand und veränderlicher Induktivität S. 246. — Stromkreise mit Widerstand und Kapazität S. 251. — Stromkreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität in Reihenschaltung S. 255. — Zusammengesetzte Stromkreise S. 267. — Stromkreise mit gegenseitiger Induktion S. 271. — Das Ausschalten eines induktiven Stromkreises S. 275.

Vierzehntes Kapitel.

Ausgleichsvorgänge in nicht stationären Stromkreisen . . . 280

Die Gleichungen der freien Schwingungen auf Leitungen S. 280. — Freie Schwingungen bei offener oder bei kurzgeschlossener Leitung S. 285. — Die Reflexion der Wellen an Widerstand, Induktivität und Kapazität S. 296. — Reflexion an der Übergangsstelle zweier Leitungen mit verschiedener Charakteristik S. 311. — Der Einfluß von Widerstand, Induktivität und Kapazität auf durchlaufende Wellen S. 320.

Namen- und Sachregister 331

Erstes Kapitel.

Einwellige Wechselströme.

1. Allgemeines, Definitionen. — 2. Erzeugung einwelliger Spannungen. —
3. Addition von einwelligem Strömen. — 4. Mittelwert und Effektivwert einwelliger Ströme. — 5. Die Leistung eines einwelligem Wechselstromes.

1. Allgemeines, Definitionen.

Unter Wechselströmen versteht man ganz allgemein solche Ströme, deren Größe und Richtung sich mit der Zeit ändern.

Wechselströme im engeren Sinne sind die periodischen Wechselströme, deren Größe und Richtung sich periodisch mit der Zeit derart ändern, daß jeweils nach Verlauf einer bestimmten Zeit T der Strom nach Größe und Richtung wieder denselben Wert hat wie zu Anfang. Man bezeichnet die Zeit T als Periodendauer.

Die einfachste periodische Funktion ist die Sinusfunktion. Einen Wechselstrom, dessen Augenblickswerte i sich nach einer Sinusfunktion ändern, bezeichnet man als einwelligem Strom. Er wird dargestellt durch die Gleichung

$$i = i_m \sin \alpha \quad (1)$$

Da die Sinusfunktion sich zwischen den Grenzwerten $+1$ und -1 bewegt, ist i_m der größte Augenblickswert, den der Strom in der einen oder anderen Richtung erreicht. i_m heißt der Höchstwert oder die Amplitude. Da wir es mit einer zeitlichen Änderung zu tun haben, ist in Gl. 1 der veränderliche Winkel α der Zeit t proportional, wir setzen

$$\alpha = \omega t + \varphi,$$

worin ω und φ Konstante sind. Der Proportionalitätsfaktor ω ergibt sich daraus, daß die Sinusfunktion sich periodisch nach Durchlaufen des Bogens 2π wiederholt, während die zeitliche Wiederkehr der Funktion i nach einer Zeit T erfolgt. Es ist daher

$$2\pi = \omega T.$$

Der reziproke Wert der Periodendauer T ist die Periodenzahl in der Sekunde oder die Frequenz c , daher auch

$$2\pi c = \omega.$$

ω heißt die Kreisfrequenz, sie ist die Periodenzahl in 2π Sekunden.

Mit diesen Konstanten wird

$$\begin{aligned} i &= i_m \sin(\omega t + \varphi) \\ &= i_m \sin(2\pi c t + \varphi). \end{aligned} \quad (1a)$$

In Fig. 1 sind die Augenblickswerte eines einwelligen Stromes als Funktion der Zeit aufgetragen.

Der konstante Winkel φ hängt von der Wahl des Anfangspunktes der Zeitzählung ab. Für $t=0$ ist nach Gl. 1a

$$i = i_m \sin \varphi,$$

und der Strom beginnt seine positive Halbwellen zur Zeit

$$t = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{\varphi}{2\pi} T.$$

φ heißt der Phasenwinkel.

Alle hier abgeleiteten Bezeichnungen gelten ebenso für Wechselspannungen.

Die Periodenzahl c der in der Starkstromtechnik verwendeten Wechselströme ist für Licht- und Kraftanlagen meist zwischen 40 und 60 sek^{-1} , in Europa am häufigsten 50, für reine Kraftanlagen oft 25 und für Bahnen häufig 15 oder $16\frac{2}{3}$. Telefonströme haben Frequenzen bis zu 5000, und in der drahtlosen Telegraphie werden Frequenzen von mehreren Hunderttausend verwendet.

2. Erzeugung einwelliger Spannungen.

Das Auftreten eines Wechselstromes in einem Stromkreis ist nach der Entdeckung von Faraday mit einer Änderung des den Stromkreis durchsetzenden magnetischen Flusses verbunden.

Es ist nun zu unterscheiden zwischen dem vom Strom selbst erzeugten und einem fremden Fluß. Die Änderung des selbsterzeugten Flusses wirkt nämlich, wie später gezeigt wird, dem Bestehen des Stromes entgegen, während die Änderung eines fremden Flusses entweder im Sinne des Stromes oder ihm entgegen wirken kann.

Die Ursache des Bestehens des Stromes kann nur eine im Sinne des Stromes wirkende Flußänderung sein, und die Erzeugung eines

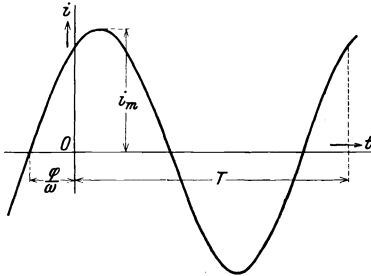


Fig. 1.

Wechselstromes verlangt daher, daß an einer bestimmten Stelle des Stromkreises — dem Stromerzeuger — ein fremder, den Stromkreis durchsetzender Fluß, sich ändert. Zur Erzeugung einwelliger Ströme muß diese Änderung periodisch nach einem Sinusgesetz erfolgen.

Als einfaches Beispiel hierfür betrachten wir die Anordnung der Fig. 2. Ein zu einem Rechteck gebogener Leiter wird in einem homogenen magnetischen Feld zwischen den Polen eines Magneten um die zur Richtung der Induktion senkrechte Achse mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedreht.

Das Maxwell-Faradaysche Induktionsgesetz lautet nun: „Die elektrische Umlaufspannung (oder das Linienintegral der elektrischen Feldstärke) längs einer geschlossenen Kurve ist gleich der Abnahme des magnetischen Flusses, der die von der Kurve umgrenzte Fläche durchsetzt in der Zeiteinheit, wobei der Umlaufsinn der Kurve und die Flußrichtung ein Rechtssystem bilden.“

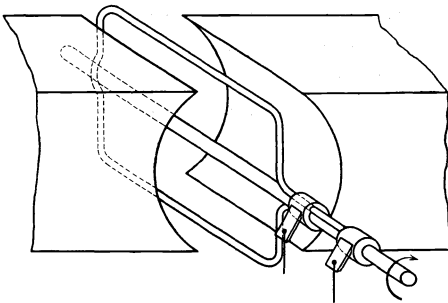


Fig. 2.

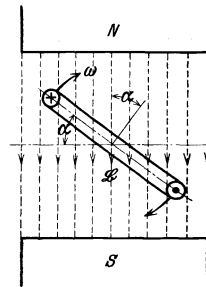


Fig. 3.

Wir denken uns nun den Leiter, Fig. 2, durch einen äußeren Widerstand, z. B. eine Glühlampe zu einer Schleife geschlossen, und untersuchen die Änderungsgeschwindigkeit des fremden Feldes durch diese Schleife, die man als die induzierte elektromotorische Kraft (EMK) bezeichnet.

Steht die Ebene der Windung senkrecht zur Richtung der magnetischen Induktion, so ist der Fluß durch die Fläche ein Maximum und er nimmt ab, wenn die Windung in der einen oder der anderen Richtung um einen Winkel α gedreht wird, Fig. 3. Die Richtung der bei dieser Bewegung induzierten EMK erhalten wir, wenn wir die Schleife in einem solchen Sinn durchlaufen denken, der sich der Richtung der Induktion zuordnet, wie die Drehung zur Fortschreitung einer rechtsgängigen Schraube. Dieser Umlaufsinn ist in Fig. 3 für die beiden senkrecht zur Papierebene stehenden Leiter-teile durch ein Kreuz (in die Zeichenebene hinein) und einen Punkt (aus der Zeichenebene heraus) gekennzeichnet.

Ist $\alpha = 90^\circ$ geworden, so steht die Ebene der Windung in der Richtung der magnetischen Induktion, der Fluß durch die Fläche ist Null und er nimmt bei weiterer Drehung wieder zu.

Der Zunahme des Flusses haben wir als Richtung der EMK den Umlaufsinn einer rechtsgängigen Schraube zuzuordnen, deren Fortschreitungsinn in die der Induktion entgegengesetzte Richtung fällt. Wir erhalten also für die Drehung von $\alpha = 90^\circ$ bis 180° dieselbe Richtung der EMK wie von $\alpha = 0$ bis 90° . Bei $\alpha = 180^\circ$ ist der Fluß wieder ein Maximum und er nimmt bei weiterer Drehung ab; hier ergibt sich aber die entgegengesetzte Richtung der EMK bis $\alpha = 360^\circ$ geworden ist, jeder halben Umdrehung entspricht also die entgegengesetzte Richtung der EMK als der vorhergehenden, und das Spiel wiederholt sich nach jeder Umdrehung.

Da die EMK proportional der Geschwindigkeit ist, mit der der Fluß sich ändert, ist sie Null, wenn der Fluß durch die Windung im Maximum ist, d. h. wenn $\alpha = 0, 180^\circ, 360^\circ \dots$ ist, hier tritt der Richtungswechsel ein. Die EMK ist am größten, wenn die Flußänderung am größten, also wenn $\alpha = 90^\circ, 270^\circ$ usf. ist, in der Mitte zwischen zwei Richtungswechseln.

Sei e der Augenblickswert der induzierten EMK, Φ der Fluß, so ist nach dem Induktionsgesetz

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} df \cos \alpha \dots \dots (2)$$

\mathfrak{B} ist die Induktion an der Stelle eines Flächenelements df und α der Winkel, den die Normale auf dem Flächenelement mit der Richtung der Induktion bildet. Da wir ein homogenes Feld angenommen haben, ist \mathfrak{B} konstant und α hat für alle Elemente der Windungsebene denselben Wert. Ist daher F die Fläche der ganzen Windung, so wird

$$\Phi = \mathfrak{B} F \cos \alpha$$

und

$$e = - \frac{d(\mathfrak{B} F \cos \alpha)}{dt} = \mathfrak{B} F \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \dots$$

$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, und so mit $\alpha = \omega t + \varphi$, worin φ der Winkel ist, den die Spulennormale zur Zeit $t=0$ mit der Richtung der Induktion bildete. Er hängt wieder nur von der Wahl des Anfangspunktes der Zeit ab. Es ist $\omega = 2\pi c$, wenn c die Zahl der Umdrehungen in einer Sekunde oder, da jeder Umdrehung eine Periode entspricht, die Periodenzahl bezeichnet.

Hiermit wird

$$\Phi = \mathfrak{B} F \cos(\omega t + \varphi) = \Phi_m \cos(\omega t + \varphi) \dots (3)$$

$$e = 2 \pi c \mathfrak{B} F \sin(\omega t + \varphi) = 2 \pi c \Phi_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

$\Phi_m = \mathfrak{B} F$ ist der Maximalwert des Flusses und $2 \pi c \Phi_m = e_m$ ist die Amplitude der EMK.

Ist Φ_m in absolutem Maß (elektromagn. CGS-System) gemessen, so erhält man auch die EMK in absoluten Einheiten; um sie in technischen Einheiten (Volt) zu erhalten, ist der Ausdruck mit 10^{-8} zu multiplizieren:

$$e = 2 \pi c \Phi_m \sin(\omega t + \varphi) 10^{-8} \text{ Volt} \dots (4a)$$

In Gl. 4 und 4a ist der Phasenwinkel der EMK φ , und wenn wir in Gl. 3 $\cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ setzen, sehen wir, daß der Phasenwinkel des Flusses $\varphi + \frac{\pi}{2}$ ist. Die positive Halbwelle der EMK beginnt also zur Zeit $-\frac{\varphi}{\omega}$, die des Flusses zur Zeit $-\frac{\varphi}{\omega} - \frac{\pi}{2\omega}$, also um eine Zeit $\frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$ früher als die der EMK (s.

Fig. 4). Die Sinuswelle des Flusses eilt also der Welle der EMK um eine Viertelperiode vor, oder umgekehrt die Welle der EMK der des Flusses um ebenso viel nach.

Die Differenz der Phasenwinkel der beiden Sinuswellen heißt ihre Phasenverschiebung, sie ist hier $\frac{\pi}{2}$.

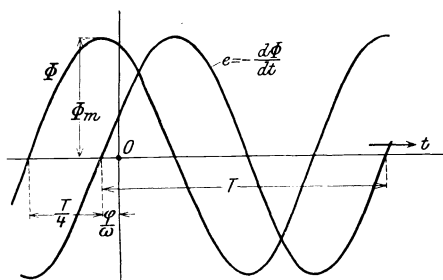


Fig. 4.

Da die voreilende Welle den größeren Phasenwinkel hat, bezeichnet die positive Phasenverschiebung eine „Voreilung“, die negative eine „Verzögerung“.

Während somit der Phasenwinkel einer einzeln betrachteten Sinuswelle von der Wahl der Anfangszeit abhängt und als willkürliche Integrationskonstante erscheint, ist die Phasenverschiebung zweier durch einen physikalischen Vorgang verknüpfter Wellen unabhängig von der Anfangszeit und hat eine physikalische Bedeutung; in dem behandelten Fall den, daß die EMK positiv ist, solange der Fluß abnimmt, und negativ, solange er zunimmt.

Bisher wurde eine Spule mit nur einer Windung betrachtet; besitzt sie mehrere (w) Windungen, so ist bei Berechnung der EMK die Fläche aller Windungen einzusetzen. Sind alle Windungen gleich groß und liegen sie so dicht nebeneinander, daß alle mit derselben Zahl Induktionslinien verkettet sind, so ist die Flußverkettung mit allen Windungen w mal so groß wie die mit einer Windung, die Amplitude der EMK wird

$$e_m = 2\pi c w \mathfrak{B} F 10^{-8} = 2\pi c w \Phi_m 10^{-8} \text{ Volt} \quad . \quad . \quad (4b)$$

$w \Phi$ sind die Verkettungen der Windungen mit dem Fluß oder kurz die „Flußwindungen“.

3. Addition von einwelligen Strömen.

Die Summe von beliebig vielen einwelligen Strömen (oder Spannungen) gleicher Frequenz gibt wieder einen einwelligen Strom (bzw. eine Spannung) von derselben Frequenz.

Von diesem Satz haben wir schon am Ende des letzten Absatzes Gebrauch gemacht, denn wir können die EMK der w Windungen als Summe von w gleich großen EMKen gleicher Phase und gleicher Frequenz in den in Reihe geschalteten Windungen ansehen. Sie ist w mal so groß wie die EMK jeder Windung.

Sind allgemein zwei Sinuswellen von verschiedener Amplitude und Phase gegeben durch zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ a_2 &= a_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2), \end{aligned}$$

so läßt sich ihre Summe darstellen durch

$$a = a_1 + a_2 = a_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Hierin findet man a_m und φ wie folgt. Da die Gleichungen für jeden Augenblick gelten, bildet man die Summe für die zwei Zeitpunkte $\omega t = 0$ und $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

Es wird

$$\begin{aligned} a_m \sin \varphi &= a_{1m} \sin \varphi_1 + a_{2m} \sin \varphi_2 \\ a_m \cos \varphi &= a_{1m} \cos \varphi_1 + a_{2m} \cos \varphi_2 \end{aligned}$$

und hieraus folgt durch Quadrieren und Addieren

$$a_m^2 = a_{1m}^2 + a_{2m}^2 + 2 a_{1m} a_{2m} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und durch Division

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{1m} \sin \varphi_1 + a_{2m} \sin \varphi_2}{a_{1m} \cos \varphi_1 + a_{2m} \cos \varphi_2} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Bei der Addition einer größeren Anzahl von Wellen faßt man erst zwei zu einer resultierenden Sinuswelle zusammen, dann diese mit der dritten usf.

Die physikalische Anwendung dieses Satzes ergibt nun folgende beiden Fälle:

1. Die Summe von mehreren in Reihe geschalteten einwelligen EMKen in einem Stromkreis ergibt eine resultierende einwellige EMK von gleicher Frequenz.

2. Vereinigen sich mehrere Leitungen, in denen einwellige Ströme fließen, in einem Knotenpunkt, so ist der resultierende Strom wieder ein einwelliger Strom.

Beispiel. Ordnet man in der elementaren Wechselstrommaschine Fig. 2 zwei Spulen an, die einen Winkel β miteinander bilden (s. Fig. 5), so sind die EMKe der beiden Spulen

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ e_2 &= e_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2), \end{aligned}$$

worin die Phasenvoreilung $\varphi_1 - \varphi_2 = \beta$ ist, da die erste Windung der zweiten stets um den Winkel β voreilt.

Nehmen wir an, daß die Flächen beider Windungen gleich groß sind, so ist

$$e_{1m} = e_{2m},$$

und die Amplitude der resultierenden EMK wird bei Reihenschaltung nach Gl. 5

$$e_m^2 = 2 e_{1m}^2 (1 + \cos \beta)$$

oder, da $1 + \cos \beta = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2}$,

$$e_m = 2 e_{1m} \cos \frac{\beta}{2}.$$

Nach Gl. 6 wird die Phase der resultierenden EMK

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi_1 + \sin(\varphi_1 - \beta)}{\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \beta)},$$

was sich leicht umformen läßt in

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg} \left(\varphi_1 - \frac{\beta}{2} \right) \\ \varphi &= \varphi_1 - \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

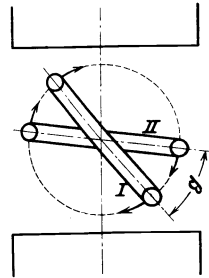


Fig. 5.

Die resultierende EMK ist also $2 \cos \frac{\beta}{2}$ mal so groß wie die jeder Windung und eilt gegen die eine um $\frac{\beta}{2}$ nach, gegen die andere um ebensoviel vor.

4. Mittelwert und Effektivwert einwelliger Ströme.

Der Mittelwert der Sinuskurve über eine beliebige Anzahl ganzer Perioden ist Null, weil der Inhalt der positiven und negativen Halbwellen gleich groß ist, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat.

Daher vermag ein Wechselstrom von hoher Frequenz in einem Gleichstrommeßinstrument, bei dem eine vom Strom durchflossene Spule im Feld eines permanenten Magneten schwingt, keinen Ausschlag des Zeigers hervorzurufen; er erzeugt nur schnellwechselnde Impulse nach beiden Seiten, denen aber das schwingende System infolge seiner Trägheit nicht folgen kann. Aus dem gleichen Grunde kann ein Wechselstrom im allgemeinen nicht für elektrolytische Zwecke, z. B. zum Laden von Akkumulatoren, verwendet werden.

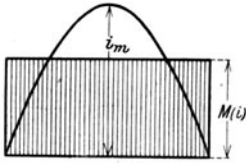


Fig. 6.

Bildet man den Mittelwert über eine Halbwelle, so erhält man verschiedene Werte, je nachdem man den Anfangspunkt wählt. Der größte Mittelwert, den man für eine Halbwelle erhält, ist gleich der Höhe des mit der Halbwelle zwischen zwei Nulldurchgängen flächengleichen Rechtecks (s. Fig. 6), diesen nennt man kurz den Mittelwert $M(i)$. Es ist

$$M(i) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i_m \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi} i_m = 0,637 i_m \quad \dots \quad (7)$$

Dagegen ist der sogenannte quadratische Mittelwert über eine beliebige Anzahl Perioden, den man durch Bildung des Mittelwertes der Quadrate der Augenblickswerte erhält, nicht Null.

Die quadratische Kurve einer Sinuskurve ist

$$i^2 = i_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} i_m^2 (1 - \cos 2\omega t).$$

Sie ist also eine Sinuskurve von der doppelten Schwingungszahl, deren Ordinaten aber nie negativ werden, sondern zur Mittelordinate $\frac{1}{2} i_m^2$ symmetrisch liegende Halbwellen bilden (s. Fig. 7). Die Wurzel aus dem Mittelwerte der quadratischen Kurve bezeichnet man mit J .

Es ist

$$J^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2} i_m^2$$

oder

$$J = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \dots (8)$$

J heißt der quadratische Mittelwert oder der Effektivwert. Für die Sinuskurve ist also

$$\text{Effektivwert} = \frac{\text{Amplitude}}{\sqrt{2}}.$$

Spricht man von einem Wechselstrom oder einer Wechselspannung bestimmter Größe, z. B. von dem Strom und der Spannung, für die ein Generator, ein Motor gebaut ist, so versteht man hierunter allgemein den Effektivwert. Dies kommt daher, daß man mit den gebräuchlichen Meßinstrumenten die Effektivwerte mißt.

Die Leistung der Stromwärme eines Wechselstromes berechnet sich mittels des Effektivwertes genau wie für einen Gleichstrom.

Ein Strom i erzeugt in einem Leiter vom Widerstand R in der Zeit dt nach dem Satz von Joule die Wärmemenge

$$i^2 R dt.$$

Die mittlere in der Zeiteinheit erzeugte Wärme ist daher

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = J^2 R.$$

Der Stromwärmeverlust durch einen Wechselstrom ist ebenso groß wie für einen Gleichstrom, dessen Stärke gleich dem Effektivwert des Wechselstromes ist. Ein Hitzdraht-Strom- oder Spannungsmesser zeigt daher den Effektivwert an; ebenso ein elektrodynamisches Instrument, bei dem das Drehmoment zwischen einer festen und einer beweglichen Spule gemessen wird, die von dem zu messenden oder einem ihm proportionalen Strome durchflossen werden.

Ein Elektrometer zeigt in der sog. Doppelschaltung einen dem Effektivwert proportionalen Ausschlag.

Das Verhältnis des Effektivwertes zum Mittelwert eines Wechselstromes nennt man nach Fleming den Formfaktor. Für die Sinuskurve war nach Gl. 7 und 8

$$M(i) = \frac{2}{\pi} i_m \quad J = \frac{i_m}{\sqrt{2}},$$

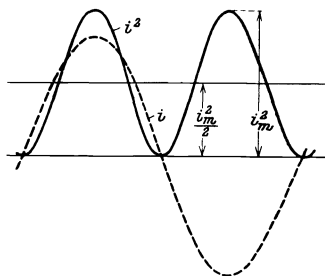


Fig. 7.

daher der Formfaktor

$$f = \frac{J}{M(i)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \dots \dots \dots (9)$$

Das Verhältnis der Amplitude zum Effektivwert nennt man den Scheitelfaktor, er ist für den einwelligen Wechselstrom $\sqrt{2}$.

In dem Beispiel in Abschnitt 2 kann hiernach zunächst der Mittelwert und dann der Effektivwert und die Amplitude der EMK in der rotierenden Spule wie folgt berechnet werden. Während einer halben Periode ändert sich der Fluß durch die Spule im Maximum von $+\Phi_m$ auf $-\Phi_m$, die größte Änderung, die während einer halben Periode auftreten kann, ist also $2\Phi_m$. Dividiert man diese durch die Zeit $\frac{T}{2}$ und multipliziert mit der Windungszahl w , so erhält man den Mittelwert der EMK während der halben Periode

$$M(e) = \frac{4\Phi_m w}{T} = 4cw\Phi_m.$$

Die Amplitude ist

$$e_m = \frac{\pi}{2} M(e) = 2\pi cw\Phi_m 10^{-8} \text{ Volt},$$

der Effektivwert

$$E = f M(e) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} M(e) = \pi\sqrt{2} cw\Phi_m 10^{-8} \text{ Volt}.$$

5. Die Leistung eines einwelligen Wechselstromes.

Wir betrachten einen Stromkreis, der an eine Stromquelle von gegebener einwelliger Spannung angeschlossen ist. Diese sei

$$p = p_m \sin \omega t$$

und der Strom, der sich in dem Stromkreis einstellt, sei

$$i = i_m \sin(\omega t - \varphi),$$

er eilt der Spannung um einen Winkel φ nach.

Die dem Stromkreis in der Zeit dt zugeführte Arbeit ist

$$dA = p i dt = p_m i_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt$$

und die momentane Leistung

$$\begin{aligned} w = \frac{dA}{dt} &= p i = p_m i_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) \\ &= p_m i_m \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]. \end{aligned}$$

Der Augenblickswert der Leistung schwingt, wie die Gleichung zeigt und durch Fig. 8 dargestellt ist, mit der doppelten Periodenzahl um den Mittelwert $\frac{1}{2} p_m i_m \cos \varphi$.

Die mittlere Leistung des Wechselstromes ist also

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T p i dt = \frac{1}{2} p_m i_m \cos \varphi .$$

Da $\frac{i_m}{\sqrt{2}} = J$ der Effektivwert des Stromes

$\frac{p_m}{\sqrt{2}} = P$ der Effektivwert der Spannung ist, wird

$$W = P J \cos \varphi \dots \dots \dots (10)$$

Die mittlere Leistung eines Wechselstromes berechnet sich als Produkt aus den Effektivwerten von Strom und Spannung und dem Kosinus der Phasenverschiebung zwischen ihnen. Sie ist, sofern φ von Null verschieden ist, kleiner als für einen Gleichstrom, von den gleichen Werten von Strom und Spannung wie die Effektivwerte für den Wechselstrom. Dies rührt daher, daß die Augenblickswerte der Leistung, wie Fig. 8

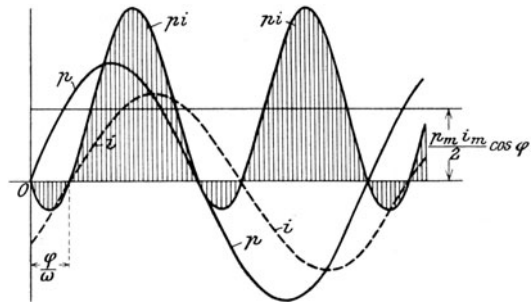


Fig. 8.

zeigt, während eines Teiles der Periode negativ sind. Der Wechselstrom führt während eines Teiles der Periode dem Stromkreis von der Stromquelle Arbeit zu, während eines anderen Teiles gibt er Arbeit von dem Stromkreis an die Quelle wieder zurück.

Bei einem Stromempfänger ist die zugeführte Leistung größer als die abgegebene, der Mittelwert ist positiv, und dies ist stets der Fall, wenn φ kleiner als 90° ist. Ist $\varphi = 90^\circ$, so ist die mittlere Leistung Null, und sie ist negativ, wenn φ größer als 90° ist. Der letzte Fall entspricht somit einem Stromerzeuger.

Bisher wurde die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung als gegebene Größe betrachtet, und nicht gefragt, wodurch sie entsteht. Hierüber sollen die nächsten Kapitel Aufschluß geben.

Zweites Kapitel.

Selbstinduktion und Kapazität in Wechselstromkreisen.

6. Selbstinduktion in Wechselstromkreisen. — 7. Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion. — 8. Kapazität in Wechselstromkreisen. — 9. Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

6. Selbstinduktion in Wechselstromkreisen.

Bei Gleichstrom ist die Stromstärke J in einem Stromkreis, dem eine Spannung P eingeprägt wird, durch den Ohmschen Widerstand R des Stromkreises eindeutig bestimmt. Das Ohmsche Gesetz lautet: Spannung = Stromstärke \times Widerstand.

$$P = JR \dots \dots \dots (11)$$

Bei Wechselströmen treten die Erscheinungen des magnetischen und des elektrischen Feldes als wesentliche Faktoren für die Bestimmung der Stromstärke hinzu. Wir betrachten zunächst die Erscheinungen des magnetischen Feldes.

Das elektromagnetische Grundgesetz.

Jeder von einem elektrischen Strom durchflossene Leiter erzeugt in seiner Umgebung ein magnetisches Feld, das mit dem Strom durch das elektromagnetische Grundgesetz verknüpft ist. Es lautet: „Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs einer geschlossenen Kurve ist gleich dem 4π fachen des mit der Kurve verketteten Stromes. Der Umlaufsinn der Kurve und die Richtung des Stromes sind einander zugeordnet, wie der Umlaufsinn und die Fortschreitungsrichtung einer Rechtsschraube.“

Ist der Strom in Ampere ausgedrückt (1 Amp. = 0,1 elektromagn. CGS-Einheiten), so ist 4π durch $0,4\pi$ zu ersetzen. Besteht der Leiter

aus w Windungen, die alle vom Strome durchflossen sind, so gilt für jede Kurve, die mit allen w Windungen verkettet ist:

$$\int \mathfrak{H} dl = 4 \pi i w \dots \dots \dots (12)$$

Fig. 9 zeigt die zusammengehörigen Richtungen des Stromes und der Feldstärke für eine Stromschleife.

Das Ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises.

In der Technik gibt man der durch Gl. 12 ausgedrückten Beziehung eine etwas andere Form.

Man denkt sich das ganze magnetische Feld in Induktionsröhren zerlegt; die Induktionsröhren kehren in sich zurück und ihre Randkurve fällt überall in die Richtung der Induktion. Der Fluß durch eine Induktionsröhre ist daher konstant. Ist f_x der Querschnitt einer Röhre und \mathfrak{B}_x die mittlere Induktion an einer bestimmten Stelle, so ist der Fluß durch die Röhre

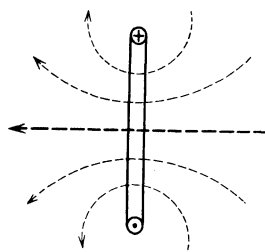


Fig. 9.

$$\Phi_x = \mathfrak{B}_x \cdot f_x = \mu \mathfrak{H} f_x,$$

worin μ die magnetische Permeabilität ist, und somit

$$\mathfrak{H} = \frac{\Phi_x}{\mu f_x}.$$

Im allgemeinsten Fall sind nicht alle Windungen mit der betrachteten Röhre verkettet. Ist daher w_x die Zahl der mit der Röhre verketteten Windungen, so ist

$$\int \mathfrak{H} dl = \int \frac{\Phi_x dl}{\mu f_x} = 4 \pi i w_x$$

oder

$$i w_x = \Phi_x \frac{1}{4 \pi} \int \frac{dl}{\mu f_x} = \Phi_x R_x \dots \dots \dots (13)$$

$R_x = \frac{1}{4 \pi} \int \frac{dl}{\mu f_x}$ ist der magnetische Widerstand oder die Reluktanz der Röhre. Es ist

$$\Phi_x = \frac{i w_x}{R_x} \dots \dots \dots (13 a)$$

und der gesamte Fluß

$$\Phi = \Sigma \Phi_x = \Sigma \left(\frac{i w_x}{R_x} \right) = i \Sigma \left(\frac{w_x}{R_x} \right) \dots \dots (13 b)$$

wobei die Summe über alle Induktionsröhren zu erstrecken ist.

In dem besonderen Falle, daß alle Windungen mit allen Röhren verkettet sind, kann man setzen

$$\Phi = \frac{iw}{R} \dots \dots \dots (14)$$

$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_x}$ ist die Summe der reziproken Werte der magnetischen Widerstände, d. h. der magnetischen Leitfähigkeiten aller Röhren, R ist der resultierende magnetische Widerstand.

Das Produkt iw nennt man die magnetomotorische Kraft (MMK). Die durch Gl. 13 und 14 ausgedrückte Beziehung lautet: Magnetomotorische Kraft = Induktionsfluß \times magnetischer Widerstand. Sie ist dem Ohmschen Gesetz für einen elektrischen Stromkreis nachgebildet und heißt das Ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises.

Selbstinduktionskoeffizient.

Da eine Induktionsröhre mit w_x Windungen verkettet ist, ist die Zahl der Verkettungen des Flusses der Röhre mit dem Stromkreis nach Gl. 13 a

$$w_x \Phi_x = \frac{iw_x^2}{R_x},$$

und die Zahl der Verkettungen des ganzen Induktionsflusses mit dem Stromkreis

$$\sum w_x \Phi_x = i \sum \frac{w_x^2}{R_x} = iL. \dots \dots \dots (15)$$

L ist die Zahl der Verkettungen aller von der Stromeinheit erzeugten Induktionsröhren mit dem Stromkreis und heißt der Selbstinduktionskoeffizient oder die Induktivität des Stromkreises. Da in dem Ausdruck für den magnetischen Widerstand die Permeabilität μ vorkommt, ist die Induktivität L nur dann von dem Strom unabhängig und als eine Konstante zu betrachten, wenn μ konstant ist, d. h. wenn der Fluß nicht in ferromagnetischem Medium verläuft.

Da

$$L = \sum \frac{w_x^2}{R_x} = 4\pi \sum \left(w_x^2 \int \frac{1}{\mu f_x} dl \right),$$

hat L die Dimension einer Länge. Die Einheit der Induktivität im absoluten Maß ist 1 cm, im technischen Maß 10^9 cm oder ein Erdquadrant. Diese Einheit heißt ein Henry.

Beispiele. 1. Eine Ringspule von rechteckigem Querschnitt (s. Fig. 10). Die Windungen mögen so dicht nebeneinander liegen, daß der ganze Induktionsfluß im Inneren des Ringes verläuft, und

alle w Windungen mit allen Induktionsröhren verkettet sind. Diese sind, wie aus der Symmetrie geschlossen werden kann, konzentrische Hohlzylinder, von der Wandstärke dx und der Höhe a . Für einen solchen Zylinder vom Radius x wird daher, wenn die Permeabilität $\mu = 1$ gesetzt wird, (nicht-magnetisches Medium)

$$R_x = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dl}{\mu f_x} = \frac{2\pi x}{4\pi a dx} = \frac{x}{2a dx},$$

und da alle Induktionsröhren mit allen Windungen verkettet sind,

$$L = w^2 \sum \frac{1}{R_x} = w^2 \int_{x=r_i}^{x=r_a} \frac{2a dx}{x}$$

$$L = 2w^2 a \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) 10^{-9} \text{ Henry.}$$

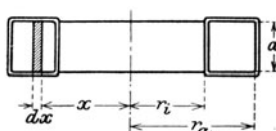
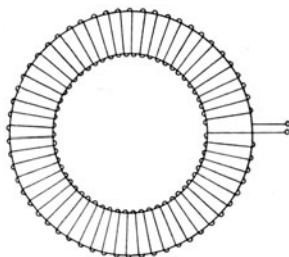


Fig. 10.

2. Eine Doppelleitung aus zwei runden Drähten vom Radius a im Abstände D (s. Fig. 11). Die beiden Leitungen seien sehr lang und an den Enden leitend miteinander verbunden und bilden somit eine rechteckige Schleife. Das Feld, das diese Schleife umschlingt, setzt sich, wenn man von den Endverbindungen abieht, zusammen aus den beiden Feldern, die jeder Leiter für sich erzeugt. Die Kraftlinien des Feldes eines Leiters sind infolgeder Symmetrie konzentrische Kreise. Es ist aber zu unterscheiden zwischen dem Feld außerhalb des Leiters und dem Feld im Innern des Leiters; das erste ist mit allen, das zweite nur mit einem Teil der Stromfäden verkettet. Für einen Punkt P im Abstände x von der Achse des Leiters ist daher für $x > a$

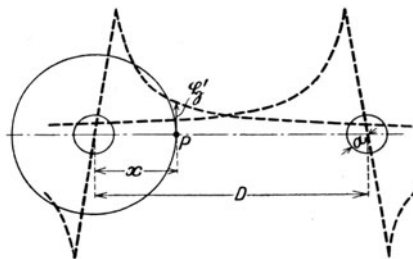


Fig. 11.

$$\int \mathfrak{H}' dl = \mathfrak{H}' 2\pi x = 4\pi i \qquad \mathfrak{H}' = \frac{2i}{x},$$

dagegen für $x < a$, wenn der Strom sich gleichmäßig über den Querschnitt verteilt,

$$\mathfrak{H}'' 2\pi x = 4\pi i \frac{x^2}{a^2} \qquad \mathfrak{H}'' = \frac{2ix}{a^2}.$$

Man erhält daher das in Fig. 11 dargestellte Bild der Feldverteilung jedes Leiters, und die Zusammensetzung der Felder beider Leiter

gibt die Verteilung Fig. 12. Der Fluß von der Oberfläche eines Leiters bis zum anderen ist, da beide Leiter gleich große und gleichgerichtete Flüsse erzeugen,

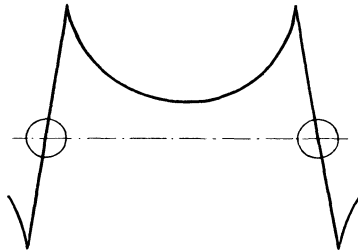


Fig. 12.

$$2 \int_a^D \mathfrak{H}' l dx = 2 l \int_a^D \frac{2i}{x} dx = 4 i l \ln \left(\frac{D}{a} \right),$$

worin l die Länge der Leiter ist. Der Anteil dieses Flusses an der Induktivität ist daher

$$L' = 4 l \ln \left(\frac{D}{a} \right).$$

Die Flußverketungen des Feldes im Inneren eines Leiters sind ebenso für beide Leiter zusammengenommen

$$2 \int_0^a \frac{\mathfrak{H}'' x^2}{a^2} l dx = 2 \int_0^a \frac{2 i x^3}{a^4} l dx = i l,$$

der zweite Anteil an der Induktivität wird daher

$$L'' = l$$

und
$$L = L' + L'' = l \left[4 \ln \left(\frac{D}{a} \right) + 1 \right] 10^{-9} \text{ Henry.}$$

Für $l = 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$ wird

$$L_1 = \left[4 \ln \left(\frac{D}{a} \right) + 1 \right] 10^{-4} \text{ Henry km}^{-1} . \quad (16)$$

Elektromotorische Kraft der Selbstinduktion.

Ändert sich der Strom in einem Leiter, so ändert sich der von ihm erzeugte und mit dem Stromkreis verkettete Fluß, es entsteht daher in dem Stromkreis eine EMK, die man als EMK der Selbstinduktion bezeichnet. Sie ist nach dem Induktionsgesetz

$$e_s = - \frac{d}{dt} \sum \Phi_x w_x$$

oder mit Benutzung von Gl. 15

$$e_s = - \frac{d(iL)}{dt} \dots \dots \dots (17)$$

Ist L als konstant zu betrachten, so wird

$$e_s = - \frac{L di}{dt} \dots \dots \dots (18)$$

Wir beschäftigen uns im folgenden zunächst mit dem zweiten Fall.

Die Gl. 17 und 18 sagen aus: je schneller ein Strom sich in einer Richtung ändert, um so größer ist die EMK der Selbstinduktion in der entgegengesetzten Richtung. Sie wirkt dem Strom stets entgegen, und wird daher auch als Gegen-EMK der Selbstinduktion bezeichnet.

Energie des magnetischen Feldes.

Die Energie, die in einem magnetischen Feld aufgespeichert ist, ist nach Maxwell

$$U_m = \int \frac{\mathfrak{H} \mathfrak{B}}{8\pi} d\tau,$$

wobei das Volumenintegral über den ganzen Raum auszudehnen ist, in dem Induktionslinien bestehen. Für ein Volumenelement einer Induktionsröhre vom Querschnitt f_x und der Länge dl ist $\mathfrak{B} f_x = \Phi_x$ der Fluß und die Energie der Röhre ist in unserem Falle des magnetischen Feldes eines einzelnen Stromkreises

$$U_x = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H} dl \Phi_x = \frac{4\pi i}{8\pi} w_x \Phi_x = \frac{i}{2} w_x \Phi_x.$$

Der Energiegehalt des ganzen Feldes ist daher

$$U_m = \frac{i}{2} \sum \Phi_x w_x,$$

oder nach Gl. 15

$$U_m = \frac{i^2}{2} L \dots \dots \dots (19)$$

Wächst in einem Kreis der Strom von Null bis zum Werte i , so wird in dem magnetischen Felde die Energie $\frac{1}{2} i^2 L$ aufgespeichert. Dem Stromkreis wird hierbei von der Stromquelle in jedem Augenblick eine Leistung

$$w = \frac{dU_m}{dt} = iL \frac{di}{dt} = - e_s i$$

zugeführt.

Verschwindet der Strom, so verschwindet das magnetische Feld, und die in ihm aufgespeicherte Energie wird an die Stromquelle zurückgegeben, der Stromkreis gibt dann in jedem Augenblick an die Stromquelle eine Leistung

$$w = - \frac{dU_m}{dt} = - iL \frac{di}{dt} = e_s i.$$

Ein Wechselstrom wächst in der ersten Viertelperiode von 0 bis i_m und speichert hierbei in dem von ihm erzeugten Felde die Energie $\frac{1}{2} i_m^2 L$ auf, in der zweiten Viertelperiode fällt er von i_m bis 0, die hierbei frei werdende Energie wird an die Stromquelle zurückgegeben. In der ersten Viertelperiode führt also die Stromquelle dem Stromkreis eine Leistung zu, die er in magnetische Energie umsetzt und in der zweiten Viertelperiode wieder zurückgibt. Die mittlere Leistung in einer halben Periode ist also Null, und dies wiederholt sich in jeder halben Periode, wobei die Richtung des Stromes und Feldes sich nach jeder halben Periode umkehren, was aber für den Betrag der magnetischen Energie des Feldes gleichgültig ist.

Die Spannungsgleichung eines Stromkreises mit dem Widerstand R und der Induktivität L , auf den die Spannung p wirkt, sagt nun nach dem Induktionsgesetz, daß die Summe aus eingepprägter und selbstinduzierter EMK gleich dem Ohmschen Spannungsfall ist:

$$p - L \frac{di}{dt} = Ri \quad (20)$$

oder

$$p = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (20a)$$

Durch Multiplikation mit i erhält man die Leistungsgleichung

$$pi = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \quad (21)$$

7. Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion.

Um den Strom zu berechnen, der sich einstellt, wenn die eingepprägte Spannung einwellig ist, hat man die Gl. 20a zu integrieren. Es möge hier zunächst nur das partikuläre Integral dieser Gleichung behandelt werden, das den stationären Zustand beschreibt, der sich kurz nach dem Einschalten einstellt. Zu diesem Zweck geht man am bequemsten von dem Strom aus. Sei

$$i = i_m \sin \omega t,$$

so wird

$$Ri = Ri_m \sin \omega t$$

und

$$L \frac{di}{dt} = \omega Li_m \cos \omega t = \omega Li_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

sonit
$$p = Ri_m \sin \omega t + \omega Li_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ = p_m \sin (\omega t + \varphi).$$

Die Klemmenspannung erscheint hier aus zwei Teilspannungen zusammengesetzt: $Ri_m \sin \omega t$ ist in Phase mit dem Strom und überwindet den Ohmschen Spannungsabfall, $\omega Li_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ eilt dem Strom um eine Viertelperiode vor und ist entgegengesetzt gleich der EMK der Selbstinduktion. Nach Gl. 5 S. 6 wird daher die Amplitude der Spannung

$$p_m = i_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \dots \dots \dots (22)$$

und nach Gl. 6 die Voreilung der Spannung gegen den Strom

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R} \dots \dots \dots (22a)$$

Daß die Teilspannung $L \frac{di}{dt}$ dem Strom um eine Viertelperiode voreilt, ergibt sich im Zusammenhang mit Abschnitt 5 daraus, daß, wie gezeigt, die mittlere Leistung der Selbstinduktion Null ist. Die momentane Leistung ist

$$pi = Ri_m^2 \sin^2 \omega t + \omega Li_m^2 \sin \omega t \cos \omega t \\ = Ri_m^2 \frac{1 - \cos 2 \omega t}{2} + \frac{\omega Li_m^2}{2} \sin 2 \omega t.$$

Der erste Teil schwingt mit doppelter Frequenz um den Mittelwert $\frac{Ri_m^2}{2}$ der zweite um den Mittelwert Null. Die mittlere Leistung ist daher

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T pi dt = \frac{Ri_m^2}{2} = J^2 R \dots \dots \dots (23)$$

worin J der Effektivwert des Stromes ist. Der Effektivwert der Spannung ist nach Gl. 22 und 8

$$P = J \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \dots \dots \dots (22b)$$

Die Größe ωL hat dieselbe Dimension wie ein Widerstand (CS^{-1}) und wird nach Heaviside Reaktanz (Querwiderstand) genannt.

Das Verhältnis von Spannung zu Strom $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ heißt nach Steinmetz die Impedanz (Scheinwiderstand). Zur Abkürzung setzt man

$$\omega L = X \dots \dots \dots (24)$$

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = z \dots \dots \dots (24a)$$

Hiermit wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{z}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{z} \quad \dots \quad (25)$$

Sind also Strom, Widerstand und Induktivität sowie die Periodenzahl gegeben, so berechnet man die Spannung nach Gl. 22b und die Phasenverschiebung nach Gl. 22a oder 25. Die Komponente der Spannung, die in Phase mit dem Strom ist, also $P \cos \varphi = JR$, heißt die Wattspannung (weil sie mit dem Strom multipliziert die Leistung ergibt). Im Gegensatz dazu heißt die gegen den Strom um 90° phasenverschobene Komponente die Klemmenspannung

$$P \sin \varphi = JX$$

die wattlose Spannung oder die Reaktanzspannung.

Sind andererseits Spannung, Widerstand, Induktivität und Frequenz gegeben, so berechnet sich der Strom aus

$$J = \frac{P}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{P}{z},$$

der Verzögerungswinkel des Stromes gegen die Spannung ist wieder durch Gl. 22a oder 25 gegeben.

Man kann nun den Strom in eine Komponente in Phase mit der Klemmenspannung und eine um 90° dagegen verschobene zerlegen. Die erste nennt man den Wattstrom, er ist

$$J \cos \varphi = P \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} = P \frac{R}{z^2},$$

die zweite den wattlosen Strom

$$J \sin \varphi = P \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = P \frac{X}{z^2}.$$

Das Verhältnis von Strom zu Spannung, also den reziproken Wert der Impedanz, die Leitfähigkeit, nennt man nach Steinmetz die Admittanz und bezeichnet sie mit y

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{1}{z} = y \quad \dots \quad (26)$$

Ferner heißt das Verhältnis des Wattstromes zur Spannung die Konduktanz

$$g = \frac{R}{z^2}, \quad \dots \quad (27)$$

das Verhältnis des wattlosen Stromes zur Spannung die Suszeptanz

$$b = \frac{X}{z^2} \quad \dots \quad (28)$$

Es wird somit
$$y = \sqrt{b^2 + g^2} \dots \dots \dots (26a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}, \quad \cos \varphi = \frac{g}{y}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{y} \dots \dots (29)$$

Wir haben also folgende Beziehungen:

- | | | |
|----------------------|--------------------------------|-----------------------|
| 1. Spannung | = Strom \times Impedanz | $P = Jz$ |
| 2. Wattspannung | = Strom \times Widerstand | $P \cos \varphi = JR$ |
| 3. Wattlose Spannung | = Strom \times Reaktanz | $P \sin \varphi = JX$ |
| 4. Strom | = Spannung \times Admittanz | $J = Py$ |
| 5. Wattstrom | = Spannung \times Konduktanz | $J \cos \varphi = Pg$ |
| 6. Wattloser Strom | = Spannung \times Suszeptanz | $J \sin \varphi = Pb$ |

Sind zwei dieser Konstanten gegeben, so kann daraus jede der anderen mit Hilfe der angegebenen Formeln berechnet werden. Handelt es sich darum, die Konstanten des Stromkreises durch Messung zu ermitteln, so mißt man den Strom J , die Spannung P und mittels eines Wattmeters die Leistung W .

Da (s. Gl. 10) $W = PJ \cos \varphi$ ist, erhält man zunächst

$$\cos \varphi = \frac{W}{PJ}.$$

Andrerseits ist $W = J^2 R$, es ergibt sich daher

$$R = \frac{W}{J^2},$$

ferner

$$z = \frac{P}{J} \quad \text{und} \quad X = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{P}{J}\right)^2 - \left(\frac{W}{J^2}\right)^2}.$$

Ist die Periodenzahl bekannt, so erhält man ferner

$$L = \frac{X}{2\pi c}.$$

Ebenso erhält man

$$y = \frac{J}{P}, \quad g = \frac{W}{P^2}, \quad b = \sqrt{y^2 - g^2}.$$

8. Kapazität in Wechselstromkreisen.

Elektrisches Feld. Zwischen zwei durch ein isolierendes Medium voneinander getrennten Leitern, zwischen denen eine elektrische Spannung besteht, bildet sich ein elektrisches Feld aus.

Nach Faraday denkt man sich das elektrische Feld durchzogen von elektrischen Kraftlinien, die an positiven Ladungen an der Oberfläche eines Leiters beginnen und an negativen Ladungen

des andern Leiters endigen, und die überall in die Richtung der elektrischen Feldstärke fallen.

Zwischen zwei benachbarten Punkten des elektrischen Feldes besteht eine Spannung, die gegeben ist durch das Produkt aus dem Abstand dl beider Punkte und der Projektion der Feldstärke \mathcal{E} an der betr. Stelle auf die Richtung von dl . Durch Summierung der Spannungen längs einer Kraftlinie erhält man die Spannung zwischen den beiden Leitern:

$$\int \mathcal{E} dl = p \quad \dots \quad (30)$$

Unter Einwirkung der Feldstärke entsteht im Dielektrikum eine Verschiebung \mathfrak{D} , die der Feldstärke und Dielektrizitätskonstanten ϵ des Materials proportional ist. Es ist

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon \mathcal{E}}{4\pi} \quad \dots \quad (31)$$

somit

$$p = \int \frac{4\pi}{\epsilon} \mathfrak{D} dl \quad \dots \quad (32)$$

Der Verschiebungsfluß durch eine geschlossene Fläche ist gleich der von der Fläche eingeschlossenen Ladung q .

$$\int \mathfrak{D} df = q \quad \dots \quad (33)$$

Man hat nun zwischen Verschiebungslinien und Kraftlinien zu unterscheiden. Eine Verschiebungsröhre ist ein Raum, dessen Begrenzungsfläche überall in die Richtung der Verschiebungslinien fällt. Der Verschiebungsfluß einer solchen Röhre ist daher konstant, und da sie an den Oberflächen der beiden Leiter endet, zwischen denen das Feld besteht, ist ihr Fluß gleich der Ladung q_x , die ihre Randkurve an den Leiteroberflächen abgrenzt. Ist f_x ihr Querschnitt an einer Stelle, so ist

$$\mathfrak{D}_x f_x = q_x.$$

Dies gilt unabhängig von der Beschaffenheit des Dielektrikums. Beim Übergang von einem Dielektrikum zum andern ist die Verschiebung stetig, während die Feldstärke nach Gl. 31 sich nach Maßgabe der Dielektrizitätskonstanten änderte.

Kapazität. Durch die Gl. 30 bis 33 wird die Ladung der Leiter mit der zwischen ihnen bestehenden Spannung p in Beziehung gebracht.

Für eine Verschiebungsröhre wird

$$p = \int \mathcal{E} dl = \int \frac{4\pi}{\epsilon} \mathfrak{D}_x dl = q_x \int \frac{4\pi dl}{\epsilon f_x}$$

oder

$$q_x = p \frac{1}{4\pi \int \frac{dl}{\epsilon f_x}} = p C_x \dots \dots \dots (34)$$

C_x ist die Kapazität der betrachteten Röhre. Summiert man die Flüsse aller Röhren des ganzen Feldes, so erhält man die gesamte Ladung q an der Oberfläche der beiden Leiter. Es wird

$$q = Cp \dots \dots \dots (35)$$

worin $C = \sum C_x$ die Summe der Kapazitäten aller Röhren oder die resultierende Kapazität der durch die beiden Leiter gebildeten Anordnung ist.

Die Ladung ist der Spannung zwischen den Leitern proportional. Die Proportionalitätskonstante, als die wir die Kapazität ansehen können, ist um so größer, je kürzer der Weg des Verschiebungsflusses, also je kleiner der Abstand der Leiter und je größer die Fläche ist.

Eine Anordnung von zwei Leitern, die eine große Kapazität besitzt, nennt man einen Kondensator. Einen solchen bilden z. B. die Leiter eines langen Kabels, oder die Leiter des Kabels und seine metallische Schutzhülle; bei großen Längen kommen hier bedeutende Kapazitäten in Frage. Da ferner die Ladungen um so größer sind, je höher die Spannung ist, spielt die Kapazität besonders in der Hochspannungstechnik eine große Rolle.

Beispiele. 1. Konzentrisches Kabel (s. Fig. 13). Es seien r_1 und r_2 Außenradius des Innenleiters und Innenradius des Außenleiters. Besitzt der Außenleiter keine Spannung gegen Erde, so verläuft das Feld ganz innerhalb des von diesen Radien begrenzten Raumes, da im Innern der Leiter das Feld Null ist. Die Verschiebungslinien stehen senkrecht auf den Leitern und somit radial. Ist q die Ladung der Leiter, so ist der Verschiebungsfluß durch eine Zylinderfläche vom Radius r und der Länge l

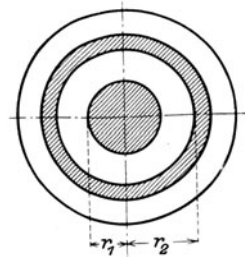


Fig. 13.

$$\mathfrak{D} 2\pi r l = q$$

$$\mathfrak{D} = \frac{q}{2\pi r l}.$$

Die Verschiebung nimmt mit wachsendem Abstand von der Achse ab. Bilden wir nun nach Gl. 32

$$p = \int \frac{4\pi}{\epsilon} \mathfrak{D} dl = \frac{4\pi q}{2\pi \epsilon l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{2q}{\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{q}{p} = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \dots \dots \dots (36)$$

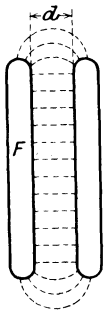


Fig. 14.

2. Ein Plattenkondensator (Fig. 14). Zwischen zwei Flächen von großer Ausdehnung, die überall in sehr kleinem Abstand d voneinander entfernt sind, kann das Feld als homogen angesehen werden, d. h. die Verschiebungslinien laufen parallel und die Verschiebung ist konstant. Nur am Rande weicht der Verlauf, wie die Figur zeigt, davon ab. Sieht man von der Randwirkung ab, was bei kleinem Abstand und großer Fläche keinen wesentlichen Fehler ergibt, so kann der ganze Raum zwischen den Platten als eine Verschiebungsröhre von dem Querschnitt F und der Länge d betrachtet werden, die Kapazität ist daher

$$C = \frac{\epsilon F}{4\pi d} \dots \dots \dots (37)$$

Einheit der Kapazität. Die berechnete Kapazität ist die elektrostatische, deren Dimension eine Länge, deren Einheit im absoluten elektrostatischen Maßsystem ein Zentimeter ist. Die elektromagnetisch gemessene Kapazität berechnet sich aus der elektrostatischen, durch Division durch v^2 , worin $v = 3 \cdot 10^{10}$ die Lichtgeschwindigkeit ist. Die Dimension der elektromagnetisch gemessenen Kapazität ist daher $l^{-1} t^2$. Die praktische Einheit der Kapazität ist gleich 10^{-9} absoluten elektromagnetischen Einheiten und heißt ein Farad. Der 10^6 te Teil davon wird ein Mikrofarad (Mf) genannt.

Es wird daher z. B. für den Plattenkondensator:

$$C = \frac{\epsilon F}{4\pi d 9 \cdot 10^{11}} \text{ Farad} \dots \dots \dots (37a)$$

oder

$$C = \frac{\epsilon F}{4\pi d 9 \cdot 10^5} \text{ Mikrofarad} \dots \dots \dots (37b)$$

Energie des elektrischen Feldes. Die Energie, die in einem elektrischen Felde aufgespeichert ist, ist nach Maxwell

$$U_e = \int \frac{\mathfrak{E} \mathfrak{D}}{2} d\tau,$$

worin das Volumenintegral über den ganzen Raum auszudehnen ist, in dem Verschiebungsröhren bestehen. Für ein Volumenelement einer Verschiebungsröhre vom Querschnitt f_x und der Länge dl ist $\mathfrak{D}_x f_x = q_x$ der Verschiebungsfluß, und die Energie der Röhre

$$U_x = \int \frac{\mathfrak{E} dl}{2} q_x = \frac{p}{2} q_x,$$

worin p die Spannung zwischen den beiden Leitern ist, an denen die Verschiebungsröhre beginnt bzw. endet. Der Energiegehalt des ganzen Feldes ist daher

$$U_e = \frac{pq}{2},$$

oder nach Gl. 35

$$U_e = \frac{p^2}{2} C \dots \dots \dots (38)$$

Ladung und Entladung eines Kondensators. Ändert man die Spannung zwischen den Belegungen eines Kondensators um dp , so nimmt seine Ladung nach Gl. 35 um

$$dq = C dp$$

zu oder ab, je nachdem die Spannung steigt oder fällt. Der Strom der hierbei in der Zuleitung fließt, ist

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dp}{dt} \dots \dots \dots (39)$$

Für eine Gleichspannung ($p = \text{konst.}$) ist daher $i = 0$, d. h. in einem Gleichstromkreis ist der Kondensator eine Unterbrechung. Anders ist es für eine Wechselspannung.

Während des Steigens der Spannung von Null bis p wird die Energie $\frac{1}{2} p^2 C$ in dem Kondensator aufgespeichert, dem Stromkreis wird dabei von der Stromquelle in jedem Augenblick eine Leistung

$$w = \frac{dU_e}{dt} = pC \frac{dp}{dt} = pi$$

zugeführt. Nimmt die Spannung von p bis auf Null wieder ab, so verschwindet das elektrische Feld, und die in ihm aufgespeicherte Energie wird an die Stromquelle zurückgegeben, der Kondensator gibt in jedem Augenblick die Leistung zurück

$$w = -\frac{dU_e}{dt} = -pC \frac{dp}{dt} = -pi.$$

Ist die Spannung, mit der der Kondensator geladen wird, einwellig, so wächst sie in der ersten Viertelperiode von Null bis p_m , um in

der zweiten Viertelperiode von p_m auf Null zu fallen. In der ersten Viertelperiode wird daher die Energie $\frac{1}{2} p_m^2 C$ im Dielektrikum des Kondensators angesammelt und in der zweiten wieder zurückgegeben. In der ersten wird dem Stromkreis von der Stromquelle Leistung zugeführt, in der zweiten genau ebenso viel wiedergegeben. Die mittlere Leistung in der halben Periode ist daher Null.

Für $p = p_m \sin \omega t$ ist der Ladestrom des Kondensators

$$i = C \frac{dp}{dt} = C \omega p_m \cos \omega t = C \omega p_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

er ist ein einwelliger Strom von der Amplitude

$$i_m = p_m \omega C,$$

der der Spannung am Kondensator um 90° in der Phase voreilt, denn nach Gl. 38 ist ja der Ladestrom so lange positiv, wie die Spannung steigt, und negativ (Entladestrom), wenn sie fällt. Daraus folgt ebenfalls, daß die mittlere dem Kondensator zugeführte Leistung Null ist.

9. Einwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

Ist in einem Stromkreis (s. Fig. 15) ein Kondensator C mit einer Drosselspule von der Induktivität L und dem Widerstand R in Reihe geschaltet, so lautet die Spannungsgleichung

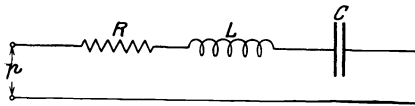


Fig. 15.

$$p = Ri + L \frac{di}{dt} + \int \frac{idt}{C} \quad (40)$$

Für einen einwelligen Strom sei

$$i = i_m \sin \omega t,$$

so wird

$$Ri = Ri_m \sin \omega t$$

$$L \frac{di}{dt} = \omega L i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\int \frac{idt}{C} = - \frac{i_m}{\omega C} \cos \omega t = - \frac{i_m}{\omega C} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$p = i_m R \sin \omega t + i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]$$

$$= p_m \sin (\omega t + \varphi) \dots \dots \dots (41)$$

Die Spannung erscheint hier aus zwei Teilen zusammengesetzt:

$i_m R \sin \omega t$ ist in Phase mit dem Strom und überwindet den Ohmschen Widerstand, $i_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$ eilt dem Strom um 90° vor und wird teils zur Überwindung der EMK der Selbstinduktion, teils als Ladespannung des Kondensators verbraucht, und zwar tritt die Differenz dieser Spannungen in Rechnung, da die erste dem Strom um 90° voreilt, die zweite ihm um 90° nacheilt. Der Effektivwert der Spannung ist daher

$$P = J \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \dots \dots (42)$$

die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \dots \dots \dots (42a)$$

Selbstinduktion und Kapazität wirken in dem Stromkreis einander insofern entgegen, als die erste den Strom gegen die Spannung verzögert, die zweite ihn in Voreilung bringt. Dies rührt daher, daß die Energien, die in dem magnetischen Felde der Selbstinduktion und in dem elektrischen Felde der Kapazität in Schwingungen versetzt werden, zu verschiedenen Zeiten von der Stromquelle aufgenommen und an diese zurückgegeben werden. Die momentane Leistung ist, wenn die Spannungsgleichung mit $i_m \sin \omega t$ multipliziert wird,

$$w = p i = i_m^2 R \sin^2 \omega t + i_m^2 \omega L \sin \omega t \cos \omega t - \frac{i_m^2}{\omega C} \sin \omega t \cos \omega t.$$

Die beiden letzten Teile haben stets entgegengesetztes Vorzeichen, d. h. während vom Strom Energie im magnetischen Feld der Selbstinduktion aufgespeichert wird, wird solche aus dem elektrischen Feld des Kondensators abgegeben, und umgekehrt. Nur die Differenz der momentanen Leistungen wird zugeführt und außerdem der Stromwärmeverlust. Die beiden Felder laden sich zum Teil gegenseitig. Vollständig tritt dies ein, wenn

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \dots \dots \dots (43)$$

ist. Hierbei sind die momentanen Leistungen von Selbstinduktion und Kapazität entgegengesetzt gleich, vom Netz wird in jedem Augenblick nur der Stromwärmeverlust zugeführt und der Stromkreis verhält sich dem Netz gegenüber wie ein rein Ohmscher Widerstand. Aus Gl. 42 und 42a wird hierbei $P = JR$ und $\operatorname{tg} \varphi = 0$.

Diesen Fall bezeichnet man als Resonanz.

Für gegebene Werte von L und C tritt sie bei einer bestimmten Periodenzahl ein, nämlich wenn

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

oder

$$c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \dots \dots \dots (44)$$

ist. Obwohl hierbei die Spannung am ganzen Stromkreis nur gleich dem Ohmschen Spannungsabfall ist, können dennoch sehr bedeutende Spannungen am Kondensator wie an der Selbstinduktion auftreten.

Beispiel. Es sei $R = 10$ Ohm, $L = 1$ Henry. Bei $c = 50$ Perioden tritt Resonanz ein für:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(100\pi)^2} = 1,015 \cdot 10^{-5} \text{ Farad} = 10,15 \text{ Mf.}$$

Für einen Strom von 100 Amp. wird daher die Spannung am ganzen Stromkreis 1000 Volt, am Kondensator besteht aber die Spannung

$$\frac{J}{\omega C} = \frac{100 \cdot 10^5}{2\pi \cdot 50 \cdot 1,015} = 31400 \text{ Volt.}$$

Hierauf beruht die Gefahr der Resonanz.

Die Größe $\frac{1}{\omega C}$ hat die Dimension eines Widerstandes und wird ebenfalls als Reaktanz bezeichnet. Zum Unterschied gegen die Reaktanz der Selbstinduktion setzt man, falls beide vorkommen,

$$\omega L = X_i = \text{induktive Reaktanz,}$$

$$\frac{1}{\omega C} = X_c = \text{kapazitive Reaktanz.}$$

In dem betrachteten Stromkreis ist die resultierende Reaktanz

$$X = X_i - X_c,$$

und die Impedanz

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Drittes Kapitel.

Graphische und analytische Methoden.

10. Darstellung von Wechselströmen durch Vektoren. — 11. Symbolische Darstellung von Wechselströmen. — 12. Wechselstromdiagramme. — 13. Inversion.

10. Darstellung von Wechselströmen durch Vektoren.

Die Projektionen eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen festen Punkt rotierenden Radiusvektors auf eine feste Achse beschreiben bekanntlich die Ordinaten einer Sinuskurve.

Stellt daher die Länge OP des rotierenden Vektors Fig. 16 die Amplitude eines Wechselstromes i_m dar, und ist die Winkelgeschwindigkeit seiner Drehung gleich der Kreisfrequenz ω , so sind die Projektionen OA auf die zur Anfangslage OX senkrechte Richtung OY

$$OA = i = i_m \sin \omega t$$

die Augenblickswerte des Stromes.

Für einen zweiten Vektor $OQ = i'_m$, der gegen OP um einen Winkel φ im Sinne der Voreilung verschoben ist, wird ebenso

$$OB = i' = i'_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Die beiden Vektoren OP und OQ können also als Symbole zweier Wechselströme von gleicher Frequenz betrachtet werden, deren Amplituden i_m und i'_m sind, und die gegeneinander die Phasenverschiebung φ haben.

Anstatt nun die Vektoren rotieren zu lassen, kann man sie auch feststehend denken, und die Gerade, auf die sie projiziert

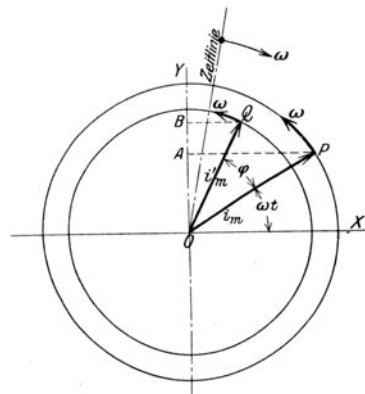


Fig. 16.

werden, sich im umgekehrten Sinne drehen lassen; diese Gerade heißt die Zeitlinie. Der Vektor des voreilenden Stromes ist, wenn man die Drehrichtung der Vektoren zugrunde legt, im Sinne der Vorleistung verschoben. Geht man von der Drehung der Zeitlinie aus, so kommt diese, wie die Figur zeigt, bei der Drehung zuerst in die Lage des voreilenden Vektors.

Beliebig viele Ströme und Spannungen sind also durch die Länge ihrer Vektoren und durch die Winkel, die sie bilden, in ihrer Größe und Phase gegeneinander eindeutig bestimmt. Voraussetzung ist dabei, daß die Ströme und Spannungen gleiche Frequenz haben, nur solche lassen sich in einem Diagramm zusammenstellen. Über die Frequenz selbst sagt das Diagramm nichts aus.

Praktisch ist es zweckmäßig, die Länge der Vektoren in dem gewählten Maßstab gleich den Effektivwerten zu machen, weil diese gemessen werden; beim Übergang zu den Augenblickswerten sind dann die Projektionen mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren.

Da es bei der geometrischen Darstellung nur auf die Länge der Vektoren ankommt und auf die Winkel, die sie miteinander bilden, kann man jeden Vektor in dem Diagramm parallel mit sich selbst verschieben.

Hiervon macht man Gebrauch bei der graphischen Addition von Strömen. Die Summe zweier Ströme

$$i_1 + i_2 = i$$

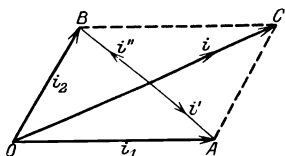


Fig. 17.

ergibt sich (s. Fig. 17) durch Parallelverschiebung des Vektors OB des Stromes i_2 parallel mit sich selbst nach AC an den Endpunkt des Vektors OA des Stromes i_1 , oder, da die Reihenfolge bei der Addition gleichgültig ist, durch Verschiebung des Vektors OA des Stromes i_1 nach BC an

den Endpunkt B des Vektors OB des Stromes i_2 .

Der Vektor OC des Summenstromes i ist also die Diagonale des von den Vektoren der Teilströme gebildeten Parallelogrammes.

Da die Differenz zweier Ströme

$$i_1 - i_2 = i'$$

gleich der Summe aus i_1 und dem negativ genommenen Wert von i_2 ist, ist das Parallelogramm von B aus erst bis C im Sinne von i_1 und dann bis A im negativen Sinne von i_2 zu durchlaufen, und es wird die Diagonale BA der Vektor des Differenzstromes i' .

Der Vektor des Differenzstromes

$$i_2 - i_1 = i''$$

wird analog dargestellt durch die im Sinne AB durchlaufene Diagonale.

Differentialquotient und Zeitintegral eines Vektors. In den Spannungsgleichungen von Wechselströmen (s. Gl. 20a und 40) kommt der Differentialquotient des Stromes nach der Zeit und das Zeitintegral über einen Wechselstrom vor.

Da

$$\frac{di}{dt} = \frac{d(i_m \sin \omega t)}{dt} = \omega i_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

ist, erhält man den Vektor, der den Differentialquotienten eines Stromes darstellt, indem man die Länge des Stromvektors im Verhältnis $\omega:1$ vergrößert und ihn um 90° nach vorwärts dreht.

Da ferner

$$\int i dt = \int i_m \sin \omega t dt = \frac{i_m}{\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

ist, erhält man den Vektor des Zeitintegrals, indem man den Vektor des Stromes im Verhältnis $1:\omega$ verkleinert und ihn um 90° zurückdreht.

Beispiele. Für eine Spule vom Widerstand R und der Induktivität L war (s. Gl. 20a)

$$p = iR + L \frac{di}{dt}.$$

An den Vektor $OA = JR$ (Fig. 18), der in die Richtung des Stromes fällt, reiht sich der um 90° dagegen voreilende Vektor $AB = J\omega L$, die Schlußlinie OB ist der Vektor der Klemmenspannung P , die dem Strom um den Winkel φ voreilt. Es folgt aus der Figur

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{J\omega L}{JR} = \frac{\omega L}{R}.$$

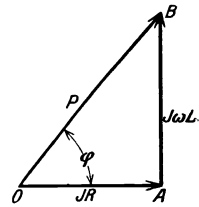


Fig. 18.

Ist die Drosselspule mit einem Kondensator von der Kapazität C in Reihe geschaltet, so lautete die Spannungsgleichung (s. Gl. 40)

$$p = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Hier reiht sich in Fig. 19 an den Vektor $OA = JR$ in Richtung des Stromes der um 90° dagegen voreilende Vektor $AB = J\omega L$ und an diesen der gegen den Strom um 90° nacheilende Vektor

$$BC = \frac{J}{\omega C}.$$

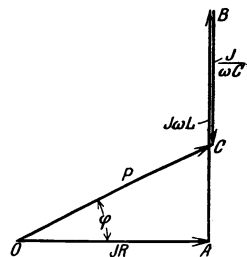


Fig. 19.

OC ist der Vektor der Klemmenspannung und es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Verändert man die Größe der Kapazität, so bewegt sich der Endpunkt C des Vektors der Klemmenspannung auf der Geraden AB . Wenn er in A liegt, ist die Spannung mit dem Strom in Phase, hierbei ist

$$\frac{J}{\omega C} = J \omega L.$$

Dies ist der früher, s. S. 27, behandelte Fall der Resonanz. Wird $\frac{J}{\omega C} > J \omega L$, so liegt C unterhalb A , dann eilt der Strom der Klemmenspannung vor.

11. Symbolische Darstellung von Wechselströmen.

Die Darstellung von Wechselstromgrößen durch Vektoren kann auch analytisch durchgeführt werden.

Vektoren werden hierbei durch große deutsche Buchstaben bezeichnet. Ein Strom vom Effektivwert J wird z. B. durch einen Vektor \mathfrak{J} dargestellt. J ist der Betrag des Vektors \mathfrak{J} .

Drehung der Vektoren. Wird ein Vektor \mathfrak{J} um 180° gedreht, so gelangt er in die entgegengesetzte Richtung und wird hier mit $-\mathfrak{J}$ bezeichnet. Eine Drehung um 180° wird also in der symbolischen Darstellung durch die Multiplikation mit -1 bezeichnet. Die Drehung um 180° entsteht durch zweimalige Drehung um 90° ; es folgt also, daß die Drehung um 90° zu bezeichnen ist durch Multiplikation mit

$$\sqrt{-1} = j,$$

d. h. mit der komplexen Einheit. Hierbei kann der Wurzel das positive oder negative Vorzeichen, je nach der Drehrichtung, beigelegt werden.

Es werde festgesetzt, daß eine Drehung um 90° im Sinne der Voreilung mit $+j$, im Sinne der Verzögerung mit $-j$ bezeichnet werde. Diese Schreibweise ist die in der Physik allgemein gebräuchliche.

Ein Vektor $j\mathfrak{J}$ ist also ebensogroß wie der Vektor \mathfrak{J} , aber gegen diesen um 90° nach vorwärts gedreht.

Addition und Subtraktion von Vektoren. Die Addition von zwei Wechselströmen i_1 und i_2 , die durch ihre Symbole \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 bezeichnet sind, ergibt einen neuen Vektor

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2.$$

\mathfrak{S} ist die Diagonale des aus \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 gebildeten Parallelogramms (s. Fig. 17, S. 30).

Ebenso ergibt die Subtraktion der Vektoren \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 einen neuen Vektor

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2.$$

Multiplikation eines Vektors mit einer komplexen Zahl. Ein besonderer Fall der Addition ist der, daß zwei Vektoren zu addieren sind, deren Beträge proportional dem Betrag eines anderen (Ausgangs-) Vektors sind, und von denen der eine in die Richtung des Ausgangsvektors, der andere in die dazu senkrechte Richtung fällt. Sei \mathfrak{S} der Ausgangsvektor, so ist $a\mathfrak{S} = OA$ (s. Fig. 20) ein neuer Vektor, der a mal so lang wie \mathfrak{S} ist und in die gleiche Richtung fällt; ferner ist $jb\mathfrak{S} = AB$ ein Vektor, der b mal so groß ist wie \mathfrak{S} und um 90° dagegen nach vorwärts gedreht ist. Die vektorielle Summe aus beiden ergibt den neuen Vektor $\mathfrak{P} = OB$. Er ist

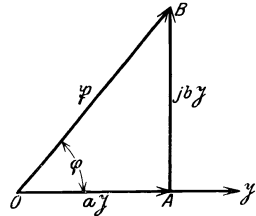


Fig. 20.

$$\mathfrak{P} = a\mathfrak{S} + jb\mathfrak{S} = (a + jb)\mathfrak{S}.$$

Durch Multiplikation eines Vektors mit einer komplexen Zahl ergibt sich also ein neuer Vektor. Andererseits sieht man, wenn die Gleichung in der Form geschrieben wird:

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{S}} = a + jb,$$

daß das Verhältnis zweier Vektoren ausgedrückt wird durch eine komplexe Zahl.

Da die Längen der Vektoren die Effektivwerte darstellen, ist der Effektivwert des neuen Vektors

$$P = OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = J\sqrt{a^2 + b^2} \dots (45)$$

und die Phasenverschiebung zwischen P und J ist

$$\text{tg } \varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{bJ}{aJ} = \frac{b}{a} \dots (46)$$

Sind also zwei Vektoren \mathfrak{P} und \mathfrak{S} gegeben, so bildet man den

Quotienten $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{S}}$ und zerlegt ihn in den reellen Teil a und den imaginären Teil b . Das Verhältnis der Effektivwerte ergibt sich dann aus Gl. 45 und die Phasenverschiebung durch Gl. 46.

Setzt man

$$\begin{aligned} OB^2 &= r^2 = a^2 + b^2 \\ r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi &= \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \end{aligned}$$

so ist nach dem Satz von Moivre

$$a + jb = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \varepsilon^{j\varphi},$$

worin ε die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Es ist daher

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S}(a + jb) = \mathfrak{S} r \varepsilon^{j\varphi}.$$

Der Vektor $\mathfrak{S} r \varepsilon^{j\varphi}$ entsteht also aus dem Vektor \mathfrak{S} , indem man diesen im Verhältnis $r:1$ vergrößert und um φ nach vorwärts dreht. Setzt man analog

$$\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{B}}{r \varepsilon^{j\varphi}} = \frac{\mathfrak{B}}{r} \varepsilon^{-j\varphi},$$

so ergibt sich: der Vektor $\frac{\mathfrak{B}}{r} \varepsilon^{-j\varphi}$ entsteht aus dem Vektor \mathfrak{B} , indem man diesen im Verhältnis $1:r$ verkleinert und um φ nach rückwärts dreht.

Differentialquotient eines Vektors nach der Zeit und Zeitintegral. In der Zeit dt dreht sich der Vektor \mathfrak{S} um den Winkel ωdt und gelangt (s. Fig. 21) in die Lage \mathfrak{S}' . Es ist

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + PP'.$$

Hierin ist die Länge $PP' = J \omega dt$, und da sie senkrecht auf \mathfrak{S} steht, symbolisch bezeichnet durch $j \mathfrak{S} \omega dt$. Es wird also

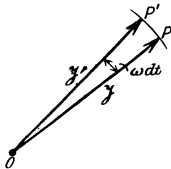


Fig. 21.

$$d\mathfrak{S} = j \omega \mathfrak{S} dt$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{S}}{dt} = j \omega \mathfrak{S} \dots \dots \dots (47)$$

Durch Umkehrung ergibt sich das Zeitintegral eines Vektors

$$\int \mathfrak{S} dt = \frac{\mathfrak{S}}{j \omega} = -\frac{j \mathfrak{S}}{\omega} \dots \dots \dots (48)$$

In der symbolischen Darstellung verschwinden also in den Gleichungen zwischen Strom und Spannung die Differentialquotienten

nach der Zeit und die Zeitintegrale. Hierin liegt die Vereinfachung der Schreibweise bei dieser Darstellung.

Beispiele. Die Gleichung eines Stromkreises mit dem Widerstand R und der Induktivität L lautet:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} &= \mathfrak{S} R + L \frac{d\mathfrak{S}}{dt} \\ &= \mathfrak{S} (R + j \omega L) = \mathfrak{S} (R + j X).\end{aligned}$$

Für den Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} &= \mathfrak{S} R + L \frac{d\mathfrak{S}}{dt} + \int \frac{\mathfrak{S} dt}{C} \\ &= \mathfrak{S} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \\ &= \mathfrak{S} [R + j (X_i - X_c)].\end{aligned}$$

Das Verhältnis von Spannung zu Strom, also die Impedanz, ist in der symbolischen Darstellung eine komplexe Zahl. Der reelle Teil ist der Ohmsche Widerstand, der imaginäre die Reaktanz.

Der symbolische Ausdruck für die Impedanz z ist daher

$$z = (R + j X) \dots \dots \dots (49)$$

Aus der vektoriellen Gleichung erhält man das Verhältnis der Effektivwerte von Strom und Spannung und ihre Phasenverschiebung nach den auf Seite 34 gegebenen Regeln, die für die beiden Beispiele wieder zu den Gl. 22a und b und Gl. 42 und 42a führen.

Rechnung mit komplexen Zahlen. Bei der symbolischen Darstellung sind, wie gezeigt, die Gleichungen zwischen Strömen und Spannungen homogene und lineare Gleichungen, deren Koeffizienten komplexe Zahlen sind.

Es sei daher an die folgenden Regeln für die Rechnung mit komplexen Zahlen erinnert.

Addition und Subtraktion. Zwei komplexe Zahlen werden addiert oder subtrahiert, indem man die reellen Teile für sich und die imaginären Teile für sich addiert bzw. subtrahiert.

$$\text{Ist} \quad r_1 = a_1 + j b_1 \quad \text{und} \quad r_2 = a_2 + j b_2,$$

$$\text{so wird} \quad r = r_1 \pm r_2 = a \pm j b,$$

$$\text{worin} \quad a = a_1 \pm a_2 \quad \text{und} \quad b = b_1 \pm b_2 \quad \text{ist.}$$

Multiplikation. Wir setzen

$$\begin{aligned}r_1 &= a_1 + j b_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) = r_1 e^{j \varphi_1} \\ r_2 &= a_2 + j b_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = r_2 e^{j \varphi_2},\end{aligned}$$

so ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$r = r_1 r_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

oder

$$\begin{aligned} r &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.

Hieraus folgt, daß das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen reell und gleich dem Quadrate des Betrages der Zahlen ist

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2.$$

Division. Analog werden zwei komplexe Zahlen dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Argumente subtrahiert.

In einem komplexen Bruch wird der Nenner reell gemacht, indem man Zähler und Nenner mit der dem Nenner konjugiert komplexen Zahl multipliziert. Es wird

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Potenzieren. Aus der Multiplikation folgt

$$\begin{aligned} p &= r^n = (a + jb)^n = r^n (\cos \varphi + j \sin \varphi)^n \\ &= r^n (\cos n \varphi + j \sin n \varphi) \\ &= r^n e^{jn \varphi}. \end{aligned}$$

Eine komplexe Zahl wird zu einer Potenz erhoben, indem man den Betrag potenziert und das Argument mit dem Exponenten multipliziert.

Radizieren.

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{a + jb} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + j \sin \frac{\varphi}{n} \right) \\ &= \sqrt[n]{r} e^{j \frac{\varphi}{n}} \end{aligned}$$

Man zieht die Wurzel aus einer komplexen Zahl, indem man den Betrag radiziert und das Argument durch den Exponenten dividiert.

Mittelwerte in der symbolischen Darstellung.

Bei der Berechnung der Leistung hat man es mit dem Produkt zweier Vektoren zu tun. Es ist daher in der symbolischen Darstellung zu unterscheiden zwischen dem Produkt von komplexen Zahlen und den Vektorprodukten.

Unter diesem verstehen wir den Mittelwert aus dem Produkt zweier Sinusströme oder eines Sinusstromes und einer Sinusspannung. Dieser Mittelwert ist von der Zeit unabhängig und daher kein Vektor sondern ein Skalar. Wir bezeichnen ihn durch die runde Klammer (\circ)

$$(\mathfrak{P} \mathfrak{I}) = PJ \cos \varphi,$$

worin φ die Phasenverschiebung zwischen P und J ist.

In der Vektorenrechnung bezeichnet man das so definierte Produkt als das innere Produkt.

Es folgt nun für zwei gleiche Vektoren von gleicher Phase

$$(\mathfrak{I} \cdot \mathfrak{I}) = J^2$$

und

$$(j \mathfrak{I} \cdot j \mathfrak{I}) = J^2,$$

dagegen für zwei Vektoren, deren Phasenverschiebung 90° ist,

$$(\mathfrak{I} \cdot j \mathfrak{I}) = 0.$$

Eilt der Vektor \mathfrak{P} gegen \mathfrak{I} um den Winkel φ vor, so bilden \mathfrak{P} und $j \mathfrak{I}$ den Winkel $90^\circ - \varphi$. Daher wird

$$(\mathfrak{P} \cdot j \mathfrak{I}) = PJ \sin \varphi.$$

Dagegen bilden $j \mathfrak{P}$ und \mathfrak{I} den Winkel $90^\circ + \varphi$, und es wird

$$(j \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{I}) = -PJ \sin \varphi$$

und

$$(\mathfrak{P} \cdot j \mathfrak{I}) = -(j \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{I}).$$

12. Wechselstromdiagramme.

Um die Arbeitsweise eines Stromkreises oder einer Maschine bei verschiedenen Arbeitsbedingungen, d. h. bei Veränderung der Konstanten des Stromkreises zu übersehen, hätte man eine große Zahl von Gleichungen für die jeweiligen Konstanten auszurechnen. Statt dessen bedient man sich bequemer der sog. Diagramme, d. h. geometrischer Bilder, in denen die veränderlichen Ströme oder Spannungen als Vektoren dargestellt sind, und bestimmt den geo-

metrischen Ort, den der Endpunkt des Vektors bei Veränderung der Konstanten beschreibt.

Ist der Strom konstant und die Spannung veränderlich, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt des Vektors der Spannung das Spannungsdiagramm. Ist dagegen die Spannung konstant und der Strom veränderlich, so ist der geometrische Ort für den Endpunkt des Vektors des Stromes das Stromdiagramm.

Die konstante Größe ist als die gegebene zu betrachten und ihr Vektor wird in die Ausgangslage gelegt.

Beispiele. 1. In einem Stromkreis mit Widerstand und Selbstinduktion sei R konstant und L veränderlich. Dieser Fall liegt z. B. vor bei einer Drosselspule mit veränderlichem Luftraum oder bei einem Elektromagneten mit beweglichem Kern. Jeder Größe des Luftraumes oder jedem Hub des Elektromagneten entspricht ein anderer Wert der Induktivität L , während der Widerstand R konstant bleibt.

Es soll zunächst das Spannungsdiagramm für konstanten Strom bestimmt werden. Für diesen Stromkreis lautet die Spannungsgleichung nach S. 35

$$\mathfrak{P} = JR + j\mathfrak{J}\omega L$$

und es liegt (s. Fig. 22) $OA = JR$ in Richtung des Stromes und $AB = J\omega L$ eilt um 90° dagegen vor. $OB = Jz = P$ ist der Vektor der Klemmenspannung. Jedem Wert von L und $J\omega L$ entspricht eine andere Länge AB . Der Endpunkt B des Vektors der Klemmenspannung bewegt sich auf der Geraden AB , sie ist also das Spannungsdiagramm.

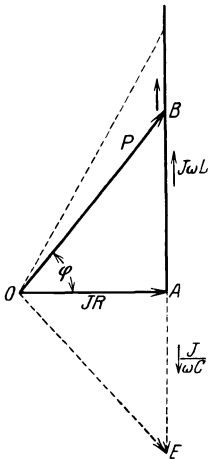


Fig. 22.

Da in dem Dreieck OAB alle Längen dem Strom proportional sind, kann man sie durch J dividieren. Es stellt dann in verändertem Maßstab OA den Widerstand R , AB die veränderliche Reaktanz ωL und OB die Impedanz z dar. Die Gerade AB ist daher auch der Ort des Endpunktes des Vektors der Impedanz, sie ist das Impedanzdiagramm.

Das Spannungsdiagramm für konstanten Strom ist also auch das Impedanzdiagramm, sie unterscheiden sich nur durch den Maßstab.

Es soll nun zweitens die Klemmenspannung P konstant sein und der geometrische Ort für den Strom gesucht werden, wenn R konstant und L veränderlich ist. Dividiert man die Spannungsgleichung durch R , so ergibt sich die Stromgleichung

$$\frac{\mathfrak{P}}{R} = \mathfrak{S} + j\mathfrak{S} \frac{\omega L}{R},$$

die aussagt, daß der gesuchte Vektor vom Betrage J und ein gegen ihn um 90° voreilender Vektor $\frac{J\omega L}{R}$ die konstante Summe $\frac{P}{R}$ ergeben, die in die Richtung der Klemmenspannung fällt.

Da die beiden Vektoren \mathfrak{S} und $j\mathfrak{S} \frac{\omega L}{R}$ senkrecht aufeinander stehen, werden diese beiden Ströme dargestellt durch die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks (Fig. 23), dessen Hypotenuse $OC = \frac{P}{R}$ ist, und zwar ist $OD = J$ und DC der dagegen um 90° voreilende Strom $\frac{J\omega L}{R}$. Da das Dreieck ODC bei D stets rechtwinklig ist,

bewegt sich D auf dem Kreis über OC als Durchmesser. Dieser Kreis ist also das gesuchte Stromdiagramm. Es erübrigt noch, die Größe der Reaktanz darzustellen, bei der sich die Ströme J einstellen, deren Vektoren jeweils von O nach den Kreispunkten D gemessen werden.

Da der Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und Spannung durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$ gegeben ist, dieser Winkel aber andererseits $\angle COD$ ist, braucht man nur auf die Richtung der Spannung etwa in A' ein Lot zu errichten, das die Verlängerung von OD in B' schneidet, dann ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B'A'}{OA'} = \frac{\omega L}{R}.$$

Es stellt also die Strecke $B'A'$ die veränderliche Reaktanz $X = \omega L$ in demselben Maßstab dar, in dem OA' den konstanten Widerstand R darstellt.

Dividiert man die Seiten des Dreiecks ODC durch die konstante Klemmenspannung P , so stellen die Seiten OC , OD und DC der Reihe nach die Leitfähigkeiten $\frac{1}{R}$, $\frac{P}{J} = y = \frac{1}{z}$ und $\frac{X}{R} \cdot y$ dar. OD ist also die resultierende Admittanz y des Stromkreises, der Kreis über dem Durchmesser OC ist das Admittanzdiagramm. Dieses ist identisch mit dem Stromdiagramm, sie unterscheiden sich nur durch den Maßstab.

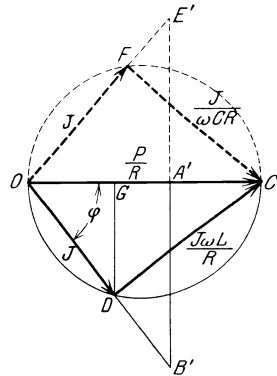


Fig. 23.

2. Ist in einem Stromkreis mit Widerstand und Kapazität der Widerstand konstant, dagegen die Kapazität veränderlich, so unterscheidet sich dieser Fall von dem vorhergehenden dadurch, daß die Kapazitätsreaktanz $X_c = \frac{1}{\omega C}$ das negative Vorzeichen besitzt, der Strom eilt der Klemmenspannung vor. Das Spannungsdiagramm ist in diesem Fall der gestrichelt gezeichnete untere Teil der Geraden AB in Fig. 22, wobei $AE = \frac{J}{\omega C}$ ist. Das Stromdiagramm ist der in Fig. 23 ebenfalls gestrichelt gezeichnete obere Halbkreis über OC , wobei $OF = J$ und $FC = \frac{J}{\omega C R}$ ist.

3. Ist in einem Stromkreis endlich die Reaktanz konstant, dagegen der Widerstand veränderlich, so erhält man das Spannungsdiagramm Fig. 24. Senkrecht zum Vektor des Stromes liegt der Vektor $OA = J\omega L$ der konstanten Reaktanzspannung, und zwar bei positiver Reaktanz (Selbstinduktion) nach vorwärts gedreht. In Richtung des Stromvektors liegt der Vektor $AB = JR$ der veränderlichen Widerstandsspannung. Für jeden Wert von R ergibt sich ein neuer Punkt B und ein neuer Vektor OB der Klemmenspannung. Die Gerade AB ist also das gesuchte Spannungsdiagramm. Für eine Kapazitätsreaktanz ist der Vektor $\frac{J}{\omega C}$ gegen den Strom nach rückwärts gedreht aufzutragen nach OA_1 und das Spannungsdiagramm wird die gestrichelte Gerade A_1B_1 , die parallel AB ist.

Das Stromdiagramm bei konstanter Reaktanz und veränderlichem Widerstand ergibt sich, wenn man die Spannungsgleichung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{I} R + j \mathfrak{I} \omega L$$

durch $j \omega L$ dividiert. Man erhält die Stromgleichung

$$-j \frac{\mathfrak{B}}{\omega L} = -j \frac{\mathfrak{I} R}{\omega L} + \mathfrak{I}.$$

Der Vektor des Stromes J und der gegen ihn um 90° verzögerte Vektor $\frac{JR}{\omega L}$ setzen sich zu dem konstanten Vektor $\frac{P}{\omega L}$ zusammen, der gegen die Klemmenspannung um 90° verzögert ist. Man trägt daher

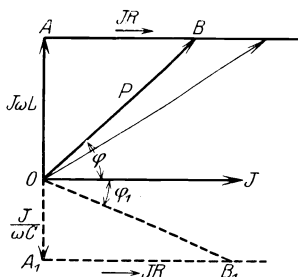


Fig. 24.

(s. Fig. 25) den Vektor $OC = \frac{P}{\omega L}$ um 90° gegen den Vektor OP der Klemmenspannung nach rückwärts gedreht auf und konstruiert über OC das rechtwinklige Dreieck ODC , dann ist OD der Vektor des Stromes J und DC der Vektor des Stromes $\frac{JR}{\omega L}$, der Halbkreis über OC ist das gesuchte Stromdiagramm. Der Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und Spannung ist $DOP = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$. Zieht man $A'B' \perp OC$, so ist auch $\sphericalangle A'B'O = \varphi$ und

$$\frac{OA'}{AB'} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}.$$

Es ist also für jeden Stromvektor OD der Widerstand $R = A'B'$ in demselben Maßstab, in dem OA' die konstante Reaktanz $X = \omega L$ darstellt.

Ganz analog findet man für einen Stromkreis mit konstanter Kapazität und veränderlichem Widerstand als Stromdiagramm den in Fig. 25 gestrichelten Halbkreis OD_1C_1 .

In dem Stromdiagramm findet man auch ein Maß für die Leistung, die dem Stromkreis zugeführt wird. Diese ist $W = PJ \cos \varphi$. Da das Stromdiagramm für konstante Klemmenspannung gilt, ist somit die Leistung auch proportional dem Wattstrom $J \cos \varphi$, also der Projektion OG des Stromvektors OD auf den Spannungsvektor (s. Fig. 23 und 25). Daraus ergibt sich für den Stromkreis mit konstantem Widerstand und veränderlicher Reaktanz (Fig. 23) die größte Leistung, wenn OD gleich dem Kreisdurchmesser, also wenn die Reaktanz $X = 0$ ist. Dann ist

$$W_{max} = \frac{P^2}{R}.$$

Für den Stromkreis mit konstanter Reaktanz und veränderlichem Widerstand (Fig. 25) ist dagegen die Leistung am größten, wenn OG gleich dem Kreisradius, also wenn $\omega L = R$ ist. Sie wird

$$W_{max} = \frac{P^2}{2\omega L}.$$

Hierbei ist $\varphi = 45^\circ$.

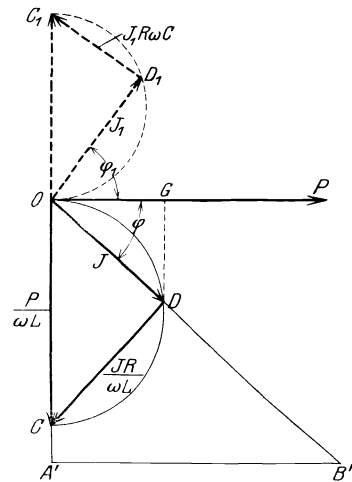


Fig. 25.

13. Inversion.

Bei dem Stromdiagramm (Fig. 23) ist gezeigt, daß dieses in anderem Maßstab auch das Admittanzdiagramm darstellt. Es ist OD die Admittanz y in demselben Maßstab, in dem OC die Leitfähigkeit $\frac{1}{R}$ darstellt. Andererseits war gezeigt, daß dort $A'B'$ die Reaktanz X in demselben Maßstab darstellt, in dem OA' der Widerstand R ist, daher ist auch OB' die Impedanz z .

Bezeichnet man die Maßstäbe der Admittanzen bzw. der Impedanzen mit u und v derart, daß $1 \text{ cm} = u \text{ Siemens}$, $1 \text{ cm} = v \text{ Ohm}$ ist, so ist in Fig. 23

$$u OD = y, \quad u OC = \frac{1}{R}$$

$$v OB' = z, \quad v OA' = R,$$

und es wird

$$OC \cdot OA' = OD \cdot OB' = \frac{1}{uv} = \text{konst.} = I.$$

Zwei Punkte, bei denen wie bei C und A' oder bei D und B' in Fig. 23 das Produkt der Abstände von einem festen Punkt O konstant ist, nennt man *invers.* O ist das *Inversionszentrum*; das konstante Produkt, das mit I bezeichnet wurde, heißt die *Inversionspotenz*.

Beschreibt einer der Punkte (B') eine Kurve, hier die Gerade $A'B'$, so bewegt sich sein inverser Punkt (D) auf der inversen Kurve (Kreis über OC). Wir finden also den Satz: Die inverse Kurve einer Geraden ist ein Kreis, der durch das Inversionszentrum geht, und umgekehrt ist die inverse Kurve eines Kreises, der durch das Inversionszentrum geht, eine Gerade.

Mit Hilfe dieses Satzes hätte man das Admittanz- bzw. das Stromdiagramm aus dem Impedanzdiagramm wie folgt finden können.

Die Gerade $A'B'$ in Fig. 23 ist das Spiegelbild des Impedanzdiagramms bzw. des Spannungsdiagramms, das durch die Gerade AB der Fig. 22 dargestellt ist. In dem Spiegelbild ist nämlich die (positive) Reaktanz um 90° gegen den Widerstand nach rückwärts gedreht.

Man findet also das Stromdiagramm, indem man das Spiegelbild des Spannungsdiagramms in bezug auf den Anfangspunkt der Vektoren als Inversionszentrum inverteert.

Die Umkehrung des Vorzeichens der Reaktanz zum Zweck der Inversion folgt daraus, daß, wenn bei dem Spannungsdiagramm der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung eine Voreilung der

Spannung gegen den Strom bezeichnet und das positive Zeichen hat, er im Stromdiagramm eine Verzögerung des Stromes gegen die Spannung bedeutet und das negative Zeichen hat, und umgekehrt.

Hat man ein Spannungsdiagramm aus einem Stromdiagramm zu invertieren, so verwendet man ebenso nicht das Stromdiagramm selbst, sondern sein Spiegelbild, das man dadurch erhält, daß man den gegen den Wattstrom voreilenden wattlosen Strom nach rückwärts und den nacheilenden wattlosen Strom nach vorwärts gedreht aufträgt. Bei Verwendung des Admittanzdiagramms ist also die positive Suszeptanz um 90° nach rückwärts, die negative Suszeptanz um 90° nach vorwärts gegen die Konduktanz aufgetragen.

Hat man mehrmals zu invertieren, so geht man von dem Spiegelbild eines Diagramms aus, wenn die Zahl der vorzunehmenden Inversionen ungerade ist, und von dem Diagramm selbst, wenn sie gerade ist, weil eben jede einzelne Inversion ein Übergang von einem Spannungsdiagramm zu einem Stromdiagramm oder umgekehrt ist.

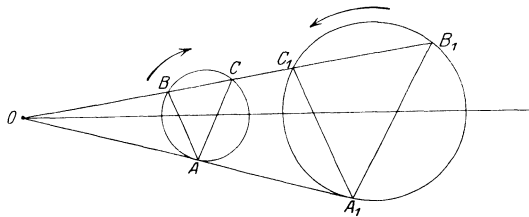


Fig. 26.

Satz: Die inverse Kurve eines Kreises, der nicht durch das Inversionszentrum geht, ist wieder ein Kreis, das Inversionszentrum ist ein Ähnlichkeitspunkt für beide Kreise. Aus Fig. 26 folgt nämlich

$$OB : OC_1 = OC : OB_1$$

$$OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = OA \cdot OA_1 = I.$$

Dies gilt auch, wenn das Inversionszentrum O innerhalb eines Kreises liegt, es liegt dann auch innerhalb des inversen Kreises. Der Umlaufsinn des inversen Kreises ist der umgekehrte wie bei dem Ausgangskreis.

Die Inversion ist zuerst von J. L. la Cour zur Darstellung von Wechselstromproblemen angewendet worden (Arnold, Wechselstromtechnik, Bd. I).

Viertes Kapitel.

Reihenschaltung von Stromkreisen.

14. Grundgesetz für die Reihenschaltung mehrerer Stromkreise. — 15. Der Spannungsabfall in einer Leitung. — 16. Beispiel. — 17. Leistungsmessung nach der Drei-Voltmeter-Methode.

14. Grundgesetz für die Reihenschaltung mehrerer Stromkreise.

Sind mehrere Stromkreise in Reihe geschaltet, deren Widerstände Induktivitäten und Kapazitäten der Reihe nach $R_1 R_2 R_3 \dots$, $L_1 L_2 L_3 \dots$, $C_1 C_2 C_3 \dots$, oder deren Reaktanzen und Impedanzen $X_1 X_2 X_3 \dots$ bzw. $Z_1 Z_2 Z_3 \dots$ sind, so ist die resultierende Klemmenspannung P für einen bestimmten Strom J die geometrische Summe der Teilspannungen $P_1 P_2 P_3 \dots$ der einzelnen Stromkreise.

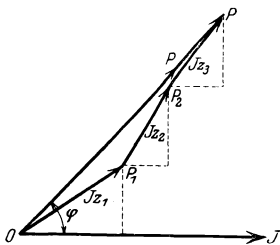


Fig. 27.

Diese Summation wird geometrisch durch den Linienzug $OP_1 P_2 P$ in Fig. 27 dargestellt.

Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{S}(R_1 + jX_1) = \mathfrak{S} \mathfrak{z}_1 \\ \mathfrak{P}_2 &= \mathfrak{S}(R_2 + jX_2) = \mathfrak{S} \mathfrak{z}_2 \\ \mathfrak{P}_3 &= \mathfrak{S}(R_3 + jX_3) = \mathfrak{S} \mathfrak{z}_3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \dots = \mathfrak{S}[R_1 + R_2 + R_3 + \dots + j(X_1 + X_2 + X_3 + \dots)] \\ &= \mathfrak{S}(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 + \dots) = \mathfrak{S} \mathfrak{z} \end{aligned}$$

Die resultierende Impedanz der Reihenschaltung ist daher

$$\mathfrak{z} = \Sigma(\mathfrak{z}_v) = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3 + \dots = R + jX \quad \dots \quad (50)$$

worin $R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = \Sigma(R_v) \quad \dots \quad (50a)$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \Sigma(X_v) \quad \dots \quad (50b)$$

Die resultierende Phasenverschiebung ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{\Sigma(X_v)}{\Sigma(R_v)} \dots \dots \dots (51)$$

Der Linienzug Fig. 27 stellt auch die Summation der Impedanzen dar.

15. Der Spannungsabfall in einer Leitung.

Ein Stromkreis (Fig. 28) werde über eine Leitung gespeist. Es seien R_1 und X_1 Widerstand und Reaktanz der Hin- und Rückleitung, R_2 und X_2 die entsprechenden Größen des Belastungskreises, P_1 und P_2 die Spannungen an der Primär- und an der Sekundärstation, J die Stromstärke.

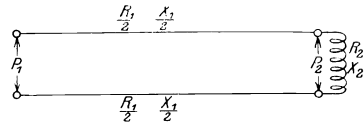


Fig. 28.

Es wird

$$J = \frac{P_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

$$P_2 = J \sqrt{(R_2^2 + X_2^2)} = P_1 \sqrt{\frac{R_2^2 + X_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_2}{R_2}, \quad \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}$$

Fig. 29 stellt das Vektordiagramm der Spannungen dar. Die Sekundärspannung P_2 und der Spannungsabfall Jz_1 setzen sich zum Vektor der Primärspannung P_1 zusammen.

Es ist ersichtlich, daß der Spannungsverlust, d. h. die algebraische Differenz $P_1 - P_2$ kleiner ist als der Spannungsabfall Jz_1 , weil P_2 gegen J um einen kleineren Winkel voreilt als Jz_1 gegen J . Es wird erst $P_1 - P_2 = Jz_1$, wenn P_2 und Jz_1 in die gleiche Richtung fallen, d. h. wenn der Phasenverschiebungswinkel der Belastung $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{X_1}{R_1}$ wird, oder

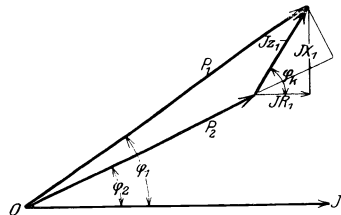


Fig. 29.

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{X_1}{R_1}$$

$$\frac{X_2}{R_2} = \frac{X_1}{R_1}$$

Um den Einfluß der Phasenverschiebung auf den Spannungsabfall zu übersehen, werde der Fall betrachtet, daß die primäre Klemmenspannung P_1 und der Strom J seiner Größe nach konstant und die Phasenverschiebung φ_2 veränderlich ist. Hierbei ist also Jz_1 konstant. In Fig. 30 stellt OAB das Spannungsdreieck für $\varphi_2 = 0$ dar. Hierbei folgt aus der Figur

$$P_{2(\varphi=0)} = \sqrt{P_1^2 - (JX_1)^2} - JR_1.$$

Ist nun J gegen P_2 um φ_2 verzögert, so ist der Vektor Jz_1 um den Punkt B nach rückwärts zu drehen um den Winkel $ABA' = \varphi_2$, OA' ist der zugehörige Wert von P_2 . Eilt J gegen P_2 um φ_2 vor, so ist Jz_1 um diesen Winkel von AB nach $A'B$ zu drehen, und es wird $OA'' = P_2$. Der Endpunkt des Vektors der sekundären Spannung P_2 wandert also bei Veränderung von φ_2 auf dem Kreis um B mit dem Radius $AB = Jz_1$.

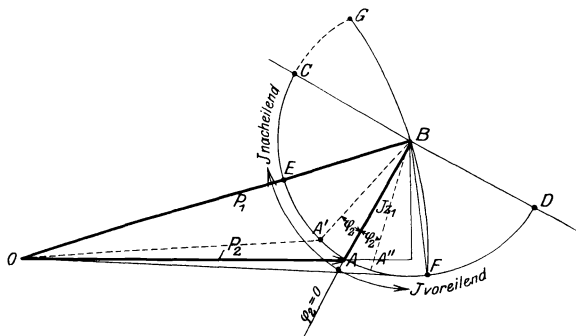


Fig. 30.

Die größten Werte, die φ_2 annehmen kann, sind bei einem Stromempfänger $\pm 90^\circ$, ihnen entsprechen die Punkte C und D auf dem zu AB senkrechten Durchmesser. C entspricht 90° Nacheilung von J gegen P_2 , also rein induktiver Belastung, D mit 90° Voreilung des Stromes gegen die Spannung reiner Kapazitätsbelastung. P_2 ist am kleinsten in Punkt E , hier haben P_2 und Jz_1 gleiche Richtung. P_2 wird bei Voreilung des Stromes auch größer als P_1 , es tritt also Spannungserhöhung ein.

In Punkt F ist $P_2 = P_1$. Die Bedingung hierfür ergibt sich wie folgt. Der Winkel, um den Jz_1 gegen J voreilt, werde mit φ_k bezeichnet, es ist $\varphi_k = \arctg \frac{X_1}{R_1}$. Da nun der Voreilungswinkel von P_2 gegen J φ_2 ist, eilt Jz_1 gegen P_2 um $(\varphi_k - \varphi_2)$ vor. In dem gleichschenkligen Dreieck OFB wird also

$$P_2 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = -\frac{Jz_1}{2}$$

oder, da $P_2 = P_1$ ist,

$$\cos(\varphi_k - \varphi_2) = -\frac{Jz_1}{2P_1}.$$

Das negative Zeichen rechts, das daher rührt, daß die Projektion von P_2 auf Jz_1 die entgegengesetzte Richtung hat, wie diese Strecke, bedingt, daß $(\varphi_k - \varphi_2)$ größer als 90° , d. h. daß φ_2 negativ wird. Es ist

$$-\varphi_2 = \arccos\left(-\frac{Jz_1}{2P_1}\right) - \varphi_k.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werte für φ_2 , einem Stromempfänger entspricht jener Wert, der kleiner als 90° ist. Der zweite Wert, für den $\varphi_2 > \frac{\pi}{2}$ ist, ist der Punkt G .

Berechnung des Spannungsabfalles.

Im allgemeinen ist Jz_1 klein gegen P_2 und P_1 , so daß das Diagramm zur Berechnung des Spannungsabfalles zu ungenau wird. Man berechnet den Spannungsabfall wie folgt. Zerlegt man in Fig. 29 Jz_1 in eine Komponente in Richtung von P_2 und in eine senkrecht dazu, so wird die erste

$$Jz_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = Jz_1 (\cos \varphi_k \cos \varphi_2 + \sin \varphi_k \sin \varphi_2).$$

Hierin ist

$$z_1 \cos \varphi_k = R_1 \quad \text{und} \quad z_1 \sin \varphi_k = X_1,$$

also

$$Jz_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2.$$

Ebenso wird die zweite Komponente

$$\begin{aligned} Jz_1 \sin(\varphi_k - \varphi_2) &= Jz_1 (\sin \varphi_k \cos \varphi_2 - \cos \varphi_k \sin \varphi_2) \\ &= JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2, \end{aligned}$$

daher wird

$$P_1 = \sqrt{(P_2 + JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2)^2 + (JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2)^2} \quad (52)$$

oder

$$P_2 = \sqrt{P_1^2 - (JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2)^2} - (JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2) \quad (53)$$

Mit diesen Gleichungen kann zu gegebenen Werten von P_2 , J , φ_2 , P_1 berechnet oder, wenn P_1 , J und φ_2 gegeben sind, P_2 ermittelt werden. Bei positiven Werten von φ_2 ist die auf P_2 senkrechte Komponente von Jz_1 , nämlich $JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2$ klein,

und da sie quadratisch addiert wird, hat sie keinen großen Einfluß auf den Spannungsabfall. Dann ist nach Gl. 52 angenähert

$$P_1 \cong P_2 + JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2, \dots \quad (52a)$$

woraus folgt, daß auf den Spannungsabfall hauptsächlich der Ohmsche Spannungsabfall des Wattstromes $J \cos \varphi_2$ und der induktive Spannungsabfall des wattlosen Stromes $J \sin \varphi_2$ einen Einfluß haben.

Die Gl. 52 kann zur graphischen Ermittlung der prozentualen Spannungszunahme von den sekundären bis zu den primären Klemmen verwendet werden. Diese werde definiert durch

$$\varepsilon^0/0 = \frac{P_1 - P_2}{P_2} 100 = \left(\frac{P_1}{P_2} - 1 \right) 100.$$

Nach Gl. 52 wird

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_2} &= \sqrt{\left(1 + \frac{JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2}{P_2}\right)^2 + \left(\frac{JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2}{P_2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(1 + \alpha)^2 + \beta^2} \\ \varepsilon &= \frac{P_1}{P_2} - 1 = \sqrt{1 + 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2} - 1. \end{aligned}$$

Durch Reihenentwicklung wird

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2\alpha + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \frac{4\alpha^2 + 4\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}{8} + \dots \\ &= \alpha + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{2} - \dots \end{aligned}$$

Hierin ist das dritte Glied schon vernachlässigbar klein und daher

$$\varepsilon = \alpha + \frac{\beta^2}{2}.$$

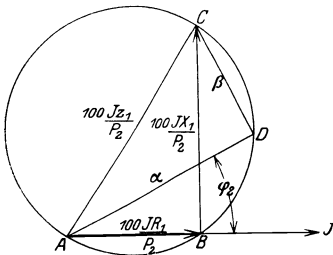


Fig. 31.

Drückt man α und β in $^0/0$ aus,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{JR_1 \cos \varphi_2 + JX_1 \sin \varphi_2}{P_2} 100, \\ \beta &= \frac{JX_1 \cos \varphi_2 - JR_1 \sin \varphi_2}{P_2} 100, \end{aligned}$$

so wird

$$\varepsilon^0/0 = \alpha + \frac{\beta^2}{200}. \quad (54)$$

Graphisch ermittelt man α und

β nach Fig. 31. Man macht

$$AB = \frac{JR_1}{P_2} 100, \quad BC = \frac{JX_1}{P_2} 100, \quad AC = \frac{Jz_1}{P_2} 100$$

und schlägt einen Kreis über AC als Durchmesser. Ein Strahl AD , der gegen J unter dem Winkel φ_2 angetragen wird, fällt somit in die Richtung von P_2 . Daher ist $AD = \alpha$ und $DC = \beta$ in $^\circ/0$ von P_2 .

16. Beispiel.

In einer Arbeitsübertragung über eine Leitung mit Widerstand und Selbstinduktion arbeiten die Stromempfänger mit konstanter Phasenverschiebung φ_2 unabhängig von der Belastung. Die primäre Klemmenspannung P_1 ist konstant.

Verlauf der sekundären Spannung als Funktion des Stromes.

Da φ_2 konstant ist, kann Gl. 52 in der Form geschrieben werden:

$$[P_2 + Jz_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2)]^2 + J^2 z_1^2 \sin^2(\varphi_k - \varphi_2) = P_1^2$$

oder nach Ausmultiplikation

$$P_2^2 + (Jz_1)^2 + 2P_2 Jz_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = P_1^2 \quad \dots (55)$$

Dividiert man durch P_1^2 und setzt $\frac{P_1}{z_1} = J_k$, wobei J_k der Kurzschlußstrom ist, den man bei kurzgeschlossenen sekundären Klemmen erhält, so wird endlich

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 + \left(\frac{J}{J_k}\right)^2 + 2\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{J}{J_k}\right) \cos(\varphi_k - \varphi_2) = 1 \quad \dots (55a)$$

In dieser Gleichung zweiten Grades ist die Beziehung zwischen J und P_2 indirekt durch die Verhältnisse $\frac{P_2}{P_1}$ und $\frac{J}{J_k}$ ausgedrückt. Die Diskriminante der Glieder zweiten Grades ist

$$1 - \cos^2(\varphi_k - \varphi_2),$$

sie ist positiv, da das Quadrat des \cos kleiner oder höchstens gleich eins ist, die Gleichung stellt daher eine Ellipse dar. Trägt man die $\frac{J}{J_k}$ als Abszissen und die $\frac{P_2}{P_1}$ als Ordinaten auf, so sind die Schnittpunkte mit der Y -Achse für $J = 0$, $\frac{P_2}{P_1} = 1$, und mit der X -Achse für $P_2 = 0$, $\frac{J}{J_k} = 1$.

Die Hauptachsen der Ellipse bilden mit den Koordinatenachsen einen Winkel von 45° und sind

$$\frac{1}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\varphi_k - \varphi_2}{2}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\varphi_k - \varphi_2}{2}\right)}.$$

In dem besonderen Falle, daß $\cos(\varphi_k - \varphi_2) = 0$, also $\varphi_2 = \varphi_k \mp 90^\circ$ ist, stellt die Gleichung einen Kreis dar. Nur das obere (—) Zeichen gibt einen Winkel φ_2 , der kleiner als 90° ist, wie es einem Stromempfänger entspricht, und zwar wird hierbei φ_2 negativ. Dieser Fall entspricht einer Verzögerung von P_2 gegen J .

Ist ferner $\cos(\varphi_k - \varphi_2) = 1$, also $\varphi_2 = \varphi_k$, so geht die Gleichung über in

$$\frac{P_2}{P_1} + \frac{J}{J_k} = 1$$

und stellt somit eine Gerade dar.

Für $\varphi_k = 45^\circ$, wobei $R_1 = X_1$ ist, sind in Fig. 32 die Gerade I für $\varphi_2 = 45^\circ$, der Kreis II für $\varphi_2 = -45^\circ$, ferner die Ellipse III für $\varphi_2 = 0$ und $\mp 90^\circ$ aufgetragen (die bei $\varphi_k = 45^\circ$ zusammenfallen), während die Ellipse IV für $\varphi_2 = -90^\circ$, also reine Kapazitätsbelastung gilt.

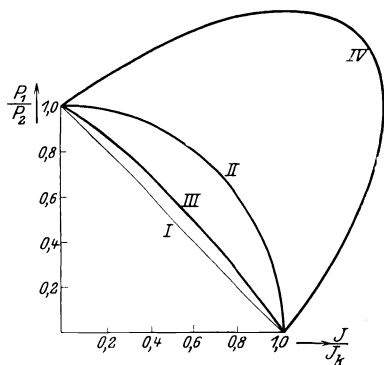


Fig. 32.

Dieses Diagramm gilt allgemein für einen Stromkreis mit konstanter Phasenverschiebung, der von einer Quelle unveränderlicher Spannung über eine konstante Impedanz gespeist wird. Es ist von Oehlschläger zur Darstellung des Spannungsabfalles eines Wechselstromgenerators abgeleitet worden.

Dort entspricht unserem P_1 die induzierte EMK des Generators, dem Leitungswiderstand R_1 der Ohmsche Widerstand und der Leitungsreaktanz X_1 die durch Ankerrückwirkung und Streuung bedingte Reaktanz des Generators. Beim Generator ist allerdings X_1 keine konstante Größe, und daher gilt dort das Diagramm nicht streng.

Maximale Leistung.

Setzt man in Gl. 55 für den Strom $J = \frac{P_2}{z_2}$, so wird

$$P_2^2 = \frac{P_1^2 z_2^2}{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos(\varphi_k - \varphi_2)}$$

und die Leistung an den sekundären Klemmen

$$W_2 = P_2 J_2 \cos \varphi_2 = \frac{P_2^2}{z_2} \cos \varphi_2 = \frac{P_1^2 z_2 \cos \varphi_2}{z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2 \cos(\varphi_k - \varphi_2)}.$$

Diese Leistung wird ein Maximum, wenn

$$\frac{dW_2}{dz_2} = 0,$$

also wenn

$$z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 \cos(\varphi_k - \varphi_2) = z_2 [2z_2 + 2z_1 \cos(\varphi_k - \varphi_2)]$$

oder

$$z_2 = z_1$$

ist. Hierbei ist die Sekundärspannung

$$P_2 = Jz_2 = Jz_1.$$

Die größte Leistung an den Sekundärklemmen ergibt sich somit, wenn die Klemmenspannung P_2 an der Belastung gleich dem Spannungsabfall Jz_1 in der Leistung ist. Dies gilt unabhängig von der Phasenverschiebung φ_2 . Die größte Leistung selbst ist dagegen von ihr abhängig. Durch Einsetzen von $z_2 = z_1$ wird

$$W_{2max} = \frac{P_1^2 \cos \varphi_2}{2z_1 [1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2)]} \dots \dots (56)$$

Das absolute Maximum erhält man aus

$$\frac{dW_{2max}}{d\varphi_2} = 0,$$

wenn

$$-\sin \varphi_2 [1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2)] = \cos \varphi_2 \sin(\varphi_k - \varphi_2)$$

oder

$$\sin \varphi_2 = -\sin \varphi_k$$

$$\varphi_2 = -\varphi_k$$

$$\varphi_k - \varphi_2 = 2\varphi_k.$$

Es wird also in Gl. 56

$$1 + \cos(\varphi_k - \varphi_2) = 2 \cos^2 \varphi_k,$$

und da

$$\cos \varphi_2 = \cos \varphi_k,$$

$$z_1 \cos \varphi_k = R_1,$$

wird

$$W_{2max} = \frac{P_1^2}{4R_1} \dots \dots \dots (57)$$

Stromdiagramm.

Dividiert man die Seiten des Spannungsdreiecks Fig. 29 durch z_1 , so erhält man ein Stromdreieck, das die Gleichung darstellt

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_1} = \frac{\mathfrak{P}_2}{\delta_1} + \mathfrak{S}.$$

Der Strom J und der Strom $\frac{P_2}{z_1}$ haben hiernach die konstante Summe $\frac{P_1}{z_1} = J_k$. Ebenso wie in Fig. 29 Jz_1 gegen P_2 eilt J gegen $\frac{P_2}{z_1}$ um den konstanten Winkel $(\varphi_k - \varphi_2)$ vor. Man trägt (s. Fig. 33) den Vektor der Klemmenspannung P_1 in die Richtung der Y -Achse und $OA = J_k$ um φ_k dagegen verzögert auf, wobei $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{OC}{CD} = \frac{X_1}{R_1}$ ist. Über OA konstruiert man ein Dreieck OBA mit dem Winkel $OBA = 180^\circ - (\varphi_k - \varphi_2)$. Dann stellt OB einen Strom J und BA den um $(\varphi_k - \varphi_2)$ dagegen nacheilenden Strom $\frac{P_2}{z_1}$ dar. Bei Veränderung von J und P_2 bleibt der Winkel OBA konstant, daher bewegt sich Punkt B auf dem Kreis über OA als Sehne. Der halbe Zentriwinkel OMS ist daher auch gleich $(\varphi_k - \varphi_2)$, ferner $\sphericalangle MOS = \frac{\pi}{2} - (\varphi_k - \varphi_2)$, und da $\sphericalangle AOX = \frac{\pi}{2} - \varphi_k$ ist, wird

$$\sphericalangle MOX = \varphi_2.$$

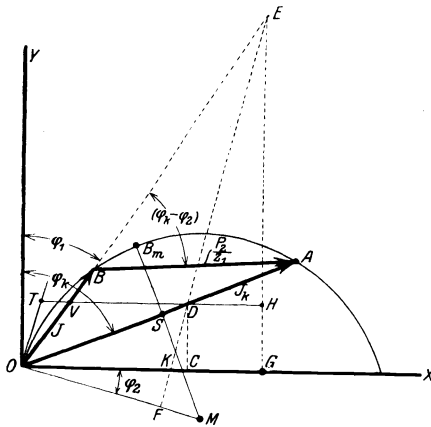


Fig. 33.

Der Radius OM bildet also mit der X -Achse den Winkel φ_2 , und zwar ist er nach rückwärts abzutragen, wenn φ_2 eine Verzögerung von J gegen P_2 bezeichnet, sonst nach vorwärts. Da als zweiter Ort für den Mittelpunkt M das Mittellot MS auf $OA = J_k$ gegeben ist, sind die Mittelpunkte aller Kreise für die verschiedenen Werte von φ_2 leicht zu bestimmen.

Die Vektoren OB von O nach dem Kreisbogen OBA stellen alle Ströme von $J=0$

bis $J=J_k$ nach Größe und Phase φ_1 gegen die Klemmenspannung dar. Es ist

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}.$$

Danach findet man für jeden Strom $J = OB$ die Werte von R_2 und X_2 wie folgt. Es war $OC = X_1$, $CD = R_1$. Fällt man ein Lot DF auf den Radius OM , das die Verlängerung von OB in E

schneidet, und zieht DH parallel OX , EG parallel OY , so ist $OEG = \varphi_1$. Daher

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2} = \frac{OC + CG}{GH + HE}.$$

Folglich ist $CG = DH = X_2$ und $HE = R_2$ im gleichen Maßstab, in dem $OC = X_1$ und $GH = CD = R_1$ ist. OE ist also die resultierende Impedanz des Stromkreises, die Gerade EF das Impedanzdiagramm und dem Kreis invers.

Die Leistung an den primären Klemmen ist

$$W_1 = P_1 J \cos \varphi_1,$$

also P_1 mal so groß wie der senkrechte Abstand eines Kreispunktes B von der X -Achse; man nennt die X -Achse daher die Linie der primären Leistung.

Die Leistung an den sekundären Klemmen ist

$$W_2 = P_2 J \cos \varphi_2.$$

In dem Dreieck OAB ist $OB = J_2$, $BA = \frac{P_2}{z_1}$, und da sie den Winkel $\pi - (\varphi_k - \varphi_2)$ bilden, ist der Inhalt des Dreiecks

$$\frac{1}{2} J_2 \frac{P_2}{z_1} \sin(\varphi_k - \varphi_2).$$

Die Grundlinie des Dreiecks ist $J_k = \frac{P_1}{z_1}$, daher die Höhe

$$J_2 \frac{P_2}{P_1} \sin(\varphi_k - \varphi_2) = \frac{W_2}{P_1} \frac{\sin(\varphi_k - \varphi_2)}{\cos \varphi_2},$$

d. h. der Abstand eines Punktes B von der Geraden OA ist proportional der sekundären Leistung. Sie ist Null, wenn B in O oder in A liegt, im ersten Fall ist $J = 0$, d. h. $z_2 = \infty$, die Leitung ist offen, im zweiten Fall ist $J = J_k$, d. h. $z_2 = 0$, die Leitung ist kurzgeschlossen. Die Linie OA heißt die Linie der sekundären Leistung. Man sieht, daß W_2 am größten ist, wenn B auf dem zu OA senkrechten Radius MB_m liegt. Hierbei ist $OB_m = B_m A$, d. h. $J_2 z_1 = P_2$, wie schon zuvor gefunden (s. S. 51).

Der Wirkungsgrad der Anlage ist das Verhältnis der Leistung an den sekundären Klemmen zur Leistung an den primären Klemmen, es ist

$$\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{J^2 R_2}{J^2 (R_1 + R_2)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Es war

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{HE}{GH} = \frac{DE}{KD}.$$

Bringt man die Verlängerung von HD mit OB in V und mit der Kreistangente OT (die parallel zu KD ist) in T zum Schnitt, so folgt, da

$$\begin{aligned} \triangle OTV &\sim \triangle EDV, \\ \frac{VD}{TV} &= \frac{DE}{KD} = \frac{R_2}{R_1}, \end{aligned}$$

daher
$$\frac{VD}{TD} = \frac{VD}{TV + VD} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \eta.$$

Zieht man also zwischen der Kreistangente in O und der Geraden OA (Linie der sekundären Leistung) eine Parallele TD zur X -Achse (Linie der primären Leistung), so schneidet jeder Vektor OB auf TD eine Strecke VD ab, die sich zur ganzen Strecke TD verhält, wie die sekundäre zur primären Leistung. Die Differenz TV ist in demselben Maßstab der Verlust. In einem anderen Maßstab ist daher der Abstand eines Kreispunktes B von der Kreistangente dem Verlust proportional. Die Kreistangente ist hier die Verlustlinie.

Das hier abgeleitete Diagramm ist ein spezieller Fall des allgemeinen Arbeitsdiagramms eines Wechselstromkreises. Dieses wird in Kap. XII ausführlich behandelt.

17. Leistungsmessung nach der Drei-Voltmeter-Methode.

Ist ein Stromverbraucher in Reihe mit einem Ohmschen Widerstand R geschaltet, so lautet Gl. 55

$$P_1^2 = P_2^2 + (JR)^2 + 2P_2(JR) \cos \varphi_2,$$

und hiermit wird die sekundäre Leistung

$$W_2 = P_2 J \cos \varphi_2 = \frac{P_1^2 - P_2^2 - (JR)^2}{2R} \quad \dots \quad (58)$$

Man mißt also mittels je eines Voltmeters (s. Fig. 34) die Gesamtspannung P_1 , den Spannungsabfall im Widerstand und die Spannung an dem Stromverbraucher und berechnet die Leistung nach Formel 58.

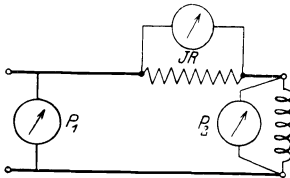


Fig. 34.

Diese Methode ist von Swinburne, Ayrton und Sumpner angegeben worden. Sie hat den Nachteil, daß ein ziemlich großer Widerstand erforderlich ist. Damit die Genauigkeit der Messung groß wird, soll möglichst $JR = P_2$ sein, dann wird aber der

Verlust im Widerstand $J^2 R = P_2 J$, also $\frac{1}{\cos \varphi_2}$ mal so groß wie die zu messende Leistung.

Fünftes Kapitel.

Parallelschaltung von Stromkreisen.

18. Grundgesetz für die Parallelschaltung von Stromkreisen. — 19. Die resultierende Impedanz zweier parallelgeschalteter Impedanzen. — 20. Stromresonanz. — 21. Leistungsmessung nach der Drei-Amperemeter-Methode. — 22. Korrektionsformeln für Leistungsmesser.

18. Grundgesetz für die Parallelschaltung von Stromkreisen.

Sind mehrere Stromkreise parallel geschaltet, so haben alle die gleiche Spannung. Jeder Zweigstrom ergibt sich durch Division der Klemmenspannung durch die Impedanz des Zweiges und der Gesamtstrom ist die geometrische Summe der Zweigströme. Es ist also

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_1} = \mathfrak{P} \eta_1 = \mathfrak{P}(g_1 - jb_1)$$

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_2} = \mathfrak{P} \eta_2 = \mathfrak{P}(g_2 - jb_2)$$

$$\mathfrak{S}_3 = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{z}_3} = \mathfrak{P} \eta_3 = \mathfrak{P}(g_3 - jb_3)$$

.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3 + \dots &= \mathfrak{P} \left(\frac{1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{1}{\mathfrak{z}_2} + \frac{1}{\mathfrak{z}_3} + \dots \right) = \mathfrak{P} \frac{1}{\mathfrak{z}} \\ &= \mathfrak{P} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots) = \mathfrak{P} \eta \\ &= \mathfrak{P} [g_1 + g_2 + g_3 + \dots + j(b_1 + b_2 + b_3 + \dots)]. \end{aligned}$$

Die resultierende Impedanz der Parallelschaltung ergibt sich daher aus

$$\frac{1}{\mathfrak{z}} = \sum \left(\frac{1}{\mathfrak{z}_v} \right) = \frac{1}{\mathfrak{z}_1} + \frac{1}{\mathfrak{z}_2} + \frac{1}{\mathfrak{z}_3} + \dots \quad (59)$$

die resultierende Admittanz ist

$$\eta = \sum (\eta_v) = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots = g - jb \quad (60)$$

worin
$$g = g_1 + g_2 + g_3 + \dots = \Sigma(g_r) \quad (61)$$

$$b = b_1 + b_2 + b_3 + \dots = \Sigma(b_r) \quad (62)$$

Die Phasenverschiebung des resultierenden Stromes ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g} = \frac{\Sigma(b_r)}{\Sigma(g_r)}.$$

Man addiert also die Wattströme und die wattlosen Ströme bzw. die ihnen entsprechenden Konduktanzen und Suszeptanzen und setzt sie geometrisch zu dem resultierenden Strom bzw. zu der resultierenden Admittanz zusammen.

19. Die resultierende Impedanz zweier parallelgeschalteter Impedanzen.

Es ist

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}$$

oder

$$\delta = \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \quad (63)$$

Um diese Impedanz graphisch zu ermitteln, verfährt man wie folgt. Durch Division durch δ_1 wird

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2}.$$

Bezeichnet man die Summe $\delta_1 + \delta_2$ mit δ' und setzt die Phasenwinkel der Impedanzen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi'$, so wird auch

$$\frac{z e^{j\varphi}}{z_1 e^{j\varphi_1}} = \frac{z_2 e^{j\varphi_2}}{z' e^{j\varphi'}}.$$

Diese Gleichung zerfällt in zwei, die erste ist

$$\frac{z}{z_1} = \frac{z_2}{z'},$$

die zweite

$$\varphi - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi'.$$

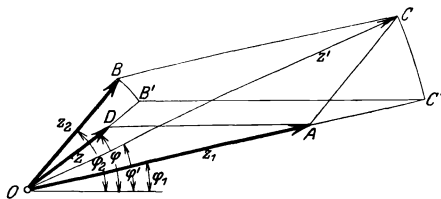


Fig. 35.

Es verhält sich also der Größe nach die resultierende Impedanz z zu der des einen Zweiges, wie die des anderen Zweiges zur Summe, und die entsprechenden Phasendifferenzen sind gleich.

Trägt man daher (s. Fig. 35) $OA = z_1$, $OB = z_2$ nach Größe und Phase φ_1 bzw. φ_2 gegen eine Anfangslage auf, so ist OC ihre Summe z' . Macht man nun das Dreieck ADO ähnlich dem Dreieck CBO , so ist OD die gesuchte Impedanz z nach Größe und Phase, denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt die Erfüllung beider Bedingungen.

Zur Konstruktion braucht man nur das Dreieck OBC nach $OB'C'$ zu legen und durch A die Parallele AD zu $C'B'$ zu ziehen.

Beispiel. In einem Stromkreis seien eine Anzahl Glühlampen in Reihe geschaltet, zu denen je eine Drosselspule parallel geschaltet ist, um beim Durchbrennen einer Lampe eine Unterbrechung des ganzen Stromkreises zu verhindern (s. Fig. 36)¹⁾. Es soll untersucht werden, wie sich beim Versagen einzelner Lampen der Strom und damit die Helligkeit der übrigen Lampen ändert, wenn die Klemmenspannung des ganzen Stromkreises konstant gehalten wird.

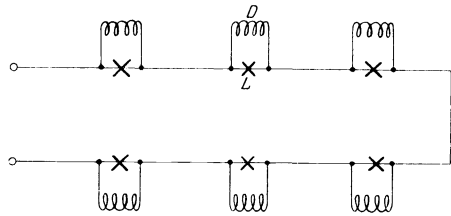


Fig. 36.

Sei R_1 der Widerstand einer Lampe, R_2 , X_2 , z_2 Widerstand, Reaktanz und Impedanz jeder Drosselspule.

Ist z die aus der Parallelschaltung von R_1 und z_2 resultierende Impedanz, J der Gesamtstrom, so ist die Spannung einer Gruppe

$$P' = Jz$$

und der Lampenstrom

$$J_1 = \frac{P'}{R_1} = \frac{Jz}{R_1},$$

d. h. der Lampenstrom ist stets dem Gesamtstrom proportional und ändert sich wie dieser, man braucht daher nur die Änderung des Gesamtstromes zu untersuchen.

Die Aufgabe möge graphisch mittels der Inversion behandelt werden. In Fig. 37 ist $OA = R_1$, $OB = z_2$ (und zwar das Spiegelbild, s. S. 42) und OC die resultierende Impedanz z .

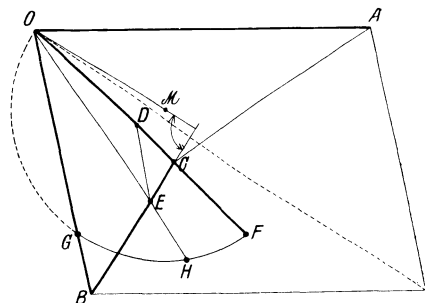


Fig. 37.

¹⁾ Eine solche Anlage ist für die Beleuchtung des Kaiser-Wilhelm-Kanals eingerichtet worden.

Vergrößert man nun den Maßstab auf den n -fachen Betrag, wobei n die Zahl der Gruppen ist, so ist $OC = nz$ die gesamte Impedanz, wenn alle Lampen brennen, und $OB = nz_2$ die Gesamtimpedanz, wenn keine Lampe brennt.

Sind m Lampen erloschen, so sind $(n - m)$ Impedanzen z mit m Impedanzen z_2 zu addieren. Macht man $CD : OC = m : n$, $CD = mz$, so daß $OD = (n - m)z$ ist, und zieht DE parallel zu OB bis zum Schnitt mit CB , so wird $DE = \frac{m}{n} OB = mz_2$. OE ist also die Summe aus $(n - m)$ Impedanzen z und m Impedanzen z_2 . Ändert sich m , so bewegt sich E auf der Geraden CB derart, daß $CE : CB = m : n$ ist. CB ist das Impedanzdiagramm.

Das Stromdiagramm bei konstanter Spannung ist daher der zur Geraden CB inverse Kreisbogen FHG , dessen Mittelpunkt M auf dem Lot von O auf CB liegt. OF stellt den Gesamtstrom nach Größe und Phase dar, wenn alle Lampen brennen, OG wenn keine Lampe brennt und OH wenn m Lampen erloschen sind. H wandert bei Änderung der Zahl m auf dem Kreis von F bis G .

Man sieht, daß bei konstanter Klemmenspannung die Stromänderung sehr bedeutend werden kann. Sie wird um so kleiner, je weniger die resultierende Impedanz $z = OC$ sich von z_2 unterscheidet. Da

$$\delta = \frac{\delta_1 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{\delta_2}{1 + \frac{\delta_2}{\delta_1}},$$

ist dies aber nur der Fall, wenn δ_2 klein gegen δ_1 , d. h. der Strom in der Drosselspule groß gegen den Lampenstrom ist, dann ist der Wirkungsgrad der Anlage schlecht. Es ist daher zweckmäßiger, die Stromquelle nicht auf konstante Spannung, sondern auf konstanten Strom zu regulieren. Wie die Spannung hierbei zu ändern ist, gibt die Impedanzgerade CB an.

20. Stromresonanz.

Von zwei parallelgeschalteten Stromkreisen habe der eine Widerstand und Kapazität, der andere Widerstand und Selbstinduktion (s. Fig. 38). Der erste führt einen Strom, der der Klemmenspannung voreilt, der zweite einen, der ihr nacheilt.

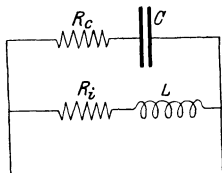


Fig. 38.

Es soll untersucht werden, wann der resultierende aus beiden Strömen gerade mit der Klemmenspannung gleiche Phase hat. Dieser Zustand wird als Stromresonanz bezeichnet.

Sie tritt ein, wenn der voreilende wattlose Strom des ersten Stromkreises gleich dem nacheilenden des zweiten ist, oder wenn die Suszeptanzen beider Stromkreise gleich sind.

Widerstand und Reaktanz des ersten Stromkreises sind R_c und $X_c = \frac{1}{\omega C}$, für den zweiten R_i und $X_i = \omega L$.

Damit die wattlosen Ströme gleich werden, muß daher

$$\frac{X_i}{R_i^2 + X_i^2} = \frac{X_c}{R_c^2 + X_c^2}$$

sein. Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$X_i^2 - X_i \frac{R_c^2 + X_c^2}{X_c} = -R_i^2$$

$$X_i = \frac{X_c^2 + R_c^2 + \sqrt{(X_c^2 + R_c^2)^2 - 4R_i^2 X_c^2}}{2X_c}$$

Für gegebene Widerstände gehören also zu jedem Wert von X_c im allgemeinen zwei Werte von X_i — und umgekehrt —, bei denen Stromresonanz eintreten kann, entsprechend den beiden Wurzeln.

Sind die Widerstände verschwindend klein, so daß man

$$R_i = R_c = 0$$

setzen kann, so wird

$$X_i = X_c, \quad \text{oder} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C},$$

also die gleiche Bedingung, wie für die auf Seite 27 behandelte Spannungsresonanz.

Die Wurzel wird rationell, wenn $R_i = R_c = R$ ist, dann ergeben sich die beiden Bedingungen

$$\text{a) } X_i = X_c,$$

also die gleiche wie oben, und

$$\text{b) } X_i X_c = R^2, \quad \frac{L}{C} = R^2.$$

Diese Bedingung ist ganz unabhängig von der Periodenzahl.

Im ersten Fall sind die beiden Wattkomponenten der Ströme gleich groß und daher der Gesamtstrom

$$J = \frac{2PR}{R^2 + X^2}.$$

Setzt man dagegen in

$$J = P \left(\frac{R}{R^2 + X_i^2} + \frac{R}{R^2 + X_c^2} \right)$$

die Bedingung b) $X_i X_c = R^2$ ein, so wird hier

$$J = \frac{P}{R}.$$

21. Leistungsmessung nach der Drei-Amperemeter-Methode.

Entsprechend der Methode der Leistungsmessung mit drei Voltmetern hat Fleming eine solche mit drei Amperemetern angegeben. Schaltet man zu einem Stromkreis, der bei der Spannung P einen Strom J_1 unter einem Phasenwinkel φ aufnimmt, einen Ohmschen Widerstand R parallel, so nimmt dieser einen Strom $J_2 = \frac{P}{R}$ auf, der gegen J_1 um φ voreilt. Der Gesamtstrom wird

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2 J_1 J_2 \cos \varphi.$$

Die Leistung des Stromes J_1 ist

$$W = P J_1 \cos \varphi = J_1 J_2 R \cos \varphi$$

und daher

$$W = \frac{(J^2 - J_1^2 - J_2^2) R}{2} \quad (64)$$

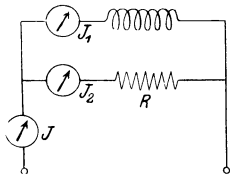


Fig. 39.

Man mißt (s. Fig. 39) die Teilströme und den Gesamtstrom und berechnet danach die Leistung nach Gl. 64.

Die Messung hat aber den gleichen Nachteil wie die mit drei Voltmetern.

22. Korrektionsformeln für Leistungsmesser.

Die meist verwendeten Leistungsmesser beruhen auf dem elektrodynamischen Prinzip. Sie besitzen eine feste, vom Hauptstrom i des zu messenden Kreises durchflossene „Stromspule“, in deren magnetischem Feld eine drehbare Spule schwingt, die den Zeiger trägt, und die im Nebenschluß zu dem zu messenden Stromkreis liegt. Der Nebenschlußstrom i_n hängt von der Spannung ab, und das mittlere Drehmoment ist proportional dem Mittelwert $M(i i_n)$. Der Ausschlag α ist dem Drehmoment proportional. Ist C die Konstante des Instruments, so ist $C \alpha = M(i i_n)$.

Der Hauptstrom sei um φ gegen die Spannung verzögert, der Nebenschlußstrom um φ_n , wobei $\varphi_n = \arctg \frac{\omega L_n}{R_n}$ ist.

L_n ist die Induktivität, R_n der Widerstand der Spannungsspule, so ist

$$C\alpha = M(i i_n) = J J_n \cos(\varphi - \varphi_n) = J \frac{P}{\sqrt{R_n^2 + (\omega L_n)^2}} \cos(\varphi - \varphi_n) \\ = J \frac{P}{R_n} \cos(\varphi - \varphi_n) \cos \varphi_n.$$

Die Leistung ist

$$W = PJ \cos \varphi.$$

Daher wird
$$W = C\alpha R_n \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_n) \cos \varphi_n}.$$

Da
$$\cos(\varphi - \varphi_n) = \cos \varphi \cos \varphi_n + \sin \varphi \sin \varphi_n,$$

so ist nach einer Umformung

$$W = C\alpha R_n \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_n}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_n} \dots \dots \dots (65)$$

Damit der Ausschlag der Leistung genau proportional ist, muß $\operatorname{tg} \varphi_n$ verschwindend klein sein, dies wird durch große Vorschaltwiderstände R_n erreicht.

Die gemessene Leistung bedarf einer weiteren Korrektur, je nachdem die Spannungsspule an die Klemmen der Belastung oder an die Klemmen der Stromquelle geschaltet ist (s. Fig. 40a und b).

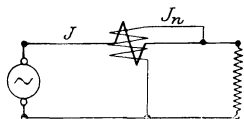


Fig. 40a.

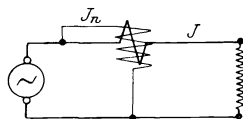


Fig. 40b.

Wird die dem Stromverbraucher zugeführte Leistung gemessen, so ist bei der Schaltung Fig. 40a von der gemessenen Leistung der Verlust in der Spannungsspule $\frac{P^2}{R_n}$ zu subtrahieren, und bei Fig. 40b der Verlust in der Stromspule $J^2 R_s$.

Wird die Leistung des Generators gemessen, so sind die entsprechenden Beträge zu addieren.

Die Genauigkeit erfordert, daß die Schaltung gewählt wird, bei der die Korrektur am kleinsten ist.

Bei großer Spannung und kleinem Strom ist die Korrektur für die Stromspule meist kleiner und Schaltung Fig. 40b zu wählen, bei kleiner Spannung und großem Strom ist die Korrektur für die Spannungsspule meist kleiner und dann die Schaltung Fig. 40a vorzuziehen.

Sechstes Kapitel.

Zusammengesetzte Stromkreise.

23. Zwei parallelgeschaltete Impedanzen in Reihe mit einer dritten. — 24. Die Wheatstonesche Brücke für Wechselstrom. — 25. Erzeugung von 90° Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. — 26. Die Schaltungen von Boucherot.

Unter zusammengesetzten Stromkreisen sollen solche verstanden werden, die z. T. durch Reihenschaltung und z. T. durch Parallelschaltung entstehen. An Hand einiger Beispiele soll die Anwendung der graphischen und symbolischen Rechnungsmethoden weiter geübt werden.

23. Zwei parallelgeschaltete Impedanzen in Reihe mit einer dritten.

In einem Stromkreis sind nach Fig. 41 zwei parallelgeschaltete Impedanzen z_1, z_2 mit einer dritten z_0 in Reihe geschaltet. Es soll untersucht werden, wann die resultierende Impedanz der Schaltung ebenso groß ist, wie die bei Unterbrechung eines Zweiges. Ist dies der Fall, so bleibt der Strom seiner Größe nach unverändert, gleichviel ob der Schalter S geöffnet oder geschlossen ist.

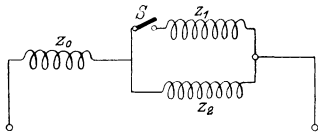


Fig. 41.

Wir lösen die Aufgabe graphisch und tragen (s. Fig. 42) $z_1 = OA$ und $z_2 = OB$ unter ihren Phasenwinkeln φ gegen irgendeine Anfangsrichtung auf.

z_1 sei als Ohmscher Widerstand angenommen, also $\varphi_1 = 0$, so ist die Richtung OA die Anfangsrichtung, und $z_2 = OB$ eilt um $\varphi_2 = \arctg \frac{\omega L_2}{R_2}$ gegen OA vor.

und über diesen Spannungen sind die Spannungsdreiecke konstruiert. Durch Division der Spannungsgleichungen erhält man unter Berücksichtigung der Stromgleichungen

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{z_2}{z_4} \dots \dots \dots (66)$$

Die Phasendifferenz zwischen den Strömen ist

$$E_1 A F_1 = E_2 C F_2$$

oder

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4 \dots \dots \dots (67)$$

Die beiden Bedingungen, die erfüllt sein müssen, können am besten folgendermaßen geschrieben werden:

$$z_1 z_4 = z_2 z_3 \dots \dots \dots (66a)$$

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \dots \dots \dots (67a)$$

Es müssen also nicht nur die Produkte der Beträge der Impedanzen, die in der Brücke gegenüberliegen, gleichgroß sein, sondern es müssen auch die Summen der Phasenwinkel der gegenüberliegenden Impedanzen gleich sein.

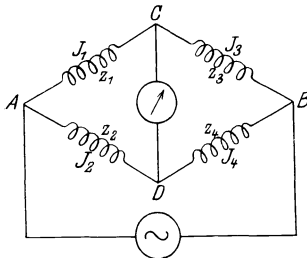


Fig. 43.

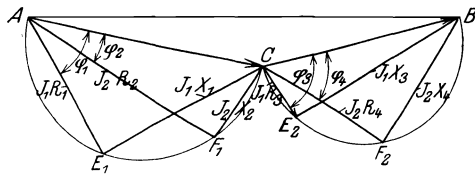


Fig. 44.

Sind die einem beliebigen Knotenpunkt benachbarten Impedanzen Ohmsche Widerstände, also z. B. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, so müssen die Phasenwinkel der beiden anderen Zweige gleich sein, d. h. $\varphi_3 = \varphi_4$. Liegen dagegen in gegenüberliegenden Zweigen der Brücke Ohmsche Widerstände, so sind die Phasenwinkel der beiden anderen auch gleich, sie haben aber entgegengesetztes Vorzeichen, d. h. liegt in dem einen eine Drosselspule, so muß in dem anderen ein Kondensator liegen. Es ergibt sich also die Möglichkeit einerseits Induktivitäten unter sich, andererseits eine Kapazität mit einer Induktivität in der Brücke zu vergleichen.

Vergleich von Induktivitäten. Es liegen in den Zweigen 1 und 2 die Widerstände R_1 und R_2 . In 3 und 4 liegen die Impedanzen

$$z_3 = \sqrt{R_3^2 + (\omega L_3)^2} = R_3 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_3},$$

$$z_4 = \sqrt{R_4^2 + (\omega L_4)^2} = R_4 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_4}.$$

Da nun $\varphi_3 = \varphi_4$ werden soll, wird Gl. 66 a

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \dots \dots \dots (68)$$

und ferner

$$\text{tg} \varphi_3 = \text{tg} \varphi_4$$

$$\frac{\omega L_3}{R_3} = \frac{\omega L_4}{R_4}$$

oder

$$\frac{L_3}{L_4} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2} \dots \dots \dots (69)$$

Man gleicht daher zunächst mit Gleichstrom ab, so daß die Bedingung 68 erfüllt ist; bei der Abgleichung mit Wechselstrom wird dann die zweite Bedingung erfüllt Diese gilt unabhängig von der Periodenzahl.

Vergleich von Induktivität und Kapazität. Hierbei liegen in gegenüberliegenden Zweigen, 1 und 4 Fig. 45, die Ohmschen Widerstände R_1 und R_4 , in 2 der Widerstand R_2 und die Induktivität L , in 3 die Kapazität C und parallel dazu der Widerstand R_3 .

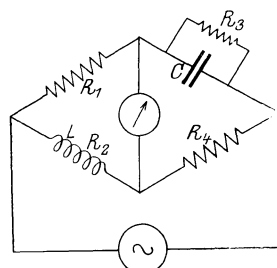


Fig. 45.

Die Admittanz des Zweiges 3 ist

$$y_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 + (\omega C)^2}$$

und

$$\text{tg} \varphi_3 = \omega C R_3 .$$

Die entsprechende Impedanz ist

$$z_3 = \frac{1}{y_3} = \frac{R_3}{\sqrt{1 + (\omega C R_3)^2}} \frac{R_3}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_3}}$$

ferner

$$z_2 = \sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2} = R_2 \sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_2}.$$

Aus Gl. 66 a wird daher

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \sqrt{\frac{1 + \text{tg}^2 \varphi_2}{1 + \text{tg}^2 \varphi_3}}$$

oder, da dem absoluten Wert nach $\varphi_2 = \varphi_3$ sein soll,

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \dots \dots \dots (70)$$

Da $\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_3$, wird ferner

$$\frac{\omega L}{R_2} = \omega C R_3$$

oder

$$\frac{L}{C} = R_2 R_3 = R_1 R_4 \quad (71)$$

Nach Abgleichung der Widerstände mit Gleichstrom wird erst der Gleichung (70) genügt, die Abgleichung mit Wechselstrom ergibt dann die Erfüllung der Beziehung (71). Diese ist auch wieder von der Periodenzahl unabhängig.

25. Erzeugung von 90° Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

Für Meßzwecke (Zähler) ist es oft nötig, eine Phasenverschiebung von genau 90° zwischen dem Strom einer Zählerspule und der Spannung zu erzeugen. Da eine Drosselspule stets einen gewissen Ohmschen Widerstand hat, ist der Strom gegen die Spannung an der Spule um weniger als 90° phasenverschoben, es sind daher besondere Schaltungen erforderlich, von denen einige hier beschrieben werden sollen. (Eine ausführliche Zusammenstellung s. Waltz, ETZ 1905, S. 230.)

Methode von Hummel. (Fig. 46.) Parallel zur Zählerspule, deren Impedanz z_0 sei, liegt ein Ohmscher Widerstand R_1 und in Reihe mit beiden eine Drosselspule z_2 . Es soll nun der Strom J_0 der Zählerspule gegen die ganze Klemmenspannung P um genau 90° verzögert sein.

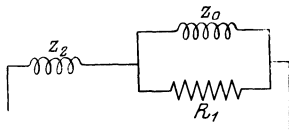


Fig. 46.

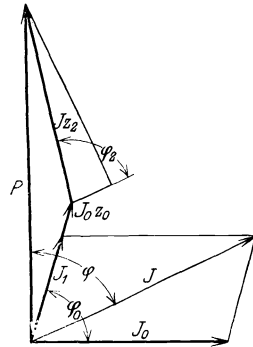


Fig. 47.

Fig. 47 zeigt das Vektordiagramm. Dem Strom J_0 eilt die Spannung $J_0 z_0$ um $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega L_0}{R_0}$ vor, in Phase mit $J_0 z_0$ liegt der Strom J_1 im Widerstand R_1 . Der Gesamtstrom J ist die Summe aus J_0 und J_1 , ihm eilt um $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\omega L_2}{R_2}$ die Spannung $J z_2$ vor, die mit $J_0 z_0$ zusammen die Klemmenspannung P ergibt.

Die Beziehung, die zwischen den Impedanzen bestehen muß, damit P gegen J_0 um 90° voreilt, ergibt sich wie folgt.

Es ist

$$\mathfrak{S}_1 R_1 = \mathfrak{S}_0 \delta_0,$$

daher

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_0 \frac{\delta_0}{R_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_0 \frac{R_1 + \delta_0}{R_1},$$

ferner

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{S}_0 \delta_0 + \mathfrak{S}_1 \delta_2 = \mathfrak{S}_0 \left(\delta_0 + \frac{R_1 + \delta_0}{R_1} \delta_2 \right) = \mathfrak{S}_0 \delta.$$

Das Verhältnis zwischen P und J_0 ist also durch die Impedanz \mathfrak{z} ausgedrückt, in dieser muß nun der Ohmsche Widerstand Null sein. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &= R_0 + jX_0 + \frac{(R_1 + R_0 + jX_0)(R_2 + jX_2)}{R_1} \\ &= \frac{R_1(R_0 + R_2) + R_0 R_2 - X_0 X_2 + j[(R_1 + R_0)X_2 + X_0(R_1 + R_2)]}{R_1}. \end{aligned}$$

Der reelle Teil wird hierin Null, wenn

$$R_1 = \frac{X_0 X_2 - R_0 R_2}{R_0 + R_2} \quad \dots \dots \dots (72)$$

ist. Die Reaktanz ist

$$X = \frac{(R_1 + R_0)X_2 + (R_1 + R_2)X_0}{R_1}.$$

Setzt man den Wert aus (72) für R_1 ein, so wird

$$X = \frac{X_0 z_3^2 + X_2 z_0^2}{X_0 X_2 - R_0 R_2} \quad \dots \dots \dots (73)$$

Methode von Görges. (Fig. 48.) Hier liegen zwei Zähler-
spulen, deren Impedanz z_0 sei, in zwei gegenüberliegenden Zweigen
einer Brücke, in den beiden
anderen sind die gleichgroßen
Ohmschen Widerstände R_1 . Die
Punkte C und D der Brücke
sind durch den Ohmschen Wider-
stand R_2 verbunden, und vor
die Brücke ist eine Impedanz z_3
geschaltet.

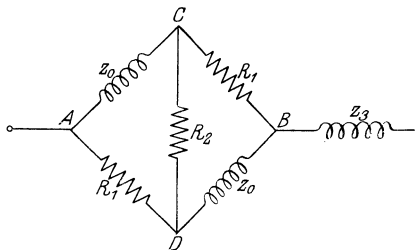


Fig. 48.

Aus der Symmetrie folgt,
daß die Ströme und Spannungen
der beiden Spulen z_0 unter sich
und ebenso die der beiden Widerstände R_1 unter sich gleichgroß und
in Phase sind. In dem Diagramm Fig. 49 bilden also die Span-

nungen der vier Brückenzeige ein Parallelogramm $ACBD$, in dem $AC = DB = J_0 z_0$ ist und gegen J_0 um $\varphi_0 = \arctg \frac{\omega L_0}{r_0}$ voreilt, während $AD = CB = J_1 R_1$ in Phase mit J_1 ist. DC ist die Spannung zwischen den Punkten D und C der Brücke und gleich $J_2 R_2$

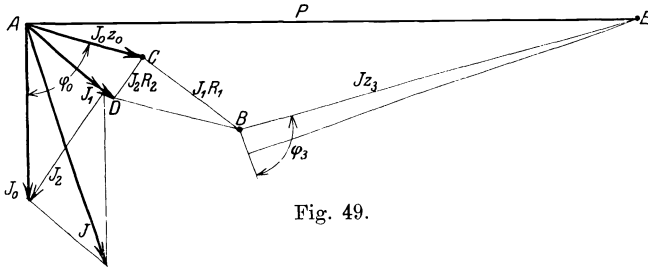


Fig. 49.

in Phase mit dem Strom J_2 , der sich als geometrische Differenz von J_1 und J_0 ergibt. Die Spannung an der ganzen Brücke ist die Summe aus $J_0 z_0$ und $J_1 R_1$ und gleich AB , und der gesamte Strom J die geometrische Summe aus J_0 und J_1 . An AB reiht sich nun die Spannung $J z_3$ der Drosselspule, so daß die Klemmenspannung $P = AE$ dem Strom um 90° voreilt.

26. Die Schaltungen von Boucherot.

Von Boucherot wurden einige Schaltungen angegeben, die unter dem Namen „Kondensator-Transformatoren“ bekannt sind, und die zur Transformierung einer konstanten Spannung in einen konstanten Strom dienen. Hiermit soll in Anlagen mit in Reihe geschalteten Bogen- oder Glühlampen die Unabhängigkeit des Stromes von der Zahl der in Reihe geschalteten Lampen erreicht werden.

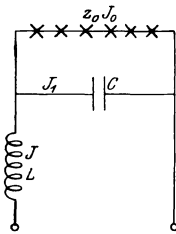


Fig. 50.

Bei der einen Schaltung ist parallel zu dem Lampenstromkreis, dessen Impedanz z_0 sei, nach Fig. 50 ein Kondensator, und vor das Ganze eine Drosselspule geschaltet. Ist J_1 der Ladestrom des Kondensators, so ist

$$-j \frac{\mathfrak{S}_1}{\omega C} = \mathfrak{S}_0 z_0, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{S}_1 = j \mathfrak{S}_0 z_0 \omega C$$

und der Gesamtstrom

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_0 (1 + j \omega C z_0).$$

Die Klemmenspannung ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{I}_0 \mathfrak{z}_0 + j \mathfrak{I} \omega L = \mathfrak{I}_0 [\mathfrak{z}_0 + j \omega L (1 + j \omega C \mathfrak{z}_0)] \\ &= \mathfrak{I}_0 [\mathfrak{z}_0 (1 - \omega^2 LC) + j \omega L] \end{aligned}$$

Macht man

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

so wird

$$\mathfrak{P} = j \mathfrak{I}_0 \omega L.$$

Der Strom ist also unabhängig von der Impedanz z_0

$$J_0 = \frac{P}{\omega L}.$$

Diese Beziehung gilt offenbar nur, wenn der Kondensatorstromkreis und die Drosselspule widerstandsfrei sind.

Setzt man $\omega L = \frac{1}{\omega C} = X$, so ist der Gesamtstrom

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 \left(1 + j \frac{\mathfrak{z}_0}{X} \right),$$

und nach Einsetzen des Wertes von \mathfrak{I}_0

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{P}}{X^2} (\mathfrak{z}_0 - j X)$$

$$J = \frac{P}{X^2} \sqrt{R_0^2 + (X_0 - X)^2}.$$

Er wird am kleinsten für $X_0 = X$.

Ist der Belastungsstromkreis unterbrochen, d. h. R_0 und $X_0 = \infty$, so wird $J = \infty$, beim sekundären Kurzschluß dagegen, $R_0 = X_0 = 0$ wird $J = \frac{P}{X}$.

Bei einer zweiten Schaltung sind Kondensator und Drosselspule der Fig. 50 miteinander vertauscht, die Beziehungen sind ganz analog.

Eine weitere Schaltung ist die Brückenschaltung Fig. 51. Hier sind wegen der Symmetrie die Ströme und Spannungen der beiden Kondensatoren unter sich, und die der beiden Drosselspulen unter sich gleich. Es ist

$$\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}_2$$

und
$$\mathfrak{P} = j \mathfrak{I}_2 \omega L - j \frac{\mathfrak{I}_1}{\omega C}.$$

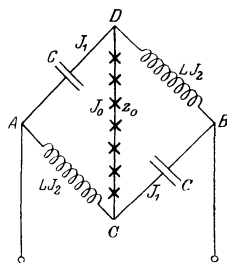


Fig. 51.

Eliminiert man \mathfrak{S}_1 , so wird

$$\mathfrak{P} = j \mathfrak{S}_2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + j \frac{\mathfrak{S}_0}{\omega C}.$$

Wird wieder $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ gemacht, so ist

$$\mathfrak{S}_0 = -j \mathfrak{P} \omega C = -j \frac{\mathfrak{P}}{\omega L}$$

unabhängig von der Impedanz z_0 .

Der Gesamtstrom ist

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 = 2 \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_0.$$

Setzt man wieder $\omega L = \frac{1}{\omega C} = X$, so ist nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz für eine der Maschen ACD oder CBD

$$j \mathfrak{S}_2 X + \mathfrak{S}_0 \mathfrak{z}_0 = -j \mathfrak{S}_1 X = -j (\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_0) X$$

$$2 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_0 \left(1 + j \frac{\mathfrak{z}_0}{X} \right)$$

$$\mathfrak{S} = 2 \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_0 = j \mathfrak{S}_0 \frac{\mathfrak{z}_0}{X} = \frac{\mathfrak{P}}{X^2} \mathfrak{z}_0.$$

Auch hier wird der Primärstrom bei offenen sekundären Klemmen ($z_0 = \infty$) unendlich groß, dagegen wird er bei kurzgeschlossenen sekundären Klemmen ($z_0 = 0$) gleich Null.

Siebentes Kapitel.

Mehrwellige Ströme.

27. Darstellung durch Fouriersche Reihen. — 28. Ermittlung der Amplituden der Fourierschen Reihe. — 29. Besondere Kurvenformen. — 30. Arithmetische Analyse. — 31. Graphische Verfahren. — 32. Die Summe von zwei mehrwelligen Strömen. — 33. Veränderung der Kurvenform durch Selbstinduktion und Kapazität. — 34. Effektivwert und Leistung mehrwelliger Wechselströme. — 35. Formfaktor und Scheitelfaktor mehrwelliger Ströme. — 36. Mehrwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität. — 37. Graphische Darstellung von mehrwelligen Strömen.

27. Darstellung durch Fouriersche Reihen.

Die in der Technik verwendeten Wechselströme weichen im allgemeinen mehr oder weniger von der Sinusform ab. Wir erweitern daher unsere Betrachtung auf solche periodischen Ströme, deren zeitlicher Verlauf eine beliebige Kurvenform hat.

Die rechnerische Behandlung solcher Ströme beruht auf der Reihenentwicklung nach Fourier.

Danach kann eine beliebige einfach periodische Funktion dargestellt werden durch eine Reihe von Sinusfunktionen, deren Periodenzahlen sich wie ganze Zahlen verhalten; die Zahl der Glieder der Reihe kann endlich oder unendlich groß sein.

Dies bedeutet, daß man sich einen beliebigen periodischen Strom zusammengesetzt denken kann aus einer sinusförmigen Grundwelle von derselben Frequenz wie der periodische Strom, und einer endlichen oder unendlichen Zahl von darüber gelagerten sinusförmigen Oberwellen, deren Frequenzen 2, 3, 4, ... mal so groß sind wie die der Grundwelle.

Aus diesem Grunde nennt man Wechselströme von beliebiger Kurvenform mehrwellige Wechselströme.

Die Gleichung einer Oberwelle ist

$$i_x = i_{xm} \sin(\kappa \omega t + \psi_x) \dots \dots \dots (74)$$

Hierin ist κ eine beliebige ganze Zahl, ω die Kreisfrequenz der Grundwelle, $\kappa \omega$ daher die Kreisfrequenz der betrachteten Oberwelle von der Ordnung κ , $i_{\kappa m}$ ihre Amplitude und ψ_{κ} ihr Phasenwinkel.

Die Gleichung der aus unendlich vielen Wellen zusammengesetzten periodischen Stromwelle ist daher

$$i = \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} i_{\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} i_{\kappa m} \sin(\kappa \omega t + \psi_{\kappa}) \dots \dots \dots (75)$$

worin für κ der Reihe nach alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ einzusetzen sind. Dies ist die allgemeinste Form einer Fourierschen Reihe.

Entwickelt man in Gl. 74

$$i_{\kappa m} \sin(\kappa \omega t + \psi_{\kappa}) = i_{\kappa m} \cos \psi_{\kappa} \sin \kappa \omega t + i_{\kappa m} \sin \psi_{\kappa} \cos \kappa \omega t$$

und setzt

$$i_{\kappa m} \cos \psi_{\kappa} = a_{\kappa}, \quad i_{\kappa m} \sin \psi_{\kappa} = b_{\kappa} \dots \dots \dots (76)$$

so wird

$$i_{\kappa} = a_{\kappa} \sin \kappa \omega t + b_{\kappa} \cos \kappa \omega t \dots \dots \dots (74a)$$

Hier ist jede Oberwelle in zwei um eine Viertelperiode gegeneinander phasenverschobene Wellen von gleicher Frequenz mit den Amplituden a_{κ} und b_{κ} zerlegt. Es ist

$$i_{\kappa m} = \sqrt{a_{\kappa}^2 + b_{\kappa}^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_{\kappa} = \frac{b_{\kappa}}{a_{\kappa}} \dots \dots \dots (77)$$

Für $\kappa = 0$ ergibt Gl. 74 a

$$i_0 = b_0,$$

also einen Gleichstrom, alle anderen Werte von κ ergeben dagegen Wechselströme.

Hiermit kann die Gleichung eines beliebigen periodischen Stromes geschrieben werden

$$i = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\infty} a_{\kappa} \sin \kappa \omega t + b_0 + \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\infty} b_{\kappa} \cos \kappa \omega t \dots \dots \dots (75b)$$

Ein mehrwelliger Strom kann also aus einem Gleichstrom und einer Reihe von Sinusströmen verschiedener Frequenzen zusammengesetzt sein.

Die Möglichkeit des Vorhandenseins eines Gleichstromes führt uns dazu, von den periodischen Strömen noch die reinen Wechselströme zu unterscheiden.

Bei einem einwilligen Strom ist nach Kap. I der Mittelwert während einer ganzen Periode gleich Null, d. h. es wird in einer halben Periode durch den Leiter eine ebenso große Elektrizitätsmenge in der einen Richtung bewegt wie in der anderen Richtung während

der folgenden Halbperiode. Da alle Oberwellen wieder Sinusform haben, gilt dies auch für die Oberwellen.

Für einen periodischen Strom, der aus einer Grundwelle und einer Anzahl Oberwellen besteht, ist daher das Integral

$$q = \int_0^T i \, dt$$

für eine ganze Periode gleich Null. Die von der Stromkurve mit der Abszissenachse gebildeten positiven und negativen Flächenstücke sind gleichgroß (s. Fig. 53 bis 55). Einen solchen Strom bezeichnet man als reinen Wechselstrom.

Ist dagegen die Summe der positiven und negativen Flächenstücke nicht gleichgroß, wie in Fig. 52, so bedeutet dies, daß die in einer Richtung vom Strom bewegte Elektrizitätsmenge größer ist als die in der anderen. Dies wird durch das Vorhandensein eines Gleichstromes in der Stromwelle bedingt; er ist in der Gl. 75 b durch das Glied b_0 dargestellt, und die von ihm in einer Periode bewegte Elektrizitätsmenge ist $q_0 = b_0 T$. Verschiebt man in Fig. 52 die Abszissenachse $X-X$ parallel zu sich selbst, bis die von der neuen Achse $X'-X'$ und der Stromkurve begrenzten positiven und negativen Flächenstücke gleichgroß sind, so ist der Abstand der neuen Achse von der alten gleich b_0 .

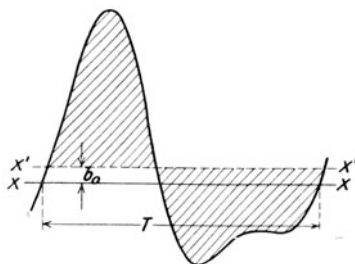


Fig. 52.

Das Fehlen dieses Gliedes kennzeichnet also einen reinen Wechselstrom.

Die durch Induktion in rotierenden Maschinen und in Transformatoren erzeugten Wechselströme sind reine Wechselströme. Denn der Induktionsfluß Φ durch eine Spule ist eine periodische Funktion der Zeit, er ist zur Zeit $(t + T)$ ebenso groß wie zur Zeit t .

Die in einer Windung induzierte EMK ist

$$e = - \frac{d\Phi}{dt},$$

daher

$$- \int_0^T e \, dt = \Phi_{(T)} - \Phi_{(0)} = 0.$$

28. Ermittlung der Amplituden der Fourierschen Reihe.

Es soll nun gezeigt werden, wie für eine beliebige periodische Funktion die Koeffizienten a_n , b_0 und b_n der Reihe Gl. 75 b ermittelt werden können, wenn das graphische Bild der Funktion gegeben ist.

Zur Abkürzung bezeichnen wir die Abszissen mit x anstatt mit ωt , die Ordinaten mit y . Die Länge der Welle auf der Abszissenachse ist dann 2π . Bezeichnet nun κ die besondere Welle, deren Koeffizienten gesucht sind, und λ die beliebigen Werte von κ , so multipliziere man alle Ordinaten y mit den zugehörigen $\sin \kappa x$ und bilde den Mittelwert über eine Periode. Dieser ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \sin \kappa x \, dx.$$

Da hierin

$$y = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} a_{\lambda} \sin \lambda x + b_0 + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} b_{\lambda} \cos \lambda x,$$

erhält man eine Reihe von Produkten von den drei Formen:

$$1. \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{\lambda} \sin \lambda x \sin \kappa x \, dx$$

$$2. \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_0 \sin \kappa x \, dx$$

$$3. \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_{\lambda} \cos \lambda x \sin \kappa x \, dx.$$

Von diesen Integralen werden alle Null, bis auf jenes der ersten Form, bei dem $\lambda = \kappa$ ist. Dieses wird

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{\kappa} \sin^2 \kappa x \, dx = \frac{a_{\kappa}}{2}.$$

Es ist daher

$$a_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin \kappa x \, dx \quad (78)$$

Multipliziert man zweitens alle Ordinaten y mit $\cos \kappa x$ und bildet den Mittelwert über eine ganze Periode, so wird ganz analog

$$b_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos \kappa x \, dx \quad (79)$$

Endlich ist der Mittelwert der Ordinaten y während der ganzen Periode

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y \, dx \quad \dots \quad (80)$$

29. Besondere Kurvenformen.

1. Bei den meisten in der Technik vorkommenden Wechselströmen ist die negative Halbwellen das Spiegelbild der positiven Halbwellen in bezug auf die Abszissenachse. Es sind also jeweils zwei Momentanwerte im Abstände einer halben Periode gleichgroß aber von entgegengesetztem Vorzeichen (s. Fig. 53). Es ist daher

$$y_{(x+\pi)} = -y_x \quad \dots \quad (81)$$

Bei einer solchen Kurve fällt das Glied b_0 fort, die Ordinate y , die zur Abszisse x gehört, hat nach Gl. 75 a den Wert

$$y_x = \sum a_n \sin nx + \sum b_n \cos nx,$$

und zur Abszisse $x + \pi$ gehört die Ordinate

$$y_{(x+\pi)} = \sum a_n \sin n(x + \pi) + \sum b_n \cos n(x + \pi).$$

Es ist

$$\sin n(x + \pi) = \sin (nx + n\pi) = (-1)^n \sin nx$$

$$\cos n(x + \pi) = \cos (nx + n\pi) = (-1)^n \cos nx.$$

Die Bedingung 81 wird also nur erfüllt, wenn n eine ungerade Zahl ist, und es folgt:

Eine periodische Kurve, deren negative Halbwellen das Spiegelbild der positiven in bezug auf die Abszissenachse ist, enthält nur ungeradzahlige Oberwellen.

Berechnet man für eine solche Kurve die Koeffizienten a_n und b_n nach Gl. 78 und 79, so ist bei Bildung der Produkte

$$y_{(x+\pi)} \sin n(x + \pi) = y_x \sin nx,$$

$$y_{(x+\pi)} \cos n(x + \pi) = y_x \cos nx.$$

Hieraus folgt, daß die Integrale für die positiven und negativen Halbwellen denselben Wert haben. Man braucht daher das Integral nur über eine halbe Periode zu erstrecken und erhält

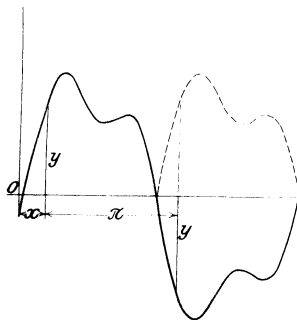


Fig. 53.

$$a_\kappa = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y \sin \kappa x dx \quad \dots \quad (78a)$$

$$b_\kappa = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y \cos \kappa x dx \quad \dots \quad (79a)$$

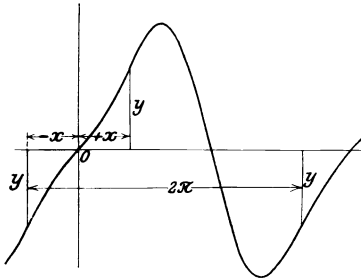


Fig. 54.

2. Ist eine Kurve in bezug auf den Ursprung symmetrisch (s. Fig. 54), so ist

$$y(-x) = -y_x$$

und

$$y(2\pi - x) = -y_x \quad (82)$$

Da

$$y(2\pi - x) = \sum a_\kappa \sin \kappa (2\pi - x) + \sum b_\kappa \cos \kappa (2\pi - x)$$

und

$$\sin \kappa (2\pi - x) = \sin (2\pi \kappa - \kappa x) = -\sin \kappa x$$

$$\cos \kappa (2\pi - x) = \cos (2\pi \kappa - \kappa x) = +\cos \kappa x,$$

folgt, daß die Bedingung 82 nur von den Sinusgliedern erfüllt wird, alle Kosinusglieder fallen fort.

3. Ist bei einer Kurve einerseits die negative Halbwelle das Spiegelbild der positiven in bezug auf die Abszissenachse und ist sie andererseits in bezug auf den Ursprung symmetrisch (s. Fig. 55), so erhält sie nach Vorstehendem nur ungerade Sinusglieder.

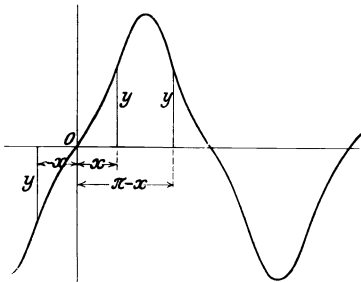


Fig. 55.

Hier ist

$$y_{(\pi - x)} = y_x.$$

Für ungerade Werte von κ , die hier nur in Frage kommen, ist

$$\sin \kappa (\pi - x) = \sin \kappa x,$$

und daher

$$y_{(\pi - x)} \sin \kappa (\pi - x) = y_x \sin \kappa x.$$

Hieraus folgt, daß das Integral Gl. 78a in den beiden Hälften der Halbwelle von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von $\frac{\pi}{2}$ bis π den gleichen Wert hat. Man braucht also nur von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zu integrieren und erhält

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin nx \, dx \dots \dots \dots (78b)$$

Beispiele. 1. Die rechteckige Stromkurve (Fig. 56), die durch Kommutierung eines Gleichstromes erhalten wird, entspricht dem dritten der soeben besprochenen Fälle. Sie hat daher nur ungerade Sinusglieder und es kann Gl. 78b verwendet werden.

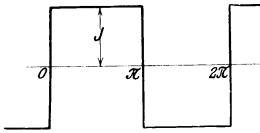


Fig. 56.

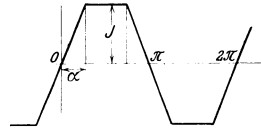


Fig. 57.

Die Ordinate y hat den konstanten Wert I , daher ist

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \sin nx \, dx = -\frac{4}{\pi} \frac{I}{n} \cos nx \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

Durch Einsetzen der ungeraden Zahlen für n erhält man somit die Gleichung der rechteckigen Stromkurve

$$y = \frac{4}{\pi} I \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right) \dots (83)$$

Die Amplituden der Oberwellen sind ihrer Periodenzahl umgekehrt proportional.

2. Die Trapezkurve (Fig. 57). Sie ist von Wichtigkeit für die Feldform von Wechselstrommaschinen. Auch hier kann Gl. 78b verwendet werden. Hier ist

$$y = I \frac{x}{\alpha} \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = \alpha$$

$$y = I \text{ von } x = \alpha \text{ bis } x = \frac{\pi}{2}.$$

Daher

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi} I \left(\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} x \sin nx \, dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \, dx \right).$$

Das erste Integral ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} x \sin \kappa x \, dx &= \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\sin \kappa x}{\kappa^2} - \frac{x \cos \kappa x}{\kappa} \right]_{x=0}^{x=\alpha} \\ &= \frac{\sin \kappa \alpha}{\alpha \kappa^2} - \frac{\cos \kappa \alpha}{\kappa}, \end{aligned}$$

das zweite Integral ist

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin \kappa x \, dx = \frac{\cos \kappa \alpha}{\kappa}.$$

Daher wird

$$a_{\kappa} = \frac{4I}{\pi \alpha \kappa^2} \sin \kappa \alpha,$$

und durch Einsetzen der ungeraden Zahlen für κ erhält man die Gleichung der Trapezkurve

$$y = \frac{4J}{\pi \alpha} \left[\sin \alpha \sin x + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5x + \dots \right] \quad (84)$$

Besondere Fälle des Trapezes.

a) Für das Dreieck ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \kappa \alpha = \pm 1$, wobei das $+$ oder $-$ Zeichen gilt, je nachdem $\kappa = 4n \pm 1$ ist, worin n eine ganze Zahl oder 0 bezeichnet. Daher ist

$$y = \frac{8}{\pi^2} I \left[\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots \right] \quad (85)$$

b) Für das Rechteck ist $a=0$. Der Grenzwert $\frac{\sin \kappa a}{\kappa a}$ nähert sich für $a=0$ dem Wert 1, daher ist, wie schon zuvor gefunden,

$$a_{\kappa} = \frac{4}{\pi} \frac{I}{\kappa} \quad (\text{s. Gl. 83}).$$

c) Ist $\kappa \alpha = \pi$ oder ein Vielfaches davon, so wird $\sin \kappa \alpha = 0$.

Die Oberwelle der Ordnung $\kappa = \frac{\pi}{\alpha}$ und die Vielfachen fallen fort.

Da nun nach Gl. 84 bei dem Trapez die Amplituden der Oberwellen umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Periodenzahl ist, ist nächst der Grundwelle die dritte Oberwelle am größten. Das Trapez nähert sich also am meisten der Sinusform, wenn die dritte Oberwelle fortfällt, hierzu muß somit $\alpha = \frac{\pi}{3}$ sein. In dieser Kurve

sind dann nur noch Oberwellen der Ordnung $\kappa = (6n \pm 1)$ enthalten, und da

$$\sin \kappa \alpha = \sin (6n \pm 1) \frac{\pi}{3} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

wird für das Trapez mit $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$y = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} I \left(\sin x - \frac{1}{25} \sin 5x + \frac{1}{49} \sin 7x - \dots \right).$$

Diese Betrachtung gibt den Grund an, weshalb zur Erzeugung einer möglichst sinusförmigen Feldverteilung bei vielen Wechselstrommaschinen nur $\frac{2}{3}$ des Polbogens bewickelt werden.

3. Die Kurve des kommutierten Sinusstromes (Fig. 58). Bei dieser Kurve ist

$$y_{(-x)} = y_{(+x)},$$

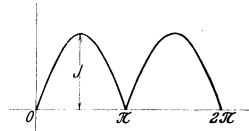


Fig. 58.

woraus folgt, daß hier nur die Kosinusglieder vorhanden sind; außerdem enthält sie einen Gleichstrom.

Setzen wir in Gl. 79

$$b_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos \kappa x dx$$

$$y = I \sin x \quad \text{von } x = 0 \text{ bis } x = \pi$$

und

$$y = -I \sin x \quad \text{von } x = \pi \text{ bis } x = 2\pi,$$

so ist

$$\begin{aligned} b_{\kappa} &= \frac{I}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin x \cos \kappa x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cos \kappa x dx \right] \\ &= \frac{I}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin(\kappa+1)x - \sin(\kappa-1)x] dx \\ &\quad - \frac{I}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} [\sin(\kappa+1)x - \sin(\kappa-1)x] dx \\ &= \frac{I}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{(\kappa+1)}}{(\kappa+1)} - \frac{1 - (-1)^{(\kappa-1)}}{(\kappa-1)} \right]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn κ ungerade ist; es bleiben nur die geradzahigen Oberwellen. Ist κ gerade, so wird

$$b_{\kappa} = \frac{2I}{\pi} \left[\frac{1}{\kappa+1} - \frac{1}{\kappa-1} \right] = -\frac{4I}{\pi(\kappa^2-1)}.$$

Nach Gl. 80 wird ferner

$$b_0 = \frac{I}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2I}{\pi}.$$

Daher die Gleichung des kommutierten Sinusstromes

$$y = \frac{2I}{\pi} \left[1 - \frac{2 \cos 2x}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cos 4x}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cos 6x}{5 \cdot 7} - \dots \right]. \quad (86)$$

30. Arithmetische Analyse.

Die technisch vorkommenden Wechselstromkurven lassen sich nicht in so einfacher Weise in ihre Teilwellen zerlegen, wie die behandelten Beispiele. Um eine mehrwellige Stromkurve zu analysieren, verwendet man ein angenähertes Verfahren, indem man die Integration ersetzt durch eine Summation einer endlichen Zahl von Ordinaten, die in einem endlichen Abstand voneinander liegen.

Die dadurch erhaltene Annäherung an die wirkliche Fouriersche Reihe wird im allgemeinen um so größer, je mehr Ordinaten verwendet werden. Da die Verwendung einer großen Anzahl von Punkten aber sehr umständlich ist, beschränkt man sich auf kleinere Zahlen, und es soll zuerst untersucht werden, in welcher Weise die Zahl der Ordinaten das Verhältnis der aus der Rechnung erhaltenen Amplituden zu den wirklichen bestimmt. Dies läßt sich leicht ermitteln, wenn man, wie es gewöhnlich der Fall ist, die Ordinaten in gleichem Abstand voneinander wählt¹⁾.

Teilt man vom Koordinatenanfangspunkt an die ganze Periode (2π) in n gleiche Teile, zu denen die Ordinaten y_1, y_2, \dots, y_n im Abstände $\frac{2\pi}{n}$ gehören, wobei die Ordinate y_ν zur Abszisse $x = \nu \frac{2\pi}{n}$ gehört, so treten an die Stelle der Integrale Gl. 78 und 79

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin \kappa x \, dx, \quad b_\kappa = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos \kappa x \, dx$$

zwei Summen von je n Gliedern, deren jedes aus dem Produkt der Ordinate y und dem zugehörigen $\sin \kappa x$ bzw. $\cos \kappa x$ besteht; dem Abstände dx entspricht die Strecke $\frac{2\pi}{n}$. Die Grenzen sind $x = \frac{2\pi}{n}$ und $x = 2\pi$. Bezeichnen wir die mit n Teilpunkten er-

¹⁾ S. A. Schleiermacher, ETZ 1910, Heft 49.

mittelten Koeffizienten mit $a_{\kappa(n)}$ bzw. $b_{\kappa(n)}$, zum Unterschied von den Koeffizienten a_{κ} und b_{κ} der wirklichen Reihe, so ist

$$a_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum_{x=\frac{2\pi}{n}}^{x=2\pi} y \sin \kappa x \quad \dots \dots \dots (87)$$

$$b_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum_{x=\frac{2\pi}{n}}^{x=2\pi} y \cos \kappa x \quad \dots \dots \dots (88)$$

Bezeichnet nun wieder κ die Oberwelle, deren Amplitude gesucht ist, λ die beliebigen Werte κ , so ist die Gleichung der Kurve, s. Gl. 75 b,

$$y = \sum_1^{\infty} a_{\lambda} \sin \lambda x + \sum_1^{\infty} b_{\lambda} \cos \lambda x \quad \dots \dots \dots (89)$$

wobei b_0 fortgelassen, d. h. ein reiner Wechselstrom zugrunde gelegt ist.

Setzt man diesen Wert von y in Gl. 87 und 88 ein, so erhält man für jeden Wert von λ in jeder der beiden Gleichungen zwei Reihen von je n Gliedern, die in Gl. 87 Produkte der Form enthalten

$$\text{und in Gl. 88} \quad \left. \begin{array}{l} \sin \lambda x \sin \kappa x, \quad \cos \lambda x \sin \kappa x \\ \sin \lambda x \cos \kappa x, \quad \cos \lambda x \cos \kappa x \end{array} \right\} \dots \dots \dots (90)$$

Diese können der Reihe nach ersetzt werden durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos(\lambda - \kappa)x - \frac{1}{2} \cos(\lambda + \kappa)x \\ \text{und} & -\frac{1}{2} \sin(\lambda - \kappa)x + \frac{1}{2} \sin(\lambda + \kappa)x \\ & \frac{1}{2} \sin(\lambda - \kappa)x + \frac{1}{2} \sin(\lambda + \kappa)x \\ & \frac{1}{2} \cos(\lambda - \kappa)x + \frac{1}{2} \cos(\lambda + \kappa)x. \end{aligned}$$

Für jeden Wert von λ enthält nun jede der Gl. 87 und 88 vier Reihen von je n Gliedern der zuletzt genannten Formen. Diese Glieder stellen n Ordinaten einer Sinuskurve dar, die in gleichem Abstand voneinander auf $(\lambda \pm \kappa)$ ganze Sinuswellen verteilt liegen. Ihre Summe ist für die Sinusfunktionen stets Null, für die Kosinusfunktionen wird sie im allgemeinen Null, außer bei gewissen Werten von $(\lambda \pm \kappa)$. Ist nämlich $(\lambda \pm \kappa) = 0$, so wird

$$\cos(\lambda \pm \kappa)x = \cos 0 = 1.$$

Ist ferner $(\lambda \pm \kappa)$ ein Vielfaches (z) der Teilungszahl n , so ist, da

$$x = \nu \frac{2\pi}{n},$$

$$\cos(\lambda \pm \kappa)x = \cos zn \nu \frac{2\pi}{n} = \cos \nu z 2\pi.$$

Da hierin ν und z ganze Zahlen sind, hat jedes Kosinuglied den Wert 1.

Für $(\lambda \pm \kappa) = 0, n, 2n, 3n$ usw. wird also jedes Kosinuglied 1, und die mit $\frac{1}{2}$ multiplizierte Summe der n Glieder ist $\frac{n}{2}$.

Hiermit erhält man die Amplituden $a_{\kappa(n)}$ und $b_{\kappa(n)}$ nach Gl. 87 und 88

$$a_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum y \sin \kappa x = a_{\kappa} - a_{n-\kappa} + a_{n+\kappa} - a_{2n-\kappa} + a_{2n+\kappa} - \dots \quad (91)$$

$$b_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum y \cos \kappa x = b_{\kappa} + b_{n-\kappa} + b_{n+\kappa} + b_{2n-\kappa} + b_{2n+\kappa} + \dots \quad (92)$$

Man sieht, daß jede bei der Analyse erhaltene Amplitude Oberwellen enthält, deren Ordnung um so höher ist, je größer die Zahl der Teilpunkte n ist.

Bestimmt man z. B. die Grundwelle mit $n = 18$ Teilpunkten, so sind in dem Resultat auch noch die 17. und 19., die 37. und 35. usw. Oberwelle enthalten. Die Bestimmung der 7. Oberwelle enthält auch die 11. und 25. usw.

Bei symmetrischen Kurven, die nach S. 75 nur ungerade Oberwellen enthalten, genügt die Summation über eine Halbwelle. Ist jetzt n die Zahl der Teilpunkte der Halbwelle, so ist

$$a_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum_{x=\frac{\pi}{n}}^{x=\pi} y \sin \kappa x \quad \dots \quad (87a)$$

$$b_{\kappa(n)} = \frac{2}{n} \sum_{x=\frac{\pi}{n}}^{x=\pi} y \cos \kappa x \quad \dots \quad (88a)$$

Jede Summe hat n Glieder. Für y ist wieder der Wert Gl. 89 einzusetzen. $(\lambda \pm \kappa)$ sind jetzt stets gerade Zahlen. Die Sinusreihen fallen wieder fort. Die Kosinusreihen haben jetzt, abgesehen vom Vorzeichen, die Form

$$\frac{1}{2} \left[\cos(\lambda \mp \kappa) \frac{\pi}{n} + \dots \cos(\lambda \mp \kappa) \pi \right].$$

Diese Reihe ist Null, außer wenn

$$\frac{\lambda \mp \kappa}{2} = 0, n, 2n, 3n, \dots$$

ist. In diesen Fällen ist die Summe wieder $\frac{n}{2}$, so daß nun

$$a_{\kappa(n)} = a_{\kappa} - a_{2n-\kappa} + a_{2n+\kappa} - a_{4n-\kappa} + a_{4n+\kappa} - \dots + \quad (91a)$$

$$b_{\kappa(n)} = b_{\kappa} + b_{2n-\kappa} + b_{2n+\kappa} + b_{4n-\kappa} + b_{4n+\kappa} + \dots + \quad (92a)$$

Ausführung der Analyse.

Wir betrachten den für die Technik wichtigsten Fall, daß nur ungerade Harmonische vorhanden sind. n sei wieder die Zahl der Teilpunkte der Halbwelle. In den Summen, die nach Gl. 87a und 88a zu verwenden sind,

$$a_{\kappa} = \frac{2}{n} \sum_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} y \sin \kappa x, \quad b_{\kappa} = \frac{2}{n} \sum_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} y \cos \kappa x$$

lassen sich nach Runge¹⁾ jeweils zwei Glieder zusammenfassen. Solche Glieder liegen in gleichem Abstand von der Mitte der Halbwelle $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$. Hat der eine die Abszisse $x = \nu \frac{\pi}{n}$, so ist die des zweiten $(n - \nu) \frac{\pi}{n}$, die Summe der Abszissen ist also gleich der Halbwelle. Nun ist

$$\sin \kappa (n - \nu) \frac{\pi}{n} = \sin \kappa \left(\pi - \nu \frac{\pi}{n} \right) = \sin \kappa \nu \frac{\pi}{n},$$

$$\cos \kappa (n - \nu) \frac{\pi}{n} = \cos \kappa \left(\pi - \nu \frac{\pi}{n} \right) = -\cos \kappa \nu \frac{\pi}{n}.$$

Die Ordinaten solcher Punkte sind also mit den gleichen Sinus und mit den entgegengesetzt gleichen Kosinus zu multiplizieren.

Bei der Multiplikation mit $\sin \kappa x$ hat man daher die Summe, bei der Multiplikation mit $\cos \kappa x$ die Differenz der beiden Ordinaten zu nehmen.

Man faltet nun zweckmäßig die Reihe der Ordinaten in zwei, so daß die mit demselben Faktor zu multiplizierenden Ordinaten übereinanderstehen, wie in dem nachstehenden Schema für $n = 12$ Teilpunkte und den Abstand $\frac{\pi}{n} = 15^{\circ}$ angegeben ist. Man merkt sich dieses Schema am einfachsten dadurch, daß die Summe der Indizes der übereinanderstehenden Ordinaten die Zahl n (hier 12) ergibt. Das mittlere und das n te Glied bleiben für sich. Dann bildet man die Summen s und die Differenzen d .

¹⁾ ETZ 1905, S. 247.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Summen:		s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
Differenzen:	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	

Hierin ist

$$\begin{aligned}
 s_1 &= y_1 + y_{11}, & d_1 &= y_5 - y_7 \\
 &\dots & &\dots \\
 s_6 &= y_6, & d_6 &= -y_{12}.
 \end{aligned}$$

Es wird nun

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{1}{6} [s_1 \sin 15^\circ x + s_2 \sin 30^\circ x + \dots + s_5 \sin 75^\circ x + s_6 \sin 90^\circ x] \\
 b_x &= \frac{1}{6} [d_6 + d_6 \cos 15^\circ x + d_4 \cos 30^\circ x + \dots + d_1 \cos 75^\circ x].
 \end{aligned}$$

Da die ungeraden Vielfachen der hier vorkommenden Winkel bis auf das Vorzeichen stets wieder dieselben Winkelfunktionen ergeben, hat man somit nur 5 Faktoren und den Faktor 1. Bei gewissen Oberwellen, nämlich wenn x durch 3 teilbar ist, kommen nur die Faktoren 0,7071 und 1 vor.

In der nachstehenden Tabelle sind in der ersten Vertikalreihe die Winkelfunktionen angegeben, in den folgenden die mit ihnen zu multiplizierenden Ordinatensummen unter Berücksichtigung des Vorzeichens, und zwar beziehen sich die 6 Vertikalreihen der Reihe nach auf die Amplituden a_1 bis a_{11} . Man multipliziert also nacheinander die in einer Vertikalreihe stehenden Summen s mit den neben ihnen stehenden Faktoren, die Summe dieser Produkte ist dann das sechsfache der Amplitude a_x . Zur Ermittlung der Amplituden b_x sind in dem Schema an Stelle der Summen s die Differenzen d zu setzen, wobei sich das Vorzeichen von b_x wie dort angegeben ergibt.

0,2588	s_1		s_5	s_5		s_1
0,5000	s_2		s_2	$-s_2$		$-s_2$
0,7071	s_3	$s_1 + s_3 - s_5$	$-s_3$	$-s_3$	$s_1 + s_3 - s_5$	s_3
0,8660	s_4		$-s_4$	s_4		$-s_4$
0,9659	s_5		s_1	s_1		s_5
1,0000	s_6	$s_2 - s_6$	s_6	$-s_6$	$-(s_2 - s_6)$	$-s_6$
	$6a_1$	$6a_3$	$6a_5$	$6a_7$	$6a_9$	$6a_{11}$
	$6b_1$	$-6b_3$	$6b_5$	$-6b_7$	$6b_9$	$-6b_{11}$

Eine weitere Vereinfachung der Rechenoperation hat Schleiermacher¹⁾ angegeben, die darauf beruht, daß in den berechneten

¹⁾ ETZ 1910, Heft 49.

Amplituden a_n und b_n je nach der Zahl der Teilpunkte n nach Gl. 91a und 92a auch die Amplituden von Wellen höherer Ordnung enthalten sind. Nimmt man wieder 12 Teilpunkte für die Halbwelle an, so hat man für den Koeffizienten a_1 der Grundwelle zunächst den Wert $a_{1(12)}$ für 12 Teilpunkte, gleichzeitig aber auch die Werte $a_{1(6)}$, $a_{1(4)}$, $a_{1(3)}$, $a_{1(2)}$ für 6, 4, 3, 2 Teilpunkte durch Fortlassen der Zwischenpunkte. Sollen z. B. wieder die ersten 6 Koeffizienten a_1 bis a_{11} und b_1 bis b_{11} bestimmt werden, wobei die höheren Harmonischen von der 13. an vernachlässigt werden, so erhält man für die verschiedenen Einteilungen nach Gl. 91a

$$\begin{aligned} a_{1(12)} &= a_1 [-a_{23} + a_{25} - \dots \\ a_{1(6)} &= a_1 - a_{11} [+a_{13} - \dots \\ a_{1(4)} &= a_1 - a_7 + a_9 [-a_{15} + \dots \\ a_{1(3)} &= a_1 - a_5 + a_7 - a_{11} [+a_{13} - \dots \\ a_{1(2)} &= a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9 - a_{11} [+a_{13} - \dots \end{aligned}$$

und $a_{3(12)} = a_3 [-a_{21} + a_{27} - \dots$

wobei die jeweils hinter der eckigen Klammer stehenden Oberwellen vernachlässigt werden.

Bildet man nun:

$$\begin{aligned} a_{1(12)} - a_{1(6)} &= e_6 = a_{11} \\ a_{1(12)} - a_{1(4)} &= e_4 = a_7 - a_9 \\ a_{1(12)} - a_{1(3)} &= e_3 = a_5 - a_7 + a_{11} \\ a_{1(12)} - a_{1(2)} &= e_2 = a_3 - a_5 + a_7 - a_9 + a_{11}, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{1(12)} \\ a_3 &= a_{3(12)} \\ a_5 &= a_3 - e_2 + e_4 + e_6 \\ a_7 &= a_5 - e_3 + e_6 \\ a_9 &= a_7 - e_4 \\ a_{11} &= e_6. \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten b_n hat man analog:

$$\begin{aligned} b_{1(12)} - b_{1(6)} &= f_6 = -b_{11} \\ b_{1(12)} - b_{1(4)} &= f_4 = -(b_7 + b_9) \\ b_{1(12)} - b_{1(3)} &= f_3 = -(b_5 + b_7 + b_{11}) \\ b_{1(12)} - b_{1(2)} &= f_2 = -(b_3 + b_5 + b_7 + b_9 + b_{11}), \end{aligned}$$

worin $b_{1(2)}$ die Ordinate für den Anfangspunkt der Teilung mit 2 Teilpunkten ist. Hieraus wird dann

$$\begin{aligned}
 b_1 &= b_{1(12)} \\
 b_3 &= b_{3(12)} \\
 b_5 &= -b_3 - f_2 + f_4 + f_6 \\
 b_7 &= -b_5 - f_3 + f_6 \\
 b_9 &= -b_7 - f_4 \\
 b_{11} &= -f_6.
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Koeffizienten $a_{1(12)}$ bis $a_{1(2)}$ und $a_{3(12)}$ verwendet man die nachstehende Tabelle, in der s_1 bis s_6 wieder die aus der Zusammenfaltung der Reihe gewonnenen Summen sind. Für die entsprechenden Koeffizienten $b_{\times(n)}$ sind dann wieder unter Berücksichtigung des Vorzeichens an Stelle der Summen s die Differenzen d zu setzen.

0,2588	s_1					
0,5000	s_2	s_2				
0,7071	s_3		s_3			$s_1 + s_3 - s_5$
0,8660	s_4	s_4		s_4		
0,9659	s_5					
1,0000	s_6	s_6	s_6		s_6	$s_2 - s_6$
	$6 a_{1(12)}$	$3 a_{1(6)}$	$2 a_{1(4)}$	$1,5 a_{1(3)}$	$a_{1(2)}$	$6 a_{3(12)}$

Dieses Verfahren hat den Vorzug, daß, wo es zunächst nur auf die Grundwelle ankommt, mit einer größeren Teilung, z. B. $n=6$ begonnen werden kann. Hierbei erhält man für die Grundwelle schon je vier Werte $a_{1(2)}$, $a_{1(3)}$, $a_{1(4)}$, $a_{1(6)}$ und entsprechend die $b_{1(n)}$. Man kann nun durch Vergleich dieser Werte schon beurteilen, ob noch höhere Harmonische vorhanden sind, und dann zu deren Ermittlung die Zwischenpunkte für $n=12$ hinzunehmen. Auch lassen sich leicht durch weiteres Hinzufügen von Teilpunkten noch höhere Harmonische ermitteln.

31. Graphische Verfahren.

Von den verschiedenen graphischen Verfahren zur Kurvenanalyse soll hier nur die Methode von Fischer Hinnen (ETZ 1901, S. 396) besprochen werden, die sehr einfach auszuführen und daher

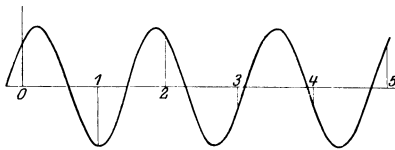


Fig. 59.

praktisch wichtig ist. Sie beruht auf folgendem, schon auf S. 81 verwendeten Satz: Teilt man auf der Abszissenachse die Länge von w ganzen Wellen einer Sinuslinie in p gleiche

Teile und zeichnet die Ordinaten (s. Fig. 59), so ist, wenn $\frac{w}{p}$ keine ganze Zahl ist, die Summe der Ordinaten gleich Null. In der Figur ist $w=3$, $p=5$.

Ist dagegen $\frac{w}{p}$ eine ganze Zahl, so sind alle Ordinaten gleichgroß, ihre Summe ist daher p mal so groß wie die Anfangsordinate.

Ist eine Kurve gegeben, so teile man vom Koordinatenanfangspunkt O aus eine ganze Periode OO' ab (s. Fig. 60). Der Anfangsordinate entspricht $x=0$, sie enthält also nach Gl. 89 alle Amplituden b_{κ} .

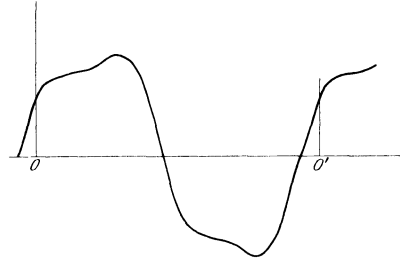


Fig. 60.

$$y_{(1)} = b_1 + b_3 + b_5 + \dots$$

Teilt man nun die Periode OO' in 3 Teile und addiert die 3 Ordinaten, so enthält diese Summe nach vorstehendem nur die Amplituden b_{κ} der Oberwellen, deren Ordnung ein Vielfaches von 3 ist. Für jede dieser Oberwellen enthält die Summe den dreifachen Betrag der Anfangsordinate. Daher ist die Summe der 3 Ordinaten

$$\Sigma y_{(3)} = 3(b_3 + b_9 + b_{15} + \dots)$$

Ebenso ergeben sich für 5, 7, ... Teile die Ordinatensummen:

$$\Sigma y_{(5)} = 5(b_5 + b_{15} + \dots)$$

$$\Sigma y_{(7)} = 7(b_7 + \dots)$$

$$\Sigma y_{(9)} = 9(b_9 + \dots)$$

Hiermit lassen sich alle b_{κ} berechnen.

Verschiebt man den Anfangspunkt um eine Viertelwelle, so enthält die neue Anfangsordinate für $x = \frac{\pi}{2}$ alle Amplituden der Sinusglieder a_{κ} , die abwechselnd positiv und negativ sind, da $\sin \frac{\kappa\pi}{2}$ positiv ist, wenn

$$\kappa = 4n + 1,$$

und negativ, wenn

$$\kappa = 4n - 1.$$

Daher ist

$$y_{(1)}' = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots$$

Teilt man nun von dem neuen Anfangspunkt die Halbwelle wieder in 3, 5, 7, 9 Teile, so werden die Ordinatensummen

$$\Sigma y'_{(3)} = 3 (-a_3 + a_9 - a_{15} \dots)$$

$$\Sigma y'_{(5)} = 5 (a_5 - a_{15} \dots)$$

$$\Sigma y'_{(7)} = 7 (-a_7 + \dots)$$

$$\Sigma y'_{(9)} = 9 (a_9 - \dots)$$

Hiermit können alle a_x berechnet werden.

Weitere graphische Methoden s. Houston & Kennelly, ETZ 1898, S. 714; Varreka, ETZ 1907, S. 482; Pichelmeier u. Schrutka, ETZ 1912, S. 129; v. Sanden, Archiv f. Elektrotechnik 1912, Bd. I, S. 42; Slaby, Archiv f. Elektrotechnik, Bd. II, S. 19. Über experimentelle Aufnahme von Kurven s. Orlich, Aufnahme u. Analyse von Wechselstromkurven. Braunschweig 1906.

32. Die Summe von zwei mehrwelligen Strömen.

Während die Summe zweier einwelliger Ströme wieder einen Sinusstrom ergibt, hat die Summe von mehrwelligen Strömen im allgemeinen eine ganz andere Kurvenform als jeder Komponentstrom. Dies kommt daher, daß die Oberwellen sich unter anderen Phasenwinkeln addieren als die Grundwellen.

Bei zwei gleichgroßen Strömen von gleicher Kurvenform seien z. B. die Grundwellen um φ verschoben, die resultierende Grundwelle berechnet sich daher zu

$$i'_{1m} = i_{1m} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}.$$

Die x ten Oberwellen sind dann um $x\varphi$ gegeneinander verschoben, und die resultierende Amplitude ist

$$i'_{xm} = i_{xm} \sqrt{2(1 + \cos x\varphi)}.$$

Ist hierin beispielsweise $x\varphi = \pi$ oder ein ungerades Vielfaches von π , so heben sich die beiden Oberwellen heraus. Für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ergibt die Summe der Grundwellen

$$i'_{1m} = i_{1m} \sqrt{3}$$

die dritten, neunten usw. Oberwellen heben sich dagegen heraus, der Summenstrom nähert sich also mehr der Sinusform als die beiden Teilströme.

Ist dagegen $x\varphi = 2\pi$ oder ein Vielfaches davon, so sind die beiden Oberwellen in Phase und ergeben die doppelte Amplitude. Ist z. B. $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, so ist die Summe der Grundwellen

$$i'_{1m} = i_{1m},$$

die der dritten Oberwellen dagegen

$$i_{3m}' = 2 i_{3m}$$

und ebenso für die neunten usf. Hier ist also der Summenstrom stärker verzerrt als die Teilströme.

Zwei Ströme von gleicher Kurvenform ergeben im allgemeinen nur wieder einen ähnlichen Strom, wenn $\varphi = 0$ ist. (Andere Fälle s. Orlich, Theorie der Wechselströme, S. 37ff.)

33. Veränderung der Kurvenform durch Selbstinduktion und Kapazität.

Wird eine mehrwellige Spannung

$$p = \sum (a_{\kappa} \sin \kappa \omega t + b_{\kappa} \cos \kappa \omega t)$$

an einen Kondensator angeschlossen, so ist der Ladestrom

$$i = C \frac{dp}{dt} = \omega C \sum (\kappa a_{\kappa} \cos \kappa \omega t - \kappa b_{\kappa} \sin \kappa \omega t).$$

Der Ladestrom hat also eine ganz andere Kurvenform als die Spannung, die Oberwellen des Stromes sind um so stärker ausgeprägt, je höher ihre Periodenzahl ist. Fig. 61 zeigt das Oszillogramm des Ladestromes und der Spannung eines Kondensators.

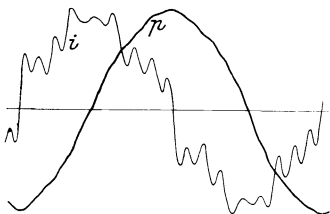


Fig. 61.

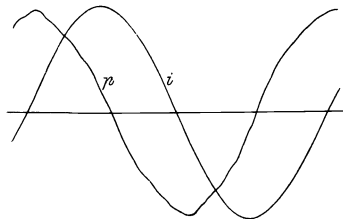


Fig. 62.

Schließt man dagegen die Spannung an eine Induktivität L , so wird der Strom, wenn der Ohmsche Widerstand vernachlässigt werden kann,

$$i = \frac{1}{L} \int p dt = \frac{1}{\omega L} \sum \left(-\frac{a_{\kappa}}{\kappa} \cos \kappa \omega t + \frac{b_{\kappa}}{\kappa} \sin \kappa \omega t \right).$$

Hier sind die Oberwellen des Stromes um so stärker gedämpft, je höher ihre Periodenzahl ist, der Strom nähert sich der Sinusform mehr als die Spannung, wie auch das Oszillogramm Fig. 62 zeigt, das den Strom in einer Drosselspule bei derselben Spannung zeigt, wie Fig. 61 für den Kondensator.

Beispiel. Hat die Spannung dreieckige Form, so ist während einer halben Periode, während der p von $-p_m$ bis $+p_m$ wächst, der Ladestrom eines Kondensators konstant

$$i = C \frac{dp}{dt} = C \frac{4p_m}{T} = C \frac{2}{\pi} \omega p_m,$$

und während der zweiten halben Periode, während der p von $+p_m$ auf $-p_m$ abnimmt,

$$i = C \frac{dp}{dt} = -C \frac{2}{\pi} \omega p_m.$$

Für $p = \pm p_m$ hat i zwei Werte, nämlich $\pm C \frac{2}{\pi} \omega p_m$.

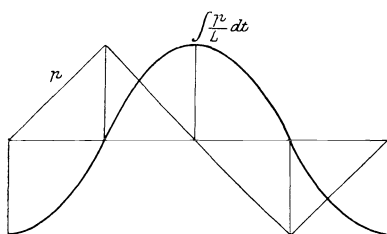


Fig. 63.

Die Kurvenform des Stromes ist also das Rechteck, das von der Sinusform stärker abweicht als die Spannungskurve.

Ebenso ergibt sich für die Stromkurve einer Induktivität bei dreieckiger Spannungskurve die aus Parabelbögen zusammengesetzte Kurve Fig. 63 als Integral-

kurve des Dreiecks, die sich der Sinusform mehr nähert als jenes.

34. Effektivwert und Leistung mehrwelliger Wechselströme.

Seien

$$i = \sum (a_n \sin \kappa \omega t + b_n \cos \kappa \omega t) = \sum i_{n m} \sin (\kappa \omega t + \psi_n)$$

und

$$i' = \sum (a'_n \sin \kappa \omega t + b'_n \cos \kappa \omega t) = \sum i'_{n m} \sin (\kappa \omega t + \psi'_n)$$

zwei mehrwellige Wechselströme. Es soll der Mittelwert ihres Pro-

duktes $\frac{1}{T} \int_0^T i i' dt$ berechnet werden.

Da der Mittelwert des Produktes zweier Sinusfunktionen von verschiedener Periodendauer Null ist, und ebenso der Mittelwert des Produktes aus einer Sinus- und einer Kosinusfunktion von gleicher Periodendauer, braucht man in dem Produkt $i i'$ nur die Faktoren zu berücksichtigen, die sich aus zwei Sinus- oder Kosinusgliedern von gleicher Periodenzahl zusammensetzen, für die also κ denselben Wert hat. Daher wird

$$\frac{1}{T} \int_0^T i i' dt = \sum \frac{1}{2} (a_\kappa a_\kappa + b_\kappa b_\kappa) = \sum \frac{1}{2} i_{\kappa m} i'_{\kappa m} \cos(\psi_\kappa - \psi'_\kappa) \quad (93)$$

Sind die beiden Ströme i und i' identisch, so erhält man das Quadrat des Effektivwertes (J)

$$J^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \sum \frac{1}{2} (a_\kappa^2 + b_\kappa^2) = \sum \frac{1}{2} i_{\kappa m}^2.$$

Hierin ist $\frac{1}{2} i_{\kappa m}^2 = J_\kappa^2$

das Quadrat des Effektivwertes der Oberwelle von der Periodenzahl $\kappa\omega$. Daher ist der Effektivwert des mehrwelligen Stromes

$$J = \sqrt{\sum J_\kappa^2} = \sqrt{J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 + \dots} \quad (94)$$

Er ist gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate der Effektivwerte der einzelnen Harmonischen.

Ersetzt man in Gl. 93 i' durch eine Spannung p , so erhält man die mittlere Leistung:

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T p i dt = \sum \frac{1}{2} p_{\kappa m} i_{\kappa m} \cos(\psi_\kappa - \psi_\kappa) \quad (95)$$

Hierin ist $\frac{1}{2} p_{\kappa m} i_{\kappa m} = P_\kappa J_\kappa$

das Produkt der Effektivwerte der κ ten Strom- und Spannungswelle und $\cos(\psi_\kappa - \psi'_\kappa) = \cos \varphi_\kappa$ der Kosinus deren Phasenverschiebung. Die mittlere Leistung ist daher

$$W = \sum P_\kappa J_\kappa \cos \varphi_\kappa = P_1 J_1 \cos \varphi_1 + P_3 J_3 \cos \varphi_3 + P_5 J_5 \cos \varphi_5 + \dots \quad (96)$$

Die Leistung ist die Summe der Leistungen der einzelnen Harmonischen. Oberwellen von verschiedener Periodenzahl sind voneinander in bezug auf die mittlere Leistung vollständig unabhängig. Aus Gl. 94 ergibt sich die Stromwärme in einem Ohmschen Widerstand R

$$J^2 R = R(J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 + \dots).$$

Jede Oberwelle erzeugt eine von den übrigen unabhängige Stromwärme.

In dem Produkt $\sum \frac{1}{2} p_{\kappa m} i_{\kappa m} \cos(\psi_\kappa - \psi'_\kappa)$ kommen die Effektivwerte der resultierenden Strom- und Spannungswelle nicht vor. Man setzt trotzdem analog wie bei einwelligen Wechselströmen

$$W = PJ \cos \varphi$$

und bezeichnet $\cos \varphi$ als den Leistungsfaktor. Im Gegensatz zu einwelligen Strömen ist er hier von den Effektivwerten von Strom und Spannung abhängig (s. auch S. 98).

35. Formfaktor und Scheitelfaktor mehrwelliger Ströme.

Die Effektivwerte haben praktisch die meiste Bedeutung, weil sie leicht gemessen werden können, sie sagen über die Kurvenform des Stromes natürlich nichts aus.

Für die Eisenverluste (s. Kap. X) ist dagegen der größte Wert der Spannung innerhalb der Periode maßgebend.

Einen Anhalt über die Form der Kurve erhält man, wenn man außer dem Effektivwert auch den Mittelwert oder den Maximalwert kennt, vorausgesetzt, daß die Kurve nicht mehrere Maxima und Minima innerhalb einer Periode hat und daß sie symmetrisch ist.

Als Mittelwert einer symmetrischen Kurve $M(i)$ werde der Mittelwert aller Ströme einer halben Periode bezeichnet, innerhalb derer der Strom stets dieselbe Richtung hat.

Das Verhältnis des Effektivwertes zum Mittelwert heißt Formfaktor

$$f = \frac{J}{M(i)}.$$

Für eine Sinuskurve war (s. Kap. I, S. 10)

$$f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11.$$

Für ein Rechteck ist $J = i_m$, $M(i) = i_m$, daher

$$f = 1.$$

Für das Dreieck mit der Höhe i_m ist die quadratische Kurve der i^2 aus 2 Parabeln zusammengesetzt, deren Inhalt je $\frac{i_m^2 T}{3 \cdot 4}$, deren Mittelwert $\frac{1}{3} i_m^2$ ist, daher ist $J = \frac{i_m}{\sqrt{3}}$, während $M(i) = \frac{i_m}{2}$ ist, daher

$$f = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15.$$

Hieraus kann man schließen, daß eine Kurve, deren Formfaktor größer als der der Sinuskurve (1,11) ist, sich mehr dem Dreieck nähert, d. h. spitzer ist als die Sinuskurve; ist der Formfaktor kleiner, so ist die Kurve flacher.

Das Verhältnis des Maximalwertes zum Effektivwert heißt Scheitelfaktor

$$\sigma = \frac{i_m}{J}.$$

Es ist

für die Sinuskurve $\sigma = \sqrt{2} = 1,414,$

für das Rechteck $\sigma = 1,0,$

für das Dreieck $\sigma = \sqrt{3} = 1,73.$

Ist eine Kurve gegeben, so kann der Effektivwert nach Fleming auch graphisch ermittelt werden. Man trägt die in rechtwinkligen

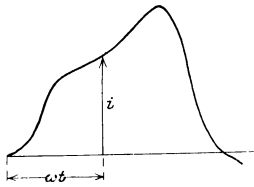


Fig. 64a.

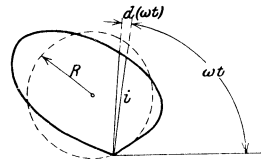


Fig. 64b.

Koordinaten Fig. 64a gegebene Kurve nach Fig. 64b in Polarkoordinaten auf. Die Fläche der Polarkurve ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i^2}{2} d(\omega t) = \frac{\pi}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt.$$

Bestimmt man nun einen Kreis von gleichem Flächeninhalt, so ist, wenn R sein Radius ist,

$$\pi R^2 = \frac{\pi}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt$$

$$\sqrt{2} R = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt} = J.$$

Für eine Sinuslinie ist die Polarkurve ein Kreis.

36. Mehrwelliger Strom in einem Stromkreis mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

Für einen solchen Stromkreis gilt nach Kap. II die Gleichung

$$p = iR + L \frac{di}{dt} + \int \frac{i dt}{C}.$$

Bei einem mehrwelligen Strom

$$i = i_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + i_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + i_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots$$

bedingt jede Oberwelle i_κ des Stromes eine Oberwelle der Spannung von gleicher Periodenzahl, die aus den 3 Teilen besteht:

$$\begin{aligned} i_\kappa R &= R i_{\kappa m} \sin(\kappa \omega t + \psi_\kappa) \\ L \frac{di_\kappa}{dt} &= \kappa \omega L i_{\kappa m} \cos(\kappa \omega t + \psi_\kappa) \\ \int \frac{i_\kappa dt}{C} &= -\frac{i_{\kappa m}}{\kappa \omega C} \cos(\kappa \omega t + \psi_\kappa). \end{aligned}$$

Die κ te Oberwelle der Spannung ist daher

$$p_\kappa = p_{\kappa m} \sin(\kappa \omega t + \psi_\kappa + \varphi_\kappa).$$

Ihre Amplitude ist

$$p_{\kappa m} = i_{\kappa m} \sqrt{R^2 + \left(\kappa \omega L - \frac{1}{\kappa \omega C}\right)^2} \dots \dots (97)$$

und die Phasenvoreilung gegen die entsprechende Stromwelle

$$\operatorname{tg} \varphi_\kappa = \frac{\kappa \omega L - \frac{1}{\kappa \omega C}}{R} \dots \dots \dots (98)$$

Die resultierende Spannung ist

$$p = p_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 + \varphi_1) + p_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 + \varphi_3) + \dots$$

Ist umgekehrt die Spannung gegeben, so ergeben sich die Amplituden der einzelnen Harmonischen des Stromes und ihre Phase aus Gl. 97 und 98.

Jede Oberwelle der Spannung erzeugt eine Oberwelle des Stromes von gleicher Periodenzahl. Die einzelnen Harmonischen können unabhängig voneinander berechnet werden. Dies gilt freilich nur, solange R , L und C unabhängig von der Periodenzahl sind. Die Effektivwerte von Strom und Spannung sind nach Gl. 94

$$J = \sqrt{J_1^2 + J_3^2 + J_5^2 + \dots}, \quad P = \sqrt{P_1^2 + P_3^2 + P_5^2 + \dots}$$

Strom und Spannung heben verschiedene Kurvenform, weil die resultierende Reaktanz $\left(\kappa \omega L - \frac{1}{\kappa \omega C}\right)$ von der Periodenzahl sehr stark abhängt. Das Verhältnis der Amplituden der Stromharmonischen ist daher ganz verschieden von dem der Spannungsharmonischen und ebenso ist die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannungsoberwellen für die verschiedenen Periodenzahlen ganz verschieden.

Ist $\kappa \omega L = \frac{1}{\kappa \omega C}$, so ist die κ te Stromoberwelle mit ihrer Spannungswelle in Phase, es besteht Resonanz für die betr. Harmonische. Der Strom dieser Oberwelle erreicht sein Maximum

$$i_{\kappa m} = \frac{p_{\kappa m}}{R}.$$

Für mehrwellige Ströme gibt es daher so viele Resonanzmöglichkeiten, wie Wellen von verschiedener Periodenzahl in der Stromkurve vorkommen.

Beispiel. In einem Stromkreis sei $R = 10$ Ohm, $C = 5$ Mfd., $L = 0,225$ Henry. Resonanz für die κ te Welle tritt ein, wenn

$$\kappa c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{10^3}{2\pi\sqrt{0,225 \cdot 5}} = 150,$$

also für die Grundwelle	$\kappa = 1,$	bei $c = 150$
„ „ dritte Oberwelle	$\kappa = 3,$	„ $c = 50$
„ „ fünfte „	$\kappa = 5,$	„ $c = 30$
„ „ siebente „	$\kappa = 7,$	„ $c = 21,4$
„ „ neunte „	$\kappa = 9,$	„ $c = 16,7$ usf.

Hat die Grundwelle 50 Perioden, so besteht Resonanz für die dritte Oberwelle, diese ist in der Stromkurve am stärksten ausgeprägt.

Es sei die Spannung rechteckig und ihre Amplitude $p_m = 100$ Volt, so sind die Effektivwerte der einzelnen Spannungsharmonischen nach S. 77, Gl. 83

$$P_1 = \frac{4}{\pi\sqrt{2}} 100 = 90 \text{ Volt}$$

$$P_3 = \frac{1}{3} \frac{4}{\pi\sqrt{2}} 100 = 30 \text{ Volt}$$

$$P_5 = \frac{1}{5} \frac{4}{\pi\sqrt{2}} 100 = 18 \text{ Volt}$$

.

Die Effektivwerte der einzelnen Stromharmonischen sind dann für $c = 50$

$$J_x = \frac{P_x}{\sqrt{10^2 + \left(x \cdot 314 \cdot 0,225 - \frac{10^6}{x \cdot 314 \cdot 5} \right)^2}}$$

$J_1 = 0,159$ Amp.

$J_3 = 3,0$ „

$J_5 = 0,079$ „

.

Die Grundwelle des Stromes beträgt also nur $5,3\%$ von der dritten Oberwelle, die übrigen Oberwellen sind noch wesentlich kleiner. Vernachlässigt man diese und bildet den Effektivwert aus Grundwelle und dritter Oberwelle, so wird er

$$J = J_3 \sqrt{1 + \left(\frac{J_1}{J_3} \right)^2} = J_3 \sqrt{1 + 0,053^2} = 1,002 J_3.$$

Er weicht nur um $0,2\%$ von dem der dritten Oberwelle ab.

Durch Veränderung von L und C bei konstanter Periodenzahl kann Resonanz für die verschiedenen Harmonischen hergestellt werden, man kann diese experimentell trennen. Ein hierauf beruhendes Verfahren ist von Armagnat (Journal de physique 1902) angegeben.

Praktisch werden Resonanzstromkreise zur Verstärkung bestimmter Harmonischen, z. B. bei Hochfrequenzgeneratoren, für Funkentelegraphie angewendet.

Man kann aber auch Resonanzkreise verwenden, um bestimmte Oberwellen zu unterdrücken. Bei Wechselstrommaschinen entstehen z. B. störende Oberwellen von hoher Periodenzahl durch die Nuten, in denen die Ankerwicklung liegt. Solche Oberwellen verursachen bei Fernleitungen oft Störungen in benachbarten Telephonleitungen. Zur Beseitigung schaltet man (s. Fig. 65) zwischen die Klemmen der Wechselstrommaschine einen auf die betr. Oberschwingung abgestimmten Resonanzstromkreis, der aus einer Drosselspule und einem Kondensator besteht. In diesem Stromkreis entsteht dann ein Strom,

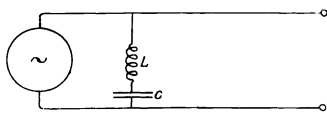


Fig. 65.

der fast nur die betr. Oberschwingung enthält und die Oberwelle der Generatorspannung durch die Ankerrückwirkung herabsetzt. Die Oberschwingung in der Generatorspannung an den Klemmen ist dann nur noch gleich dem Ohmschen Spannungsabfall

in dem abgestimmten Stromkreis, sie vermag im allgemeinen keinen nennenswerten Strom von dieser Frequenz mehr in die Leitung zu senden, außer wenn in dieser zufällig auch Resonanz für diese Frequenz besteht. In diesem Falle verhalten sich die Oberströme in dem abgestimmten Stromkreis und in der Leitung umgekehrt wie die Ohmschen Widerstände. Macht man den Widerstand des abgestimmten Stromkreises verschwindend klein, so können auch in diesem Falle die Oberströme aus der Leitung fast ganz beseitigt werden.

Als Folge der ungleichen Kurvenformen von Strom und Spannung gilt ferner, daß für einen Kondensator das Verhältnis der Effektivwerte $\frac{J}{P}$ kein direktes Maß für die Kapazität ist.

Ist $P = \sqrt{\sum P_{\kappa}^2}$, so ist der Ladestrom

$$J = \omega C \sqrt{\sum (\kappa P_{\kappa})^2},$$

daher

$$\frac{J}{P} = \omega C \sqrt{\frac{\sum (\kappa P_{\kappa})^2}{\sum P_{\kappa}^2}}.$$

Der Wurzelausdruck ist für eine Sinuskurve gleich 1, für andere kann er stark davon abweichen.

Für die dreieckige Spannungskurve war nach S. 90 der Ladestrom rechteckig. Hier ist also

$$P = \frac{p_m}{\sqrt{3}}, \quad J = i_m = \frac{2}{\pi} \omega C p_m,$$

daher

$$\frac{J}{P} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \omega C = 1,10 \omega C.$$

Bei einer Induktivität (mit kleinem Ohmschen Widerstand) ist

$$J = \frac{1}{\omega L} \sqrt{\sum \left(\frac{P_{\kappa}}{\kappa}\right)^2},$$

daher

$$\frac{P}{J} = \omega L \sqrt{\frac{\sum P_{\kappa}^2}{\sum \left(\frac{P_{\kappa}}{\kappa}\right)^2}}.$$

Dieser Ausdruck weicht im allgemeinen wenig von 1 ab. Für das Dreieck war z. B. die Stromkurve aus 2 Parabelstücken zusammengesetzt (s. S. 90, Fig. 63). Hier erhält man

$$J = i_m \sqrt{\frac{8}{15}} = \frac{p_m \pi}{\omega L 2} \sqrt{\frac{2}{15}}$$

$$P = \frac{p_m}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{P}{J} = \omega L \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{15}{6}} = 1,006 \omega L.$$

Die Selbstinduktion kann daher wesentlich genauer gemessen werden. Um eine Kapazität durch Strom- und Spannungsmessung zu bestimmen, schaltet man sie mit einer veränderlichen Induktivität in Reihe und stellt auf Resonanz für die Grundwelle ein. Man hat dann

$$\omega C = \frac{1}{\omega L},$$

worin ωL durch Strom- und Spannungsmessung genügend genau bestimmt werden kann.

37. Graphische Darstellung von mehrwelligen Strömen.

Die Verwendung der Vektordiagramme bietet bei den Wechselstromproblemen so viele Vorteile, daß man sie auch bei mehrwelligen Strömen verwendet. Es soll nun untersucht werden, welchen Fehler man hierbei begeht, und wann die graphische Darstellung genau ist.

Auf S. 91 wurde gezeigt, daß für die Leistung eines mehrwelligen Stromes die Gleichung gilt

$$W = \sum P_n J_n \cos \varphi_n,$$

worin P_n , J_n die Effektivwerte von Strom und Spannung der einzelnen Harmonischen, φ_n ihre Phasenverschiebung ist. Diese Leistung kann nicht direkt durch das Produkt der Effektivwerte von Strom und Spannung der resultierenden Kurven ausgedrückt werden.

Ersetzt man die mehrwellige Spannung P durch eine einwellige Spannung von gleichem Effektivwert, und ebenso den mehrwelligen Strom J durch einen einwelligen vom gleichen Effektivwert, so kann die Leistung auch geschrieben werden

$$W = PJ \cos \varphi.$$

Hierin ist P die äquivalente Sinusspannung, J der äquivalente Sinusstrom, $\cos \varphi$ der Leistungsfaktor.

Mit diesen Größen rechnet man in der Praxis gewöhnlich und trägt J gegen P unter dem Winkel φ im Diagramm auf.

Es ist dann

$$\frac{P}{J} = z \text{ die resultierende Impedanz,}$$

$$\frac{W}{J^2} = \frac{P \cos \varphi}{J} = R \text{ der resultierende Widerstand,}$$

$$\frac{P \sin \varphi}{J} = \sqrt{z^2 - R^2} = X \text{ die resultierende Reaktanz.}$$

Diese Größen, die sich somit stets durch Messung der Effektivwerte von Strom und Spannung und der Leistung ermitteln lassen, sind aber von der Kurvenform mehr oder weniger abhängig.

Der effektive Widerstand weicht vom Ohmschen Widerstand im allgemeinen ab, weil bei hohen Periodenzahlen der Strom sich ungleichmäßig über den Querschnitt verteilt, was einer Erhöhung des Widerstandes besonders für die Oberschwingungen von hoher Frequenz gleich kommt.

Sieht man davon ab und betrachtet R als konstant, so ist

$$P \cos \varphi = RJ = R \sqrt{\sum J_n^2} = \sqrt{\sum P_n^2} \cos^2 \varphi_n,$$

und
$$P \sin \varphi = \sqrt{\sum P_n^2} \sin^2 \varphi_n.$$

Die effektive Reaktanz $X = \frac{P \sin \varphi}{J}$ weicht stets von der Reaktanz für die Grundperiodenzahl mehr oder weniger ab, auch wenn R , L und C als konstant betrachtet werden.

Für einen induktiven Stromkreis sei X_i die Reaktanz ωL für die Grundperiodenzahl, für die Periodenzahl κc ist

$$X_{i\kappa} = \kappa \omega L.$$

Daher
$$J_n = \frac{P_n \sin \varphi_n}{\kappa X_i}$$

$$J = \sqrt{\sum J_n^2} = \frac{1}{X_i} \sqrt{\sum \left(\frac{P_n \sin \varphi_n}{\kappa} \right)^2}.$$

Dagegen ist
$$P \sin \varphi = \sqrt{\sum (P_n \sin \varphi_n)^2},$$

daher
$$X = \frac{P \sin \varphi}{J} = X_i \sqrt{\frac{\sum (P_n \sin \varphi_n)^2}{\sum \left(\frac{P_n \sin \varphi_n}{\kappa} \right)^2}}.$$

Die Abweichung, die durch den Wurzelausdruck gegeben ist, ist meistens nicht groß.

Bei einem Stromkreis mit Widerstand und Kapazität ist dagegen der Fehler größer, es wird

$$X = \frac{P \sin \varphi}{J} = X_c \sqrt{\frac{\sum (P_n \sin \varphi_n)^2}{\sum (\kappa P_n \sin \varphi_n)^2}},$$

worin $X_c = \frac{1}{\omega C}$ die Reaktanz für die Grundperiodenzahl ist.

Analog definiert man

$$\frac{J}{P} = y = \text{effektive Admittanz}$$

$$\frac{W}{P^2} = \frac{J \cos \varphi}{P} = g = \text{ „ Konduktanz}$$

$$\sqrt{y^2 - g^2} = \frac{J \sin \varphi}{P} = b = \text{ „ Suszeptanz.}$$

Während also nach der Definition des Leistungsfaktors

$$PJ \cos \varphi = \sum P_n J_n \cos \varphi_n$$

ist, wird $PJ \sin \varphi \neq \sum P_n J_n \sin \varphi_n$.

Nimmt man wieder R als konstant an, so ist

$$J_n = \frac{1}{R} P_n \cos \varphi_n$$

und $\sum P_n J_n \sin \varphi_n = \sum \frac{P_n^2}{R} \cos \varphi_n \sin \varphi_n$.

Dagegen war

$$P \sin \varphi = \sqrt{\sum P_n^2 \sin^2 \varphi_n}$$

$$J = \sqrt{\sum J_n^2} = \frac{1}{R} \sqrt{\sum P_n^2 \cos^2 \varphi_n}.$$

Man erhält daher

$$\frac{\sum P_n J_n \sin \varphi_n}{PJ \sin \varphi} = \frac{\sum P_n^2 \cos \varphi_n \sin \varphi_n}{\sqrt{\sum (P_n \sin \varphi_n)^2} \sqrt{\sum (P_n \cos \varphi_n)^2}} = F. \quad (99)$$

Der Faktor F ist stets kleiner als 1 und wird Induktionsfaktor genannt.

Bei einem Stromkreis mit R und L ist

$$P_n \cos \varphi_n = R J_n, \quad P_n \sin \varphi_n = \kappa X_i J_n,$$

daher

$$F = \frac{\sum \kappa J_n^2}{\sqrt{\sum (\kappa J_n)^2} \sqrt{\sum J_n^2}} = \frac{J_1^2 + 3 J_3^2 + 5 J_5^2 + \dots}{J \sqrt{J_1^2 + 9 J_3^2 + 25 J_5^2 + \dots}} \quad (99a)$$

Enthält der Stromkreis Kapazität und Widerstand, und setzt man

$$P_n \sin \varphi_n = \frac{J_n X_c}{\kappa},$$

so erhält man analog

$$F = \frac{J_1^2 + \frac{1}{3} J_3^2 + \frac{1}{5} J_5^2 + \dots}{J \sqrt{J_1^2 + \frac{1}{9} J_3^2 + \frac{1}{25} J_5^2 + \dots}} \dots \dots \dots \quad (99b)$$

Daher ist F stets kleiner als 1.

Hiernach ergibt sich die Bedingung, wann die graphische Addition von Strömen und Spannungen im Diagramm richtig ist, wie folgt.

Bei parallelgeschalteten Stromkreisen ist die Spannung P für alle dieselbe. Sind J' , J'' die Ströme, W' , W'' die Leistungen zweier paralleler Stromkreise, so ist die gesamte Leistung

$$W = W' + W'' = P(J' \cos \varphi' + J'' \cos \varphi'') = PJ \cos \varphi,$$

daher

$$J' \cos \varphi' + J'' \cos \varphi'' = J \cos \varphi.$$

Die Wattkomponente des gesamten äquivalenten Sinusstromes ist nach der Definition des Leistungsfaktors gleich der Summe der Wattkomponenten der äquivalenten Sinusteilströme.

Die wattlosen Komponenten können dagegen nur unter Berücksichtigung ihrer Induktionsfaktoren addiert werden.

$$FPJ \sin \varphi = P(F'J' \sin \varphi' + F''J'' \sin \varphi'')$$

$$FJ \sin \varphi = F'J' \sin \varphi' + F''J'' \sin \varphi''.$$

Diese Gleichung ist aber im allgemeinen im Diagramm nicht erfüllt. Im Diagramm ist vielmehr

$$J \sin \varphi = J' \sin \varphi' + J'' \sin \varphi''.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit F und subtrahiert sie von der vorhergehenden, so ergibt sich die Bedingung, unter der das Diagramm die Addition richtig darstellt:

$$(F' - F)J' \sin \varphi' + (F'' - F)J'' \sin \varphi'' = 0.$$

Analog erhält man bei in Reihe geschalteten Stromkreisen

$$(F' - F)P' \sin \varphi' + (F'' - F)P'' \sin \varphi'' = 0.$$

Die graphische Addition von Strömen und Spannungen ist hiernach stets richtig, wenn

$$F' = F'' = F$$

ist. Dies gilt z. B. für Stromkreise, in denen das Verhältnis von R , L und C das gleiche ist, dann ist nämlich

$$\varphi' = \varphi'' = \varphi.$$

Die graphische Addition ist ferner richtig, wenn alle Stromkreise bis auf einen induktionsfrei sind. Dann ist nämlich die wattlose Komponente des gesamten Stromes gleich der des einen induktiven Stromkreises.

daher

$$J \sin \varphi = J' \sin \varphi',$$

$$F = F'.$$

Bei Stromkreisen, bei denen die Kapazität keine Rolle spielt und bei denen, wie es häufig der Fall ist, die induktive Reaktanz der Periodenzahl proportional ist, weichen die Induktionsfaktoren auch für verschiedene Verhältnisse von R zu L nicht viel voneinander ab. Dann ist die graphische Addition sehr angenähert richtig.

Beispiel. Die Spannung zweier parallelgeschalteter Stromkreise sei wie folgt zusammengesetzt.

$$P_1 = 100, \quad P_3 = 30, \quad P_5 = 20.$$

Im ersten Stromkreis ist $R' = 5, \quad \omega L' = 5,$

im zweiten „ „ $R'' = 4, \quad \omega L'' = 8.$

Man erhält

$$\begin{array}{ll} P = 106,3 & \\ J' = 14,29 & J'' = 11,26 \\ W' = 1021 & W'' = 507 \\ J' \cos \varphi' = 9,605 & J'' \cos \varphi'' = 4,770 \\ J' \sin \varphi' = 10,57 & J'' \sin \varphi'' = 10,20 \\ F' = 0,952 & F'' = 0,965. \end{array}$$

Die beiden Induktionsfaktoren weichen also nur um $1,4^0/0$ voneinander ab. Der Gesamtstrom ist

$$J = 25,22, \quad J \cos \varphi = 14,375, \quad J \sin \varphi = 20,72, \quad F = 0,961,$$

während $J' \sin \varphi' + J'' \sin \varphi'' = 20,77$ ergibt, also ein von $J \sin \varphi$ nur um $0,25^0/0$ abweichendes Resultat.

Achtes Kapitel.

Mehrphasenströme.

38. Die Mehrphasensysteme. — 39. Symmetrische Mehrphasensysteme. — 40. Verkettete Mehrphasensysteme. — 41. Balancierte und unbalancierte Mehrphasensysteme. — 42. Das Dreiphasensystem. — 43. Berechnung einer Sternschaltung. — 44. Dreieckschaltung. Die Beziehung der Phasenströme zu den Linienströmen. — 45. Transfigurierung einer Dreieckschaltung in eine Sternschaltung. — 46. Berechnung der Spannungserhöhung bei einem Mehrphasensystem. — 47. Das Zweiphasen-Dreileitersystem. — 48. Mehrwellige Ströme in Mehrphasensystemen. — 49. Messung der Leistung von Mehrphasenströmen.

38. Die Mehrphasensysteme.

Auf dem Anker einer zweipoligen Maschine seien eine Anzahl voneinander isolierter Spulen auf dem Umfang verteilt angeordnet (s. Fig. 66).

Bei der Drehung im magnetischen Felde entsteht in jeder Spule eine Wechselspannung, die als sinusförmig angenommen werden möge; alle Spannungen haben dieselbe Periodenzahl, sie sind aber in der Phase gegeneinander verschoben.

Wenn die Spule 1 zur Zeit $t=0$ den ganzen Fluß umschlingt, kann die Spannung dieser Spule gesetzt werden

$$p_1 = p_{1m} \sin \omega t.$$

In der Spule 2, die gegen die erste um den Winkel α_{12} zurückliegt, ist dann

$$p_2 = p_{2m} \sin (\omega t - \alpha_{12}).$$

Alle Vorgänge in der Spule 2 sind gegen jene der Spule 1 um eine Zeit $\frac{\alpha_{12}}{\omega}$ verspätet, die dem Winkel der räumlichen Verschiebung

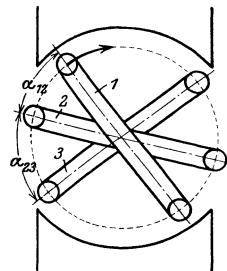


Fig. 66.

entspricht. In Spule 3, die um α_{23} gegen Spule 2, also um $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$ gegen Spule 1 zurückliegt, ist

$$p_3 = p_{3m} \sin(\omega t - \alpha_{13}).$$

Schließt man jede Spule über einen Stromkreis, so erhält man eine entsprechende Zahl von Strömen gleicher Periodenzahl, deren Größe von den Spannungen und den Impedanzen der Stromkreise abhängen, und deren Phasenwinkel durch die der Spannungen und die Phasenwinkel der Belastungen, d. h. durch das Verhältnis von Reaktanz zu Widerstand des betr. Stromkreises gegeben sind.

Ein solches System, bei dem eine Anzahl gegeneinander phasenverschobener Spannungen von gleicher Frequenz gegeneinander phasenverschobene Wechselströme erzeugt, nennt man allgemein ein Mehrphasensystem.

Für die einzelnen Teile des Mehrphasensystems, von denen jedes aus der Stromquelle (der Spule), der Leitung und der Belastung besteht, wird häufig die nicht ganz korrekte Bezeichnung „Phase“ verwendet.

Nach der Art des Aufbaus und der Wirkungsweise unterscheidet man bei den Mehrphasensystemen:

1. symmetrische und unsymmetrische Systeme,
2. abhängige oder verkettete und unverkettete Systeme,
3. balancierte und unbalancierte Systeme.

39. Symmetrische Mehrphasensysteme.

Unter einem symmetrischen Mehrphasensystem versteht man ein solches, bei dem alle Spannungen gleichgroß sind und bei dem je zwei aufeinanderfolgende Spannungen um den gleichen Phasenwinkel gegeneinander phasenverschoben sind. Ist also n die „Phasenzahl“, so ist jeweils die Spannung einer Spule gegen die der vorhergehenden um $\frac{1}{n}$ tel der Periode, d. h. um $\frac{2\pi}{n}$ verzögert.

Somit sind die n Spannungen eines symmetrischen „ n -Phasensystems“

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_m \sin \omega t \\ p_2 &= p_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right) \\ p_3 &= p_m \sin \left(\omega t - 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \\ &\dots \dots \dots \\ p_n &= p_m \sin \left[\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right] \end{aligned} \right\} \dots (100)$$

Beispiele. Für $n=1$ ergibt sich nur eine Spannung, d. h. ein gewöhnliches Einphasensystem mit einer Hin- und einer Rückleitung.

$n=2$ ergibt zwei um 180° gegeneinander verschobene, also gleichphasige aber einander entgegengerichtete Spannungen. Schaltet man die Spulen so hintereinander, daß die Spannungen untereinander gleichgerichtet sind, so kann man jede auf einen Stromkreis wirken lassen, s. Fig. 67, indem man von dem Verbindungspunkt O einen dritten Leiter zieht. In diesem Leiter fließt die Differenz der Ströme der beiden Außenleiter, sie ist bei gleicher Belastung der beiden Stromkreise gleich Null, der dritte Leiter heißt daher Nulleiter, das ganze System das Einphasensystem mit Nulleiter.

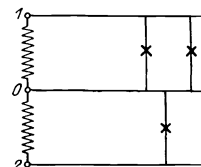


Fig. 67.

Für $n=3$ erhält man drei um 120° gegeneinander phasenverschobene Spannungen, das sog. Dreiphasensystem. Da $n=2$ noch gleichphasige Spannungen ergab, ist das Dreiphasensystem somit das erste eigentliche Mehrphasensystem, dem man in der Zahlenreihe für n begegnet und somit das von kleinster Phasenzahl.

$n=4$ ergibt vier um 90° gegeneinander phasenverschobene Spannungen, das Vierphasensystem. Je zwei dieser Spannungen sind wieder um 180° gegeneinander phasenverschoben. Schaltet man die Spulen so, daß diese Spannungen untereinander gleichgerichtet sind, so erhält man 2 Systeme mit 90° gegeneinander verschobenen Spannungen, also ein Zweiphasensystem, das aber unsymmetrisch ist (s. S. 123).

40. Verkettete Mehrphasensysteme.

Arbeitet jede Phase für sich auf einen Belastungsstromkreis, so sind für n Phasen zur Fortleitung des Stromes $2n$ Leitungen erforderlich. Die Zahl der Leitungen kann bei symmetrischen Systemen auf n , bei unsymmetrischen auf $(n+1)$ herabgesetzt werden durch elektrische Verkettung der Phasen.

Von den Verkettungen sind am wichtigsten die Sternschaltungen und die Ringschaltungen. Auch Kombinationen von beiden kommen vor.

1. Die Sternschaltung entsteht dadurch, daß die Anfänge aller Spulen zu einem Knotenpunkt, dem Sternpunkt oder neutralen Punkt zusammengelegt werden, während die Enden die Klemmen für die Fortleitung bilden.

Ist das System unsymmetrisch, so ist zu den n Leitungen noch

eine weitere erforderlich. Fig. 68 zeigt ein unsymmetrisches Vierphasensystem. Die Spulen sind um den Phasenverschiebungswinkel α zwischen den Spannungen benachbarter Spulen gegeneinander verschoben gezeichnet. Die Belastung wird durch vier gleichgroße Impedanzen in analoger Schaltung gebildet, die Sternpunkte O und O' sind durch einen fünften Leiter verbunden. Wegen der Gleichheit der Spannungen und der Impedanzen sind die 4 Belastungsströme gleichgroß und gegeneinander um denselben Winkel α wie die Spannungen verschoben. Nach dem ersten Kirchhoffschen Satz ist die Summe aller in einem Knotenpunkt zusammenfließenden Ströme in jedem Augenblick gleich Null, daher ist der Strom im Verbindungsleiter der Sternpunkte

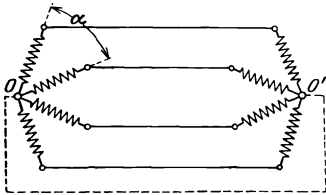


Fig. 68.

er ist entgegengesetzt gleich der Summe der 4 Belastungsströme.

$$i_0 = -(i_1 + i_2 + i_3 + i_4),$$

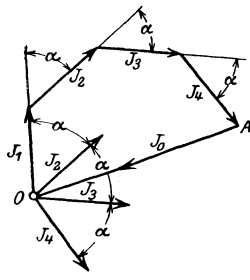


Fig. 69.

In dem Vektordiagramm Fig. 69 ist OA die geometrische Summe der 4 Ströme J_1 bis J_4 , und der Strom J_0 ist somit die im Sinne AO durchlaufene Schlußlinie des Strompolygons. J_0 ist dabei positiv vom Stromerzeuger

zum Stromverbraucher gerechnet.

Ist das System symmetrisch, d. h. sind je zwei Spannungen um $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander phasenverschoben, so haben bei symmetrischer

Belastung auch die Ströme diese Phasenverschiebung untereinander, und da sie gleichgroß sind, schließt sich das Polygon der Ströme, wie Fig. 70 für $n=5$ zeigt. Die Verbindungsleitung der Sternpunkte ist stromlos und kann fortgelassen werden. Weil sie bei einem symmetrisch belasteten symmetrischen Mehrphasensystem stromlos ist, heißt die Verbindung der Sternpunkte Nulleiter oder neutraler Leiter.

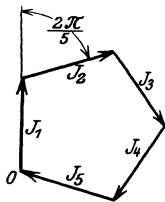


Fig. 70.

Zur Fortleitung eines symmetrischen n -Phasensystems sind somit n Leitungen erforderlich.

Phasenspannung und Linienspannung. Die Spannung zwischen dem Sternpunkt eines Sternsystems und dem Endpunkt einer Spule (Phase) heißt die

Phasenspannung. Alle Spulenenden haben gegen den Sternpunkt die gleiche effektive Spannung. Bei einem symmetrischen System ist er der Spannungsmittelpunkt des Systems. Die Spannung zwischen zwei benachbarten Spulenenden ist die Differenz der beiden Phasenspannungen dieser Spulen, sie heißt die Linienspannung oder die verkettete Spannung.

Nach Gl. 100 sind die Spannungen der x ten und $(x + 1)$ ten Phase

$$p_x = p_m \sin \left[\omega t - (x - 1) \frac{2\pi}{n} \right],$$

$$p_{(x+1)} = p_m \sin \left[\omega t - x \frac{2\pi}{n} \right],$$

daher ist die Linienspannung

$$p_l = p_x - p_{(x+1)} = 2 p_m \sin \frac{2\pi}{n} \cos \left[\omega t - (2x - 1) \frac{\pi}{n} \right].$$

Der Effektivwert P_l der Linienspannung berechnet sich daher aus dem der Phasenspannung P

$$P_l = 2 P \sin \frac{2\pi}{n} \dots \dots \dots (101)$$

In dem Vektordiagramm Fig. 71 sind OP_1 bis OP_5 die Phasenspannungen eines symmetrischen Fünfphasensystems, $P_{1,2}$ bis $P_{5,1}$ die Linienspannungen. $P_{1,2}$ ist die geometrische Differenz von P_1 und P_2 usw.

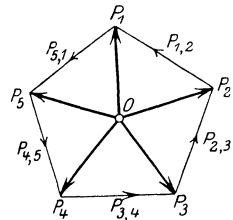


Fig. 71.

Das Polygon der Linienspannungen schließt sich, die Summe der Linienspannungen ist Null.

Dies gilt sowohl für die Effektivwerte von einwilligen Spannungen als auch für die Momentanwerte beliebiger Spannungen. Denn es ist

$$p_{1,2} = p_1 - p_2$$

$$p_{2,3} = p_2 - p_3$$

.....

$$p_{(n-1),n} = p_{(n-1)} - p_n$$

$$p_{n,1} = p_n - p_1.$$

Die Summe der linken Seiten ist die Summe aller momentanen Linienspannungen, die Summe der rechten Seiten wird identisch Null.

2. Das Ringsystem entsteht dadurch, daß das Ende einer Spule mit dem Anfang der folgenden verbunden wird, wie Fig. 72 für vier

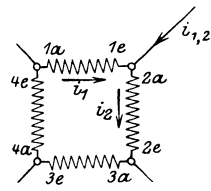


Fig. 72.

Phasen zeigt. Sind die Phasenspannungen einwellig, so ist ihre Summe bei einem symmetrischen System gleich Null. Im Vektordiagramm ergibt die Summation der Effektivwerte ein geschlossenes Polygon (Fig. 73). In dem geschlossenen Ring fließt daher zunächst kein Strom, sondern erst dann, wenn an die Knotenpunkte Belastungswiderstände angeschlossen werden.

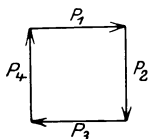


Fig. 73.

Die Spannung zwischen zwei Leitungen, d. h. die Linienspannung ist hier gleich der Phasenspannung.

Dagegen sind hier zweierlei Ströme zu unterscheiden, die Ringströme i und die Linienströme i_l .

Von jedem Knotenpunkt des Ringes geht eine Leitung fort, und es ist in jedem Augenblick die Summe der Ströme, die an einem solchen Knotenpunkt zusammentreffen, gleich Null. Es ist also z. B. für den Knotenpunkt der Phasen 1 und 2 (s. Fig. 72)

$$-i_{12} + i_2 - i_1 = 0$$

$$i_{12} = i_2 - i_1.$$

Der Liniensstrom ist die Differenz der beiden Phasenströme. Bei symmetrischer Belastung eines symmetrischen Systems ist

$$i_{(x+1)} = i_m \sin \left[\omega t - x \frac{2\pi}{n} \right],$$

$$i_x = i_m \sin \left[\omega t - (x-1) \frac{2\pi}{n} \right],$$

daher

$$i_l = i_{(x+1)} - i_x = -i_m 2 \sin \frac{2\pi}{n} \cos \left[\omega t - (2x-1) \frac{2\pi}{n} \right];$$

daher gilt für die Effektivwerte

$$\mathbf{J}_l = 2\mathbf{J} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \dots \dots (102)$$

Berechnet man hier die Summe aller Linienströme, so kommt darin jeder Phasenstrom einmal mit dem positiven und einmal mit dem negativen Vorzeichen vor, wie auf S. 107 für die Linienspannungen gezeigt war; die Summe wird ebenfalls Null. Beim Ringsystem ist also in jedem Augenblick die Summe aller Linienströme unabhängig von der Kurvenform gleich Null.

41. Balancierte und unbalancierte Mehrphasensysteme.

Die Leistung eines Mehrphasensystems ist gleich der Summe der Leistungen der einzelnen Phasen, es ist also

$$w = \sum_{x=1}^{x=n} p_x i_x.$$

Die Leistung eines Wechselstromes pulsiert nach Kap. I S. 11 mit der doppelten Frequenz um den Mittelwert

$$PJ \cos \varphi,$$

der Momentanwert ist

$$w = PJ [\cos \varphi - \cos (2 \omega t - \varphi)] = W \left[1 - \frac{\cos (2 \omega t - \varphi)}{\cos \varphi} \right].$$

Bei einem symmetrischen und symmetrisch belasteten Mehrphasensystem sei für die x te Phase

$$p_x = \sqrt{2} P \sin \left[\omega t - (x-1) \frac{2\pi}{n} \right],$$

$$i_x = \sqrt{2} J \sin \left[\omega t - (x-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right],$$

$$w_x = p_x i_x = PJ \left\{ \cos \varphi - \cos \left[2 \omega t - 2 (x-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right] \right\}.$$

Bildet man die Summe aller w_x von $x=1$ bis $x=n$, so wird

$$\sum_{x=1}^{x=n} \cos \left[2 \omega t - 2 (x-1) \frac{2\pi}{n} - \varphi \right] = 0$$

und

$$w = \sum_1^n w_x = n P J \cos \varphi \dots \dots \dots (103)$$

Die momentane Leistung eines gleichmäßig belasteten symmetrischen Mehrphasensystems ist konstant gleich dem n -fachen Mittelwert der Leistung einer Phase.

Je nachdem bei einem Mehrphasensystem die Leistung konstant ist oder nicht, nennt man es ein balanciertes oder ein unbalanciertes System.

Symmetrische Systeme sind, wie gezeigt, balanciert, wenn sie gleichmäßig belastet sind; bei ungleichmäßiger Belastung pulsiert die Leistung, das System ist dann unbalanciert. Auch unsymmetrische Systeme können bei gleichmäßiger Belastung balanciert sein, z. B. das Zweiphasen-Dreileitersystem (s. S. 123).

Entsprechend der konstanten Leistung eines balancierten Mehrphasensystems kann bei einem Motor, der mit einem solchen Strom-

system betrieben wird, eine konstante Zugkraft erhalten werden. Bei einem Motor, der mit Einphasenstrom gespeist wird, pulsiert dagegen die Zugkraft ebenso wie die Leistung mit der doppelten Frequenz des Stromes.

Die praktisch wichtigsten Mehrphasensysteme sind das Dreiphasensystem und das Zweiphasen-Dreileitersystem, ferner die Scottsche Schaltung, die alle nur drei Leitungen benötigen. Sie sollen im folgenden näher besprochen werden.

42. Das Dreiphasensystem.

Das Dreiphasensystem hat drei um 120° gegeneinander phasenverschobene Spannungen, die in Sternschaltung oder Ringschaltung verkettet werden.

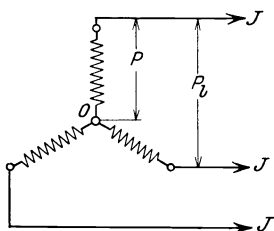


Fig. 74.

Bei der Sternschaltung Fig. 74 ist die Linienspannung

$$P_l = 2 P \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} P . \quad (104)$$

Der Linienstrom ist gleich dem Phasenstrom

$$J_l = J \quad (105)$$

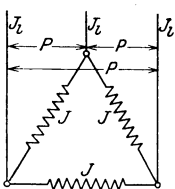


Fig. 75.

Bei gleicher Belastung der drei Phasen ist daher die Leistung

$$W = 3 P J \cos \varphi = \sqrt{3} P_l J_l \cos \varphi \quad (106)$$

In der Ringschaltung (Dreieckschaltung) Fig. 75 ist

$$P_l = P \quad (107)$$

bei gleichmäßiger Belastung

$$J_l = 2 J \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} J \quad (108)$$

$$W = 3 P J \cos \varphi = \sqrt{3} P_l J_l \cos \varphi \quad . . . (109)$$

43. Berechnung einer Sternschaltung.

Bei gleicher Belastung der verschiedenen Phasen einer symmetrischen Sternschaltung kann jede Phase wie bei einem Einphasensystem behandelt werden.

Bei Sternschaltung des Stromerzeugers und der Stromverbraucher nach Fig. 76 ist in jeder Phase die gleiche totale Impedanz $z = \sqrt{R^2 + X^2}$, daher ist der Strom jeder Phase

$$J = \frac{P}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

Die Leistung einer Phase

$$PJ \cos \varphi = P^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

Hierbei setzt sich die Impedanz z in jeder Phase zusammen aus der Impedanz z_b der Belastung und der Impedanz z_l der Leitung ev. einschließlich der Impedanz des Generators), s. Fig. 77.

Trägt man die drei Phasenspannungen P_1, P_2, P_3 gleich OP_1, OP_2, OP_3 auf, so sind die Linienspannungen am Generator $P_{12} = P_2 P_1, P_{23} = P_3 P_2, P_{31} = P_1 P_3$. Die drei Phasenströme J_1, J_2, J_3 sind alle um

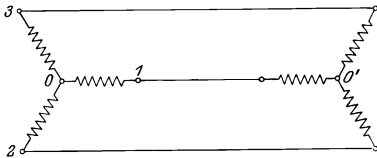


Fig. 76.

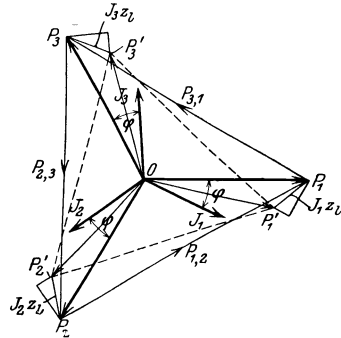


Fig. 77.

denselben Winkel φ gegen ihre Phasenspannungen verzögert und gleichgroß. Subtrahiert man nun von den Phasenspannungen $P_1 P_2 P_3$ den Spannungsabfall Jz_l in jeder der drei Leitungen, so erhält man OP'_1, OP'_2 und OP'_3 als die drei Phasenspannungen an den Klemmen der Belastung, und das Dreieck der Linienspannungen an den Klemmen der Belastung ist $P'_1 P'_2 P'_3$. Die Seiten des Dreiecks sind gegen $P_1 P_2, P_2 P_3$ und $P_3 P_1$ im gleichen Verhältnis verkleinert und um den gleichen Winkel gedreht wie die Phasenspannungen OP'_1 gegen OP_1 usf. Hieraus folgt, daß bei symmetrischer Belastung das Spannungsdreieck gleichseitig bleibt, und daß der prozentuale Spannungsabfall bezogen auf die Linienspannung gleich ist dem Spannungsabfall einer Phase. Man braucht daher nur den Spannungsabfall wie bei einer Einphasenleitung nach Kap. IV für eine Phase der Sternschaltung zu berechnen.

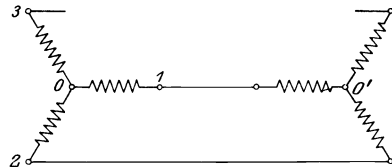


Fig. 78.

Ist die Belastung unsymmetrisch, so wird das Spannungsdreieck dagegen stark verzerrt. Nehmen wir z. B. an, zwei Phasen seien noch gleich belastet, die dritte aber sei unterbrochen ($z = \infty$), s.

Fig. 78. Die Impedanzen der beiden anderen Phasen sind jetzt in Reihe an die Linienspannung angeschlossen, in beiden fließt derselbe Strom wie bei einem Einphasensystem. Er ist aber jetzt nur noch $\frac{P_l}{2z}$, während er zuvor $\frac{P}{z}$ war, und da $P_l = \sqrt{3}P$, ist er jetzt nur $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$ von dem früheren Wert. Fig. 79 zeigt das

Spannungsdiagramm. Die Linienspannung $P_{12} = P_2P_1$ teilt sich zu gleichen Teilen $P_0P_2 = P_0P_1$ auf die beiden in Reihe geschalteten Impedanzen. Zwischen dem neutralen Punkt des Generators und dem der Belastung besteht die Spannung OP_0 , und zwischen den Enden der unterbrochenen Leitung besteht die Spannung P_3P_0 , die größer ist als die Phasenspannung OP_3 des Generators. Der Strom ist gegen die Linienspannung $P_{12} = P_2P_1$ um φ verzögert; subtrahiert man den Spannungsabfall Jz_l in den beiden stromführenden Leitungen, so erhält man die Linienspannung $P_2'P_1'$ und das Spannungsdreieck $P_1'P_2'P_3$ an den Klemmen der Belastung, das nun nicht mehr gleichseitig ist. Was hier für vollständige Unterbrechung einer Phase gezeigt wurde, gilt analog, wenn die Belastung einer Phase wesentlich schwächer ist als die der beiden anderen: an der am schwächsten belasteten Phase tritt eine Erhöhung der Spannung auf, an den anderen eine Verkleinerung.

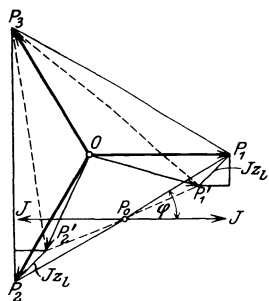


Fig. 79.

Infolge dieser gegenseitigen Beeinflussung der Ströme der verschiedenen Phasen ist es im allgemeinen nicht möglich, Glühlampen in Stern zu schalten, weil beim Abschalten einzelner Lampen die Spannungen sich an den übrigen stark ändern. Wenn sie in Stern geschaltet werden, ist ein neutraler Leiter erforderlich.

Analytische Berechnung der Stromverteilung einer Sternschaltung.

Es soll nun die Aufgabe behandelt werden, bei beliebiger Belastung eines Sternsystems mit oder ohne neutralen Leiter die Stromverteilung zu berechnen. Gegeben seien die drei symmetrischen Spannungen des Generators P_1, P_2, P_3 (s. Fig. 80).

Zwischen dem neutralen Punkt des Generators und dem der Belastung besteht bei ungleicher Belastung der Phasen stets eine Spannung, wie dies soeben für ein Beispiel gezeigt wurde, bei dem kein neutraler Leiter vorhanden war. Aber auch bei Vor-

handensein eines solchen ist diese Spannung vorhanden, da bei ungleicher Belastung der Nulleiter nicht stromlos ist und daher ein Spannungsabfall in ihm besteht. Die Größe und Phase dieser Spannung ist zunächst unbekannt, wir bezeichnen sie mit P_0 , sie möge im Diagramm Fig. 80 durch die Strecke OP_0 dargestellt sein. Dann wirkt also auf jede Impedanz, die sich von dem neutralen Punkt des Generators über eine Leitung und den Belastungswiderstand bis zum neutralen Punkt der Belastung erstreckt, die Differenz aus der betr. Phasenspannung P_x und der Spannung P_0 . Diese drei Differenzen werden durch die Vektoren P_0P_1 , P_0P_2 , P_0P_3 dargestellt.

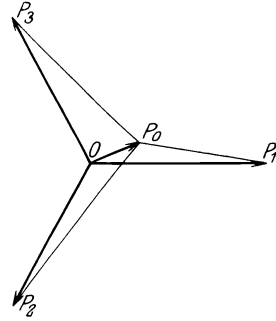


Fig. 80.

Sind daher z_1, z_2, z_3 die gesamten Impedanzen der drei Phasen vom neutralen Punkt des Generators bis zu dem der Belastung, z_0 die Impedanz des neutralen Leiters, so gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_0 &= \mathfrak{S}_1 \delta_1 \\ \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0 &= \mathfrak{S}_2 \delta_2 \\ \mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0 &= \mathfrak{S}_3 \delta_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110)$$

und für den Nulleiter

$$0 - \mathfrak{P}_0 = \mathfrak{S}_0 \delta_0.$$

Führt man an Stelle der Impedanzen z die Admittanzen y ein, so ist auch

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_0) y_1 \\ \mathfrak{S}_2 &= (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0) y_2 \\ \mathfrak{S}_3 &= (\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0) y_3 \\ \mathfrak{S}_0 &= - \mathfrak{P}_0 y_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (110 a)$$

Es ist nun die Summe aller vier Ströme gleich Null:

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_0 = 0.$$

Addiert man daher die vier Gleichungen 110a, so wird

$$\mathfrak{P}_0 (y_1 + y_2 + y_3 + y_0) = \mathfrak{P}_1 y_1 + \mathfrak{P}_2 y_2 + \mathfrak{P}_3 y_3.$$

und hieraus ermittelt sich zunächst

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{\sum \mathfrak{P}_x y_x}{(\sum y_x + y_0)} \dots \dots \dots (111)$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. 110a ergeben sich die vier Ströme.

Ist kein neutraler Leiter vorhanden, so ist in den Gl. 110 und 111 $\eta_0 = 0$ zu setzen.

Graphische Ermittlung. Man kann die soeben abgeleitete Rechnung auch graphisch durchführen. Dividiert man Gl. 111 beiderseits durch \mathfrak{P}_1 , so wird

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_1} = \frac{\sum \mathfrak{P}_x \eta_x}{\mathfrak{P}_1 (\sum \eta_x + \eta_0)} \quad \dots \dots \dots (112)$$

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion (Fig. 81).

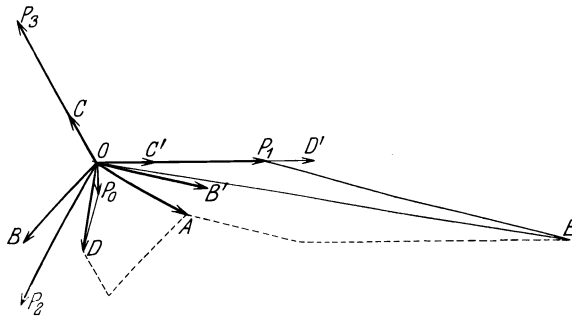


Fig. 81.

Man trägt

$$OA = \mathfrak{P}_1 \eta_1, \quad OB = \mathfrak{P}_2 \eta_2, \quad OC = \mathfrak{P}_3 \eta_3$$

auf, und bildet die Summe

$$OD = \sum \mathfrak{P}_x \eta_x.$$

Ist ferner

$$OA = \mathfrak{P}_1 \eta_1, \quad OB' = \mathfrak{P}_1 \eta_2, \quad OC' = \mathfrak{P}_1 \eta_3, \quad OD' = \mathfrak{P}_1 \eta_0,$$

so ist die Summe dieser vier Ströme

$$OE = \mathfrak{P}_1 (\sum \eta_x + \eta_0).$$

Nach Gl. 112 verhält sich daher

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_1} = \frac{OD}{OE}.$$

Macht man

$$\triangle OP_0D \sim \triangle OP_1E,$$

so ist OP_0 gleich P_0 nach Größe und Phase.

Eine andere graphische Ermittlung des Sternpunktes ergibt sich aus folgender Betrachtung.

a) Es ist kein Nulleiter vorhanden.

Nimmt man zunächst an, eine Phase z. B. 3 sei unterbrochen, so sind die beiden anderen 1 und 2 hintereinander an die Linien-

spannung P_{12} angeschlossen, und diese verteilt sich auf die beiden Zweige nach Maßgabe ihrer Impedanzen oder im umgekehrten Verhältnis ihrer Admittanzen.

Macht man daher in Fig. 82 a und b

$$P_2 P_0' : P_0' P_1 = \delta_2 : \delta_1 = \eta_1 : \eta_2 = OA : AB,$$

so ist OP_0' die Spannung zwischen Sternpunkt des Generators und dem der Belastung bei unterbrochener Phase 3. Sie ist nach Gl. 111 für $y_3 = 0$ und $y_0 = 0$,

$$\mathfrak{P}_0' = \frac{\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

Die Spannung zwischen der Klemme der unterbrochenen Leitung und dem Sternpunkt der Belastung ist daher

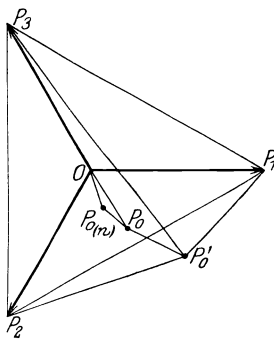


Fig. 82a.

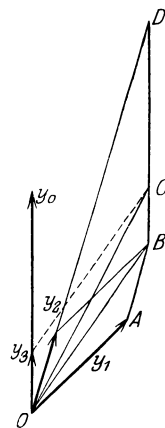


Fig. 82b.

$$P_3 P_0' = \mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0' = \frac{\mathfrak{P}_3 (\eta_1 + \eta_2) - (\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2)}{\eta_1 + \eta_2} \quad (113)$$

Ist nun die Admittanz der Phase 3 nicht Null sondern η_3 , so ist nach Gl. 111

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2 + \mathfrak{P}_3 \eta_3}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}$$

und

$$\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0 = \frac{\mathfrak{P}_3 (\eta_1 + \eta_2) - (\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)} \quad (113 a)$$

Durch Division der Gl. 113 und 113a erhält man daher

$$\frac{\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0'}{\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}.$$

Man trägt also $P_3 P_0$ so auf, daß

$$P_3 P_0 : P_3 P_0' = (\eta_1 + \eta_2) : (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = OB : OC,$$

dann ist OP_0 die gesuchte Spannung des Sternpunktes.

Haben die Admittanzen y_1 und y_2 den gleichen Phasenwinkel, d. h. ist in beiden Stromkreisen das Verhältnis von R zu X dasselbe, so liegt der Punkt P_0' auf $P_1 P_2$; hat auch y_3 denselben Phasenwinkel wie y_1 und y_2 , so liegt P_0 auf der Geraden $P_3 P_0'$.

b) Ist ein neutraler Leiter vorhanden, so setzt man das Verfahren wie folgt fort. Ohne neutralen Leiter war

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{\sum \mathfrak{P}_x \eta_x}{\sum \eta_x},$$

mit neutralem Leiter ist dagegen

$$\mathfrak{P}_{0(n)} = \frac{\sum \mathfrak{P}_x \eta_x}{(\sum \eta_x + \eta_0)},$$

also

$$\frac{\mathfrak{P}_{0(n)}}{\mathfrak{P}_0} = \frac{\sum \eta_x}{(\sum \eta_x + \eta_0)}.$$

Man trägt also die Strecke $OP_{0(n)}$ so auf, daß

$$OP_{0(n)} : OP_0 = (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) : (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = OC : OD,$$

dann ist $OP_{0(n)}$ die gesuchte Spannung des Sternpunktes.

44. Dreieckschaltung. Die Beziehung der Phasenströme zu den Linienströmen.

Ehe wir die analytische Berechnung der Dreieckschaltung durchführen, soll auch hier zunächst an den Vektordiagrammen die Beziehung zwischen den Phasenströmen und den Linienströmen erläutert werden. Hierbei nehmen wir eine Schaltung nach Fig. 83 an, bei der der Stromempfänger in Dreieck, der Stromerzeuger in Stern geschaltet ist, und legen vorerst, gleichviel ob die Belastungen des Dreiecks gleich sind oder nicht, gleichgroße Linienspannungen zugrunde.



Fig. 83.

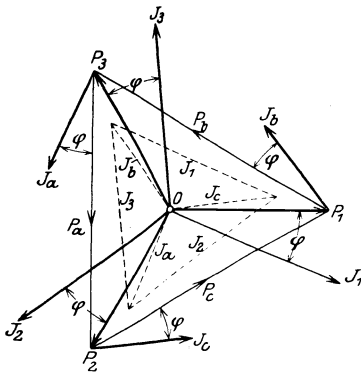


Fig. 84.

Es seien in Fig. 84 P_1, P_2, P_3 die Phasenspannungen des Generators, die Linienspannungen seien mit P_a, P_b, P_c bezeichnet, wobei die Numerierung so erfolgt, daß die Seite P_a des Spannungsdreiecks dem Endpunkt P_1 gegenüberliegt, und ebenso P_b gegenüber P_2, P_c gegenüber P_3 . Es ist daher

$$P_a = P_2 - P_3$$

$$P_b = P_3 - P_1$$

$$P_c = P_1 - P_2$$

P_a, P_b, P_c sind die Phasenspannungen des Dreiecks.

Bei gleicher Belastung der drei Seiten des Dreiecks J_a, J_b, J_c sind die gleichgroßen Phasenströme (Ringströme) um gleiche Winkel φ gegen die Spannungen P_a, P_b, P_c verzögert.

Verlegt man die Vektoren der Ströme nach dem Mittelpunkt O , so erhält man die Linienströme als Differenzen benachbarter Phasenströme, also

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_c - i_b \\ i_2 &= i_a - i_c \\ i_3 &= i_b - i_a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (114)$$

Man erhält die Vektoren dieser Ströme als die Seiten des Stromdreiecks. Ihre Verschiebung nach dem Nullpunkt zeigt, daß sie gegen die Spannungen P_1, P_2, P_3 dieselbe Phasenverschiebung haben, die zwischen den Spannungen und den Strömen des Dreiecks besteht.

Anders ist es bei ungleicher Belastung der Dreieckseiten. Ein Beispiel hierfür zeigt Fig. 85. Es sind die Phasenverschiebungen der Dreieckströme gegen ihre Spannungen $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$, die der Leitungsströme gegen ihre Spannungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

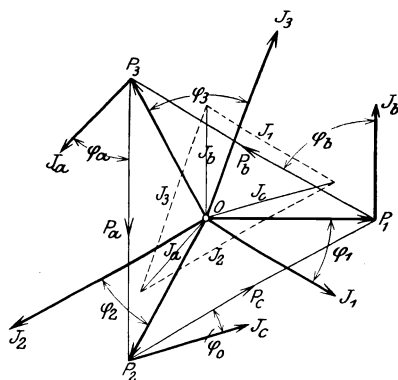


Fig. 85.

Es ergeben sich folgende Beziehungen: J_1 ist gegen P_1 um φ_1 verzögert. Da nach Gl. 114 J_1 die geometrische Differenz von J_c und J_b ist, die um φ_c bzw. φ_b gegen P_c bzw. P_b nacheilt, wobei P_c gegen P_1 um 30° voreilt, während P_b gegen P_1 um 150° nacheilt, $-P_b$ also gegen P_1 um 30° nacheilt, wird

$$\left. \begin{aligned} J_1 \cos \varphi_1 &= J_c \cos (\varphi_c - 30^\circ) + J_b \cos (\varphi_b + 30^\circ) \\ J_1 \sin \varphi_1 &= J_c \sin (\varphi_c - 30^\circ) + J_b \sin (\varphi_b + 30^\circ) \end{aligned} \right\}$$

und analog für die anderen Phasen

$$\left. \begin{aligned} J_2 \cos \varphi_2 &= J_a \cos (\varphi_a - 30^\circ) + J_c \cos (\varphi_c + 30^\circ) \\ J_2 \sin \varphi_2 &= J_a \sin (\varphi_a - 30^\circ) + J_c \sin (\varphi_c + 30^\circ) \end{aligned} \right\}$$

endlich

$$\left. \begin{aligned} J_3 \cos \varphi_3 &= J_b \cos (\varphi_b - 30^\circ) + J_a \cos (\varphi_a + 30^\circ) \\ J_3 \sin \varphi_3 &= J_b \sin (\varphi_b - 30^\circ) + J_a \sin (\varphi_a + 30^\circ) \end{aligned} \right\}$$

Ändert sich der Strom in einer Seite des Dreiecks, so ändern sich nur die Linienströme an den beiden benachbarten Eckpunkten,

aber nicht der des gegenüberliegenden Eckpunktes. Wird z. B. der Strom einer Seite Null, etwa der Seite a , so ist $J_2 = -J_c$ und $J_3 = J_b$, J_1 ist aber nicht Null, weil die Phasenverschiebungen der Ströme J_2 und J_3 gegen ihre Spannungen mit der Phasenverschiebung der Belastung nicht einfach zusammenhängen.

Sind etwa zwei Seiten gleichstark und induktionsfrei belastet, die dritte unbelastet, also $J_a = 0$, $J_b = J_c = J$, $\varphi_b = \varphi_c = 0$, so wird

$$\left. \begin{aligned} J_1 \cos \varphi_1 &= J \cos(-30^\circ) + J \cos 30^\circ = J\sqrt{3} \\ J_1 \sin \varphi_1 &= J \sin(-30^\circ) + J \sin 30^\circ = 0 \end{aligned} \right\} J_1 = J\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{aligned} J_2 \cos \varphi_2 &= J \cos 30^\circ = \frac{J\sqrt{3}}{2} \\ J_2 \sin \varphi_2 &= J \sin 30^\circ = \frac{J}{2} \end{aligned} \right\} J_2 = J$$

$$\left. \begin{aligned} J_3 \cos \varphi_3 &= J \cos(-30^\circ) = \frac{J\sqrt{3}}{2} \\ J_3 \sin \varphi_3 &= J \sin(-30^\circ) = -\frac{J}{2} \end{aligned} \right\} J_3 = J.$$

Es ist also J_1 in Phase P_1 , dagegen ist J_2 gegen P_2 um 30° verzögert, während J_3 gegen P_3 um 30° voreilt (s. Fig. 86). Die in jeder der beiden belasteten Phasen verbrauchte Leistung ist $J P_l = \sqrt{3} P J$, insgesamt also $2\sqrt{3} P J$. Hiervon führt J_1 die Hälfte, die übrigen Ströme je ein Viertel zu.

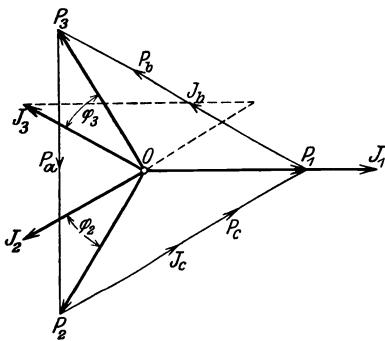


Fig. 86.

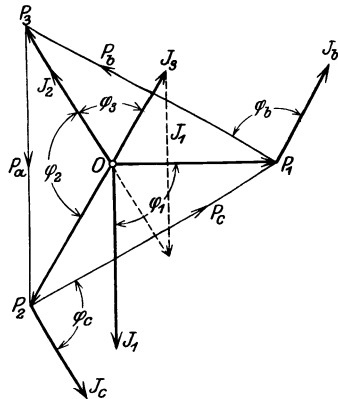


Fig. 87.

Sind dagegen bei einer unbelasteten Phase die beiden anderen induktiv und etwa wieder gleichstark belastet, also

$$J_a = 0, \quad J_b = J_c = J, \quad \varphi_b = \varphi_c = 90^\circ,$$

so ist

$$\begin{aligned}
 J_1 \cos \varphi_1 &= 0, & J_1 \sin \varphi_1 &= \sqrt{3} J \\
 J_2 \cos \varphi_2 &= -\frac{J_b}{2}, & J_2 \sin \varphi_2 &= \frac{J}{2} \sqrt{3} \\
 J_3 \cos \varphi_3 &= \frac{J}{2}, & J_3 \sin \varphi_3 &= \frac{J}{2} \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Hier führt also J_3 eine Leistung $P_3 J_3 \cos \varphi_3 = P \frac{J}{2}$ zu, während J_2 dieselbe Leistung wieder zurückgibt, denn die gesamte Leistung ist Null (s. Fig. 87).

Ein Liniestrom wird bei der Dreieckschaltung Null, wenn die Ströme der beiden benachbarten Dreieckseiten gleichgroß sind und unter sich gleiche Phase haben. Ihre Phasenverschiebungen gegen ihre Spannungen unterscheiden sich dann um 120° . Ist z. B. J_b gegen P_b um 30° verzögert, während J_c gegen P_c um 90° voreilt, so ist, wenn sie gleichgroß sind, ihre Differenz, d. h. der Liniestrom $J_1 = 0$.

45. Transfigurierung einer Dreieckschaltung in eine Sternschaltung.

Bei den bisherigen Untersuchungen über die Dreieckschaltung waren die drei Spannungen des Dreiecks als symmetrisch angenommen worden. Dies trifft aber bei stark unsymmetrischer Belastung und großem Spannungsabfall in der Leitung nicht mehr zu. Die Aufstellung der Gleichungen für diesen Fall, der drei unbekannte Spannungen und drei unbekannte Ströme enthält, wird dadurch kompliziert, daß die Linienströme jeweils die Differenz zweier Phasenströme sind.

Wesentliche Vereinfachung der Berechnung bietet die Anwendung des zuerst von A. E. Kennelly bewiesenen Satzes, daß jede Dreieckschaltung durch eine in bezug auf den äußeren Stromkreis äquivalente Sternschaltung ersetzt werden kann. Durch diese Transfigurierung wird die Berechnung einer Dreieckschaltung auf die einer Sternschaltung zurückgeführt.

Es soll zunächst die Beziehung zwischen den Impedanzen des Dreiecks und denen des ihm äquivalenten Sterns abgeleitet werden. Sind (s. Fig. 88) z_a, z_b, z_c die Impedanzen des Dreiecks, z_1, z_2, z_3 die des äquivalenten Sterns, so besteht Äquivalenz,

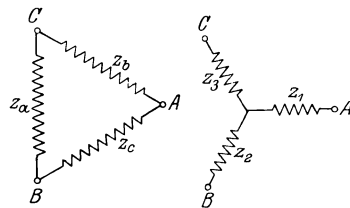


Fig. 88.

wenn die resultierende Impedanz zwischen je zwei Klemmen bei beiden Schaltungen gleichgroß ist. Zwischen den Klemmen AB liegen beim Stern die Impedanzen z_1 und z_2 in Reihe, beim Dreieck dagegen z_c parallel zu der Reihenschaltung von z_a und z_b , daher ist

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{\delta_c(\delta_a + \delta_b)}{\delta_a + \delta_b + \delta_c},$$

ebenso

$$\delta_2 + \delta_3 = \frac{\delta_a(\delta_b + \delta_c)}{\delta_a + \delta_b + \delta_c},$$

$$\delta_3 + \delta_1 = \frac{\delta_b(\delta_c + \delta_a)}{\delta_a + \delta_b + \delta_c}.$$

Addiert man jeweils zwei dieser Gleichungen und subtrahiert davon die dritte, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\delta_b \delta_c}{\delta_a + \delta_b + \delta_c} \\ \delta_2 &= \frac{\delta_c \delta_a}{\delta_a + \delta_b + \delta_c} \\ \delta_3 &= \frac{\delta_a \delta_b}{\delta_a + \delta_b + \delta_c} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (115)$$

Sind die Impedanzen des Dreiecks gleichgroß

$$\delta_a = \delta_b = \delta_c = \delta,$$

so sind auch die des Sterns gleichgroß, und zwar ist

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{\delta}{3}.$$

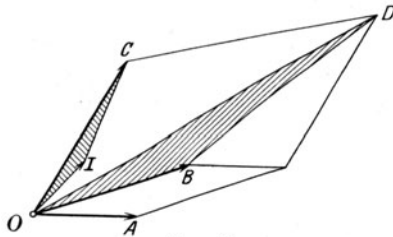


Fig. 89.

Man kann die Transfigurierung auch graphisch ausführen. Stellen in Fig. 89 die Vektoren OA , OB , OC der Reihe nach die Impedanzen δ_a , δ_b , δ_c nach Größe und Phase dar, und ist OD ihre Summe, so macht man

$$\triangle OIC \sim \triangle OBD,$$

daher

$$OI = \frac{OC \cdot OB}{OD} = \frac{\delta_c \delta_b}{\delta_a + \delta_b + \delta_c} = \delta_1,$$

und analog für die anderen Phasen.

Umgekehrt kann eine Sternschaltung in eine Dreieckschaltung transfiguriert werden; man verwendet hierbei zweckmäßig die Leitfähigkeiten. Die Äquivalenz der Schaltungen gilt unabhängig von

den Spannungen, die an ihnen bestehen. Ist z. B. die Spannung zwischen den beiden Klemmen A und B (Fig. 88) gleich Null, so können diese Punkte widerstandslos verbunden werden. Man hat dann beim Dreieck zwischen diesen beiden Klemmen und der dritten eine Parallelschaltung der Admittanzen y_a und y_b , beim Stern eine Reihenschaltung der Admittanz y_3 mit den beiden parallelgeschalteten y_1 und y_2 . Es wird daher

$$y_a + y_b = \frac{1}{\frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_1 + y_2}} = \frac{y_3 (y_1 + y_2)}{y_1 + y_2 + y_3},$$

analog

$$y_b + y_c = \frac{y_1 (y_2 + y_3)}{y_1 + y_2 + y_3},$$

$$y_c + y_a = \frac{y_2 (y_3 + y_1)}{y_1 + y_2 + y_3},$$

und indem man wieder zwei Gleichungen addiert und davon die dritte subtrahiert

$$\left. \begin{aligned} y_a &= \frac{y_2 y_3}{y_1 + y_2 + y_3} \\ y_b &= \frac{y_3 y_1}{y_1 + y_2 + y_3} \\ y_c &= \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2 + y_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (116)$$

Diese Rechnung findet z. B. dann Anwendung, wenn mehrere unsymmetrische Sternschaltungen parallelgeschaltet sind, deren neutrale Punkte nicht verbunden sind. Zwischen diesen neutralen Punkten besteht eine Spannung, es können daher die Impedanzen entsprechender Stromkreise nicht parallelgeschaltet werden.

Man transfiguriert dann erst jede Sternschaltung in ein Dreieck, die entsprechenden Seiten der Dreiecke sind parallelgeschaltet. Das aus der Parallelschaltung resultierende Dreieck kann wieder in eine Sternschaltung transfiguriert werden, womit die den parallelgeschalteten Sternschaltungen äquivalente Sternschaltung gefunden ist.

46. Berechnung der Spannungserhöhung bei einem Mehrphasensystem.

In Kap. IV, S. 48 wurde gezeigt, wie bei einer Einphasenleitung die prozentuale Spannungserhöhung und damit der ihr nahezu gleichgroße Spannungsabfall berechnet wird. Da bei einem Mehrphasen-

system die Linienspannung von dem Spannungsabfall zweier Linienströme beeinflusst wird, die bei ungleicher Belastung der Phasen

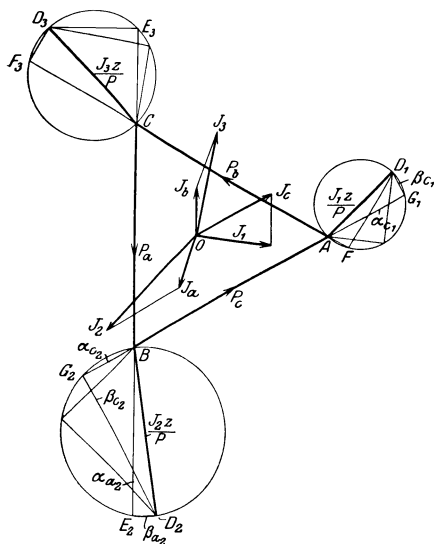


Fig. 90.

sehr verschieden groß sein und ungleiche Phasenverschiebungen gegen ihre Spannungen haben können, erweitert sich diese Berechnung beispielsweise für ein Dreiphasensystem in folgender Weise.

In Fig. 90 sind die Linienspannungen P_a, P_b, P_c an der Belastung in beliebigem Maßstab aufgetragen.

J_a, J_b, J_c seien die Ströme der in Dreieck geschalteten Belastung. Aus ihnen erhält man die Linienströme J_1, J_2, J_3 als geometrische Differenzen nach Gl. 114.

Man trägt nun die Spannungsabfälle in der Leitung $\frac{Jz}{P} 100$

in Prozenten der sekundären Spannung (Sternspannung) unter dem Winkel $\arctg \frac{X}{R}$ gegen J voreilend auf und beschreibt über diesen

Strecken als Durchmesser einen Kreis. So ist z. B. $AD_1 = \frac{J_1 z}{P} 100$,

$BD_2 = \frac{J_2 z}{P} 100$. Die Verlängerung von P_c schneidet die Kreise über AD_1 und BD_2 in G_1 und G_2 .

Die Strecken AG_1 und $G_1 D_1$ seien in Prozenten der sekundären Spannung α_{c1} und β_{c1} , ebenso $BG_2 = \alpha_{c2}$, $G_2 D_2 = \beta_{c2}$, so ist unter Berücksichtigung von Gl. 54, S. 48

$$\varepsilon_c / 0 = \pm \alpha_{c1} \pm \alpha_{c2} + \frac{(\beta_{c1} \pm \beta_{c2})^2}{200}$$

und analog für die anderen Phasen. Hierbei erhalten die α das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem sie in die Verlängerung des Vektors der Linienspannung fallen oder in ihn selbst, die β sind zu addieren oder zu subtrahieren, je nachdem sie einander entgegen- oder gleichgerichtet sind.

47. Das Zweiphasen-Dreileitersystem.

Dieses System hat zwei um 90° gegeneinander phasenverschobene Spannungen und einen Nulleiter, es ist also ein unsymmetrisches System.

Die Belastung wird zwischen je einen Außenleiter und den Nulleiter angeschlossen (s. Fig. 91).

Bei gleichmäßiger Belastung ist die Summe der momentanen Leistungen beider Phasen konstant, das System ist balanciert. Die Leistung ist

$$W = 2PJ \cos \varphi.$$

Die Linienspannung ist

$$P_l = P\sqrt{2},$$

der Strom des Nulleiters

$$J_0 = J\sqrt{2},$$

daher auch

$$W = P_l J_0 \cos \varphi.$$

Ist der Spannungsabfall im Nulleiter vernachlässigbar klein, so bleiben bei gleicher Belastung der Phasen die Spannungen an den Klemmen der Belastung gleichgroß und um 90° gegeneinander phasenverschoben. Besteht dagegen im Nulleiter ein Spannungsabfall, der gleich OP_0 in Fig. 92 ist, so sind die Spannungen an der Belastung P_0P_1' und P_0P_2' auch bei gleichen Strömen verschieden und nicht mehr um 90° phasenverschoben.

Die Berechnung ergibt sich genau wie auf S. 112 ff für 3 Phasen. Sind y_1, y_2, y_0 die Admittanzen vom neutralen Punkt des Generators bis zu dem der Belastung, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_0 &= \frac{\mathfrak{P}_1 \eta_1 + \mathfrak{P}_2 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_0} \\ \mathfrak{S}_1 &= (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_0) \eta_1 \\ \mathfrak{S}_2 &= (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0) \eta_2 \\ \mathfrak{S}_0 &= -\mathfrak{P}_0 \eta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (117)$$

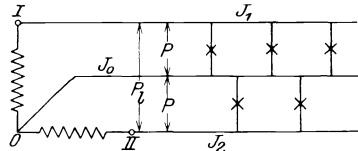


Fig. 91.

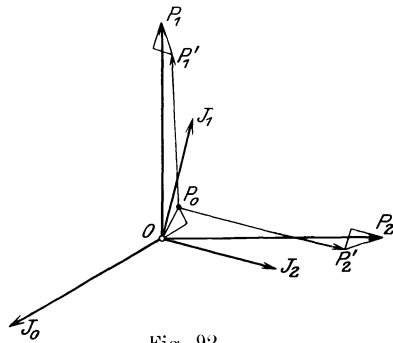


Fig. 92.

Man kann hier ebenfalls graphisch verfahren.

Denkt man sich zunächst eine Phase, z. B. 2 unterbrochen, so teilt sich die Spannung P_1 auf den Nulleiter und die Belastung der Phase 1 nach Maßgabe der Impedanzen. Es ist

$$\mathfrak{P}'_0 = \frac{\mathfrak{P}_1}{1 + \frac{\eta_0}{\eta_1}} = \mathfrak{P}_1 \frac{\delta_0}{\delta_1 + \delta_0}$$

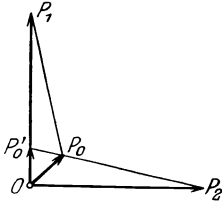


Fig. 93.

Ist sowohl die Belastung wie der Nulleiter induktionsfrei, so braucht man, wie in Fig. 93, nur den Vektor OP_1 in OP_0' und $P_0'P_1$ so zu teilen, daß

$$OP_0' : P_0'P_1 = R_0 : R_1.$$

Zwischen der Klemme der unterbrochenen Phase und dem Nullpunkt der Belastung besteht dann die Spannung $P_0'P_2$, sie ist im

allgemeinen Fall

$$\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}'_0 = \frac{\mathfrak{P}_2(\eta_1 + \eta_0) - \mathfrak{P}_1\eta_1}{\eta_1 + \eta_0}.$$

Ist dagegen die Phase 2 belastet, so ergibt sich P_0 aus Gl. 117 und es wird

$$\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0 = \frac{\mathfrak{P}_2(\eta_1 + \eta_0) - \mathfrak{P}_1\eta_1}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_0},$$

also verhält sich

$$\frac{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}'_0} = \frac{\eta_1 + \eta_0}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_0} = \frac{1 + \frac{\delta_0}{\delta_1}}{1 + \frac{\delta_0}{\delta_1} + \frac{\delta_0}{\delta_2}}.$$

Nehmen wir z. B. an, es sei auch Phase 2 induktionsfrei belastet und ebenso wie 1, d. h. $R_1 = R_2 = R$, so wird

$$\frac{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}'_0} = \frac{R + R_0}{R + 2R_0}.$$

Man teilt in Fig. 93 P_2P_0' so durch den Punkt P_0 , daß

$$P_2P_0 : P_2P_0' = R + R_0 : R + 2R_0.$$

Es werden also trotz gleicher Widerstände die Spannungen P_0P_1 und P_0P_2 und die Ströme J_1 und J_2 , die diesen Spannungen proportional sind, ungleich groß.

Das Zweiphasen-Dreileitersystem hat daher eine viel schlechtere Spannungsregulierung als das Dreiphasensystem bei Dreieckschaltung

oder bei Sternschaltung mit Nulleiter. Dies ist der Grund, weshalb es jetzt nur selten angewandt wird.

48. Mehrwellige Ströme in Mehrphasensystemen.

Die Spannungskurven der verschiedenen Phasen eines symmetrischen Mehrphasensystems haben alle dieselbe Form, da die verschiedenen Wicklungen einer Mehrphasenmaschine alle dieselben elektrischen und magnetischen Eigenschaften besitzen. Alle Oberschwingungen kommen in den Kurven aller Phasen in gleicher Größe und Lage gegenüber der Grundwelle vor.

Der Phasenwinkel der Grundwelle überträgt sich auf die Oberwellen nach Maßgabe ihrer Ordnungszahl.

Sind die Grundwellen zweier aufeinanderfolgender Spannungen um $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander phasenverschoben, so sind die Oberwellen der κ fachen Frequenz um $\frac{\kappa 2\pi}{n}$ ihrer Wellenlänge gegeneinander phasenverschoben.

Ist $\frac{\kappa}{n}$ eine ganze Zahl, so ist die Phasenverschiebung dieser Oberwellen ein ganzes Vielfaches von 2π , d. h. die Oberwellen sind gleichphasig.

Ist $\kappa = (xn - 1)$, worin x eine ganze Zahl ist, so ist die Phasenverschiebung dieser Oberwellen zweier aufeinander folgender Spannungen

$$\frac{\kappa 2\pi}{n} = x 2\pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Die Oberwellen bilden ein symmetrisches Mehrphasensystem mit vertauschter Reihenfolge der Phasen.

Ist endlich $\kappa = (xn + 1)$, so ist

$$\frac{\kappa 2\pi}{n} = x 2\pi + \frac{2\pi}{n}.$$

Die Reihenfolge der Phasen ist wieder dieselbe wie für die Grundwellen.

Bei einem Dreiphasensystem ist für alle Werte von κ , die durch 3 teilbar sind, $\frac{\kappa}{n}$ eine ganze Zahl, die dritten, neunten, fünfzehnten usf. Oberwellen sind in allen drei Spannungen stets gleichgerichtet. Für $x = 2, 4, \dots$ wird

$$(xn - 1) = 5, 11, 17 \dots$$

$$(xn + 1) = 7, 13, 19 \dots$$

Die Oberwellen der ersten Reihe bilden symmetrische Mehrphasensysteme mit vertauschter Reihenfolge der Phasen, die der zweiten Reihe solche mit gleicher Reihenfolge wie bei den Grundwellen.

Die Linienspannung ist bei Sternschaltung des Generators die Differenz zweier aufeinander folgender Phasenspannungen.

Bei der Bildung der Differenz fallen alle jene Oberwellen fort, die gleichphasig sind. Bei einem Dreiphasensystem also alle Oberwellen, deren Ordnung n durch 3 teilbar ist, die dritten, neunten usw. Für die fünften, siebenten, elften usw. Oberwellen ist wie für die Grundwellen die verkettete Spannung $2 \sin \frac{\pi}{n} = \sqrt{3}$ mal so groß wie die unverkettete Spannung.

Die Spannungskurve der verketteten Spannung eines Generators mit Sternschaltung hat daher eine ganz andere Kurvenform als die Kurve der unverketteten Spannung. Fig. 94 zeigt die Phasenspannung und die Linienspannung eines Generators.

Das Verhältnis der Effektivwerte der Linienspannung und der Phasenspannung ist

$$\frac{P_l}{P} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{P_1^2 + P_5^2 + P_7^2 + \dots}}{\sqrt{P_1^2 + P_3^2 + P_5^2}}.$$

Kommen Oberwellen von 3, 9 ... facher Periodenzahl in der Phasenspannung vor, so ist dieses Verhältnis kleiner als $\sqrt{3}$.

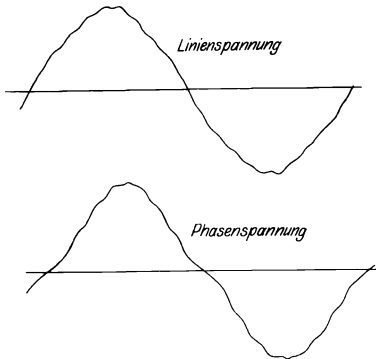


Fig. 94.

Durch die Sonderstellung, die die dritten Oberwellen beim Dreiphasensystem einnehmen, sind eine Anzahl von praktisch wichtigen Erscheinungen zu erklären. Da die dritten Oberwellen stets gleichgerichtet sind, können sie bei einem Generator mit Sternschaltung ohne Nulleiter nicht zur Wirkung kommen, da sie, wie gezeigt, in der Linienspannung fortfallen. Sind die Stromverbraucher ebenfalls in Stern geschaltet, so besteht zwischen dem Nullpunkt

des Generators und dem der Belastung auch bei vollständiger Symmetrie eine Spannung von 3facher Periodenzahl (und den ev. darüber gelagerten Oberwellen von 9 facher usw. Periodenzahl), die gleich der Summe dieser in den 3 Phasen gleichgerichteten Wellen ist.

Ist daher der neutrale Punkt des Generators geerdet, der der Belastung nicht, so besteht zwischen diesem und Erde die Spannung

der dritten Oberwellen, die bei Hochspannungsgeneratoren groß werden kann, so daß die Berührung des Nullpunktes gefährlich wird. Man erdet meist auch den Nullpunkt der Transformatoren. In diesem Fall und ebenso wenn ein neutraler Leiter zwischen Nullpunkt des Generators und des Stromempfängers geschaltet ist, fließt in dem Nulleiter stets ein Strom von 3 facher usw. Periodenzahl, der Nulleiter ist also auch bei gleicher Belastung der Phasen nicht mehr stromlos. Man erdet daher über Drosselspulen oder über Wasserwiderstände.

Bei Dreieckschaltung des Generators addieren sich die dritten Oberwellen und ihre Vielfachen zu einer Oberwelle von der dreifachen Amplitude und ergeben einen Ausgleichstrom, der fast unabhängig von der Belastung ist. Die Wicklung ist, auch wenn keine äußere Belastung angeschlossen ist, nicht stromlos. Öffnet man das Dreieck, so kann die Spannung der Oberwellen für sich gemessen werden.

Die inneren Ströme von dreifacher Periodenzahl bedingen zusätzliche Verluste in der Wicklung und erhöhte Erwärmung, man schaltet daher Dreiphasengeneratoren selten in Dreieck.

49. Messung der Leistung von Mehrphasenströmen.

Bei gleicher Belastung aller Phasen eines symmetrischen Mehrphasensystems genügt es, die Leistung einer Phase zu messen und diese Leistung mit der Phasenzahl zu multiplizieren. Fig. 95 zeigt die Schaltung für eine Dreiphasensternschaltung. Die Stromspule des Wattmeters ist in eine Leitung geschaltet, die Spannungsspule zwischen diese Leitung und den Sternpunkt. Ebenso kann man bei einer Dreieck-

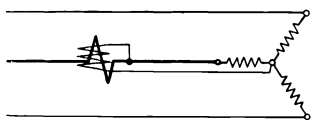


Fig. 95.

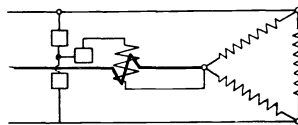


Fig. 96.

schaltung die Stromspule in eine Dreieckseite und die Spannungsspule zwischen die zugehörigen Knotenpunkte des Dreiecks schalten. Man kann aber auch wie zuvor den Linienstrom messen und einen künstlichen Nullpunkt verwenden, wie Fig. 96 zeigt, wobei die Widerstände so abgeglichen sind, daß der Widerstand der Spannungsspule mit ihrem Vorschaltwiderstand zusammen ebenso groß ist wie die Widerstände der beiden anderen Zweige.

Bei beliebig verteilter Belastung brauchen allgemein nur $(m - 1)$.

Leistungsmesser verwendet zu werden, wenn m die Zahl der Leitungen ist.

Bei einem Dreiphasensystem ohne Nulleiter genügen also 2 Leistungsmesser. Es ist

$$w = p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3$$

und

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$$

daher auch

$$w = (p_1 - p_3) i_1 + (p_2 - p_3) i_2 \dots \dots (118)$$

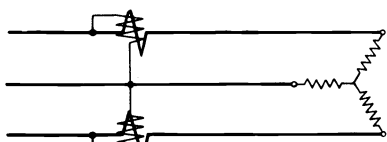


Fig. 97.

Bei dieser Leistungsmessung, die von Aron und von Behn-Eschenburg angegeben ist, werden nach Fig. 97 die beiden Stromspulen in je eine Leitung geschaltet und die Spannungsspulen zwischen diese Leitung und die dritte. Gl. 118 gilt für die Momentanwerte, sie gilt also ganz unabhängig von der Kurvenform.

Für die Effektivwerte einwelliger Ströme gilt das Vektordiagramm

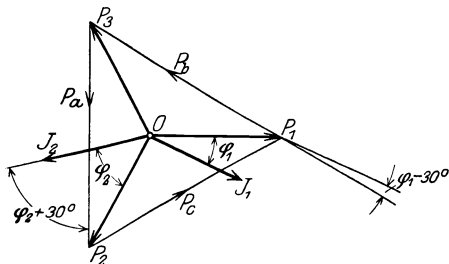


Fig. 98.

Fig. 98 dieser Schaltung.

J_1 und J_2 sind die gemessenen Ströme, die um φ_1 bzw. φ_2 gegen P_1 und P_2 verzögert seien. Die gemessenen Linienspannungen sind P_b als Differenz von P_3 und P_1 und P_a als Differenz von P_2 und P_3 . Es eilt nun $-P_b$ gegen J_1 um $(30^\circ - \varphi_1)$ nach, und P_a gegen J_2 um

$(\varphi_2 + 30^\circ)$ vor. Daher zeigen die Leistungsmesser folgende Leistungen an:

$$W_I = -P_b J_1 \cos(\varphi_1 - 30^\circ)$$

$$W_{II} = P_a J_2 \cos(\varphi_2 + 30^\circ),$$

worin $P_a = P_b = \sqrt{3}P$ ist.

Ist $\varphi_2 = 60^\circ$, so zeigt der zweite Leistungsmesser die Leistung Null an, sein Ausschlag kehrt sich um, wenn φ_2 größer als 60° wird.

Bei gleicher Belastung aller Phasen ist

$$\begin{aligned} W_I + W_{II} &= \sqrt{3}PJ [\cos(\varphi - 30^\circ) + \cos(\varphi + 30^\circ)] \\ &= 3PJ \cos \varphi, \end{aligned}$$

die Differenz der Leistungen ist dagegen

$$\begin{aligned} W_I - W_{II} &= \sqrt{3}PJ 2 \sin \varphi \sin 30^\circ \\ &= \sqrt{3}PJ \sin \varphi. \end{aligned}$$

Durch Division der beiden Gleichungen wird

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \frac{W_I - W_{II}}{W_I + W_{II}} \quad \quad (119)$$

Bei gleicher Belastung kann die Phasenverschiebung bei einwilligen Strömen direkt aus den Ausschlägen der Leistungsmesser ohne Strom und Spannungsmessung nach Gl. 119 berechnet werden.

Dreiphasensystem mit Nulleiter¹⁾. Hier sind drei Leistungsmesser erforderlich. Es ist

$$w = p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3 + p_0 i_0$$

und

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_0 = 0.$$

Setzt man i_0 aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so erhält man

$$w = (p_1 - p_0) i_1 + (p_2 - p_0) i_2 + (p_3 - p_0) i_3 \quad . . \quad (120)$$

Hierin sind $(p_1 - p_0)$, $(p_2 - p_0)$, $(p_3 - p_0)$ die Spannungen der Außenleiter gegen den Nulleiter, die zur Abkürzung mit p_{10} , p_{20} , p_{30} bezeichnet werden mögen, so daß wir erhalten

$$w = p_{10} i_1 + p_{20} i_2 + p_{30} i_3 \quad \quad (120 a)$$

Die meisten Zählerkonstruktionen für Dreiphasensysteme mit Nulleiter verwenden die Linienspannungen. Diese erhalten wir durch die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} p_a &= p_{20} - p_{30} \\ p_b &= p_{30} - p_{10} \\ p_c &= p_{10} - p_{20} \end{aligned} \right\} \quad \quad (121)$$

Es ist aber die Summe $p_{10} + p_{20} + p_{30}$ von Null verschieden, sowohl bei symmetrischer Belastung, weil bei Vorhandensein eines Nulleiters die Oberwellen von 3, 9 . . . facher Periodenzahl fließen können, als auch beim Fehlen dieser Oberwellen bei unsymmetrischer Belastung der Zweige. Es werde die Summe

$$p_{10} + p_{20} + p_{30} = \Sigma p \quad \quad (122)$$

gesetzt, dann erhält man aus Gl. 121 und 122

¹⁾ s. Orlich, ETZ 1907, S. 71.

$$\left. \begin{aligned} p_{10} &= \frac{1}{3}(p_c - p_b + \Sigma p) \\ p_{20} &= \frac{1}{3}(p_a - p_c + \Sigma p) \\ p_{30} &= \frac{1}{3}(p_b - p_a + \Sigma p) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (123)$$

Setzt man in die Leistungsgleichung 120a

$$i_1 = -(i_2 + i_3 + i_0),$$

so wird

$$w = (p_{20} - p_{10}) i_2 + (p_{30} - p_{10}) i_3 - p_{10} i_0$$

oder, wenn man die Linienspannungen nach Gl. 121 einführt,

$$w = p_b i_3 - p_c i_2 - p_{10} i_0 \dots \dots \dots (124)$$

Diese Gleichung, die durch zyklische Vertauschung zwei weitere analoge ergibt, bietet noch keine Vorteile gegenüber der Messung nach Gl. 120, weil 3 Zählersysteme erforderlich sind, bei denen je eine Spannungsspule und eine Stromspule zusammenwirken.

Die Zahl der Systeme läßt sich aber auf 2 reduzieren, wenn man bei jedem System mehrere Spannungsspulen oder auch mehrere Stromspulen zusammenwirken läßt. Dies ergibt die folgenden Möglichkeiten.

Setzt man in Gl. 124 für p_{10} den Wert aus Gl. 123 ein, so wird

$$w = p_b (i_3 + \frac{1}{3} i_0) - p_c (i_2 + \frac{1}{3} i_0) - \frac{1}{3} i_0 \Sigma p \dots (125)$$

Addiert und subtrahiert man hierzu $p_c i_3$, so erhält man

$$w = (p_b - p_c) (i_3 + \frac{1}{3} i_0) + p_c (i_3 - i_2) - \frac{1}{3} i_0 \Sigma p \dots (126)$$

Addiert man zu Gl. 124 die durch zyklische Vertauschung erhaltene

$$w = p_c i_1 - p_a i_3 - p_{20} i_0$$

und setzt für p_{10} und p_{20} die Werte aus Gl. 123 ein, so ergibt sich

$$2w = (p_b - p_a) (i_3 - \frac{1}{3} i_0) + p_c (i_1 - i_2) - \frac{2}{3} i_0 \Sigma p \dots (127)$$

Setzt man ferner die Werte aus Gl. 123 in Gl. 120a ein, so wird

$$3w = i_1 (p_c - p_b) + i_2 (p_a - p_c) + i_3 (p_b - p_a) - i_0 \Sigma p,$$

oder nach Addition und Subtraktion von $i_3 p_c$

$$3w = (i_1 - i_3) (p_c - p_b) + (i_2 - i_3) (p_a - p_c) - i_0 \Sigma p \dots (128)$$

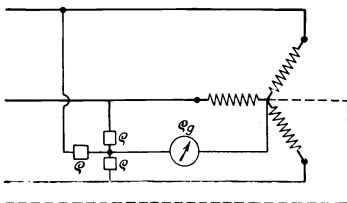


Fig. 99.

Die Gl. 125—128 stellen, wenn man von dem Glied mit Σp absieht, Meßanordnungen mit 2 Systemen dar, bei denen je 1 oder 2 Spannungsspulen mit 2 Stromspulen zusammenwirken.

Das Glied mit Σp gibt den Fehler an. Man kann Σp messen,

wenn man (nach Fig. 99) durch drei gleiche Widerstände ϱ zwischen den Außenleitern einen künstlichen Nullpunkt herstellt und ihn durch einen Spannungsmesser vom Widerstand ϱ_g mit dem Nullpunkt der Belastung verbindet.

Sind j_1, j_2, j_3 die Ströme in den 3 Widerständen, j der Strom im Spannungsmesser, so ist

$$p_{10} = j_1 \varrho + j \varrho_g$$

$$p_{20} = j_2 \varrho + j \varrho_g$$

$$p_{30} = j_3 \varrho + j \varrho_g,$$

daher

$$\Sigma p = (\varrho + 3\varrho_g)j.$$

Der Ausschlag des Spannungsmessers ist daher mit $\frac{\varrho + 3\varrho_g}{\varrho_g}$ zu multiplizieren, um die Spannung Σp zu erhalten.

Schaltet man in gleicher Weise die Spannungsspule eines Leistungsmessers, dessen Stromspule von i_0 durchflossen ist, so kann das Fehlerglied in Gl. 125—128 gemessen werden.

Neuntes Kapitel.

Stromkreise mit gegenseitiger Induktion.

50. Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise. — 51. Der Lufttransformator. — 52. Messung der gegenseitigen Induktion. — 53. Gegenseitige Induktion mehrphasiger Stromkreise. — 54. Die Stromverteilung in massiven Leitern.

50. Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise.

Liegen zwei Stromkreise einander nahe gegenüber, wie Fig. 100 für zwei Spulen zeigt, so ist der Induktionsfluß, den der Strom des

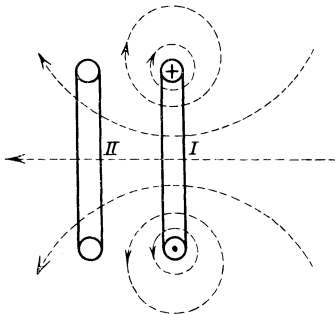


Fig. 100.

einen Stromkreises erzeugt, z. T. auch mit dem zweiten verkettet. Bei Änderung des Stromes und des Flusses des einen Leiters entstehen daher nicht nur Induktionswirkungen in ihm, sondern auch in dem anderen.

Diese Erscheinung nennt man gegenseitige Induktion. Die Kraftflußwindungen eines Stromkreises für den selbsterzeugten Fluß, für die Einheit des Stromes wurden als Induktivität (Koeffizient der Selbstinduktion L) bezeichnet. Analog

nennt man die Kraftflußwindungen eines Stromkreises für den Fluß des anderen Stromkreises, wenn in diesem die Einheit des Stromes fließt, Wechselinduktivität oder Koeffizient der gegenseitigen Induktion.

Ist zunächst nur die eine Spule (1) vom Strome durchflossen, so denkt man sich ihr Feld wieder in Induktionsröhren zerlegt. Der Fluß einer Röhre, die mit w_{1x} Windungen dieser Spule verkettet ist und deren magnetischer Widerstand R_x ist, wird nach Kap. I S. 13

$$\Phi_x = \frac{i_1 w_{1x}}{R_x}.$$

Ist diese Röhre mit einem Teil der Windungen der Spule 2 verkettet, der mit w_{2x} bezeichnet werde, so sind die Flußwindungen der Spule 2 für den Fluß dieser Röhre

$$\Phi_{1x} w_{2x} = i_1 \frac{w_{1x} w_{2x}}{R_x}.$$

Die Summation über alle Induktionsröhren ergibt die gesamten Flußwindungen der Spule 2. Für den Strom $i_1 = 1$ wird

$$\frac{\sum (\Phi_{1x} w_{2x})}{i_1} = \sum \left(\frac{w_{1x} w_{2x}}{R_x} \right) = M_{12} \dots \dots (129)$$

M_{12} ist die Wechselinduktivität der Spule 1 auf die Spule 2. Ganz analog berechnet sich die Wechselinduktivität der Spule 2 auf die Spule 1

$$\frac{\sum (\Phi_{2x} w_{1x})}{i_2} = \sum \left(\frac{w_{2x} w_{1x}}{R_x} \right) = M_{21} \dots \dots (129 a)$$

und es ist daher

$$M_{12} = M_{21} = M \dots \dots \dots (130)$$

M hat dieselbe Dimension wie die Induktivität L und wird ebenfalls in Henry gemessen. Auch hier gilt, daß M nur dann als Konstante zu betrachten ist, wenn der magnetische Widerstand, d. h. die Permeabilität des Mediums, in dem der Fluß verläuft, konstant ist, also bei Abwesenheit von Eisen.

Sind beide Spulen von Strom durchflossen, so erzeugt jede von ihnen einen Fluß, und der resultierende Fluß ergibt sich in einem Medium von konstanter Permeabilität durch Zusammensetzung beider.

Die Energie des magnetischen Feldes zweier stromdurchflossener Stromkreise.

Auf das gemeinsame Feld wirkt die Summe der Amperewindungen beider Stromkreise, daher gilt für eine Induktionsröhre, die mit beiden verkettet ist,

$$\int \mathfrak{H}_x dl = 4\pi (i_1 w_{1x} + i_2 w_{2x}),$$

der Fluß der Röhre ist konstant

$$\Phi_x = \frac{(i_1 w_{1x} + i_2 w_{2x})}{R_x}.$$

Der Energiegehalt der ganzen Röhre ist

$$u_m = \int \frac{\mathfrak{B}_x \mathfrak{H}_x d\tau}{8\pi} = \frac{\Phi_x}{8\pi} \int \mathfrak{H}_x dl = \frac{1}{2} \frac{(i_1 w_{1x} + i_2 w_{2x})^2}{R_x}.$$

Für das ganze Feld ist daher

$$\begin{aligned}
 U_m &= \frac{1}{2} i_1^2 \sum \left(\frac{w_{1x}^2}{R_x} \right) + i_1 i_2 \sum \left(\frac{w_{1x} w_{2x}}{R_x} \right) + \frac{1}{2} i_2^2 \sum \left(\frac{w_{2x}^2}{R_x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} i_1^2 L_1 + i_1 i_2 M + \frac{1}{2} i_2^2 L_2 \quad (131)
 \end{aligned}$$

Die gesamte Energie setzt sich hiernach zusammen aus der Summe der Eigenenergien der Felder jeder Spule ($\frac{1}{2} i_1^2 L_1$ und $\frac{1}{2} i_2^2 L_2$), die ebenso groß sind, wie wenn die andere Spule nicht vorhanden wäre, und aus der wechselseitigen Energie $i_1 i_2 M$.

EMK der gegenseitigen Induktion.

Ändern sich die Ströme i_1 und i_2 , so ändert sich die Energie des Feldes. Betrachten wir L_1 , L_2 und M als Konstante, sehen wir somit von einer Veränderung der gegenseitigen Lage und von einer Deformation der beiden Systeme ab, die eine Änderung von M bzw. L bedingen würde, so kann die Zu- oder Abnahme der Energie nur dadurch zustande kommen, daß elektrische Leistung den Stromkreisen zugeführt oder von ihnen abgegeben wird. Sie ist stets gleich dem Produkt aus dem Strom und einer Spannung. Nimmt die Energie in der Zeit dt um dU_m zu, so ist die den Stromkreisen zugeführte Leistung

$$w = \frac{dU_m}{dt} = i_1 \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) + i_2 \left(M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right).$$

Die in den Klammern stehenden Ausdrücke, mit denen die Ströme multipliziert werden, sind die zugeführten Spannungen, die den durch die Änderung des Flusses bedingten EMKen entgegengesetzt gleich sind.

Zu der EMK der Selbstinduktion $-L \frac{di}{dt}$ tritt in jedem Stromkreis die EMK der gegenseitigen Induktion $-M \frac{di}{dt}$, die im Stromkreis 1 von der Änderung des Stromes i_2 und umgekehrt herrührt. Für einen einwilligen Strom ist der Effektivwert von $M \frac{di}{dt}$ gleich $J \omega M$ und symbolisch durch $j \Im \omega M$ dargestellt.

Streuung.

Die Änderung des Stromes in einem System, z. B. i_1 , bedingt in ihm selbst eine Spannung $L_1 \frac{di_1}{dt}$, in dem zweiten $M \frac{di_1}{dt}$, sie verhalten sich in jedem Augenblick wie $L_1 : M$. Wären beide Systeme in gleicher Weise mit dem Fluß des Stromes i_1 verkettet, so

würden sich die Spannungen, die dieser Flußänderung entsprechen, wie die Windungszahlen w_1 und w_2 verhalten, d. h. es wäre

$$L_1 : M = w_1 : w_2$$

und analog

$$L_2 : M = w_2 : w_1,$$

woraus folgen würde

$$L_1 L_2 = M^2.$$

Eine derartige Anordnung ist aber nicht möglich. Da die beiden Systeme räumlich nicht zusammenliegen, ist stets von dem Fluß, den ein System erzeugt, nur ein Teil mit dem zweiten System verkettet, daher ist

$$L_1 > M \frac{w_1}{w_2}, \quad L_2 > M \frac{w_2}{w_1}, \quad L_1 L_2 > M^2.$$

Man bezeichnet diese Erscheinung als Streuung. Setzt man

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= v_1 M \frac{w_1}{w_2} \\ L_2 &= v_2 M \frac{w_2}{w_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (132)$$

worin v_1, v_2 nach Hopkinson als Streukoeffizienten bezeichnet werden und größer als 1 sind, so wird

$$L_1 L_2 = v_1 v_2 M^2 \dots \dots \dots (133)$$

Ein Maß für den Grad der Kopplung beider Systeme ist das Verhältnis

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{1}{v_1 v_2},$$

das als Kopplungsfaktor bezeichnet wird. Er ist für streuungsfreie Stromkreise gleich 1 und um so kleiner, je geringer der Grad der Verkettung ist. Man kann sich also vorstellen, daß von dem ganzen Fluß eines Stromkreises nur ein Teil mit dem anderen verkettet ist, die Differenz, d. h. der Teil, der nur mit der erzeugenden Wicklung verkettet ist, ist ihr Streufluß. Diese Trennung ist z. T. nur eine fiktive. Danach kann man also die Induktivität L aus zwei Teilen zusammengesetzt denken, der eine entspricht dem beiden Stromkreisen gemeinsamen Fluß, der andere dem Streufluß. Man setzt

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= M \frac{w_1}{w_2} + S_1 \\ L_2 &= M \frac{w_2}{w_1} + S_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (134)$$

S_1, S_2 heißen die Streuinduktivitäten der beiden Stromkreise. Der

Zusammenhang zwischen ihnen und den Streukoeffizienten v_1 und v_2 ist nach Gl. 132

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= M \frac{w_1}{w_2} (v_1 - 1) \\ S_2 &= M \frac{w_1}{w_2} (v_2 - 1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (135)$$

Endlich wird das Verhältnis

$$1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{1}{v_1 v_2} = \sigma \dots \dots \dots (136)$$

als resultierender Streufaktor bezeichnet.

Beispiel. Auf einem Leitungsmast seien zwei Doppelleitungen befestigt (s. Fig. 101), die eine $A-B$ mag eine Kraftleitung, die andere CD eine Telephonleitung sein. Es soll die gegenseitige Induktion der beiden Leitungen berechnet werden.

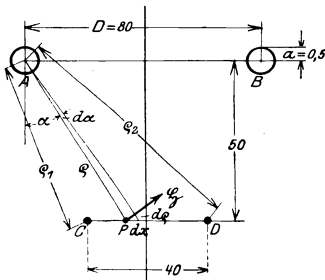


Fig. 101.

Fließt durch den Leiter A die Einheit der Stromstärke, so ist die Feldstärke in einem Punkt P der Ebene durch CD

$$\mathfrak{H}_a = \frac{2}{\rho},$$

sie ist, da die Kraftlinien Kreise um A sind, senkrecht zur Verbindungslinie AP gerichtet, ihre Komponente senkrecht zur Ebene CD ist daher

$$\mathfrak{H} \sin \alpha = \frac{2 \sin \alpha}{\rho}.$$

Der Fluß durch ein Flächenelement von der Länge 1 cm und der Breite dx ist

$$d\Phi = \mathfrak{H} \sin \alpha dx = \frac{2 \sin \alpha}{\rho} dx.$$

Der Verschiebung des Punktes P um dx entspricht eine Vergrößerung von ρ auf $\rho + d\rho$ und von α auf $\alpha + d\alpha$. Dabei ist

$$dx \sin \alpha = d\rho,$$

daher

$$d\Phi = \frac{2 d\rho}{\rho}.$$

Der ganze Fluß durch die Längeneinheit der von den Leitern CD begrenzten Ebene wird somit

$$2 \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right).$$

Einen ebenso großen Fluß erzeugt der Strom 1 im Leiter *B*. Die Wechselinduktivität wird also für die Länge *l* cm

$$M = 4 l \ln \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \right) 10^{-9} \text{ Henry} \dots \dots (137)$$

Mit den in Fig. 101 eingeschriebenen Zahlen wird $\varrho_2 = 78$, $\varrho_1 = 54$, $M = 4 l \ln \left(\frac{78}{54} \right) 10^{-9} = 1,47 l \cdot 10^{-9} \text{ Henry}$. Die Induktivität der

Doppelleitung *AB* ist nach S. 16 $L = 4 l \left(\ln \frac{D}{a} + \frac{1}{4} \right) = 21,3 l \cdot 10^{-9} \text{ H}$.

Laufen die Leitungen auf $10 \text{ km} = 10^6 \text{ cm}$ parallel, so induziert ein einwelliger Strom von 100 Amp. und 50 Perioden, der in der Hauptleitung fließt, in der anderen eine effektive Spannung $J\omega M = 100 \cdot 314 \cdot 1,47 \cdot 10^{-3} = 46 \text{ Volt}$.

51. Der Lufttransformator.

Ein Transformator dient zur Umsetzung von elektrischer Energie einer Spannung in solche einer anderen. Er besitzt zwei Spulen, die sich gegenseitig induzieren und die ruhend zueinander angeordnet sind. Bei den niederen Frequenzen der Starkstromtechnik werden die Spulen zur Erzielung starker magnetischer Felder auf Eisenkerne gewickelt; in der Hochfrequenztechnik werden keine magnetischen Materialien verwendet. In diesem Falle sind *L* und *M* konstant. Wir beginnen daher mit dem Lufttransformator. In dem Schema Fig. 102 sind die beiden Spulen mit 1 und 2 bezeichnet. Die eine (1) ist an eine Wechselspannung angeschlossen, sie heißt kurz die primäre Spule oder die Primärwicklung, die andere (2) wird als sekundäre bezeichnet, sie ist über einen Belastungswiderstand irgendwelcher Art geschlossen. Sind i_1 und i_2 die Ströme, R_1 , R_2 die Widerstände, L_1 , L_2 die Induktivitäten der beiden Stromkreise, *M* die Wechselinduktivität, so gelten für die beiden Stromkreise die Differentialgleichungen

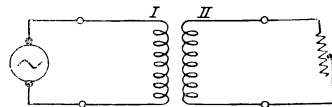


Fig. 102.

$$p_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \dots \dots (138)$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \dots \dots (139)$$

Man sieht aus der zweiten Gleichung, daß wenn der eine Strom sich nach einer Sinusfunktion ändert, bei konstanten Werten von

L , M und R auch der andere einwellig ist. Man kann daher die Gleichungen symbolisch anschreiben

$$\mathfrak{P}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \mathfrak{S}_1 + j\omega M \mathfrak{S}_2 \quad \dots \quad (138a)$$

$$0 = (R_2 + j\omega L_2) \mathfrak{S}_2 + j\omega M \mathfrak{S}_1 \quad \dots \quad (139a)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt das Verhältnis der Ströme und deren Phasenverschiebung δ ; es ist

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_2} = -\frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} = -\frac{L_2}{M} + j\frac{R_2}{\omega M} \quad \dots \quad (140)$$

daher das Verhältnis der Effektivwerte

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}}{\omega M} \quad \dots \quad (140a)$$

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{R_2}{\omega L_2}.$$

Da $\operatorname{tg} \delta$ negativ ist, liegt δ zwischen 90° und 180° . Setzt man den Wert für \mathfrak{S}_2 aus Gl. 140 in Gl. 138a ein, so wird

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{S}_1 [R_1 + R_2 A^2 + j\omega(L_1 - L_2 A^2)] \quad \dots \quad (141)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$A^2 = \frac{(\omega M)^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2} = \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2.$$

Der sekundäre Stromkreis wirkt also so auf den primären zurück, als ob sein Widerstand um $R_2 A^2$ vergrößert und seine Induktivität um $L_2 A^2$ verkleinert wäre. Die Phasenverschiebung zwischen primärer Spannung und Strom ist nach Gl. 141

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega(L_1 - L_2 A^2)}{R_1 + R_2 A^2} \quad \dots \quad (142)$$

Die Wattkomponente der primären Spannung ist

$$P_1 \cos \varphi_1 = J_1 (R_1 + R_2 A^2) \quad \dots \quad (143)$$

daher die zugeführte Leistung

$$W_1 = P_1 J_1 \cos \varphi_1 = J_1^2 (R_1 + R_2 A^2)$$

$$\text{und da } A^2 = \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2, \text{ ist } W_1 = J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 \quad \dots \quad (144)$$

Der primäre Strom entnimmt also dem Netz eine Leistung, von der nur ein Teil in dem Stromkreis als Stromwärme verbraucht wird ($J_1^2 R_1$), der andere Teil wird in dem sekundären Stromkreis in Stromwärme umgesetzt, sie wird von dem primären Stromkreis auf den

sekundären durch das gemeinsame magnetische Wechselfeld als Zwischenglied übertragen.

Vektordiagramm. Die Gleichungen ermöglichen, für jede Belastung des sekundären Kreises ($R_2 L_2$) die Ströme und ihre Phase für eine gegebene primäre Klemmenspannung zu berechnen. Übersichtlich wird der Zusammenhang der verschiedenen Größen wieder durch das Vektordiagramm. Bevor wir dieses aufzeichnen, ist folgendes zu berücksichtigen. Die EMKE $J_1 \omega M$ und $J_1 \omega L_1$, von denen die erste im sekundären, die zweite im primären Stromkreis induziert wird, verhalten sich nach S. 135 Gl. 132 wie

$$M : L_1 = w_2 : w_1 v_1,$$

also abgesehen vom Streufaktor v_1 wie die Windungszahlen w_2 und w_1 . Diese sind im allgemeinen sehr verschieden groß, da der Zweck des Transformators ja ist, die Spannung umzuformen. Um die primären und sekundären Spannungen direkt miteinander vergleichen zu können, denkt man sich alle sekundären Spannungen mit dem Verhältnis $w_1 : w_2$ multipliziert, d. h. auf die primäre Windungszahl reduziert. Damit die Leistung unverändert bleibt, ist der sekundäre Strom mit dem reziproken Verhältnis, nämlich $w_2 : w_1$ zu multiplizieren. Die Größen R_2 und ωL_2 , die das Verhältnis einer Spannung zum Strom ausdrücken, sind bei der Reduktion mit $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$ zu multiplizieren, dagegen ωM , die das Verhältnis einer sekundären Spannung zum primären Strom, oder einer primären Spannung zum sekundären Strom darstellt, mit $w_1 : w_2$. Durch diese Reduktion ändert sich somit an den Erscheinungen nichts. Im folgenden werden stets die reduzierten Größen vorausgesetzt.

In Fig. 103 ist $OA = R_1 J_1$ in Phase mit J_1 und $AB = \omega L J_1$ um 90° dagegen voreilend.

Ferner ist $CB = \omega M J_1$, es ist daher

$$AB = CB v_1.$$

Das über CB konstruierte rechtwinklige Dreieck BCD hat nun nach Gl. 139 die Seiten $BD = \omega L_2 J_2$, $DC = J_2 R_2$, J_2 fällt daher in die Richtung DC , und der Winkel zwischen J_1 und J_2 ist der berechnete Winkel δ . Es ist $BE = \omega M J_2$ und daher OE als geometrische Summe von $OA = J_1 R_1$, $AB = \omega L_1 J_1$ und $BE = \omega M J_2$

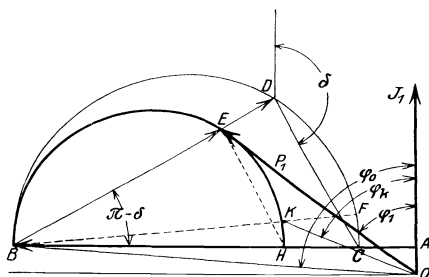


Fig. 103.

nach Gl. 138 die primäre Klemmenspannung P_1 , die gegen J_1 um φ_1 voreilt.

Da $CB = \omega M J_1$ und $BE = \omega M J_2$, ist $CB : BE = J_1 : J_2$.

Spannungsdiagramm für induktionsfreie Belastung. Das Spannungsdiagramm zeigt, wie die Klemmenspannung zu verändern ist, wenn bei konstantem Strom die Belastung sich ändert. Bei induktionsfreier Belastung ist L_2 lediglich die Induktivität der sekundären Wicklung, und es ist

$$BD : BE = L_2 : M = v_2 : 1.$$

Ändert sich nun R_2 , so ändert sich das rechtwinklige Dreieck BDC , dessen Seiten $BD = J_2 \omega L_2$ und $DC = J_2 R_2$ waren, derart, daß D sich auf dem Halbkreis über CB bewegt. Da nun $BE = \frac{BD}{v_2}$, also BD stets proportional ist, bewegt sich der Punkt E auf dem Kreis über BH , worin

$$BH : BC = BE : BD = 1 : v_2$$

ist. Der Endpunkt des Vektors der primären Spannung bei konstantem Strom J_1 bewegt sich also auf dem Kreis BEH .

Es ist $\text{tg}(EBH) = \frac{\omega L_2}{R_2}$. Ist $R_2 = \infty$, d. h. ist der sekundäre Stromkreis unterbrochen, so liegt der Vektor der primären Spannung in OB . Dieser Zustand heißt der Leerlauf des Transformators, die primäre Spule verhält sich wie eine Drosselspule, die Leerlaufspannung ist

$$P_{10} = J_1 \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}.$$

Ist der sekundäre Stromkreis kurzgeschlossen, so ist R_2 nur gleich dem Eigenwiderstand der sekundären Spule. Hierbei liegt der Vektor der Klemmenspannung in OK , und es ist

$$BK : KH = BF : FC = \omega L_2 : R_2.$$

OK ist die Klemmenspannung bei Kurzschluß.

Das Diagramm zeigt die verschiedenen Streukoeffizienten. Es war

$$CB : AB = M : L_1 = 1 : v_1,$$

daher ist

$$AC : AB = (L_1 - M) : L_1 = S_1 : L_1,$$

ferner war

$$BE : BD = BH : BC = M : L_2 = 1 : v_2$$

endlich ist

$$HC : BC = (L_2 - M) : L_2 = S_2 : L_2,$$

$$\frac{AH}{AB} = 1 - \frac{HB}{AB} = 1 - \frac{CB}{AB} \frac{HB}{CB} = 1 - \frac{MM}{L_1 L_2} = 1 - \frac{1}{v_1} \frac{1}{v_2} = \sigma.$$

Messung der gesamten Streuung.

Hiernach läßt sich die Streuung mittels der beiden besonderen Punkte für Leerlauf und Kurzschluß wie folgt durch Messung ermitteln.

Man mißt bei offenem sekundären Kreis den Strom J_1 , die Spannung P_{10} und die Leistung W_{10} , und trägt den Vektor der Spannung $P_{10} = OB$ unter dem Winkel φ_0 gegen den Strom auf, worin

$$\cos \varphi_0 = \frac{W_{10}}{J_1 P_{10}}$$

ist, und fällt das Lot BA von B auf den Vektor des Stromes. Zweitens mißt man bei kurzgeschlossenen sekundären Klemmen den Strom J_1 , die Kurzschlußspannung P_{1k} und die Leistung W_{1k} , und trägt $P_{1k} = OK$ unter dem Winkel φ_k gegen J_1 auf, wobei

$$\cos \varphi_k = \frac{W_{1k}}{P_{1k} J_1}$$

Verbindet man B mit K und zieht KH senkrecht zu BK bis zum Schnitt H mit AB , so hat man wie gezeigt

$$AH : AB = \sigma.$$

Sind die Widerstände der beiden Wicklungen vernachlässigbar klein, so ist die Leerlaufspannung sehr nahe gleich AB und ebenso die Kurzschlußspannung gleich AH , daher

$$\sigma \approx \frac{P_{1k}}{P_{10}}$$

Stromdiagramm für induktionsfreie Belastung.

Das Stromdiagramm stellt die Veränderung des Stromes bei konstanter Klemmenspannung P_1 dar, es kann aus dem Spannungsdiagramm durch Inversion abgeleitet werden (siehe Kap. III). In Fig. 104 ist das Spiegelbild des Kreises über BH aufgetragen und bei der Inversion kann der Maßstab so gewählt werden, daß der inverse Kreis mit dem Ausgangskreis zusammenfällt.

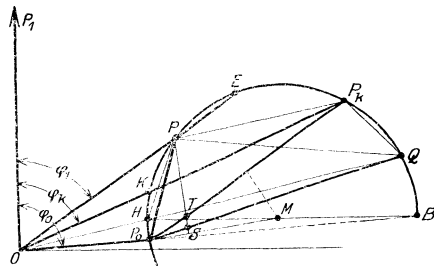


Fig. 104.

Inverse Punkte liegen auf dem Kreis auf einem Strahl durch das Inversionszentrum O .

Dem Punkt B für Leerlauf entspricht der Leerlaufstrom

$$J_{10} = OP_0 = \frac{P_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}.$$

Dem Punkt K für Kurzschluß entspricht der Kurzschlußstrom

$$J_{1k} = OP_k.$$

Diese beiden Ströme können für die gegebene Spannung P_1 , wie zuvor gezeigt, durch Messung ermittelt werden.

Trägt man sie unter den Phasenwinkeln φ_0 bzw. φ_k gegen die Spannung auf, so erhält man den Kreis wie folgt. Da P_0P_k eine Sehne ist, liegt der Mittelpunkt M erstens auf dem Mittellot von P_0P_k . Da ferner

$$\sphericalangle MP_0B = \sphericalangle MBP_0 = 90^\circ - \varphi_0$$

ist, hat man diesen Winkel an die Verlängerung von OP_0 anzutragen, um die Richtung P_0M zu erhalten.

Ein beliebiger Vektor von O nach einem Kreispunkt P , der zu E invers ist, stellt einen Strom J_1 nach Größe und Phase φ_1 gegenüber der Klemmenspannung dar, für irgendeinen Wert von R_2 , der zwischen dem Eigenwiderstand der Wicklung und unendlich liegt.

Der sekundäre Strom wird wie folgt gemessen. Aus der Inversion folgt

$$OP \cdot OE = OP_0 \cdot OB,$$

d. h.

$$\triangle OPP_0 \sim \triangle OBE,$$

daher

$$PP_0 = OP \frac{BE}{OB}.$$

Da $OP = J_1$, $BE = J_2 \omega M$, $OB = J_1 \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}$ war, wird

$$PP_0 = J_2 \frac{\omega M}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}},$$

d. h. abgesehen von Konstanten proportional J_2 . Die Phasenverschiebung zwischen J_2 und J_1 war δ , und es war in Fig. 103 $\sphericalangle EBH = 180^\circ - \delta$, daher ist in Fig. 104 $\sphericalangle EPH = \delta$.

Die Verbindungslinie eines Punktes P mit Punkt H zeigt also die Richtung von J_2 , während die Verbindungslinie mit P_0 der Größe von J_2 proportional ist.

Ebenso findet man leicht eine Strecke, die der Spannung $J_2 R_2$, also abgesehen vom Spannungsabfall in der sekundären Wicklung der sekundären Klemmenspannung proportional ist.

Der Punkt H des Spannungsdiagramms Fig. 103 entsprach $R_2 = 0$, und da $AH = J_1 \sigma \omega L_1$, ist $OH = J_1 \sqrt{R_1^2 + (\sigma \omega L_1)^2}$.

Der zu H inverse Punkt ist Q in Fig. 104, also

$$OQ = \frac{P_1}{\sqrt{R_1^2 + (\sigma \omega L_1)^2}}.$$

Es ist

$$\triangle OPQ \sim \triangle OHE,$$

folglich

$$QP : OQ = HE : OE,$$

da hierin

$$HE = J_2 R_2 \frac{M}{L_2} \quad \text{und} \quad OE = P_1 \text{ ist}$$

$$QP = J_2 R_2 \frac{M}{L_2 \sqrt{R_1^2 + (\sigma \omega L_1)^2}},$$

also proportional $J_2 R_2$.

Da QP proportional $J_2 R_2$ und PP_0 proportional J_2 ist, ist das Verhältnis dieser beiden Strecken ein Maß für den gesamten sekundären Widerstand R_2 und das Produkt der Strecken ein Maß für die auf den sekundären Stromkreis übertragene Leistung $J_2^2 R_2$.

Den Widerstand R_2 stellt man am einfachsten im Vergleich mit dem Widerstand der sekundären Wicklung dar, der beim Kurzschluß allein vorhanden ist. Ist dieser mit R_2' bezeichnet, während R_a der Widerstand der äußeren Belastung ist, so ist

$$R_2 = R_2' + R_a.$$

Für den Kurzschlußpunkt P_k ist somit

$$\frac{QP_k}{P_0 P_k} = R_2',$$

während für einen beliebigen Punkt P

$$\frac{QP}{P_0 P} = R_2' + R_a,$$

daher

$$\frac{QP}{P_0 P} \cdot \frac{P_0 P_k}{QP_k} = \frac{R_2' + R_a}{R_2'}.$$

Fällt man ein Lot von P auf den Radius $P_0 M$, das $P_0 Q$ in S und $P_0 P_k$ in T schneidet, so ist (da der Kreis der Geraden PS in bezug auf P_0 invers ist)

$$\triangle P_0 SP \sim \triangle P_0 PQ \quad \text{und} \quad \triangle P_0 ST \sim \triangle P_0 P_k Q,$$

daher

$$\frac{QP}{P_0 P} = \frac{PS}{P_0 S} \quad \text{und} \quad \frac{QP_k}{P_0 P_k} = \frac{ST}{P_0 S},$$

$$\text{daher} \quad \frac{PS}{P_0S} \cdot \frac{P_0S}{ST} = \frac{PS}{ST} = \frac{QP}{P_0P} \cdot \frac{P_0P_k}{QP_k} = \frac{R_2' + R_a}{R_2'}$$

$$\text{und} \quad \frac{PT}{ST} = \frac{R_a}{R_2'}$$

Das Lot PS auf dem Radius wird also durch die Gerade P_0P_k im Verhältnis des Belastungswiderstandes zum Wicklungswiderstand geteilt.

Das Produkt der Strecken P_0P und QP war der Leistung $J_2^2 (R_2' + R_a)$ proportional, und da der Winkel P_0PQ und die Grundlinie des Dreiecks P_0PQ konstant sind, ist seine Höhe oder die ihr stets proportionale Strecke PS proportional $J_2^2 (R_2' + R_a)$. Somit ist PT proportional der an den Belastungswiderstand abgegebenen Nutzleistung $J_2^2 R_a$ und TS proportional dem Verlust in der sekundären Wicklung $J_2^2 R_2'$. Der Abstand eines Punktes P von der Geraden P_0P_k ist also ein Maß für die sekundär abgegebene Nutzleistung. In den Punkten, in denen diese Gerade den Kreis schneidet, ist diese Leistung Null, nämlich in P_0 und P_k , d. h. bei Leerlauf und bei Kurzschluß. Im ersten Zustand ist $J_2 = 0$, im zweiten ist der äußere Belastungswiderstand $R_a = 0$.

Da das Dreieck P_0PQ proportional der ganzen auf den sekundären Stromkreis übertragenen Leistung $J_2^2 (R_2' + R_a)$ ist, wird diese Leistung am größten, wenn die Seiten P_0P und QP gleichgroß sind. Da

$$P_0P = J_2 \frac{\omega M}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}$$

und

$$QP = J_2 (R_2' + R_a) \frac{M}{L_2 \sqrt{R_1^2 + (\sigma \omega L_1)^2}}$$

war, ist also die Bedingung für die größte sekundäre Leistung

$$R_2' + R_a = \omega L_2 \sqrt{\frac{R_1^2 + (\sigma \omega L_1)^2}{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}$$

oder sehr angenähert, da R_1 klein ist,

$$R_2' + R_a = \sigma L_2.$$

Das hier behandelte Diagramm gilt mit geringen Abweichungen auch für viele andere Wechselstromkreise, seine allgemeine Ableitung ist in Kap. XII eingehend behandelt.

52. Messung der gegenseitigen Induktion.

1. Schaltet man zwei Spulen mit den Induktivitäten L_1 , L_2 und der Wechselinduktivität M hintereinander, so daß die Felder beider Spulen sich addieren, so ist die resultierende Induktivität

$$L' = L_1 + L_2 + 2M.$$

Keht man den Strom in der einen Spule um, so ist analog

$$L'' = L_1 + L_2 - 2M,$$

und hieraus erhält man

$$M = \frac{1}{4}(L' - L'').$$

2. In der Brücke kann die Wechselinduktivität zweier Spulen mit der Induktivität der einen nach der Schaltung Fig. 105 verglichen werden.

Damit das Galvanometer nicht ausschlägt, muß

$$i_2 = i_1, \quad i_4 = i_3$$

sein. Sind die Spulen so geschaltet, daß im Stromzweig 1 die EMK der gegenseitigen Induktion des unverzweigten Stromes $(i_1 + i_3)$ der EMK der Selbstinduktion des Stromes i_1

entgegengerichtet ist, so sind die Bedingungen dafür, daß keine Spannung am Galvanometer besteht:

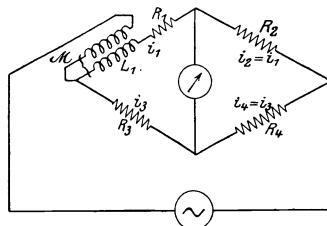


Fig. 105.

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{d(i_1 + i_3)}{dt} + i_1 R_1 = i_3 R_3 \dots (145)$$

und

$$i_1 R_2 = i_3 R_4 \dots (146)$$

Die erste Bedingung zerfällt in die beiden Teile

$$i_1 R_1 = i_3 R_3 \dots (145 a)$$

und

$$L \frac{di_1}{dt} = M \frac{d(i_1 + i_3)}{dt} \dots (145 b)$$

Gl. 146 und 145 a ergeben

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \dots (147)$$

wie für Gleichstrom, dann ist

$$\frac{i_3}{i_1} = \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

Der Wert für i_3 in Gl. 145 b eingesetzt, gibt

$$\frac{M}{L} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_4}{R_2 + R_4} \dots \dots \dots (148)$$

53. Gegenseitige Induktion mehrphasiger Stromkreise.

Sind die drei Stromkreise eines Dreiphasensystems magnetisch miteinander verkettet, und sind die Ströme i_1, i_2, i_3 , die Spannungen p_1, p_2, p_3 , so gelten die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} + M_{31} \frac{di_3}{dt} \\ p_2 &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_3}{dt} \\ p_3 &= i_3 R_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{13} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} (149)$$

worin nach Seite 133 Gl. 130 stets

$$M_{12} = M_{21}, \quad M_{23} = M_{32}, \quad M_{31} = M_{13}.$$

a) Ist das System vollständig symmetrisch

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_3 = R \\ L_1 &= L_2 = L_3 = L \\ M_{12} &= M_{23} = M_{31} = M, \end{aligned}$$

und ist die Bedingung

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \dots \dots \dots (150)$$

erfüllt, so wird aus Gl. 149

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= i_1 R + (L - M) \frac{di_1}{dt} \\ p_2 &= i_2 R + (L - M) \frac{di_2}{dt} \\ p_3 &= i_3 R + (L - M) \frac{di_3}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (151)$$

Die drei Stromkreise verhalten sich so, als ob jeder allein vorhanden wäre und eine Induktivität $(L - M)$ hätte. Der resultierende magnetische Fluß, der jeden Stromkreis durchsetzt, ist mit dem Strom dieses Kreises phasengleich. Die Gleichungen gelten für die Momentanwerte, daher unabhängig von der Kurvenform des Stromes.

Die Bedingung Gl. 150 ist bei einem symmetrischen Dreiphasensystem meist erfüllt, außer bei Anwesenheit eines Nulleiters. Dann ist

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_0 = 0.$$

Bei symmetrischer Belastung und gleichen Werten von M ist der Strom i_0 im Nulleiter die Summe der Ströme dreifacher Periodenzahl der drei Hauptleiter. Man erhält dann in jeder der drei Gleichungen (151) noch das zusätzliche Glied $-M \frac{di_0}{dt} = 3M \frac{di_{III}}{dt}$, wenn i_{III} der Strom dreifacher Periodenzahl einer Phase ist. Da dieser auch in dem Glied $(L - M) \frac{di}{dt}$ vorkommt, ist die resultierende Induktivität einer Phase für die Ströme dreifacher Periodenzahl

$$L - M + 3M = L + 2M.$$

Hieraus folgt, daß die gegenseitige Induktion der Leitungen eines symmetrischen Dreiphasensystems mit Nulleiter dazu beiträgt, die Ströme dreifacher Periodenzahl zu dämpfen, weil sie eben in den drei Leitern gleichgerichtet sind.

b) Ist das System unsymmetrisch angeordnet, d. h. sind die M voneinander verschieden, so ist bei Abwesenheit eines Nulleiters

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

stets erfüllt. Dann ist aber der magnetische Fluß eines Stromkreises nicht mehr in Phase mit dem Strom dieses Kreises. Ist z. B.

$$M_{12} > M_{13},$$

so setzen wir

$$M_{12} = M_{13} + m.$$

Die „Reaktanzspannung“ des Stromes i_1 wird nach der ersten der drei Gl. 149

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} + M_{31} \frac{di_3}{dt} = (L_1 - M_{13}) \frac{di_1}{dt} + m \frac{di_2}{dt}.$$

Bei einwilligen Strömen ist diese resultierende Reaktanzspannung nicht mehr um 90° gegen i_1 verschoben, weil das Glied $m \frac{di_2}{dt}$ hinzutritt, das um 90° gegen i_2 voreilt, also gegen i_1 um 30° verzögert ist. Die Spannung ist z. T. in Phase mit dem Strom, d. h. die Stromkreise übertragen eine Leistung aufeinander. Diese Erscheinung hat Blondel als „schiefwinklige“ Reaktanz bezeichnet und bei Wechselstromleitungen eingehend untersucht¹⁾.

Betrachten wir eine Dreiphasenleitung, die kurz sei und deren Kapazität vernachlässigt werde. Die Leitung besteht aus 3 Drähten. Fügt man als vierten Leiter die Erde hinzu, so ist diese stromlos, wenn Gl. 150 erfüllt ist. Es sind dann 3 Schleifen vorhanden, die aus je einem Draht und Erde gebildet werden, deren Induktivitäten

¹⁾ Ecl. électrique 1906.

L_1, L_2, L_3 , deren Widerstände R_1, R_2, R_3 und deren Wechselinduktivitäten M_{12}, M_{13}, M_{23} sind. Diese drei Schleifen superponieren wir.

Die Spannungen am Anfang der Leitung sollen mit dem Index I , die am Ende mit II bezeichnet werden.

Dann werden die Gl. 149

$$\left. \begin{aligned} (p_{1I} - p_{1II}) &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{21} \frac{di_2}{dt} + M_{31} \frac{di_3}{dt} \\ (p_{2I} - p_{2II}) &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_3}{dt} \\ (p_{3I} - p_{3II}) &= i_3 R_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{13} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} . \quad (149a)$$

Bei einwilligen Strömen können diese Gleichungen für beliebige Stromverteilung im Vektordiagramm dargestellt und daraus die Änderungen der Phasenspannungen ermittelt werden. Für den besonderen Fall der symmetrischen Stromverteilung einwilliger Ströme setzen wir symbolisch

$$i_1 = \mathfrak{S}_1, \quad i_2 = \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 \varepsilon^{-j^{120}}, \quad i_3 = \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_1 \varepsilon^{-j^{240}},$$

ferner sei

$$R_1 = R_2 = R_3 = R,$$

so wird

$$\begin{aligned} (\mathfrak{P}_{1I} - \mathfrak{P}_{1II}) &= \mathfrak{S}_1 R + j\omega L_1 \mathfrak{S}_1 + j\omega M_{21} \mathfrak{S}_1 \varepsilon^{-j^{120}} + j\omega M_{31} \mathfrak{S}_1 \varepsilon^{-j^{240}} \\ (\mathfrak{P}_{2I} - \mathfrak{P}_{2II}) &= \mathfrak{S}_2 R + j\omega L_2 \mathfrak{S}_2 + j\omega M_{12} \mathfrak{S}_2 \varepsilon^{j^{120}} + j\omega M_{32} \mathfrak{S}_2 \varepsilon^{-j^{120}} \\ (\mathfrak{P}_{3I} - \mathfrak{P}_{3II}) &= \mathfrak{S}_3 R + j\omega L_3 \mathfrak{S}_3 + j\omega M_{13} \mathfrak{S}_3 \varepsilon^{j^{240}} + j\omega M_{23} \mathfrak{S}_3 \varepsilon^{j^{120}}, \end{aligned}$$

oder, da

$$\varepsilon^{+j^{120}} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\varepsilon^{+j^{240}} = \cos 240^\circ + j \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{P}_{1I} - \mathfrak{P}_{1II}) &= \mathfrak{S}_1 \left[R + \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{21} - M_{31}) \right. \\ &\quad \left. + j\omega \mathfrak{S}_1 [L_1 - \frac{1}{2} (M_{21} + M_{31})] \right] \\ (\mathfrak{P}_{2I} - \mathfrak{P}_{2II}) &= \mathfrak{S}_2 \left[R + \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{32} - M_{12}) \right. \\ &\quad \left. + j\omega \mathfrak{S}_2 [L_2 - \frac{1}{2} (M_{12} + M_{32})] \right] \\ (\mathfrak{P}_{3I} - \mathfrak{P}_{3II}) &= \mathfrak{S}_3 \left[R - \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{23} - M_{13}) \right. \\ &\quad \left. + j\omega \mathfrak{S}_3 [L_3 - \frac{1}{2} (M_{13} + M_{23})] \right] \end{aligned} \right\} . \quad (152)$$

Die Reaktanzspannung ist durch die zweiten Glieder bestimmt. Die Widerstandsspannung jeder Phase enthält ein zusätzliches Glied, das von der gegenseitigen Induktion der beiden andern Schleifen

herrührt, und der Leistungsübertragung zwischen den Schleifen entspricht. Die Summe dieser Leistungen ist Null, die Leistung schwingt zwischen den 3 Leitungen, nach außen ist die Schwingung ausgeglichen.

Bei Leitungen, die symmetrisch zueinander liegen und sehr weit von Erde entfernt sind, sind die drei M einander gleich, dann gelten die Gl. 151.

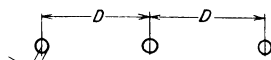


Fig. 106.

Sind dagegen die 3 Leitungen in einer Ebene in gleichem Abstand von Erde angeordnet (s. Fig. 106), so ist aus Symmetriegründen

$$L_1 = L_2 = L_3$$

und

$$M_{12} = M_{32}, \quad M_{13} = M_{31}.$$

Hiermit werden Gl. 152

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{P}_{1I} - \mathfrak{P}_{1II}) &= \mathfrak{S}_1 \left[R + \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{12} - M_{13}) \right] \\ &\quad + j\omega \mathfrak{S}_1 [L_1 - \frac{1}{2} (M_{12} + M_{13})] \\ (\mathfrak{P}_{2I} - \mathfrak{P}_{2II}) &= \mathfrak{S}_2 R + j\omega \mathfrak{S}_2 [L_2 - M_{12}] \\ (\mathfrak{P}_{3I} - \mathfrak{P}_{3II}) &= \mathfrak{S}_3 \left[R - \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega (M_{23} - M_{13}) \right] \\ &\quad + j\omega \mathfrak{S}_3 [L_3 - \frac{1}{2} (M_{13} + M_{23})] \end{aligned} \right\} . \quad (153)$$

Es ist $(M_{12} - M_{13})$ der Fluß, den der Strom 1 im Leiter 1 durch die aus den Leitern 2—3 gebildete Schleife sendet, analog

$(L_1 - M_{12})$ der Fluß des Leiters 1 durch die Schleife 1—2

$(L_1 - M_{13})$ " " " " " " " " 1—3

usf. Nach S. 137 wird

$$(M_{12} - M_{13}) = (M_{32} - M_{31}) = 2l \ln 2 \cdot 10^{-4} \text{ Henry}$$

und nach S. 16 und 215

$$(L_1 - M_{12}) = (L_2 - M_{12}) = (L_3 - M_{32}) = l \left(2 \ln \frac{D}{a} + 0,5 \right) 10^{-4} \text{ Henry}$$

$$(L_1 - M_{13}) = (L_3 - M_{13}) = l \left(2 \ln \frac{2D}{a} + 0,5 \right) 10^{-4} \text{ Henry}$$

wenn l die Länge in km ist.

Hiermit wird die resultierende Induktivität des inneren Leiters (2)

$$L_i = l \left(2 \ln \frac{D}{a} + 0,5 \right) 10^{-4} \text{ Henry}$$

und für die beiden äußeren Leiter (1 und 3)

$$L_a = l \left(2 \ln \frac{D}{a} + \ln 2 + 0,5 \right) 10^{-4} = l \left(2 \ln \frac{D}{a} + 1,193 \right) 10^{-4} \text{ Henry.}$$

Die scheinbare Vergrößerung bzw. Verkleinerung des Ohmschen Widerstandes in den beiden äußeren Leitern ist

$$R_s = \frac{1}{2} \sqrt{3} \omega 2l \ln 2 \cdot 10^{-4} = \omega l 1,196 \cdot 10^{-4} \text{ Ohm.}$$

Der Spannungsabfall in den drei Leitungen ist verschieden. Bilden die Spannungen am Anfang der Leitung ein symmetrisches Dreiphasensystem, so ist dies am Ende der Leitung nicht mehr der Fall.

Beispiel. Es sei

$$D = 100 \text{ cm,} \quad a = 0,5 \text{ cm,}$$

$$\frac{L_i}{l} = (2 \ln 200 + 0,5) 10^{-4} = 11,1 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km}$$

$$\frac{L_a}{l} = (2 \ln 200 + 1,193) = 11,8 \cdot 10^{-4} \text{ Henry/km.}$$

Der Unterschied beträgt also ca. 6%.

Der Ohmsche Widerstand eines Leiters ist

$$\frac{R}{l} = \frac{1}{57} \cdot \frac{1000}{\frac{\pi}{4} \cdot 10^2} = 0,224 \text{ Ohm/km,}$$

der zusätzliche Widerstand der Außenleiter bei 50 Perioden

$$\frac{R_s}{l} = \pm 314 \cdot 1,196 \cdot 10^{-4} = \pm 0,0375 \text{ Ohm/km,}$$

d. h. nahezu 17% des Ohmschen Widerstandes.

Die Unsymmetrien können dadurch aufgehoben werden, daß man die Leitungen in gewissen Abständen verdrillt, um die äußeren Leiter mit dem inneren zu vertauschen.

Besonders stark treten diese Unsymmetrien bei Bahnen auf, die mit Dreiphasenstrom betrieben werden und bei denen zwei Leitungen als Oberleitung (Fahrdrähte) verlegt sind, während die dritte durch die Schienen gebildet wird.

Anmerkung: Bei Aufstellung der Gl. 149 ist zu berücksichtigen, daß die M auch mit negativem Vorzeichen auftreten können, je nach der als positiv bezeichneten Stromrichtung. Als Regel gilt: Durchsetzt der vom positiven Strom eines Stromkreises erzeugte Fluß einen der anderen Stromkreise in demselben Sinne wie der vom positiven Strom in diesem Kreise selbst erzeugte Fluß, so ist M positiv, im anderen Falle negativ. Der zweite Fall trifft bei Wicklungen von Mehrphasenmaschinen und Transformatoren zu, dann tritt in Gl. 151 an die Stelle der Differenz ($L - M$) die Summe ($L + M$).

54. Die Stromverteilung in massiven Leitern.

Ein Gleichstrom verteilt sich im allgemeinen gleichmäßig über den Querschnitt des Leiters. Anders ist es bei Wechselstrom. Der Leiter gehört einem Stromsystem an, dessen magnetisches Wechselfeld auch den Leiter selbst durchsetzt.

Die inneren und äußeren Stromfäden eines Leiters sind nicht mit der gleichen Zahl Induktionslinien verkettet, in den inneren Stromfäden werden größere EMKe induziert als in den äußeren, so daß im allgemeinen die Stromdichte im Innern des Leiters geringer ist als gegen den Rand hin, und die Phase des Stromes ist im Innern eine andere als am Rande. Diese Erscheinung der Verdrängung des Stromes nach der Oberfläche bezeichnet man als Hautwirkung (Skineffekt), sie bedingt eine Erhöhung des Stromwärmeverlustes gegenüber der gleichmäßigen Stromverteilung über den Querschnitt.

Ist di der Strom in einem Querschnittselement dq , so ist die Stromdichte in diesem Element

$$s_x = \frac{di}{dq}.$$

Die Summierung aller Stromelemente di über den Querschnitt q ergibt den gesamten Strom

$$i = \int_q s_x dq.$$

In einem Volumenelement vom Querschnitt dq und der Länge 1 cm ist, wenn ρ der spez. Widerstand des Leiters ist, die Stromwärme in jedem Augenblick

$$w_x = s_x^2 \rho dq.$$

Für einen einwelligen Strom sei S_x die effektive Stromdichte in dem betrachteten Element, dann ist die mittlere Stromwärme

$$W_x = S_x^2 \rho dq$$

und für den ganzen Querschnitt

$$W = \rho \int_q S_x^2 dq.$$

Bei gleichmäßiger Stromverteilung wäre der Effektivwert der mittleren räumlichen Stromdichte

$$S = \frac{J}{q}$$

und der Verlust

$$W_g = \rho S^2 q.$$

Daher ist

$$\frac{W}{W_g} = \frac{1}{q} \int_q \frac{S_x^2 dq}{S^2} \dots \dots \dots (154)$$

Drückt man in beiden Fällen den Verlust durch $J^2 R$ aus, so sind bei gleichem effektivem Gesamtstrom J verschiedene Widerstände R einzusetzen. Man spricht daher von einem „effektiven“ Wechselstromwiderstand R_{eff} im Gegensatz zu dem mit Gleichstrom gemessenen Widerstand R . Es ist

$$\frac{R_{eff}}{R} = \frac{1}{q} \int_0^q \frac{S_x^2 dq}{S^2}.$$

Die exakte Berechnung ist nur in wenigen Fällen ausführbar.

Als Beispiel möge eine ebene Kupferplatte betrachtet werden, deren Fläche groß gegen ihre Dicke ist, und die von geraden parallelen Stromfäden durchflossen wird. Das zugehörige magnetische Feld hat überall dieselbe Richtung senkrecht zur Richtung der Stromfäden. Im Außenraum sei das Feld auf der einen Seite homogen, auf der andern Null.

Dieser Fall liegt ange-nähert vor bei parallelen Sammelschienen oder bei Transformatoren, die mit rechteckigen Kupferschienen bewickelt sind.

Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu-grunde (Fig. 107). Die Plattenfläche, an der das magnetische Feld Null ist, liege in der XZ -Ebene, die Richtung der Feld-

stärke falle in die Z -Achse, der Strom in Richtung der X -Achse.

Für ein unendlich schmales Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $AB = CD = 1$, $AD = BC = dy$, setzen wir das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs der Randkurve gleich dem 4π fachen des umschlossenen Stromes. Ist \mathfrak{S} der Vektor der Stromdichte, so wird, da die Anteile der kurzen Seiten entgegengesetzt gleich sind,

$$-\mathfrak{S} + \left(\mathfrak{S} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} dy \right) = 4\pi \mathfrak{S} dy,$$

daher

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = 4\pi \mathfrak{S} \dots \dots \dots (155)$$

Für ein analoges Rechteck $abcd$ in der XY -Ebene mit den Seiten 1 und dy setzen wir das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs der Randkurve gleich der zeitlichen Abnahme des Induktionsflusses. In dem Leiter ist die elektrische Feld-

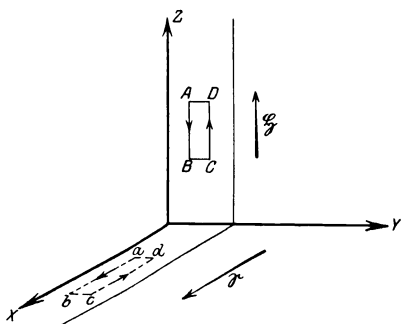


Fig. 107.

stärke $\mathfrak{E} = \mathfrak{S}\rho$, wenn ρ der spez. Widerstand ist. Da \mathfrak{S} und \mathfrak{E} sich in der X -Richtung nicht ändern sollen, liefern die kurzen Seiten entgegengesetzt gleiche Anteile und es wird

$$\mathfrak{E} - \left(\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} dy \right) = - \frac{\partial (\mathfrak{S} dy)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} = \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \dots \dots \dots (156)$$

Für einen einwelligen Strom seien \mathfrak{S} und \mathfrak{S} die Effektivwerte. Wir schreiben daher für den Differentialquotienten von \mathfrak{S} nach der Zeit symbolisch $j\omega\mathfrak{S}$

$$j\omega\mathfrak{S} = \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} \dots \dots \dots (156a)$$

Differentiiert man Gl. 156a nach ∂y und setzt Gl. 155 ein, so wird

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial y^2} = \frac{4\pi\omega}{\rho} j\mathfrak{S} \dots \dots \dots (157)$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial y^2} = \frac{4\pi\omega}{\rho} j\mathfrak{S} \dots \dots \dots (158)$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{2\pi\omega}{\rho} = k^2$, so wird Gl. 158

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial y^2} = 2k^2 j\mathfrak{S} \dots \dots \dots (158a)$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch den Ansatz

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A}e^{-\alpha y},$$

dann ist $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = -\alpha \mathfrak{S}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial y^2} = \alpha^2 \mathfrak{S}.$

Setzt man diesen Wert in Gl. 158a ein, so wird

$$\alpha^2 = 2k^2 j$$

$$\alpha = \pm k(1+j).$$

Die allgemeine Lösung von Gl. 158a besteht daher aus zwei Teilen

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_1 e^{k(1+j)y} + \mathfrak{A}_2 e^{-k(1+j)y} \dots \dots (159)$$

Für $y=0$ sollte $\mathfrak{S} = 0$ sein, daher wird

$$\mathfrak{A}_2 = -\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A} [e^{k(1+j)y} - e^{-k(1+j)y}] \dots \dots (159a)$$

Aus Gl. 155 folgt

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} = \frac{\mathfrak{A}k(1+j)}{4\pi} [e^{k(1+j)y} - e^{-k(1+j)y}] \dots (160)$$

Der räumliche Mittelwert der effektiven Stromdichte, dessen Quadrat im Nenner von Gl. 154 vorkommt, wird nun, wenn d die Dichte der Platte bezeichnet,

$$\frac{1}{d} \int_0^d \mathfrak{S} dy = \frac{\mathfrak{A}}{4\pi d} [\varepsilon^{k(1+j)d} - \varepsilon^{-k(1+j)d}] \quad \dots \quad (161)$$

Hierin kann die rechte Seite auf die Form

$$(a + jb)$$

gebracht werden, das Quadrat des Effektivwertes ist dann

$$a^2 + b^2 = (a + jb)(a - jb).$$

Man hat also die rechte Seite von Gl. 161 mit dem konjugierten Vektor zu multiplizieren, indem man $+j$ durch $-j$ ersetzt. Es wird:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{a^2}{16\pi^2 d^2} (\varepsilon^{k(1+j)d} - \varepsilon^{-k(1+j)d}) (\varepsilon^{k(1-j)d} - \varepsilon^{-k(1-j)d}) \\ &= \frac{a^2}{16\pi^2 d^2} (\varepsilon^{2kd} + \varepsilon^{-2kd} - \varepsilon^{2jkd} - \varepsilon^{-j2kd}). \end{aligned}$$

Hierin ist a der Modul von \mathfrak{A} und

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{2kd} + \varepsilon^{-2kd}}{2} &= \mathfrak{Cof} 2kd^1) \\ \frac{\varepsilon^{j2kd} + \varepsilon^{-j2kd}}{2} &= \cos 2kd, \end{aligned}$$

$$\text{daher} \quad S^2 = \frac{a^2}{8\pi^2 d^2} (\mathfrak{Cof} 2kd - \cos 2kd) \quad \dots \quad (162)$$

Im Zähler von Gl. 154 steht der räumliche Mittelwert der Quadrate der effektiven Stromdichten. Das Quadrat des Effektivwertes der Stromdichte für einen Punkt im Abstand y von der XZ -Ebene berechnet sich analog mittels Gl. 160.

$$S_y^2 = \frac{a^2 k^2 (1+j)(1-j)}{16\pi^2} [\varepsilon^{k(1+j)y} + \varepsilon^{-k(1+j)y}] [\varepsilon^{k(1-j)y} + \varepsilon^{-k(1-j)y}].$$

Durch ähnliche Umformung wie oben wird

$$S_y^2 = \frac{4a^2 k^2}{16\pi^2} (\mathfrak{Cof} 2ky + \cos 2ky).$$

¹⁾ Die hyperbolischen Kosinus und Sinus werden durch \mathfrak{Cof} und \mathfrak{Sin} bezeichnet. Tafeln: Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen, ferner im „Taschenbuch der Hütte“.

Der räumliche Mittelwert hiervon ist

$$\frac{1}{d} \int_0^d S_y^2 dy = \frac{4a^2 k^2}{16\pi^2} \frac{1}{2kd} (\text{Sin } 2kd + \sin 2kd) \quad . \quad (163)$$

Endlich erhalten wir

$$\frac{R_{\text{eff}}}{R} = \frac{1}{d} \int_0^d \frac{S_y^2 dy}{S^2} = kd \frac{\text{Sin } 2kd + \sin 2kd}{\text{Cos } 2kd - \cos 2kd} \quad . \quad (164)$$

Für kleine Werte von $2kd = 2d \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\varrho}} = 4\pi d \sqrt{\frac{c}{\varrho}}$ kann man die Hyperbel- und die Kreisfunktionen in Reihen entwickeln und erhält die Näherungsformel

$$\frac{R_{\text{eff}}}{R} = 1 + \frac{(2kd)^4}{180} = 1 + \frac{16\pi^2 \omega^2}{45 \varrho^2} d^4.$$

Setzt man für Kupfer $\varrho = 1700$, so ist für $c = 50$ Perioden

$$\frac{R_{\text{eff}}}{R} = 1 + 0,12 d^4.$$

Für eine Kupferplatte von 1 cm Dicke ist also die Erhöhung des Widerstandes 12⁰/₁₀₀.

Für große Werte von $2kd$ werden Sin und Cos einander gleich und groß gegen die Kreisfunktionen, dann ist

$$\frac{R_{\text{eff}}}{R} = d \sqrt{\frac{2\pi\omega}{\varrho}}.$$

Der Widerstand wächst proportional der Wurzel aus der Frequenz.

Für zylindrische Leiter¹⁾ ergibt die Rechnung Besselsche Funktionen. Angenähert ist, wenn d der Durchmesser ist,

$$\begin{aligned} \frac{R_{\text{eff}}}{R} &= 1 + \frac{1}{3} \left(k \frac{d}{4} \right)^4 \\ &= 1 + \frac{\pi^4}{48} \frac{c^2}{\varrho^2} d^4. \end{aligned}$$

Für Kupfer ist $\varrho \cong 1700$, und

$$\frac{R_{\text{eff}}}{R} = 1 + 0,70 \left(\frac{c d^2}{1000} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (165)$$

Ist der Drahtdurchmesser z. B. $d = \sqrt{2}$ cm, so wird für 50 Perioden

$$\frac{R_{\text{eff}}}{R} = 1,007.$$

¹⁾ S. W. Thomson, Electrician London Bd. 25, 1890, S. 510. ETZ 1890, S. 661. Stefan, Wiedem. Annalen Bd. 41, S. 400ff.

Bei hohen Periodenzahlen wird dagegen

$$\frac{R_{\text{eff}}}{R} = k \frac{d}{4} = \frac{\pi d}{2} \sqrt{\frac{c}{\varrho}}.$$

Diese Gl. 164—165 gelten nur, wenn keine Beeinflussung der Leiter durch benachbarte Felder erfolgt.

Bei verseilten Kabeln¹⁾ z. B. findet eine gegenseitige Beeinflussung statt, die größte Stromdichte tritt an den einander zugewandten Teilen auf. Eine einseitige Stromverdrängung tritt bei Stäben in Ankernuten²⁾ auf; am Nutengrund ist das Feld am schwächsten und die Stromfäden drängen sich nach der Nutöffnung.

Liegen in der Nut n in Reihe geschaltete Stäbe übereinander, so ist nach Field und Emde²⁾ für die ganze Nut

$$\frac{R_{\text{eff}}}{R} = \varphi(x) + \frac{n^2 - 1}{3} \psi(x),$$

worin

$$\varphi(x) = x \frac{\sin 2x + \sin x}{\cos 2x - \cos x}$$

$$\psi(x) = 2x \frac{\sin x - \sin x}{\cos x + \cos x}$$

$$x = h \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{\varrho} \frac{b'}{b}}.$$

h ist die Höhe eines Stabes, b die Nutenbreite, b' die Kupferbreite.

¹⁾ G. Mie, Wiedemanns Annalen 1900, S. 201.

Über die Stromverdrängung bei zwei parallelen Platten s. Cohn, Das elektromagnetische Feld, S. 465; bei parallelgeschalteten Platten Schumann E. u. M. 1913, Heft 30, 31; bei Spulen und Rollen, Sommerfeld, Annalen d. Physik 1904 und 1907.

²⁾ s. A. B. Field, Proc. of the American Institution of Electrical Engineers Bd. 24, 1905, S. 659; F. Emde, Elektrotechnik und Maschinenbau 1908, S. 703. Rogowski, Archiv f. Elektrotechnik 1913, S. 81, weist auf eine kritische Höhe der Leiter in der Nut hin, die nicht überschritten werden darf und das Minimum der Verluste darstellt.

Zehntes Kapitel.

Wechselstromkreise mit Eisen.

55. Der Erregerstrom. — 56. Eisenverluste. — 57. Vektordiagramme des Transformators. — 58. Das magnetische Feld einer Maschine mit verteiltem Eisen. — 59. Erzeugung eines Drehfeldes. — 60. Energieübertragung durch das Drehfeld.

55. Der Erregerstrom.

1. Magnetisierung mit Gleichstrom.

In Kap. I, S. 13 wurde aus dem elektromagnetischen Grundgesetz

$$\int \xi \, dl = 0,4 \pi i w$$

das „Ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises“

$$i w = \Phi_x R_x = \Phi_x \frac{l_x}{0,4 \pi \mu q_x}$$

abgeleitet, worin Φ_x der Fluß eines Induktionsrohres, l_x seine Länge, q_x der Querschnitt, μ die Permeabilität des Mediums ist.

Verläuft der Fluß in Eisen, so ist μ veränderlich. Fig. 108 zeigt die Magnetisierungskurve $\mathfrak{B} = f(\xi)$ und die Permeabilitätskurve $\mu = f(\xi)$ für Eisenblech.

Der Verlauf der Induktionsröhren ist nur in wenigen Fällen genau bestimmbar.

Als einfaches Beispiel möge der Eisenring nach Fig. 109 dienen, der mit einer gleichförmig aufgewickelten Spule versehen ist, die von einem konstanten Strom J durchflossen ist. Hier verläuft fast

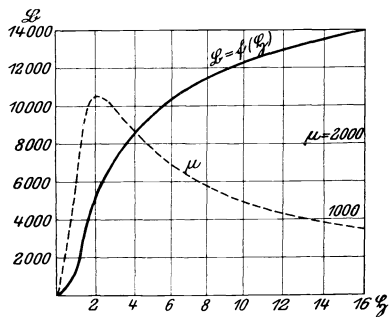
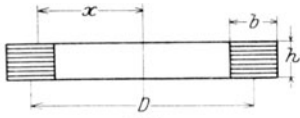


Fig. 108.

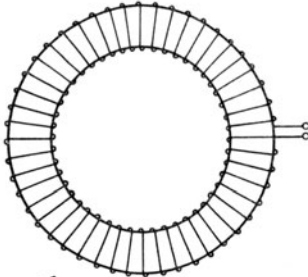
von einem konstanten Strom J durchflossen ist. Hier verläuft fast

der ganze Induktionsfluß im Eisen. Die Kraftlinien sind konzentrische Kreise, für die \mathfrak{H} konstant ist. Es ist



$$\mathfrak{H}_x = \frac{0,4 \pi J w}{2 \pi x}.$$

Trägt man zu jedem Radius x den zu der Feldstärke \mathfrak{H}_x gehörigen Wert der Induktion \mathfrak{B}_x auf, so erhält man die Verteilung der Induktion über die Breite b des Ringes, die je nach der Stelle der Magnetisierungskurve, an der man arbeitet, einen von der \mathfrak{H} -Kurve abweichenden Verlauf hat. Der Induktionsfluß im Eisenkern ist nun



$$\Phi = \int_{D - \frac{b}{2}}^{D + \frac{b}{2}} h \mathfrak{B}_x dx.$$

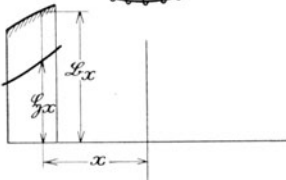


Fig. 109.

Ist die Breite b des Eisenringes klein gegen den Durchmesser D , so kann man die Induktion über die Breite als konstant annehmen, d. h. man betrachtet den ganzen Ring als ein Induktions-

rohr. Die mittlere Länge ist $l = \pi D$ und

$$\mathfrak{H} = \frac{0,4 \pi J w}{l},$$

und für diesen Wert entnimmt man der Magnetisierungskurve den zugehörigen mittleren Wert der Induktion \mathfrak{B} und erhält den Fluß

$$\Phi = \mathfrak{B} Q.$$

Nach diesem angenäherten Verfahren rechnet man bei technischen magnetischen Kreisen z. B. bei Maschinen und Transformatoren gewöhnlich, indem man den mittleren magnetischen Kraftlinienweg zugrunde legt. Für die zugehörige mittlere Induktion entnimmt man die „Amperewindungen für 1 cm“

$$aw = \frac{J w}{l} = \frac{1}{0,4 \pi} \mathfrak{H} = 0,8 \mathfrak{H}$$

der Magnetisierungskurve, bei der dann zweckmäßig als Abszissen nicht \mathfrak{H} sondern $aw = 0,8 \mathfrak{H}$ aufgetragen wird.

Besitzt der magnetische Kreis mehrere Teile von ungleichem Querschnitt und verschiedener Permeabilität (s. Fig. 110), wobei

auch Lufträume vorhanden sein können, so berechnet man für einen gegebenen Fluß Φ die Induktionen

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\Phi_1}{Q_1}, \quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\Phi_2}{Q_2} \quad \text{usf.}$$

entnimmt hierfür die Amperewindungen pro cm $aw_1, aw_2 \dots$ der Magnetisierungskurve und erhält die gesamte magnetomotorische Kraft

$$Jw = aw_1 l_1 + aw_2 l_2 + \dots$$

Hierbei ist noch folgendes zu berücksichtigen.

Ist ein Luftraum vorhanden, so verbreitert sich der Kraftfluß an der Übertrittsstelle, wie bei c in Fig. 110 angedeutet ist. Dies wirkt wie eine geringe Vergrößerung des Querschnittes. Ferner kann ein geringer Teil der Induktionslinien, wie bei a und b angedeutet, sich um die Erregerspule schließen, ohne den ganzen magnetischen Kreis zu durchlaufen. Diesen Teil des Flusses nennt man Streufluß, er bewirkt, daß der gesamte Fluß in jenen Teilen des magnetischen Kreises, auf denen die Erregerspule liegt, etwas größer ist als in den übrigen.

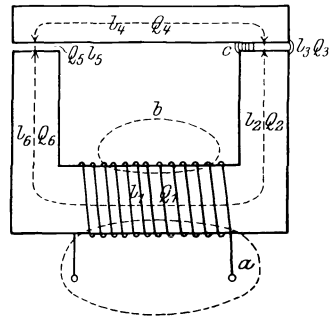


Fig. 110.

Ist ein Luftraum vorhanden, so verbreitert sich der Kraftfluß an der Übertrittsstelle, wie bei c in Fig. 110 angedeutet ist. Dies wirkt wie eine geringe Vergrößerung des Querschnittes. Ferner kann ein geringer Teil der Induktionslinien, wie bei a und b angedeutet, sich um die Erregerspule schließen, ohne den ganzen magnetischen Kreis zu durchlaufen. Diesen Teil des Flusses nennt man Streufluß, er bewirkt, daß der gesamte Fluß in jenen Teilen des magnetischen Kreises, auf denen die Erregerspule liegt, etwas größer ist als in den übrigen.

2. Zyklische Magnetisierung.

Wird das Eisen zyklisch magnetisiert, indem man die Feldstärke \mathfrak{H} allmählich zwischen zwei gleichgroßen Grenzwerten von entgegengesetzter Richtung $\pm \mathfrak{H}_{max}$ verändert, so gehören zu jedem zwischen den Grenzen liegenden Wert von \mathfrak{H} wegen der Remanenz des Eisens verschiedene Werte der Induktion \mathfrak{B} , je nachdem der Wert von \mathfrak{H} bei aufsteigender oder bei absteigender Magnetisierung erreicht wird.

Der Zusammenhang zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} für zyklische Magnetisierung wird durch die Hysteresisschleife (Fig. 111) dargestellt. Bei steigender Magnetisierung von $-\mathfrak{H}_{max}$ bis $+\mathfrak{H}_{max}$ wird sie längs $ABCD$, bei abnehmender längs $DEFA$ durchlaufen. Dem Wert

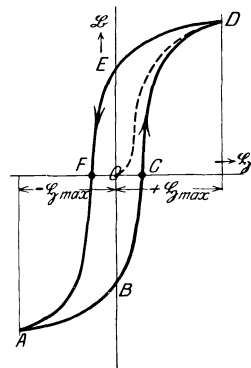


Fig. 111.

$\mathfrak{H} = 0$ entspricht eine Induktion $OE = OB$, die als Remanenz bezeichnet wird. Um die Induktion Null herzustellen, ist eine Feldstärke $OC = OF$ erforderlich. Sie heißt Koerzitivkraft. Die Induktion ist daher keine eindeutige Funktion der Feldstärke, sie hängt von der Remanenz ab, die bei der vorhergehenden Magnetisierung zurückgeblieben ist. Die Magnetisierungskurve (Fig. 108), die für $\mathfrak{H} = 0$ bei $\mathfrak{B} = 0$ beginnt, kann daher nur erhalten werden, wenn das Eisen zuvor vollständig entmagnetisiert war. Sie heißt die „jungfräuliche Magnetisierungskurve“.

Jedem Wert von \mathfrak{H}_{max} entspricht eine andere Hysteresisschleife, und die Spitzen aller Hysteresisschleifen liegen auf der jungfräulichen Kurve.

3. Hysteresisarbeit.

Einer Änderung der Induktion um $d\mathfrak{B}$ entspricht nach Maxwell eine Zunahme der magnetischen Energie in der Volumeneinheit um $\frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}$. Bei Medien mit konstanter Permeabilität μ ergibt sich hieraus der wiederholt verwendete Ausdruck für den Energiegehalt des Feldes (s. S. 17). Bei Eisen ist die Magnetisierungskurve zugrunde zu legen.

Wächst die Feldstärke von \mathfrak{H}_1 bis \mathfrak{H}_2 , die Induktion von \mathfrak{B}_1 bis \mathfrak{B}_2 , so ist die Energiezunahme für die Volumeneinheit

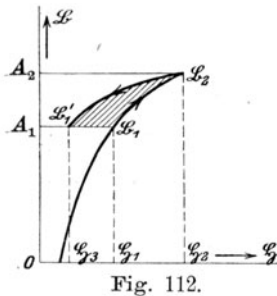


Fig. 112.

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}_2} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}.$$

Sie ist gleich dem $\frac{1}{4\pi}$ fachen der Fläche $A_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 A_2$ in Fig. 112. Geht die Induktion von \mathfrak{B}_2 auf \mathfrak{B}_1 zurück, so verläuft die Magnetisierung längs der Hysteresisschleife bis \mathfrak{B}'_1 , der die Feldstärke \mathfrak{H}_3 entspricht. Die zurückgegebene Energie für die Volumeneinheit ist

$\frac{1}{4\pi}$ mal der Fläche $A_1 \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{B}_2 A_2$, also um das schraffierte Stück kleiner als die zugeführte Energie. Dieser Teil bleibt zurück, er ist im Eisen in Wärme umgewandelt. Bei zyklischer Magnetisierung ist daher die in Wärme umgewandelte Energie bei jedem Zyklus gleich dem $\frac{1}{4\pi}$ fachen der von der Hysteresisschleife umgrenzten Fläche.

$$a_h = \frac{1}{4\pi} \int_{\bigcirc} \mathfrak{H} d\mathfrak{B} \quad \dots \quad (166)$$

ist die Hysteresisarbeit für einen Zyklus in der Volumeneinheit. Sind \mathfrak{H} und \mathfrak{B} in absoluten Einheiten gemessen, so wird die Hysteresisarbeit in Erg erhalten.

4. Magnetisierung mit Wechselstrom.

Wird die Spule des Eisenringes (Fig. 109) an eine Wechselspannung angeschlossen, so wird das Eisen durch den Wechselstrom zyklisch unmagnetisiert.

Während bei Gleichstrom die Spannung nur den Ohmschen Spannungsabfall zu decken hat, ist bei Wechselstrom auch die EMK der Selbstinduktion zu überwinden. Da hier L keine Konstante ist, schreibt man die Spannungsgleichung in der Form

$$p = iR + w \frac{d\Phi}{dt} \quad (167)$$

wobei der Zusammenhang zwischen Φ und i durch die Hysteresisschleife gegeben ist.

Ein angenähertes Bild über den Verlauf des Stromes erhält man, wenn man iR vernachlässigt, was in vielen Fällen zulässig ist. Dann ist

$$p = w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Setzt man eine einwellige Spannung voraus, so ist

$$p = p_m \sin \omega t$$

$$\Phi = \int \frac{p dt}{w} = -\frac{p_m}{\omega w} \cos \omega t = -\Phi_m \cos \omega t,$$

worin

$$\Phi_m = \frac{p_m}{\omega w}$$

die Amplitude des ebenfalls einwelligen Flusses ist. In Fig. 113 ist die Welle des Flusses aufgetragen und zu jedem Wert von Φ der Hysteresisschleife der zugehörige Strom i entnommen. Er hat bei sinusförmiger Spannung eine spitze, stark verzerrte Form. Er ist zur Amplitude des Flusses nicht symmetrisch, und die Nulldurchgänge der Stromkurve sind wegen der Remanenz gegen die des Flusses voreilend.

Würde die Ummagnetisierung ohne Hysteresis nach der mittleren punktierten Kurve OB in Fig. 113 verlaufen, so erhielte man die symmetrische Stromkurve i_μ (Fig. 114), die mit dem Fluß in Phase ist, die Hysteresis bedingt die um 90° dagegen voreilende Komponente i_h . i_h und i_μ ergeben zusammen die Stromkurve i in Fig. 113.

Der Magnetisierungsstrom kann also in zwei Komponenten zerlegt gedacht werden, i_μ ist gegen die Spannung um 90° verzögert,

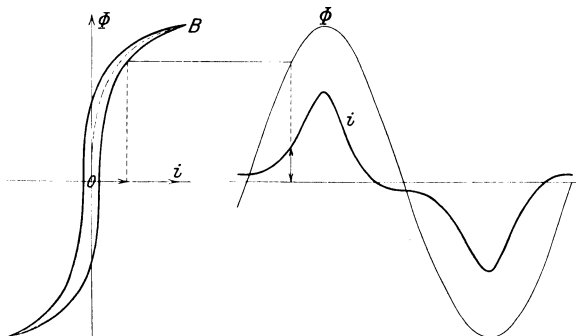


Fig. 113.

i_h in Phase mit der Spannung. Das Produkt aus Spannung und i_h stellt den Leistungsverlust durch die Hysterisis dar. Bei c Umagnetisierungen in der Sekunde ist er für die Volumeneinheit

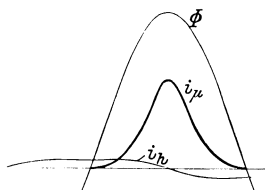


Fig. 114.

$$w_h = c a_h = c \frac{1}{4\pi} \int_{\circ} \oint d\mathfrak{B} \text{ Erg/Sek}^{-1}.$$

Bei Ermittlung der Stromkurve waren wir von einer sinusförmigen Spannung $w \frac{d\Phi}{dt}$ ausgegangen. Addiert man zu ihr den Ohmschen Spannungsabfall iR , der ebenso wie der Strom verzerrt ist, so ist die Klemmenspannung nicht mehr sinusförmig. Umgekehrt bewirkt der Ohmsche Spannungsabfall bei sinusförmiger Klemmenspannung, daß $w \frac{d\Phi}{dt}$ und Φ nicht mehr sinusförmig sind. Es zeigt sich, daß $w \frac{d\Phi}{dt}$ spitzer wird, also einen größeren Formfaktor hat als die Sinuskurve. Nun ist nach Kap. I, S. 10 die Amplitude des Flusses

$$\Phi_m = \frac{E 10^8}{4 c w f},$$

bei gegebener effektiver EMK E ist sie dem Formfaktor f umgekehrt proportional. Φ_m wird also bei spitzerer Spannungskurve kleiner, und ebenso wird der Magnetisierungsstrom kleiner.

Schaltet man vor die Spule einen Ohmschen Widerstand, so zeigt sich, daß bei gleicher effektiver Spannung an der Spule der Magnetisierungsstrom kleiner geworden ist. Bei sehr hohen Sätti-

gungen, wie sie bei Transformatoren besonders für kleine Periodenzahlen (15) verwendet werden, zeigt sich diese Erscheinung schon bei kleinen Vorschaltwiderständen (Strommesser und Wattmeter).

5. Wirbelströme.

Eine weitere Erscheinung bei der Ummagnetisierung mit Wechselstrom sind die Wirbelströme. Das Wechselfeld induziert ebenso wie in der Erregerspule auch im Eisenkern (Fig. 109) elektromotorische Kräfte. Hierdurch werden Ströme im Eisen hervorgerufen, deren Bahnen im Eisenquerschnitt ähnlich verlaufen wie die Strombahn des Erregerstromes am Rande des Querschnitts. Durch diese Wirbelströme wird das Eisen erhitzt, und um sie klein zu halten, wird der Eisenquerschnitt aus Blechen zusammengesetzt, die durch Papierisolation voneinander getrennt sind.

Für Dynamomaschinen und Transformatoren werden Bleche in Stärken von 0,5 bis 0,3 mm verwendet. Auch bei so feiner Unterteilung werden die Wirbelströme nicht vollständig unterdrückt. Sie wirken auf den Erregerstrom zurück wie der sekundäre Strom eines Transformators auf den primären (s. Kap. IX) und bedingen daher eine Vergrößerung dieses Stromes.

Nach den Versuchen von Gumlich und Rose¹⁾ ist ein Unterschied zwischen der Magnetisierung mit Gleichstrom und der mit Wechselstrom, bei Periodenzahlen von 15 bis 50, nur bei Induktionen bis 12000 bis 15000 nachweisbar. Er zeigt sich darin, daß bei gleicher Feldstärke die Induktion bei Wechselstrom etwas kleiner ist als bei Gleichstrom.

Die Unterschiede sind aber sehr klein und verschwinden bei höherer Sättigung ganz. Bei hohen Periodenzahlen äußert sich dagegen die Rückwirkung der Wirbelströme in größerem Maße.

6. Magnetisierung bei Mehrphasenströmen.

Die spitze Kurve des Magnetisierungsstromes nach Fig. 113 und 114 enthält eine sehr große dritte Oberwelle. Die Kurve i_μ in Fig. 114 hat die Gleichung

$$i = 100 \sin x - 40 \sin 3x + 10,1 \sin 5x - 3,46 \sin 7x + \dots$$

Die Amplitude der dritten Oberwelle ist also 40% von der Grundwelle, bei höheren Sättigungen kann sie noch größer werden.

Schaltet man die Erregerspulen von drei magnetischen Kreisen in Sternschaltung an ein Dreiphasennetz (s. Fig. 115), so kann nach Kap. VIII die dritte Oberwelle des Stromes nicht fließen. Die Folge davon ist, daß der Fluß in jedem der drei magnetischen Kreise nicht

¹⁾ ETZ 1905, S. 503 ff.

mehr sinusförmig sein kann. Addiert man zu dem Strom bei einphasiger Erregung eine dritte Oberwelle, die entgegengesetzt gleich ist der vorhandenen, so ergibt sich in erster Annäherung die Form des Stromes bei dreiphasiger Erregung. Dieser gedachte hinzugefügte Strom von dreifacher Periodenzahl erzeugt einen Fluß und eine Spannung von dreifacher Periodenzahl nebst Oberwellen. In den (verketteten) Linienspannungen heben sich diese Spannungen von dreifacher Periodenzahl wieder heraus.

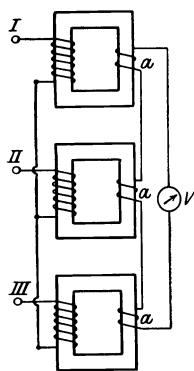


Fig. 115.

Man kann sie getrennt erhalten, wenn man um die drei Kerne je eine Prüfspule a in Fig. 115 legt und diese drei Spulen hintereinanderschaltet. Die Grundwellen der Spannungen sind um 120° phasenverschoben und ergeben als Summe Null, die Oberwellen von dreifacher Periodenzahl sind gleichphasig und addieren sich.

Da sich die Effektivwerte der Oberwellen quadratisch addieren, werden die Effektivwerte der Grundwellen der Phasenspannung und des Flusses nur wenig kleiner als die Effektivwerte der resultierenden Wellen; da nun zur Erzeugung dieses Flusses die von der dritten Oberwelle herrührende Spitze des Magnetisierungsstromes fehlt, muß die Grundwelle des flacheren Stromes entsprechend größer sein, d. h. der Effektivwert des Magnetisierungsstromes ist bei gleicher Induktion größer, wenn man die drei Kerne in Sternschaltung mit Dreiphasenstrom erregt, als wenn man jeden für sich mit Einphasenstrom erregt.

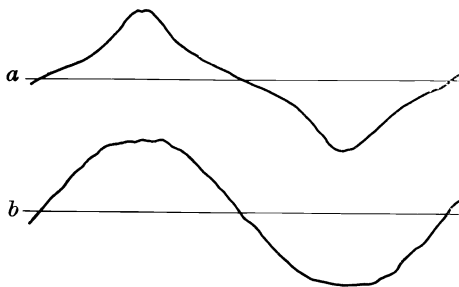


Fig. 116. Magnetisierungsstrom.
a einphasig, b dreiphasig.

Die Oszillogramme (Fig. 116) zeigen den spitzen einphasigen und den flachen dreiphasigen Erregerstrom, die an ein und demselben Induktionsmotor aufgenommen wurden, der eine bei Anschluß aller drei Phasen an ein Dreiphasennetz, der andere bei Unterbrechung

einer Phase, so daß die beiden übrigen in Reihenschaltung mit Einphasenstrom erregt waren. In beiden Fällen war die Sättigung gleichgroß; der Effektivwert des dreiphasigen Magnetisierungsstromes war aber um 30% größer als der des einphasigen.

Bei den dreiphasigen Induktionsmotoren und Transformatoren

sind die drei Flüsse der einzelnen Phasen nicht wie im Beispiel der Fig. 115 getrennt, sondern, wie Fig. 117 für einen Dreiphasentransformator zeigt, durch die gemeinsamen Joche $J-J$ verkettet. Die Flüsse von dreifacher Periodenzahl sind gleichphasig, d. h. in jedem Augenblick in den drei Kernen gleichgerichtet; in den Jochen wären sie einander entgegengesetzt gerichtet, sie können sich also nicht durch die Joche schließen, sondern sie treten aus den Kernen aus und schließen sich teils durch die Luft, teils durch benachbarte Eisenteile des Gehäuses und verursachen hier und besonders dort, wo sie senkrecht zur Unterteilung aus den Kernen austreten, zusätzliche Wirbelstromverluste.

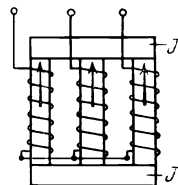


Fig. 117.

7. Berechnung des effektiven Erregerstromes.

Für praktische Zwecke ist die Kenntnis des effektiven Erregerstromes, z. B. eines Transformators oder Motors am wichtigsten, weil dieser gemessen wird. Ist aber schon die Form des Stromes unsicher zu bestimmen, so gilt dies ebenfalls von dem Effektivwert. Man erkennt aber aus den Oszillogrammen Fig. 116, daß bei einphasiger und dreiphasiger Erregung grundsätzlich verschieden verfahren werden muß.

Bei einphasiger Erregung verwendet man am zweckmäßigsten eine dynamische Magnetisierungskurve, die den Effektivwert der Induktion als Funktion der effektiven Amperewindungen für 1 cm enthält und die an einem Probering, etwa nach Fig. 109, mit Wechselstrom gemessen wird.

Bei Dreiphasenstrom mit Sternschaltung nähert sich dagegen der Magnetisierungsstrom viel mehr der Sinusform. Man geht dann besser von der Amplitude der Induktion aus und berechnet hierfür die Amperewindungen mittels einer mit Gleichstrom aufgenommenen Magnetisierungskurve. Den Effektivwert erhält man durch Division mit dem Scheitelfaktor der Sinuskurve, d. h. mit $\sqrt{2}$.

Aus dem großen Einfluß, den die Form der Spannungskurve bei hohen Sättigungen auf den Magnetisierungsstrom hat, erkennt man aber, daß selten eine gute Übereinstimmung zwischen berechnetem und gemessenem Strom zu erwarten ist, ein Umstand, der häufig den Stoßfugen in den Blechen zugeschrieben wird, deren Wirkung aber gegen die hier erörterten Einflüsse meist verschwindet.

56. Eisenverluste.

1. Berechnung der Hysteresisverluste.

Die Leistung, die durch Hysteresis verloren wird, ist für 1 ccm

$$w_h = c a_h,$$

worin a_h die Hysteresisarbeit pro Zyklus ist (s. Gl. 166).

Nach einem von Steinmetz aufgestellten empirischen Gesetz ist der Hysteresisverlust proportional der 1,6. Potenz der Amplitude der Induktion; für 1 ccm ist

$$w_h = \eta c B_m^{1,6} \text{ Erg/Sek}^{-1} \dots \dots \dots (168)$$

oder

$$w_h = \eta c B_m^{1,6} 10^{-7} \text{ Watt.}$$

Setzt man das Volumen in cdm ein, so wird für V cdm

$$W_h = \eta \left(\frac{c}{100}\right) \left(\frac{B}{1000}\right)^{1,6} V \cdot 10^{-2} \cdot 1000^{1,6} \text{ Watt.}$$

$$\eta \cdot 10^{-2} \cdot 1000^{1,6} = 631 \eta,$$

wird mit σ_h bezeichnet, dann ist

$$W_h = \sigma_h \left(\frac{c}{100}\right) \left(\frac{B}{1000}\right)^{1,6} V \text{ Watt} \dots \dots \dots (169)$$

Die Hysteresiskoeffizienten für Dynamoblech sind

$$\eta = 0,001 \text{ bis } 0,0015,$$

$$\sigma_h = 631 \cdot \eta = 0,631 \text{ bis } 0,947.$$

2. Wirbelstromverluste.

Bei kleinen Periodenzahlen ist die Rückwirkung der Wirbelströme klein, und folgende angenäherte Rechnungen geben ein Bild über die Verluste.

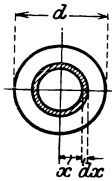


Fig. 118.

In einem runden Eisendraht (Fig. 118) sei die Richtung der Induktion senkrecht zum Querschnitt und überall gleich groß.

Die Wirbelstromfäden verlaufen kreisförmig um die Achse.

Ein Zylinder vom Radius x , der Höhe 1 cm und der Stärke dx hat einen Widerstand

$$R_x = \rho \frac{2 \pi x}{dx},$$

worin ρ der spez. Widerstand des Eisens ist.

Der Fluß in dem Zylinder ist

$$\Phi_x = B_m \pi x^2.$$

Die EMK ist

$$e_x = 4 f c \Phi_m 10^{-8} = 4 \pi c f x^2 B_m 10^{-8},$$

daher der Verlust

$$\begin{aligned} \frac{e_x^2}{R_x} &= \frac{16 \pi^2 c^2 f^2 x^4 B_m^2}{\rho \cdot 2 \pi x} dx 10^{-16} \\ &= \frac{8 \pi c^2 f^2 x^3 B_m^2}{\rho} dx 10^{-16}. \end{aligned}$$

Integriert man von $x=0$ bis $x=\frac{d}{2}$ und dividiert durch das Volumen $\frac{\pi d^2}{4}$, so erhält man den Verlust für 1 cem

$$w_w = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho} f^2 d^2 B_m^2 10^{-16} \text{ Watt} \dots \dots (170)$$

Der Verlust ist proportional dem Quadrate der Periodenzahl, der Induktion, der Drahtdicke und des Formfaktors, dagegen dem spez. Widerstand umgekehrt proportional.

Eine ähnliche Rechnung läßt sich für ein ebenes Blech (Fig. 119) anstellen. Die Wirbelstromfäden verlaufen bei gleichmäßiger Induktionsverteilung parallel zu den Längsseiten symmetrisch zur Mittellinie. Ist die Plattendicke Δ klein und die Ausdehnung der Platte groß, so kann der Widerstand des kurzen Stückes in Richtung der Blechdicke vernachlässigt werden. Eine rechteckige Schleife von 1 cm Länge, die von Stromfäden im Abstand x symmetrisch zur Mittellinie begrenzt wird, umschließt einen Fluß



Fig. 119.

$$\Phi_x = 2 x B_m.$$

Die EMK ist

$$e_x = 4 f c B_m 2 x 10^{-8},$$

der Widerstand für 1 cm Blechtiefe unter Vernachlässigung der kurzen Seiten $R_x = \frac{2 \rho}{dx}$, daher der Verlust

$$\frac{e_x^2}{R_x} = \frac{16}{\rho} f^2 c^2 B_m^2 2 x^2 dx 10^{-16} \text{ Watt.}$$

Integriert man von $x = 0$ bis $x = \frac{A}{2}$, und dividiert durch das Volumen Δ , so erhält man für 1 ccm

$$w_w = \frac{4}{3} \frac{c^2}{\varrho} f^2 B_m^2 \Delta^2 10^{-16} \text{ Watt.} \quad \dots \quad (171)$$

Diese Formel unterscheidet sich von der für den runden Draht nur durch den Faktor $\frac{4}{3}$ statt $\frac{1}{2}$, und dadurch, daß die Blechdicke Δ an Stelle der Drahtdicke d steht.

Setzt man d und Δ in mm, das Volumen V in cdm, so wird der Wirbelstromverlust für V cdm

$$W_w = \sigma_w \left(\Delta \frac{c}{100} \frac{B}{1000} f \right)^2 V \text{ Watt} \quad \dots \quad (172)$$

worin der Koeffizient

$$\sigma_w = \frac{1}{2\varrho} \text{ bzw. } \frac{4}{3} \frac{1}{\varrho} 10^{-5} \text{ ist.}$$

Für Schmiedeeisen ist $\varrho \cong 10^{-5}$ Ohm für 1 ccm, daher

$$\sigma_w = 0,5 \text{ für runden Draht,}$$

$$\sigma_w = 1,33 \text{ für Bleche.}$$

Die neuerdings verwendeten siliziumhaltigen (2 bis 4^{0/0}) sog. legierten Bleche haben einen spez. Widerstand von etwa

$$\varrho = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm für 1 ccm.}$$

Die Koeffizienten σ_w sind hierfür 5mal so klein. Auch sind die Hysteresisverluste bei legierten Blechen etwas kleiner als bei gewöhnlichen Blechen.

Die Permeabilität der legierten Bleche ist bei kleinen Induktionen etwas höher, bei großen niedriger als bei gewöhnlichen Blechen.

Nach neueren Versuchen¹⁾ scheint der Hysteresiskoeffizient umgekehrt proportional der maximalen Permeabilität zu sein.

Bei hohen Periodenzahlen bedingen die Wirbelströme eine Verdrängung der Induktionslinien an den Rand des Bleches, eine analoge Erscheinung zu der Stromverdrängung in massiven Leitern. Nach J. J. Thomson²⁾ ist für eine ebene Platte von der Dicke Δ cm, in der die Induktion senkrecht zur Blechdicke verläuft, im Abstand x von der Mittelebene, wenn B die Induktion am Blechrand ist,

¹⁾ Zickler, Elektrotechnik und Maschinenbau, 1913.

²⁾ The Electrician, Bd. 28, 1892, S. 599.

$$\frac{B_x}{B} = \sqrt{\frac{\cos 2 k x + \cos 2 k \Delta}{\cos k \Delta + \cos k \Delta}} \dots (173)$$

worin

$$k = \sqrt{\frac{2 \pi \omega \mu}{\rho 10^9}}$$

ist. Die Permeabilität μ ist hierin konstant gesetzt. Für $\rho = 10^{-5}$ und $\mu = 2000$ zeigt Fig. 120 die Verteilung der Induktion in einem Blech von 0,5 mm Dicke bei 100 und 1000 Perioden i. d. Sek. Im ersten Fall ist die Abweichung in der Mitte nur 2^o/₀ von der maximalen, im zweiten Fall ist die Induktion in der Mitte nur 43^o/₀ von der am Rande.

Auch bei kleinen Periodenzahlen sind die tatsächlichen Eisenverluste meist größer als die nach Formel 169 und 172 berechneten, erstens, weil die Induktion nicht gleichmäßig über den Querschnitt des ganzen Blechpaketes verteilt ist, zweitens, weil bei der Bearbeitung die Isolation zwischen den Blechen beschädigt wird und leitende Brücken hergestellt werden, endlich weil bei Stoßfugen, Übergängen, ein Teil des Flusses senkrecht zur Lamellierung aus den Blechen austritt, wodurch die Verluste wesentlich steigen. Auch die Streuflüsse, die in benachbarte massive Konstruktionsteile eintreten, verursachen Verluste, die man alle als zusätzliche Verluste bezeichnet.

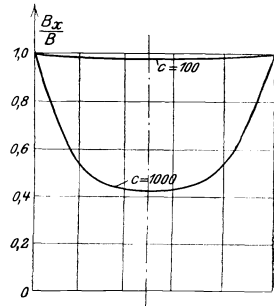


Fig. 120.

Verlustziffer.

Man ist übereingekommen, die Qualität des Eisens durch eine Verlustziffer anzugeben, die den gesamten Verlust für 1 kg Eisen bei 50 Perioden und 30^o C bei einer bestimmten Induktion angibt. Nach den Vorschriften des V. d. E. ist die Verlustziffer bei $B_m = 10000$ (V_{10}) und bei $B_m = 15000$ (V_{15}) anzugeben.

Das spez. Gewicht wird, wenn nicht besonders bestimmt, für gewöhnliche Bleche zu 7,7, für legierte zu 7,5 angenommen.

Mit den angegebenen Konstanten $\sigma_h = 0,8$, $\sigma_w = 1,3$ wird für Eisenblech von $\Delta = 0,5$ mm für $B_m = 10000$, $c = 50$

$$V_{10} = 0,8 \cdot 0,5 \cdot 10^{1,6} \frac{1}{7,7} + 1,3 \cdot (0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,11 \cdot 10)^2 \frac{1}{7,7} = 3,4 \text{ Watt/kg,}$$

für ein legiertes Blech mit $\sigma_h = 0,6$, $\sigma_w = 0,27$

$$V_{10} = 1,8 \text{ Watt/kg.}$$

Untersuchung und Trennung der Eisenverluste.

Von den verschiedenen Apparaten zur Untersuchung der Eisenverluste in Blechen, die von Epstein¹⁾, Möllinger²⁾, Richter³⁾ angegeben sind, ist der erste z. Z. am meisten verwendet.

Hierbei werden vier Blechpakete aus Streifen von 50 cm Länge, 3 cm Breite und 3 cm Pakethöhe zu einem quadratischen Rahmen zusammengesetzt und an den Ecken mit kräftigen Klammern zusammengestoßen, um eine möglichst geringe Wirkung der Stoßfugen zu erhalten. Jedes Paket ist mit einer Spule versehen, die an eine möglichst sinusförmige Spannung angeschlossen wird. Aus Spannung P und Periodenzahl c bestimmt man die Amplitude der Induktion

$$B_m = \frac{\sqrt{2} P 10^8}{2 \pi c w Q}.$$

Schaltet man vor die Spule einen Leistungsmesser, so ist von der gemessenen Leistung zunächst der Stromwärmeverlust $J^2 R$ in der Erregerwicklung abzuziehen, um die Eisenverluste zu erhalten. Da diese Korrektur aber groß ist, wird die Messung genauer, wenn die Pakete eine zweite Wicklung von gleicher Windungszahl wie die Erregerwicklung erhalten. In beiden Wicklungen wird dieselbe EMK E induziert; an die zweite Wicklung wird nur die Spannungsspule des Wattmeters (und event. das Voltmeter) angeschlossen, während die Stromspule im Erregerstromkreis liegt. Die nun gemessene Leistung ist gleich den Eisenverlusten vermehrt um den kleinen Verlust in der Spannungsspule des Wattmeters und im Voltmeter, die sich aus $\frac{E^2}{R}$ leicht berechnen und abziehen lassen.

Trägt man die Eisenverluste für konstante Periodenzahl als Funktion der maximalen Induktion auf, so erhält man die nicht ganz quadratisch ansteigende Kurve Fig. 121.

Die Trennung der Verluste in Hysteresis- und Wirbelstromverluste beruht auf deren Abhängigkeit von der Periodenzahl.

Ändert man Spannung und Periodenzahl in gleichem Maße, so bleibt die maximale Induktion konstant. Da die Hysteresisverluste der Periodenzahl c , die Wirbelstromverluste dem Quadrat von c proportional sind, ist der gesamte Verlust bei konstanter Induktion:

$$W = W_h + W_w = k_1 c + k_2 c^2.$$

¹⁾ ETZ 1900, S. 303, s. auch Gumlich u. Rogowski ETZ 1912.

²⁾ ETZ 1901, S. 379.

³⁾ ETZ 1902, S. 491.

Daher ist
$$\frac{W}{c} = \frac{W_h}{c} + \frac{W_w}{c} = k_1 + k_2 c.$$

$\frac{W}{c}$ stellt als Funktion der Periodenzahl eine gerade Linie (Fig. 122) dar; ihr Schnitt mit der Ordinatenachse ($c=0$) ergibt die Ordinate $k_1 = \frac{W_h}{c}$ den Hysteresisverlust pro Periode. Der Abstand der Geraden von einer Parallelen zur Abszissenachse durch den Schnittpunkt mit der Ordinatenachse

ist $\frac{W_w}{c}$.

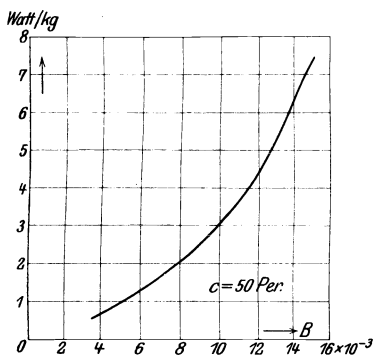


Fig. 121.

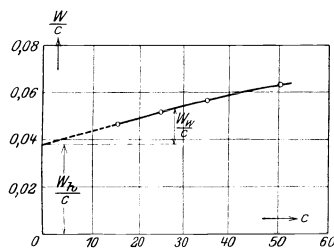


Fig. 122.

Die Gerade biegt bei höheren Periodenzahlen ab, was auf die Schirmwirkung der Wirbelströme zurückgeführt wird.

57. Die Vektordiagramme des Transformators.

Die technischen Transformatoren besitzen einen geschlossenen magnetischen Kreis aus Eisen, auf den die primäre und sekundäre Spule aufgewickelt sind. Fig. 123 und 124 zeigen die wichtigsten

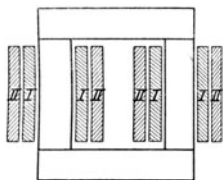


Fig. 123. Kerntransformator.

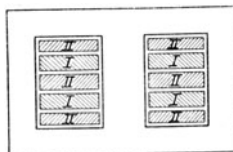


Fig. 124. Manteltransformator.

Typen der Einphasentransformatoren, die Kerntype und die Manteltype.

Im Gegensatz zum Lufttransformator geht man hier nicht von den Koeffizienten L und M aus, die hier nicht konstant sind, sondern von dem Induktionsfluß. Der größte Teil des Flusses verläuft ganz im Eisen und ist daher mit den primären und sekun-

dären Windungen in gleichem Maße verkettet. Dieser Teil ist der Hauptfluß Φ . Er induziert in den Wicklungen die EMKe

$$\begin{aligned} -e_1 &= -w_1 \frac{d\Phi^1}{dt} \\ -e_2 &= -w_2 \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned}$$

Ist die Sekundärwicklung offen, die primäre an das Netz angeschlossen, so nimmt diese den Magnetisierungsstrom i_a zur Erregung des Hauptflusses auf. Da er nur einen sehr kleinen Spannungsabfall hat, ist $-e_1$ sehr nahe gleich der primären Klemmenspannung, aber ihr entgegengerichtet.

Die EMKe verhalten sich wie die Windungszahlen,

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{w_1}{w_2} \dots \dots \dots (174)$$

Das Verhältnis der Spannungen bei offener Sekundärwicklung ist sehr nahe gleich dem Übersetzungsverhältnis.

Ist die sekundäre Wicklung über einen Belastungswiderstand geschlossen, so muß, damit der Fluß bestehen bleibt, die Summe der primären und sekundären MMKe gleich den zur Erregung des Flusses erforderlichen Amperewindungen sein. Es ist

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 = i_a w_1$$

und

$$i_1 = i_a - i_2 \frac{w_2}{w_1}.$$

Der primäre Strom i_1 setzt sich also zusammen aus dem Magnetisierungsstrom i_a und einem Strom, der entgegengesetzt gleich dem (auf die primäre Windungszahl reduzierten) Sekundärstrom i_2 ist; er möge als primärer Belastungsstrom i_2' bezeichnet werden.

$$i_2' = -i_2 \frac{w_2}{w_1} \dots \dots \dots (175)$$

Durch Multiplikation von Gl. 174 und Gl. 175 wird

$$e_1 i_2' = -e_2 i_2,$$

der sekundär abgegebenen Leistung $-i_2 e_2$ entspricht eine primär aufgenommene Leistung $e_1 i_2'$.

¹⁾ Wir bezeichnen im Folgenden die induzierte EMK mit dem negativen Vorzeichen, sodaß die ihr entsprechende Komponente der primären Klemmenspannung das positive Vorzeichen erhält.

Die Gleichungen gelten für die Momentanwerte also unabhängig von der Kurvenform.

Außer dem Hauptfluß erzeugen primäre und sekundäre Amperewindungen Streuflüsse, die nur zum Teil oder gar nicht im Eisen verlaufen und sich um die Spulen durch die Luft schließen. Sie sind teils nur mit primären oder sekundären Windungen verkettet, teils mit beiden. Auf die Streuflüsse der letzten Art wirkt die Summe der mit ihnen verketteten primären und sekundären Amperewindungen, die einander entgegengerichtet sind. Je nachdem also primäre oder sekundäre Amperewindungen überwiegen, sind diese — als doppelt verkettete Streuflüsse — benannten Teile zu dem primären oder dem sekundären Streufluß zu rechnen.

Da die Streuflüsse längere Luftstrecken durchlaufen, sind sie den Strömen proportional, und die von ihnen induzierten EMKE können durch Streuinduktivitäten S_1 und S_2 ausgedrückt werden. Es gelten daher die folgenden Gleichungen für den Transformator:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= i_1 R_1 + w_1 \frac{d\Phi}{dt} + S_1 \frac{di_1}{dt} \\ 0 &= p_2 + i_2 R_2 + w_2 \frac{d\Phi}{dt} + S_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} \dots (176)$$

Für einwillige Größen können diese Gleichungen durch ein Vektordiagramm der Effektivwerte dargestellt werden.

Man ersetzt hierbei den verzerrten Magnetisierungsstrom durch seinen äquivalenten Sinusstrom.

In Fig. 125 ist Φ der Vektor des Hauptflusses, E_1 um 90° dagegen voreilend ist die Komponente der primären Klemmenspannung, die der EMK — E_1 entgegengesetzt gleich ist. Die sekundäre EMK — E_2 ist gegen Φ um 90° verzögert, bei Reduktion auf die primäre Windungszahl ist sie numerisch gleich E_1 .

Der äquivalente Magnetisierungsstrom J_a eilt gegen Φ um $\left(\frac{\pi}{2} - \psi_a\right)$ vor, gegen E_1 um ψ_a nach. Seine Komponente $J_a \cos \psi_a$ entspricht einer Leistung, es ist $E_1 J_a \cos \psi_a$ der Eisenverlust. Der auf die primäre Windungszahl reduzierte Sekundärstrom ist J_2 , und der primäre Strom J_1 ist die Summe aus J_a und $(-J_2) = J_2'$.

Subtrahiert man von $-E_2$ die Ohmschen und induktiven

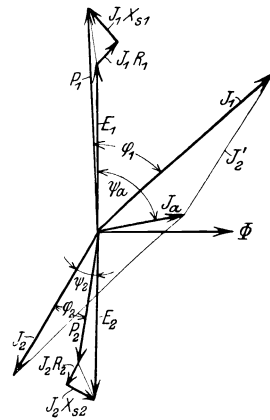


Fig. 125.

Der auf die primäre Windungszahl reduzierte Sekundärstrom ist J_2 , und der primäre Strom J_1 ist die Summe aus J_a und $(-J_2) = J_2'$.

Spannungsabfälle $J_2 R_2$ und $J_2 \omega S_2 = J_2 X_{s2}$, so erhält man die sekundäre Klemmenspannung P_2 ; addiert man zu E_1 $J_1 R_1$ und $J_1 \omega S_1 = J_1 X_{s1}$, so ergibt sich die primäre Klemmenspannung P_1 . X_{s1} und X_{s2} sind die Streureaktanzen.

Da

$$\angle(E_1 J_2') = \angle(-E_2 J_2) = \psi_2$$

und

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2}, \quad \frac{J_2'}{J_2} = \frac{w_2}{w_1},$$

wird

$$E_1 J_2' \cos \psi_2 = -E_2 J_2 \cos \psi_2.$$

Dies ist die vom primären auf den sekundären Stromkreis übertragene Leistung.

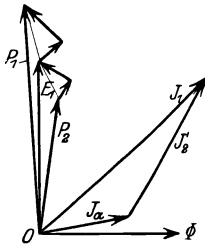


Fig. 126.

Dreht man das sekundäre Spannungsdreieck um Punkt 0 um 180° , so daß E_1 und $-E_2$ zusammenfallen, so erhält man Fig. 126, die ein anschauliches Bild von der Verschiebung und Abnahme des Spannungsvektors von P_1 bis P_2 gibt. Sie ist bedingt durch den Ohmschen Spannungsabfall und die Streuung der beiden Wicklungen.

Dieses Diagramm und die Gl. 176 gelten für eine große Anzahl von Wechselstromkreisen, z. B. auch für die Induktionsmotoren, bei denen an Stelle der elektrischen Belastung des Transformators eine mechanische Belastung tritt.

Sie gelten auch für das Schema Fig. 127, wenn wir an den sekundären Klemmen mit der Spannung P_2 den primären Belastungsstrom fließend denken. Der Zweig mit der Impedanz z_a entspricht den vom Hauptfluß in Primär und Sekundärwicklung induzierten (bei Reduktion auf gleiche Windungszahl) gleichgroßen EMKen, er führt den Magnetisierungsstrom J_a , der bei der analytischen Berechnung proportional der Spannung E_1 , also durch eine konstante Impedanz z_a auszudrücken ist.

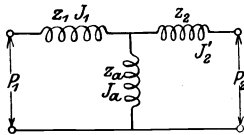


Fig. 127.

und

$$z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega S_1)^2}$$

$$z_2 = \sqrt{R_2^2 + (\omega S_2)^2}$$

sind die primäre und sekundäre Impedanz.

Fig. 127 ist der Ersatzstromkreis des Transformators. Er wird im Zusammenhang mit dem allgemeinen Wechselstromkreis in Kap. XII eingehend behandelt.

58. Das magnetische Feld einer Maschine mit verteiltem Eisen.

Die Maschine besteht, s. Fig. 128, aus einem zylindrischen, um eine Welle drehbaren, Läufer L und einem Ständer S , die aus Blechen zusammengesetzt sind. Ständer und Läufer sind durch einen Luftraum von konstanter Länge getrennt. Auf dem Ständer ist eine Wicklung in Nuten eingebettet. Wird sie von einem konstanten Strom durchflossen, dessen Richtung durch Punkte und Kreuze angedeutet ist, so entsteht ein Induktionsfluß in der durch Pfeile bezeichneten Richtung, er durchsetzt das Ständer- und Läuferisen und den Luftraum. Wo er aus dem Ständereisen austritt, bildet sich ein Nordpol, wo er eintritt, ein Südpol aus. Weil die Wicklung zwei Pole erzeugt, heißt sie eine zweipolige Wicklung, und zwar ist sie eine zweipolige Trommelwicklung.

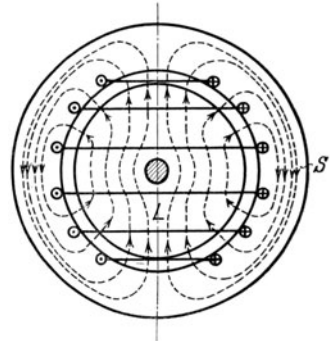


Fig. 128.

Man bezeichnet den Teil des Umfangs, der einen Pol umfaßt, als eine Polteilung, hier ist es der halbe Umfang.

Durch entsprechende Anordnung der Wicklung lassen sich 4, 6, 8 . . . allgemein $2p$ Pole erzeugen, worin p die Polpaarzahl ist; die Wicklung heißt dann mehrpolig und die Polteilung ist der $2p$ te Teil des Umfangs.

Die Verteilung des Induktionsflusses ergibt sich wie folgt. In Fig. 129 ist der Umfang abgewickelt. Die Drähte einer Spule liegen gleichmäßig verteilt symmetrisch zur Mittellinie der Polteilung τ auf einem Bogen S . Die Mittellinie ist die neutrale Zone des Feldes. In Punkten gleichen Abstandes x zu beiden Seiten von ihr ist die Feldstärke gleichgroß, aber von entgegengesetzter Richtung. Für eine Induktionslinie, die den Luftraum im Abstand x zu beiden Seiten der neutralen Zone durchsetzt, ist das Linienintegral der Feldstärke, wenn der magnetische Widerstand des Eisens klein gegen den des Luftraums ist,

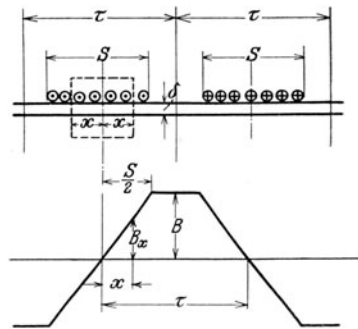


Fig. 129.

$$\int \mathfrak{H} dl = \mathfrak{B}_x 2 \delta.$$

\mathfrak{B}_x ist die Induktion im Luftraum im Abstand x , δ der Luftraum. Die mit diesem Induktionsrohr verketteten Windungen w_x verhalten sich zu den gesamten Windungen w der Spule wie $2x$ zu S .

Es ist daher

$$B_x 2\delta = 0,4\pi J w_x = \frac{0,4\pi J w 2x}{S}$$

$$B_x = 0,4\pi \frac{J w x}{\delta S}.$$

Dies gilt von $x=0$ bis $x = \frac{S}{2}$.

Ist $2x > S$, so ist $w_x = w$ und

$$B_x = 0,4\pi \frac{J w}{2\delta}.$$

Trägt man B_x als Ordinate auf, so erhält man die Induktionsverteilung als ein Trapez, dessen Höhe

$$B = 0,4\pi \frac{J w}{2\delta} \dots \dots \dots (177)$$

ist.

Der Inhalt dieser Feldkurve ist der Induktionsfluß für 1 cm Länge des Eisens. Ist die Länge l cm, so ist

$$\Phi = \int_0^l B_x l dx.$$

Da die Grundlinien des Trapezes τ und $\tau - S$ sind, die Höhe B ist, wird

$$\Phi = Bl\tau \left(1 - \frac{S}{2\tau}\right) = Bl\tau\alpha \dots \dots \dots (178)$$

$\alpha = 1 - \frac{S}{2\tau}$ heißt der Füllfaktor. Für konstante Induktionsverteilung, d. h. für ein Rechteck wäre $\alpha = 1$.

Das Trapez nähert sich einer Sinuskurve am meisten, wenn (s. Kap. VII Seite 78) $\frac{S}{2} = \frac{\tau}{3}$, oder $S = \frac{2}{3}\tau$ ist. Die Grundwelle des Trapezes hat hierfür nach S. 79 die Gleichung

$$B_{x1} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} B \sin \frac{x}{\tau} \pi.$$

Die Amplitude ist also

$$B_1 = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} B,$$

der Fluß der Grundwelle

$$\Phi_1 = \frac{2}{\pi} B_1 \tau l = \frac{12}{\pi^3} \sqrt{3} B \tau l,$$

der des Trapezes

$$\Phi = \frac{2}{3} B \tau l.$$

Es verhält sich also $\Phi_1 : \Phi = \frac{18}{\pi^3} \sqrt{3} = 1,005$, sie unterscheiden sich also nur um $0,5\%$, so daß man häufig mit der sinusförmigen Grundwelle rechnet.

Wird das Feld durch einen Wechselstrom erregt, so pulsiert die Induktion an jeder Stelle mit dem Strom.

Bezeichnet B die räumliche Amplitude einer sinusförmig verteilten Feldkurve, B_m ihre zeitliche Amplitude, so ist die zeitliche Amplitude im Abstand x von der neutralen Zone

$$B_{xm} = B_m \sin \frac{x}{\tau} \pi$$

und der Augenblickswert an der Stelle x für zeitlich sinusförmige Pulsation

$$B_x = B_{xm} \sin \omega t = B_m \sin \frac{x}{\tau} \pi \sin \omega t \quad . . \quad (179)$$

59. Erzeugung eines Drehfeldes.

Sind am Umfang der Maschine zwei um eine halbe Polteilung gegeneinander versetzte Spulen angebracht, so erzeugen sie zwei um ebensoviel gegeneinander verschobene Felder. Bei der zweipoligen Anordnung steht die Verbindungslinie der Mitten des Nord- und Südpoles, der „Polachse“ eines Feldes, senkrecht auf der des anderen; bei der mehrpoligen Maschine sind sie um $\frac{90}{p}$ Grade verschoben. Man spricht auch hier von einer Verschiebung um 90° , und bezeichnet diese als „elektrische Grade“, von denen die Polteilung 180° umfaßt.

Sind die um 90° räumlich verschobenen Felder sinusförmig verteilt und mit I und II bezeichnet, so ist die räumliche Verteilung des ersten

$$B_{Ix} = B_I \sin \frac{x}{\tau} \pi,$$

des zweiten

$$B_{IIx} = B_{II} \sin \left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{\pi}{2} \right) = -B_{II} \cos \frac{x}{\tau} \pi.$$

Die positive räumliche Amplitude B_I liegt also bei $x = \frac{\pi}{2}$, B_{II} bei $x = \pi$.

Sind die Felder von Zweiphasenstrom erregt, und nehmen wir an, daß das zweite Feld $\frac{1}{4}$ Periode später seine Amplitude erreicht, als das erste, so wird, wenn die zeitlichen Amplituden wieder mit dem Index m bezeichnet werden,

$$B_{Ix} = B_{Im} \sin \frac{x}{\tau} \pi \sin \omega t$$

$$B_{IIx} = -B_{II m} \cos \frac{x}{\tau} \pi \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = B_{II m} \cos \frac{x}{\tau} \pi \cos \omega t.$$

Sind die Amplituden gleichgroß,

$$B_{Im} = B_{II m},$$

so ist an einer Stelle x die von beiden Feldern resultierende Induktion

$$B_x = B_{Ix} + B_{IIx} = B_m \left(\sin \frac{x}{\tau} \pi \sin \omega t + \cos \frac{x}{\tau} \pi \cos \omega t \right)$$

$$= B_m \cos \left(\omega t - \frac{x}{\tau} \pi \right). \quad (180)$$

Diese Gleichung stellt eine fortschreitende Welle dar. Nach einer Zeit dt ist die Induktion an einer Stelle $(x + dx)$

$$B_m \cos \left[\omega (t + dt) - (x + dx) \frac{\pi}{\tau} \right].$$

Sie hat wieder denselben Wert wie zur Zeit t an der Stelle x , wenn

$$\omega dt = dx \frac{\pi}{\tau}$$

ist. Hieraus ergibt sich, daß die ganze Welle mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega \tau}{\pi} = \frac{2\tau}{T}$$

wandert, d. h. die Welle legt in einer Periode T die doppelte Polteilung zurück. Zwei zeitlich und räumlich um 90° gegeneinander verschobene Wechselfelder von sinusförmiger Verteilung setzen sich zu einem mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitenden sinusförmigen Feld von gleicher Größe zusammen. Ein solches Feld heißt ein Drehfeld.

Wir fanden die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ positiv, d. h. das Drehfeld wandert in Richtung der positiven x . Dies ist die Richtung, in die

wir von der positiven räumlichen Amplitude B_I zu der des zeitlich nacheilenden Feldes B_{II} gelangten. Hätte man B_{II} als das voreilende Feld bezeichnet, so hätte man das negative Vorzeichen gefunden.

Das Drehfeld wandert also von dem zeitlich voreilenden zu dem zeitlich nacheilenden Feld. Durch Vertauschung der zeitlichen Reihenfolge der Wechselfelder ändert sich die Drehrichtung.

Stellt man die Felder als Vektoren in einem Zeitdiagramm dar, und soll die positive Richtung der Vektoren auch gleichzeitig die positive räumliche Richtung der Felder darstellen, so ist die Drehrichtung des Drehfeldes, das vom zeitlich voreilenden zum zeitlich nacheilenden Feld wandert, entgegengesetzt der Drehrichtung der Vektoren, also gleich der der Zeitlinie (s. Fig. 130).

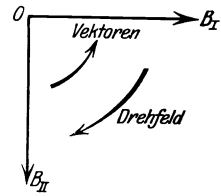


Fig. 130.

Ganz analog setzen sich n um $\frac{2\pi}{n}$ zeitlich und räumlich verschobene Wechselfelder von gleicher Größe zu einem Drehfeld zusammen. Die Summe lautet

$$\begin{aligned}
 B_x &= B_{Ix} + B_{IIx} + \dots + B_{(n-1)x} + B_{nx} \\
 &= B_m \left[\sin \frac{x}{\tau} \pi \sin \omega t + \sin \left(\frac{x}{\tau} \pi - \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right) \right. \\
 &\quad + \sin \left(\frac{x}{\tau} \pi - 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(\omega t - 2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 &\quad \left. + \sin \left(\frac{x}{\tau} \pi - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(\omega t - (n-1) \frac{2\pi}{n} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren bringt man jedes Glied auf die Form

$$\frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{x}{\tau} \pi - \omega t \right) - \cos \left(\frac{x}{\tau} \pi + \omega t - 2z \cdot \frac{2\pi}{n} \right) \right],$$

wobei in der zweiten Kosinus-Funktion z der Reihe nach alle ganzen Zahlen von 0 bis $(n-1)$ durchläuft. Die Summe dieser n Glieder ist Null; da die ersten Glieder alle gleichgroß sind, wird

$$B_x = \frac{n}{2} B_m \cos \left(\frac{x}{\tau} \pi - \omega t \right) \dots \dots \dots (181)$$

Das durch Zusammensetzung von n Wechselfeldern entstehende Drehfeld ist $\frac{n}{2}$ mal so groß wie jedes Wechselfeld.

60. Energieübertragung durch das Drehfeld.

Um durch ein Drehfeld Energie zu übertragen, wird eine Maschine nach Fig. 121 am Ständer und am Läufer mit je einer Mehrphasenwicklung versehen. Eine solche Maschine ist eine Drehfeldmaschine.

Nehmen wir an, die Ständerwicklungen seien an ein Mehrphasennetz mit n_1 Phasen angeschlossen, der Läufer stehe still und die Läuferwicklung sei noch offen. Die Netzspannung bedingt in jeder Phase der Ständerwicklung einen Wechselfluß, und die n_1 räumlich und zeitlich um $\frac{2\pi}{n_1}$ gegeneinander verschobenen Flüsse setzen sich zu einem Drehfeld zusammen, das in einer Periode T um zwei Polteilungen, d. h. um den p ten Teil des Umfangs fortschreitet, also

$$u_1 = \frac{1}{Tp} = \frac{c_1}{p} \quad \dots \quad (182)$$

Umläufe in der Sekunde macht, worin c_1 die Periodenzahl der Ständerspannung ist. Das Drehfeld induziert in den n_1 Ständerwicklungen n_1 um $\frac{2\pi}{n_1}$ gegeneinander phasenverschobene EMKe, die bis auf den Spannungsabfall des Magnetisierungsstromes in jeder Wicklung der Phasenspannung entgegengesetzt gleich sind. Im stillstehenden Läufer werden EMKe von gleicher Periodenzahl induziert. Hat der Läufer ebenfalls n_1 Phasen, so bilden die EMKe auch ein n_1 Phasensystem. Die EMKe im Ständer und Läufer verhalten sich wie die Windungszahlen, sie haben aber im allgemeinen verschiedene zeitliche Phasen, je nach der räumlichen Stellung entsprechender Wicklungen des Ständers und Läufers zueinander.

Schließt man die Läuferwicklungen über Belastungswiderstände, die für alle Phasen gleichgroß sind, so entsteht im Läufer ein symmetrisches n_1 -Phasenstromsystem, und die n_1 Ströme erzeugen ein Drehfeld. Damit das der aufgedrückten Ständerspannung entsprechende Feld bestehen bleibt, nimmt der Ständer einen Strom auf, dessen Amperewindungen aller Phasen mit denen des Läufers zusammen die Amperewindungen des Magnetisierungsstromes ergeben, wie beim gewöhnlichen Transformator, von dem sich die Maschine nur dadurch unterscheidet, daß sie ein Drehfeld besitzt, wodurch primäre und sekundäre EMKe verschiedene zeitliche Phasen haben können. Dies ändert aber an der Wirkungsweise nichts. Denken wir uns den Ständerstrom (Primärstrom) wieder zerlegt in den Magnetisierungsstrom i_a und den primären Belastungsstrom i_2' ,

der dieselbe MMK besitzt wie der Läufer, so muß, da die n_1 Leistungen

$$E_2 J_2 \cos \psi_2$$

vom Ständer auf den Läufer übertragen werden,

$$n_1 E_2 J_2 \cos \psi_2 = n_1 E_1 J_2' \cos \psi_1$$

sein. Nun sind die EMKe den Windungszahlen direkt, die Ströme ihnen umgekehrt proportional, d. h. es wird

$$n_1 E_2 J_2 = n_1 E_1 J_2'$$

und

$$\cos \psi_1 = \cos \psi_2,$$

der primäre Belastungsstrom hat gegen seine EMK dieselbe Phasenverschiebung, wie der sekundäre gegen die seine. Wie also auch E_2 gegen E_1 phasenverschoben sein mag, die Rückwirkung des sekundären Stromes auf den primären Stromkreis ist stets so, als ob sie gleichphasig wären, so daß man für jede Phase dasselbe Vektordiagramm wie für den gewöhnlichen Transformator erhält, das durch Streuung und Ohmschen Widerstand der Wicklungen wie dort ergänzt wird.

Hat der Läufer eine andere Phasenzahl als der Ständer, so ist es möglich, ihm einen symmetrischen n_2 -Phasenstrom zu entnehmen. Da alle Phasen sich gleichmäßig an der Erzeugung des Feldes beteiligen, ist die Rückwirkung auf die primäre Wicklung wieder dieselbe. Die Drehfeldmaschine kann also als Phasenzahlumformer verwendet werden.

Wichtiger ist ihre Anwendung als Periodenumformer.

Dreht sich der Läufer mit u Umläufen i. d. Sek., so ist die Frequenz seiner EMK nicht mehr gleich der primären, $c_1 = p u_1$, worin u_1 die Umlaufzahl des Drehfeldes ist, sondern weil das Drehfeld relativ zum Läufer nur $(u_1 - u)$ Umläufe macht, ist die Periodenzahl

$$c_2 = p(u_1 - u) \quad \dots \quad (183)$$

Hierin erhält u das positive Vorzeichen für gleichsinnige Drehung wie u_1 , das negative für gegenläufige.

Die effektiven EMKe im Ständer und Läufer verhalten sich wie die Produkte aus Windungszahl und Periodenzahl

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{c_2 w_2}{c_1 w_1} = \frac{u_1 - u}{u_1} \frac{w_2}{w_1} \quad \dots \quad (184)$$

Die Läuferströme, die beim Schließen über irgendwelche Widerstände entstehen, haben nun auch die Periodenzahl c_2 . Das Dreh-

feld, das sie erzeugen, schreitet gegenüber der erzeugenden Läuferwicklung mit

$$\frac{c_2}{p} = u_1 - u \text{ Uml. i. d. Sek.}$$

fort, und da der Läufer sich mit u Umläufen dreht, ist die Umlaufzahl des Drehfeldes im Raum wieder

$$u_1 - u + u = u_1.$$

Die Läuferströme wirken also auf den Ständer wie die einer ruhenden Wicklung zurück. Stator- und Läuferamperebindungen aller Phasen ergeben zusammen die Amperebindungen des Magnetisierungsstromes. Zerlegt man J_1 wieder in den Magnetisierungsstrom J_a und den primären Belastungsstrom J_2' , so ist

$$n_1 J_2' w_1 = n_2 J_2 w_2 \quad \dots \quad (185)$$

J_2' hat gegen E_1 dieselbe Phasenverschiebung ψ_2 wie E_2 gegen J_2 , unabhängig von der relativen Phase von E_2 gegen E_1 , wie gezeigt.

Daher wird aus Gl. 184 und 185

$$\frac{n_2 E_2 J_2 \cos \psi_2}{n_1 E_1 J_2' \cos \psi_2} = \frac{c_2}{c_1} = 1 - \frac{u}{u_1} \quad \dots \quad (186)$$

$n_1 E_1 J_2' \cos \psi_2 = W_a$ ist die vom Ständer (Primärwicklung) auf den Läufer übertragene Leistung. Die vom Läufer (Sekundärwicklung) erzeugte elektrische Leistung $n_2 E_2 J_2 \cos \psi_2 = W_e$ verhält sich zu W_a wie die sekundäre Frequenz zum primären, oder wie die Relativgeschwindigkeit zwischen Drehfeld und Läufer ($u_1 - u$) zur Geschwindigkeit des Drehfeldes u_1 .

Es ist

$$W_e = W_a \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \quad \dots \quad (187)$$

Die Differenz $W_a - W_e$ erscheint in einer anderen Energieform, und zwar als mechanische Leistung W_m , weil das Drehfeld auf die Läuferströme ein Drehmoment ausübt.

Es ist

$$W_m = W_a - W_e = W_a \frac{u}{u_1} \quad \dots \quad (188)$$

Sie verhält sich zu der vom Ständer auf den Läufer übertragenen Leistung, wie die Geschwindigkeit des Läufers zu der des Drehfeldes.

Die mechanische Leistung ist gleich dem Produkt aus Drehmoment D und Winkelgeschwindigkeit des Läufers $2\pi u$,

daher

$$D = \frac{W_m}{2\pi u} = \frac{W_a}{2\pi u_1},$$

das Drehmoment ist also, da die Geschwindigkeit u_1 des Drehfeldes bei gegebener Periodenzahl konstant ist, proportional der vom Ständer auf den Läufer übertragenen Leistung. (Ist W_a in Watt angegeben, so erhält man das Drehmoment in mkg durch Division durch 9,81.)

Während also die mechanische Leistung gleich Drehmoment mal Geschwindigkeit des Läufers ist, ist die elektrisch abgegebene Leistung gleich dem Produkt aus Drehmoment und Relativgeschwindigkeit des Läufers zum Drehfeld.

Das Verhältnis der Relativgeschwindigkeit $u_1 - u$ zur Drehfeldgeschwindigkeit u_1 heißt die Schlüpfung

$$s = \frac{u_1 - u}{u_1} = 1 - \frac{u}{u_1} \dots \dots \dots (189)$$

Es ist daher die sekundäre Frequenz

$$c_2 = s c_1,$$

die elektrische Leistung

$$W_e = W_a s,$$

die mechanische Leistung

$$W_m = W_a (1 - s).$$

Es ergeben sich folgende Fälle:

Solange u positiv und kleiner als u_1 ist, ist s positiv und kleiner als eins. Die elektrische Leistung W_e ist kleiner als die auf den Läufer übertragene, und die mechanische Leistung ist positiv, das Drehmoment ist motorisch. $s = 1$, d. h. $u = 0$, ergibt den Fall des ruhenden Läufers, bei dem nur elektrische Leistung transformiert wird.

Dreht sich der Läufer ebenso schnell wie das Drehfeld und gleichsinnig, so ist $u = u_1$, $s = 0$, der Läufer dreht sich synchron mit dem Drehfeld, dann wird überhaupt keine EMK in ihm induziert und keine Leistung übertragen.

Ist $u > u_1$, d. h. ist die Geschwindigkeit des Läufers größer als die des Drehfeldes, so ist s negativ; das Drehmoment kehrt infolge der Umkehrung der Relativbewegung ($u_1 - u$) seine Richtung um, die mechanische Leistung ist generatorisch und wird dem Läufer durch irgendeine Triebmaschine zugeführt, sie ist größer als W_a , es kehrt sich also der Sinn der Energieübertragung um, die Maschine ist ein Generator.

Eine Drehfeldmaschine kann also zur Umsetzung der Spannung, der Phasenzahl, der Periodenzahl und zur Umsetzung von elektrischer in mechanische Leistung und umgekehrt verwendet werden. Steinmetz bezeichnet sie daher als allgemeinen Transformator.

Ihre häufigste Anwendung ist die des Induktionsmotors, bei

dem die Läuferwicklung in sich kurz geschlossen ist. Die in jeder Phase der Läuferwicklung erzeugte elektrische Leistung ist hier

$$J_2^2 R_2,$$

wenn R_2 der Widerstand der Wicklung ist; sie ist gleich dem Stromwärmeverlust in der Wicklung. Da sie s mal so groß wie die auf den Läufer übertragene Leistung ist, ist diese für eine Phase

$$W_a = \frac{J_2^2 R_2}{s},$$

und die mechanische Leistung ist

$$W_m = J_2^2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right).$$

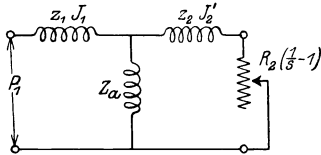


Fig. 131.

Da das Übersetzungsverhältnis der EMKe gleich dem Verhältnis der Produkte aus Windungszahl und Periodenzahl ist, fällt die sekundäre Periodenzahl bei der Reduktion auf die Primärwicklung in der Reaktanz heraus. Der Induktionsmotor verhält sich wie ein ruhender Transformator, bei dem die mechanische Belastung ersetzt ist durch einen Ohmschen Widerstand $R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$. Es gilt für ihn daher der Ersatzstromkreis Fig. 131.

Elftes Kapitel.

Leitungen mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität.

61. Die Konstanten einer Leitung mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität. — 62. Strom und Spannungsgleichungen. — 63. Verlustfreie Leitung. — 64. Leitung mit Verlusten. — 65. Ermittlung der Konstanten einer Leitung durch den Leerlauf und den Kurzschlußversuch. — 66. Über die Berechnung der Leitungskonstanten bei Mehrfachleitungen.

61. Die Konstanten einer Leitung mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität.

Wir haben bei der Besprechung von Stromkreisen mit Kapazität bisher nur solche behandelt, bei denen ein Kondensator eingeschaltet ist.

Kapazitätswirkungen, d. h. Ladeströme, treten aber auch bei solchen Leitergebilden auf, bei denen eine Anzahl Leiter, die eine Spannung gegeneinander besitzen, auf eine große Länge hin räumlich einander nahe liegen, also bei Kabeln, langen Fernleitungen, Wicklungen von Maschinen und Transformatoren. Der Verschiebungsstrom verläuft hier zwischen den Leitern und zwischen Leiter und Erde, er ist um so größer, je länger die Leitungen, d. h. je größer die Kapazität und je höher die Spannungen sind; die Kapazität spielt daher bei hohen Spannungen eine besondere Rolle.

In dem Leiter setzt sich der Verschiebungsstrom als Ladestrom fort. Er führt dem elektrischen Felde, das sich zwischen den Leitern und zwischen Leiter und Erde bildet, Energie zu bzw. von ihm zurück; er besteht somit unabhängig davon, ob sonst noch Ströme durch den Leiter fortgeleitet werden. In ein Kabel fließt ein Ladestrom, auch wenn an das Ende des Kabels keine Stromverbraucher angeschlossen sind, das Ende also unterbrochen ist. Sind Stromverbraucher an das Kabel angeschlossen, so wird dem Kabel neben dem Verbrauchsstrom noch der Ladestrom zugeführt.

Es tritt also hier die Erscheinung auf, daß der Strom am Anfang des Kabels einen anderen Wert hat als am Ende. Der durch die Leitung fließende Strom erzeugt ein magnetisches Feld, dem beständig mit dem Wechsel der Stromrichtung Energie zugeführt oder von ihm zurückgegeben wird. Die von dem wechselnden magnetischen Feld bedingten EMKe verursachen eine Änderung der Spannung längs der Leitung, und hierdurch wird wieder bedingt, daß der Ladestrom in den verschiedenen Teilen der Leitung verschiedene Werte besitzt.

Während also das elektrische Feld eine Änderung des Stromes längs der Leitung verursacht, bedingt das magnetische Feld eine Änderung der Spannung, beide müssen sich zufolge der Wechselbeziehung stetig ändern.

Die Ausbildung der elektrischen und magnetischen Wechselfelder bedingt bestimmte Verluste.

Der Strom erzeugt Verluste durch Stromwärme im Leiter, und das vom Strom erregte magnetische Feld bedingt Verluste teils im Leiter — Skineffekt —, teils durch Ummagnetisierung magnetischer Medien. Das elektrische Feld verursacht Verluste im Dielektrikum, die von der Höhe der Spannung abhängen und als dielektrische Hysteresis bezeichnet werden. Von der Spannung bedingt wird auch der Verlust durch unvollkommene Isolation. Ferner entstehen bei Freileitungen für hohe Spannungen Verluste durch Entladungen durch die Luft, die sich z. T. sichtbar als Glimmerscheinungen, die sog. Korona, äußern. Man bezeichnet alle diese Verluste als Ableitungsverluste.

Für eine Leitung sind nun die folgenden charakteristischen Größen zu berücksichtigen.

Die Energie des elektrischen Feldes ist

$$U_e = \frac{1}{2} p^2 C,$$

worin C die Kapazität der Leitung ist.

Den Energieverlust in der Zeiteinheit durch Ableitung setzt man

$$U_{ev} = p^2 A$$

und bezeichnet A als Ableitung.

Die Energie des magnetischen Feldes ist

$$U_m = \frac{1}{2} i^2 L,$$

worin L die Induktivität ist.

Der Strom bedingt einen Energieverlust in der Zeiteinheit durch Stromwärme

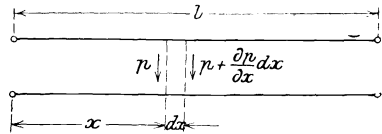
$$U_{mv} = i^2 R.$$

R ist der (effektive) Widerstand der Leitung.

Man hat nun zur rechnerischen Verfolgung die Konstanten C , A , L , R als gleichmäßig über die Leitung verteilt zu denken, derart, daß jedes Leitungselement den gleichen Anteil an den Konstanten besitzt, und bezieht diese Konstanten auf das Kilometer als Längeneinheit. Es ist also C die Kapazität pro km, L die Induktivität pro km usf.

62. Strom- und Spannungsgleichungen.

Wir betrachten zunächst eine Schleife, die aus Hin- und Rückleitung besteht (Fig. 132). l sei die einfache Leitungslänge. In einem Element der Schleife von der Länge dx im Abstand x vom Leitungsanfang fließe der Strom i .



Im Abstände x sei p die Spannung zwischen den Leitern, im Abstände $x + dx$ ist sie $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$.

Fig. 132.

Die Induktivität des Elementes der Schleife ist $L dx$, der Widerstand $R dx$.

Für das Schleifenelement gilt daher nach dem Induktionsgesetz

$$-L dx \frac{\partial i}{\partial t} = R dx i + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - p,$$

oder

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \dots \dots \dots (190)$$

Die zweite Gleichung liefert die Bedingung der Kontinuität des Stromes. Ist i der eintretende Strom, so tritt als Leitungsstrom $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ aus; die Differenz des eintretenden und des austretenden Stromes dient als Ladestrom $C dx \frac{\partial p}{\partial t}$ zur Aufladung des Elementes, teils als Ableitungsstrom $A dx p$ zur Deckung der Verluste. Daher ist

$$i = \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + A dx p + C dx \frac{\partial p}{\partial t}$$

oder

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = A p + C \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (191)$$

Gl. 190 und 191 sind die Differentialgleichungen für die räumliche und zeitliche Änderung des Stromes und der Spannung.

Da im stationären Zustand eine einwellige Spannung bei kon-

stanten Werten von L , R , A , C einen einwelligen Strom erzeugt, kann man die Differentialquotienten nach der Zeit durch Anwendung der symbolischen Schreibweise eliminieren und die Gleichungen für die Effektivwerte hinschreiben.

Hierzu setzt man für $\frac{\partial i}{\partial t}$ und $\frac{\partial p}{\partial t}$ nach Kap. III, S. 34 $j\omega \mathfrak{I}$ und $j\omega \mathfrak{P}$ und erhält

$$-\frac{d\mathfrak{P}}{dx} = (R + j\omega L)\mathfrak{I} \quad \dots \quad (192)$$

$$-\frac{d\mathfrak{I}}{dx} = (A + j\omega C)\mathfrak{P} \quad \dots \quad (193)$$

Differentiiert man die Gleichungen nochmals nach x , so wird

$$-\frac{d^2\mathfrak{P}}{dx^2} = (R + j\omega L)\frac{d\mathfrak{I}}{dx} \quad \dots \quad (194)$$

$$-\frac{d^2\mathfrak{I}}{dx^2} = (A + j\omega C)\frac{d\mathfrak{P}}{dx} \quad \dots \quad (195)$$

und durch Einsetzen von Gl. 192 und 193

$$\frac{d^2\mathfrak{P}}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\mathfrak{P} \quad \dots \quad (196)$$

$$\frac{d^2\mathfrak{I}}{dx^2} = (R + j\omega L)(A + j\omega C)\mathfrak{I} \quad \dots \quad (197)$$

Die Gleichungen sind von gleicher Form, d. h. Strom- und Spannungsverteilung längs der Leitung sind gleichartig und unterscheiden sich nur durch Konstante.

Die Gl. 196 wird befriedigt durch den Ansatz

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \varepsilon^{\nu x} \quad \dots \quad (198)$$

worin ε die Basis der natürlichen Logarithmen und \mathfrak{A} und ν zu bestimmende Konstante sind. Durch zweimaliges Differenzieren erhält man aus dieser Gleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{P}}{dx^2} = \nu^2 \mathfrak{A} \varepsilon^{\nu x} = \nu^2 \mathfrak{P} \quad \dots \quad (199)$$

Setzt man Gl. 199 in Gl. 196 ein, so wird

$$\nu = \pm \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} \quad \dots \quad (200)$$

Entsprechend den beiden Werten von ν besteht das Integral (Gl. 198) aus zwei Teilen; das vollständige Integral lautet:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}_1 \varepsilon^{+\nu x} + \mathfrak{A}_2 \varepsilon^{-\nu x} \quad \dots \quad (201)$$

Nach Gl. 192 und 201 ist nun

$$\mathfrak{S} = -\frac{1}{(R + j\omega L)} \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = \sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}} (\mathfrak{A}_2 \varepsilon^{-\nu x} - \mathfrak{A}_1 \varepsilon^{\nu x}) \quad (202)$$

Die Integrationskonstanten \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 sind im allgemeinen komplexe Zahlen, sie stellen Spannungsvektoren dar und sind durch die Grenzbedingungen zu ermitteln. Der Exponent ν ist ebenfalls im allgemeinen eine komplexe Zahl, es kann daher gesetzt werden

$$\nu = a + jb.$$

Um a und b zu ermitteln, setzt man für ν den Wert aus Gl. 200 ein

$$\begin{aligned} \nu^2 &= (a + jb)^2 = (R + j\omega L)(A + j\omega C), \\ a^2 - b^2 + 2jab &= (RA - \omega^2 LC) + j\omega(AL + RC). \end{aligned}$$

Indem man die reellen und die imaginären Teile auf beiden Seiten einander gleichsetzt, erhält man die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 &= (RA - \omega^2 LC) \\ 2ab &= \omega(AL + RC) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (203)$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen wird

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 &= (R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2) \\ a^2 + b^2 &= \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}, \end{aligned}$$

und durch Vereinigung mit Gl. 203

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} [RA - \omega^2 LC + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}]} \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2} [\omega^2 LC - RA + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}]} \end{aligned} \right\} (204)$$

Setzt man nun in Gl. 201 und 202

$$\varepsilon^{\pm \nu x} = \varepsilon^{\pm (a + jb)x} = \varepsilon^{\pm ax} \varepsilon^{\pm jbx},$$

worin nach dem Satz von Moivre,

$$\varepsilon^{\pm jbx} = (\cos bx \pm j \sin bx)$$

ist, so wird

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{A}_1 \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \mathfrak{A}_2 \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \\ \mathfrak{S} &= \sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}} [\mathfrak{A}_2 \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) - \mathfrak{A}_1 \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx)] \end{aligned} \right\} (205)$$

Jede dieser Gleichungen besteht aus zwei Teilen, deren Bedeutung erst untersucht werden soll. Sieht man zunächst von dem

Faktor $\varepsilon^{\pm ax}$ ab, indem etwa $a = 0$ gesetzt wird, so hat jeder Bestandteil die Form

$$\mathfrak{U}(\cos bx \pm j \sin bx).$$

Jeder Vektor \mathfrak{U} stellt eine einwellige Spannung dar, deren Amplitude p_{am} sei, und deren Augenblickswerte daher

$$p_a = p_{am} \sin(\omega t + \psi)$$

sind. Ebenso stellt der Vektor $j\mathfrak{U}$, der ebenso groß wie \mathfrak{U} ist und dagegen zeitlich um eine Viertelperiode voreilt, eine Spannung dar

$$p_a' = p_{am} \cos(\omega t + \psi).$$

Die Momentanwerte jedes der beiden Glieder der Gl. 205 sind daher:

$$\begin{aligned} p_a &= p_a \cos bx \pm p_a' \sin bx = p_{am} [\sin(\omega t + \psi) \cos bx \pm \cos(\omega t + \psi) \sin bx] \\ &= p_{am} \sin(\omega t + \psi \pm bx) \dots \dots \dots (206) \end{aligned}$$

Diese Funktion stellt für einen gegebenen Augenblick, d. h. für $t = \text{konst.}$ eine räumlich sinusförmige Spannungsverteilung längs der Leitung dar, und an einer bestimmten Stelle ($x = \text{konst.}$) eine zeitlich nach einer Sinusfunktion pulsierende Spannung.

Schreitet der Winkel bx um 2π fort, so hat man sich um eine ganze Wellenlänge der räumlichen Sinuswelle fortbewegt. Sie ist daher

$$\lambda = \frac{2\pi}{b} \dots \dots \dots (207)$$

b ist der Wellenlängenfaktor.

Nach einer Zeit dt sind die Werte der Funktion (206) an einer jeweils um dx weiter liegenden Stelle der Leitung

$$p_{am} \sin[\omega(t + dt) + \psi \pm b(x + dx)].$$

Diese Werte sind den früheren gleich, wenn

$$\omega dt \pm b dx = 0$$

ist. Dies bedeutet, daß die ganze Welle mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v = \mp \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{b} \dots \dots \dots (208)$$

längs der Leitung fortschreitet, wobei das positive Vorzeichen ein Fortschreiten im Sinne der Zunahme von x , d. h. nach dem Leitungsende, das negative nach dem Leitungsanfang bedeutet. Hiernach stellt sich also die Spannung längs der Leitung in Gl. 205 als Summe, der Strom als Differenz von zwei räumlich sinusförmig verteilten Wellen dar, die mit konstanter Geschwindigkeit die eine

in Richtung nach dem Leitungsende, die andere nach dem Leitungsanfang hin wandern. Die erste heißt die Hauptwelle, die zweite die reflektierte Welle.

Die Faktoren $\varepsilon^{\pm ax}$ bedeuten nun, daß die Wellen keine konstante Amplitude haben, sondern daß die Amplituden beim Fortschreiten nach der $+x$ - oder $-x$ -Richtung gedämpft werden. a ist der Dämpfungsfaktor.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist nach Gl. 208 der Periodenzahl des Wechselstromes (ω) direkt proportional. Ist T die Periodendauer, so ist unter Berücksichtigung von Gl. 207 und 208

$$v = \frac{\omega}{b} = \frac{2\pi}{Tb} = \frac{\lambda}{T} \dots \dots \dots (209)$$

Die Wellen legen also in einer Periode eine Wellenlänge zurück.

Der Faktor $\sqrt{\frac{A + j\omega C}{R + j\omega L}}$ mit dem die Spannungswellen zu multiplizieren sind, um die Stromwellen zu erhalten, hat die Dimension eines Leitwertes. Sein reziproker Wert

$$\sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \mathfrak{Z} \dots \dots \dots (210)$$

hat die Dimension eines Widerstandes, man bezeichnet ihn als „Charakteristik“ der Leitung oder als „Wellenwiderstand“.

Bestimmung der Integrationskonstanten.

Zur Ermittlung der Konstanten \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 geht man von den Grenzbedingungen aus. Am Anfang der Leitung ist $x=0$; hier sei die Spannung \mathfrak{P}_1 , der Strom \mathfrak{S}_1 . Danach wird aus Gl. 205 für $x=0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{S}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1), \end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_2 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) \\ \mathfrak{A}_1 &= \frac{1}{2}(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) \end{aligned}$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \frac{1}{2} [(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) \\ &\quad + (\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{2\mathfrak{Z}} [(\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \\ &\quad - (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{Z}) \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx)]. \end{aligned} \right\} (205 a)$$

Rechnung der x vom Leitungsende.

Häufig geht man bei Ermittlung der Konstanten \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 von den am Ende der Leitung bestehenden Spannungs- und Stromwerten aus. Dann ist es zweckmäßig, die Längen x statt vom Leitungsanfang vom Leitungsende an zu rechnen. Hierzu braucht man nur in Gl. 201 $+ \nu x$ und $- \nu x$ zu vertauschen, und in Gl. 202 statt dx $-dx$ zu setzen. Dann sind die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{A}_2 \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \mathfrak{A}_1 \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx) \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{3} [\mathfrak{A}_2 \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \mathfrak{A}_1 \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \end{aligned} \right\} (205 b)$$

Das Leitungsende ist jetzt $x=0$; hier sei die die Spannung \mathfrak{P}_2 , der Strom \mathfrak{S}_2 , somit erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_2 &= \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{S}_2 &= \frac{1}{3} (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1), \end{aligned}$$

daher

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_2 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_2 3) \\ \mathfrak{A}_1 &= \frac{1}{2} (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{S}_2 3) \\ \mathfrak{P} &= \frac{1}{2} [(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_2 3) \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) \\ &\quad + (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{S}_2 3) \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{2 3} [(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_2 3) \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) \\ &\quad - (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{S}_2 3) \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \end{aligned} \right\} (205 c)$$

An Hand dieser Gleichungen mögen die Eigenschaften der Strom- und Spannungsverteilung an einigen Beispielen näher erläutert werden.

63. Verlustfreie Leitung.

Nimmt man an, daß die Verluste vernachlässigbar klein sind, so gewinnen die Gleichungen eine wesentlich übersichtlichere Form, es möge daher dieser ideelle Fall zunächst betrachtet werden. Hierzu setzt man

$$R=0, \quad A=0.$$

Nach Gl. 204 werden dann

$$a=0, \quad b=\omega\sqrt{LC}.$$

Die Faktoren $\varepsilon^{\pm ax}$ werden gleich 1 und dies bedeutet, daß die Wellen räumlich konstante Amplitude besitzen. Die Wellenlänge ist dann nach Gl. 207

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{CL}} = \frac{T}{\sqrt{CL}}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach Gl. 209

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \dots \dots \dots (209a)$$

Diese Geschwindigkeit ist für Freileitungen sehr angenähert gleich der Lichtgeschwindigkeit (300000 km i. d. Sek.). Bei den in der Starkstromtechnik gebräuchlichen Periodenzahlen ist die Wellenlänge sehr groß, z. B. für $c = \frac{1}{T} = 50$ i. d. Sek.

$$\lambda = vT \cong 6000 \text{ km},$$

die größten bisher gebauten Kraftübertragungen sind nur ein Bruchteil einer Wellenlänge.

Bei Telephonströmen kann die Leitungslänge dagegen wohl eine Wellenlänge betragen, für 3000 Perioden i. d. Sek. ist $\lambda = 100$ km.

Die Charakteristik (Gl. 210) hat bei der verlustfreien Leitung den Wert

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \dots \dots \dots (210a)$$

Die Gl. 205c für Spannung und Strom vereinfachen sich für $a = 0$ in

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_2 \cos bx + j \mathfrak{S}_2 Z \sin bx \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}_2 \cos bx + j \frac{\mathfrak{P}_2}{Z} \sin bx \end{aligned} \right\} \dots \dots (205d)$$

Diese Gleichungen können in einem Polardiagramm dargestellt werden, das ein anschauliches Bild von der Änderung der Größe und Phase der Effektivwerte bzw. der Amplituden von Strom und Spannung ergibt.

Ist in Fig. 133 OP_2 der Vektor der Klemmenspannung am Ende der Leitung, so ist die Projektion des um den Winkel $bx = P_2 OA_1$ gedrehten Vektors auf die Richtung von OP_2

$$OB_1 = P_2 \cos bx.$$

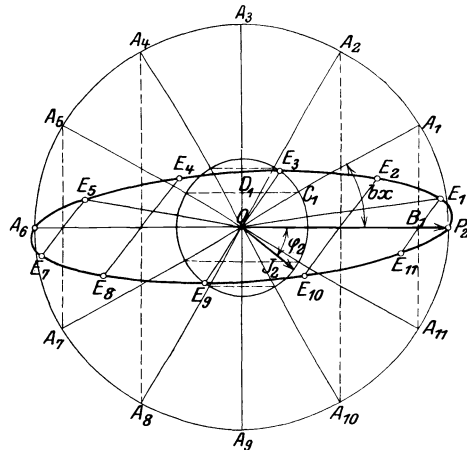


Fig. 133.

Ist ferner $OJ_2 = J_2 Z = OC_1$, so ist die Projektion von OC_1 auf die zu OP_2 senkrechte Richtung

$$OD_1 = J_2 Z \sin bx.$$

Ist J_2 gegen P_2 um φ_2 verzögert, so eilt $j\mathfrak{S}_2 Z \sin bx$ gegen J_2 um 90° , gegen P_2 um $(90^\circ - \varphi_2)$ vor; man trägt also $B_1 E_1 = OD_1$ senkrecht zu OJ_2 an OB_1 an. OE_1 ist dann der Vektor der Spannung P im Abstand x vom Leitungsende. Führt man die Konstruktion durch (in Fig. 133 sind 12 Punkte im Abstand von $bx = \frac{\pi}{6}$ gewählt), so erhält man als Ort für den Spannungsvektor der verlustfreien Leitung eine Ellipse. Die Momentanwerte erhält man in bekannter Weise durch Projektion der Vektoren auf die Zeitlinie.

Das Diagramm zeigt, daß die Amplitude der Spannung vom Leitungsende an zuerst wenig zu- und dann stark abnimmt, bis $bx = \frac{\pi}{2}$, also $x = \frac{\pi}{2b} = \frac{\lambda}{4}$ ist. Bei etwas mehr als einem Viertel der Wellenlänge ist sie um 90° in der Phase gegen P_2 verschoben, sie nimmt dann wieder zu, erreicht in der Nähe von $x = \frac{\lambda}{2}$ wieder ein Maximum und hat dort 180° Phasenverschiebung gegen das Wellenende.

Aus der Konstruktion folgt, daß für induktionsfreie Belastung, $\varphi_2 = 0$, die beiden Hauptachsen der Ellipse P_2 und $J_2 Z$ sind.

Für den Strom kann das gleiche Diagramm verwendet werden, wenn man statt der Ströme die ihnen proportionalen Spannungsvektoren JZ betrachtet.

Setzt man in die Spannungsgleichung 205 d anstatt x den Wert $(x - \frac{\pi}{2b})$, so erhält man, da $\cos(bx - \frac{\pi}{2}) = \sin bx$ und $\sin(bx - \frac{\pi}{2}) = -\cos bx$ ist,

$$\mathfrak{P}_{(x - \frac{\pi}{2b})} = \mathfrak{P}_2 \sin x - j\mathfrak{S}_2 Z \cos bx.$$

Für den Strom an der Stelle x folgt aber aus Gl. 205 d

$$\mathfrak{S}_{(x)} Z = \mathfrak{S}_2 Z \cos bx + j\mathfrak{P}_2 \sin bx,$$

daher ist

$$\mathfrak{S}_{(x)} Z = j\mathfrak{P}_{(x - \frac{\pi}{2b})},$$

also ist der Vektor $\mathfrak{S}Z$ an der Stelle x ebenso groß wie der Spannungsvektor P an einer um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge zurückliegenden Stelle, aber um 90° dagegen in der Phase im Sinne der Voreilung verschoben. Man sieht hieraus, daß die größten Amplituden des

Stromes und der Spannung um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge auf der Leitung voneinander entfernt liegen. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung ändert sich längs der Leitung. Am Ende ist sie φ_2 . Da der Vektor $P_{(x-\frac{\lambda}{4})}$ um 90° gegen $J_{(x)}Z$ zurückliegt, bildet er mit dem Vektor $P_{(x)}$, der gegen $J_{(x)}Z$ um φ voreilt, den Winkel $(\frac{\pi}{2} + \varphi)$.

Ist also der Winkel zwischen einem Spannungsvektor und dem um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge zurückliegenden stumpf, so ist φ positiv: P eilt gegen J vor, wie für die Punkte 12 und 9; ist er spitz, so ist φ negativ, P ist gegen J verzögert, wie für den Vektor bei $\frac{1}{12}$ Wellenlänge OE_1 , gegen den der um $\frac{1}{4}$ Welle zurückliegende OE_{10} einen spitzen Winkel bildet. Die Leistung ist aber an allen Punkten der Leitung konstant, weil wir die Verluste vernachlässigt haben.

In Fig. 134 ist die Strom- und Spannungsverteilung längs der Leitung für 6 Augenblicke im Abstand von $\frac{1}{12}$ Periode dargestellt.

Die Figur gilt für folgende Verhältnisse.

Es werde eine Leistung von 1000 KW bei einem $\cos \varphi_2 = 0,8$ mit einer Spannung von 50000 Volt übertragen. Der Strom an den sekundären Klemmen ist

$$J_2 = \frac{1000000}{0,8 \cdot 50000} = 25 \text{ Amp.}$$

Die Freileitung habe einen Durchmesser von 1 cm, die beiden Leitungen sind in einem Abstand von $D = 100$ cm aufgehängt.

Die Induktivität der Leitung pro km ist

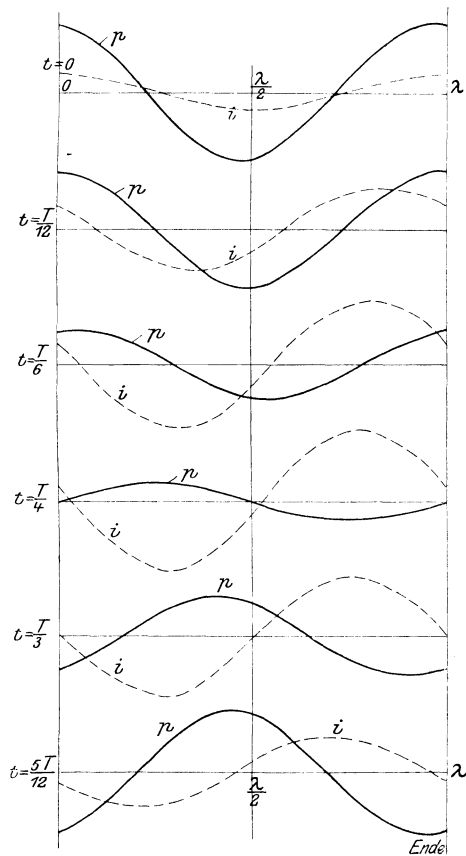


Fig. 134.

$$L = \left(4 \ln \frac{D}{a} + 1 \right) 10^{-4} \text{ H/km} = 0,00222 \text{ H/km.}$$

Die Kapazität ist

$$C = \frac{1}{4 \ln \frac{D}{a}} \cdot \frac{10^{-6}}{9} \text{ F/km} = 0,00525 \cdot 10^{-6} \text{ F/km,}$$

daher die Charakteristik

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,00222 \cdot 10^6}{0,00525}} \simeq 650 \text{ Ohm}$$

und $J_2 Z = 16250 \text{ Volt}$, d. h. etwa $\frac{1}{3}$ von P_2 .

Bei Kabeln ist wegen der höheren Dielektrizitätskonstante C größer, die Charakteristik Z ist kleiner und hat etwa den Wert 60 bis 100 Ohm. Ebenso ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen kleiner, sie ist angenähert der Quadratwurzel der Dielektrizitätskonstanten umgekehrt proportional.

Da die Wellenlänge für 50 Perioden nahezu 6000 km ist, so ist eine Freileitung von 100 km Länge nur $\frac{1}{60}$ der Wellenlänge, d. h. ihr entspricht in dem Diagramm ein Winkel von 6° vom Ende. Hier ist die Spannung am Leitungsanfang höher als am Ende. Dagegen tritt bei offener Leitung, d. h. für $J_2 = 0$, stets eine Spannungserhöhung vom Anfang gegen das Ende ein, hierfür ist ja nach Gl. 205 d

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2 \cos bx.$$

Sie ist um so auffälliger, je größer $b = \omega \sqrt{LC}$ ist, also bei Kabeln, bei denen die Wellenlänge annähernd der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstante umgekehrt proportional ist, stärker als bei Freileitungen. Die Spannungserhöhung im Kabel wurde zuerst von Ferranti beobachtet und wird deswegen als „Ferranti-Phänomen“ bezeichnet.

An Hand des Diagramms können nun noch folgende Spezialfälle leicht übersehen werden.

1. Ist $J_2 Z = P_2$ und $\varphi_2 = 0$, so geht die Ellipse in einen Kreis über: die Spannung ist längs der ganzen Leitung konstant, und ebenso der Strom. Hier besteht Resonanz zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern; denn wenn man für Z seinen Wert einsetzt, wird

$$J_2^2 L = P_2^2 C.$$

Die Energien des elektrischen und des magnetischen Feldes der Leitung sind gleichgroß, die Felder laden sich gegenseitig.

2. Von Wichtigkeit ist ferner der Fall, daß die Ellipse in eine gerade Linie übergeht, in diesem Falle haben Spannung und Strom

längs der ganzen Leitung gleiche Phase, sie ändern sich nur von Punkt zu Punkt der Größe nach und kehren ihre Richtung an bestimmten Punkten um. Beim Richtungswechsel gehen sie an bestimmten Punkten durch Null hindurch, und dies bedeutet, daß die Strom- und Spannungswellen nicht mehr fortschreiten, sondern stehen.

Stehende Wellen bestehen bei der verlustfreien Leitung zunächst bei offener Leitung, d. h. bei $\mathfrak{S}_2 = 0$, hierfür ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2 \cos bx$$

$$\mathfrak{S} Z = j \mathfrak{P}_2 \sin bx.$$

Die Spannung hat ihre größten Werte bei $x=0, \frac{\lambda}{2}, \lambda \dots$ und ihren Nulldurchgang bei $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4} \lambda \dots$, der Strom eilt ihr um $\frac{1}{4}$ Periode vor und hat seine größten Werte beim Nulldurchgang der Spannung, und umgekehrt, Strom- und Spannungswellen sind um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge gegeneinander verschoben.

Zweitens treten stehende Wellen auf, wenn die Leitung am Ende widerstandsfrei kurzgeschlossen ist, dann ist $\mathfrak{P}_2 = 0$

$$\mathfrak{P} = j \mathfrak{S}_2 Z \sin bx$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_2 \cos bx,$$

und drittens erhält man stehende Wellen, wenn Strom und Spannung am Leitungsende um 90° gegeneinander phasenverschoben sind; denn dann fallen die Vektoren $j \mathfrak{S}_2 \mathfrak{P}$ in Fig. 133 stets in die Richtung von \mathfrak{P}_2 .

Die Bedingungen für stehende Wellen bei der verlustfreien Leitung sind daher $J_2 = 0$ oder $P_2 = 0$ oder $\varphi_2 = 0$, also für alle die Fälle, bei denen ein Faktor der an dem Ende abgegebenen Leistung

$$P_2 J_2 \cos \varphi_2$$

gleich Null ist, so daß sich als allgemeine Bedingung für stehende Wellen die ergibt, daß am Leitungsende keine Leistung abgegeben wird. Da die Leitung verlustfrei angenommen wurde, bedeutet dies also nur, daß keine Leistung in die Leitung geschickt wird; sowie eine Leistung abgegeben wird, müssen die Wellen fortschreiten, also auch dann, wenn die Leitung Verluste besitzt.

Spannungsresonanz. Ist an die Leitung nur eine Kapazität C_0 angeschlossen, so besteht nach Vorstehendem eine stehende Welle. Die Länge x , an der die Spannung Null wird, ergibt sich dann daraus, daß

$$P_2 \cos bx = J_2 Z \sin bx$$

sein muß, oder, da $J_2 = P_2 \omega C_0$ ist,

$$\operatorname{tg}(bx) = \frac{1}{Z \omega C_0}.$$

Für kleine Winkel (bx), d. h. für eine im Verhältnis zur Wellenlänge kurze Leitung kann man setzen

$$\operatorname{tg}(bx) = bx.$$

Es wird also

$$x = \frac{1}{Z b \omega C_0}.$$

Da

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad b = \omega \sqrt{LC}$$

ist, wird

$$x = \frac{1}{\omega L \cdot \omega C_0}$$

oder

$$\omega L x = \frac{1}{\omega C_0} \dots \dots \dots (211)$$

Hierbei ist die induktive Reaktanz des Leistungsstückes von der Länge x gleich der Kapazitätsreaktanz des angeschlossenen Kondensators. Die Resonanzbedingung ist unabhängig von der Kapazität der Leitung, vorausgesetzt, daß diese klein ist gegen C_0 .

64. Leitung mit Verlusten.

a) Verzerrungsfreie Leitung.

Bei einer Leitung mit Verlusten ändern die Wellen ihre Amplitude. Ehe der allgemeine Fall betrachtet werde, soll die sog. „verzerrungsfreie Leitung“ untersucht werden (s. Kap. XIV), bei der Ableitung und Widerstand im gleichen Verhältnis stehen wie Kapazität und Induktivität; d. h. es ist

$$R : L = A : C \dots \dots \dots (212)$$

Die Charakteristik wird somit

$$\sqrt{\frac{R + j \omega L}{A + j \omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z \dots \dots \dots (210b)$$

ebenso wie bei der verlustfreien Leitung.

Der Dämpfungsfaktor ist nach Gl. 204

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} [RA - \omega^2 LC + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ RA + \omega^2 LC \left[\sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)} - 1 \right] \right\}} \end{aligned}$$

oder, da unter Berücksichtigung von Gl. 212 die zweite Wurzel rationell wird, ist

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \left[RA + \frac{C}{L} R^2 \right]} = R \sqrt{\frac{C}{L}} = A \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$a = \frac{R}{Z} = AZ \dots \dots \dots (204a)$$

Der Dämpfungsfaktor ist bei der verzerrungsfreien Leitung das Verhältnis des Widerstandes zur Charakteristik.

Durch analoge Umformung ergibt sich aus Gl. 204

$$b = \sqrt{LC}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist ebenso groß wie bei der verlustfreien Leitung.

Im früheren Beispiel ist der Widerstand von 1 km Hin- und Rückleitung

$$R = 0,45 \text{ Ohm km}^{-1}, \quad Z = 650 \text{ Ohm}$$

$$a = \frac{R}{Z} = 0,69 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}.$$

Während die Wellen bei der verlustfreien Leitung im Abstand von $\frac{1}{2}$ Wellenlänge vom Leitungsende die gleiche Amplitude hatten wie dort, sind sie hier

$$\varepsilon^{\pm a \frac{\lambda}{2}}, \text{ worin } a \frac{\lambda}{2} = a \frac{\pi}{b} = \frac{R \sqrt{\frac{C}{L}}}{2c \sqrt{LC}} = \frac{R}{2cL}$$

ist. Es ist mit $R = 0,45$, $L = 0,00222$, $c = 50$

$$\varepsilon^{+a \frac{\lambda}{2}} = \varepsilon^{2,03} = 7,6$$

$$\varepsilon^{-a \frac{\lambda}{2}} = \varepsilon^{-2,03} = 0,132.$$

Dem Widerstand $R = 0,45 \text{ Ohm km}^{-1}$ entspricht bei der verzerrungsfreien Leitung eine Ableitung

$$A = R \frac{C}{L} = \frac{0,45 \cdot 10^{-6}}{0,00222} = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ Siemens km}^{-1}$$

oder ein Isolationswiderstand

$$\frac{1}{A} = 945000 \text{ Ohm km}^{-1}.$$

Darstellung im Polardiagramm.

In den Gl. 205c ist jetzt

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} [(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{J}_2 Z) \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{J}_2 Z) \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \quad (213)$$

$$\mathfrak{J} Z = \frac{1}{2} [(\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{J}_2 Z) \varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{J}_2 Z) \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \quad (214)$$

In Fig. 135 stellte OA_0 den Vektor der Spannung P_2 am Leitungsende dar, OA_1 den um den Winkel bx voreilenden Vektor

$$\mathfrak{P}_2 (\cos bx + j \sin bx),$$

OA_{11} den um bx nacheilenden Vektor

$$\mathfrak{P}_2 (\cos bx - j \sin bx).$$

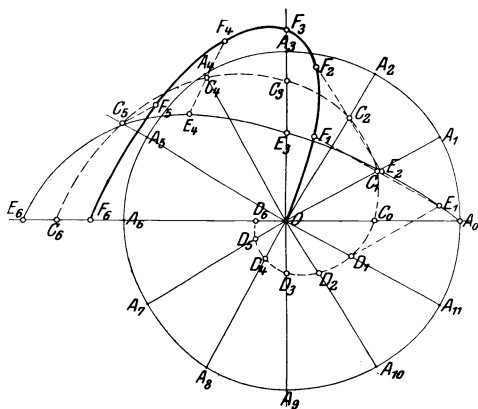


Fig. 135.

In der Figur ist wieder der Kreis, der einer Wellenlänge entspricht, in zwölf Teile geteilt, entsprechend dem Fortschreiten um $bx = \frac{\pi}{6}$. Die voreilenden Vektoren sind mit $\frac{1}{2} \varepsilon^{ax}$, die nacheilenden mit $\frac{1}{2} \varepsilon^{-ax}$ zu mul-

tiplicieren; im ersten Fall erhält man die mit OC_1 bis OC_6 bezeichneten, im zweiten Fall die mit OD_1 bis OD_6 bezeichneten Vektoren, die eine logarithmische Spirale beschreiben. Die Konstruktion ist nur für sechs Punkte entsprechend einer halben Wellenlänge durchgeführt, außerdem ist die Periodenzahl gleich 100 angenommen, so daß im früheren Beispiel für eine halbe Wellenlänge $\varepsilon^{\frac{\lambda}{2}} = 2,76$ ist, um die Figur nicht zu sehr zu verzerren.

Addiert man zusammengehörige Vektoren OC_1 und OD_1 , OC_2 und OD_2 , so ergeben sich die Vektoren OE_1 bis OE_6 , die zunächst die Spannungsverteilung für $J_2 = 0$, d. h. bei der offenen Leitung darstellen, denn hierfür ist Gl. 213

$$\mathfrak{P}_{(J_2=0)} = \frac{1}{2} \mathfrak{P}_2 [\varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \quad (213a)$$

Diesem Diagramm entsprach bei der verlustfreien Leitung die gerade Linie.

Subtrahiert man zusammengehörige Vektoren OC_1 und OD_1 usw., so erhält man die Vektoren OF_1 bis OF_6 . Diese stellen nach Gl. 214

$$\Im Z_{(J_2=0)} = \frac{1}{2} \Im_2 [\varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \varepsilon^{-ax} \cos (bx - j \sin bx)] \quad (213 \text{ b})$$

die Stromverteilung bei offener Leitung ($J_2 = 0$) dar.

Wählt man als Ausgangsvektor OA_0 nicht \Im_2 , sondern $\Im_2 Z$, so stellen die durch Summation zweier Vektoren erhaltenen OE_1 bis OE_6 in anderem Maßstab nach Gl. 214.

$$\Im Z_{(P_2=0)} = \frac{1}{2} \Im_2 Z [\varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) + \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \quad (214 \text{ a})$$

die Stromverteilung für $P_2 = 0$, d. h. bei kurzgeschlossenem Leitungsende dar, während die durch Subtraktion zweier Vektoren erhaltenen OF_1 bis OF_6 entsprechend Gl. 214 für $P_2 = 0$

$$\Im_{(P_2=0)} = \frac{1}{2} \Im_2 Z [\varepsilon^{ax} (\cos bx + j \sin bx) - \varepsilon^{-ax} (\cos bx - j \sin bx)] \quad (214 \text{ b})$$

die Spannungsverteilung bei kurzgeschlossener Leitung abbilden.

Nun zeigt sich durch Vergleich der Gl. 213 a, b und 214 a, b mit 213 und 214, daß man die Spannungs- und Stromvektoren bei Belastung erhält durch Addition der entsprechenden Vektoren der offenen zu denen der kurzgeschlossenen Leitung.

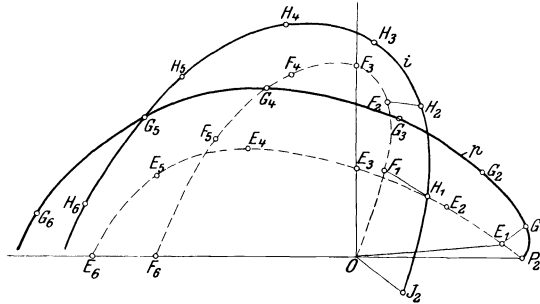


Fig. 136.

In Fig. 136 sind die Kurven $E_1 - E_6$ und $F_1 - F_6$ nochmals aufgetragen; der Vektor OA_0 der Figur 135 ist mit OP_2 bezeichnet, da er die Spannung am Ende darstellt. Bei der Addition ist nun zu berücksichtigen, daß die Vektoren, sofern sie die dem Strom proportionale Spannung $J_2 Z$ darstellen, im Verhältnis $\frac{J_2 Z}{P_2}$ zu verkleinern und um den Winkel φ_2 nach rückwärts zu drehen sind, um den J_2 gegen P_2 nacheilt. Macht man also $E_1 G_1 = \frac{J_2 Z}{P_2} \times OF_1$ und um φ_2 gegen OF_1 zurückdreht, so ist OG_1 als Summe von OE_1 und $E_1 G_1$ die Spannung im Abstand von $\frac{1}{12}$ Wellenlänge vom Leitungsende. Ebenso sind die Punkte G_2 bis G_6 gewonnen,

die Vektoren OG_x stellen die Spannungsverteilung dar. Analog erhält man die Vektoren OH_1 bis OH_6 der Stromverteilung, indem man an jedem Vektor OF_x den im Verhältnis $\frac{J_2 Z}{P_2}$ verkleinerten und um φ_2 gedrehten Vektor OE_x gleich $F_x H_x$ anträgt. Der erste Vektor ist OJ_2 , der den Strom am Leitungsende darstellt.

Diese Diagramme für \mathfrak{P} und \mathfrak{S} treten an die Stelle der bei der verlustfreien Leitung gefundenen Ellipsen.

Auch hier hat die Spannung ihre kleinste Amplitude im Abstand von etwa $\frac{1}{4}$ Wellenlänge vom Leitungsende.

Aus diesem Grunde hat Steinmetz vorgeschlagen, zur Übertragung von Energie auf große Entfernungen Leitungen von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge zu benutzen, weil hierbei nur das Ende für die höchste Spannung zu isolieren ist.

Für $bx = \frac{\pi}{2}$ erhält man nach Gl. 213 die Spannung am Anfang

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= j \left[\mathfrak{P}_2 \frac{\varepsilon^{\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}} - \varepsilon^{-\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}}}{2} + \mathfrak{S}_2 Z \frac{\varepsilon^{\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}} + \varepsilon^{-\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}}}{2} \right] \\ &= j \left[\mathfrak{P}_2 \mathfrak{S}in\left(\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}\right) + \mathfrak{S}_2 Z \mathfrak{C}of\left(\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}\right) \right]^1 \dots (215) \end{aligned}$$

und den Strom

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{j}{Z} \left[\mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}of\left(\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}\right) + \mathfrak{S}_2 Z \mathfrak{S}in\left(\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}\right) \right] \dots (216)$$

Für kleine Verluste ist $\frac{a}{b}$ klein, $\mathfrak{S}in\left(\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}\right)$ ist klein gegen $\mathfrak{C}of\left(\frac{a\pi}{b\frac{\pi}{2}}\right)$; daher ist die primäre Spannung hauptsächlich von dem Belastungsstrom J_2 , der primäre Strom besonders von der sekundären Spannung P_2 abhängig. Eine solche Anlage darf daher nie unterbrochen werden, z. B. durch Höchststromausschalter, denn dies würde bei gegebener primärer Spannung eine außerordentliche Vergrößerung der Spannung an den Enden und einen sehr großen primären Strom bedeuten; dagegen wird bei kurzgeschlossenem Ende der primäre Strom sehr klein.

b) Allgemeiner Fall.

Gehen wir nun zum allgemeinen Fall der Leitung mit Verlusten über, bei dem

$$\frac{R}{L} \approx \frac{A}{C}$$

¹⁾ $\mathfrak{S}in$ und $\mathfrak{C}of$ bezeichnen den hyperbolischen Sinus und Kosinus.

ist, so ist zunächst die Charakteristik

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}}$$

eine komplexe Zahl. Ihr Betrag

$$Z = \sqrt[4]{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{A^2 + (\omega C)^2}}$$

ist größer oder kleiner als der früher gefundene Wert $\sqrt{\frac{L}{C}}$, je nachdem $R:L$ größer oder kleiner als $A:C$ ist.

Wir setzen

$$\mathfrak{Z} = Z \varepsilon^{j\zeta},$$

worin

$$\zeta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega \left(\frac{A}{C} - \frac{R}{L} \right)}{\omega^2 + \frac{A}{C} \cdot \frac{R}{L}},$$

d. h. ζ ist positiv und bedeutet eine Voreilung, oder negativ und bedeutet eine Nacheilung, je nachdem $\frac{A}{C} \gtrless \frac{R}{L}$ ist. Hieraus folgt, daß in dem Diagramm der Vektor $\mathfrak{S}_2 \mathfrak{Z}$ gegen \mathfrak{P}_2 nicht mehr um φ_2 , sondern um $\varphi_2 \pm \zeta$ nach- bzw. voreilt. ζ ist aber im allgemeinen ein kleiner Winkel.

Die Konstante b , die die Wellenlänge angibt, wird etwas größer als $\omega\sqrt{LC}$, wenn $\frac{R}{L} > \frac{A}{C}$, und etwas kleiner, wenn $\frac{R}{L} < \frac{A}{C}$ ist, d. h. die Wellenlänge ist im ersten Fall etwas geringer, im zweiten etwas größer als bei einer verlustfreien, bzw. bei der verzerrungsfreien Leitung.

Der Dämpfungsfaktor a endlich, der bei der verzerrungsfreien Leitung gleich $R\sqrt{\frac{C}{L}}$ war, wird etwas kleiner, wenn $\frac{R}{L} > \frac{A}{C}$ ist, im andern Fall etwas größer. Das Verhalten ändert sich also nur in quantitativer Hinsicht von dem betrachteten Fall.

Bei Kraftübertragungen spielt die Dämpfung keine sehr wesentliche Rolle. Anders liegt es bei Telephonleitungen, erstens weil diese aus dünnen Drähten bestehen und einen hohen Widerstand besitzen, zweitens weil es sich hier um Schwingungen von hoher Periodenzahl handelt, bei denen die Leitung eine oder mehrere Wellenlängen betragen kann. Die Wellen verschiedener Frequenzen, aus denen die Sprechströme bestehen, werden in verschiedener Weise gedämpft und dadurch die Klangfarbe geändert. Die Deutlichkeit

der Übermittlung der Sprache erfordert daher eine möglichst geringe Dämpfung. Für hohe Periodenzahlen kann der Ausdruck für den Dämpfungsfaktor wie folgt vereinfacht werden. Es ist

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} [RA - \omega^2 LC + \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[RA - \omega^2 LC + \omega^2 LC \sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)} \right]}. \end{aligned}$$

Multipliziert man das Produkt unter der zweiten Wurzel aus und entwickelt die Wurzel in eine Reihe, so wird unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\sqrt{\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right) \left(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2}\right)} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \frac{A^2}{\omega^2 C^2} \right) + \dots$$

und hiermit

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{4} R^2 \frac{C}{L} + \frac{1}{2} AR + \frac{1}{4} A^2 \frac{L}{C}} \\ a &= \frac{1}{2} \left[R \sqrt{\frac{C}{L}} + A \sqrt{\frac{L}{C}} \right] \dots \dots \dots (217) \end{aligned}$$

Bei Telephonkabeln ist die Ableitung klein, und der Dämpfungsfaktor wird hauptsächlich von dem ersten Glied bestimmt. Zur Verkleinerung der Dämpfung wird nach dem Vorschlag von Pupin die Selbstinduktion vergrößert durch Einschaltung von Drosselspulen; derselbe Zweck wird nach Krarup durch Umspinnung der Kabel mit Eisendraht erreicht. Beide Arten von Telephonkabeln sind heute in Verwendung. Ist die Ableitung nicht vernachlässigbar, so hat der Dämpfungsfaktor ein Minimum und wächst bei weiterer Vergrößerung von L wieder, dieses Minimum liegt dort, wo $\frac{da}{dL} = 0$ ist, d. h. wenn

$$L = \frac{CR}{A}$$

ist. Dies ist der Fall der verzerrungsfreien Leitung.

Dieses Minimum wird jedoch mit Pupin- und Krarupkabeln nicht erreicht.

65. Ermittlung der Konstanten einer Leitung durch den Leerlauf und den Kurzschlußversuch.

Es soll nun gezeigt werden, wie die Konstanten der Leitung durch Messung ermittelt werden können. Hierzu genügen Strom-, Spannungs- und Leistungsmessung erstens bei Leerlauf, d. h. bei

offenen sekundären Klemmen, und zweitens bei Kurzschluß, d. h. bei widerstandslos kurzgeschlossenen sekundären Klemmen..

1. Leerlauf. Bei offenen sekundären Klemmen bestehe an diesen die Spannung \mathfrak{P}_2 , \mathfrak{S}_2 ist Null. Am Anfang der Leitung, für den $x=l$ ist, erhält man nach Gl. 205 c unter Berücksichtigung von 200 und 204 die Leerlaufspannung \mathfrak{P}_{10} und den Leerlaufstrom \mathfrak{S}_{10} .

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_{10} &= \mathfrak{P}_2 \frac{\varepsilon^{\nu l} + \varepsilon^{-\nu l}}{2} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{Cof}(\nu l) \\ \mathfrak{S}_{10} &= \mathfrak{S}_2 \frac{\varepsilon^{\nu l} - \varepsilon^{-\nu l}}{2} = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Sin}(\nu l) \end{aligned} \right\} \dots (218)$$

Das Verhältnis des Leerlaufstromes zur Leerlaufspannung ist die Leerlaufadmittanz y_0 . Es ist

$$y_0 = y_0 e^{j\varphi_0} = \frac{\mathfrak{S}_{10}}{\mathfrak{P}_{10}} = \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^{\nu l} - \varepsilon^{-\nu l}}{\varepsilon^{\nu l} + \varepsilon^{-\nu l}} = \frac{1}{3} \mathfrak{I}g(\nu l) \quad . \quad (219)$$

Man kann den Betrag y_0 als das Verhältnis des primären Stromes J_{10} zur Spannung P_{10} durch Messung ermitteln, und wenn gleichzeitig die Leerlaufleistung W_0 gemessen wird, ergibt sich der Phasenwinkel φ_0 aus

$$\cos \varphi_0 = \frac{W_0}{P_{10} J_{10}} .$$

2. Kurzschluß. Bei kurzgeschlossenem Leitungsende ist $P_2=0$. Schickt man durch die kurzgeschlossene Leitung den Strom J_2 , so seien Spannung und Strom am Anfang P_{1k} und J_{1k} ; aus Gl. 205 c ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_{1k} &= \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S} \frac{\varepsilon^{\nu l} - \varepsilon^{-\nu l}}{2} = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S} \mathfrak{Sin}(\nu l) \\ \mathfrak{S}_{1k} &= \mathfrak{S}_2 \frac{\varepsilon^{\nu l} + \varepsilon^{-\nu l}}{2} = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{Cof}(\nu l) \end{aligned} \right\} \dots (220)$$

Das Verhältnis dieser beiden Größen ist die Kurzschlußimpedanz z_k . Es ist

$$z_k = z_k e^{j\varphi_k} = \frac{\mathfrak{P}_{1k}}{\mathfrak{S}_{1k}} = \mathfrak{S} \frac{\varepsilon^{\nu l} - \varepsilon^{-\nu l}}{\varepsilon^{\nu l} + \varepsilon^{-\nu l}} = \mathfrak{S} \mathfrak{I}g(\nu l) \quad . \quad (221)$$

Man erhält wieder den Betrag z_k als Verhältnis von P_{1k} zu J_{1k} , die gemessen werden können, und durch Messung der Leistung bei Kurzschluß W_k

$$\cos \varphi_k = \frac{W_k}{P_{1k} J_{1k}} .$$

Aus den beiden Gl. 219 und 221 ergibt sich nun

$$\sqrt{\eta_0 \delta_k} = \frac{\varepsilon^{\nu l} - \varepsilon^{-\nu l}}{\varepsilon^{\nu l} + \varepsilon^{-\nu l}} = \mathfrak{I}g(\nu l) \quad \dots \quad (222)$$

und

$$\sqrt{\frac{\delta_k}{\eta_0}} = \mathfrak{J} = \sqrt{\frac{(R + j \omega L)}{(A + j \omega C)}} \quad \dots \quad (223)$$

Um aus Gleichung 222

$$\nu = (a + jb) = \sqrt{(R + j \omega L)(A + j \omega C)} \quad \dots \quad (224)$$

zu ermitteln, multipliziert man Zähler und Nenner $\varepsilon^{\nu l}$ und erhält

$$\sqrt{\eta_0 \delta_k} = \frac{\varepsilon^{2\nu l} - 1}{\varepsilon^{2\nu l} + 1},$$

oder

$$\varepsilon^{2\nu l} = \frac{1 + \sqrt{\eta_0 \delta_k}}{1 - \sqrt{\eta_0 \delta_k}} \quad \dots \quad (222a)$$

woraus ν ermittelt werden kann. Nach Gl. 223 und 224 ist dann

$$\left. \begin{aligned} (R + j \omega L) &= \nu \mathfrak{J} \\ (A + j \omega C) &= \frac{\nu}{\mathfrak{J}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (225)$$

Zur Ausrechnung setze man

$$\sqrt{\eta_0 \delta_k} = \sqrt{y_0 z_k} \varepsilon^{j \frac{(\varphi_0 + \varphi_k)}{2}} = \sqrt{y_0 z_k} \left(\cos \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} + j \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right),$$

daher nach Gl. 222a und 224

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2\nu l} = \varepsilon^{2(a+jb)l} &= \frac{1 + \sqrt{\eta_0 \delta_k}}{1 - \sqrt{\eta_0 \delta_k}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{y_0 z_k} \cos \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right) + j \sqrt{y_0 z_k} \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)}{1 - \sqrt{y_0 z_k} \cos \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right) - j \sqrt{y_0 z_k} \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)} \\ &= \frac{1 - y_0 z_k + 2j \sqrt{y_0 z_k} \sin \left(\frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2} \right)}{1 + y_0 z_k - 2 \sqrt{y_0 z_k} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}}. \end{aligned}$$

Nun ist auf der linken Seite

$$\varepsilon^{2\nu l} = \varepsilon^{2(a+jb)l} = \varepsilon^{2al} (\cos 2bl + j \sin 2bl).$$

Setzt man die reellen und die imaginären Teile auf beiden Seiten einander gleich, so wird durch Division

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2bl &= \frac{2\sqrt{y_0 z_k} \sin \frac{(\varphi_0 + \varphi_k)}{2}}{1 - y_0 z_k} \\ b &= \frac{1}{2l} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{y_0 z_k} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}}{1 - y_0 z_k} \dots \quad (226) \end{aligned}$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2al} &= \frac{\sqrt{(1 - y_0 z_k)^2 + 4y_0 z_k \sin^2 \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}}}{1 + y_0 z_k - 2\sqrt{y_0 z_k} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}} \\ a &= \frac{1}{2l} \ln \frac{\sqrt{(1 - y_0 z_k)^2 + 4y_0 z_k \sin^2 \frac{(\varphi_0 + \varphi_k)}{2}}}{1 + y_0 z_k - 2\sqrt{y_0 z_k} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_k}{2}} \quad (227) \end{aligned}$$

Hiermit sind a und b und damit $\nu = (a + jb)$ bestimmt. Aus Gl. 223 ergibt sich ferner

$$\mathfrak{Z} = Z \varepsilon^{j\zeta} = \sqrt{\frac{\partial_k}{y_0}} = \sqrt{\frac{z_k}{y_0}} \varepsilon^{j \frac{\varphi_k - \varphi_0}{2}}$$

und mittels der Gl. 225 können nun R , A , L , C berechnet werden.

Strom- und Spannungsgleichungen mit den bei Leerlauf und bei Kurzschluß gemessenen Konstanten.

Es ist im Vorhergehenden gezeigt worden, daß der Zustand an den primären Klemmen bei Leerlauf und bei Kurzschluß gegeben ist durch die Konstanten y_0 und z_k und die ihnen zugehörigen Phasenwinkel φ_0 und φ_k , die alle durch Messung ermittelt und aus denen die Konstanten C , A , R , L berechnet werden können.

Bei der Konstruktion des Vektordiagramms war ferner auf Grund der Gl. 213 und 214 auf S. 201 darauf hingewiesen worden, daß die Ströme und Spannungen bei Belastung sich jeweils durch Addition der entsprechenden Werte bei Leerlauf und bei Kurzschluß ergeben. Handelt es sich nun darum, für irgendeinen Belastungszustand an den sekundären Klemmen die Größen an den primären Klemmen zu kennen, ohne auf die Verteilung längs der ganzen Leitung einzugehen, so wird man von dieser Superposition unter Anwendung der direkt meßbaren Größen y_0 , z_k , φ_0 , φ_k Gebrauch machen. Die Gleichungen hierfür, wie sie von Franke und Breisig entwickelt wurden, ergeben sich wie folgt:

Aus Gl. 218 und 220, S. 205, geht hervor, daß das Verhältnis der primären Leerlaufspannung zur sekundären Spannung ebenso groß ist wie das Verhältnis des primären Kurzschlußstromes zum sekundären Strom; nämlich

$$\frac{\mathfrak{P}_{10}}{\mathfrak{P}_2} = \frac{\mathfrak{S}_{1k}}{\mathfrak{S}_2} = \mathfrak{C}0\mathfrak{f}(\nu l) = \mathfrak{C}.$$

Dieses Verhältnis, das mit \mathfrak{C} bezeichnet werden soll und das eine komplexe Zahl ist, läßt sich wie folgt durch die meßbaren Größen y_0 und z_k ausdrücken.

Nach Gl. 222 ist

$$\mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_k = \mathfrak{X}g^2(\nu l) = \frac{\mathfrak{C}\sin^2(\nu l)}{\mathfrak{C}0\mathfrak{f}^2(\nu l)}.$$

Nun ist für die Hyperbelfunktionen:

$$\mathfrak{C}\sin^2(\nu l) - \mathfrak{C}0\mathfrak{f}^2(\nu l) = -1,$$

daher

$$\mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_k = \frac{\mathfrak{C}0\mathfrak{f}^2(\nu l) - 1}{\mathfrak{C}0\mathfrak{f}^2(\nu l)} = 1 - \frac{1}{\mathfrak{C}0\mathfrak{f}^2(\nu l)},$$

oder

$$\mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_k = 1 - \frac{1}{\mathfrak{C}^2} \dots \dots \dots (228)$$

Hiermit ist nun nach Gl. 218 bzw. 220

bei Leerlauf $\mathfrak{P}_{10} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{S}_{10} = \mathfrak{P}_{10} \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C} \mathfrak{y}_0,$

bei Kurzschluß $\mathfrak{P}_{1k} = \mathfrak{S}_{1k} \mathfrak{z}_k = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C} \mathfrak{z}_k, \quad \mathfrak{S}_{1k} = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C},$

und durch Addition gilt bei Belastung:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &= \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C} + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C} \mathfrak{z}_k \\ \mathfrak{S}_1 &= \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C} \mathfrak{y}_0 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (229)$$

Diese Gleichungen sind ein Spezialfall der Gleichungen des allgemeinen Wechselstromkreises, sie werden mit diesem in Kap. XII ausführlich diskutiert.

66. Über die Berechnung der Leitungskonstanten bei Mehrfachleitungen.

Die Berechnung der Erscheinungen auf Leitungen mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität wurde auf die vier Größen C, A, L, R zurückgeführt, die man als „Betriebskonstanten“ bezeichnet, und die Rechnung wurde an dem einfachen Beispiel einer Schleife, bestehend aus Hin- und Rückleitung, erläutert.

Bei Vereinigung einer größeren Anzahl Leiter, wie bei Mehr-

phasenleitungen, Telephonkabeln usf., die man als Mehrfachleitungssysteme bezeichnet, und die aus einer Anzahl Leiter und eventuell einer leitenden Hülle oder auch der Erde als Rückleitung bestehen, sind die in die Rechnung einzusetzenden Betriebskonstanten je nach der Betriebsart gewisse Kombinationen von anderen, den Fundamentalkonstanten.

Eine vollständige Erläuterung des Zusammenhanges dieser Größen ist von Emde und Diesselhorst, ETZ 1909, gegeben; es sei darauf verwiesen und hier daraus nur folgendes angegeben.

a) Kapazität und Ableitung: Als Fundamentalkonstanten betrachtet man die „Kapazität“ C und die „Ableitung“ A eines Leiters, die sich ergeben, wenn der betrachtete Leiter die Spannung p gegen Erde hat, während alle anderen einschließlich der Hülle keine Spannung gegen Erde haben. Die elektrische Energie des Systems ist dann

$$U_e = \frac{1}{2} p^2 C,$$

der Energieverlust im Dielektrikum in der Zeiteinheit

$$U_{ev} = p^2 A.$$

Die Ladung des Leiters ist

$$q = Cp,$$

der Ladungsverlust in der Zeiteinheit

$$q_v = Ap.$$

Sind in einem System von n Leitern die Spannungen der Leiter gegen Erde p_1, p_2, \dots, p_n , so ist nach Maxwell die Ladung des μ ten Leiters:

$$q_\mu = c_{\mu 1} p_1 + c_{\mu 2} p_2 + \dots + c_{\mu n} p_n$$

und sein Ladungsverlust in der Zeiteinheit

$$q_{v\mu} = a_{\mu 1} p_1 + a_{\mu 2} p_2 + \dots + a_{\mu n} p_n.$$

$c_{\mu\nu}$ und $a_{\mu\nu}$ sind die Kapazitäts- bzw. Ableitungskoeffizienten, und es ist

$$c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}, \quad a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}.$$

Sie können auf die zuvor bestimmte Kapazität und Ableitung eines Leiters durch folgende Messungen zurückgeführt werden.

1. Sind alle Leiter außer dem betrachteten (μ) mit der Hülle (Erde) leitend verbunden, während er die Spannung p_μ gegen Erde hat, so ist

$$q_\mu = p_\mu c_{\mu\mu}.$$

$c_{\mu\mu}$ ist die zuvor betrachtete Kapazität C_μ des Leiters μ .

2. Sind alle Leiter, außer zweien (μ und ν), mit der Hülle (Erde) verbunden und haben beide die Spannung $p_\mu = p_\nu = p$, so ist die Summe ihrer Ladungen

$$q_\mu + q_\nu = (c_{\mu\mu} + 2c_{\mu\nu} + c_{\nu\nu})p.$$

$$C_{\mu\nu} = c_{\mu\mu} + 2c_{\mu\nu} + c_{\nu\nu}$$

ist die Kapazität der beiden vereinigten Leiter μ und ν . Die sämtlichen $\frac{n(n+1)}{2}$ Kapazitätskoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} c_{\mu\mu} &= C_\mu \\ c_{\mu\nu} &= -\frac{C_\mu + C_\nu - C_{\mu\nu}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (230)$$

können also aus ebenso viel meßbaren Kapazitäten gefunden werden. Analog gilt für die Ableitungskoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} a_{\mu\mu} &= A_\mu \\ a_{\mu\nu} &= -\frac{A_\mu + A_\nu - A_{\mu\nu}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (231)$$

Beispiele: Die Einphasenleitung mit symmetrischer Anordnung der Leiter.

Ist p die Spannung zwischen beiden Leitern, die „Betriebsspannung“, so ist die Spannung des Hinleiters gegen Erde

$$p_1 = \frac{p}{2},$$

die des Rückleiters

$$p_2 = -\frac{p}{2}.$$

Wegen der Symmetrie ist

$$C_1 = C_2 = c_{11} = c_{22},$$

so ist

$$c_{12} = -\frac{C_1 + C_2 - C_{12}}{2} = -\left(C_1 - \frac{C_{12}}{2}\right),$$

daher

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11}p_1 + c_{12}p_2 \\ &= (c_{11} - c_{12})\frac{p}{2} = \left[C_1 + \left(C_1 - \frac{C_{12}}{2}\right)\right]\frac{p}{2} \\ &= \left(C_1 - \frac{C_{12}}{4}\right)p, \end{aligned}$$

ebenso

$$q_2 = -\left(C_1 - \frac{C_{12}}{4}\right)p = -q_1$$

Die Betriebskapazität ist daher

$$C = \frac{q_1}{p} = \left(C_1 - \frac{C_{12}}{4} \right) \dots \dots \dots (232)$$

Symmetrische Dreiphasenleitung bei symmetrischem Betrieb (bei großer Entfernung der Leiter gegen Erde).

Für die Phasenspannungen ist

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

Infolge der symmetrischen Anordnung ist

$$c_{11} = C_1 = c_{22} = C_2 = c_{33} = C_3,$$

und

$$C_{12} = C_{23} = C_{31}$$

$$c_{12} = -\frac{C_1 + C_2 - C_{12}}{2} = -\left(C_1 - \frac{C_{12}}{2} \right) \\ = c_{23} = c_{31},$$

daher

$$q_1 = c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + c_{13}p_3 \\ = c_{11}p_1 + c_{12}(p_2 + p_3) \\ = p_1(c_{11} - c_{12}) \\ = p_1 \left[C_1 + \left(C_1 - \frac{C_{12}}{2} \right) \right] = p_1 \left(2C_1 - \frac{C_{12}}{2} \right).$$

Die Betriebskapazität, bezogen auf die Phasenspannung als Betriebsspannung, ist

$$C = 2C_1 - \frac{C_{12}}{2} \dots \dots \dots (233)$$

Bei einer atmosphärischen Entladung (s. Kap. XIV) erhalten die verschiedenen Leiter die gleiche Spannung gegen Erde. Bei einer Einphasenleitung wird hier die Betriebskapazität

$$C = C_{12} \dots \dots \dots (234)$$

Bei einer Dreiphasenleitung wird

$$q_1 = (c_{11} + c_{12} + c_{23})p \\ = (-C_1 + C_{12})p.$$

Die Ladung aller Leitungen ist $3q_1$, daher hierfür die Kapazität

$$3(-C_1 + C_{12}) \dots \dots \dots (235)$$

b) Induktivität und Widerstand. Als Fundamentalkonstanten gelten „Induktivität“ und Widerstand einer Schleife, die durch Verbinden der Enden zweier Einzelleiter entsteht; fließt in dieser

Schleife der Strom i , während alle übrigen Schleifen stromlos sind, so ist die magnetische Energie des Systems

$$U_m = \frac{1}{2} L i^2.$$

Der Energieverlust, der sich in der Zeiteinheit in Wärme umsetzt, ist

$$U_{mv} = R i^2.$$

Der Induktionsfluß der Schleife ist

$$\Phi = L i,$$

der induktive Spannungsabfall in der Schleife ist

$$\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

der Ohmsche Spannungsabfall in der Schleife ist

$$\chi = R i.$$

Da die Spannungen von der Hülle aus gerechnet werden, ist es zweckmäßig, auch den Induktionsfluß von der Hülle aus zu rechnen. Kennt man die n Induktionsflüsse $\Phi_{\mu 0}$ der n Schleifen, die aus Hülle und den n Einzelleitern gebildet werden, so berechnet sich der Induktionsfluß einer Schleife aus den Leitern μ und ν als Differenz der Induktionsflüsse der Schleifen $\mu 0$ und $\nu 0$ (wobei der Index 0 die Hülle bezeichnet)

$$\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\mu 0} - \Phi_{\nu 0}.$$

Es kann nun gesetzt werden

$$\Phi_{\mu 0} = l_{\mu 1} i_1 + l_{\mu 2} i_2 + \dots + l_{\mu n} i_n,$$

wobei

$$l_{\mu\nu} = l_{\nu\mu}.$$

Die Induktionskoeffizienten $l_{\mu\nu}$ können durch folgende Messungen ermittelt werden:

1. Man bilde eine Schleife aus dem Leiter μ und der Hülle, während alle anderen Schleifen offen bleiben, dann sind alle i Null außer $i_\mu = -i_0$.

Es wird

$$\Phi_{\mu 0} = l_{\mu\mu} i_\mu.$$

$l_{\mu\mu}$ ist die Induktivität der Schleife $\mu - 0$, sie werde mit $L_{\mu 0}$ bezeichnet.

$$l_{\mu\mu} = L_{\mu 0} \dots \dots \dots (236)$$

2. Bildet man die Schleife $\mu - \nu$, während alle anderen Schleifen offen sind, so sind alle Ströme Null, außer $i_\mu = -i_\nu = i$.

Es wird

$$\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\mu 0} - \Phi_{\nu 0} = (l_{\mu\mu} - 2l_{\mu\nu} + l_{\nu\nu})i.$$

Die Induktivität der Schleife wird daher

$$L_{\mu\nu} = l_{\mu\mu} - 2l_{\mu\nu} + l_{\nu\nu} \dots \dots \dots (237)$$

Aus Gl. 236 und 237 wird

$$l_{\mu\nu} = \frac{L_{\mu 0} + L_{\nu 0} - L_{\mu\nu}}{2} \dots \dots \dots (238)$$

$l_{\mu\nu}$ ist der gegenseitige Induktionskoeffizient der Schleifen $\mu - 0$ und $\nu - 0$.

Die Widerstände lassen sich am einfachsten als Schleifenwiderstände $R_{\mu\nu}$ bestimmen. Sind $R_\mu, R_\nu \dots$ die Widerstände der Einzelleiter, so ist

$$R_{\mu\nu} = R_\mu + R_\nu, \quad R_{\nu\lambda} = R_\nu + R_\lambda, \quad R_{\lambda\mu} = R_\lambda + R_\mu$$

und

$$R_\lambda = \frac{R_{\lambda\mu} + R_{\lambda\nu} - R_{\mu\nu}}{2} \text{ usf.}$$

Der Ohmsche Spannungsabfall einer Schleife ist

$$\chi_{\mu\nu} = R_\mu i_\mu - R_\nu i_\nu.$$

Setzt man

$$\chi_{\mu\nu} = \chi_{\mu 0} - \chi_{\nu 0}$$

$$\chi_{\mu 0} = r_{\mu 1} i_1 + r_{\mu 2} i_2 + \dots + r_{\mu n} i_n,$$

worin

$$r_{\mu\nu} = \frac{R_{\mu 0} + R_{\nu 0} - R_{\mu\nu}}{2}$$

$$r_{\mu\mu} = 0$$

ist, so hat man eine analoge Darstellung wie für die Induktivitäten. Die Koeffizienten $r_{\mu\nu}$ können aus den Einzelwerten berechnet werden.

Beispiele: Für die Einphasenleitung ist $i_1 + i_2 = 0$.

Der Fluß durch die Schleife ist

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \Phi_{10} - \Phi_{20} \\ &= l_{11} i_1 + l_{12} i_2 - l_{22} i_2 - l_{21} i_1 \\ &= i_1 (l_{11} + l_{22} - 2l_{12}). \end{aligned}$$

Es ist

$$l_{11} = L_{10} = l_{22} = L_{20}$$

$$l_{12} = \frac{L_{10} + L_{20} - L_{12}}{2} = \frac{2L_{10} - L_{12}}{2}.$$

Die Betriebsinduktivität ist

$$L = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = l_{11} + l_{22} - 2l_{12} = 2L_{10} - \frac{2(2L_{10} - L_{12})}{2} = L_{12}. \quad (239)$$

Für die symmetrische Dreiphasenleitung, die weit von der Erde entfernt ist, ist

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Aus Symmetriegründen ist

$$l_{11} = L_{10} = l_{22} = L_{20} = l_{33} = L_{30},$$

$$l_{12} = l_{23} = l_{31} = \frac{2L_{10} - L_{12}}{2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= i_1 l_{11} + i_2 l_{12} + i_3 l_{13} \\ &= i_1 L_{10} + (i_2 + i_3) \left(\frac{2L_{10} - L_{12}}{2} \right), \end{aligned}$$

oder, da $(i_2 + i_3) = -i_1$

$$\Phi_{10} = i_1 \frac{L_{12}}{2}.$$

Die Betriebsinduktivität für eine Phase ist daher

$$L = \frac{L_{12}}{2}. \quad \dots \dots \dots (240)$$

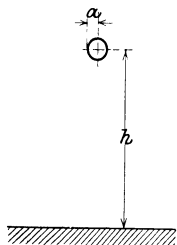


Fig. 137.

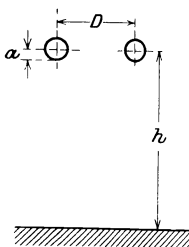


Fig. 138.

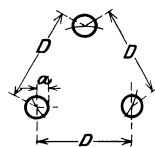


Fig. 139.

Bei den durch atmosphärische Ladung entstehenden Wellen erhalten alle 3 Leitungen die gleiche Spannung und führen daher auch den gleichen Strom. Es wird $i_1 = i_2 = i_3 = i$. Daher

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= i(l_{11} + l_{12} + l_{13}) \\ &= i[L_{10} + (2L_{10} - L_{12})] \\ &= i(3L_{10} - L_{12}). \end{aligned}$$

Für diesen Fall ist also $L = (3L_{10} - L_{12})$ die Betriebsinduktivität auf den Strom einer Leitung bezogen.

Wir geben in nachstehender Tabelle eine Zusammenstellung der Betriebskapazitäten und Induktivitäten der gebräuchlichsten Leiteranordnungen¹⁾.

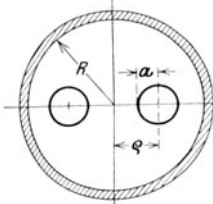


Fig. 140.

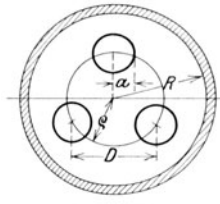


Fig. 141.

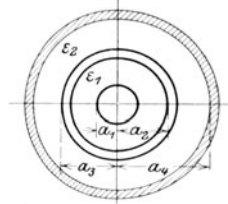


Fig. 142.

	<i>C</i> Mfd/km	<i>L</i> Henry/km
1 Draht, Erde als Rückleitung (Fig. 137)	$\frac{1}{2 \ln \frac{R}{a}} \cdot \frac{1}{9}$	$\left(4 \ln \frac{h}{a} + 0,5\right) 10^{-4}$
Einphasenfreileitung (Fig. 138)	$\frac{1}{4 \ln \frac{D}{a}} \cdot \frac{1}{9}$	$\left(4 \ln \frac{D}{a} + 1\right) 10^{-4}$
Dgl. unter Berücksichtigung der Erde	$\frac{1}{2 \ln \left[\frac{\left(\frac{2h}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{2h}{D}\right)^2} \right]} \cdot \frac{1}{9}$	
Symmetrische Dreiphasenfreileitung pro Phase (Fig. 139)	$\frac{1}{2 \ln \frac{D}{a}} \cdot \frac{1}{9}$	$\left(2 \ln \frac{D}{a} + 0,5\right) 10^{-4}$
Einphasenkabel, Mantel geerdet (Fig. 140)	$\frac{\epsilon}{4 \ln \left(\frac{2q}{a} \frac{R^2 - q^2}{R^2 + q^2} \right)} \cdot \frac{1}{9}$	$\left(4 \ln \frac{2q}{a} + 1\right) 10^{-4}$
Symmetrisches Dreiphasenkabel, Mantel geerdet (Fig. 141)	$\frac{\epsilon}{\ln \left[\frac{3q^2}{a^2} \frac{(R^2 - q^2)^3}{R^6 - q^6} \right]} \cdot \frac{1}{9}$	$\left(2 \ln \frac{D}{a} + 0,5\right) 10^{-4}$
Konzentrisches Kabel (Fig. 142)	a) $\frac{\epsilon_1}{\ln \frac{a_2}{a_1}} \cdot \frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{9} \left[\frac{\epsilon_1}{\ln \frac{a_2}{a_1}} + \frac{\epsilon_2}{\ln \frac{a_4}{a_3}} \right]$	$\left[2 \ln \frac{a_2}{a_1} + 2 \frac{a_3^4}{(a_3^2 - a_2^2)^2} \ln \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_3^2}{a_3^2 - a_2^2} \right] 10^{-4}$
Bei geerdetem Mantel ist a) Kap. des inneren Leiters, b) Kap. des äußeren Leiters		

¹⁾ S. Breisig, ETZ 1898; Lichtenstein, ETZ 1904; Orlich, ETZ 1908, S. 310; Orlich, Kapazität und Induktivität.

Zwölftes Kapitel.

Die Gleichungen und Diagramme des allgemeinen Wechselstromkreises.

67. Leerlauf und Kurzschluß des allgemeinen Wechselstromkreises. — 68. Superposition von Leerlauf und Kurzschluß zum Belastungszustand. — 69. Experimentelle Bestimmung der Konstanten. — 70. Spannungsänderung. — 71. Berechnung der maximalen abgegebenen Leistung. — 72. Das Arbeitsdiagramm des allgemeinen Wechselstromkreises. — 73. Beispiele.

67. Leerlauf und Kurzschluß des allgemeinen Wechselstromkreises.

In Kap. IX Seite 141 ist für den Transformator, in Kap. XI Seite 201 für eine Fernleitung gezeigt worden, daß ihre Wirkungsweise sich durch Größen darstellen läßt, die einem Leerlaufversuch und einem Kurzschlußversuch entnommen werden. J. L. la Cour¹⁾ hat diesen engen Zusammenhang für viele Stromkreise und elektromagnetische Maschinen nachgewiesen, und das Ergebnis ist, daß mit wenigen Ausnahmen für die meisten Wechselstromkreise dieselben Grundgleichungen aufgestellt werden können, deren Konstanten durch den Leerlauf- und den Kurzschlußversuch bestimmt werden; sie führen alle auf dieselben Arbeitsdiagramme, so daß man sie gemeinsam als „allgemeinen Wechselstromkreis“ behandelt.

Unter allgemeinem Wechselstromkreis versteht man hierbei Anordnungen, bei denen elektrische Energie übertragen wird, gleichviel ob es sich um die Übertragung durch eine Leitung oder um die Umwandlung von elektrischer Energie in einem Transformator oder um die Umformung von elektrischer Energie in mechanische oder umgekehrt handelt. Voraussetzung ist jedoch, daß die Konstanten des Systems — Widerstände und Reaktanzen — unveränderlich sind.

¹⁾ s. „Leerlauf und Kurzschluß“ 1904.

Die in mechanische Energie umgewandelte elektrische Energie erscheint in den Gleichungen und Ersatzstromkreisen als in einem Ohmschen Widerstand verbrauchte Leistung; ist dieser Widerstand negativ, so bedeutet dies, daß die der mechanischen Energie entsprechende elektrische Energie nicht vom Netz aufgenommen, sondern an dieses abgegeben wird, daß die Maschine daher ein Generator ist.

Gehen wir von der Ersatzschaltung Fig. 143 des allgemeinen Wechselstromkreises aus. Zwischen den Klemmen $B-B$ sei die Belastung eingeschaltet, während die Klemmen $A-A$ an das Netz angeschlossen sind. An den Klemmen $A-A$ sei die primäre Spannung p_1 , an den Klemmen $B-B$ die sekundäre Spannung p_2 .

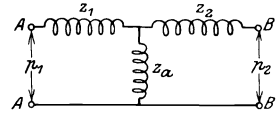


Fig. 143.

Leerlauf. Die sekundären Klemmen BB sind unterbrochen, die primäre Spannung werde so eingestellt, daß an den sekundären Klemmen die effektive Spannung P_2 besteht. In dem „Verluststromkreis“ mit der Impedanz z_a fließt der „Leerlaufstrom“ $J_{10} = \frac{P_2}{z_a}$,

der (s. Fig. 144) gegen P_2 um φ_a verzögert sei. Addiert man zu P_2 den Spannungsabfall $J_{10}z_1$, so erhält man die primäre „Leerlaufspannung“ P_{10} . Das Verhältnis von P_{10} zu P_2 sei C_0 , die Verzögerung von P_{10} gegen P_2 sei γ_0 .

$$\frac{P_{10}}{P_2} = C_0 \dots \dots \dots (241)$$

Es ist nun

$$J_{10} = \frac{P_2}{z_a} = \frac{P_{10}}{C_0 z_a} = \frac{P_{10}}{z_0} \dots \dots (242)$$

worin

$$z_0 = C_0 z_a \dots \dots \dots (243)$$

die „Leerlaufimpedanz“ ist. J_{10} eilt gegen P_{10} um

$$\varphi_0 = \varphi_a - \gamma_0 \dots \dots \dots (244)$$

nach.

Kurzschluß. Die sekundären Klemmen sind widerstandslos verbunden, und die primäre Spannung sei so eingestellt, daß über die sekundären Klemmen der Strom J_2 fließt. An der Impedanz z_2 besteht die Spannung $J_2 z_2$, die (s. Fig. 145) gegen J_2 um $\varphi_2 = \arctg \frac{X_2}{R_2}$ voreilt.

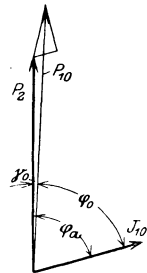


Fig. 144.

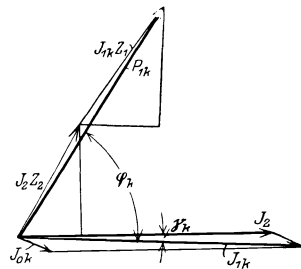


Fig. 145.

In dem parallelgeschalteten Verluststromkreis fließt daher der Strom

$$J_{0k} = J_2 \frac{z_2}{z_a}$$

Die Summe aus J_2 und J_{0k} ist der primäre Strom J_{1k} bei Kurzschluß. Addiert man zur Spannung $J_2 z_2$ die Spannung $J_{1k} z_1$, die gegen J_{1k} um $\chi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1}$ voreilt, so ergibt sich als Summe die primäre „Kurzschlußspannung“ P_{1k} . Das Verhältnis von J_{1k} zu J_2 sei C_k , die Verzögerung von J_{1k} gegen J_2 sei γ_k .

$$J_{1k} = C_k J_2 \dots \dots \dots (245)$$

P_{1k} eilt gegen J_{1k} um φ_k vor, gegen J_2 um $\varphi_k - \gamma_k$. Es sei

$$P_{1k} = J_{1k} z_k \dots \dots \dots (246)$$

worin z_k die „Kurzschlußimpedanz“ ist, daher nach Gl. 245

$$P_{1k} = J_2 C_k z_k \dots \dots \dots (247)$$

68. Superposition von Leerlauf und Kurzschluß zum Belastungszustand.

Bei Belastung besteht an den sekundären Klemmen die Spannung P_2 und der Strom J_2 , ihre Phasenverschiebung ist φ_2 . P_2 bedingt primär eine Spannung P_{10} und einen Strom J_{10} , J_2 die Spannung P_{1k} und den Strom J_{1k} , die durch Gl. 241, 242, 245 und 247 bestimmt sind. Da die Gleichungen linear sind, ergeben sich Spannung und Strom an den primären Klemmen durch Addition der

entsprechenden Größen bei Leerlauf und bei Kurzschluß; es wird:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_{10} + \mathfrak{P}_{1k} = \mathfrak{C}_0 \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{C}_k \mathfrak{S}_2 \mathfrak{d}_k \quad (248)$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_{10} + \mathfrak{S}_{1k} = \mathfrak{P}_2 \frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{d}_0} + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k \quad (249)$$

Das Vektordiagramm Fig. 146 zeigt diese Addition. P_{1k} eilt gegen J_{1k} um φ_k vor, J_{1k} ist gegen J_2 um γ_k verzögert, also gegen P_2 um $\varphi_2 + \gamma_k$, und da P_2 gegen P_{10} um γ_0 voreilt, eilt P_{1k} gegen P_{10} um

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + (\gamma_0 - \gamma_k) \quad (250)$$

vor. Bei konstanter Phasenverschie-

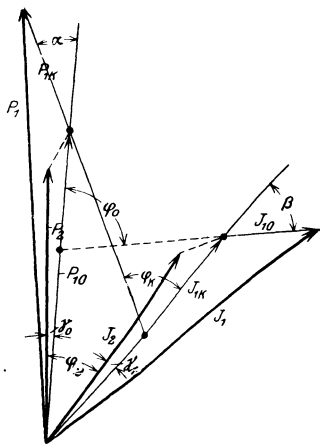


Fig. 146.

bung φ_2 ist dieser Winkel konstant. Ebenso eilt J_{1k} gegen J_{10} um

$$\beta = \varphi_0 - \varphi_2 + (\gamma_0 - \gamma_k) \dots \dots \dots (251)$$

vor, der ebenfalls konstant ist, wenn es φ_2 ist.

Zwischen den vier Konstanten $\delta_0, \delta_k, \mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_k$ in Gl. 248 und 249 besteht eine weitere Beziehung, so daß aus drei Größen jeweils die vierte ermittelt werden kann.

Es war bei Leerlauf

$$\mathfrak{P}_{10} = \mathfrak{P}_2 + \frac{\mathfrak{P}_2}{\delta_a} \delta_1 = \mathfrak{P}_2 \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_a} \right) = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0,$$

daher
$$\mathfrak{C}_0 = 1 + \frac{\delta_1}{\delta_a} \dots \dots \dots (252)$$

und nach 243

$$\delta_0 = \mathfrak{C}_0 \delta_a \dots \dots \dots (243a)$$

Ferner ist bei Kurzschluß

$$\mathfrak{S}_{1k} = \mathfrak{S}_2 + \frac{\mathfrak{S}_2 \delta_2}{\delta_a} = \mathfrak{S}_2 \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_a} \right) = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k,$$

daher
$$\mathfrak{C}_k = 1 + \frac{\delta_2}{\delta_a} \dots \dots \dots (253)$$

Da
$$\mathfrak{P}_{1k} = \mathfrak{S}_{1k} \delta_1 + \mathfrak{S}_2 \delta_2 = \mathfrak{S}_{1k} \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_k} \right) = \mathfrak{S}_{1k} \delta_k,$$

ist
$$\delta_k = \delta_1 + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_k} \dots \dots \dots (254)$$

Aus Gl. 243 a und 254 wird unter Berücksichtigung von 252 und 253

$$\begin{aligned} \frac{\delta_k}{\delta_0} &= \left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_k} \right) \frac{1}{\mathfrak{C}_0 \delta_a} = \frac{\delta_1}{\mathfrak{C}_0 \delta_a} + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k \delta_a} \\ &= \frac{\mathfrak{C}_0 - 1}{\mathfrak{C}_0} + \frac{\mathfrak{C}_k - 1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} = 1 - \frac{1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} \\ &\left(1 - \frac{\delta_k}{\delta_0} \right) \mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k = 1 \dots \dots \dots (255) \end{aligned}$$

Die Gl. 248, 249 und 255 sind die drei Hauptgleichungen des allgemeinen Wechselstromkreises.

69. Experimentelle Bestimmung der Konstanten.

Nach Gl. 255 ist

$$\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k = \frac{1}{1 - \frac{\delta_k}{\delta_0}}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_k} = \mathfrak{S}_k$, so wird

$$C_0 C_k = \frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_k} \frac{\delta_k}{\mathfrak{P}_1} = \frac{\mathfrak{S}_k}{\mathfrak{S}_k - \mathfrak{S}_0} \dots \dots (255a)$$

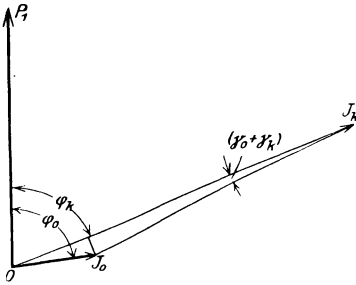


Fig. 147.

worin J_k der Kurzschlußstrom, J_0 der Leerlaufstrom bei der primären Spannung P_1 ist, die um φ_k bzw. φ_0 gegen P_1 verzögert sind. Durch Strom-, Spannungs- und Leistungsmessung bei Kurzschluß und bei Leerlauf können J_k , φ_k und J_0 , φ_0 gemessen werden. Trägt man J_k und J_0 unter φ_k bzw. φ_0 gegen P_1 in das Vektordiagramm Fig. 147 auf, so ist die geometrische

Differenz von J_k und J_0 die dritte Seite des Dreiecks OJ_0J_k . Daher wird nach Gl. 255a der Betrag

$$C_0 C_k = \frac{OJ_k}{J_0 J_k} = \frac{J_k}{\sqrt{J_k^2 + J_0^2 - 2J_0 J_k \cos(\varphi_0 - \varphi_k)}} (255b)$$

oder angenähert

$$C_0 C_k \approx \frac{J_0}{J_k - J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_k)} \dots \dots (255c)$$

Der Winkel zwischen \mathfrak{S}_k und $\mathfrak{S}_k - \mathfrak{S}_0$ ist

$$(\gamma_0 + \gamma_k) = \sphericalangle OJ_k J_0$$

$$\text{tg}(\gamma_0 + \gamma_k) = \frac{J_0 \sin(\varphi_0 - \varphi_k)}{J_k - J_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_k)} \dots \dots (256)$$

Mit den beiden Gleichungen 255b (oder c) und 256 kann das Produkt $C_0 C_k$ und die Summe $(\gamma_0 + \gamma_k)$ berechnet werden.

Die Einzelwerte können durch die Leerlauf- und die Kurzschlußmessung von der Sekundärseite getrennt werden.

Führt man den sekundären Klemmen die Spannung P_{20} bei offenen primären Klemmen zu, so ist der sekundäre Leerlaufstrom

$$\mathfrak{S}_{20} = \frac{\mathfrak{P}_{20}}{\delta_a + \delta_2} = \frac{\mathfrak{P}_{20}}{\delta_a \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_a}\right)} = \frac{\mathfrak{P}_{20}}{\delta_0'}$$

$$\delta_0' = \delta_a \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_a}\right)$$

ist die sekundäre Leerlaufimpedanz und es wird nach Gl. 253

$$\delta_0' = \delta_a \mathfrak{C}_k,$$

daher nach Gl. 243a

$$\frac{\delta_0'}{\delta_0} = \frac{\mathfrak{C}_k}{\mathfrak{C}_0} \dots \dots \dots (257)$$

Das Verhältnis der Beträge z_0' und z_0 gibt also das Verhältnis von C_k und C_0 , und es ist die Differenz der Phasenwinkel

$$\varphi_0' - \varphi_0 = \gamma_k - \gamma_0.$$

Da nun das Produkt $C_k C_0$ und $(\gamma_k + \gamma_0)$ bekannt sind, können C_k , C_0 , γ_k und γ_0 für sich berechnet werden.

Schließt man andererseits die primären Klemmen kurz, so erhält man bei der sekundären Kurzschlußspannung P_{2k} den sekundären Kurzschlußstrom J_{2k} . Für Fig. 143 ist dann die sekundäre Kurzschlußimpedanz

$$\delta_k' = \frac{\delta_1 \delta_a}{\delta_1 + \delta_a} + \delta_2 = \frac{\delta_1}{\mathfrak{C}_0} + \delta_2.$$

Nach Gl. 254 war

$$\delta_k = \delta_1 + \frac{\delta_2}{\mathfrak{C}_k} = \delta_1 + \frac{\delta_2 \delta_a}{\delta_2 + \delta_a},$$

daher

$$\frac{\delta_k'}{\delta_k} = \frac{\delta_a + \delta_2}{\delta_a + \delta_1} = \frac{\mathfrak{C}_k}{\mathfrak{C}_0} \dots \dots \dots (258)$$

Hiernach kann ebenfalls das Verhältnis der Beträge

$$\frac{C_k}{C_0} = \frac{z_k'}{z_k}$$

und

$$\gamma_k - \gamma_0 = \varphi_k' - \varphi_0$$

ermittelt werden. Zur vollständigen Bestimmung von C_0 , C_k , γ_0 , γ_k genügen drei Messungen, die vierte kann zur Kontrolle dienen.

Symmetrischer Stromkreis. Einen symmetrischen Stromkreis nennt man einen solchen, bei dem

$$z_1 = z_2, \quad \chi_1 = \chi_2,$$

daher

$$\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_k = \mathfrak{C}$$

und

$$\gamma_0 = \gamma_k = \gamma$$

ist. Bei der Leitung mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität war (s. S. 208)

$$\frac{\mathfrak{P}_{10}}{\mathfrak{P}_2} = \frac{\mathfrak{S}_{1k}}{\mathfrak{S}_2} = \mathfrak{C},$$

also $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_k = \mathfrak{C}$ gefunden, sie ist ein Beispiel für einen symmetrischen Stromkreis. Aber auch die meisten Transformatoren und Induktionsmotoren können als symmetrische Stromkreise betrachtet werden.

70. Spannungsänderung.

Für einen symmetrischen Stromkreis wird Gl. 248

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_k,$$

die in dem Diagramm Fig. 148 dargestellt ist.

Bei Leerlauf ist die primäre Spannung

$$P_{10} = P_2 C,$$

bei Belastung ist sie P_1 , die prozentuale Spannungsänderung von Leerlauf bis Belastung ist daher

$$\varepsilon = \frac{P_1 - P_{10}}{P_1} 100 = \frac{\frac{P_1}{C} - P_2}{\frac{P_1}{C}} = \frac{OB - OA}{OB} 100.$$

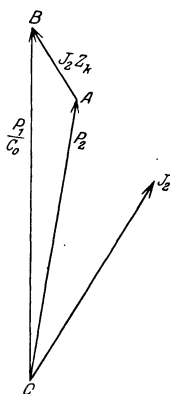


Fig. 148.

Hierdurch ist die Spannungsänderung des allgemeinen Wechselstromkreises auf die einer Leitung mit Widerstand und Selbstinduktion zurückgeführt und kann wie dort berechnet werden (s. Kap. IV, S. 48).

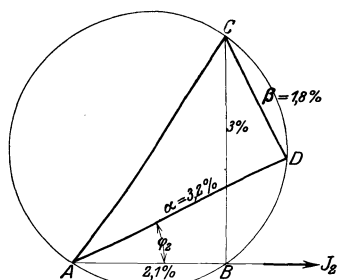


Fig. 149.

Beispiel. Bei einem Einphasen-Transformator für 200 KVA und 10000 Volt primär bei 50 Perioden wurde gemessen

$$J_{1k} = 20 \text{ Amp.}, \quad P_{1k} = 366 \text{ Volt},$$

$$W_k = 4200 \text{ Watt.}$$

Es ist daher bei normalem Strom die Widerstandsspannung bei Kurzschluß

$$J_{1k} z_k \cos \varphi_k = \frac{W_k}{J_{1k}} = \frac{4200}{20} = 210 \text{ Volt},$$

d. h. $2,1\%$ der Klemmenspannung, und die Reaktanzspannung

$$J_{1k} z_k \sin \varphi_k = \sqrt{P_{1k}^2 - \left(\frac{W_k}{J_{1k}}\right)^2} = \sqrt{366^2 - 210^2} = 300 \text{ Volt}$$

oder 3% der Klemmenspannung.

In Fig. 149 ist das Diagramm nach Kap. IV Fig. 31 aufgetragen. Für $\cos \varphi_2 = 0,9$ erhält man aus der Figur $\alpha = 3,2\%$, $\beta = 1,8\%$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \alpha + \frac{\beta^2}{200} = 3,2 + \frac{1,8^2}{200} \\ &= 3,216\% . \end{aligned}$$

Fig. 150 zeigt die Spannungserhöhung für nacheinander den Strom von $\cos \varphi_2 = 0$ bis 1.

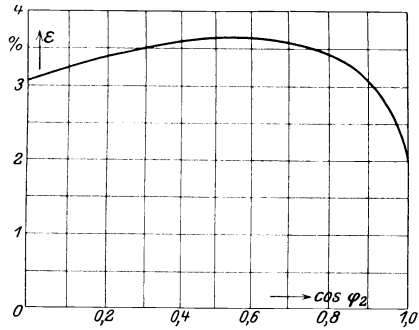


Fig. 150.

71. Berechnung der maximalen abgegebenen Leistung.

Die abgegebene Leistung ist

$$W_2 = P_2 J_2 \cos \varphi_2 .$$

Bei konstanter primärer Spannung und für eine bestimmte Phasenverschiebung φ_2 nimmt mit steigendem Belastungsstrom J_2 die Spannung P_2 ab. Die Leistung W_2 hat daher ein Maximum.

In der Gl. 248

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_k \delta_k ,$$

die durch das Spannungsdreieck Fig. 151 dargestellt wird, bilden die beiden Spannungsvektoren $P_{10} = P_2 C_0$ und $P_{1k} = J_2 C_k z_k$, wie auf S. 218 gezeigt wurde, den bei konstantem Wert von φ_2 konstanten Winkel

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + (\gamma_0 - \gamma_k) .$$

Das Produkt der beiden veränderlichen Spannungsvektoren ist der abgegebenen Leistung W_2 proportional und da ihre Summe konstant gleich P_1 ist, wird das Produkt am größten, wenn sie gleich sind: die abgegebene Leistung ist also am größten, wenn die Leerlaufspannung gleich der Kurzschlußspannung ist.

In diesem Falle, den Dreieck OBC in Fig. 151 darstellt, ist

$$P_{2m} C_0 = J_{2m} C_k z_k = \frac{P_1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} ,$$

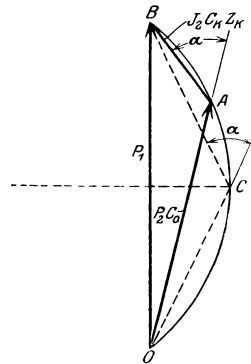


Fig. 151.

daher
$$W_{2max} = P_2 J_{2m} \cos \varphi_2 = \frac{P_1^2 \cos \varphi_2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} C_0 C_k z_k} \quad . . \quad (259)$$

Setzt man

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha = 1 + \cos (\varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k)$$

$$\frac{P_1}{z_k} = J_k,$$

und nach Gl. 255 c

$$C_0 C_k \simeq \frac{J_k}{J_k - J_0 \cos (\varphi_0 - \varphi_k)},$$

so wird

$$W_{2max} = \frac{P_1}{2} \frac{J_k - J_0 \cos (\varphi_0 - \varphi_k)}{1 + \cos (\varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k)} \cos \varphi_2 . \quad (260)$$

Die maximale Leistung hängt von φ_2 ab. Das absolute Maximum erhält man durch

$$\frac{d W_{2max}}{d \varphi_2} = 0,$$

wenn

$$- \sin \varphi_2 [1 + \cos \alpha] = \cos \varphi_2 \sin \alpha ,$$

oder

$$\varphi_2 = - (\varphi_k + \gamma_0 - \gamma_k)$$

$$\alpha = 2 (\varphi_k + \gamma_0 - \gamma_k) = - 2 \varphi_2 .$$

Da φ_2 negativ wird, ergibt sich das absolute Maximum der Leistung bei Voreilung von J_2 gegen P_2 .

72. Das Arbeitsdiagramm des allgemeinen Wechselstromkreises.

Das Arbeitsdiagramm stellt für konstante primäre Spannung P_1 die primären und sekundären Ströme, die sekundäre Spannung, die aufgenommene und die abgegebene Leistung dar, wenn die Belastung des Stromkreises sich bei konstanter Phasenverschiebung φ_2 ändert.

Die beiden Hauptgleichungen lauteten:

$$\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k z_k \quad \quad (248)$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{P}_2 \frac{\mathfrak{C}_0}{z_0} + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k \quad \quad (249)$$

Setzt man aus der ersten Gleichung

$$\mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k z_k$$

in die zweite ein, so wird

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_0} + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k \left(1 - \frac{\delta_k}{\delta_0}\right),$$

oder, da nach der dritten Hauptgleichung 255

$$1 - \frac{\delta_k}{\delta_0} = \frac{1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k}$$

ist, wird

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{\mathfrak{P}_1}{\delta_0} + \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{C}_0} \dots \dots \dots (249a)$$

Diese Gleichung sagt, daß der primäre Strom J_1 sich zusammensetzt aus dem Leerlaufstrom $J_0 = \frac{P_1}{z_0}$ und dem dem sekundären Strom proportionalen $\frac{J_2}{C_0}$. Trägt man (s. Fig. 152) $J_0 = OP_0$ um φ_0 gegen P_1 verzögert auf und sei P_0P ein beliebiger Wert von $\frac{J_2}{C_0}$, so ist OP der Primärstrom J_1 .

Für den Strom $\frac{J_2}{C_0}$ erhält man aus der ersten Hauptgleichung durch beiderseitige Division mit $\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k \delta_k$

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k \delta_k} = \frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{C}_k \delta_k} + \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{C}_0} \dots (248a)$$

Nach S. 218 bilden $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{P}_{10}$ und $\mathfrak{S}_2 \mathfrak{C}_k \delta_k = \mathfrak{P}_{1k}$ den konstanten Winkel

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k,$$

daher bilden die ihnen proportionalen Ströme $\frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{C}_k \delta_k}$ und $\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{C}_0}$ in Gl. 248a ebenfalls diesen Winkel.

Trägt man in Fig. 152 an $P_0P = \frac{J_2}{C_0}$ unter Winkel α die

Strecke $PP_k = \frac{P_2}{C_k z_k}$ an, so ist die Summe nach Gl. 248a konstant

$$P_0P_k = \frac{P_1}{C_0 C_k z_k}.$$

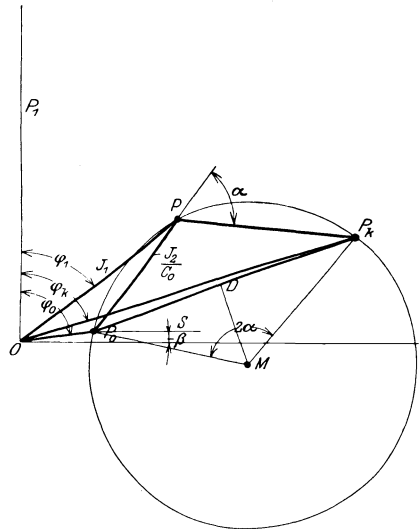


Fig. 152.

Die Strecken OP_0 und P_0P_k , und daher ihre Summe, sind konstante Ströme, es ist

$$OP_k = OP_0 + P_0P_k = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{z}_0} + \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k \mathfrak{z}_k} = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{z}_k} \left(\mathfrak{z}_k + \frac{1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} \right),$$

und da nach Gl. 255

$$\frac{\mathfrak{z}_k}{\mathfrak{z}_0} + \frac{1}{\mathfrak{C}_0 \mathfrak{C}_k} = 1,$$

wird

$$OP_k = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{z}_k} = \mathfrak{I}_k$$

der Kurzschlußstrom bei der Spannung P_1 , er ist gegen P_1 um φ_k verzögert.

Die Vektoren von den drei festen Punkten O , P_0 und P_k nach dem Punkt P stellen also $OP = J_1$, $P_0P = \frac{J_2}{C_0}$ und $PP_k = \frac{P_2}{C_k z_k}$ dar. Da P_0P und PP_k die konstante Summe P_0P_k haben und den konstanten Winkel α bilden, bewegt sich der Punkt P bei veränderlicher Belastung auf dem Kreis über P_0P_k als Sehne, mit dem Zentriwinkel $P_0MP_k = 2\alpha$. Jedem Punkt P des Kreises entspricht ein anderer Belastungszustand.

Konstruktion des Kreises.

Hat man durch Leerlauf- und Kurzschlußmessung $J_0, \varphi_0, J_k, \varphi_k$ ermittelt, so trägt man $J_k = OP_k$ unter φ_k und $J_0 = OP_0$ unter φ_0 gegen P_1 auf. Der Mittelpunkt M des Kreises liegt zunächst auf der Mittelsenkrechten DM auf P_0P_k . Als zweiten Ort kann man den Radius P_0M wählen, der mit der Sehne P_0P_k den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ bildet. Nach S. 220 ist

$$\sphericalangle OP_k P_0 = \gamma_0 + \gamma_k.$$

P_0P_k bildet daher mit der Richtung von P_1 , d. h. der Vertikalen in Fig. 152, den Winkel $\varphi_k - (\gamma_0 + \gamma_k)$ oder mit der Horizontalen

$$\sphericalangle P_k P_0 S = \frac{\pi}{2} - \varphi_k + \gamma_0 + \gamma_k.$$

Daher bildet der Radius P_0M mit der Horizontalen den Winkel $\beta = MP_0S = P_kP_0M - P_kP_0S$

$$= \frac{\pi}{2} - \alpha - \left[\frac{\pi}{2} - \varphi_k + \gamma_0 + \gamma_k \right] = \varphi_k - (\gamma_0 + \gamma_k) - \alpha.$$

Da

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k$$

ist, wird

$$\beta = \varphi_2 - 2\gamma_0 \dots \dots \dots (261)$$

Für einen symmetrischen Stromkreis ist $\gamma_0 = \gamma_k$, daher

$$2\gamma_0 = \gamma_0 + \gamma_k = OP_k P_0$$

$$\beta = \varphi_2 - (\gamma_0 + \gamma_k) = \varphi_2 - OP_k P_0.$$

Bei induktionsfreier Belastung, $\varphi_2 = 0$, wird

$$\beta = -2\gamma_0.$$

$P_0 M$ liegt dann oberhalb $P_0 S$ und für den symmetrischen Stromkreis wird

$$\beta = -OP_k P_0.$$

Darstellung der Leistungen im Diagramm.

Zugeführte Leistung. Der Vektor $OP = J_1$ bildet mit der Richtung der Klemmenspannung P_1 den primären Phasenverschiebungswinkel φ_1 . Die Ordinate $PN = J_1 \cos \varphi_1$ (Fig. 153) ist daher

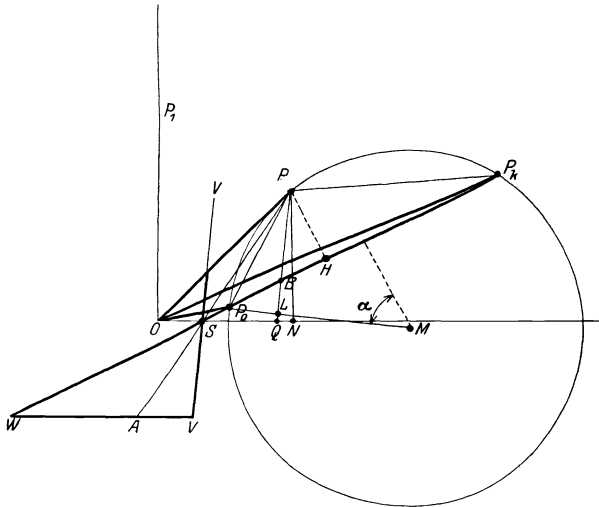


Fig. 153.

bei konstanter Spannung P_1 proportional der zugeführten Leistung $W_1 = P_1 J_1 \cos \varphi_1$. Der Abstand eines Kreispunktes von der Abszissenachse ist also ein Maß für die primär zugeführte Leistung. Für alle Kreispunkte, die unterhalb der Abszissenachse liegen, ist sie negativ, sie ist eine abgegebene Leistung, entsprechend einem generatorischen Betriebszustand.

Sekundär abgegebene Leistung. In dem Dreieck $P_0 P P_k$ war

$$P_0 P = \frac{J_2}{C_0} \quad \text{und} \quad P P_k = \frac{P_2}{C_k z_k},$$

daher ist der Inhalt des Dreiecks

$$\frac{1}{2} P_0 P \cdot P P_k \sin \alpha = \frac{1}{2} J_2 P_2 \frac{\sin \alpha}{C_0 C_k z_k}$$

proportional der Leistung $W_2 = P_2 J_2 \cos \varphi_2$ an den sekundären Klemmen. Da die Grundlinie des Dreiecks $P_0 P_k = \frac{P_1}{C_0 C_k z_k}$ ist, ist die Höhe

$$PH = \frac{J_2 P_2 \sin \alpha}{P_1} = \frac{W_2 \sin \alpha}{P_1 \cos \varphi_2}.$$

Ein Lot PL von P auf den Radius $P_0 M$ bildet mit $P_0 P_k$ den Winkel $P_0 BL = PBH = \alpha$. Daher ist

$$PB = \frac{PH}{\sin \alpha} = \frac{W_2}{P_1 \cos \varphi_2}.$$

Der Abstand eines Kreispunktes von der Geraden $P_0 P_k$ ist proportional der sekundären Leistung.

Wirkungsgrad. Da der Radius $P_0 M$ mit der Abszissenachse den Winkel $(\varphi_2 - 2\gamma_0)$ bildet, ist auch der Winkel zwischen PL und PN : $\sphericalangle LPN = (\varphi_2 - 2\gamma_0)$.

Es war

$$PN = \frac{W_1}{P_1} \quad \text{und} \quad PB = \frac{W_2}{P_1 \cos \varphi_2},$$

daher

$$PQ = \frac{PN}{\cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)} = \frac{W_1}{P_1 \cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)},$$

$$\frac{PB}{PQ} = \frac{W_2}{W_1} \frac{\cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)}{\cos \varphi_2} = \eta \frac{\cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)}{\cos \varphi_2}.$$

Das Verhältnis der sekundären Leistung W_2 zur primären Leistung W_1 ist der Wirkungsgrad η . Er wird, abgesehen von dem Faktor $\frac{\cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)}{\cos \varphi_2}$, durch das Verhältnis $PB:PQ$ dargestellt.

Da γ_0 ein kleiner Winkel ist, ist der Faktor sehr nahe gleich 1.

Bequemer läßt sich der Wirkungsgrad noch in folgender Weise ablesen. Man verlängert $P_0 P_k$ über P_0 und zieht durch ihren Schnitt S mit der Abszissenachse eine Parallele VV zu PL , also senkrecht zum Radius $P_0 M$. Eine Parallele WV zur Abszissenachse bringt man mit der Verlängerung des Strahles PS zum Schnitt in A , dann ist

$$\triangle AVS \sim \triangle SQP$$

$$\triangle WVS \sim \triangle SQB,$$

daher

$$AV:VS = SQ:PQ$$

$$WV:VS = SQ:BQ,$$

durch Division wird

$$\frac{AV}{WV} = \frac{PQ}{BQ}$$

und

$$\frac{WA}{WV} = \frac{WV - AV}{WV} = \frac{PQ - BQ}{PQ} = \frac{PB}{PQ} = \frac{W_2 \cos(\varphi_2 - 2\gamma_0)}{W_1 \cos \varphi_2}.$$

Der Strahl PA schneidet von der konstanten Strecke WV ein Stück WA ab, das, abgesehen von dem Korrektionsfaktor, die sekundäre Leistung in demselben Maßstab darstellt, indem WV die primäre Leistung darstellt. AV ist in dem gleichen Maßstab der Verlust, als Differenz der primären und sekundären Leistungen. Der Abstand eines Punktes A und daher auch eines Kreispunktes P von der Geraden VV , die senkrecht auf dem Radius steht, ist somit dem Verlust proportional.

73. Beispiele.

1. Das Arbeitsdiagramm des Mehrphasen-Induktionsmotors.

In Kap. X S. 184 wurde gezeigt, daß das Verhalten des Induktionsmotors bezüglich Stromaufnahme und Leistung gleich ist dem eines induktionsfrei belasteten Transformators.

Von der auf die sekundäre Wicklung, dem Läufer, übertragenen Leistung, die mit W_a bezeichnet wurde, ist ein Teil, entsprechend der „Schlüpfung“ s des Läufers gegen das Drehfeld der Stromwärmeverlust in der Wicklung. Dieser ist bezogen auf eine Statorphase

$$J_2^2 R_2 = s W_a$$

und die pro Phase auf den Läufer übertragene Leistung

$$W_a = J_2^2 \frac{R_2}{s}.$$

Die Differenz ist die mechanische Leistung

$$W_m = J_2^2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right),$$

so daß der Transformator, durch den der Induktionsmotor ersetzt wird, an den sekundären Klemmen die Spannung

$$P_2 = J_2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$$

und den Belastungswiderstand $R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$ besitzt (s. das Ersatzschema Fig. 131 S. 184).

Das Arbeitsdiagramm ist durch den Leerlaufstrom, den Kurzschlußstrom und den Phasenverschiebungswinkel φ_2 der Belastung bestimmt. Da die mechanische Belastung des Motors nur einer induktionsfreien elektrischen Belastung äquivalent ist, ist $\varphi_2 = 0$.

Den Kurzschlußzustand erhält man, wenn der Belastungswiderstand

$$R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = 0$$

ist, d. h. wenn

$$s = 1$$

ist, also bei stillstehendem Läufer.

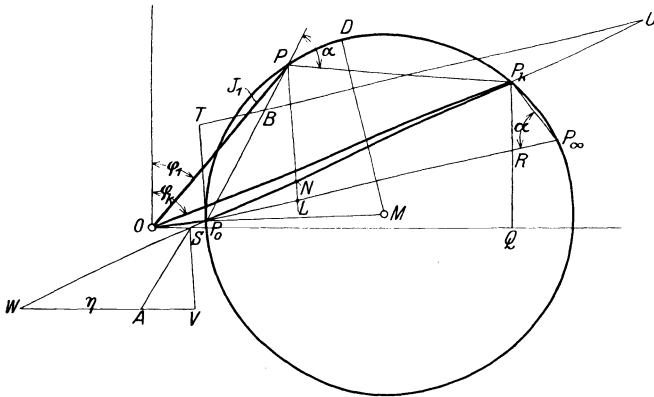


Fig. 154.

Den Leerlaufzustand erhält man, wenn der Belastungswiderstand unendlich groß, also wenn

$$s = 0$$

ist, bei „synchron“ mit dem Drehfeld rotierendem Läufer. Da hierbei kein Strom im Läufer entsteht, ist das Drehmoment Null. Die synchrone Geschwindigkeit ist die, der ein vollständig entlasteter Motor zustrebt. Wird er belastet, so schlüpft er um einen bestimmten Betrag, bei dem ein solcher Strom entsteht, daß das Drehmoment, das er mit dem Drehfeld bildet, dem Belastungsmoment das Gleichgewicht hält.

Trägt man den Leerlaufstrom J_0 und den Kurzschlußstrom J_k , die durch Messung ermittelt seien, in das Diagramm Fig. 154 ein, so liegt der Mittelpunkt M des Kreises zunächst auf der Mittelsenk-

rechten auf P_0P_k . Als zweiten Ort könnte man den Winkel β wie in Fig. 152 S. 225 antragen. Eine andere Konstruktion ist folgende. Wie an Fig. 152 gezeigt wurde, ist der Zentriwinkel

$$P_0MP_k = 2\alpha,$$

worin allgemein

$$\alpha = \varphi_k - \varphi_2 + \gamma_k - \gamma_0$$

ist. Der Induktionsmotor ist meist ein symmetrischer Stromkreis, d. h. es ist $\gamma_k = \gamma_0$, und da $\varphi_2 = 0$ ist, wird

$$\alpha = \varphi_k.$$

Man trägt also an P_0P_k den

$$\sphericalangle P_kP_0M = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \varphi_k$$

an.

Das Arbeitsgebiet des Motors von „synchroner“ Geschwindigkeit bis zum Stillstand ist der obere Bogen P_0PP_k des Kreises. Man entnimmt dem Diagramm die primären Ströme $J_1 = OP$ und deren Phasenverschiebungswinkel φ_1 , die primär zugeführte Leistung ist der Abstand der Punkte P von der Abszissenachse, die sekundäre (die mechanische) Leistung ist der Abstand der Kreispunkte von der Leistungslinie P_0P_k , und das Verhältnis von abgegebener zu zugeführter Leistung, den Wirkungsgrad η , zeigt die nach den auf S. 228 für Fig. 153 gegebenen Regeln eingetragene Wirkungsgradlinie $W - V$.

Bei dem Motor interessiert noch die Darstellung des Drehmomentes und der Geschwindigkeit, die wir wie folgt im Diagramm ermitteln.

Das Drehmoment ist proportional der auf den Läufer übertragenen Leistung

$$W_a = J_2^2 \frac{R_2}{s}.$$

Allgemein ist im Diagramm der Vektor

$$P_0P = \frac{J_2}{C_0} \quad \text{und} \quad PP_k = \frac{P_2}{C_k z_k},$$

also hier

$$PP_k = \frac{J_2 R_2}{C_k z_k} \left(\frac{1}{s} - 1 \right).$$

Folglich ist, da für den symmetrischen Stromkreis $C_0 = C_k$ ist,

$$\frac{PP_k}{P_0P} = \frac{R_2}{z_k} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad (262)$$

Nehmen wir an, der Läufer werde mit unendlich großer Geschwindigkeit angetrieben ($s = \infty$), so muß auch diesem ideellen

Zustand ein Kreispunkt entsprechen. Bei diesem Zustand ist W_a und das Drehmoment Null, weil bei unendlich großer Läuferfrequenz J_2 genau um 90° gegen die EMK verzögert ist. Für $s = \infty$ ist die Leistung W_m gleich $-J_2^2 R_2$, das negative Vorzeichen bedeutet, daß der Stromwärmeverlust dem Läufer mechanisch zugeführt wird.

Sei P_∞ der Kreispunkt, der diesem Zustand entspricht, so ist für ihn nach Gl. 262

$$\frac{P_\infty P_k}{P_0 P_\infty} = \frac{P_k P_\infty}{P_0 P_\infty} = \frac{R_2}{z_k} \dots \dots \dots (263)$$

und durch Division beider Gleichungen folgt

$$\frac{P P_k}{P_0 P_k} \frac{P_0 P_\infty}{P_k P_\infty} = \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \dots \dots \dots (264)$$

P_∞ kann nicht experimentell aufgenommen werden. Gl. 263 gibt aber einen Anhalt für seine Konstruktion. Die Ordinate des Kurzschlußpunktes P_k ist

$$P_k Q = OP_k \cos \varphi_k = OP_k \cdot \frac{R_k}{z_k},$$

ein Maß für den Kurzschlußwiderstand R_k , wenn OP_k die Kurzschlußimpedanz z_k darstellt. Diese Größen werden bei Kurzschluß gemessen. Ebenso kann der Läuferwiderstand R_2 gemessen oder berechnet werden. Trägt man ihn gleich $P_k R$ auf $P_k Q$ ab, so ist

$$\frac{P_k R}{OP_k} = \frac{R_2}{z_k}.$$

Dieses Verhältnis soll nach Gl. 263 zwischen $P_k P_\infty$ und $P_0 P_\infty$ bestehen, und da $P_0 P_\infty P_k = \alpha$, $OP_k Q = \varphi_k$, und, wie gezeigt, hier $\alpha = \varphi_k$ ist, macht man

$$\Delta P_0 P_k P_\infty \sim \Delta OP_k R,$$

indem man

$$\sphericalangle P_k P_0 P_\infty = \sphericalangle P_k OR$$

anträgt und findet P_∞ .

Aus Gl. 264 findet man nun das Drehmoment und die Schlüpfung wie folgt. Fällt man von P ein Lot auf den Radius $P_0 M$, so bildet dieses mit der Geraden $P_0 P_k$ den Winkel $P_0 N L = \alpha$.

Nun ist

$$\Delta P_0 N L \sim \Delta P_0 P_\infty P_k$$

und

$$\Delta P_0 N P \sim \Delta P_0 P P_k,$$

daher

$$\frac{P_0 P_\infty}{P_k P_\infty} = \frac{P_0 N}{NL} \quad \text{und} \quad \frac{P P_k}{P_0 P} = \frac{PN}{P_0 N},$$

und hiermit wird nach Gl. 264

$$\frac{PN}{NL} = \left(\frac{1}{s} - 1 \right).$$

Nun ist der Abstand PN des Kreispunktes P von der Geraden P_0P_k ein Maß für die abgegebene Leistung

$$J_2^2 R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right),$$

daher ist NL im gleichen Maßstab der Stromwärmeverlust

$$J_2^2 R_2$$

und PL als Summe von beiden

$$J_2^2 \frac{R_2}{s}$$

die auf den Läufer übertragene Leistung und das Drehmoment. Der Abstand eines Kreispunktes von der Geraden P_0P_∞ ist ein Maß für das Drehmoment, die Gerade P_0P_∞ heißt die Drehmomentlinie. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis bestimmen die Zustände, bei denen das Drehmoment Null ist, nämlich bei Leerlauf (Synchronismus) und bei unendlicher Geschwindigkeit.

Es verhält sich nun

$$NL:PN:PL = s:(1-s):1.$$

Bequemer ist folgende Darstellung: Zieht man eine Parallele TU zu P_0P_∞ zwischen der Kreistangente P_0T und der Geraden P_0P_k , und ist B der Schnitt des Vektors P_0P mit dieser Geraden TU , so folgt aus den ähnlichen Dreiecken

$$P_0TB \sim PLP_0$$

und

$$P_0TU \sim P_0LN$$

$$\frac{TB}{TU} = \frac{NL}{PL} = \frac{s}{1}.$$

Der Abschnitt TB ist also proportional der Schlüpfung s und der Abschnitt BU der Geschwindigkeit $(1-s)$.

Das größte Drehmoment ergibt sich in D auf dem Lot MD auf der Drehmomentlinie. Punkt D teilt das Arbeitsgebiet des Motors in zwei Teile. Von P_0 bis D entspricht einer vergrößerten Schlüpfung eine Zunahme des Drehmomentes, hier ist der Betrieb stabil, von D bis P_k entspricht einer Zunahme der Schlüpfung eine Abnahme des Drehmomentes, hier ist der Betrieb instabil. D ist die Stabilitätsgrenze.

Ebenso wie man die mechanische Belastung des Motors durch eine gedachte elektrische ersetzt, kann man sie auch durch eine wirkliche elektrische ersetzen, ohne daß sich an der Stromaufnahme und dem Drehmoment etwas ändert. Hierzu schaltet man einen Vorschaltwiderstand in den Rotor. Ist er $R_2 \left(\frac{1}{s} - 1 \right)$, so hat der Motor bei Stillstand dasselbe Drehmoment und denselben Strom, wie beim Lauf bei der Schlüpfung s , ohne Vorschaltwiderstand. Durch Abstufung der Widerstände kann man dem Motor alle Anlaufdrehmomente geben, die er beim Lauf von Stillstand bis Synchronismus entwickelt.

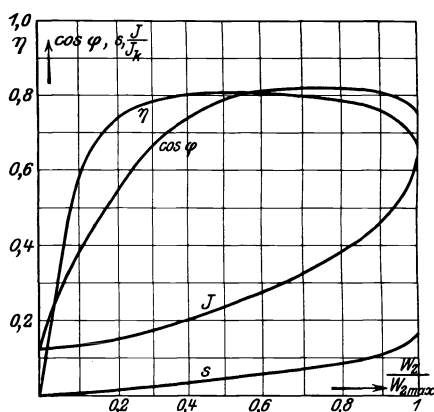


Fig. 155.

In Fig. 155 sind die aus dem Diagramm ermittelten Werte des Stromes J , des Leistungsfaktors $\cos \varphi$, des Wirkungsgrades η und der Schlüpfung als Funktion der Belastung W_m bis zur maximalen Leistung aufgetragen. Der Strom ist in Prozenten des Kurzschlußstromes dargestellt.

Analog könnte man die Kurven für das instabile Gebiet und ferner für die Arbeitsweise als Generator auftragen, der der Kreisbogen unterhalb der Abszissenachse entspricht.

Das Kreisdiagramm des Induktionsmotors wurde zuerst von Heyland (ETZ 1894) in vereinfachter Form, das hier abgeleitete exakte Diagramm von Ossanna (Zeitschrift für Elektrotechnik 1899) angegeben.

2. Der Resonanztransformator¹⁾.

Ein Resonanztransformator ist ein Transformator, an dessen sekundäre Wicklung Kondensatoren angeschlossen sind. Er wird in der Funkentelegraphie zur Transformierung von Wechselströmen in solche von hoher Spannung verwendet.

Die Kondensatoren sind an einen Schwingungskreis angeschlossen, der eine Funkenstrecke enthält; sobald die Kondensatorspannung die Funkenstrecke überschlägt, entladet sich der

¹⁾ s. Seibt, ETZ 1904, S. 276; Benischke, ETZ 1907, S. 25; Béthe-nod, Jahrb. f. drahtl. Telegraphie u. Telephonie 1907, S. 534.

Kondensator in den Schwingungskreis mit einer Frequenz, die von den Konstanten des Kreises abhängt. Beim Überspringen der Funkenstrecke ist der Kondensator fast kurzgeschlossen, und die sekundäre Klemmenspannung des Transformators geht auf einen kleinen Wert zurück. Sobald der Funke erlischt, steigt sie wieder auf den früheren Wert, die Resonanzspannung. Dieser kann durch passende Wahl der Verhältnisse ein Vielfaches der Leerlaufspannung des Transformators sein, und es wird durch die besondere Art der Erzeugung dieser hohen Spannung bezweckt, daß beim Überspringen des Funkens die Lichtbogenbildung an der Funkenstrecke vermieden wird.

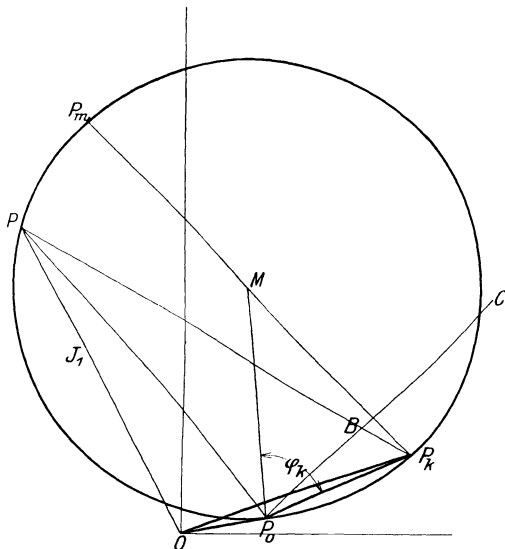


Fig. 156.

Wir wollen an Hand des Diagramms die Strom- und Spannungsverhältnisse des Transformators untersuchen, wenn die sekundär angeschlossene Kapazität alle möglichen Werte von 0 bis ∞ annimmt.

Leerlaufstrom und Kurzschlußstrom sind gegeben, C sei die variable Kapazität, dann ist an den sekundären Klemmen

$$P_2 = \frac{J_2}{\omega C} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = -90^\circ.$$

Für Kapazitätsbelastung wird im Diagramm

$$\begin{aligned} \sphericalangle \alpha &= \varphi_k - \varphi_2 + \gamma_0 - \gamma_k \\ &= \varphi_k + \frac{\pi}{2} + \gamma_0 - \gamma_k. \end{aligned}$$

Da wir den Transformator als symmetrischen Stromkreis betrachten können, ist $\gamma_k = \gamma_0$,

$$\alpha = \varphi_k + \frac{\pi}{2}$$

und $\sphericalangle P_k P_0 M = \frac{\pi}{2} - \alpha = -\varphi_k$, s. Fig. 156. Das negative Vor-

zeichen sagt, daß dieser Winkel von P_0P_k nach oben aufzutragen ist. Da

$$P_0P_k = \frac{P_2}{C_k z_k} = \frac{J_2}{\omega C C_k z_k}$$

und

$$P_0P = \frac{J_2}{C_k}$$

ist, wird

$$PP_k : P_0P = \frac{1}{\omega C} : z_k.$$

Noch einfacher stellt sich die Kapazität C dar, wenn man durch P_0 die Gerade P_0C senkrecht zum Radius P_kM zieht. Die Gerade PP_k schneidet auf P_0C eine Strecke P_0B ab, für die infolge der Ähnlichkeit der Dreiecke P_0PP_k und BP_0P_k gilt

$$P_0B : P_0P_k = P_0P : P_kP = z_k : \frac{1}{\omega C} = C : \frac{1}{\omega z_k}.$$

P_0B ist also die Kapazität im gleichen Maßstab, in dem P_0P_k die Konstante $\frac{1}{\omega z_k}$ darstellt.

Wächst C von Null anfangend, so nimmt der primäre Strom erst ab und ist am kleinsten, wenn er in die Richtung OM fällt; er wächst dann, kommt in Phasengleichheit mit der Klemmenspannung und dann in Voreilung. Die sekundäre Spannung PP_k wächst mit steigender Kapazitätsbelastung von der Leerlaufspannung P_kP_0 anfangend und erreicht ihren größten Wert in P_m , wenn P_mP_k der Kreisdurchmesser ist. Hier ist Resonanz. Die Leerlaufspannung ist

$$P_{20} = \frac{P_1}{C_0},$$

und da

$$P_mP_k = \frac{P_0P_k}{\cos \varphi_k}$$

ist, wird

$$P_{2max} = \frac{P_{20}}{\cos \varphi_k}.$$

Je kleiner $\cos \varphi_k$, um so größer wird das Verhältnis der maximalen Spannung zur Leerlaufspannung; hierzu müssen die Widerstände des Transformators möglichst klein sein. Für den widerstandsfreien Transformator wäre die Erhöhung der Spannung wie beim einfachen Resonanzstromkreis unendlich groß. Für P_m ist

$$\frac{P_mP_k}{P_0P_m} = \frac{1}{\sin \varphi_k},$$

daher die Kapazität für die größte Spannung

$$C_{(P_2m)} = \frac{\sin \varphi_k}{\omega z_k},$$

sie wird um so kleiner, je größer die Kurzschlußimpedanz ist. Da die Widerstände möglichst klein sein sollen, muß die Kurzschlußreaktanz, d. h. die Streuung, groß sein.

Der sekundäre Strom bei Resonanz $P_0 P_m$ ist wesentlich größer als der bei Kurzschluß $P_0 P_k$; es ist

$$J_2(P_2m) = \frac{J_{2k}}{\operatorname{tg} \varphi_k}.$$

Durch die große Streuung und den kleinen Kurzschlußstrom wird erreicht, daß bei überbrückter Funkenstrecke kein starker Strom aus dem Transformator nachfließen kann.

Der größte Sekundärstrom ergibt sich, wenn P auf dem Durchmesser durch P_0 liegt; die größte Ladeenergie des Kondensators, die proportional dem Produkt $J_2 P_2$, also der Höhe des Dreiecks $P_0 P P_k$ ist, wenn P senkrecht über der Mitte von $P_0 P_k$ liegt. Hier-

bei ist $\frac{1}{\omega C} = z_k$.

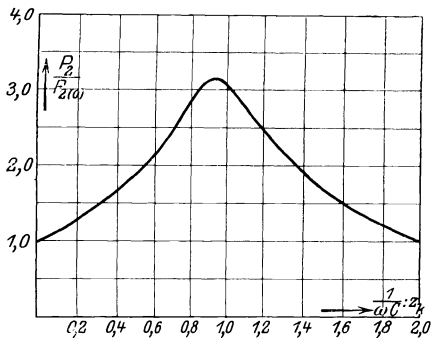


Fig. 157.

In Fig. 157 ist das Verhältnis der sekundären Spannung P_2 zur Leerlaufspannung P_{20} als Funktion von $\frac{1}{\omega C} : z_k$ aufgetragen.

Dreizehntes Kapitel.

Ausgleichsvorgänge in quasistationären Stromkreisen.

74. Ausgleichströme. — 75. Stromkreis mit konstantem Widerstand und konstanter Induktivität. — 76. Stromkreise mit Widerstand und veränderlicher Induktivität. — 77. Stromkreise mit Widerstand und Kapazität. — 78. Stromkreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität in Reihenschaltung. — 79. Zusammengesetzte Stromkreise. — 80. Stromkreise mit gegenseitiger Induktion. — 81. Das Ausschalten eines induktiven Stromkreises.

74. Ausgleichströme.

In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Gesetze des stationären Wechselstromes besprochen, der sich unter der Einwirkung einer gegebenen Spannung in einem Stromkreis einstellt. Dieser Strom kann als die erzwungene Schwingung betrachtet werden, weil er im Takt der durch die Spannung eingprägten Schwingungszahl schwingt.

Ändern sich die Bedingungen des Stromkreises, sei es, daß die zugeführte Spannung oder die Konstanten des Stromkreises bei Schaltvorgängen oder Belastungsänderungen sich ändern, so geht der Strom aus einem stationären Zustand in einen anderen über. Der neue Endzustand stellt sich nicht sofort ein, weil die ihm entsprechenden Energien der magnetischen und elektrischen Felder des Stromkreises nicht vorhanden sind, die Felder zunächst geladen werden müssen. Dies erfordert eine gewisse Übergangszeit. Während dieser Zeit überlagert sich über den stationären Strom ein sog. Ausgleichstrom oder freier Strom, der für sich die Bedingungen des Stromkreises erfüllt und der den stetigen Übergang von einem stationären Zustand in den anderen vermittelt. Wir untersuchen zunächst Stromkreise, in denen Widerstand, Induktivität und Kapazität als konzentriert betrachtet werden können, d. h. solche, bei denen in jedem Teil des Stromkreises der Strom

in jedem Augenblick den gleichen Wert hat und die wir als quasi-stationäre Stromkreise bezeichnen.

Die Untersuchung vereinfacht sich, wenn die Konstanten des Stromkreises R , L , C innerhalb der Übergangszeit sich nicht ändern. Die Spannungsgleichung eines solchen Stromkreises ist von der Form

$$p = \varphi\left(i, \frac{di}{dt}, \int i dt\right) (265)$$

worin φ eine lineare Funktion ist, deren Glieder teils den Strom i selbst in Verbindung mit Konstanten, teils den Differentialquotienten des Stromes nach der Zeit, teils das Zeitintegral des Stromes enthalten.

Während der Übergangszeit setzt sich der Strom zusammen aus dem (erzwungenen) stationären Endstrom i_e und dem (freien) Ausgleichstrom i_f , es ist

$$i = i_e + i_f (266)$$

und da Gl. 265 linear ist, kann sie zerlegt werden in

$$p = \varphi\left(i_e, \frac{di_e}{dt}, \int i_e dt\right) + \varphi\left(i_f, \frac{di_f}{dt}, \int i_f dt\right) (265 a)$$

worin p die dem stationären Endzustand entsprechende Spannung ist. Nun erfüllt der stationäre Strom für sich die Bedingung

$$p = \varphi\left(i_e, \frac{di_e}{dt}, \int i_e dt\right) (265 b)$$

daher ist für den Ausgleichstrom

$$\varphi\left(i_f, \frac{di_f}{dt}, \int i_f dt\right) = 0 (265 c)$$

Man erhält daher die Gleichung des Ausgleichstromes für sich, wenn man in der Differentialgleichung des Stromes die Spannung gleich Null setzt. Der Verlauf dieses Stromes ist also nicht von der Art der zugeführten Spannung abhängig, daher bezeichnet man ihn als freien.

Nun sahen wir, daß der Ausgleichstrom den stetigen Übergang vom Anfangszustand zum Endzustand vermittelt. Bei Beginn der Zustandsänderung, den wir hier als Anfang der Zeitrechnung, $t=0$, ansehen, habe der Strom i einen Anfangswert $i_{a(0)}$. Bezeichnen $i_{e(0)}$ und $i_{f(0)}$ die Werte des stationären Endstromes und des freien Stromes für den Augenblick $t=0$, so ist nach Gl. 266

$$i_{a(0)} = i_{e(0)} + i_{f(0)} (267)$$

75. Stromkreis mit konstantem Widerstand und konstanter Induktivität.

Für einen solchen Stromkreis gilt nach Kap. II, S. 18 die Gleichung

$$p = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Setzen wir hierin nach Gl. 266 $i = i_e + i_f$,

$$p = Ri_e + L \frac{di_e}{dt} + Ri_f + L \frac{di_f}{dt},$$

so wissen wir, daß für den stationären Strom die Gleichung

$$p = Ri_e + L \frac{di_e}{dt}$$

für sich erfüllt ist. Für den freien Strom gilt daher

$$Ri_f + L \frac{di_f}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

Durch Trennung der Variablen wird

$$\frac{di_f}{i_f} = -\frac{R}{L} dt.$$

Integriert man diese Gleichung von den Anfangswerten $t=0$, $i_f = i_{f(0)}$, bis zu t bzw. i_f , so wird

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{i_f}{i_{f(0)}} \right) &= -\frac{R}{L} t, \\ i_f &= i_{f(0)} \varepsilon^{-\frac{R}{L} t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (269) \end{aligned}$$

Dies ist die Helmholtz'sche Gleichung des freien Stromes, die ausagt, daß er von seinem Anfangswert $i_{f(0)}$ an mit der Zeit nach der Exponentialfunktion $\varepsilon^{-\frac{R}{L} t}$ ausklingt. Die Größe $\frac{R}{L}$ heißt Dämpfungsfaktor, er ist der reziproke Wert einer Zeit. Für einen Zeitpunkt $t = \frac{L}{R}$ nach Beginn des Ausgleichsvorganges ist

$$i_{(f)} = i_{f(0)} \varepsilon^{-1} = \frac{1}{2,718} i_{f(0)},$$

der Strom ist auf den $\frac{1}{e}$ ten Teil seines Anfangswertes gesunken.

$\frac{L}{R}$ heißt die Zeitkonstante.

Aus Gl. 269 folgt, daß der freie Strom erst nach unendlich langer Zeit verschwindet; jedoch verlaufen die meisten Ausgleichsvorgänge praktisch in sehr kurzer Zeit.

Der Strom hat nur noch $1/100$ seines Anfangswertes, wenn

$$e^{-\frac{R}{L}t} = 1/100$$

ist, oder wenn

$$t = \frac{L}{R} \ln 100 = 4,605 \frac{L}{R}.$$

Ist z. B. $R = 1$ Ohm, $L = 0,1$ Henry, so ist die Zeitkonstante $\frac{L}{R} = 0,1$ Sekunden, der Ausgleichstrom ist nach 0,46 Sekunden auf den 100. Teil seines Anfangswertes gesunken. Der Anfangswert $i_{f(0)}$ ist nun entsprechend Gl. 267 aus den besonderen Bedingungen zu ermitteln, die sich aus den stationären Anfangs- und Endzuständen ergeben, wie nun an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

a) Der freie Strom beim Aufhören des Wirkens der Spannung.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn der Stromkreis nach Abstellung der Spannung in sich geschlossen bleibt, etwa bei der Magnetwicklung einer Maschine, die nach dem Abschalten in sich oder über einen Widerstand kurzgeschlossen wird. Der stationäre Endstrom ist hier wegen des Fehlens der Spannung $i_e = 0$. Der freie Strom ist daher für $t = 0$ nach Gl. 267

$$i_{f(0)} = i_a$$

gleich dem Wert, den der Strom vor dem Kurzschließen des Stromkreises z. Z. $t = 0$ hatte. Der gesamte Strom ist also hier

$$i = i_a e^{-\frac{R}{L}t} \dots \dots \dots (270)$$

In dem magnetischen Felde war ursprünglich eine Energie $\frac{i_a^2 L}{2}$ aufgespeichert. Die Abnahme der Energie ist $-L i di = i^2 R dt$, sie ist die in der Zeit dt erzeugte Stromwärme. Nach Ablauf des Vorganges ist die ganze ursprünglich vorhandene magnetische Energie in Stromwärme umgewandelt.

Beispiel. In einem 6 poligen Gleichstrommotor ist der Fluß eines Poles $\Phi = 7,0 \cdot 10^6$, jeder Pol hat 1700 Windungen, der Erregerstrom ist 4 Amp., der Widerstand der Erregerwicklung $R = 100$ Ohm.

Die Induktivität wird

$$L = \frac{\Phi w}{i 10^8} = \frac{7 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 1700}{4 \cdot 10^8} = 178,5 \text{ Henry.}$$

Wird dieser Stromkreis sich überlassen, so klingt der Strom nach der Gleichung ab

$$i = 4 \varepsilon^{-0,561 t}.$$

Die Zeitkonstante ist 1,785 Sek.; nach dieser Zeit ist der Strom auf den Wert $\frac{4}{e} = 1,47$ Amp. gefallen und auf $\frac{1}{100}$ des Anfangswertes nach $4,605 \cdot 1,785 \cong 8,2$ Sekunden. Der Vorgang ist in Fig. 158 dargestellt.

b) Entstehen eines Gleichstromes.

Wird der Stromkreis zur Zeit $t=0$ an eine Gleichspannung P angeschlossen, so strebt der Strom dem stationären Endwert $i_e = \frac{P}{R}$ zu. Der Strom während der Übergangszeit ist

$$i = i_e + i_f = \frac{P}{R} + i_{f(0)} \varepsilon^{-\frac{R}{L} t}.$$

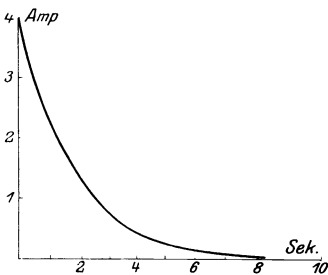


Fig. 158.

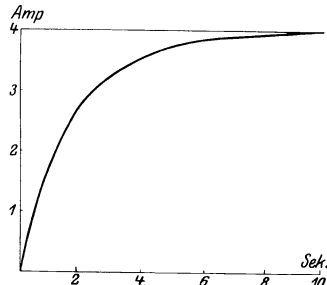


Fig. 159.

Zur Ermittlung von $i_{f(0)}$ setzen wir die Grenzbedingung ein: Zur Zeit $t=0$ ist der Anfangswert des Stromes $i_{a(0)} = 0$. In Gl. 267 wird daher

$$i_{a(0)} = i_e + i_{f(0)} = 0,$$

daher

$$i_{f(0)} = -i_e = -\frac{P}{R}$$

und

$$i = \frac{P}{R} - \frac{P}{R} \varepsilon^{-\frac{R}{L} t} \dots \dots \dots (271)$$

Fig. 159 zeigt das Entstehen des Gleichstromes für das vorhergehende Beispiel. Er ist die Differenz des stationären Stromes und des freien Stromes und steigt von dem Wert Null allmählich an.

c) Belastungsänderung in einem Gleichstromkreis.

Wird zur Zeit $t=0$ in einem Gleichstromkreis bei konstanter Spannung der Widerstand plötzlich von dem Wert R_a auf den Wert R_e geändert, so ist der Anfangswert des Stromes $i_{a(0)} = \frac{P}{R_a}$, der stationäre Endwert $i_{e(0)} = \frac{P}{R_e}$, aus Gl. 267 wird daher

$$i_{f(0)} = i_{a(0)} - i_{e(0)} = \frac{P}{R_a} - \frac{P}{R_e}$$

und der Strom während des Ausgleichsvorganges

$$i = i_e + i_{f(0)} e^{-\frac{R_e t}{L}} = \frac{P}{R_e} + \left[\frac{P}{R_a} - \frac{P}{R_e} \right] e^{-\frac{R_e t}{L}} \quad (272)$$

Fig. 160 zeigt für das Beispiel $L = 178,5$ Henry den Stromverlauf a) wenn bei 400 Volt der Widerstand von $R_a = 200$ auf $R_e = 100$ verkleinert wird, b) wenn er von $R_a = 100$ auf $R_e = 200$ vergrößert wird. Im zweiten

Fall ist der Dämpfungsfaktor doppelt so groß als im ersten, der Vorgang spielt sich viel schneller ab. Wir haben dieses Beispiel gewählt, weil es zeigt, daß bei einem Stromkreis mit sehr hoher Selbstinduktion, wie ihn die Magnetwicklung einer Dynamomaschine darstellt, der

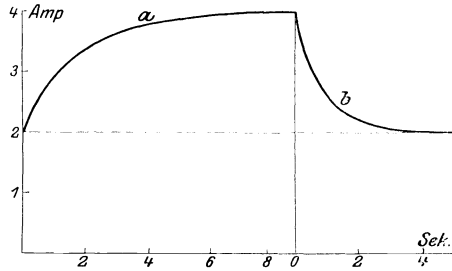


Fig. 160.

Ausgleichsvorgang mehrere Sekunden dauern kann. Streng genommen ist bei einer solchen Magnetwicklung L wegen der Eisensättigung keine Konstante. Wie hierbei zu rechnen ist, wird auf S. 247 gezeigt.

d) Das Einschalten eines Wechselstromes.

Wird der Stromkreis zur Zeit $t=0$ an eine Wechselspannung

$$p = p_m \sin(\omega t + \psi)$$

angeschlossen, so ist nach Kap. II S. 19 der stationäre Strom

$$i_e = i_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

worin
$$i_m = \frac{p_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

ist. Der freie Strom ist wieder $i_f = i_{f(0)} \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$.

Da der Anfangsstrom $i_a = 0$ ist, wird nach Gl. 267

$$i_{f(0)} = -i_{e(0)} = -i_m \sin(\psi - \varphi)$$

und der gesamte Strom während des Einschaltvorganges:

$$i = i_e + i_f = i_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - i_m \sin(\psi - \varphi) \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \quad (273)$$

Die Größe des freien Stromes, der bei $t=0$ den stationären Strom zu Null ergänzt, hängt von dem Augenblick des Einschaltens ab. Wird in dem Augenblick eingeschaltet, in dem der stationäre Strom durch Null gehen würde, so ist auch $i_{f(0)}=0$, und der Strom schwingt sich sofort auf den stationären einwelligen Strom ein. In jedem anderen Falle ist ein freier Strom vorhanden.

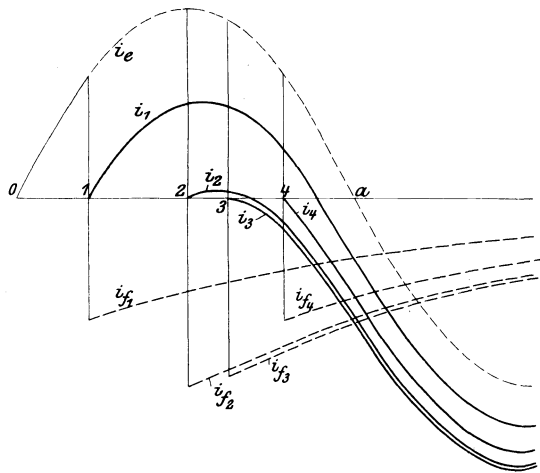


Fig. 161.

Fig. 161 zeigt den Anfang des Einschaltvorganges für einen Stromkreis bei vier verschiedenen Einschaltmomenten, die auf der Zeitachse mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet sind. i_e ist die stationäre Stromwelle mit der Amplitude i_m , die beim Einschalten in dem mit 0 bezeichneten Augenblick sofort entsteht, während für die Einschaltmomente 1 bis 4 die freien Ströme i_{f1} bis i_{f4} entstehen. Sie ergeben zu i_e addiert die resultierenden Ströme i_1 bis i_4 .

Nach dem ersten Nullgang des stationären Stromes bei a hat er die gleiche Richtung wie i_{f1} bis i_{f4} , die resultierenden Ströme

i_1 bis i_4 werden größer als der stationäre Strom. i_3 erreicht die größte Amplitude, obwohl der Anfangswert von i_{f3} kleiner ist als die Amplitude i_m . Der größte Stromstoß nach dem Einschalten hängt von dem Phasenwinkel ψ der Spannung ab. Die Bedingung dafür ist folgende.

Da nach dem ersten Nulldurchgang des stationären Stromes der freie Strom mit ihm gleichgerichtet ist, ist die Summe beider in der folgenden Halbperiode um so größer, je größer i_f beim ersten Nulldurchgang des stationären Stromes nach dem Einschalten ist.

Der stationäre Strom $i_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$ wird nach dem Einschalten Null, wenn

$$\omega t + \psi - \varphi = 0 \text{ oder } \pi$$

ist, je nach der Größe von ψ und φ . ψ kann zwischen 0 und π , φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, $\psi - \varphi$ also zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und π , während ωt für den ersten Nulldurchgang größer als Null sein muß.

Also ist

$$t = \frac{k\pi - (\psi - \varphi)}{\omega},$$

worin $k = 0$ oder 1 sein kann.

Der freie Strom wird zu dieser Zeit

$$i_f = i_m \sin(\psi - \varphi) \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} = i_m \sin(\psi - \varphi) \varepsilon^{-\frac{k\pi - (\psi - \varphi)R}{\omega L}}.$$

Er hat seinen größten Wert, wenn

$$\frac{di_f}{d\psi} = 0$$

ist. Dies ergibt:

$$i_m \cos(\psi - \varphi) \varepsilon^{-\frac{k\pi - (\psi - \varphi)R}{\omega L}} + i_m \sin(\psi - \varphi) \frac{R}{\omega L} \varepsilon^{-\frac{k\pi - (\psi - \varphi)R}{\omega L}} = 0,$$

oder

$$\cos(\psi - \varphi) = -\sin(\psi - \varphi) \frac{R}{\omega L}.$$

Da

$$\frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg} \varphi$$

ist, soll

$$\operatorname{tang}(\psi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi,$$

d. h.

$$\psi = 0 \text{ oder } \pi$$

sein und, dies bedeutet, daß die Spannung im Augenblick des Einschaltens gerade durch Null geht.

Ist R sehr klein gegen L , so fällt der Nulldurchgang der Spannung nahezu mit dem Maximalwert des stationären Stromes zusammen, und da bei kleinem R der freie Strom sehr langsam abklingt, kann der gesamte Strom nach $1/2$ Periode etwas weniger als die doppelte Amplitude des stationären Stromes haben. Dies ist der größte Wert des Stromstoßes, der bei konstantem L beim Einschalten im Nulldurchgang der Spannung auftreten kann.

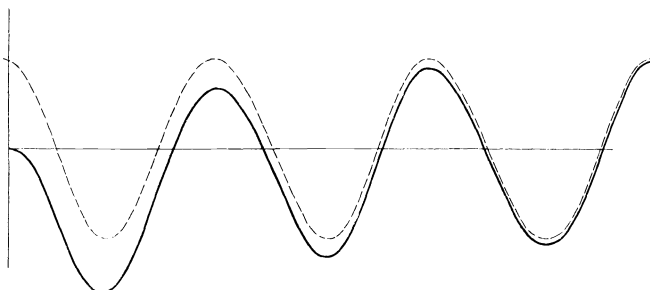


Fig. 162.

Fig. 162 stellt das Einschwingen des Stromes dar, wenn beim Nulldurchgang der Spannung eingeschaltet wird und im stationären Zustand $\cos \varphi = 0,18$ ist.

Bei einer plötzlichen Änderung einer der Konstanten R oder L des Stromkreises bei konstanter Spannung ist der Anfangswert des Übergangstromes

$$i_a = i_{am} \sin(\omega t + \psi - \varphi_a),$$

der Endwert sei

$$i_e = i_{em} \sin(\omega t + \psi - \varphi_e),$$

der freie Strom im Augenblick der Belastungsänderung $t=0$ nach Gl. 267

$$i_{f(0)} = i_{a(0)} - i_{e(0)} = i_{am} \sin(\psi - \varphi_a) - i_{em} \sin(\psi - \varphi_e).$$

Er hängt also nicht nur von der Größe, sondern auch von der Phasenverschiebung φ_a und φ_e der stationären Anfangs- und Endströme gegen die Spannung ab.

76. Stromkreise mit Widerstand und veränderlicher Induktivität.

Bei den eisenhaltigen Stromkreisen ist L in weiten Grenzen veränderlich, daher treffen die Grundlagen der bisherigen Rechnung nicht mehr zu, und es ist nicht mehr möglich, den freien Strom

von dem stationären rechnermäßig zu trennen. Hier ist die Differentialgleichung

$$p = Ri + w \frac{d\Phi}{dt} 10^{-8}$$

zu verwenden, worin $\Phi = f(i)$ durch die Magnetisierungskurve $\mathfrak{B} = f(i)$ gegeben ist.

Man kann mit Hilfe der Magnetisierungskurve den Vorgang angenähert graphisch verfolgen, wenn man statt der unendlich kleinen Änderung $d\Phi$ eine endliche $\Delta\Phi$ in der endlichen Zeit Δt betrachtet. Die Annäherung an den wirklichen Vorgang wird um so größer, je kleiner man die Größen wählt.

a) Das Einschalten eines Gleichstromes.

Hier ist $p = \text{konst.} = P$ und es wird

$$P = Ri + w \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} 10^{-8}.$$

Fig. 163 stellt die Magnetisierungskurve dar, die zweckmäßig so aufgetragen wird, daß die Ordinaten die Flußwindungen $w\Phi$, die Abszissen den Ohmschen Spannungsabfall iR darstellen. Dem stationären Strom J entspreche $JR = P = OA$ und der stationäre verkettete Fluß $w\Phi = AB$.

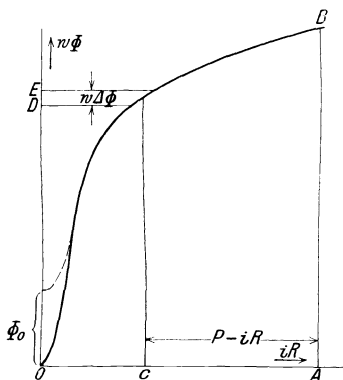


Fig. 163.

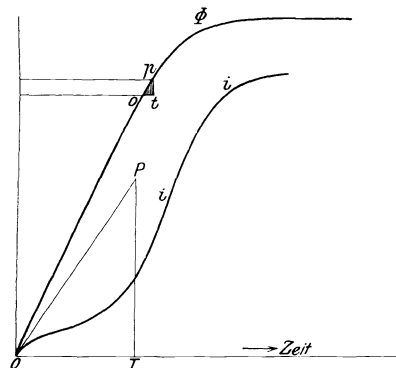


Fig. 164.

Greift man nun eine Flußänderung $w \Delta\Phi = DE$ heraus, bei der der Ohmsche Spannungsabfall im Mittel $iR = OC$ ist, so berechnet sich die zu dieser Flußänderung erforderliche Zeit beim Einschalten

$$\Delta t = \frac{w \Delta\Phi 10^{-8}}{P - iR} \text{ Sek.}$$

Durch Einteilung der ganzen Flußänderung von 0 bis $w\Phi = AB$ in entsprechende Elemente $\Delta\Phi$, die nicht gleichgroß zu sein brauchen, berechnen sich die zugehörigen Zeiten Δt und der ganze Einschaltvorgang. Graphisch verfährt man wie folgt:

Ist in Fig. 163 der Maßstab der Flußwindungen

$$1 \text{ cm} = m 10^{+8},$$

so ist

$$w \Delta\Phi 10^{-8} = m DE,$$

der Spannungsmaßstab

$$1 \text{ cm} = n \text{ Volt},$$

daher

$$P = JR = n CA$$

also ist

$$\Delta t = \frac{w \Delta\Phi 10^{-8}}{P - iR} = \frac{m DE}{n CA} \text{ Sek.}$$

Macht man in Fig. 164 $OT = \frac{m}{n}$ Sek., $TP = CA$ und das Dreieck otp mit der Höhe $tp = DE$ ähnlich dem Dreieck OTP , indem man op parallel OP zieht, so ist $ot = \Delta t$ Sek.

Hierdurch erhält man das Ansteigen des Flusses mit der Zeit als eine gebrochene Kurve, die sich der wirklichen um so mehr anschmiegt, je kleiner die Elemente $\Delta\Phi$ gewählt werden. Aus der Magnetisierungskurve erhält man nun zu jedem Fluß den Strom und hiermit auch den zeitlichen Verlauf des Stromes i , der von dem des eisenlosen Stromkreises (Fig. 159) wesentlich abweicht.

Ist remanenter Magnetismus vorhanden, so beginnt die Zunahme des Flusses nicht bei 0, sondern bei Φ_0 , die Magnetisierungskurve steigt, wie in Fig. 163 gestrichelt angedeutet, von Φ_0 an. Der Einschaltvorgang wird hierbei entsprechend abgekürzt.

b) Das Einschalten eines unbelasteten Transformators.

Für einen leerlaufenden Transformator oder eine Drosselspule mit Eisen ist

$$Ri + w \frac{d\Phi}{dt} = p_m \sin(\omega t + \psi).$$

Der Transformator werde zur Zeit $t=0$ an das Netz angeschlossen, hier ist $i=0$, und $\Phi = \Phi_0$ sei der dem remanenten Magnetismus entsprechende Fluß. Durch Integration von 0 bis t wird

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{p_m}{\omega w} \cos(\omega t + \psi) + \frac{p_m}{\omega w} \cos \psi - \int_0^t \frac{Ri dt}{w} \quad (274)$$

Auf der rechten Seite haben wir vier Glieder, das erste ist, wie erwähnt, von der Remanenz bedingt und ist konstant. Das zweite Glied ist ein Wechselfluß mit der Amplitude

$$\Phi'_m = \frac{P_m}{\omega w}.$$

Dies ist jener stationäre Fluß, der sich einstellen würde, wenn der Ohmsche Spannungsabfall in der Wicklung Null wäre. Bei modernen Transformatoren hat der Vollaststrom etwa 1% Ohmschen Spannungsabfall, und der Leerlaufstrom beträgt durchschnittlich 10% vom Vollaststrom. Daher ist sein Spannungsabfall nur etwa 0,1% der Klemmenspannung, und dabei ist Φ'_m sehr nahe gleich dem Fluß bei Leerlauf. Das dritte Glied ist konstant $\Phi'_m \cos \psi$ und ergänzt den stationären Fluß im Augenblick $t=0$ zu Null. Das vierte Glied endlich stellt die durch den Ohmschen Spannungsabfall bedingte Abnahme des Flusses dar.

Mit großer Annäherung, d. h. bei Vernachlässigung des Ohmschen Spannungsabfalls des stationären Magnetisierungsstromes stellen also die vier Glieder der Gl. 274 dar: das zweite den stationären Fluß, das erste und dritte zusammen den Anfangswert des freien Flusses, das vierte die Dämpfung des freien Flusses.

Nun ist bei einer Wechselspannung der Zusammenhang zwischen Strom und Fluß durch die Hysteresisschleife gegeben.

Beim Einschalten schwingt Φ nicht um den Wert Null, sondern um einen Fluß, der seine Richtung beibehält, er ist zu Anfang $\Phi_0 + \Phi'_m \cos \psi$ und klingt mit der Zeit ab, so daß nicht die symmetrische Hysteresisschleife beschrieben wird, sondern Schleifen, die, wie Fig. 165 zeigt, unsymmetrisch zum Koordinatenanfangspunkt liegen¹⁾, und deren Lage von dem Anfangswert abhängt. Da wir über diese Art der Hysteresisschleifen nichts Näheres kennen, entzieht sich der Vorgang einer rechnerischen Untersuchung. Sieht man von der Dämpfung

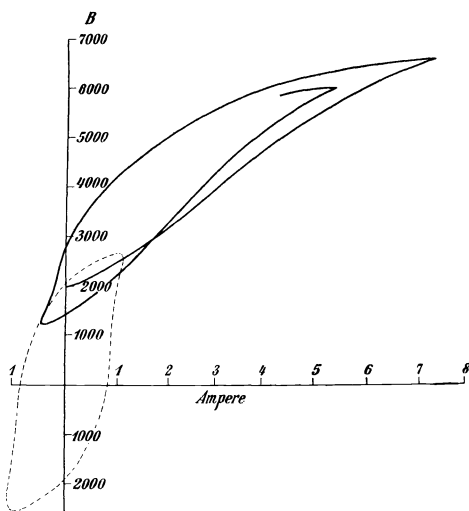


Fig. 165.

¹⁾ s. Hay, Electrician 1894.

in den ersten beiden Halbwellen ab, so ergibt sich, wie groß im ungünstigsten Falle der Fluß und der Stromstoß werden können. Der Teil $\Phi'_m \cos \psi$ hat seinen größten Wert, wenn $\psi = 0$ ist, d. h. wenn im Nulldurchgang der Spannung eingeschaltet wird. Ihm kann der remanente Fluß gleich- oder entgegengerichtet sein, so daß im ungünstigsten Falle der Anfangswert des freien Flusses $\Phi_0 + \Phi'_m$ ist.

Der stationäre Fluß beginnt für $\psi = 0$ mit $-\Phi'_m$ und ist nach $1/2$ Periode $+\Phi'_m$ geworden, so daß bei kleiner Dämpfung der Fluß nach $1/2$ Periode $\Phi_0 + 2\Phi'_m$ ist, also mehr als doppelt so groß wie

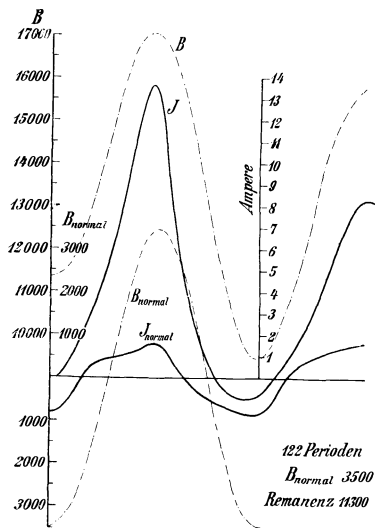


Fig. 166.

Fig. 166 zeigt nach A. Hay (El. review 1898) die mittels Joubert-scher Scheibe aufgenommenen Anfangsschwingungen des Stromes

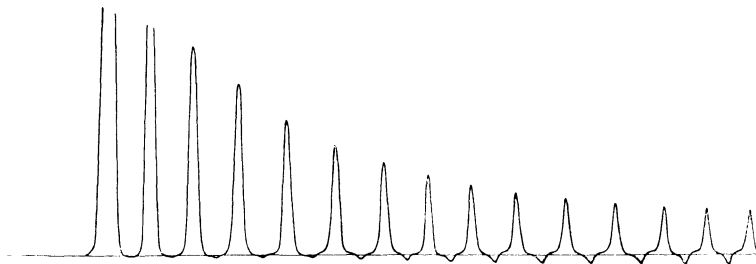


Fig. 167.

und der Induktion, und Fig. 167 zeigt nach Linke (Arch. f. Elektr., Bd. I, S. 21) das Oszillogramm des Einschwingens des Stromes an

einem modernen Transformator. Zur Vermeidung der Stromstöße, die nicht nur für die Schalter und Meßinstrumente schädlich sind, sondern auch die Wicklung mechanisch stark beanspruchen, verwendet man einen Schalter mit Widerstandsvorstufe (Fig. 168). Da der Vorgang in wenigen Perioden abklingt, braucht man praktisch nicht auf der Vorstufe stehen zu bleiben, da die erforderliche Zeit nicht größer ist als die der Schalterbewegung entsprechende Zeit. Der Widerstand muß so bemessen sein, daß einerseits beim Einschalten, andererseits beim Kurzschließen des Widerstandes der Stromstoß ein zulässiges Maß nicht überschreitet.

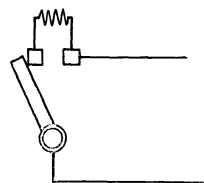


Fig. 168.

Eine angenäherte Berechnung hat Rogowski¹⁾ unter Vernachlässigung der Hysterisis und der vergrößerten Streuung durchgeführt, indem er die Magnetisierungskurve in drei Teile zerlegt und durch gerade Linien ersetzt. Danach genügt ein Widerstand, der ca. 5 bis 10⁰/₀ der vollen Klemmenspannung beim Vollaststrom aufnimmt.

77. Stromkreise mit Widerstand und Kapazität.

In einem Stromkreis, in dem ein Widerstand R in Reihe mit einem Kondensator C liegt, ist nach Kap. II, S. 26

$$p = Ri + \int \frac{i dt}{C}.$$

In der Übergangszeit setzt sich i aus dem erzwungenen Endstrom i_e und dem freien Strom i_f zusammen, es ist $i = i_e + i_f$ und

$$p = Ri_e + \int i_e \frac{dt}{C} + Ri_f + \int i_f \frac{dt}{C}.$$

Der stationäre Strom erfüllt für sich die Bedingung

$$p = Ri_e + \int i_e \frac{dt}{C},$$

daher ist für den freien Strom

$$Ri_f + \int i_f \frac{dt}{C} = 0 \quad \dots \quad (275)$$

Durch Differentiation und Trennung der Variablen wird

$$\frac{di_f}{i_f} = - \frac{dt}{RC}$$

¹⁾ Arch. f. Elektr., Bd. I, S. 344.

und durch Integration von $i_f = i_{f(0)}$ und $t = 0$ bis i_f und t wird

$$\ln \left(\frac{i_f}{i_{f(0)}} \right) = - \frac{t}{RC}$$

$$i_f = i_{f(0)} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (276)$$

Der Dämpfungsfaktor ist hier $\frac{1}{RC}$, die Zeitkonstante RC .

Für die Ladung q des Kondensators ist ganz analog

$$p = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C},$$

daher für die freie Ladung

$$R \frac{dq_f}{dt} + \frac{q_f}{C} = 0$$

$$q_f = q_{f(0)} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (277)$$

und für die Kondensatorspannung

$$p_{fc} = \frac{q_f}{C} = p_{f(0)} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

a) Entladung eines Kondensators über einen Widerstand.

Der Kondensator ist auf eine Spannung P_c geladen und besitzt daher die Anfangsladung $q_a = P_c C$. Er wird zur Zeit $t = 0$ über einen Widerstand geschlossen und entladet sich; der Endzustand ist daher $q_e = 0$, und

$$q_{f(0)} = q_{a(0)} - q_{e(0)} = q_a = P_c C$$

$$q = q_f + q_e = q_f = q_a \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} = P_c C \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad . \quad . \quad (278)$$

Der Entladestrom ist

$$i = \frac{dq}{dt} = - \frac{1}{RC} q_a \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} = - \frac{P_c}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad . \quad . \quad (279)$$

Der Anfangswert des Stromes ist $-\frac{P_c}{R}$. Der Kondensator hatte zu Anfang die Energie $U = \frac{1}{2} P_c^2 C$, diese ist während der Entladung in Stromwärme übergegangen, denn es ist

$$\int_{t=0}^{t=\infty} i^2 R dt = \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{P_c^2}{R^2} \varepsilon^{-\frac{2t}{RC}} R dt = \frac{1}{2} P_c^2 C.$$

b) Ladung eines Kondensators über einen Widerstand mit Gleichstrom.

Hier ist der Endzustand $q_e = P_c C$. War der Kondensator ungeladen, so ist $q_a = 0$, daher

$$q_{f(0)} = q_a(0) + q_e(0) = P_c C$$

$$q = q_f + q_e = P_c C \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad . \quad . \quad (280)$$

Der Ladestrom ergibt sich wieder aus $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = \frac{P_c}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (281)$$

Er ist ebenso groß wie bei der Entladung, nur von umgekehrten Vorzeichen. Daher wird auch während der Ladung in dem Widerstand dieselbe Stromwärme erzeugt wie bei der Entladung; sie war $\frac{1}{2} P_c^2 C$, und da bei der Ladung eine ebenso große Energie dem Kondensator zugeführt wird, wird während der Ladung dem ganzen Stromkreis das Doppelte der Energie zugeführt, die nachher im Kondensator aufgespeichert ist, ganz unabhängig davon, wie groß der Widerstand ist.

Aus Gl. 281 folgt, daß der Strom im Augenblick des Einschaltens $\frac{P_c}{R}$ ist, also sehr groß werden kann, wenn R klein ist.

Dies ist der Fall, wenn ein unbelastetes Kabel an die Spannung angeschlossen wird. Der Stromstoß wird, wie später gezeigt wird, durch die Induktivität des Leiters gedämpft, bei konzentrischen Kabeln ist diese aber sehr klein, so daß für diesen Fall das Kabel fast als induktionsfrei betrachtet werden kann. Für ein kurzes Kabelstück kann man sich in erster Annäherung die Kapazität in der Mitte der Leistung zwischen Hin- und Rückleitung konzentriert denken, es ist ihm dann der halbe Widerstand der Leitung vorgeschaltet.

Ein konzentrisches Kabel von 60 qmm Querschnitt, das normal 100 Amp. führt, habe eine Kapazität von $0,5 \cdot 10^{-6}$ F/km. Der Widerstand beider Leiter ist für 1 km 0,585 Ohm.

Ein Kabelstück von 2 km hat also eine Kapazität von 1 Mikrofarad, die wir uns in der Mitte, also hinter einem Widerstand von 0,585 Ohm angebracht denken. Würde das Kabel direkt an die Netzspannung von 600 Volt angeschlossen, so wäre der Stromstoß beim Einschalten unter Vernachlässigung der Induktivität $\frac{600}{0,585} = 1025$ Amp., also

ca. 10 mal so groß wie der Betriebsstrom. Der Strom klingt nach der Gleichung

$$i = \frac{P_c}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} = 1025 \varepsilon^{-\frac{10^6 t}{0,585}}$$

ab, d. h. er ist auf $1/10$ des Anfangswertes gefallen, wenn

$$t = RC \ln 10 = 4,6 \cdot 0,585 \cdot 10^{-6} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ Sek.}$$

Der Ausgleichsvorgang spielt sich also in außerordentlich kurzer Zeit ab, weil die Dämpfung sehr groß ist. Die Ladung ist

$$q = CP_c = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Coulomb.}$$

Es folgt hieraus, daß es zweckmäßig ist, ein Kabel nicht direkt, sondern über einen besonderen Vorschaltwiderstand anzuschließen, besonders wenn es sich um Hochspannungskabel handelt.

c) Ladung eines Kondensators über einen Widerstand mit Wechselstrom.

Wird der Stromkreis z. Z. $t=0$ an eine Wechselspannung

$$p = p_m \sin(\omega t + \psi)$$

angeschlossen, so ist der stationäre Strom

$$i_e = i_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

worin

$$i_m = \frac{p_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{und} \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{\omega CR}$$

ist. Die stationäre Ladung des Kondensators ist

$$q_e = \int i_e dt = q_m \sin\left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

worin

$$q_m = \frac{i_m}{\omega}$$

ist. Die freie Ladung ist

$$q_f = q_{f(0)} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

Die freie Kondensatorspannung

$$p_{fc} = p_{fc(0)} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

War der Kondensator ungeladen, d. h. $q_a = 0$, so ist

$$q_{f(0)} = -q_{e(0)} = -q_m \sin\left(\psi + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

und während des Einschaltvorganges

$$q = q_e + q_f = q_m \sin \left(\omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) - q_m \sin \left(\psi + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

(282)

Der freie Strom ist

$$i_f = \frac{dq_f}{dt} = -\frac{q_m}{RC} \cos(\psi + \varphi) \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$$

oder da

$$q_m = \frac{i_m}{\omega}$$

$$i_f = -\frac{i_m}{\omega RC} \cos(\psi + \varphi) \varepsilon^{-\frac{t}{RC}},$$

der gesamte Strom

$$i = i_e + i_f = i_m \sin(\omega t + \psi + \varphi) - \frac{i_m}{\omega CR} \cos(\psi + \varphi) \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \quad (283)$$

Er ist im Einschaltmoment ($t=0$)

$$i_{(0)} = i_m \left[\sin(\psi + \varphi) - \frac{\cos(\psi + \varphi)}{\omega RC} \right] = i_m \frac{\sin \psi}{\cos \varphi},$$

und wird dann am größten, wenn $\psi = 90^\circ$ ist, d. h. wenn in dem Augenblick eingeschaltet wird, in dem die Spannung ihre Amplitude erreicht. Der größte Wert des Stromes ist also $\frac{i_m}{\cos \varphi} = \frac{p_m}{R}$.

Da der freie Strom in dem Beispiel S. 253 in $2,7 \cdot 10^{-6}$ Sek. auf 1% seines Anfangswertes gesunken ist, also bei 50 Perioden in dem $1,35 \cdot 10^{-4}$ ten Teil einer Periode, so ist der stationäre Zustand sehr schnell hergestellt.

Das hier durchgeführte Beispiel stellt einen extremen Grenzfall dar, der noch dadurch zu berichtigen wäre, daß der Widerstand bei so schnellen Stromänderungen durch die Stromverdrängung (s. Kap. IX) wesentlich erhöht wird, und weil ferner die auch noch so kleine Induktivität dämpfend wirkt. Immerhin zeigt sie, daß beim Anschließen von Kabeln an das Netz große Stromstöße auftreten können und die Verwendung von Vorschaltwiderständen oder allmähliche Ladung durch stufenweise Erhöhung der Maschinenspannung nötig werden.

78. Stromkreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität in Reihenschaltung.

Für diesen Stromkreis ist nach Kap. II, S. 26

$$p = Ri + L \frac{di}{dt} + \int \frac{i dt}{C}.$$

Während der Übergangszeit ist

$$i = i_e + i_f,$$

und da die Differentialgleichung von dem stationären Strom i_e für sich erfüllt wird, gilt für den freien Strom

$$R i_f + L \frac{d i_f}{d t} + \int \frac{i_f d t}{C} = 0 \quad \dots \quad (284)$$

Durch Differentiation erhält man hieraus

$$\frac{d^2 i_f}{d t^2} + \frac{R}{L} \frac{d i_f}{d t} + \frac{i_f}{L C} = 0 \quad \dots \quad (284a)$$

Setzt man in Gl. 284 $i_f = \frac{d q_f}{d t}$, so ergibt sich für die Ladung des Kondensators q_f die analoge Gleichung

$$\frac{d^2 q_f}{d t^2} + \frac{R}{L} \frac{d q_f}{d t} + \frac{q_f}{L C} = 0 \quad \dots \quad (285)$$

Der Verlauf von Strom und Ladung ist also von gleicher Art, sie unterscheiden sich nur durch Konstante.

Gl. 284a wird befriedigt durch den Ansatz

$$i_f = k e^{\gamma t}.$$

Setzt man diesen Wert und seine Ableitungen in Gl. 284a ein, so ist

$$\gamma^2 + \frac{R}{L} \gamma + \frac{1}{L C} = 0.$$

γ hat also die beiden Werte

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2 L} \\ \gamma_2 &= -\frac{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2 L} \end{aligned} \right\} \dots \quad (286)$$

Da hierin die Wurzel aus einer Differenz vorkommt, ist zu unterscheiden, ob R^2 größer, gleich oder kleiner als $4 \frac{L}{C}$ ist, d. h. ob

$$R \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 2 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

1. Ist $R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$, so sind γ_1 und γ_2 reell. Die vollständige Lösung des Integrals lautet

$$i_f = k_1 e^{\gamma_1 t} + k_2 e^{\gamma_2 t} \quad (287)$$

und die freie Ladung ist

$$q_f = \int i_f dt = \frac{k_1}{\gamma_1} e^{\gamma_1 t} + \frac{k_2}{\gamma_2} e^{\gamma_2 t} \quad (288)$$

k_1 und k_2 sind die aus den Anfangsbedingungen zu ermittelnden Konstanten.

i_f und q_f klingen nach zwei Exponentialfunktionen ab, bei denen ein Dämpfungsfaktor größer als $\frac{R}{2L}$, der andere kleiner ist.

2. Ist $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, so ist $\gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{R}{2L} = -\frac{2}{RC}$.

Für gleiche Wurzeln lautet die Lösung der Differentialgleichung (für q_f)

$$q_f = (k_1 + tk_2) e^{-\frac{R}{2L}t} = (k_1 + tk_2) e^{-\frac{2t}{RC}} \quad . . (289)$$

und

$$i_f = \frac{dq_f}{dt} = \left[k_2 - \frac{2}{RC}(k_1 + tk_2) \right] e^{-\frac{2t}{RC}} \quad . . (290)$$

3. Ist $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, so sind γ_1 und γ_2 imaginär. Setzt man

$$\frac{R}{2L} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \beta \quad . . . (291)$$

so ist

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -(\alpha - j\beta) \\ \gamma_2 &= -(\alpha + j\beta), \end{aligned}$$

worin α und β reell sind. Daher wird

$$q_f = k_1 e^{-(\alpha - j\beta)t} + k_2 e^{-(\alpha + j\beta)t}.$$

Setzt man

$$e^{\pm j\beta t} = \cos \beta t \pm j \sin \beta t,$$

so wird

$$q_f = e^{-\alpha t} (a \cos \beta t + b \sin \beta t) \quad (292)$$

worin

$$a = k_1 + k_2, \quad b = j(k_1 - k_2)$$

reell sind, da der Vorgang reell ist.

Setzt man in Gl. 292

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{b}{a},$$

so wird auch

$$q_f = e^{-\alpha t} A \sin(\beta t + \delta) \quad (292a)$$

Der Strom wird

$$i_f = \frac{dq_f}{dt} = \varepsilon^{-\alpha t} [-\alpha A \sin(\beta t + \delta) + \beta A \cos(\beta t + \delta)] \quad (293)$$

$$= \varepsilon^{-\alpha t} A \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin\left(\beta t + \delta - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}\right) \dots (293a)$$

Hier verlaufen also Strom und Ladung nach Sinusschwingungen mit gedämpfter Amplitude. Der Dämpfungsfaktor ist $\alpha = \frac{R}{2L}$, die Periodenzahl ist

$$c = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Sie heißt die Eigenfrequenz des Stromkreises. Bei sehr kleinem Widerstand ist sie angenähert gleich der Periodenzahl der Resonanz für den stationären Wechselstrom. Die Konstanten A und δ sind aus den Anfangsbedingungen zu ermitteln. Da in der Gl. 293a für i_f nach Gl. 291

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \dots (291a)$$

ist, und die Kondensatorspannung $\frac{q_f}{C}$ ist, sieht man, daß man die Amplituden der Kondensatorspannung aus denen des Stromes erhält durch Multiplikation mit $\sqrt{\frac{L}{C}}$. Diese Größe, die die Dimension eines Widerstandes hat, wurde bei Leitungen mit verteilter Selbstinduktion und Kapazität als Charakteristik bezeichnet. Hier kann sie analog als charakteristischer Widerstand des Stromkreises bezeichnet werden; ist er kleiner als der halbe Ohmsche Widerstand oder ihm gleich (Fall 1 und 2), so ist der Ausgleichsvorgang aperiodisch, andernfalls, wie wir sehen, oszillierend. Die Phasenverschiebung zwischen Strom- und Kondensatorspannung bei oszillierendem Vorgang ist, wie aus Gl. 292a und 293a folgt, $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$.

Beispiele.

a) Entladung eines Kondensators.

Der auf die Spannung P_c geladene Kondensator wird z. Z. $t=0$ über den Widerstand R und die Induktivität L geschlossen und entladet sich. Wir haben also folgende Grenzbestimmungen:

$$q_a = P_c C, \quad q_e = 0$$

$$i_a = 0, \quad i_e = 0.$$

Während der Entladung ist daher

$$q = q_e + q_f = q_f$$

$$i = i_e + i_f = i_f$$

und die Anfangswerte

$$\left. \begin{aligned} q_{f(0)} = q_{a(0)} - q_{e(0)} = P_c C \\ i_{f(0)} = i_{a(0)} - i_{e(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (294)$$

1. Für die aperiodische Entladung $R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ setzen wir Gl. 294 in Gl. 287 und Gl. 288 für $t=0$ ein. Es wird aus Gl. 287

$$k_1 + k_2 = i_{f(0)} = 0,$$

daher

$$k_2 = -k_1,$$

aus Gl. 288

$$\frac{k_1}{\gamma_1} + \frac{k_2}{\gamma_2} = P_c C$$

$$k_1 = -k_2 = \frac{P_c C \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{P_c}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}.$$

Hiermit erhält man

$$i = i_f = \frac{P_c}{\sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} (\epsilon^{\gamma_1 t} - \epsilon^{\gamma_2 t}) \dots \dots \dots (295)$$

$$q = q_f = \frac{P_c}{2 \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \left[\left(R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}} \right) \epsilon^{\gamma_1 t} - \left(R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}} \right) \epsilon^{\gamma_2 t} \right] \dots (296)$$

Fig. 169 a und b zeigen Strom und Ladung für

$$C = 10^{-6} \text{ Fd.}, \quad R = 500 \text{ Ohm}, \quad L = 0,05 \text{ Henry}.$$

Beide sind die Differenz einer langsam (I) und einer schnell (II) abklingenden Funktion, beim Strom haben sie den gleichen Anfangswert, daher steigt er von Null an, um wieder zu fallen; bei der Ladung sind die Anfangswerte ungleich, ihre Differenz ist die Anfangsladung, sie nimmt erst langsam, dann schnell ab. Das negative Vorzeichen von i bezeichnet den Entladestrom.

Sein Maximalwert, der bei Entladung über einen reinen Widerstand (s. S. 252) $\frac{P_c}{R}$ ist und sofort nach dem Schließen auftritt, wird

hier durch die Induktivität verkleinert und verzögert. Es wird

$$\frac{di}{dt} = 0, \text{ wenn (s. Gl. 295)}$$

ist, oder

$$\begin{aligned} \gamma_1 e^{\gamma_1 t} &= \gamma_2 e^{\gamma_2 t} \\ e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t} &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \\ t &= \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \end{aligned}$$

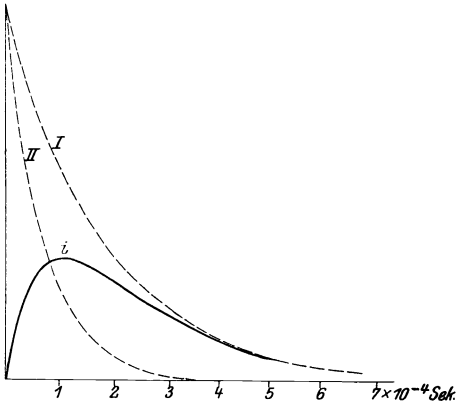


Fig. 169 a.

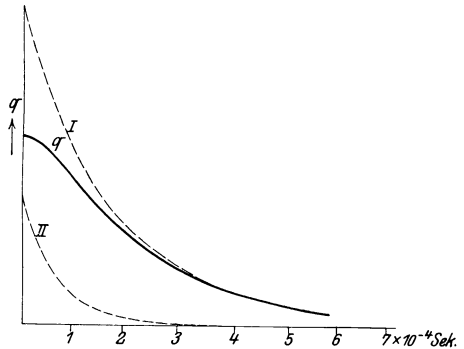


Fig. 169 b.

Hiermit ist

$$\begin{aligned} e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t} &= e^{\gamma_1 t} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) = e^{\gamma_1 t} \ln \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \\ &= \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \right)} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \end{aligned}$$

und in Gl. 295 eingesetzt:

$$i_{max} = \frac{2 P_c}{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{R - \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} \right)^{\left(\frac{R}{2 \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}} - \frac{1}{2} \right)} \quad (295a)$$

In dem Beispiel S. 253 wird $i_{max} = \frac{P_c}{660}$, während ohne Induktivität $i_{max} = \frac{P_c}{500}$, also 1,32 mal so groß war.

2. Im Grenzfall $R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ erhält man durch Einsetzen von Gl. 294 in 289 und 290 für $t = 0$, $k_1 = q_{f(0)} = P_c C$

$$k_2 - \frac{2}{RC} k_1 = i_{f(0)} = 0, \quad k_2 = \frac{2k_1}{RC} = \frac{2P_c}{R}$$

und hiermit
$$q = q_f = P_c C \left(1 + \frac{2t}{RC} \right) e^{-\frac{2t}{RC}} \dots \dots (297)$$

$$i = i_f = -\frac{P_c}{L} t e^{-\frac{2t}{RC}} \dots \dots \dots (298)$$

3. Bei oszillierender Entladung endlich, $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, erhält man in Gl. 292 a und 293 a für $t = 0$

$$\begin{aligned} A \sin \delta &= q_{f(0)} = P_c C \\ -\alpha A \sin \delta + \beta A \cos \delta &= i_{f(0)} = 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sin \delta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \beta \sqrt{LC}$$

und

$$A = \frac{P_c C}{\sin \delta} = \frac{P_c}{\beta} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Hiermit werden Gl. 292 a und 293 a

$$q = q_f = e^{-\alpha t} \frac{P_c}{\beta} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \left(\beta t + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \right) \dots (299)$$

$$i = i_f = e^{-\alpha t} \frac{P_c}{\beta L} \sin \beta t \dots \dots \dots (300)$$

Der größte Strom ergibt sich hier, wenn $\frac{d(e^{-\alpha t} \sin \beta t)}{dt} = 0$ ist, also wenn $\operatorname{tg} \beta t = \frac{\beta}{\alpha}$ oder $t = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$ ist, worin T die Periodendauer ist. Es wird

$$\sin \beta t = \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \right) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \beta \sqrt{LC}$$

und

$$i_{max} = P_c \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{2L\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)} \dots \dots (301)$$

Für einen widerstandsfreien Stromkreis wäre die Stromamplitude und ebenso die Ladungs- (bzw. Spannungs-) Amplitude ungedämpft

$i_{max} = P_c \sqrt{\frac{C}{L}}$, sie tritt, da für $R = 0$, $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ ist, zuerst $\frac{1}{4}$ Periode nach dem Beginn der Entladung auf. Die ursprünglich

im Kondensator vorhandene Energie $\frac{1}{2} P_c^2 C$ entladet sich dann vollständig in das Feld der Induktivität und erscheint dort nach $\frac{1}{4}$ Periode als magnetische Energie $\frac{1}{2} i_{max}^2 L$. Jetzt kann der Strom nicht mehr steigen, und da die Kondensatorspannung Null geworden ist, entladet sich die Induktivität in den Kondensator usw.

Ist Widerstand vorhanden, so wird bei jeder Ladung ein Teil der Energie in Wärme umgesetzt, daher sind die Amplituden gedämpft, der Vorgang klingt aus und die während des ganzen Vorgangs erzeugte Stromwärme ist gleich der ursprünglich im Kondensator aufgespeicherten Energie.

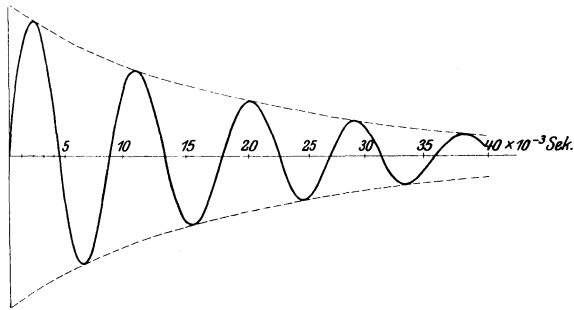


Fig. 170.

Fig. 170 zeigt den Stromverlauf für

$$C = 10^{-6} \text{ Fd.}, \quad L = 0,5 \text{ Henry}, \quad R = 100 \text{ Ohm.}$$

Die Periodenzahl ist

$$\frac{\beta}{2\pi} = 224$$

und der Strom hat die Gleichung

$$i = \frac{P_c}{700} e^{-100t} \sin 1400 t.$$

Um mit einem derartigen Schwingungskreis Hochfrequenzschwingungen zu erzeugen, sind kleine Induktivitäten und kleine Widerstände erforderlich. Die Leistung eines solchen Systems ist aber sehr begrenzt, man geht daher heutzutage in der Funkentelegraphie allgemein dazu über, hochfrequente Ströme durch Maschinen zu erzeugen.

b) Ladung mit konstanter Spannung.

Bei der Ladung mit konstanter Spannung sind die Grenzbedingungen, wenn der Kondensator ungeladen war

$$\begin{aligned} q_a &= 0 & i_a &= 0 \\ q_e &= PC & i_e &= 0 \\ q_{f(0)} &= -q_{e(0)} = -PC & i_{f(0)} &= 0 \\ q &= q_e + q_f & i &= i_f. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen unterscheiden sich von denen bei der Entladung nur dadurch, daß die freie Ladung zur Zeit $t=0$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie dort, und daraus ergibt sich als gesamte Ladung nun die Differenz aus der Ladung des Endzustandes und der freien Ladung, die genau denselben Verlauf hat wie bei der Entladung, während der Ladestrom ebenfalls den gleichen Verlauf hat wie zuvor, jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen. Bei oszillierender Ladung haben die freie Ladung und die Kondensatorspannung nach $\frac{1}{2}$ Periode ihre größte Amplitude in entgegengesetztem Sinne wie zu Anfang und addieren sich zum stationären Wert. Da $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\beta}$, wird die maximale Kondensatorspannung

$$P_{max} = P \left(1 + \varepsilon^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}} \right),$$

d. h. bei kleinem Widerstand, doppelt so groß wie die stationäre Spannung.

Aus dem gleichen Verlauf des Ladestromes und des Entladestromes folgt wieder wie für den Stromkreis mit R und C , daß die gesamte Stromwärme während der Ladung ebenso groß ist wie bei der Entladung, nämlich gleich der im Endzustand im Kondensator aufgespeicherten Energie $\frac{1}{2} P^2 C$.

Dies gilt also auch bei Anwesenheit einer Induktivität und unabhängig davon, ob der Ladevorgang aperiodisch oder oszillierend ist.

c) Ausgleichvorgänge bei sinusförmiger Spannung.

Wirkt auf den Stromkreis eine Wechselfpannung

$$p = p_m \sin(\omega t + \psi),$$

so ist der stationäre Strom nach Kap. II S. 26.

$$i_e = i_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

worin

$$i_m = \frac{p_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

ein Voreilungs- oder Verzögerungswinkel ist, je nachdem $\frac{1}{\omega C}$ größer oder kleiner als ωL ist. Die Ladung des Kondensators ist

$$q_e = \frac{i_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi + \varphi).$$

Wird der Stromkreis zur Zeit $t=0$ eingeschaltet, so ist

$$q_a = 0, \quad i_a = 0.$$

Gehen wir gleich zu dem praktisch wichtigsten Fall des oszillatorischen Einschaltvorganges über, so ist nach Gl. 292a und 293

$$q_{f(0)} = -q_{e(0)} = -\frac{i_m}{\omega} \cos(\psi + \varphi) = A \sin \delta. \quad . \quad . \quad . \quad (302)$$

$$i_{f(0)} = -i_{e(0)} = -i_m \sin(\psi + \varphi) = -\alpha A \sin \delta + \beta A \cos \delta \quad (303)$$

Setzt man den Wert von $A \sin \delta$ aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so wird

$$A \cos \delta = -\frac{i_m}{\beta} \sin(\psi + \varphi) - \frac{\alpha}{\omega \beta} i_m \cos(\psi + \varphi).$$

Gl. 293, S. 258, für den freien Strom lautet nach Auflösung von $\sin(\beta t + \delta)$ und $\cos(\beta t + \delta)$

$$i_f = \varepsilon^{-\alpha t} [A \cos \delta (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t) - A \sin \delta (\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t)].$$

Durch Einsetzen von $A \cos \delta$ und $A \sin \delta$ wird

$$i_f = \varepsilon^{-\alpha t} \left[\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \frac{i_m}{\omega} \cos(\psi + \varphi) \sin \beta t + \frac{i_m}{\beta} \sin(\psi + \varphi) (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) \right]$$

oder da $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC}$ ist

$$i_f = \varepsilon^{-\alpha t} \left[\frac{i_m}{\beta \omega LC} \cos(\psi + \varphi) \sin \beta t + \frac{i_m}{\beta \sqrt{LC}} \sin(\psi + \varphi) \sin \left(\beta t - \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \quad . \quad (304)$$

$\frac{i_m}{\omega C} = p_{em}$ ist die stationäre Amplitude der Kondensatorspannung. Analog erhält man für die freie Ladung

$$q_f = \varepsilon^{-\alpha t} \left[-\frac{i_m}{\beta} \sin(\psi + \varphi) \sin \beta t - \frac{i_m}{\beta \omega \sqrt{LC}} \cos(\psi + \varphi) \sin \left(\beta t + \arctg \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \quad . \quad (305)$$

und die der freien Ladung entsprechende Spannung am Kondensator $p_{cf} = \frac{qf}{C}$.

Der freie Strom und die Ladung setzen sich aus je zwei Sinuswellen mit gedämpften Amplituden von der Kreisfrequenz β zusammen, die gegeneinander um $\arctg \frac{\beta}{\alpha}$, d. h. bei einem schwach gedämpften Stromkreis (α sehr klein) um fast 90° gegeneinander verschoben sind.

Ihre Größe hängt von $(\psi + \varphi)$, d. h. von den Anfangswerten im Augenblick des Einschaltens ab. Da die Eigenfrequenz $\frac{\beta}{2\pi}$ des Stromkreises meist sehr groß gegen die Netzfrequenz ist, ist es hier weniger wichtig, den größten Wert des gesamten Stromes und der gesamten Ladung bzw. Spannung des Kondensators zu untersuchen, die sich durch Addition der stationären Werte zu Gl. 304 und 305 ergeben, sondern es genügt, die größten Werte des freien Stromes und der freien Ladung zu betrachten.

Ist der Stromkreis schwach gedämpft, R klein, so ist die eigene Kreisfrequenz nach S. 258 sehr angenähert

$$\beta \approx \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

daher wird in den zweiten Gliedern der Gl. 304 und 305 im Nenner

$$\beta \sqrt{LC} \approx 1.$$

Diese Glieder können also nicht größer als die stationären Amplituden werden. Dagegen wird die Amplitude des ersten Gliedes in der Gl. 304 des Stromes, wenn $\cos(\psi + \varphi) = \pm 1$ wird, angenähert $\frac{i_m \beta}{\omega}$, also soviel mal größer als die stationäre Stromamplitude, wie die Eigenfrequenz größer ist als die Netzfrequenz. Dieser Wert kann also sehr groß werden. Die Bedingung dafür ist

$$\cos(\psi + \varphi) = \pm 1, \quad \sin(\psi + \varphi) = 0,$$

sie wird erfüllt, wenn beim Nulldurchgang des stationären Stromes oder bei einem schwach gedämpften Stromkreis (R klein, $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$) beim Maximalwert der Spannung eingeschaltet wird.

Das erste Glied in der Gl. 305 für die Ladung hat die größte Amplitude, wenn $\sin(\psi + \varphi) = 1$ ist, und wird $\frac{i_m}{\beta}$, also $\frac{\omega}{\beta}$ mal so groß wie die stationäre Amplitude der Ladung, d. h. um so kleiner,

je höher die Eigenfrequenz gegen die Netzfrequenz ist. Dieses Glied kann also keine wesentliche Erhöhung der Ladung bzw. Kondensatorspannung verursachen, sondern nur das zweite Glied. Dieses kann höchstens ebenso groß werden wie die stationäre Ladung, so daß bei der Übereinanderlagerung beider Größen im Übergangszustand höchstens die doppelte Ladung und Spannung erreicht werden kann.

Um die allgemeine Bedingung für die größten Amplituden des freien Stromes zu ermitteln, hat man die beiden um $\arctg \frac{\beta}{\alpha}$ phasenverschobenen Sinuswellen zu einer zusammenzufassen. Nach der Regel

$$i = \sqrt{i'^2 + i''^2 + 2i'i'' \cos(\varphi' - \varphi'')}$$

erhält man die Amplitude der resultierenden Welle

$$\frac{i_m}{\beta \sqrt{LC}} \sqrt{1 + \cos^2(\psi + \varphi) \left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1 \right) + \frac{R}{\omega L} \sin 2(\psi + \varphi)} \quad (304a)$$

Differentiiert man nach ψ , so ergibt sich als Bedingung für das Maximum

$$-\sin 2(\psi + \varphi) \left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1 \right) + \frac{R}{\omega L} \cos 2(\psi + \varphi) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2(\psi + \varphi) = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} = \operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$\psi + \varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \frac{3\varphi}{2} \dots \dots \dots (306)$$

Man ersieht hieraus, daß für $\varphi \cong \frac{\pi}{2}$, $(\psi + \varphi) = 0$, also der Zeitpunkt des Nulldurchgangs des Stromes und der maximalen Spannung die größten Amplituden ergibt.

Fig. 171 zeigt für einen Stromkreis mit

$$C = 10^{-6} \text{ Fd.}, \quad L = 0,5 \text{ Henry}, \quad R = 30 \text{ Ohm}$$

das Einschwingen des Stromes, wenn beim Nulldurchgang des stationären Stromes eingeschaltet wird, und Fig. 172, wenn beim Maximum des stationären Stromes eingeschaltet wird.

Dieser Fall liegt angenähert z. B. vor, wenn ein Transformator, an den ein unbelastetes Kabel angeschlossen ist, an der Niederspannungsseite an den Generator geschaltet wird. Hier ist die

Kapazität des offenen Kabels, die man sich in der Mitte des Kabels konzentriert denken kann, mit dem halben Widerstand der Leitung

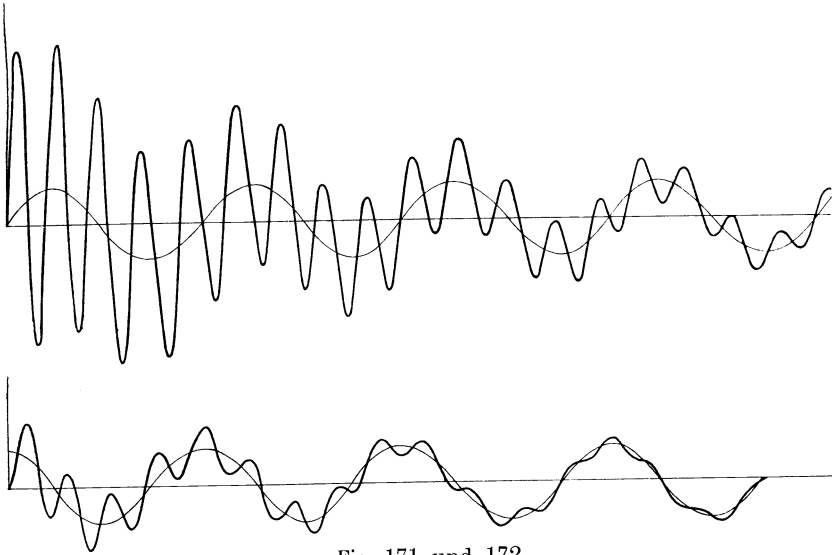


Fig. 171 und 172.

und der Kurzschlußimpedanz des Transformators in Reihe geschaltet. Es können hier wieder große Stromstöße entstehen, während die Spannung bis auf fast den doppelten Wert steigen kann.

79. Zusammengesetzte Stromkreise.

Sind zwei Stromkreise parallel an eine Stromquelle geschaltet, deren Spannung unabhängig von dem entnommenen Strom ist, so wird jeder Ausgleichsvorgang in einem Stromkreis sich so abspielen, als ob der andere nicht vorhanden wäre, und dieser wird von den Vorgängen in jenem unbeeinflusst bleiben. Ist die Spannung des einen Stromkreises dagegen abhängig von den Vorgängen im anderen, wie es bei Zweigen zusammengesetzter Stromkreise der Fall ist, so wird ein Ausgleichsvorgang in einem Zweige auch einen solchen in dem anderen bedingen.

Als Beispiel betrachten wir die Schaltung Fig. 173, bei der zwei Zweige mit den Widerständen R_1 , R_2 und den Induktivitäten L_1 , L_2 in Reihe mit dem Zweig R , L geschaltet sind¹⁾.

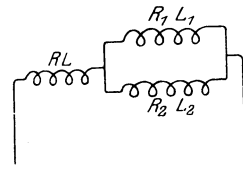


Fig. 173.

¹⁾ s. Kuhlmann, Arch. f. Elektrotechnik Bd. I, S. 527.

Sind i, i_1, i_2 die drei Ströme, so gelten die folgenden Gleichungen

$$p = Ri + L \frac{di}{dt} + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \dots \quad (307)$$

$$p = Ri + L \frac{di}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \dots \quad (308)$$

$$i = i_1 + i_2 \quad \dots \quad (309)$$

Substituiert man Gl. 309 in 307 und 308, so wird

$$p = (R + R_1) i_1 + (L + L_1) \frac{di_1}{dt} + R i_2 + L \frac{di_2}{dt} \quad (307a)$$

$$p = (R + R_2) i_2 + (L + L_2) \frac{di_2}{dt} + R i_1 + L \frac{di_1}{dt} \quad (307b)$$

Man eliminiert nun i_1 , indem man Gl. 307a mit L und Gl. 307b mit $(L + L_1)$ multipliziert und subtrahiert:

$$i_1 = \frac{pL_1 - i_2 [RL_1 + R_2(L + L_1)] - \frac{di_2}{dt}(L_1L_2 + LL_2 + LL_1)}{(RL_1 - R_1L)} \quad (310)$$

Durch Differentiation wird

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_1 \frac{dp_1}{dt} - [RL_1 + R_2(L + L_1)] \frac{di_2}{dt} - (L_1L_2 + LL_2 + LL_1) \frac{d^2i_2}{dt^2}}{(RL_1 - R_1L)} \quad (310a)$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} R_1R_2 + R_1R + R_2R &= \varrho \\ L_1L_2 + L_1L + L_2L &= \lambda \\ R(L_1 + L_2) + R_1(L_2 + L) + R_2(L_1 + L) &= \nu \end{aligned} \right\} \quad (311)$$

so erhält man durch Einsetzen von Gl. 310 und 310a in 307b

$$pR_1 + L_1 \frac{dp}{dt} = \varrho i_2 + \nu \frac{di_2}{dt} + \lambda \frac{d^2i_2}{dt^2} \quad \dots \quad (307b)$$

i_2 setzt sich während der Übergangszeit aus dem stationären Endstrom i_{2e} und dem freien Strom i_{2f} zusammen. Für den freien Strom ist

$$\frac{d^2i_{2f}}{dt^2} + \frac{\nu}{\lambda} \frac{di_{2f}}{dt} + \frac{\varrho}{\lambda} i_{2f} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$i_{2f} = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \quad \dots \quad (312)$$

worin die Dämpfungsfaktoren α_1, α_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^2 + \frac{\nu}{\lambda} \alpha + \frac{\varrho}{\lambda} = 0$$

sind, d. h.

$$\alpha_{1,2} = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\varrho\lambda}}{2\lambda} \dots \dots \dots (313)$$

Man überzeugt sich durch Gl. 311, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv ist, daher beide Teile des Ausgleichstromes aperiodisch verlaufen. Nur kann der eine Dämpfungsfaktor α_1 , bei dem im Zähler die Differenz steht, viel kleiner sein als der andere, so daß der eine Teil sehr schwach gedämpft ist.

Für den Stromkreis 1 erhält man genau die gleiche Rechnung, wenn in Gl. 310 und 310a die Indizes 1 und 2 vertauscht werden. Daher kann man setzen:

$$i_{1f} = k_1' \varepsilon^{\alpha_1 t} + k_2' \varepsilon^{\alpha_2 t} \dots \dots \dots (312a)$$

Die Beziehung zwischen den Konstanten k_1, k_1', k_2, k_2' erhält man durch Einsetzen von Gl. 312 in Gl. 310

$$i_{1f} = - \frac{k_1 \varepsilon^{\alpha_1 t} [RL_1 + R_2(L_1 + L) + \alpha_1 \lambda] + k_2 \varepsilon^{\alpha_2 t} [RL_1 + R_2(L_1 + L) + \alpha_2 \lambda]}{RL_1 - R_1 L}$$

daher

$$\left. \begin{aligned} k_1' &= - k_1 \frac{RL_1 + R_2(L_1 + L) + \alpha_1 \lambda}{RL_1 - R_1 L} = - k_1 A_1 \\ k_2' &= - k_2 \frac{RL_1 + R_2(L_1 + L) + \alpha_2 \lambda}{RL_1 - R_1 L} = - k_2 A_2 \end{aligned} \right\} (314)$$

Setzt man die Werte von α_1 und α_2 aus Gl. 313 und λ aus Gl. 311 ein, so werden die Koeffizienten A_1, A_2

$$A_{1,2} = \frac{R(L_1 - L_2) + R_2(L_1 + L) - R_1(L_2 + L) \pm \sqrt{\nu^2 - 4\varrho\lambda}}{2(RL_1 - R_1 L)} \quad (315)$$

Sind die parallelgeschalteten Stromzweige gleich, d. h. $R_1 = R_2$ und $L_1 = L_2$, so ist

$$A_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\nu^2 - 4\varrho\lambda}}{2(RL_1 - R_1 L)} = \pm 1 \dots \dots (315a)$$

d. h.

$$\left. \begin{aligned} k_1' &= - k_1 \\ k_2' &= + k_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (314a)$$

In dem unverzweigten Stromkreis ist der freie Strom

$$i_f = i_{1f} + i_{2f} = (k_1 + k_1') \varepsilon^{\alpha_1 t} + (k_2 + k_2') \varepsilon^{\alpha_2 t} \dots (316)$$

Für gleiche Zweige wird nach Gl. 314 a

$$i_f = 2 k_2 \varepsilon^{a_2 t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (317)$$

Der schwach gedämpfte Ausgleichstrom tritt hierbei in dem vorgeschalteten Zweig gar nicht auf, sondern er verläuft lediglich als ein Kreisstrom in den beiden parallelgeschalteten Zweigen. In dem unverzweigten Stromkreis tritt nur die Summe der beiden schnell abklingenden freien Ströme auf; hier kann also der Ausgleichsvorgang schon längst abgelaufen sein, während er in den parallelen Zweigen fortbesteht.

Zur Bestimmung der Konstanten dienen die Grenzbedingungen. Seien $i_{1a(0)}$ und $i_{2a(0)}$ die stationären Anfangsströme zur Zeit $t=0$, und die Endwerte für $t=0$ $i_{1e(0)}$ und $i_{2e(0)}$, so ist, s. Gl. 312a u. 314

$$\begin{aligned} i_{1f(0)} &= -A_1 k_1 - A_2 k_2 = i_{1a(0)} - i_{1e(0)}, \\ i_{2f(0)} &= k_1 + k_2 = i_{2a(0)} - i_{2e(0)}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{i_{1f(0)} + A_2 i_{2f(0)}}{A_2 - A_1} \\ k_2 &= \frac{i_{1f(0)} + A_1 i_{2f(0)}}{A_1 - A_2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (318)$$

und für gleiche Stromzweige nach Gl. 315 a

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{i_{1f(0)} - i_{2f(0)}}{2} \\ k_2 &= \frac{i_{1f(0)} + i_{2f(0)}}{2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (318a)$$

Wird z. B. der ganze Stromkreis eingeschaltet, so ist für gleiche Stromzweige

$$i_{1f(0)} = i_{2f(0)}$$

und daher

$$k_1 = 0.$$

Der langsam ausklingende Teil des freien Stromes, der nur in den parallelgeschalteten Zweigen auftritt, fällt hier fort, und es bleibt nur der schnell abklingende Teil.

War dagegen der eine Stromzweig (1) eingeschaltet und wird der zweite dazu geschaltet, so ist für diesen

$$i_{2a(0)} = 0, \quad i_{2f(0)} = -i_{2e(0)}.$$

Dann ist für gleiche Zweige

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{i_{1a(0)} - i_{1e(0)} + i_{2e(0)}}{2} = \frac{i_{1a(0)}}{2} \\ k_2 &= \frac{i_{1a(0)} - i_{1e(0)} - i_{2e(0)}}{2} = \frac{i_{1a(0)}}{2} - i_{1e(0)}. \end{aligned}$$

Die Ströme während der Übergangszeit sind für diesen Fall

$$i_1 = i_{1e} + i_{1f} = i_{1e} + \frac{i_{1a(0)}}{2} \varepsilon^{\alpha_1 t} + \left[\frac{i_{1a(0)}}{2} - i_{1e(0)} \right] \varepsilon^{\alpha_2 t}$$

$$i_2 = i_{2e} + i_{2f} = i_{1e} - \frac{i_{1a(0)}}{2} \varepsilon^{\alpha_1 t} + \left[\frac{i_{1a(0)}}{2} - i_{1e(0)} \right] \varepsilon^{\alpha_2 t}.$$

Das schwach gedämpfte Glied des freien Stromes, das in beiden Zweigen entgegengesetztes Vorzeichen hat und in dem vorgeschalteten Zweig nicht aufritt, ist hier gleich dem halben Anfangswert des Stromes, in dem nicht geschaltet wurde. Dieser Kreisstrom entspricht einer Ladung des Feldes des zugeschalteten Stromkreises durch den schon eingeschalteten; er fällt fort, wenn die vorgeschaltete Impedanz (R, L) gleich Null ist.

Enthalten die Stromkreise Eisen, wie z. B. wenn 1 und 2 zwei Transformatoren bezeichnen, die über eine lange Leitung mit großem Spannungsabfall gespeist werden, so können, wie auf S. 248 gezeigt wurde, durch Sättigung und Remanenz die Stromstöße beim Schalten sehr groß werden.

Kuhlmann¹⁾ beobachtete beim Einschalten eines Transformators, daß infolge des Stromstoßes nicht nur bei diesem, sondern auch bei einem benachbarten Transformator, der über die gleiche Fernleitung gespeist wurde, der selbsttätige Überstromauschalter auslöste. Wie aus der Berechnung hervorgeht, ist dies dem großen Spannungsabfall in der Leitung und der dadurch hervorgerufenen gegenseitigen Beeinflussung der Stromkreise zuzuschreiben ist. Durch Verwendung eines Schalters mit Widerstandsvorstufe läßt sich auch hier der Stromstoß in zulässigen Grenzen halten.

80. Stromkreise mit gegenseitiger Induktion.

Ein Transformator. Die Gleichungen des Transformators sind nach Kap. IX S. 137

$$p_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \dots \dots (319)$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \dots \dots (320)$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung wird

$$\frac{dp_1}{dt} = R_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2} \dots \dots (321)$$

¹⁾ l. c.

während aus der zweiten Gleichung ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{1}{M} \left(R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) \\ \frac{d^2 i_1}{dt^2} &= -\frac{1}{M} \left(R_2 \frac{di_2}{dt} + L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots (322)$$

Setzt man Gl. 322 in Gl. 321 ein, so wird

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} (L_1 L_2 - M^2) + \frac{di_2}{dt} (R_1 L_2 + L_1 R_2) + i_2 R_1 R_2 = -M \frac{dp_1}{dt} \quad (323)$$

Differentiiert man Gl. 320 und setzt $\frac{di_2}{dt}$ und $\frac{d^2 i_2}{dt^2}$ aus Gl. 319 ein, so wird analog

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} (L_1 L_2 - M^2) + \frac{di_1}{dt} (R_1 L_2 + L_1 R_2) + i_1 R_1 R_2 = p_1 R_2 + L_2 \frac{dp_1}{dt} \quad (324)$$

Die Gleichungen der freien Ströme erhält man, indem man die rechten Seiten in Gl. 323 und 324 Null setzt. Für den primären und den sekundären freien Strom gilt daher:

$$\frac{d^2 i_f}{dt^2} (L_1 L_2 - M^2) + \frac{di_f}{dt} (R_1 L_2 + L_1 R_2) + i_f R_1 R_2 = 0 \quad (325)$$

$$i_f = k e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 (L_1 L_2 - M^2) + \alpha (R_1 L_2 + L_1 R_2) + R_1 R_2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R_1 L_2 + L_1 R_2 \pm \sqrt{(R_1 L_2 - L_1 R_2)^2 + 4 R_1 R_2 M^2}}{2 (L_1 L_2 - M^2)} \quad (326)$$

Die Wurzeln sind stets reell, die freien Ströme sind aperiodisch. Wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} i_{f1} &= k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \\ i_{f2} &= k_1' e^{\alpha_1 t} + k_2' e^{\alpha_2 t} \end{aligned} \right\} \dots (327)$$

und durch Einsetzen dieser Gleichungen in 320 erhält man die Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} k_1' &= -k_1 \frac{\alpha_1 M}{R_2 + \alpha_1 L_2} \\ k_2' &= -k_2 \frac{\alpha_2 M}{R_2 + \alpha_2 L_2} \end{aligned} \right\} \dots (328)$$

Als Beispiel möge das Einschalten des kurzgeschlossenen Transformators betrachtet werden. Hierfür kann man setzen

$$R_1 = R_2 = R$$

$$L_1 = L_2 = L.$$

Dann wird nach Gl. 326

$$\alpha_1 = -\frac{RL - RM}{L^2 - M^2} = -\frac{R}{L + M} \dots \dots \dots (329)$$

$$\alpha_2 = -\frac{RL + RM}{L^2 - M^2} = -\frac{R}{L - M} = -\frac{R}{S} \dots (330)$$

worin $S = (L - M)$ die Streuinduktivität ist.

Der zweite Dämpfungsfaktor ist groß, weil S klein ist, der erste ist sehr klein. Da M nicht viel kleiner als L ist, ist α_1 etwa halb so groß wie α beim leerlaufenden Transformator.

Es sei nun $p_1 = p_{1m} \sin(\omega t + \psi)$.

Der stationäre primäre Strom ist der Kurzschlußstrom i_{1k} , der um φ_k gegen p_1 verzögert ist:

$$i_{1e} = i_{1km} \sin(\omega t + \psi - \varphi_k).$$

Für $t = 0$ ist $i_{1a(0)} = 0$

$$i_{1e(0)} = i_{1km} \sin(\psi - \varphi_k) = i_{1k(0)}$$

$$i_{1f(0)} = k_1 + k_2 = i_{1a(0)} - i_{1e(0)} = -i_{1k(0)} \dots (331)$$

Der sekundäre stationäre Kurzschlußstrom i_{2k} ist gegen i_{1k} (s. Kap. XII S. 218) um $\pi - \gamma_k$ verzögert, es ist

$$i_{2k} = i_{2km} \sin[\omega t + \psi - \varphi_k - (\pi - \gamma_k)].$$

Aus Gl. 328 erhält man durch Gl. 329 und 330

$$k_1' = k_1, \quad k_2' = -k_2,$$

daher
$$i_{2f(0)} = k_1 - k_2 = i_{2a(0)} - i_{2e(0)} = -i_{2k(0)} \dots (332)$$

Aus Gl. 331 und 332 wird

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{i_{1k(0)} + i_{2k(0)}}{2} \\ k_2 &= -\frac{i_{1k(0)} - i_{2k(0)}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (333)$$

Hiermit sind die freien Ströme nach Gl. 327

$$\left. \begin{aligned} i_{1f} &= -\frac{i_{1k(0)} + i_{2k(0)}}{2} \varepsilon^{-\frac{R}{L+M}t} - \frac{i_{1k(0)} - i_{2k(0)}}{2} \varepsilon^{-\frac{R}{S}t} \\ i_{2f} &= -\frac{i_{1k(0)} + i_{2k(0)}}{2} \varepsilon^{-\frac{R}{L+M}t} + \frac{i_{1k(0)} - i_{2k(0)}}{2} \varepsilon^{-\frac{R}{S}t} \end{aligned} \right\} \dots (334)$$

Die beiden Glieder haben folgende Bedeutung: Die ersten schwach gedämpften Teile sind primär und sekundär gleichgerichtet und von der halben Summe der stationären Ströme, d. h. vom stationären Magnetisierungsstrom abhängig. Sie stellen

also die Teile der freien Ströme dar, die den beim Einschalten fehlenden Fluß erzeugen; jede Wicklung trägt die Hälfte dazu bei.

Dieser Teil kann durch Remanenz und Sättigung wieder sehr hohe Werte annehmen, jedoch kaum so hohe wie bei Leerlauf, erstens weil der Fluß bei Kurzschluß kleiner ist als bei Leerlauf, und zweitens, weil die Wicklungen sich unterstützen.

Der zweite Teil des freien Stromes, der in beiden Wicklungen entgegengesetzt gerichtet ist, hängt von der Differenz der beiden Kurzschlußströme ab, und da diese um fast 180° gegeneinander phasenverschoben sind, ist sein Anfangswert fast ebenso groß wie der Kurzschlußstrom jeder Wicklung für $t=0$. Dieser Teil klingt schnell ab. Nimmt man an, daß $\frac{R}{\omega S} = \frac{1}{3}$, also $\frac{R}{S} = \frac{\omega}{3}$ ist, so ist nach $\frac{1}{2}$ Periode $e^{-\frac{R}{S} \frac{T}{2}} = e^{-\frac{\pi}{3}} = 0,35$, so daß dieser Teil nach Umkehr der Richtung des stationären Kurzschlußstromes diesen nicht wesentlich verstärken kann. Der erste Teil hingegen, der länger andauert, kann durch Überlagerung über die stationären Kurzschlußströme sehr hohe Stromstöße und große mechanische Kräfte zwischen den Wicklungen hervorrufen.

Analog stellt sich die Berechnung für einen Kurzschluß des belasteten Transformators. Hier sind die Anfangsströme $i_{1a(0)}$ und $i_{2a(0)}$ durch die Belastung gegeben, man erhält

$$\begin{aligned} i_{1f(0)} &= k_1 + k_2 = i_{1a(0)} - i_{1k(0)} \\ i_{2f(0)} &= k_1 - k_2 = i_{2a(0)} - i_{2k(0)} \\ k_1 &= \frac{[i_{1a(0)} + i_{2a(0)}] - [i_{1k(0)} + i_{2k(0)}]}{2} \\ k_2 &= \frac{[i_{1a(0)} - i_{2a(0)}] - [i_{1k(0)} - i_{2k(0)}]}{2} \end{aligned}$$

Der erste Faktor enthält hier die Differenz des Magnetisierungsstromes bei Belastung und jenes bei Kurzschluß. Da der Fluß bei Belastung fast ebenso groß ist wie bei Leerlauf und der bei Kurzschluß sehr klein ist, so nähern sich hier die Verhältnisse mehr denen beim Einschalten des unbelasteten Transformators, so daß die Stromstöße bei Kurzschluß des belasteten oder leerlaufenden Transformators noch größer werden können als beim Einschalten des sekundär kurzgeschlossenen Transformators.

81. Das Ausschalten eines induktiven Stromkreises.

Wir betrachten das Ausschalten eines induktiven Stromkreises als Beispiel eines Ausgleichsvorganges mit veränderlichem Widerstand.

Beim Ausschalten eines Stromkreises muß die in ihm aufgespeicherte magnetische und elektrische Energie in eine andere Energieform, z. B. in Wärme, umgewandelt werden. Hierzu ist eine gewisse Zeit erforderlich. Der Strom verschwindet nicht augenblicklich, sondern er bleibt zunächst über einen Lichtbogen bestehen, der sich zwischen den Schalterkontakten bildet. Je mehr die Kontakte sich voneinander entfernen, um so größer wird der Widerstand des Lichtbogens, um so mehr wird der Strom geschwächt.

Eine exakte Beschreibung des Vorgangs müßte also von den Erscheinungen im Lichtbogen selbst ausgehen, die sich aber nicht analytisch ausdrücken lassen. Begnügt man sich aber, die Rückwirkung des Vorgangs auf den Stromkreis zu untersuchen, so kann man eine bestimmte Annahme über den Widerstand des Lichtbogens machen. Zu Beginn des Vorgangs ist der Widerstand des Stromkreises R , nach einer gewissen Zeit τ , der Ausschaltzeit, ist er unendlich groß. Man kann nun den Vorgang dadurch darstellen, daß man für den Widerstand in der Zwischenzeit nach Arons¹⁾ den Ansatz macht

$$\frac{R}{1 - \frac{t}{\tau}} \dots \dots \dots (335)$$

Für einen induktiven Stromkreis lautet hiermit die Gleichung während des Ausschaltens

$$L \frac{di}{dt} + \frac{R}{1 - \frac{t}{\tau}} i = p \dots \dots \dots (336)$$

Setzt man

$$t = \tau x, \quad dt = \tau dx,$$

so wird

$$\frac{di}{dx} + \frac{R \tau i}{L(1 - x)} = \frac{p \tau}{L} \dots \dots \dots (336a)$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist

$$i = \varepsilon^{-\int \frac{R \tau}{L(1-x)} dx} \left(\int \frac{p \tau}{L} \varepsilon^{\int \frac{R \tau}{L(1-x)} dx} + C \right) \dots \dots (337)$$

¹⁾ Wiedem. Annalen 1897, Bd. 63, S. 177; ETZ 1899, S. 601.

Es ist
$$\int \frac{R}{L} \frac{\tau}{1-x} dx = -\frac{R}{L} \tau \ln(1-x),$$

daher

$$i = (1-x)^{\frac{R\tau}{L}} \left[\frac{p\tau}{L} \int (1-x)^{-\frac{R}{L}\tau} dx + C \right]. \quad (338)$$

Es ist nun zu unterscheiden, ob die Ausschaltzeit τ verschieden von der Zeitkonstanten $\frac{L}{R}$ des Stromkreises oder ihr gleich ist.

Ist zunächst $\frac{R\tau}{L} \geq 1$, so wird

$$\begin{aligned} \int (1-x)^{-\frac{R}{L}\tau} dx &= -\int (1-x)^{-\frac{R}{L}\tau} d(1-x) \\ &= -\frac{1}{1-\frac{R}{L}\tau} (1-x)^{\left(1-\frac{R\tau}{L}\right)} \\ &= \frac{L}{R\tau-L} (1-x)^{\left(1-\frac{R\tau}{L}\right)}, \end{aligned}$$

und mit diesem Wert wird Gl. 338

$$i = \frac{p\tau}{R\tau-L} (1-x) + C(1-x)^{\frac{R\tau}{L}}.$$

Für $x=0$ ist $i = i_0 = \frac{p\tau}{R\tau-L} + C$,

daher

$$i = \frac{p\tau}{R\tau-L} (1-x) + \left(i_0 - \frac{p\tau}{R\tau-L} \right) (1-x)^{\frac{R\tau}{L}} \quad (339)$$

Ist zweitens $\frac{R\tau}{L} = 1$, so wird Gl. 338

$$i = (1-x) \left[\frac{p\tau}{L} \int \frac{dx}{1-x} + C \right] = (1-x) \left[C - \frac{p\tau}{L} \ln(1-x) \right].$$

Bestimmt man die Integrationskonstante wieder aus

$$x=0, \quad i = i_0 = C,$$

so wird

$$i = (1-x) \left[i_0 + \frac{p\tau}{L} \ln \frac{1}{1-x} \right]. \quad (340)$$

Für den Verlauf des Stromes ist das Verhältnis der Ausschaltzeit zur Zeitkonstante $\frac{L}{R}$ maßgebend. Für einen induktionsfreien Stromkreis ist $L=0$ und daher $\frac{R\tau}{L} = \infty$. Für diesen Grenzfall

für den $i_0 = \frac{p}{R}$ ist, erhält das zweite Glied in Gl. 339 die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$, ihr Wert ist Null. Es bleibt das erste Glied und der Strom nimmt linear nach der Gleichung

$$i = \frac{p}{R} (1 - x)$$

ab. Je größer die Selbstinduktion ist, um so langsamer verschwindet der Strom anfänglich, um so schneller muß er gegen Ende der Ausschaltzeit verschwinden. Fig. 174 zeigt den Verlauf des Stromes nach Gl. 339 für das Ausschalten eines Gleichstromes, für verschiedene Werte von $\frac{R\tau}{L}$.

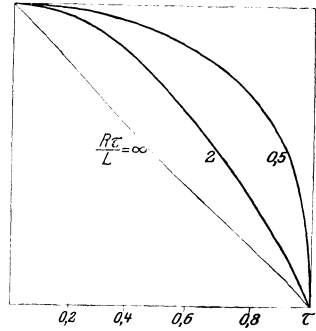


Fig. 174.

Das schnelle Verschwinden des Stromes gegen Ende der Ausschaltzeit bedingt sehr hohe Selbstinduktionsspannungen und dadurch hohe Spannungen am Lichtbogen.

Für einen Gleichstromkreis ist $p = i_0 R$, und die Widerstandsspannung ist nach Gl. 339 und 335 für $\frac{R\tau}{L} \geq 1$

$$i R = p \frac{(1-x) - \frac{L}{R\tau} (1-x)^{\left(\frac{R\tau}{L}\right)}}{1 - \frac{L}{R\tau}}$$

und für $\frac{R\tau}{L} = 1$

$$i R = p (1-x) \left[1 + \frac{R\tau}{L} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \right].$$

Der Widerstand des Lichtbogens ist

$$\frac{R}{1-x} - R = \frac{R x}{1-x}.$$

Daher die Lichtbogen­spannung für die beiden Fälle

$$p_l = i R \frac{x}{1-x} = p \frac{x - \frac{L}{R\tau} x (1-x)^{\left(\frac{R\tau}{L}-1\right)}}{1 - \frac{L}{R\tau}}$$

und

$$p_l = p x \left(1 + \frac{R\tau}{L} \ln \frac{1}{1-x} \right).$$

Am Ende der Schaltzeit ist $x = 1$, daher

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } \frac{R\tau}{L} > 1 \\ \text{und für } \frac{R\tau}{L} \leq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} p_l = \frac{p}{1 - \frac{L}{R\tau}} \\ p_l = \infty \end{array} \dots \dots \dots (341)$$

Diese Spannung ist außer für $L = 0$ stets größer als die Spannung des Stromkreises, um so mehr, je kleiner $\frac{R\tau}{L}$ ist. Die Rechnung ergibt für $\frac{R\tau}{L} \leq 1$ $p_l = \infty$. Praktisch ist dies nicht der Fall, sondern der Lichtbogen bleibt stehen und verlängert die Ausschaltzeit, bis die Konstante größer als 1 geworden ist. Hieraus ist ersichtlich, daß die Ausschaltzeit praktisch keine Konstante für einen Schalter ist, sondern von der Selbstinduktion des Stromkreises abhängt.

Die hohen Spannungen, die beim Ausschalten entstehen, können für die Isolation der Leitungen gefährlich werden. Magnetwicklungen von Dynamomaschinen, die eine sehr hohe Selbstinduktion besitzen, werden daher nicht direkt ausgeschaltet, sondern über einen Widerstand kurzgeschlossen.

Beim Ausschalten von Wechselströmen liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter, weil hier der Strom und die Spannung ihre Größe und Richtung ändern, und zwar je nach der Phasenverschiebung des Stromkreises in verschiedenen Augenblicken.

Ist der Stromkreis induktionsfrei, so wird der Strom beim Beginn des Schaltens zunächst etwas verkleinert. Sobald der Augenblick des ersten Richtungswechsels erreicht ist, erlischt der Lichtbogen, da der Strom durch Null hindurchgeht, und da in diesem Augenblick auch die Spannung durch Null geht und keine Selbstinduktionsspannung vorhanden ist, wird der Lichtbogen nicht wieder gezündet, vorausgesetzt, daß der Schalter sich schon so weit bewegt hat, daß während der folgenden Viertelperiode die steigende Netzspannung ihn nicht mehr zu zünden vermag.

Die Zündspannung hängt von dem Material, der Temperatur der Elektroden und von dem Medium ab. Sie ist in Öl viel größer als in Luft. Man verwendet daher für hohe Wechselspannungen meistens Ölschalter, bei denen das Öl die Elektroden kühlt und gut isoliert und das Entstehen großer Lichtbögen verhindert.

Ölschalter unterbrechen den Strom bei induktionsfreier Belastung stets in dem Augenblick, in dem er nach Beginn des Ausschaltvorgangs seinen natürlichen Nulldurchgang hat.

Anders ist es bei induktiver Belastung. Beim Nulldurchgang des Stromes besteht zwischen den Schalterkontakten die momentane Netzspannung $p_m \sin \varphi$, die bei stark induktiver Belastung fast gleich p_m sein kann. Diese Spannung vermag unter Umständen den Lichtbogen wieder zu zünden, so daß der Strom eine oder mehrere Perioden weiterschwingt, wobei jedesmal bei seinem Nulldurchgang die Spannung am Schalter steigt. Die Lichtbogenspannung wird um so größer, je größer die Phasenverschiebung φ des Stromkreises ist, erstens weil dann $p_m \sin \varphi$ im Augenblick des Nulldurchgangs groß ist und zweitens weil die Ausschaltkonstante $\frac{R\tau}{L}$ klein ist.

Bei Ölschaltern kann die Zündung der Lichtbögen durch Herausschleudern brennenden Öls oder durch Schalterexplosionen gefährlich werden, besonders wenn große Leistungen bei großer Phasenverschiebung unterbrochen werden, z. B. beim Ausschalten eines Generators bei Kurzschluß.

Man sucht daher bei den Ölschalterkonstruktionen durch einen hohen Ölstand über dem Schalter zu erreichen, daß das Öl unter einem gewissen Druck in den von Gasen erfüllten Raum zwischen den Kontakten dringt und den Lichtbogen löscht, und verwendet hohe Schaltergeschwindigkeiten, um zu verhindern, daß der Lichtbogen nach dem ersten Nulldurchgang des Stromes wieder gezündet wird.

Experimentelle Untersuchung über Ausschaltvorgänge siehe Philippi, Diss. Danzig; Gerstmeyer, El. Kraftbetriebe und Bahnen 1908; Marguerre, ETZ 1912.

Vierzehntes Kapitel.

Ausgleichsvorgänge in nicht stationären Stromkreisen.

82. Die Gleichungen der freien Schwingungen auf Leitungen. — 83. Freie Schwingungen bei offener oder bei kurzgeschlossener Leitung. — 84. Die Reflexion der Wellen an Widerstand, Induktivität und Kapazität. — 85. Reflexion an der Übergangsstelle zweier Leitungen mit verschiedener Charakteristik. — 86. Der Einfluß von Widerstand, Induktivität und Kapazität auf durchlaufende Wellen.

82. Die Gleichungen der freien Schwingungen auf Leitungen.

Wir haben im vorhergehenden Kapitel Zustandsänderungen in elektrischen Stromkreisen untersucht und die Untersuchung auf die Fälle beschränkt, bei denen wir die elektrischen und magnetischen Felder je für sich an bestimmte Teile des Stromkreises gebunden annehmen können oder, wie man sich auszudrücken pflegt, bei denen Induktivität und Kapazität in einzelnen Teilen des Stromkreises konzentriert sind.

Diese Annahme schließt die Voraussetzung in sich, daß die Teile des Stromkreises so geringe Ausdehnung haben, daß in jedem Augenblick an jedem ihrer Punkte der gleiche Zustand und die gleiche Zustandsänderung bestehen, oder mit anderen Worten, daß die Zeit für die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung über den ganzen betrachteten Teil des Stromkreises verschwindend klein ist gegen die Dauer der Zustandsänderung selbst.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit der wesentlich schneller verlaufenden Fortpflanzung einer Zustandsänderung von einem Punkt des Stromkreises zum nächsten, also mit Stromkreisen von großer Ausdehnung, bei denen der Zustand von Punkt zu Punkt sich ändert. Solche Stromkreise bezeichnen wir als nicht stationäre.

Die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung geht nach

der Maxwell'schen Theorie der Elektrizität durch elektromagnetische Wellen vor sich, die sich in allen Richtungen im Raum ausbreiten. Sie werden einerseits in der Funkentelegraphie nutzbar gemacht, andererseits bieten sie für die Starkstromtechnik ein besonderes Interesse, weil hier als Folge ihres Entstehens eine Gruppe von Erscheinungen auftritt, die zusammenfassend als „Überspannungen“ bezeichnet werden, und die in Hochspannungsanlagen durch ihre zerstörenden Wirkungen gefürchtet und bekämpft werden.

Zur Untersuchung dieser Erscheinungen werden wir daher die elektromagnetischen Wellen in einer für den Zweck angepaßten, angenäherten Form betrachten.

Die Untersuchung beschränkt sich zunächst auf die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen, d. h. solcher elektromagn. Felder, bei denen die elektrischen und magnetischen Kraftlinien in einer Ebene liegen und deren Fortpflanzung, die senkrecht zu der Ebene des elektromagnetischen Feldes liegt, nur in einer Richtung erfolgt.

Dieser Fall liegt z. B. vor bei einer Doppelleitung. Bei dieser umkreisen die magnetischen Kraftlinien die Leiter in Ebenen, die senkrecht zur Leiterachse liegen, und die elektrischen Kraftlinien spannen sich von einem Leiter zum anderen in denselben Ebenen. Die Fortpflanzung des elektromagnetischen Feldes hat daher die Richtung der Leiterachse. Sie ist die Richtung der Energieströmung. Denn nach dem Poyntingschen Satz ist der Vektor des Energieflusses gleich dem $\frac{1}{4\pi}$ fachen des Produktes aus elektrischer und magnetischer Feldstärke und dem Sinus des Winkels zwischen ihnen, und er steht senkrecht auf der von ihnen gebildeten Ebene.

Freilich wäre die Annahme einer ebenen Welle auch für die Doppelleitung nur dann streng zutreffend, wenn Leitung und Dielektrikum verlustfrei wären, d. h. wenn die Leitung eine unendlich große Leitfähigkeit besäße und das Dielektrikum ein vollkommener Isolator wäre. Treten dagegen Verluste auf, so strömt ein Teil der Energie in den Leiter ein, ein Teil bleibt im Dielektrikum, es wird daher besonders an der Oberfläche der Leiter die Ebene des Feldes nicht mehr genau senkrecht zur Leiterachse stehen.

Man legt nun für die Rechnung gleichmäßig verteilte Induktivität, Kapazität, Widerstand und Ableitung zugrunde, ähnlich wie wir es in Kap. XI zur Untersuchung der Verteilung stationärer Ströme und Spannungen auf langen Leitungen voraussetzten. Es muß jedoch bemerkt werden, daß diese Größen, die von dem stationären Zustand abgeleitet sind, streng genommen auf den nicht stationären Zustand nicht ohne weiteres übertragen werden können.

Indessen zeigt die nähere Untersuchung, daß für den Fall der ebenen Wellen auch hier die Anwendung der gleichmäßig verteilten Konstanten formal richtige Resultate ergibt. Wir betrachten daher als Repräsentanten des Stromkreises, in dem ebene Wellen auftreten, die Doppelleitung und suchen für die bei ihr geltenden Differentialgleichungen (s. Kap. XI, S. 187, Gl. 191 und 192) das allgemeine Integral.

$$\text{Es ist} \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (342)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Ap + C \frac{\partial p}{\partial t} \quad (343)$$

Differenziert man jede dieser Gleichungen nochmals nach x und setzt die andere ein, so wird

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = RAp + (CR + LA) \frac{\partial p}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad . . (344)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R Ai + (CR + LA) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad . . (345)$$

Diese beiden Gleichungen haben dieselbe Form, wir brauchen daher nur eine zu betrachten, z. B. die für die Spannung p .

Sie läßt sich so umformen, daß der erste Differentialquotient nach der Zeit nicht mehr vorkommt, wenn man setzt:

$$p = U \varepsilon^{-\alpha t} \quad (346)$$

worin U eine Funktion des Ortes und der Zeit ist. Hiernach wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \varepsilon^{-\alpha t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t} \varepsilon^{-\alpha t} - \alpha U \varepsilon^{-\alpha t} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \varepsilon^{-\alpha t} - 2\alpha \frac{\partial U}{\partial t} \varepsilon^{-\alpha t} + \alpha^2 U \varepsilon^{-\alpha t} \end{aligned}$$

und nach Einsetzen dieser Werte in Gl. 344

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= U [RA - \alpha(CR + LA) + \alpha^2 LC] \\ &+ \frac{\partial U}{\partial t} [CR + LA - 2\alpha LC] + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} LC \end{aligned} \right\} \quad . . (347)$$

Hierin wird der Faktor von $\frac{\partial U}{\partial t}$ Null, wenn

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right] \quad (348)$$

ist, der Faktor von U ist dann

$$RA - \alpha(CR + LA) + \alpha^2 LC = -LC \frac{1}{4} \left[\frac{R}{L} - \frac{A}{C} \right]^2 = -LC \delta^2,$$

worin

$$\delta = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{L} - \frac{A}{C} \right] \dots \dots \dots (349)$$

ist. Gl. 347 erhält hiermit die Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} LC - U \delta^2 LC \dots \dots \dots (350)$$

Da unsere Rechnung, wie auf S. 281 erwähnt, bezüglich der Verluste nur eine Annäherung ist, so beschränken wir uns von vornherein auf den für Starkstromleitungen übrigens nicht sehr von der Wirklichkeit abweichenden Fall, daß $\delta = 0$ ist, oder nach (349)

$$\frac{R}{L} = \frac{A}{C} \dots \dots \dots (351)$$

Dann lautet Gl. 347

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} LC,$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$LC = \frac{1}{v^2} \dots \dots \dots (352)$$

einführt:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \dots \dots \dots (353)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist von d'Alembert für die schwingende Saite angegeben, sie lautet allgemein

$$U = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)^1 \dots \dots (354)$$

worin f_1 und f_2 vorläufig noch willkürliche Funktionen des Ortes und der Zeit sind, die noch näher zu bestimmen sind.

¹⁾ Man kann die Richtigkeit der Lösung durch Differentiation jeder der beiden Funktionen verifizieren:

Es ist z. B. für f_1

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1(x - vt)}{\partial (x - vt)^2} = f_1''(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1(x - vt)}{\partial (x - vt)^2} \left(\frac{d(x - vt)}{dt} \right)^2 = v^2 f_1''(x - vt),$$

und analog für f_2 .

Hiermit wird nach Gl. 346

$$p = \varepsilon^{-\alpha t} [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)] \dots \quad (355)$$

Setzen wir diesen Wert in Gl. 343 ein, so wird

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = A\varepsilon^{-\alpha t}(f_1 + f_2) - \alpha C\varepsilon^{-\alpha t}(f_1 + f_2) + C\varepsilon^{-\alpha t} \left[-v \frac{\partial f_1}{\partial x} + v \frac{\partial f_2}{\partial x} \right]$$

Da mit Rücksicht auf unsere Annahme (351) nunmehr nach Gl. 348

$$\alpha = \frac{R}{L} = \frac{A}{C}$$

ist, sind die ersten beiden Glieder auf der rechten Seite entgegengesetzt gleich und heben sich fort. Berücksichtigen wir, daß im dritten Glied nach Gl. 352

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ist, so erhält man

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} \varepsilon^{-\alpha t} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)] \dots \quad (356)$$

Die beiden willkürlichen Funktionen f_1 und f_2 stellen zwei mit der konstanten Geschwindigkeit v fortschreitende Wellen von unveränderter Gestalt dar. f_1 wandert in Richtung der zunehmenden x , denn die Funktion hat nach einer Zeit dt an einer um $dx = vdt$ entfernteren Stelle wieder die gleichen Werte wie z. B. t an der Stelle x , das gleiche gilt für f_2 , wenn wir sie um $-dx = vdt$ verschieben.

Es stellt sich also die Spannung nach Gl. 355 als Summe, der Strom nach Gl. 356 als Differenz von zwei in entgegengesetzter Richtung mit konstanter Geschwindigkeit wandernden Wellen dar, die bei der Fortpflanzung ihre Gestalt nicht ändern, aber, wie der Faktor $\varepsilon^{-\alpha t}$ zeigt, mit der Zeit abklingen. Jede Welle des Stromes ist der im gleichen Sinne wandernden Spannungswelle proportional, sie ergibt sich aus ihr durch Multiplikation mit $\sqrt{\frac{C}{L}}$, d. h. mit dem reziproken Wert der Charakteristik oder des Wellenwiderstandes (s. S. 198)

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Jeder elektrische Vorgang auf der Leitung läßt sich durch zwei derartige Wellen darstellen; ihre Form ergibt sich aus den Grenzbedingungen des speziellen Problems. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ist für den leeren Raum und auch für in Luft

liegende Leiter die Lichtgeschwindigkeit, für Medien mit höherer Dielektrizitätskonstante (Kabel) ist sie der Quadratwurzel aus dieser umgekehrt proportional.

Anmerkung. Es mag bemerkt sein, daß eine andere Lösung der Differentialgleichung 347, die auf D. Bernouilli zurückgeführt wird, sich in Form einer Fourierschen Reihe von unendlich vielen Sinuswellen ergibt. Jede dieser Wellen läßt sich wieder durch zwei gegenläufig wandernde Sinuswellen darstellen mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{n^2}}}$$

worin n die Kreisfrequenz der betreffenden Sinuswelle ist. Für unsere Annahme (Gl. 351) $\delta = 0$ wird diese Geschwindigkeit für alle Wellen gleich. Ist dies nicht der Fall, so verschieben sich die Sinuswellen relativ zueinander und die resultierende Welle verändert ihre Gestalt. Aus diesem Grunde heißt eine Welle, für die Gl. 351 zutrifft, „verzerrungsfrei“.

Die Darstellung der Wellen durch Fouriersche Reihen ist besonders in dem grundlegenden Buch von K. W. Wagner: „Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln“ (1908) eingehend behandelt worden.

Wir können nun den Zustand auf der Leitung während eines Ausgleichsvorgangs ähnlich wie in Kap. XIII, S. 239 superponieren aus den stationären Werten (p_e, i_e) und den freien Schwingungen (p_f, i_f) von Strom und Spannung, die den Übergang von dem Anfangswert zum Endwert vermitteln.

Es ist daher während des Übergangs

$$\left. \begin{aligned} p &= p_e + p_f \\ i &= i_e + i_f \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (357)$$

Wir rechnen die Zeit wieder von dem Augenblick der Zustandsänderung ($t = 0$). Sind für diesen Augenblick die stationären Anfangswerte $p_{a(0)}$ und $i_{a(0)}$, die stationären Endwerte $p_{e(0)}$ und $i_{e(0)}$, so erfordert der stetige Übergang für die freien Schwingungen $p_{f(0)}, i_{f(0)}$

$$\left. \begin{aligned} p_{a(0)} &= p_{e(0)} + p_{f(0)} \\ i_{a(0)} &= i_{e(0)} + i_{f(0)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (358)$$

83. Freie Schwingungen bei offener oder bei kurzgeschlossener Leitung.

1. Das Einschalten einer am Ende offenen Leitung mit Gleichstrom.

Eine Leitung von der Länge l werde zur Zeit $t = 0$ an ihrem Anfang ($x = 0$) an eine Quelle konstanter Spannung P angeschlossen, während ihr Ende ($x = l$) offen ist. Wir sehen zunächst von der

Rückwirkung der Einschaltvorgänge auf die Stromquelle ab¹⁾. Vor der Zeit $t=0$ ist der Anfangszustand für die ganze Leitung

$$p_a = 0, \quad i_a = 0 \dots \dots \dots (359)$$

der stationäre Endzustand ist

$$p_e = P, \quad i_e = 0 \dots \dots \dots (360)$$

Die Anfangsbedingungen für die freie Schwingung sind daher

$$\left. \begin{aligned} p_{f(0)} &= p_{a(0)} - p_{e(0)} = -P \\ i_{f(0)} &= i_{a(0)} - i_{e(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (361)$$

Diese Bedingungen setzen wir in die Gl. 355 und 356

$$\begin{aligned} p_f &= \varepsilon^{-\alpha t} [f_1(x-vt) + f_2(x+vt)] \\ i_f &= \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{Z} [f_1(x-vt) - f_2(x+vt)] \end{aligned}$$

für $t=0$ ein, und es ergibt sich

$$f_1(x) + f_2(x) = -P, \quad f_1(x) - f_2(x) = 0$$

daher

$$f_1(x) = f_2(x) = -\frac{1}{2}P \dots \dots \dots (362)$$

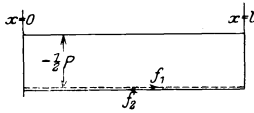


Fig. 175 a.

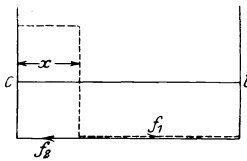


Fig. 175 b.

Die Wellen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind ihrem Betrag nach gleich groß, und haben zur Zeit $t=0$ über die ganze Leitungslänge den konstanten Wert $-\frac{1}{2}P$ (s. Fig. 175 a).

Welche Gestalt haben nun die Wellen in den folgenden Zeiten während ihres Fortschreitens? Hierüber gibt uns die Reflexion an den Leitungsenden Aufschluß, die aus den dort herrschenden Bedingungen zu ermitteln ist.

a) Am Leitungsanfang soll nach Voraussetzung $P = \text{konst.}$, d. h. $p_f = 0$ sein, also ist nach Gl. 355 für $x = 0$

$$f_1(0 - vt) = -f_2(0 + vt).$$

Dies bedeutet: die vom Anfang abziehende Welle (f_1) ist am Leitungsanfang ebenso groß wie die einfallende f_2 , aber hat entgegengesetztes Vorzeichen. Man betrachtet die Fortsetzung der vom Anfang abziehenden Welle f_1 als Reflexion der dort einfallenden

¹⁾ Eine beliebige Stromquelle würde bei dem auftretenden Ladestrom ihre Spannung nicht halten, man kann sich aber vorstellen, daß durch große parallelgeschaltete Kondensatoren die Ladung abgegeben und die Spannung praktisch konstant gehalten wird (s. auch S. 319).

Welle f_2 und drückt das Ergebnis in folgender Weise aus: Die einfallende Welle f_2 wird am Leitungsanfang unter Umkehrung des Vorzeichens reflektiert.

b) Das Leitungsende ist offen, also ist für $x=l$ $i_f=0$, und nach Gl. 356 wird für $x=l$

$$f_1(l-vt) = f_2(l+vt),$$

was wir wieder so ausdrücken können, daß die am offenen Ende einfallende Welle f_1 mit gleichem Vorzeichen reflektiert wird. Fig. 175 b zeigt die beiden Wellen, nachdem sie um eine Strecke x , die kleiner als l ist, in der Zeit $t = \frac{x}{v}$ gewandert sind, wobei von ihrer Verkleinerung durch die Dämpfung vorerst abgesehen ist. Die Welle f_1 zeigt an der Stelle x einen Sprung um die volle Spannung P , der von der Reflexion der Welle f_2 am Anfang herrührt. Unter Berücksichtigung der Dämpfung ist er $P e^{-a \frac{x}{v}}$.

Dieses Bild schreitet nun bis zur Zeit $t_1 = \frac{l}{v}$ vorwärts, dann hat der Spannungssprung der Welle f_1 das Leitungsende erreicht, und da f_1 hier mit gleichem Vorzeichen reflektiert wird, hat nun von hier ab auch f_2 einen analogen Spannungssprung, der nach dem Leitungsanfang wandert und diesen zur Zeit $t_2 = \frac{2l}{v}$ erreicht. Man ersieht hieraus, daß jede Welle ihr Vorzeichen nach einer Zeit umkehrt, die dem zweimaligen Durchlaufen der Leitungslänge entspricht. Die volle Periode des Vorgangs, die zwei entgegengesetzte Richtungswechsel in jeder Welle umfaßt, ist doppelt so groß, nämlich

$$\tau = \frac{4l}{v} \dots \dots \dots (363)$$

Die tatsächlich auf der Leitung vorhandenen Werte von Strom und Spannung ergeben sich nun durch Addition der stationären und der freien Werte:

$$p = P + p_f$$

$$i = i_f.$$

In Fig. 176 ist der Vorgang für 8 Augenblicke im Abstand von $\frac{1}{8}$ Periode unter Vernachlässigung der Dämpfung aufgetragen. In der ersten Viertelperiode wandert eine resultierende Spannungswelle von der Höhe P und ein Ladestrom $i = \frac{P}{Z}$ bis zum Ende der Leitung und speichern in dem elektromagnetischen Felde der Leitung gleichgroße elektrische und magnetische Energien

$$U_e = \frac{1}{2} P^2 C l = U_m = \frac{1}{2} i^2 L l$$

auf. Die Gleichheit folgt daraus, daß $i = P \sqrt{\frac{C}{L}}$ ist. Die Stromquelle führt die momentane Leistung $w = Pi = \frac{P^2}{Z}$ zu. Am offenen

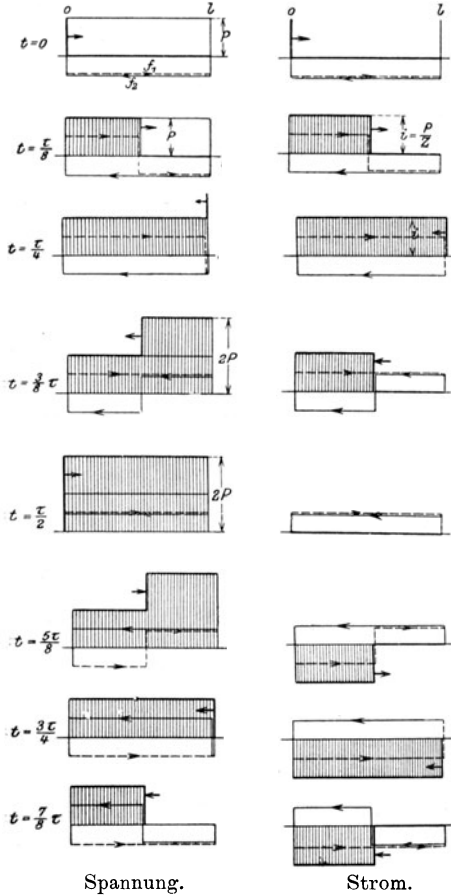


Fig. 176.

Leitungsende kann der Strom nicht bestehen, die Stromwelle wandert in der zweiten Viertelperiode zurück, wobei das magnetische Feld seine Energie in das elektrische Feld entladet, während gleichzeitig die Stromquelle ihre konstante Leistung weiter liefert. Diese wird nun aber nur in dem elektrischen Felde der Leitung aufgespeichert, wobei die Spannung der Leitung zunächst am Ende und dann rückwärts schreitend bis zum Anfang auf den doppelten Betrag steigt, und am Ende der zweiten Viertelperiode ist in der Leitung die 4fache elektrische Energie aufgespeichert wie zuvor. Da am Leitungsanfang die Spannung konstant gehalten wird, entladet sich die Leitung in der dritten Viertelperiode in die Stromquelle zurück, der Entladestrom wandert vom Anfang der Leitung zum Ende unter Ausbildung eines magnetischen

Feldes von entgegengesetzter Richtung wie zuvor, dessen Energie ebenfalls aus dem elektrischen Felde kommt, wobei die Spannung auf P abnimmt. In der vierten Viertelperiode entladen sich die magnetischen und elektrischen Felder der Leitung in die Stromquelle, und am Ende der Periode ist die Leitung strom- und spannungslos.

Das Spiel wiederholt sich von neuem, nur tritt bei jeder Schwingung ein Verlust auf, durch den die Wellen gedämpft werden und ausklingen, bis schließlich die Leitung die konstante Spannung P hat.

Der Einfluß der Dämpfung äußert sich nun zunächst darin, daß die größte Spannung, die zuerst am Leitungsende nach $\frac{1}{4}$ Periode auftritt, nicht $2P$ sondern $P\left(1 + \varepsilon^{-\alpha \frac{l}{v}}\right)$ ist.

Quantitativ ist es unsicher, die Dämpfung einzuschätzen, erstens weil es fraglich ist, welcher Wert des Widerstandes für diese hohen Frequenzen einzusetzen ist, zweitens weil unsere Annahme der Verzerrungsfreiheit nicht immer zutrifft. Setzt man für R den Gleichstromwiderstand ein, so findet man für Freileitungen den Wert $\alpha = \frac{R}{L}$ zwischen 150 und 250. Nehmen wir einen Mittelwert $\alpha = 200$, so ist für eine Leitung von $l = 15$ km mit $v = 3 \cdot 10^5$ km · sek⁻¹

$$\varepsilon^{-\alpha \frac{l}{v}} = \varepsilon^{-0,01} \approx 0,99.$$

Bei Kabeln ist die Dämpfung größer, erstens ist α größer wegen der kleinen Induktivität, zweitens ist v kleiner wegen der höheren Dielektrizitätskonstante. Schätzen wir α 5 mal so groß und v halb so groß wie oben, so wird für ein ebenso langes Kabel

$$\varepsilon^{-\alpha \frac{l}{v}} = \varepsilon^{-0,1} = 0,905.$$

Die Spannung am Leitungsende wäre also in diesem Falle nach $\frac{1}{4}$ Periode $1,905 P$; nach $\frac{3}{4}$ Perioden fällt sie dort nicht auf 0, sondern auf $P\left(1 - \varepsilon^{-\alpha \frac{3l}{v}}\right) = P\left(1 - \varepsilon^{-0,3}\right) = 0,26 P$ usf.

Fig. 177 zeigt, wie unter Berücksichtigung der Dämpfung die Spannung sich am Leitungsende einschwingt und ein analoges Bild läßt sich für jeden Punkt der Leitung konstruieren.

Für die Isolation muß man mit der doppelten Betriebsspannung rechnen.

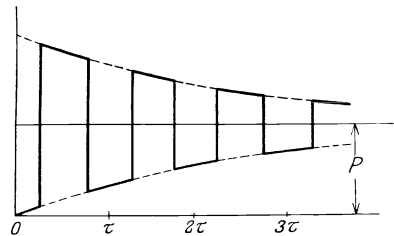


Fig. 177.

2. Das Einschalten einer offenen Leitung mit Wechselstrom.

Aus Kap. XI ist bekannt, daß im stationären Zustand sich eine Schwingung einstellt, die wir darstellen können durch

$$\left. \begin{aligned} p_{(e)} &= p_{m(x)} \sin(\omega t + \psi_{(x)}) \\ i_{(e)} &= i_{m(x)} \sin(\omega t + \varphi_{(x)}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (364)$$

wobei die Amplituden $p_{m(x)}$ und $i_{m(x)}$ sowie die Phasenwinkel $\psi_{(x)}$ und $\varphi_{(x)}$ Funktionen des Ortes sind, die aus dem Spiraldiagramm

Fig. 136 Seite 201 ermittelt werden können. Fig. 134 Seite 195 stellte die Strom- und Spannungsverteilung für eine verlustfreie Leitung dar.

Schaltet man nun z. Z. $t=0$ den Anfang der Leitung an eine Spannung

$$p = p_m \sin(\omega t + \psi),$$

so ist der Anfangszustand vor Beginn der Zeitrechnung

$$p_a = 0, \quad i_a = 0;$$

der stationäre Endzustand für $t=0$ wäre nach Gl. 364

$$p_{e(0)} = p_{m(x)} \sin \psi_{(x)}, \quad i_{e(0)} = i_{m(x)} \sin \varphi_{(x)},$$

daher für die freie Schwingung für $t=0$

$$p_{f(0)} = -p_{e(0)} = -p_{m(x)} \sin \psi_{(x)} = f_1(x) + f_2(x)$$

$$i_{f(0)} = -i_{e(0)} = -i_{m(x)} \sin \varphi_{(x)} = \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)]$$

und die beiden Wellen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind z. Z. $t=0$

$$f_1(x) = -\frac{1}{2} [p_{m(x)} \sin \psi_{(x)} + Z i_{m(x)} \sin \varphi_{(x)}]$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2} [p_{m(x)} \sin \psi_{(x)} - Z i_{m(x)} \sin \varphi_{(x)}].$$

Die Form der beiden Wellen f_1 und f_2 ergibt sich hiernach durch Addition bzw. Subtraktion der stationären Strom- und Spannungsverteilung z. Z. $t=0$. Praktisch erfolgt das Einschalten in dem Augenblick, in dem die Spannung durch ihren Höchstwert geht.

Für die Reflexion der Wellen ergibt sich wieder bei der am Ende offenen Leitung

$$\begin{aligned} \text{für } x=0, & \quad p_f = 0, \\ \text{für } x=l, & \quad i_f = 0. \end{aligned}$$

Die erste Bedingung bedeutet wieder eine Reflexion der am Leitungsanfang eintreffenden Welle f_2 unter Umkehr ihres Vorzeichens, die zweite eine Reflexion der am Leitungsende eintreffenden Welle f_1 mit gleichem Vorzeichen.

Das Bild des Einschaltvorganges hängt nun sehr von dem Verhältnis der erzwungenen Frequenz c zur Eigenfrequenz c_{ei} der Leitung ab. Diese ist nach Gl. 363

$$c_{ei} = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{4l},$$

daher

$$\frac{c}{c_{ei}} = \frac{4cl}{v}.$$

Wir wählen zunächst ein extremes Beispiel für eine hohe Frequenz c und große Länge l . Es sei $c=300$, $l=500$ km.

Für eine Doppelleitung aus Drähten mit einem Durchmesser von 1 cm im Abstand von 120 cm ist

$$\begin{aligned} C &= 0,00525 \text{ Mfd} \cdot \text{km}^{-1} \\ L &= 0,00212 \text{ Henry} \cdot \text{km}^{-1} \\ R &= 0,51 \text{ Ohm} \cdot \text{km}^{-1}. \end{aligned}$$

Die Charakteristik ist $Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = 635$.

Die Leitungslänge von 500 km ist bei 300 Perioden gleich der halben Wellenlänge, da $\lambda = \frac{v}{c} = \frac{3 \cdot 10^5}{300} \text{ km} = 1000 \text{ km}$. Bei Leerlauf sind daher die Spannungen am Anfang und Ende im stationären Zustand um 180° phasenverschoben. Der räumliche Dämpfungsfaktor für die stationären Schwingungen ist bei Verzerrungsfreiheit nach Kap. XI S. 199

$$a = \frac{R}{Z} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}.$$

Der zeitliche Dämpfungsfaktor der freien Schwingungen

$$\alpha = \frac{R}{L} = a \cdot v = 240 \text{ sek}^{-1}.$$

Hier ist

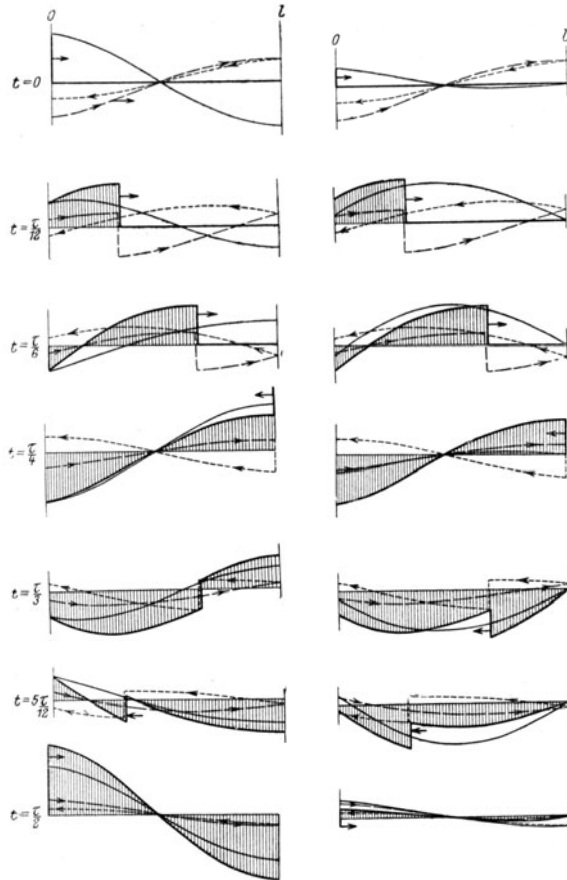
$$\frac{c}{c_{ei}} = 2,$$

und auf eine Periode der freien Wellen fallen zwei Perioden der stationären Schwingungen. Fig. 178 zeigt für 7 Augenblicke der ersten Halbperiode der freien Schwingungen die Spannungs- und Stromverteilung. Die dünn ausgezogenen Linien sind die stationären Werte, die aus dem Spiraldiagramm Kap. XI ermittelt sind, die gestrichelten Linien sind die Welle f_1 und die punktierten die Welle f_2 . In diesem extremen Falle kann die Dämpfung nicht vernachlässigt werden, denn nach $\frac{1}{2}$ Periode sind die Wellen schon auf den Wert $\varepsilon^{-\alpha \frac{2l}{v}} = \varepsilon^{-0,8} = 0,449$ gedämpft, und sie sind in der Figur entsprechend verkleinert.

Bei den meisten Starkstromanlagen nähern sich die Vorgänge indessen wesentlich mehr denen einer Gleichstromleitung. Nehmen wir als Beispiel eine Freileitung von 30 km Länge und $c = 50$ Perioden i. d. Sek.

Hier ist die Leitungslänge $\frac{1}{200}$ der Wellenlänge und daher ist die stationäre Spannung bei Leerlauf auf der ganzen Leitung in jedem Augenblick fast dieselbe

Ferner ist $c = 0,02 c_{ei}$, d. h. die Eigenfrequenz ist 50 mal so groß wie die stationäre Frequenz. Wird z. B. bei der Amplitude der stationären Spannung eingeschaltet, so ist die stationäre Spannung nach 1 Periode der freien Schwingung $p_m \cos \frac{2\pi}{50} = 0,992 p_m$, also praktisch unverändert.



Spannung. Fig. 178. Strom.

Nehmen wir dieselben Leitungsconstanten wie vorhin an, so sind die freien Schwingungen nach 1 Periode der stationären Schwingung ($\frac{1}{50}$ Sek.) nur noch $e^{-4,8} = 0,0081$, d. h. weniger als 1% ihres Anfangswertes, so daß der Ausgleichsvorgang praktisch ganz aufgehört hat

Aus diesem Grunde legt man für die Einschaltvorgänge bei

Starkstromanlagen meist die Verhältnisse zugrunde, wie sie sich für eine Gleichstromleitung ergeben.

3. Der Ausgleich einer beliebig verteilten Ladung auf einer offenen Leitung.

Eine Leitung werde durch atmosphärische Entladung etwa durch einen Blitzschlag getroffen. Sie erhält eine Ladung, deren Verteilung über die Länge l ganz beliebig gegeben sein möge. Ist $q(x)$ die Ladung für die Längeneinheit, die eine beliebige Funktion von x sein kann, so entspricht ihr die Spannungsverteilung

$$p_a = p(x) = \frac{q(x)}{C}$$

und eine entsprechende Verteilung von elektrischer Energie.

Die Spannung sucht sich nun auf der Leitung auszugleichen. Da die Leitung an beiden Enden offen ist, kann die Energie an den Enden nicht abfließen, vielmehr wandert sie so lange auf der Leitung hin und her, bis sie in Verlusten verbraucht ist. Bei jeder Wanderung nimmt die ursprüngliche Ladung infolge der Ableitung ab. Dann ist $p_e = 0$. Der Strom ist zu Anfang und zu Ende des Vorgangs Null. Für die freien Schwingungen gilt daher

$$\begin{aligned} p_{f(0)} &= p_{a(0)} - p_{e(0)} = p(x) \\ i_{f(0)} &= 0. \end{aligned}$$

Für die entstehenden Wellen gilt daher z. Z. $t = 0$

$$\begin{aligned} p_{f(0)} &= f_1(x) + f_2(x) = p(x) \\ i_{f(0)} &= \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)] = 0, \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2} p(x) \quad (365)$$

Die ursprünglich vorhandene, ganz willkürliche Spannungsverteilung zieht also in zwei Wellen von gleicher Form und je halber Größe nach den Enden der Leitung. Dort werden die Wellen, da die Enden offen sind, mit gleichem Vorzeichen reflektiert, weil die Ströme $\frac{f_1}{Z}$ und $\frac{f_2}{Z}$, die bei der Bewegung entstehen, an den offenen Leitungsenden nicht bestehen können. Die Wellen wandern somit auf der Leitung hin und her, bis ihre Energie durch die Verluste aufgebraucht ist, sofern sie sich nicht schon vorher einen Weg zur Ableitung der Energie schaffen. Ist nämlich die durch atmosphärische Entladungen entstehende Spannung höher als die Isolation der Leitungen verträgt, so wird die Isolation durch-

schlagen. Bei Freileitungen sind z. B. die Isolatoren die gefährdeten Stellen, die bei atmosphärischen Überspannungen überschlagen werden. Zum Schutz verwendet man sog. Überspannungsableiter, die häufig aus einer Funkenstrecke (Hörnerableiter) oder einer Anzahl in Reihe geschalteter Funkenstrecken (Rollenableiter) bestehen und mit einem Widerstand zwischen Leitung und Erde geschaltet sind. Die Funkenstrecken werden so eingestellt, daß sie bei Überschreitung der Betriebsspannung ansprechen.

4. Die Ausgleichsvorgänge bei Unterbrechung eines Kurzschlusses.

Eine unter Spannung stehende Leitung sei am Ende kurzgeschlossen. Infolge des auftretenden Kurzschlußstromes wird am Anfang die Leitung durch einen selbsttätigen Ausschalter oder durch eine Sicherung unterbrochen.

Wir rechnen den Zeitpunkt des Abtrennens der Leitung von der Stromquelle als Anfangspunkt $t=0$ der darauffolgenden Vorgänge; es bestehe hierbei noch ein Strom

$$i_{a(0)} = J,$$

den wir etwa in der ganzen Leitung gleichgroß annehmen können. Die Spannung, die bei Kurzschluß auf der Leitung jedenfalls klein ist, möge vernachlässigt werden, so daß der Anfangswert sei

$$p_{a(0)} = 0.$$

Es besteht also in der Leitung eine magnetische Energie

$$\frac{1}{2} J^2 Ll,$$

die auf der Leitung hin und her wandert, bis sie durch die Verluste vollständig in Wärme umgewandelt ist. Der Endzustand ist $p_e = 0$, $i_e = 0$, daher ist für die freien Schwingungen

$$p_{f(0)} = 0, \quad i_{f(0)} = J.$$

Setzt man diese Bedingungen in die Gl. 355 und 356 für die Strom- und Spannungswellen ein, so gilt für diese z. Z. $t=0$

$$\begin{aligned} p_{f(0)} &= f_1(x) + f_2(x) = 0 \\ i_{f(0)} &= \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)] = J, \end{aligned}$$

somit

$$f_1(x) = -f_2(x) = \frac{1}{2} JZ.$$

Der Vorgang ist in Fig. 179 für einige Zeitmomente im Abstand von $\frac{1}{8}$ Periode dargestellt. Zur Zeit $t=0$ sind die beiden Wellen $\frac{1}{2} JZ$ und $-\frac{1}{2} JZ$; die zweite wird am offenen Leitungs-

anfang, wo der Strom Null ist, mit gleichem Vorzeichen reflektiert, während f_1 am kurzgeschlossenen Ende, wo die Spannung Null ist, mit entgegengesetztem Vorzeichen reflektiert wird.

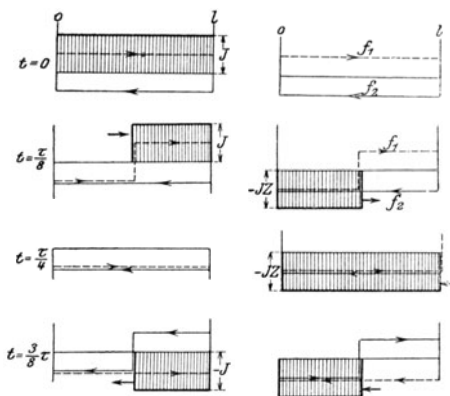
Der Strom verschwindet daher vom Anfang der Leitung anfangend, während er seine magnetische Energie in das elektrische Feld der Leitung entladet, so daß eine Spannungswelle von der Höhe $-JZ$ über die Leitung wandert.

Erreicht sie das Ende der Leitung nach $\frac{1}{4}$ Periode, so wird sie zurückgeworfen, da dort die Spannung Null sein muß. Das elektrische Feld entladet sich wieder unter Ausbildung eines magnetischen

Feldes, die Entladestromwelle von der Höhe $-J$ wandert zum Anfang zurück, sie wird dort nach Ablauf der zweiten Viertelperiode zurückgeworfen, wobei das magnetische Feld sich wieder in das elektrische entladet, das aber nun ebenfalls die umgekehrte Richtung hat wie zuvor, und so geht der Wechsel der Energie fort, bis die ganze Energie in Verlusten aufgezehrt ist.

Die größte Spannung, die z. Z. $t=0$ am Leitungsanfang entsteht, ist JZ . Sie hängt von der Größe des Kurzschlußstromes ab und kann ein Vielfaches der Betriebsspannung betragen. Es ist nun allerdings schwer anzugeben, wie groß der Strom in dem Augenblick ist, den wir hier als Anfangspunkt unserer Betrachtung gewählt haben, d. h. nach dem Auslösen des Schalters. Durch den Öffnungslichtbogen wird der Strom während des Unterbrechens gedämpft und ein Teil seiner magnetischen Energie in Wärme umgewandelt. Bei einem Schalter, der beim natürlichen Nulldurchgang des Stromes unterbricht, kann keine Spannungserhöhung auftreten, weil dann im Moment des Unterbrechens keine magnetische Energie mehr in der Leitung ist. Tut der Schalter dies nicht, sondern reißt er den Lichtbogen ab, so kann eine sehr große Spannungserhöhung am Schalter auftreten, durch die die Überschläge an den Schaltern zu erklären sind.

Nehmen wir eine Freileitung von 10 000 Volt an, durch die eine Leistung von 1000 kVA übertragen wird. Der normale Strom ist 100 Amp., der Kurzschlußstrom ist ein Vielfaches davon. Nimmt



Strom. Fig. 179. Spannung.

man aber an, daß er beim Unterbrechen des Schalters auf den normalen Strom gefallen ist, so ist die Spannung beim Unterbrechen, wenn die Charakteristik $Z \cong 600$ beträgt, $JZ = 100 \cdot 600 = 60\,000$ Volt.

Ähnliche Vorgänge treten nicht nur bei Kurzschlüssen, sondern auch bei Belastungsänderungen auf. Ändert sich der Strom um Δi , so entspricht diesem bei einer Leitung, die nur einen kleinen Spannungsabfall hat, nur ein kleiner Unterschied der stationären Spannungen zu Anfang und am Ende des Ausgleichsvorganges. Vernachlässigt man diese, so hat man wieder für $t=0$ $p_f=0$ und $i_s = \Delta i$, und die freien Wellen werden für $t=0$

$$f_1(x) = -f_2(x) = \frac{1}{2} \Delta i Z.$$

84. Die Reflexion der Wellen an Widerstand, Induktivität und Kapazität.

Bisher haben wir bei Verfolgung der Vorgänge auf Leitungen möglichst einfache Bedingungen gestellt, indem wir die Leitungsenden entweder offen oder kurzgeschlossen oder an eine Stromquelle von gegebener unveränderlicher Spannung angeschlossen voraussetzten.

Wir erweitern nun die Betrachtung auf die Fälle, bei denen beliebige Apparate an die Leitung angeschlossen sind, und untersuchen zunächst die Reflexion der Wellen an Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten.

Streng genommen können diese Größen bei nicht stationären Vorgängen nicht für sich betrachtet werden; wenn man es dennoch tut, so setzt man dabei Anordnungen von geringer Ausdehnung voraus, bei denen die eine Größe die anderen derart überwiegt, daß diese vernachlässigt werden können.

Als reiner Widerstand kann z. B. ein Wasser- oder Kohlewiderstand angesehen werden, der in Verbindung mit Überspannungsableitern, etwa einer Hörnerfunkenstrecke, verwendet wird. Er enthält auf eine Länge von einigen Zentimetern mehrere Hundert Ohm, während seine Induktivität und Kapazität dagegen vernachlässigbar sind. Vorwiegend Induktivität besitzen kurze Spulen, etwa Stromwandler, Auslösemagneten von Schaltern und Drosselspulen usf., während vorwiegend Kapazität in Sammelschienenensystemen, Schutzkondensatoren u. dgl. angesammelt ist.

Maschinen und Transformatorwicklungen, die Spulen von großer Ausdehnung sind, sind dagegen als Leitungen mit verteilter Induktivität und Kapazität zu betrachten, wenigstens wenn es sich darum handelt, die Vorgänge längs der Wicklung zu untersuchen. Beschränkt man sich jedoch darauf, ein Bild von der Rückwirkung

einer solchen Wicklung auf die Wellenvorgänge in der Leitung zu gewinnen, so kann man sie im wesentlichen auch als Induktivitäten ansehen.

Nehmen wir nun an, es seien R_0 , L_0 , C_0 Widerstand, Induktivität und Kapazität, die am Leitungsende etwa in Reihe geschaltet sind. Es gilt dann für das Leitungsende ($x=l$)

$$p = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt} + \int \frac{idt}{C_0} \dots \dots \dots (366)$$

Hierin ist p die Summe aus der stationären Endspannung p_e und der freien Spannung p_f , i ebenso die Summe aus dem stationären Strom i_e und der freien Schwingung i_f . Da die Gleichung linear ist, wird sie von den stationären und von den freien Strömen und Spannungen je für sich erfüllt, sie kann also in zwei Gleichungen geteilt werden, von denen die eine nur für die stationären, die andere nur für die freien Werte gilt, wie wir dies schon wiederholt getan haben.

Wir betrachten hier die Gleichung der freien Schwingungen. Diese können für die ganze Leitung durch zwei Wellen dargestellt werden

$$p_f = \varepsilon^{-\alpha t} [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)]$$

$$i_f = \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{Z} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)].$$

Da es uns hier auf die Werte am Ende der Leitung ($x=l$) ankommt, setzen wir zur Abkürzung

$$f_1(l - vt) = \varphi \quad \text{und} \quad f_2(l + vt) = \varrho,$$

worin φ und ϱ nun nur noch von der Zeit abhängen, so daß man für $x=l$ erhält

$$\left. \begin{aligned} p_{f(x=l)} &= \varepsilon^{-\alpha t} (\varphi + \varrho) \\ i_{f(x=l)} &= \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{Z} (\varphi - \varrho) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (367)$$

Setzt man diese Werte in die Gl. 366 ein, so wird

$$\varepsilon^{-\alpha t} (\varphi + \varrho) = \left[R_0 + L_0 \frac{d}{dt} + \int \frac{dt}{C_0} \right] \left[\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{Z} (\varphi - \varrho) \right] \dots (368)$$

In dieser Gleichung ist die am Leitungsende einfallende Welle, d. h. φ , als bekannt vorauszusetzen, während die Werte ϱ der reflektierten Welle durch Lösung der Gleichung zu ermitteln sind, wie nun an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

a) Reflexion an einem Ohmschen Widerstand.

Ist an die Leitung nur ein Ohmscher Widerstand R_0 angeschlossen, so vereinfacht sich Gl. 368 in

$$\varepsilon^{-\alpha t}(\varphi + \varrho) = \frac{R_0}{Z} \varepsilon^{-\alpha t}(\varphi - \varrho)$$

und man erhält

$$\varrho = \varphi \frac{R_0 - Z}{R_0 + Z} = \varphi q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (369)$$

Die einfallende Welle φ wird am Ohmschen Widerstand unvollkommen reflektiert, sie erscheint nach der Reflexion im Verhältnis

$$q = \frac{R_0 - Z}{R_0 + Z}$$

verkleinert. q nennt man den Reflexionsfaktor. Es werden daher die resultierende Spannung und der resultierende Strom am Leitungsende

$$p = p_e + \varepsilon^{-\alpha t}(\varphi + \varrho) = p_e + \varepsilon^{-\alpha t} \varphi (1 + q)$$

$$i = i_e + \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{Z}(\varphi - \varrho) = i_e + \frac{\varepsilon^{-\alpha t} \varphi}{Z} (1 - q).$$

Die einfallende Welle führt in jedem Augenblick eine Leistung $\frac{\varphi^2}{Z}$ mit sich; die reflektierte die Leistung $\frac{\varrho^2}{Z} = \frac{(q\varphi)^2}{Z}$. Die Differenz ist die vom Widerstand absorbierte Leistung

$$\frac{\varphi^2}{Z} (1 - q^2).$$

Ist $R_0 = Z$, so wird die reflektierte Welle Null, die ganze Leistung der ankommenden Welle wird vom Widerstand absorbiert. Ist $R_0 \geq Z$, so ist die vom Widerstand aufgenommene Leistung stets kleiner als die der einfallenden Welle. Für $R > Z$ hat die reflektierte Welle das gleiche, für $R < Z$ das entgegengesetzte Vorzeichen der ankommenden.

Die Grenzen sind: 1. $R_0 = \infty$, d. h. die Leitung ist offen, es wird $q = 1$, die einfallende Welle wird in voller Größe reflektiert. 2. $R_0 = 0$, die Leitung ist kurzgeschlossen, $q = -1$, die Welle wird unter Umkehr des Vorzeichens reflektiert, wie früher gezeigt.

Betrachten wir als Beispiel den Fall, daß eine am Anfang offene Leitung eine Ladung etwa durch atmosphärische Vorgänge erhält. Gegenüber dem auf S. 293 behandelten Fall sei am Leitungsende eine Funkenstrecke mit Erdungswiderstand R_0 ange-

geschlossen. Wir betrachten also eine aus der Leitung und Erde gebildete Schleife, die am Anfang offen und am Ende beim Überschlagen des Hörnerblitzableiters über den Widerstand R_0 geschlossen ist.

Die zu Anfang beliebig verteilte Spannung $p(x)$ teilt sich in zwei gleiche Wellen von halber Größe $f_1(x)$ und $f_2(x)$ (s. Fig. 180). Die erste wandert nach dem Leitungsende, bringt die Funkenstrecke zum Ansprechen und wird, falls $R_0 = Z$ erfüllt ist, ganz absorbiert; die andere wandert nach dem offenen Leitungsanfang, wird dort in voller Stärke reflektiert und geht dann nach dem Ende, um ebenfalls absorbiert zu werden. Bei unvollkommener Absorption dauert der Vorgang länger. Am Leitungsende wird die einfallende Welle z. T. reflektiert und wandert zum Anfang zurück, wird beim zweiten Auftreffen auf das Leitungsende wieder geschwächt usf.

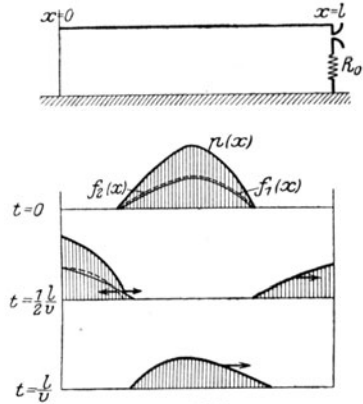


Fig. 180.

Sieht man von den Verlusten in der Leitung ab, so ist am Ende des Vorgangs die ganze ursprünglich in der Leitung vorhandene elektrische Energie

$$\frac{1}{2C} \int p^2(x) dx,$$

in dem Widerstand R_0 in Wärme umgewandelt worden.

b) Reflexion an einer Induktivität.

Ist am Ende der Leitung eine Induktivität L_0 angeschlossen, so lautet Gl. 368 für die freien Schwingungen

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-\alpha t}(\varphi + \varrho) &= \frac{L_0}{Z} \frac{d\varepsilon^{-\alpha t}(\varphi - \varrho)}{dt} \\ &= \frac{L_0}{Z} \varepsilon^{-\alpha t} \left[-\alpha(\varphi - \varrho) + \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varrho}{dt} \right] \\ \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \left(\frac{Z}{L_0} - \alpha \right) &= -\varphi \left(\frac{Z}{L_0} + \alpha \right) + \frac{d\varphi}{dt} \quad \dots \quad (370) \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist, wenn $\frac{Z}{L_0} \leq \alpha$

$$\varrho = \varepsilon^{-\left(\frac{Z}{L_0} - \alpha\right)t} \left\{ k + \int \varepsilon^{\left(\frac{Z}{L_0} - \alpha\right)t} \left[-\varphi \left(\frac{Z}{L_0} + \alpha \right) + \frac{d\varphi}{dt} \right] dt \right\} \quad (371)$$

und wenn $\frac{Z}{L_0} = \alpha$ ist

$$\varrho = \varphi - \int \varphi \left(\frac{Z}{L_0} + \alpha \right) dt + k,$$

worin k die Integrationskonstante ist.

Wir betrachten als Beispiel

die freien Schwingungen beim Ausschalten einer induktiv belasteten Leitung.

Die Leitung werde z. Z. $t=0$ am Anfang $x=0$ unterbrochen. Zur Vereinfachung der Rechnung machen wir, da es uns nur um eine generelle Schilderung der Vorgänge zu tun ist, folgende vereinfachende Annahmen: der Strom habe auf der ganzen Leitung z. Z. $t=0$ denselben Wert J , die Spannung auf der Leitung werde vernachlässigt. Diese Annahmen, die annähernd beim Unterbrechen eines Gleichstromes zutreffen, würden auch für diesen bedingen, daß der Spannungsabfall in der Leitung und die Ableitung Null sind, und um die Rechnung mit diesen Annahmen nicht in Widerspruch zu bringen, müssen wir in Gl. 370 α vernachlässigen. Diese Annahme würde somit zutreffen für den Fall, daß α klein gegen $\frac{Z}{L_0}$ ist. Bei einer Freileitung ist Z etwa 600, α etwa 200. Ist $L_0 = 0,3$ Henry, so wird α in der Tat nur 10% von $\frac{Z}{L_0}$.

Die Vereinfachung trifft also für nicht zu große Induktivitäten zu.

Als Grenzbedingungen haben wir nun

$$\begin{aligned} p_{a(0)} &= 0, & i_{a(0)} &= J, \\ p_{e(0)} &= 0, & i_{e(0)} &= 0, \\ p_{f(0)} &= f_1(x) + f_2(x) = 0, \\ i_{f(0)} &= \frac{1}{Z} [f_1(x) - f_2(x)] = J \end{aligned}$$

und hieraus für $t=0$ $f_1(x) = \frac{1}{2} JZ$, $f_2(x) = -\frac{1}{2} JZ$.

Die Reflexionsbedingungen sind: am Leitungsanfang Reflexion mit gleichen Vorzeichen, am Leitungsende nach Maßgabe der Gl. 371, die sich auf Grund unserer Annahme vereinfacht in

$$\varrho = \varepsilon^{-\beta t} \left[k + \int \varepsilon^{\beta t} \left(-\varphi \beta + \frac{d\varphi}{dt} \right) dt \right] \quad \dots \quad (371a)$$

worin zur Abkürzung $\beta = \frac{Z}{L_0}$ gesetzt ist.

Die Werte φ sind zunächst von $t=0$ an durch die Welle $f_1(x) = \frac{1}{2}JZ$ gegeben. Die Welle gebraucht eine Zeit $t_1 = \frac{l}{v}$, um sich über die Leitung zu verschieben, von $t=0$ bis $t=t_1$ ist daher $\varphi = \frac{1}{2}JZ$.

In dieser Zeit wurde die nach dem Leitungsanfang wandernde Welle $f_2(x) = -\frac{1}{2}JZ$ dort mit gleichem Vorzeichen reflektiert und gelangt während der folgenden Zeit von $t=t_1$ bis $t=2t_1$ an das Leitungsende; für dieses Zeitintervall ist daher $\varphi = -\frac{1}{2}JZ$.

Man sieht, daß für die folgenden Zeiten jeder Wert φ der am Leitungsende einfallenden Welle gleich ist dem Wert ϱ der um $2t_1$ früher dort reflektierten Welle.

Für die Zeit $t=0$ bis $t=t_1 = \frac{l}{v}$ war nun

$$\varphi_{(0 \div t_1)} = \frac{1}{2}JZ.$$

Hiermit erhält man aus Gl. 371 a:

$$\varrho_{(0 \div t_1)} = k\varepsilon^{-\beta t} - \frac{1}{2}JZ.$$

Die Integrationskonstante bestimmen wir aus der Bedingung der Stetigkeit des Stromes der Drosselspule. Er ist z. Z. $t=0$

$$i = i_e + \frac{\varphi - \varrho}{Z} = 0 + \frac{1}{2}J - \frac{k}{Z} + \frac{1}{2}J = J,$$

daher

$$k = 0$$

und

$$\varrho_{(0 \div t_1)} = -\frac{1}{2}JZ.$$

Von t_1 bis $2t_1$ war wie gezeigt $\varphi_{(t_1 \div 2t_1)} = -\frac{1}{2}JZ$, ferner wird von $2t_1$ bis $3t_1$

$$\varphi_{(2t_1 \div 3t_1)} = \varrho_{(0 \div t_1)} = -\frac{1}{2}JZ.$$

Daher insgesamt von t_1 bis $3t_1$

$$\varphi_{(t_1 \div 3t_1)} = -\frac{1}{2}JZ$$

und durch Einsetzen in Gl. 371 a

$$\varrho_{(t_1 \div 3t_1)} = k\varepsilon^{-\beta t} + \frac{1}{2}JZ.$$

Für $t=t_1$ ist

$$iZ = (\varphi - \varrho) = -JZ - k\varepsilon^{-\beta t_1} = JZ,$$

daher

$$k = -2JZ\varepsilon^{+\beta t_1}$$

$$\varrho_{(t_1 \div 3t_1)} = \frac{1}{2}JZ(1 - 4\varepsilon^{-\beta(t-t_1)}).$$

Von $t=3t_1$ bis $5t_1$ wird nun φ ebenso groß wie ϱ von

t_1 bis $3t_1$, es ist daher in der Formel dafür statt t zu setzen $(t - 2t_1)$. Man erhält

$$\varphi(3t_1 \div 5t_1) = \frac{1}{2} JZ(1 - 4 \varepsilon^{-\beta(t-3t_1)})$$

und durch Einsetzen in Gl. 371a und Integration

$$Q(3t_1 \div 5t_1) = \frac{1}{2} JZ[-1 - 4 \varepsilon^{-\beta(t_1-t)} + 8 \beta(t - 3t_1) \varepsilon^{-\beta(t-3t_1)}].$$

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man für jedes folgende Intervall in dem Ausdruck für Q je ein weiteres Glied, während das erste Glied in der Klammer abwechselnd $+1$ und -1 ist. Es wird

$$Q(5t_1 \div 7t_1) = Q(3t_1 \div 5t_1) + \frac{1}{2} JZ \left\{ 2 - 4 \varepsilon^{-\beta(t-5t_1)} [1 - 2 \beta(t - 5t_1) + 2 \beta^2(t - 5t_1)^2] \right\}$$

$$Q(7t_1 \div 9t_1) = Q(5t_1 \div 7t_1) - \frac{1}{2} JZ \left\{ 2 - 8 \varepsilon^{-\beta(t-7t_1)} [2 \beta(t - 7t_1) - 2 \beta^2(t - 7t_1)^2 + \frac{2}{3} \beta^3(t - 7t_1)^3] \right\}$$

usf.

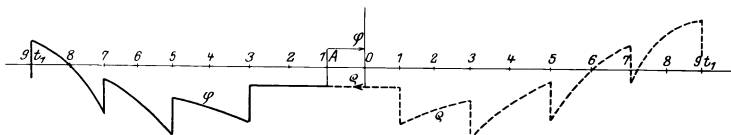


Fig. 181.

In Fig. 181 sind die Werte Q als Funktion der Zeit von O aus nach rechts als gestrichelter Kurvenzug, die Werte φ von O aus nach links als ausgezogene Kurve aufgetragen. Verschiebt man diese Wellenzüge gegeneinander, und zwar den für Q nach links, den für φ nach rechts, so erhält man als Ordinaten in O die Momentanwerte von φ und Q zu einer Zeit t , um deren Betrag man die Wellen verschoben hat.

In der Zeit t wandern die Wellen um die Strecke $x = vt$.

Man kann daher die Abszissen als Längen betrachten, dann entspricht Punkt A im Abstand $vt_1 = l$ von O im Sinne der Wanderung der am Ende reflektierten Welle dem Leitungsanfang.

Man erhält somit auch das zeitliche Bild an jedem Punkt der Leitung und für einen gegebenen Augenblick das Bild der räumlichen Verteilung der Wellen über die Leitung, und kann nun in üblicher Weise die resultierende Strom- und Spannungsverteilung ermitteln, indem man die Welle mit $\varepsilon^{-\alpha t}$ multipliziert und zu den freien Schwingungen die stationären Werte addiert, die in unserem Beispiele Null sind.

Fig. 182 zeigt ohne Berücksichtigung der Dämpfung den zeitlichen Strom- und Spannungsverlauf am Ende der Leitung und

Fig. 183 für einige Zeitpunkte die räumliche Verteilung von Strom und Spannung längs der Leitung, aus denen wir folgendes entnehmen. Da z. Z. $t=0$ der Strom am Leitungsanfang unterbrochen ist, entladet sich das magnetische Feld der Leitung zunächst am Anfang und dann bis zum Ende fortschreitend unter Ausbildung eines elektrischen Feldes, wodurch eine Spannungswelle $--JZ$ nach dem Leitungsende wandert, während der Leitungsstrom auf Null fällt. Zur Zeit t_1 gelangt sie an das Leitungsende und wird an der Drosselspule zurückgeworfen. Diese beginnt sich zu entladen, jedoch sehr langsam.

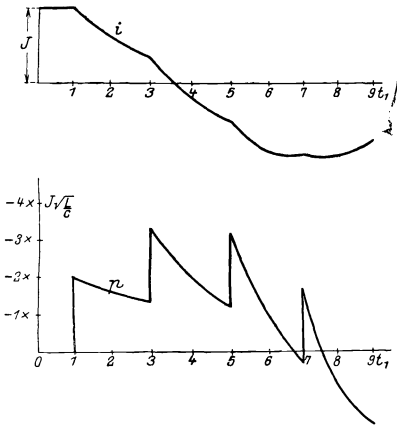


Fig. 182.

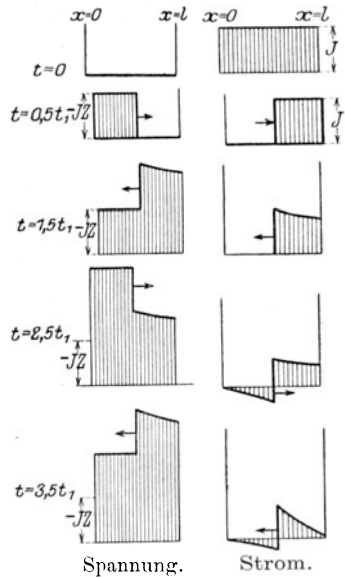


Fig. 183.

Sie erhöht zunächst die elektrische Energie unter Verdoppelung der Spannung auf $2JZ$, und mit dem Rückschreiten dieser Welle nach dem Anfang speichert sie durch den Ladestrom auch wieder magnetische Energie im Felde der Leitung auf. Die mit dem Sprung JZ wandernde Spannungswelle behält aber nicht konstante Höhe, sondern wird am Ende der Leitung wegen der allmählichen Entladung der Drosselspule kleiner. Am Anfang angekommen, muß die magnetische Energie der Leitung sich dort wieder in elektrische Energie verwandeln. Die Spannungs- und Stromwellen laufen zurück. Ist nun die Energie der Drosselspule erschöpft, so können die ankommenden Wellen die Drosselspule wieder laden, jedoch im entgegengesetzten Sinne wie sie ursprünglich geladen war, es bildet sich also eine langsame Schwingung zwischen Leitung und Drosselspule aus, über die sich die Schwingungsvorgänge der Leitung lagern, wie aus der Fig. 182 ersichtlich ist.

Die Spannung springt in Intervallen von $2t_1$ um $2JZ$. Es ist daher von Interesse, die größte mögliche Spannung an der Drosselspule zu kennen. Um ein angenähertes Bild zu erhalten, nehmen wir als ungünstigsten Fall den an, daß bei der Entladung der Drosselspule auch das magnetische Feld der Leitung entladen ist. Sieht man von der Dämpfung ab, so ist dann im elektrischen Felde der Leitung die Energie so groß wie die ursprüngliche magnetische Energie von Leitung und Drosselspule zusammen. Dann ist, wenn wir von der ungleichen Verteilung der Spannung und des Stromes längs der Leitung absehen,

$$\frac{1}{2} p^2 Cl = \frac{1}{2} J^2 (Ll + L_0)$$

$$p = J \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{L_0}{Cl}} = JZ \sqrt{1 + \frac{L_0}{Ll}}.$$

Dies ist ein Mittelwert, gegen den die Spannung an der Drosselspule noch um den Sprung $2JZ$ größer sein kann. Der ungünstigste Fall wäre daher

$$p_{max} = JZ \left(2 + \sqrt{1 + \frac{L_0}{Ll}} \right). \dots (372)$$

der wegen der Dämpfung aber nicht erreicht wird. Man sieht, daß die Spannung um so größer wird, je größer die Induktivität L_0 gegen die der ganzen Leitung ist. Das Beispiel zeigt, wie sehr es bei Hochspannungsanlagen nötig ist, Schalter zu verwenden, die beim natürlichen Nulldurchgang des Stromes unterbrechen.

c) Reflexion an einem Kondensator.

Hier gilt für die freien Schwingungen nach Gl. 368

$$C_0 \frac{d\varepsilon^{-\alpha t}(\varphi + \varrho)}{dt} = \frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{Z} (\varphi - \varrho)$$

$$-\alpha(\varphi + \varrho) + \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{C_0 Z} (\varphi - \varrho) \dots (373)$$

Wir betrachten als Beispiel das Unterbrechen eines Kurzschlusses, wenn parallel zum Schalter ein Kondensator liegt.

Am Ende $x=l$ sei die Leitung kurzgeschlossen, der Leitungsanfang werde z. Z. $t=0$ unterbrochen, es ist dort ein Kondensator C_0 zwischen die Leitung geschaltet, s. Fig. 184.

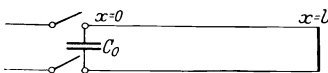


Fig. 184.

Für den Leitungsanfang ist ϱ der Wert der einfallenden Welle, φ der Wert der reflektierten Welle, es ist daher hier Gl. 373 nach φ zu lösen;

und da der Ladestrom des Kondensators ein Entladestrom der Leitung ist, haben wir ihn mit dem negativen Vorzeichen einzusetzen, d. h. auf der linken Seite der Gl. 373 das Vorzeichen umzukehren. Dann lautet Gl. 373 geordnet:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{1}{C_0 Z} - \alpha\right)\varphi = \varrho \left(\frac{1}{C_0 Z} + \alpha\right) - \frac{d\varrho}{dt}.$$

Auch hier kann man meist α gegen $\frac{1}{C_0 Z}$ vernachlässigen, und wenn wir zur Abkürzung $\frac{1}{C_0 Z} = \gamma$ setzen, ist die Lösung der Gleichung

$$\varphi = \varepsilon^{-\gamma t} \left[k + \int \left(\varrho \gamma - \frac{d\varrho}{dt} \right) \varepsilon^{\gamma t} dt \right] \dots \dots \dots (374)$$

Für unser Beispiel nehmen wir wieder an, es sei

$$p_a = 0, \quad i_a = J, \quad p_e = 0, \quad i_e = 0,$$

so wird wieder für $t = 0$

$$f_1(x) = -f_2(x) = \frac{1}{2} JZ.$$

Für die Reflexion am Leitungsanfang gilt Gl. 374, am kurzgeschlossenen Leitungsende wird die einfallende Welle unter Umkehr des Vorzeichens reflektiert.

Wir haben daher am Leitungsanfang einfallend $\varrho_{(0 \div t_1)} = -\frac{1}{2} JZ$, und da $f_1(x - vt) = \frac{1}{2} JZ$ am Leitungsende mit umgekehrten Vorzeichen reflektiert wird, ist ϱ bis $2t_1$ ebenso groß wie von 0 bis t_1

$$\varrho_{(0 \div 2t_1)} = -\frac{1}{2} JZ.$$

Hiermit erhält man aus Gl. 374

$$\varphi_{(0 \div 2t_1)} = k \varepsilon^{-\gamma t} - \frac{1}{2} JZ.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten dient die Bedingung der Stetigkeit der Ladung bzw. der Spannung des Kondensators. Für $t = 0$ ist

$$p_e + (\varphi + \varrho) = 0 + k - \frac{1}{2} JZ - \frac{1}{2} JZ = 0,$$

daher

$$k = JZ$$

$$\varphi_{(0 \div 2t_1)} = \frac{1}{2} JZ (-1 + 2 \varepsilon^{-\gamma t}).$$

Während des folgenden Intervalls $2t_1$ bis $4t_1$ wird daher

$$\varrho_{(2t_1 \div 4t_1)} = -\frac{1}{2} JZ \left\{ -1 + 2 \varepsilon^{-\gamma(t-2t_1)} \right\}$$

und durch Einsetzen in Gl. 374 und Integration

$$\varphi_{(2t_1 \div 4t_1)} = \frac{1}{2} JZ \left\{ +1 + 2 \varepsilon^{-\gamma t} - [2 + 4\gamma(t-2t_1)] \varepsilon^{-\gamma(t-2t_1)} \right\}$$

dann

$$\varphi_{(4t_1 \div 6t_1)} = \frac{1}{2} JZ \left\{ -1 + 2 \varepsilon^{-\gamma t} - [2 + 4\gamma(t-2t_1)] \varepsilon^{-\gamma(t-2t_1)} \right. \\ \left. + [2 + 4\gamma^2(t-4t_1)^2] \varepsilon^{-\gamma(t-4t_1)} \right\}$$

usf.

Fig. 185 zeigt für einige Zeitmomente das allmähliche Ansteigen der Spannung längs der Leitung (ohne Berücksichtigung der Dämpfung) und das damit verbundene Abfallen des Stromes. Die magnetische Energie der Leitung entladet sich in den Kondensator und in das elektrische Feld der Leitung, nur am kurzgeschlossenen Leitungsende bleibt die Spannung Null. Ist das magnetische Feld der Leitung entladen, so ist nur elektrische Energie im Kondensator und in der Leitung vorhanden, und diese laden wieder das magnetische Feld der Leitung in entgegengesetztem Sinn auf. Es bildet sich auch hier eine langsamere Schwingung aus, wie der zeitliche Verlauf der Spannung und des Stromes am Kondensator Fig. 186 zeigen, und die durch die Verluste gedämpft wird. Während beim Unterbrechen ohne Kondensator eine rechteckige Spannungswelle

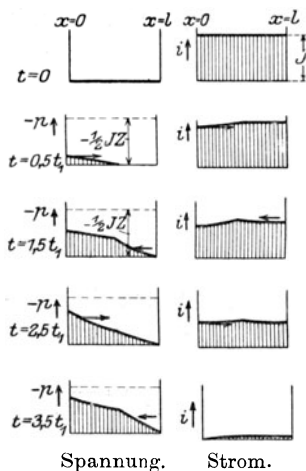


Fig. 185.

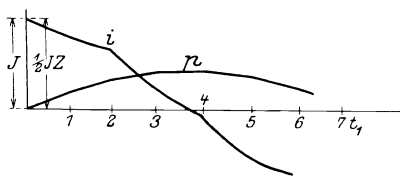


Fig. 186.

von der Höhe $-JZ$ in die Leitung wandert (s. S. 294), ist hier durch den Kondensator die resultierende Spannungswelle stark abgeflacht, weil er eine plötzliche Spannungsänderung nicht zuläßt. Die einziehende Welle ist am Beginn

$$(\varphi + \varrho)_{(0 \div 2t_l)} = -JZ \left(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{C_0 Z} t}\right).$$

Je größer C_0 ist, um so flacher bleibt die Welle. Die absolute Größe der am Leitungsanfang auftretenden Spannung kann aber nicht so sehr vermindert werden, wenn man nicht über sehr große Kondensatoren verfügt. Man kann diese Spannung wieder annähert daraus berechnen, daß man die elektrische Energie im Kondensator und der Leitung gleich der ursprünglichen magnetischen Energie der Leitung setzt.

$$\frac{1}{2} p_{max}^2 (C_0 + Cl) = \frac{1}{2} J^2 Ll$$

$$p_{max} = J \sqrt{\frac{Ll}{C_0 + Cl}} = JZ \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{C_0}{Cl}}}$$

Dieser Wert ist etwas zu klein, weil die Leitung nicht auf der ganzen Länge die gleiche Spannung hat; ist C_0 groß gegen die Kapazität der ganzen Leitung Cl , so ist aber der Fehler sehr gering, andererseits verhindert die Dämpfung schon das Erreichen dieses Wertes. Um z. B. p_{max} auf $\frac{1}{3}$ des Wertes ohne Kondensator (JZ) zu reduzieren, muß

$$\sqrt{1 + \frac{C_0}{Cl}} = 3, \quad C_0 = 8 Cl$$

sein, der Schutzkondensator müßte achtmal soviel Kapazität haben wie die ganze Leitung. Ist z. B. für eine Freileitung $C = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Fd} \cdot \text{km}^{-1}$, so braucht man für eine Leitung von 20 km Länge einen Kondensator

$$C_0 = 8 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 10^{-9} \text{ Fd} = 0,8 \text{ Mfd.}$$

Für Kabel wäre die Kapazität ein Vielfaches davon, und so große Kondensatoren lassen sich nicht wirtschaftlich bauen. Der Kondensator dient daher in erster Linie zur Abflachung der Welle; zu ihrer Verkleinerung ist ein Widerstand (Schalter mit Widerstandsstufe) viel wirksamer.

d) Ein Schwingungskreis im Anschluß an eine Leitung.

Ein weiterer Fall, bei dem unter Umständen hohe Spannungen auftreten können und auf den W. Petersen¹⁾ hingewiesen hat, ist der, daß am Ende einer Leitung eine Induktivität L_0 (etwa ein Stromwandler oder ein Schaltermagnet) und die Sammelschienen von der Kapazität C_0 einen Schwingungskreis bilden.

Hier gilt für die freien Schwingungen nach Gl. 368

$$(\varphi + \varrho) \varepsilon^{-\alpha t} = \frac{L_0}{Z} \frac{d\varepsilon^{-\alpha t}(\varphi - \varrho)}{dt} + \frac{1}{C_0 Z} \int \varepsilon^{-\alpha t}(\varphi - \varrho) dt \quad (375)$$

Sieht man von der Dämpfung ab, d. h. setzt $\alpha = 0$, so ergibt sich durch Differentiation dieser Gleichung und Ordnung nach ϱ

$$\frac{d^2 \varrho}{dt^2} + \frac{Z}{L_0} \frac{d\varrho}{dt} + \frac{\varrho}{L_0 C_0} = \frac{\varphi}{L_0 C_0} - \frac{Z}{L_0} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \dots \quad (376)$$

Nehmen wir an, der Stromkreis werde z. Z. $t = 0$ an eine Gleichspannung P angeschlossen. Dann ist

$$\begin{aligned} p_a &= 0, & i_a &= 0, \\ p_e &= P, & i_e &= 0, \\ p_{f(0)} &= -P, & i_{f(0)} &= 0, \\ f_1(x) &= f_2(x) = -\frac{1}{2} P, \end{aligned}$$

¹⁾ Archiv f. Elektrotechnik Bd. I, S. 233.

daher ist für das Leitungsende von $t=0$ bis $t=t_1$ $\varphi = -\frac{1}{2}P$, und es gilt nach Gl. 376 für diese Zeit

$$\frac{d^2 \varrho}{dt^2} + \frac{Z}{L_0} \frac{d\varrho}{dt} + \frac{\varrho}{L_0 C_0} = -\frac{1}{2} \frac{P}{L_0 C_0} \quad \dots \quad (377)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt eine aperiodische oder eine oszillierende Ladung (s. Kap. XIII S. 257), je nachdem $\frac{Z}{2} \geq \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ ist. Da die Kapazität von Sammelschienen klein ist, ist der zweite Fall der praktisch häufiger vorkommende, wir nehmen ihn an. Dann ist die allgemeine Lösung

$$\varrho = -\frac{1}{2}P + A \sin(\beta t + \delta) e^{-\zeta t},$$

worin A und δ die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten sind, β ist die Kreisfrequenz des Schwingungskreises

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0} - \left(\frac{Z}{2L_0}\right)^2},$$

ζ der Dämpfungsfaktor

$$\zeta = \frac{Z}{2L_0}.$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten haben wir hier die Bedingung der Stetigkeit des Stromes der Drosselspule und andererseits die der Spannung des Kondensators.

Beide waren zu Beginn ($t=0$) Null. Es ist für $t=0$

$$i = i_e + \frac{(\varphi - \varrho)}{Z} = 0 - A \sin \delta = 0,$$

daher

$$\delta = 0.$$

Die Kondensatorspannung ist

$$p_e = p - L_0 \frac{di}{dt} = p_e + \varphi + \varrho - \frac{L_0}{Z} \frac{d(\varphi - \varrho)}{dt}.$$

Hier wird für $t=0$

$$\beta A = 0,$$

daher auch $A=0$ und

$$\varrho_{(0 \div t_1)} = -\frac{1}{2}P.$$

Am Leitungsanfang ist die freie Spannung Null, weil dort die Spannung konstant P ist, die ursprünglich auf der Leitung vorhandene Welle f_2 wird daher am Anfang unter Umkehr des Vorzeichens reflektiert, es kommt zum Ende

$$\varphi_{(t_1 \div 2t_1)} = +\frac{1}{2}P$$

zurück, an diese schließt sich

$$\varphi_{(2t_1 \div 3t_1)} = -\varphi_{(0 \div t_1)} = +\frac{1}{2}P$$

an, so daß von t_1 bis $3t_1$

$$\varphi_{(t_1 \div 3t_1)} = \frac{1}{2}P \quad \text{ist.}$$

Die Lösung der Gl. 377 kann daher mit diesem Werte gesetzt werden

$$\varrho_{(t_1 \div 3t_1)} = \frac{1}{2}P + A \sin [\beta(t - t_1) + \delta] \varepsilon^{-\zeta(t-t_1)}.$$

Zur Zeit $t = t_1$ waren i und die Kondensatorspannung noch Null, also ist

$$\begin{aligned} \varphi_{(t_1)} - \varrho_{(t_1)} &= 0 \\ p_e + \varphi_{(t_1)} + \varrho_{(t_1)} - \frac{L_0}{Z} \frac{d(\varphi_{(t_1)} - \varrho_{(t_1)})}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Bedingung folgt:

$$A \sin \delta = 0, \quad \delta = 0,$$

aus der zweiten:

$$\begin{aligned} 2P &= -\frac{L_0}{Z} \beta A \\ A &= -2P \frac{Z}{\beta L_0} \\ \varrho_{(t_1 \div 3t_1)} &= \frac{P}{2} - 2P \frac{Z}{\beta L_0} \varepsilon^{-\zeta(t-t_1)} \sin \beta(t-t_1). \end{aligned}$$

Am Ende dieses Intervalls ist

$$\varrho_{(3t_1)} = \frac{P}{2} - 2P \frac{Z}{\beta L_0} \varepsilon^{-2\zeta t_1} \sin 2\beta t_1,$$

der Ladestrom

$$i_{(3t_1)} = \frac{(\varphi - \varrho)}{Z} = \frac{2P}{\beta L_0} \varepsilon^{-2\zeta t_1} \sin 2\beta t_1.$$

Er hat gerade eine halbe Schwingung ausgeführt, wenn $2\beta t_1 = \pi$ ist, oder

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{4t_1} = \frac{v}{4l}.$$

$\frac{\beta}{2\pi}$ ist die Eigenfrequenz des Schwingungskreises, $\frac{v}{4l}$ die Eigenfrequenz der Leitung. Bei Gleichheit beider besteht Resonanz. Hierbei hat im angegebenen Moment die Kondensatorspannung ihren größten Wert. Es wird für ($t = 3t_1$)

$$p_{c(3t_1)} = 2P \left\{ 1 - \left[\frac{Z}{L_0 \beta} \sin 2\beta t_1 - \frac{1}{\beta} (\zeta \sin 2\beta t_1 - \beta \cos 2\beta t_1) \right] \varepsilon^{-2\zeta t_1} \right\}.$$

Für $\beta t_1 = 2\pi$ wird, wenn man ζ vernachlässigt,

$$p_c(3t_1) \cong 4P.$$

Für die Zeit $3t_1$ bis $5t_1$ wird nun

$$\varrho_{(3t_1 \div 5t_1)} = -\varrho_{(t_1 \div 3t_1)} = -\frac{P}{2} + 2P \frac{Z}{\beta L_0} \varepsilon^{-\zeta(t-3t_1)} \sin \beta(t-3t_1)$$

und in analoger Weise wie früher, wenn wir uns auf den Fall der Resonanz beschränken:

$$\varrho_{(3t_1 \div 5t_1)} = -\frac{P}{2} + 2P \frac{Z}{\beta L_0} (\varepsilon^{-\zeta(t-t_1)} + 2\varepsilon^{-\zeta(t-3t_1)}) \sin \beta(t-3t_1),$$

ferner

$$\varrho_{(5t_1 \div 7t_1)} = +\frac{P}{2} - 2P \frac{Z}{\beta L_0} [\varepsilon^{-\zeta(t-t_1)} + 2\varepsilon^{-\zeta(t-3t_1)} + 3\varepsilon^{-\zeta(t-5t_1)}] \sin \beta(t-5t_1)$$

usf.

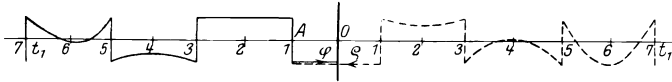


Fig. 187.

In Fig. 187 sind für ein Beispiel $L_0 = 10^{-3}$ Henry, $C_0 = 10^{-9}$ F., für ein Kabel mit $Z = 100$ die Werte von ϱ und φ als Funktion der Zeit aufgetragen.

Hier ist $\beta \cong 10^6$. Daher besteht Resonanz, wenn wir für das Kabel $v = 2 \cdot 10^5$ km · sek⁻¹ annehmen, bei einer Leitungslänge

$$l = \frac{\pi v}{2 \beta} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^6} = 0,314 \text{ km.}$$

Fig. 188 zeigt den zeitlichen Verlauf des Stromes und der Spannungen am Kondensator und an der Drosselspule. Von 0 bis t_1 wandern die Spannung P und der Strom $\frac{P}{Z}$ zum Ende der Leitung; der Strom kann hier nicht plötzlich auf diesen Wert springen, die Spannungswelle wird auf den doppelten Wert reflektiert, und der Spannungssprung P wandert über die auf der Leitung schon vorhandene Spannung P zurück. Währenddessen beginnt der Kondensator sich

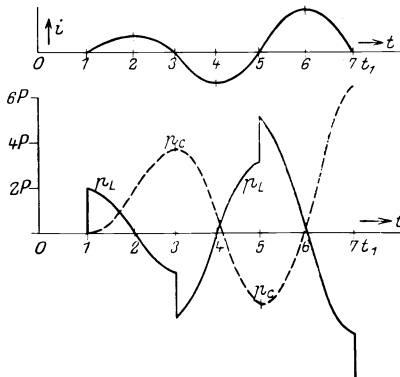


Fig. 188.

zu laden, die Spannung an der Drosselspule nimmt von $2P$ ab. Der Spannungssprung P wird am Leitungsanfang wieder zurückgeworfen, da dort die Spannung konstant ist, und gelangt z. Z. $3t_1$ wieder an das Leitungsende. Ist die Zeit des Hin- und Herwanderns gerade die halbe Schwingungszeit des Schwingungskreises, d. h. besteht Resonanz, so ist hier im Grenzfall (d. h. wenn $\varepsilon^{-\zeta t} = 1$ wäre) die Spannung an der Drosselspule $-2P$, am Kondensator $4P$. Der einfallende Sprung wird auf den doppelten Wert reflektiert, so daß die Spannung an der Drosselspule sich sprunghaft auf $-4P$ ändert, und während der folgenden Halbperiode der Kondensator von $4P$ auf $-4P$ entladen wird, dann steigt die Drosselspulen-spannung wieder sprunghaft um $2P$ usw., so daß sie nach $5t_1$ ohne Dämpfung schon $6P$ hat und sich ins Unbegrenzte steigern könnte, wenn die Dämpfung und Überschläge es nicht verhinderten.

Dieser Fall, der bei den hohen Frequenzen solcher Schwingungskreise nur bei kurzen Leitungslängen auftritt, kann aber nach Petersen bei Erdschlüssen, z. B. durch Isolatorüberschläge, besondere Bedeutung haben. Hierbei fällt an der betreffenden Stelle der Leitung die Spannung plötzlich auf Null und es wandert eine Entladewelle von der Höhe der Spannung, die zuvor bestand, über die Leitung und trifft nach der Reflexion wiederholt dort ein. Da die Erdschlußstelle in beliebiger Entfernung liegen kann, so ist eine Resonanzmöglichkeit stets vorhanden.

Petersen empfiehlt zur Verhütung der Resonanz, die Drosselspulen durch Widerstände zu überbrücken. Sind diese groß, so geht der Strom der Grundfrequenz zum größten Teil dennoch durch die Induktivität, während die freien Schwingungen ihren Weg durch den Widerstand nehmen.

85. Reflexion an der Übergangsstelle zweier Leitungen von verschiedener Charakteristik.

Im folgenden soll der Übergang der Wellen von einer Leitung zu einer anderen mit abweichender Charakteristik untersucht werden. Die erste Leitung erstreckt sich von $x=0$ bis $x=l_I$, die zweite schließt sich daran von $x=l_I$ bis $x=l_{II}$. Die Charakteristiken der Leitungen seien Z_I und Z_{II} .

Die Ausgleichsvorgänge auf jeder Leitung lassen sich durch zwei in entgegengesetzter Richtung wandernde Wellen, f_{I1} , f_{I2} , f_{II1} , f_{II2} darstellen.

So ist

$$\begin{aligned} p_{fI} &= \varepsilon^{-\alpha_I t} [f_{I1}(x - v_I t) + f_{I2}(x + v_I t)] \\ i_{fI} Z_I &= \varepsilon^{-\alpha_I t} [f_{I1}(x - v_I t) - f_{I2}(x + v_I t)] \end{aligned}$$

$$p_{fII} = \varepsilon^{-\alpha_{II} t} [f_{II1}(x - v_{II}t) + f_{II2}(x + v_{II}t)]$$

$$i_{fII} Z_{II} = \varepsilon^{-\alpha_{II} t} [f_{II1}(x - v_{II}t) - f_{II2}(x + v_{II}t)]$$

Wir untersuchen nun die Beziehungen, die zwischen den vier Wellen am Übergangspunkt $x=l_I$ bestehen. Zur Abkürzung werden für $x=l_I$ die Momentanwerte für die im Sinne der positiven x wandernden Wellen mit φ , die im Sinne der negativen x wandernden mit ϱ bezeichnet:

$$\varepsilon^{-\alpha_I t} f_{I1}(l_I - v_I t) = \varphi_I, \quad \varepsilon^{-\alpha_I t} f_{I2}(l_I + v_I t) = \varrho_I$$

$$\varepsilon^{-\alpha_{II} t} f_{II1}(l_I - v_{II} t) = \varphi_{II}, \quad \varepsilon^{-\alpha_{II} t} f_{II2}(l_I + v_{II} t) = \varrho_{II}.$$

Die Stetigkeit der Spannung und des Stromes verlangt, daß für $x=l_I$, $p_{fI} = p_{fII}$ und $i_{fI} = i_{fII}$ ist, daher

$$\left. \begin{aligned} \varphi_I + \varrho_I &= \varphi_{II} + \varrho_{II} \\ \frac{1}{Z_I}(\varphi_I - \varrho_I) &= \frac{1}{Z_{II}}(\varphi_{II} - \varrho_{II}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (378)$$

Betrachtet man die im Punkte $x=l_I$ eintreffenden Wellen φ_I und ϱ_{II} als gegeben, so ergeben sich die anderen aus Gl. 378 durch die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \varrho_I &= \varphi_I \frac{Z_{II} - Z_I}{Z_{II} + Z_I} + \varrho_{II} \frac{2Z_I}{Z_I + Z_{II}} \\ \varphi_{II} &= \varrho_{II} \frac{Z_I - Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} + \varphi_I \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (379)$$

Das in diesen Gleichungen enthaltene Reflexionsgesetz für die Übergangsstelle sagt folgendes aus.

Von jeder der beiden auffallenden Wellen φ_I und ϱ_{II} wird ein Teil auf die gleiche Leitung reflektiert, ein anderer Teil tritt in die andere Leitung über.

Von φ_I wird auf Leitung I reflektiert

$$\varphi_I \frac{Z_{II} - Z_I}{Z_I + Z_{II}} = \varphi_I q \quad \dots \dots \dots (379a)$$

q ist der Reflexionsfaktor. Von ϱ_{II} wird auf Leitung II reflektiert

$$\varrho_{II} \frac{Z_I - Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} = -\varrho_{II} q \quad \dots \dots \dots (379b)$$

Der Reflexionsfaktor hat wegen der entgegengesetzten Richtung der Fortpflanzung das negative Vorzeichen, aber die gleiche Größe wie oben.

Von φ_I tritt auf Leitung II über

$$\varphi_I \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} = \varphi_I [1 - (-q)] \quad \dots \dots \dots (379c)$$

Von ϱ_{II} tritt auf Leitung I über

$$\varrho_{II} \frac{2Z_I}{Z_I + Z_{II}} = \varrho_{II}(1 - q) \dots \dots \dots (379d)$$

Somit kann man Gl. 379 schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_I &= \varphi_I q + \varrho_{II}(1 - q) \\ \varphi_{II} &= -\varrho_{II} q + \varphi_I(1 + q) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (380)$$

worin

$$q = \frac{Z_{II} - Z_I}{Z_I + Z_{II}}$$

Ist $Z_{II} > Z_I$, so ist q positiv. Dies ist z. B. der Fall, wenn Leitung II eine Freileitung, Leitung I ein Kabel ist. Die vom Kabel auf die Freileitung übertretende Welle ist im Verhältnis $(1 + q)$ vergrößert, die von der Freileitung in das Kabel übertretende Welle ist im Verhältnis $(1 - q)$ verkleinert.

Bei Verfolgung des Ausgleichsvorgangs ist zu berücksichtigen, daß die Wellen auf Leitungen mit verschiedenen Konstanten erstens ungleich stark gedämpft werden, und daß sie zweitens mit ungleicher Geschwindigkeit fortschreiten. Da ein bestimmter Zustand über die Leitungslänge während einer Zeit $t = \frac{l}{v}$ wandert, worin die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v sich aus der im leeren Raum (und auch in Luft) als

$$v = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{\epsilon \mu}} \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-1}$$

ergibt, so kann man für alle Leitungen den Vorgang auf die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit ($3 \cdot 10^{10}$) zurückführen, wenn man statt der wirklichen Leitungslänge l die „reduzierte“ Länge

$$l' = l \sqrt{\epsilon \mu}$$

einführt.

Für ein Kabel wäre daher $l\sqrt{\epsilon}$ einzusetzen.

Beispiele.

1. Das Laden einer am Ende offenen Freileitung über ein Kabel.

Das Kabel wird am Anfang $x = 0$ z. Z. $t = 0$ an eine Stromquelle von konstanter Spannung P und großer Kapazität angeschlossen. Kabel und Freileitung sind zunächst strom- und spannungslos. Es ist für beide.

$$p_a = 0, \quad i_a = 0.$$

Am Ende der Ladung ist

$$p_e = P, \quad i_e = 0,$$

daher

$$p_{f(0)} = -P, \quad i_{f(0)} = 0$$

und die Form der Wellen für beide Leitungen ist z. Z. $t=0$

$$f_{I1}(x) = f'_{II2}(x) = f_{II1}(x) = f_{II2}(x) = -\frac{1}{2}P.$$

Für die Reflexion gilt:

a) bei $x=0$ ist $p = \text{konst.} = P$; $p_f = 0$, daher Reflexion mit umgekehrtem Vorzeichen;

b) bei $x=l_{II}$ ist $i_f = 0$, daher Reflexion mit gleichem Vorzeichen;

c) bei $x=l_I$ ist nach Gl. 380

$$\begin{aligned} \varrho_I &= q\varphi_I + (1-q)\varrho_{II} \\ \varphi_{II} &= -q\varrho_{II} + (1+q)\varphi_I. \end{aligned}$$

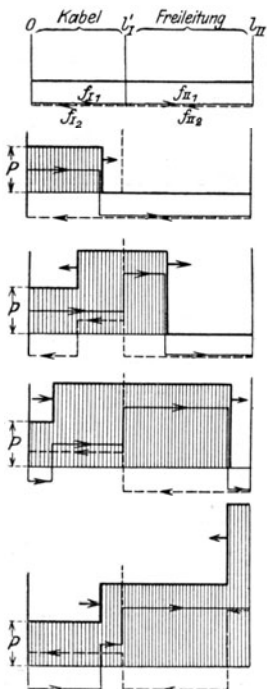


Fig. 189.

Nimmt man z. B. für das Kabel $Z_I = 60$, für die Freileitung $Z_{II} = 600$ an, so wird:

$$q = \frac{600 - 60}{600 + 60} = 0,82$$

$$\varrho_I = 0,82 \varphi_I + 0,18 \varrho_{II}$$

$$\varphi_{II} = -0,82 \varrho_{II} + 1,82 \varphi_I$$

ϱ_I ist fast ebenso groß wie φ_I , am Ende des Kabels wird φ_I fast ebenso reflektiert als ob das Kabel offen wäre, weil die Freileitung große Induktivität hat.

Die auf der Freileitung zum Anschlußpunkt des Kabels wandernde Welle ϱ_{II} wird mit umgekehrtem Vorzeichen fast in voller Stärke reflektiert, da das Kabel, das eine große Kapazität besitzt, für die auf der Freileitung ankommende Welle nahezu einen Kurzschluß darstellt.

Fig. 189 zeigt den Anfang des Ladevorgangs unter Vernachlässigung der Dämpfung. Eine resultierende Spannungswelle P wandert über das Kabel und erreicht den Anschlußpunkt z. Z. $t_I = \frac{l_I'}{v}$; nach dieser

Zeit ist (abgesehen von der Dämpfung) $\varphi_I = \frac{1}{2}P$, $\varrho_{II} = -\frac{1}{2}P$, die resultierende Spannung am Ende des Kabels

$$P + \varphi_I + \varrho_I = P \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [q - (1 - q)] \right\} = 1,82 P$$

die Spannung wird also nahezu verdoppelt.

In die Freileitung tritt eine resultierende Spannung von gleicher Höhe ein und gelangt an das Ende (l_{II}) z. Z. $t_{II} = \frac{l'_I + l_{II}}{v}$.

Hier wird die einfallende Welle mit gleichem Vorzeichen reflektiert, es wird also abgesehen von der Dämpfung z. Z. t_{II}

$$f_{II1}(l_{II} - v_{II}t) = f_{II2}(l_{II} + vt) = \varphi_{II} = \frac{1}{2} P (+0,82 + 1,82) = 1,32 P,$$

daher die resultierende Spannung

$$P + f_{II1} + f_{II2} = 3,64 P,$$

die Spannung wird nahezu auf den vierfachen Wert reflektiert.

Diese Erscheinung ergibt sich jedesmal, wenn auf eine Leitung von kleiner Charakteristik eine solche mit viel größerer Charakteristik folgt. Da die Leitung mit großer Charakteristik (große Induktivität) so auf die mit großer Kapazität wirkt als ob diese offen wäre, wird an der Übergangsstelle die Spannung nahezu verdoppelt (den Wert 2 erhält man, wenn man Z_I gegen Z_{II} vernachlässigt, dann wird $q = 1$).

Man überträgt nun diese Beobachtung auf die Übergangsstellen von Leitungen in die Wicklungen von Maschinen und Transformatoren. Diese Übertragung ist freilich nicht streng, da bei derartigen Wicklungen die Wellen wahrscheinlich nicht eben bleiben, wie wir sie unserer Betrachtung zugrunde gelegt haben. Indessen ist bisher nichts Näheres über die Fortpflanzung der Wellen in Maschinen bekannt, so daß man zur Erklärung der Vorgänge diese Annahme verwendet.

Nehmen wir an, die Leitung II sei eine Transformatorwicklung. Der Bedingung, daß die Leitung am Ende offen sei, entspricht dann der Fall, daß der (z. B. einphasige) Transformator einpolig angeschlossen und ungeerdet ist. Hierbei kann, wie bei der offenen Leitung, nur ein Ladestrom der unter Spannung stehenden Teile der Wicklung bestehen, der durch den Anfang der Wicklung als Leitungsstrom fließt.

Da die Charakteristik einer Transformatorwicklung viel größer ist als die eines Kabels oder einer Freileitung, wird die eintreffende Spannungswelle zunächst wieder nahezu auf den doppelten Betrag reflektiert.

An sich ist der Betrag von doppelter Größe nicht so gefährlich, da die Wicklung jedenfalls so isoliert sein muß, daß sie die doppelte Spannung z. B. gegen Erde für kurze Zeit aushalten

muß. Das Gefährliche ist vielmehr die steile Wellenstirn der Welle, d. h. der Spannungssprung. Dieser bedeutet, daß zwischen zwei benachbarten Punkten der Wicklung eine Spannung von dem Betrag dieses Sprungs besteht. Während im stationären Betrieb zwischen den einzelnen Windungen Spannungen von höchstens etwa 100 Volt bestehen, wird die Isolation zwischen den Windungen beim einpoligen Einschalten mit doppelter Betriebsspannung beansprucht. (Bei Wechselstrom ist hierbei der doppelte Momentanwert, im ungünstigsten Fall also die doppelte Amplitude zu verstehen.) Besonders die ersten Windungen sind gefährdet, da man annehmen kann, daß die Welle nach dem Eindringen in die Wicklung gedämpft wird. Die hohe Beanspruchung führt, wenn keine besonderen Schutzmaßnahmen getroffen werden, zu Überschlägen von Windung zu Windung, zur Zerstörung der Isolation, Kurzschluß und Ausbrennen der Windungen. Die ersten Windungen sind daher besonders stark zu isolieren.

Die Reflexion der Spannung am Ende der offenen Leitung auf den nahezu vierfachen Betrag bedeutet, auf den einpolig angeschlossenen Transformator übertragen, zunächst eine hohe Beanspruchung der Wicklung gegen Erde, zweitens einen vom Ende der Wicklung zurücklaufenden Spannungssprung von der Höhe $2P$, der zunächst die Windungen des Wicklungsendes sehr stark gegeneinander beansprucht.

In der Tat beobachtet man beim einpoligen Einschalten Windungsüberschläge besonders häufig an dem nicht eingeschalteten Pol.

Beim mehrpoligen Einschalten ist die Beanspruchung der Isolation zwischen den Windungen nur halb so groß.

Bei einer Transformator- oder Motorwicklung verteilt sich die Spannung im stationären Zustand nahezu gleichmäßig über die Wicklung. Die Mitte der Wicklung ist der Symmetriepunkt, gegen den die Klemmen bei einphasiger Wicklung die Spannung $+\frac{1}{2}p$ und $-\frac{1}{2}p$ haben. Beim Einschalten wandert daher auf jeder Zuleitung eine Welle von halber Höhe der Betriebsspannung, die beim Eintreffen auf die Wicklung nahezu verdoppelt wird, so daß die ersten Windungen mit der vollen Betriebsspannung beansprucht werden können. Da bei einpoligem Einschalten die Beanspruchung fast doppelt so groß war, gilt es als praktische Regel, daß Wicklungen stets allpolig eingeschaltet werden müssen.

Nun erfolgt zwar das Einschalten aller Pole niemals so gleichzeitig, daß man es gegenüber der hohen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen tatsächlich als „gleichzeitig“ bezeichnen kann. Es ist hierunter aber der Fall zu verstehen, daß beim Schließen des einen Kontaktes, der andere nur noch durch eine sehr kleine Luft-

distanz unterbrochen ist, die durch die einziehende Spannungswelle ohne weiteres überbrückt wird. In diesem Sinne kann von einem mehrpoligen gleichzeitigen Einschalten gesprochen werden.

Analog wie das Schalten am Anfang der Leitung I ein Eindringen von fast doppelter Höhe in Leitung II von großer Charakteristik bedingt, tritt dies auch bei anderen Vorgängen auf. Wird die Leitung I von einer atmosphärischen Ladung getroffen, so wandert (s. S. 293) je eine Welle von halber Höhe der anfänglichen Verteilung nach den Enden und wird an einer Maschinen- oder Transformatorwicklung auf den doppelten Betrag reflektiert. Ein Erdschluß auf Leitung I bedeutet ein plötzliches Sinken der Spannung gegen Erde an der betr. Stelle auf Null.

Eine Spannungswelle von der Höhe der ursprünglichen Spannung gegen Erde wandert über die Leitung und tritt unter Umständen mit sehr steiler Stirn in die Wicklungen ein.

2. Als zweites Beispiel betrachten wir den Fall, daß der Schalter an der Verbindungsstelle der beiden Leitungen I und II liegt und z. Z. $t=0$ geschlossen wird. Bei $x=0$ ist die Leitung I an die Stromquelle angeschlossen, deren Spannung der Einfachheit halber wieder als konstant P angesehen werden soll. Leitung I ist also z. Z. $t=0$ unter Spannung.

Die Anfangsbedingungen sind daher

für $x=0$ bis l_I

$$p_a = P, \quad i_a = 0,$$

für $x=l_I$ bis l_{II}

$$p_a = 0, \quad i_a = 0.$$

Der Endzustand für beide Leitungen ist

$$p_e = P, \quad i_e = 0.$$

Für die freien Schwingungen wird daher

für $x=0$ bis l_I

$$p_{fI(0)} = 0, \quad i_{fI(0)} = 0,$$

für $x=l_I$ bis l_{II}

$$p_{fI(0)} = -P, \quad p_{fI(0)} = 0.$$

Daher ist für $t=0$

$$\begin{aligned} f_{I1}(x) &= f_{I2}(x) = 0, \\ f_{II1}(x) &= f_{II2}(x) = -\frac{1}{2}P, \end{aligned}$$

oder mit der früheren Bezeichnung an der Übergangsstelle

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \varrho_I = 0, \\ \varphi_{II} &= \varrho_{II} = -\frac{1}{2}P. \end{aligned}$$

Nach dem Reflexionsgesetz Gl. 380 ist dann unmittelbar nach dem Einschalten, da $\varphi_I = 0$ ist,

$$\begin{aligned} \varrho_I &= q\varphi_I + (1 - q)\varrho_{II} = -\frac{1}{2}P(1 - q), \\ \varphi_{II} &= (1 + q)\varphi_I - q\varrho_{II} = +\frac{1}{2}Pq. \end{aligned}$$

In die Leitung II wandert also die resultierende Welle

$$p_{II} = p_e + p_{fII} = P + \varphi_{II} + \varrho_{II} = P \left[1 + \frac{1}{2}(q - 1) \right] = P \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}}.$$

In der Leitung I überlagert sich über die Spannung P eine „rückläufige Schaltwelle“

$$\varrho_I = -\frac{1}{2}P(1 - q) = -P \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II}}.$$

Der Strom ist

$$\frac{\varphi_{II} - \varrho_{II}}{Z_{II}} = \frac{P}{Z_I + Z_{II}}.$$

Ist $Z_{II} > Z_I$, also z. B. wenn die zuzuschaltende Leitung II eine Freileitung, I ein Kabel ist, so ist die resultierende in Leitung II einziehende Welle p_{II} etwas kleiner als P , die rückläufige Schaltwelle ϱ_I ist klein; im Grenzfall, wenn Z_I als sehr klein gegen Z_{II} vernachlässigt und $q \cong 1$ gesetzt werden kann, ist $p_{II} \cong P$ und $\varrho_I \cong 0$.

Ist dagegen $Z_I > Z_{II}$, also wenn die zuzuschaltende Leitung II ein Kabel, die eingeschaltete I eine Freileitung ist, so ist die in das Kabel einziehende Welle p_{II} klein (im Grenzfall, $q \cong -1$, $p_{II} = 0$), die rückläufige Schaltwelle ϱ_I ist dagegen groß (im Grenzfall gleich $-P$). Hier bringt das Kabel, das einen großen Ladestrom aufnimmt, die Spannung am Ende der Freileitung, die nur geringe Kapazität besitzt, zum Abfall. Die beiden Fälle sind in Fig. 190 dargestellt.

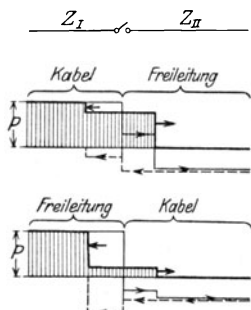


Fig. 190.

Auch dieses Beispiel gestattet einige wichtige Schlußfolgerungen, auf die Rüdenberg¹⁾ und Linke²⁾ hingewiesen haben.

Denken wir uns Leitung I ersetzt durch einen Stromerzeuger, so liegt der zweite Fall vor, daß $Z_I > Z_{II}$ ist. Da die Spannung des Generators im stationären Zustand vom Spannungsmittelpunkt an längs der Wicklung ansteigt, kann der Anfangszustand etwa

¹⁾ Elektrotechnik und Maschinenbau 1912, Heft 8.

²⁾ Archiv f. Elektrotechnik Bd. I, 1912, Heft 4.

durch die schräge Linie Fig. 191 dargestellt werden. P ist die Spannung des Endes der Wicklung gegen den Mittelpunkt, bei einem Einphasengenerator die halbe Betriebsspannung, bei einem Dreiphasengenerator die Phasenspannung (Sternspannung).

Durch das Eindringen der rückläufigen Schaltwelle sinkt die Spannung an den Generatorklemmen zunächst nahezu auf Null und damit wandert ein Spannungssprung in die Wicklung, dessen Höhe fast gleich P ist, wobei die Isolation von Windung zu Windung stark beansprucht wird.

Noch ungünstiger liegt der Fall, wenn man berücksichtigt, daß zwischen dem Generator und dem Schalter meist ein Stück Freileitung liegt. Wird nun durch den Schalter ein Kabel angeschlossen, so wandert zunächst die rückläufige Schaltwelle vom Schalter in die Freileitung zurück. Gelangt sie an den Generator, so wird der Spannungssprung, wie auf S. 314 gezeigt, durch Reflexion nahezu verdoppelt, so daß die Isolation der ersten Windungen hiermit beansprucht wird.

Die beim Einschalten von Kabeln, besonders hinter einem Stück Freileitung, beobachteten Windungsüberschläge an Generatoren sind hierdurch zu erklären.

Auch zeigt diese Betrachtung, daß man bei der Untersuchung des Einschaltvorgangs auf der Leitung die Vorgänge im Generator nicht ohne weiteres vernachlässigen darf. Bei den einfachen Beispielen S. 286 haben wir daher besonders hervorgehoben, daß die Stromquelle mit großer Kapazität versehen zu denken ist.

Die Schaltwellen werden nun an den Enden der Leitung reflektiert und ergeben periodische, abklingende Impulse von der Eigenfrequenz der betreffenden Leitung, wie dies in den Beispielen S. 299 ff. der Fall war. Hierbei kann der Fall eintreten, daß ein anderes ferner gelegenes Leitungsstück mit diesen Impulsen in Resonanz kommt, nämlich dann, wenn die reduzierten Längen (s. S. 313) der beiden Leitungen gleichgroß sind. Durch die Resonanz können in der zweiten Leitung sehr hohe Spannungen entstehen, ein analoger Fall zu dem auf S. 307 behandelten Beispiel, auf den ebenfalls Petersen (a. a. O.) hingewiesen hat.

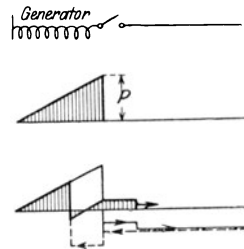


Fig. 191.

86. Der Einfluß von Widerstand, Induktivität und Kapazität auf durchlaufende Wellen.

1. Zwischen zwei Leitungen ist ein Ohmscher Widerstand R_0 geschaltet (s. Fig. 192).

Wir bezeichnen wie früher mit $\varphi_I, \varrho_I, \varphi_{II}, \varrho_{II}$ die Momentanwerte der Wellen auf den Leitungen I und II an der Übergangsstelle, so ist für die freien Schwingungen an dieser Stelle

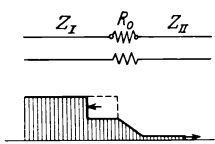


Fig. 192.

$$i_{fI} = i_{fII},$$

$$p_{fI} = p_{fII} + i_f R_0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{\varphi_I - \varrho_I}{Z_I} = \frac{\varphi_{II} - \varrho_{II}}{Z_{II}},$$

aus der zweiten

$$\varphi_I + \varrho_I = \varphi_{II} + \varrho_{II} + \frac{\varphi_{II} - \varrho_{II}}{Z_{II}} R_0.$$

Betrachtet man wieder φ_I und ϱ_{II} als gegeben, so wird

$$\left. \begin{aligned} \varrho_I &= \varphi_I \frac{Z_{II} - Z_I + R_0}{Z_I + Z_{II} + R_0} + \varrho_{II} \frac{2 Z_I}{Z_I + Z_{II} + R_0} \\ \varphi_{II} &= \varrho_{II} \frac{Z_I - Z_{II} + R_0}{Z_I + Z_{II} + R_0} + \varphi_I \frac{2 Z_{II}}{Z_I + Z_{II} + R_0} \end{aligned} \right\} \quad (381)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \varrho_I &= \varphi_I q_I + \varrho_{II} (1 - q_I) \\ \varphi_{II} &= -\varrho_{II} q_{II} + \varphi_I (1 + q_{II}) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (382)$$

worin

$$q_I = \frac{Z_{II} - Z_I + R_0}{Z_I + Z_{II} + R_0}, \quad -q_{II} = \frac{Z_I - Z_{II} + R_0}{Z_I + Z_{II} + R_0} \quad (383)$$

Der Reflexionsfaktor q_I der Leitung I ergibt sich also aus dem ohne Widerstand (s. Gl. 379 a und b), wenn statt Z_{II} die Summe $Z_{II} + R_0$ gesetzt wird, und $-q_{II}$ für Leitung II, wenn $Z_I + R_0$ statt Z_I gesetzt wird. Der Widerstand wirkt bei der Reflexion an jeder Leitung so, als ob die Charakteristik der folgenden Leitung um R_0 vergrößert wäre.

Wenden wir dies auf das zweite Beispiel des vorigen Abschnitts an, bei dem der Schalter an der Verbindungsstelle liegt und Leitung I z. Z. $t=0$ beim Schließen des Schalters schon unter Spannung stand. Für die darauffolgende Zeit ist

$$\varphi_I = 0, \quad \varrho_{II} = -\frac{1}{2} P.$$

Die in Leitung II einziehende Spannungswelle ist

$$p_{II} = P + \varphi_{II} + \varrho_{II} = P \left[1 - \frac{1}{2}(1 - q_{II}) \right] = P \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II} + R_0}$$

und die in I zurücklaufende Schaltwelle

$$\varrho_I = \varrho_{II}(1 - q_I) = -P \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II} + R_0},$$

der Strom

$$\frac{\varphi_I - \varrho_I}{Z_I} = \frac{\varphi_{II} - \varrho_{II}}{Z_{II}} = \frac{P}{Z_I + Z_2 + R_0}.$$

Die Schaltwellen werden, wie sich aus dem Vergleich mit den früheren Formeln S. 318 zeigt, um so kleiner, je größer R_0 ist, und ebenso wird der Strom verkleinert (s. Fig. 192).

Man kann also die auftretenden Spannungssprünge durch Verwendung eines Schalters mit einer Widerstandsstufe beliebig herabsetzen. Beim Kurzschließen des Widerstandes würden aber bei zu großem Spannungsabfall im Widerstand neue Schaltwellen auftreten.

Ist z. B. die Leitung II offen, so nimmt sie im stationären Zustand einen Ladestrom J_0 auf, die kurzzuschließende Spannung ist bei dem zweiten Schaltvorgang $J_0 R_0$. Für sie wird die rückläufige Schaltwelle $-J_0 R_0 \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II}}$. Soll sie gleich der zuerst auftretenden sein, so wird

$$\frac{P}{Z_I + Z_{II} + R_0} = J_0 R_0 \frac{Z_I}{Z_I + Z_{II}},$$

woraus R_0 berechnet werden kann¹⁾.

Handelt es sich nur darum, den Einfluß auf eine durchlaufende Welle zu untersuchen, wie z. B. der Ladewelle im ersten Beispiel auf S. 313, bei dem die Spannungswelle von der Höhe P zunächst über Leitung I wandert, dann am Übergangspunkt z. T. reflektiert wird und z. T. auf Leitung II übertritt, wobei nur das erste Auftreffen der Welle ohne die darauffolgenden Reflexionen an den Enden berücksichtigt wird, so kann man auch von den resultierenden Wellen ausgehen. Sei p_I die Spannung der auf der Leitung I ankommenden Welle, p_{eI} die am Übergangspunkt reflektierte, so ist $p_I + p_{eI}$ die resultierende Spannung, p_{II} sei die Spannung der in Leitung II übertretenden Welle und der Strom $\frac{p_I - p_{eI}}{Z_I}$. Der Strom auf Leitung II ist $\frac{p_{II}}{Z_{II}}$. Die Kontinuität des Stromes erfordert

$$i = \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = \frac{p_{II}}{Z_{II}}.$$

¹⁾ s. Rüdénberg, E. u. M. 1912, Heft 8.

Da nun die Summe aus p_{II} und dem Spannungsabfall im Widerstand iR_0 gleich der Spannung auf Leitung I sein muß, ist

$$p_I + p_{eI} = p_{II} + \frac{p_{II}}{Z_{II}} R_0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit Z_I und addiert sie zur zweiten, so wird

$$\begin{aligned} p_{II} &= p_I \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{II} + R_0}, \\ p_{eI} &= p_I - p_{II} \frac{Z_I}{Z_{II}} = p_I \frac{Z_{II} + R_0 - Z_I}{Z_I + Z_{II} + R_0}, \\ i &= \frac{p_{II}}{Z_{II}} = \frac{2p_I}{Z_I + Z_{II} + R_0}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben an, wie die Welle durch den Widerstand beeinflusst wird. Macht man $R_0 = Z_I + Z_{II}$, so ist die über tretende Spannung p_{II} ebenso groß wie die reflektierte p_{eI} .

2. Eine Induktivität L_0 in Reihe mit zwei Leitungen.

Da die Induktivität ihre magnetische Energie nicht plötzlich ändern kann, verhindert sie das sprungweise Übertreten der auf einer Leitung ankommenden Welle in die zweite. Wir untersuchen wieder nur den Übergang einer durchlaufenden Welle.¹⁾

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} &= \frac{p_{II}}{Z_{II}}, \\ p_I + p_{eI} &= p_{II} + \frac{L_0}{Z_{II}} \frac{dp_{II}}{dt}. \end{aligned}$$

Eliminiert man zunächst p_{eI} , so wird

$$\frac{dp_{II}}{dt} + p_{II} \frac{Z_I + Z_{II}}{L_0} = 2p_I \frac{Z_{II}}{L_0}.$$

Nehmen wir als ungünstigsten Fall an, daß die ankommende Welle rechteckig und von der Höhe p_I ist, so ist die Lösung dieser Gleichung

$$p_{II} = p_I \frac{2Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} + k\varepsilon^{-\frac{Z_I + Z_{II}}{L_0} t}.$$

Z. Z. $t = 0$ muß der Strom $\frac{p_{II}}{Z_{II}}$ und auch p_{II} Null sein.

Daher wird

¹⁾ s. Pfiffner, Elektrotechnik u. Maschinenbau 1912, Heft 47, 48, 49.

$$p_{II} = p_I \frac{2 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} (1 - \varepsilon^{-\zeta t}) \dots \dots \dots (384)$$

worin

$$\zeta = \frac{Z_I + Z_{II}}{L_0} \dots \dots \dots (385)$$

ist. Der Strom ist

$$i = \frac{p_{II}}{Z_{II}} = \frac{2 p_I}{Z_I + Z_{II}} (1 - \varepsilon^{-\zeta t}), \dots \dots \dots (386)$$

die reflektierte Spannung

$$p_{oI} = p_I - Z_I \frac{p_{II}}{Z_{II}} = p_I - p_I \frac{2 Z_I}{Z_I + Z_{II}} (1 - \varepsilon^{-\zeta t}) \quad (387)$$

Die Wellen wandern nun mit den Geschwindigkeiten v_I und v_{II} auf den beiden Leitungen. Nach einer Zeit t ist p_{oI} um $-x_I = v_I t$ in die Leitung I zurückgewandert, p_{II} um $x_{II} = v_{II} t$ in die Leitung II. Fig. 193 zeigt das räumliche Bild. Der charakteristische Einfluß der Drosselspule ist danach einerseits der allmähliche Übertritt der Welle in die Leitung II, dagegen eine Reflexion in voller Stärke auf die Leitung I, so daß der Spannungssprung auf der Leitung zurückwandert.

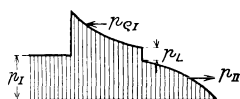
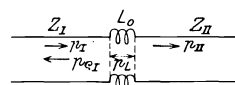


Fig. 193.

Das größte Spannungsfälle in der Leitung II ergibt sich für $t=0$. Es ist

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x} = \frac{\partial p_{II}}{\partial t} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_{II}} \frac{\partial p_{II}}{\partial t} = \frac{2 p_I}{v_{II}} \frac{Z_{II}}{L_0} \varepsilon^{-\frac{Z_I + Z_{II}}{L_0} t}$$

Für $t=0$ ist, da $\frac{Z_{II}}{v_{II}} = L_{II}$ die Induktivität der Leitung pro km ist,

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x}_{(max)} = 2 p_I \frac{L_{II}}{L_0} \dots \dots \dots (388)$$

worin das Spannungsgefälle in Volt pro km erhalten wird.

Eine Energieabsorption findet durch die Drosselspule natürlich nicht statt. Von der Leistung, die die einfallende Welle in jedem Augenblick mitführt, tritt ein Teil auf Leitung II über, ein Teil wird auf Leitung I reflektiert, ein weiterer Teil endlich dient zur Ladung des magnetischen Feldes der Drosselspule. Hört die Welle auf zu wirken, so entladet sich die Drosselspule in die beiden Leitungen und die Energie wird nur durch die Verluste in den Leitungen absorbiert.

Eine Energieabsorption könnte z. B. dadurch erreicht werden,

daß man die Drosselspule durch einen größeren Widerstand überbrückt, durch den die freien Schwingungen im wesentlichen verlaufen, während die langsamen stationären Schwingungen durch die Drosselspule leichter hindurchtreten.

Seien i_R und i_L die Ströme in den parallelgeschalteten R_0 und L_0 , so ist

$$i_R = \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt}.$$

Die Summe der Ströme ist gleich dem Strome auf den Leitungen. Nehmen wir wieder an, daß eine Welle p_I auf Leitung I wandert und z. Z. $t=0$ den Übergangspunkt trifft.

Hier ist

$$p_I + p_{eI} = p_{II} + L_0 \frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = \frac{p_{II}}{Z_{II}} = i_L + i_R = i_L + \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt}.$$

Durch Elimination von p_{II} und p_{eI} wird zunächst

$$\frac{di_L}{dt} + i_L \frac{R_0}{L_0} \frac{Z_I + Z_{II}}{R_0 + Z_I + Z_{II}} = 2p_I \frac{R_0}{L_0 (R_0 + Z_I + Z_{II})},$$

deren Lösung

$$i_L = \frac{2p_I}{Z_I + Z_{II}} + k\varepsilon^{-\zeta t},$$

worin

$$\zeta = \frac{R_0}{L_0} \frac{Z_I + Z_{II}}{R_0 + Z_I + Z_{II}} \dots \dots \dots (389)$$

Da für $t=0$ $i_L=0$ ist, wird

$$i_L = \frac{2p_I}{Z_I + Z_{II}} (1 - \varepsilon^{-\zeta t}) \dots \dots \dots (390)$$

$$i_R = \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt} = \frac{2p_I}{R_0 + Z_I + Z_{II}} \varepsilon^{-\zeta t} \dots \dots \dots (391)$$

$$p_{II} = (i_L + i_R)Z_{II} = 2p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} (1 - \varepsilon^{-\zeta t}) + 2p_I \frac{Z_{II}}{R_0 + Z_I + Z_{II}} \varepsilon^{-\zeta t} \dots \dots \dots (392)$$

$$p_{eI} = p_I - p_{II} \frac{Z_I}{Z_{II}} = p_I - \frac{2p_I Z_I}{Z_I + Z_{II}} (1 - \varepsilon^{-\zeta t}) - \frac{2p_I Z_I}{R_0 + Z_I + Z_{II}} \varepsilon^{-\zeta t} \dots \dots \dots (393)$$

Für $t=0$ wird

$$p_{II} = 2p_I \frac{Z_{II}}{R_0 + Z_I + Z_{II}} \quad p_{eI} = p_I \frac{R_0 + Z_{II} - Z_I}{R_0 + Z_I + Z_{II}}.$$

Im Augenblick des Eintreffens der Welle wirkt nur der Widerstand und man erhält die gleichen Ausdrücke wie auf S. 322. Der Vorteil der Drosselspule geht hierbei verloren, daß die Spannung allmählich in die zweite Leitung übertritt. Dagegen ist der Sprung der reflektierten Welle gemildert, er kann gleich Null gemacht werden, wenn $R_0 = Z_I - Z_{II}$ ist.

Für einen in umgekehrter Richtung von Leitung II nach I wandernden Spannungssprung würde dies aber ungünstig wirken, und für gleiche Leitungen erforderte es $R_0 = 0$, d. h. einen Übertritt des Spannungssprunges in voller Stärke.

Die in dem Widerstand verbrauchte Leistung ist

$$i_R^2 R_0 = 4 p_I^2 \frac{R_0}{(R_0 + Z_I + Z_{II})^2} e^{-2\zeta t}.$$

Sie ist im ersten Augenblick ($t = 0$) am größten. Man kann R_0 so wählen, daß die Energieabsorption im ersten Augenblick ein Maximum wird; dies ist der Fall, wenn

$$R_0 = Z_I + Z_{II}$$

ist. Dann ist

$$i_R^2 R_0 = \frac{p_I^2}{Z_I + Z_{II}} e^{-2\zeta t},$$

worin nun der Dämpfungsfaktor

$$\zeta = \frac{Z_I + Z_{II}}{2 L_0}$$

halb so groß ist wie ohne Widerstand (s. S. 323, Gl. 385).

3. Ein Kondensator C_0 parallel zu den Leitungen.

(Fig. 194.)

Ein Kondensator gestattet keine sprunghafte Änderung seiner Ladung und Spannung und verhindert daher ebenfalls einen plötzlichen Übertritt des Spannungssprunges in die zweite Leitung.

Ist wieder p_I die auf Leitung I ankommende Spannung, p_{eI} die reflektierte, $p_I + p_{eI}$ die resultierende, so ist diese gleich p_{II}

$$p_I + p_{eI} = p_{II}.$$

Der Strom in Leitung I ist

$$i_I = \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I},$$

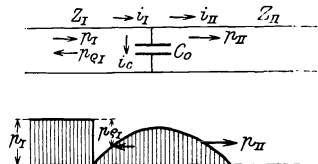


Fig. 194.

der Ladestrom des Kondensators

$$i_c = C_0 \frac{dp_c}{dt} = C_0 \frac{dp_{II}}{dt},$$

der in Leitung II übertretende Strom

$$i_{II} = \frac{p_{II}}{Z_{II}},$$

daher

$$\frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} = C_0 \frac{dp_{II}}{dt} + \frac{p_{II}}{Z_{II}}.$$

Substituiert man p_{eI} aus der ersten Gleichung in die zweite, so wird

$$\begin{aligned} \frac{dp_{II}}{dt} + \frac{Z_I + Z_{II}}{C_0 Z_I Z_{II}} p_{II} &= \frac{2 p_I}{C_0 Z_I} \\ p_{II} &= p_I \frac{2 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) \dots \dots \dots (394) \end{aligned}$$

worin

$$\zeta = \frac{Z_I + Z_{II}}{C_0 Z_I Z_{II}} \dots \dots \dots (395)$$

$$p_{eI} = p_{II} - p_I = -p_I + p_I \frac{2 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} (1 - e^{-\zeta t}) \dots (396)$$

Das Charakteristische der Wirkungsweise des Kondensators ist daher, daß er die Spannung in die zweite Leitung nur allmählich übertreten läßt, daß er aber den Spannungssprung in voller Stärke auf die erste Leitung, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen, zurückwirft. Fig. 194 zeigt die entstehenden Spannungen.

Das größte Spannungsgefälle auf der zweiten Leitung, ergibt sich am Anfang der einziehenden Welle. Es ist für $t=0$

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x_{(max)}} = \frac{\partial p_{II}}{\partial t_{(t=0)}} \frac{1}{v_{II}} = \frac{2 p_I}{C_0 Z_I v_{II}}.$$

Setzt man $v_{II} = \frac{1}{\sqrt{L_{II} C_{II}}}$ und multipliziert Zähler und Nenner

mit $Z_{II} = \sqrt{\frac{L_{II}}{C_{II}}}$, so wird

$$\frac{\partial p_{II}}{\partial x_{(max)}} = 2 p_I \frac{Z_{II} C_{II}}{Z_I C_0} \text{ Volt} \cdot \text{km}^{-1} \dots (397)$$

worin C_{II} in Farad pro km und C_0 in Farad zu setzen ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für eine Induktivität (S. 323, Gl. 388) gefundenen, so ergibt sich, daß man in beiden Fällen

die gleiche Reduktion des Spannungsgefälles erhält, wenn die Beziehung besteht

$$\frac{L_0}{C_0} = Z_I Z_{II} \dots \dots \dots (398)$$

Nimmt man an, daß eine der beiden Leitungen eine Freileitung, die andere ein Kabel ist, so ist $Z_I Z_{II} \sim 100 \cdot 600 = 6 \cdot 10^4$. Ein Kondensator von 0,01 Mfd $= 10^{-8}$ Farad wirkt dann in bezug auf das Gefälle ebenso wie eine Drosselspule von $6 \cdot 10^4 \cdot 10^{-8} = 6 \cdot 10^{-4}$ Henry.

Auch beim Kondensator findet eine Energieabsorption nicht statt, er wird von der einfallenden Welle geladen und gibt seine Ladung nach dem Aufhören des Bestehens der Welle an die beiden Leitungen zurück. Würde man, um eine Energieabsorption zu erreichen, den Kondensator in Reihe mit einem Widerstand schalten, so hätte man (ganz analog wie bei der überbrückten Drosselspule), da der Kondensator im ersten Augenblick keine Spannung aufnimmt, d. h. sich wie ein Kurzschluß verhält, einen Teil der einfallenden Spannung auf dem Widerstand und gleichzeitig auf der zweiten Leitung, der andere Teil wird reflektiert. Es wird also der Vorteil des allmählichen Eintretens der Spannung in die zweite Leitung wieder aufgegeben, dagegen wird die Reflexion auf die erste Leitung gemildert.

Es liegt nun der Gedanke nahe, ob nicht durch Kombination von Induktivität und Kapazität erreicht werden kann, daß einerseits die Spannung allmählich in die zweite Leitung übertritt und andererseits keine Reflexion auf der ersten Leitung erfolgt, wenigstens für den ersten Augenblick, so daß kein Spannungssprung in die Leitung zurückwandert.

4. Kombination von Widerstand und Induktivität und Kapazität.

Eine derartige Kombination, wie sie z. B. Fig. 195 darstellt, erfüllt die zuletzt gestellte Bedingung nicht; denn da die Kondensatorspannung für $t=0$ Null ist, muß hier die reflektierte Spannung entgegengesetzt gleich der ankommenden sein. Eine von Leitung II eintreffende Welle würde hingegen die Drosselspule zunächst in voller Stärke reflektieren.

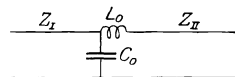


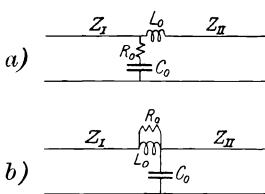
Fig. 195.

Dagegen läßt sich durch Verbindung der Anordnung mit Widerstand die Bedingung erfüllen¹⁾. Der Widerstand kann wie früher die Drosselspule überbrücken oder in Reihe mit dem Kondensator liegen (Fig. 196).

¹⁾ Nach Rüdénberg ETZ. 1913 S. 571.

Betrachten wir zunächst eine auf Leitung I wandernde Welle p_I . Für die Schaltung 196 a mit Widerstand in Reihe zum Kondensator ist

$$\left. \begin{aligned} i_c &= C_0 \frac{dp_c}{dt}, & i_c R_0 &= R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt}, & i_L &= \frac{p_{II}}{Z_{II}}, \\ p_I + p_{eI} &= p_c + R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt} = \frac{L_0}{Z_{II}} \frac{dp_{II}}{dt} + p_{II} \\ \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} &= C_0 \frac{dp_c}{dt} + \frac{p_{II}}{Z_{II}} \end{aligned} \right\} \cdot (398)$$



Für $t=0$ ist $p_c=0$ und $p_{II}=0$, da die Drosselspule den Eintritt in die zweite Leitung verhindert, daher wird für den ersten Augenblick

$$\left. \begin{aligned} p_I + p_{eI} &= R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt} \\ \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} &= C_0 \frac{dp_c}{dt} \end{aligned} \right\}$$

Fig. 196 a und b.

und es wird $p_{eI}=0$, wenn $R_0=Z_I$ ist.

Analog haben wir bei der zweiten Schaltung (Fig. 196 b) für eine auf Leitung I ankommende Welle p_I

$$\left. \begin{aligned} p_I + p_{eI} &= L_0 \frac{di_L}{dt} + p_{II} \\ \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} &= i_L + i_R = i_L + \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt} \end{aligned} \right\}$$

Für $t=0$ ist $p_c=p_{II}=0$, und $i_L=0$, daher

$$\left. \begin{aligned} p_I + p_{eI} &= L_0 \frac{di_L}{dt} \\ \frac{p_I - p_{eI}}{Z_I} &= \frac{L_0}{R_0} \frac{di_L}{dt} \end{aligned} \right\}$$

daher $p_{eI}=0$, wenn $R_0=Z_I$ ist.

Der Vorgang läßt sich nun wie folgt untersuchen, z. B. für Schaltung 196 a.

Aus Gl. 398 ergibt sich nach p_c geordnet

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_c}{dt^2} + \frac{dp_c}{dt} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{1}{C_0(R_0 + Z_I)} + \frac{R_0 Z_I}{L_0(R_0 + Z_I)} \right] + p_c \frac{Z_I + Z_{II}}{C_0 L_0 (R_0 + Z_I)} \\ = \frac{2 p_I Z_{II}}{C_0 L_0 (R_0 + Z_I)} + \frac{2 dp_I}{dt} \frac{1}{C_0 (R_0 + Z_I)}. \end{aligned}$$

Setzen wir gleich den Wert $R_0 = Z_I$ ein und betrachten eine Welle konstanter Höhe p_I , für die $\frac{dp_I}{dt} = 0$ ist, so wird

$$\frac{d^2 p_c}{dt^2} + \frac{dp_c}{dt} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2L_0} + \frac{1}{2C_0 Z_I} \right] + p_c \frac{Z_I + Z_{II}}{2C_0 L_0 Z_I} = p_I \frac{Z_{II}}{L_0 C_0 Z_I},$$

deren Lösung ist

$$p_c = 2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} + k_1 \varepsilon^{\gamma_1 t} + k_2 \varepsilon^{\gamma_2 t},$$

worin

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} = & -\frac{1}{2} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2L_0} + \frac{1}{2C_0 Z_I} \right] \\ & \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2L_0} + \frac{1}{2C_0 Z_I} \right]^2 - \frac{Z_I + Z_{II}}{2L_0 C_0 Z_I}}. \end{aligned}$$

Sind die Wurzeln reell, so ist die Ladung aperiodisch, sind sie imaginär, so ist sie oszillierend.

Im ersten Fall erhalten wir folgende Bestimmung der Konstanten. Für $t=0$ ist $p_c=0$, und infolge der gewählten Größe von R_0 auch $p_{eI}=0$. Die erste Bedingung liefert

$$k_1 + k_2 = -2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}}.$$

Die zweite ergibt, da nach der ersten der beiden Gl. 398

$$p_{eI} = -p_I + p_c + R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt}$$

$$0 = -p_I + C_0 Z_I (\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2).$$

Mithin

$$k_2 = -\frac{p_I}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{1}{C_0 Z_I} + \frac{2 \gamma_1 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} \right]$$

$$k_1 = \frac{p_I}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{1}{C_0 Z_I} + \frac{2 \gamma_2 Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} \right].$$

Bei oszillierendem Übergang kann man setzen

$$\frac{1}{2} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2L_0} + \frac{1}{2C_0 Z_I} \right] = \alpha$$

$$\sqrt{\frac{Z_I + Z_{II}}{2L_0 C_0 Z_I} - \frac{1}{4} \left[\frac{Z_{II}}{L_0} + \frac{Z_I}{2L_0} + \frac{1}{2C_0 Z_I} \right]^2} = \beta.$$

$$p_c = 2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} + A \sin(\beta t + \delta) \varepsilon^{-\alpha t}.$$

Hierin wird, da für $t=0$ $p_c=0$,

$$A \sin \delta = -2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}}$$

und ferner für $t=0$ $R_0 C_0 \frac{dp_c}{dt} = p_I$

$$-\alpha A \sin \delta + \beta A \cos \delta = \frac{p_I}{C_0 Z_I}$$

$$A \cos \delta = \frac{p_I}{\beta C_0 Z_I} + \frac{\alpha}{\beta} A \sin \delta = \frac{p_I}{\beta C_0 Z_I} - \frac{\alpha}{\beta} 2 p_I \frac{Z_{II}}{Z_I + Z_{II}},$$

daher ist

$$A = \sqrt{(A \cos \delta)^2 + (A \sin \delta)^2} \quad \text{und} \quad \delta = \arctg \frac{A \sin \delta}{A \cos \delta}$$

bestimmt.

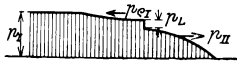


Fig. 197.

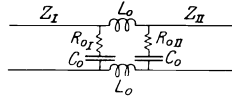


Fig. 198.

In Fig. 197 ist der Verlauf der Spannungen für $Z_I = Z_{II} = R_0 = 500$ Ohm, $C_0 = 0,01$ Mfd $= 10^{-8}$ Farad, $L = 10^{-3}$ Henry aufgetragen. Der Vorgang ist dabei aperiodisch.

Damit nun eine derartige Vorrichtung auch gegenüber Wellen wirkt, die in der umgekehrten Richtung wandern, d. h. von der zweiten Leitung kommen, ist sie sinngemäß symmetrisch anzuordnen, wie dies z. B. Fig. 198 zeigt. Jeder Widerstand soll gleich der Charakteristik der ihm benachbarten Leitung sein.

Namen- und Sachregister.

- Ableitung** 186. 209.
Addition von einwilligen Strömen 6.
— — — — graphische 30.
— — — — in der symbolischen Darstellung 33.
— — mehrwilligen Strömen 101.
Admittanz 20. 100.
Admittanzdiagramm 39.
Äquivalenter Sinusstrom 98.
— **Magnetisierungsstrom** 173.
d'Alembert 283.
Allgemeiner Wechselstromkreis, Konstanten des 219.
— — **Arbeitsdiagramm** 224.
Amperewindungen pro cm 158.
— — — — effektive bei Wechselstrom 165.
Analyse von mehrwilligen Strömen 74.
— — — — arithmetische 80.
— — — — graphische 86.
Aperiodische Entladung eines Kondensators 258.
Arbeitsdiagramm des allg. Wechselstromkreises 224.
— des Mehrphasen-Induktionsmotors 229.
Armagnat 96.
Arnold 43.
Aron 128.
Arons 275.
Atmosphärische Entladung, freie Schwingungen bei 293.
Ausgleichsvorgänge in quasistationären Stromkreisen 238.
— in nicht stationären Stromkreisen 280.
Ausschalten eines induktiven Stromkreises 275. 300.
Ausschaltespannung 278.
Ausschaltezeit 275.
Balancierte Mehrphasensysteme 109.
Behn-Eschenburg 128.
Bernouilli, D. 285.
Betriebskonstanten von Mehrfachleitungen 208.
Blondel 147.
Boucherot 68.
Breisig 207.
Brückenmethode zur Messung von Induktivitäten und Kapazitäten 63 ff.
Brückenmethode zur Messung der gegenseitigen Induktion 145.
Charakteristik einer Leitung 191. 193. 198. 203.
Dämpfungsfaktor 191. 198. 203. 204. 240. 252. 257. 258.
Diagramme, allgemeine 37.
— des allgemeinen Wechselstromkreises 224.
— einer Arbeitsübertragung 49 ff.
— des Induktionsmotors 229.
— des Lufttransformators 139 ff.
— von Leitungen 193 ff. 200 ff.
Dielektrizitätskonstante 22.
Diesselhorst 209.
Differentialquotient eines Vektors 31. 34.
Drehfeld 177.
— **Energieübertragung durch das** 180.
Drehfeldmaschine 180.
Drehung eines Vektors 32.
Dreiamperemetermethode 54.
Dreieckschaltung 110. 116.
Dreileitersystem 105.
— **Zweiphasen-** 123.
Dreivoltmetermethode 60.
Dreiphasensystem 105. 110.
— mit Nulleiter, Messung der Leistung 129.
Drosselspule, Verhalten bei freien Schwingungen 299. 322.
Effektivwert eines einwilligen Stromes 8.
— eines mehrwilligen Stromes 90.
Eigenfrequenz eines einfachen Schwingungskreises 258.
— einer Leitung 287. 290.
Einphasensystem mit Nulleiter 105.
Einschalten eines Gleichstromes 242. 247.
— einer Leitung 285. 289.
— eines Wechselstromes 243.
Einwilliger Strom 1.
Eisen, Magnetisierungskurve 157.
Eisenbleche, legierte 168.
Eisenverluste 166.
— **Untersuchung und Trennung** 170.

- Elektrisches Feld 21.
 — — Energie des 24.
 Elektrische Grade 177.
 Elektromagnetisches Grundgesetz 12.
 Elektromotorische Kraft 3.
 — — der Selbstinduktion 16.
 — — der gegenseitigen Induktion 134.
 Emde 156. 209.
 Energie des elektrischen Feldes 24.
 — des magnetischen Feldes 17.
 — — — zweier Stromkreise 133.
 Energieabsorption bei freien Schwingungen 298.
 Energieübertragung durch ein Drehfeld 180.
 — beim Transformator 138. 172.
 Epstein 170.
 Erregerstrom 157.
 — effektiver bei Wechselstrom 165.
 Ersatzschaltung des allgem. Wechselstromkreises 217.
 — des Induktionsmotors 184.
 — des Transformators 174.
 Experimentelle Bestimmung der Konstanten des allgem. Wechselstromkreises 219.

Farad 24.
 Faraday 2. 3. 21.
 Feldverteilung einer Maschine mit ver-
 teiltem Eisen 175.
 Ferrantiphänomen 196.
 Field 156.
 Fischer Hinnen 86.
 Fleming 9. 60. 93.
 Flußwindungen 6.
 Formfaktor 9.
 — bei mehrwelligen Strömen 92.
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit von
 Wellen 191. 193. 199.
 Fouriersche Reihen 71.
 Franke 207.
 Freie Schwingungen 239.
 — — auf Leitungen 280.
 Frequenz (s. auch Eigenfrequenz) 2.
 Funkenstrecke 294.

Gegenseitige Induktion 132.
 — — bei Leitungen 149.
 — — bei mehrphasigen Stromkreisen
 146.
 — — Messung der 145.
 Gleichstrommagnetisierung 157.
 Görges 67.
 Grade, elektrische 177.
 Graphische Analyse von mehrwelligen
 Strömen 86.
 — Darstellung von Wechselströmen 29.
 — — von mehrwelligen Strömen 98.

 Grundwelle eines mehrwelligen Stro-
 mes 71.
 Gumlich und Rose 163.
Hautwirkung 151.
 Hay 250.
 Heaviside 19.
 Helmholtz 240.
 Henry 14.
 Heyland 234.
 Hörnerfunkenstrecke 294.
 Hopkinson 135.
 Hummel 66.
 Hysteresisarbeit 160.
 Hysteresiskoeffizient 166.
 Hysteresisschleife 150.
 Hysteresisverlust 166.
Impedanz 19. 35.
 Impedanzdiagramm 38.
 Induzierte EMK 3.
 Induktionsgesetz 3.
 Induktionsfaktor 100.
 Induktionsmotor, mehrphasiger 183.
 229.
 Induktivität 14.
 Inversion 42.

Joule 9.
Kapazität 21.
 — Einheit der 24.
 — einer Leitung 184. 209.
 — Einfluß auf die Kurvenform von
 Wechselströmen 89.
 Kennelly 119.
 Koerzitivkraft 160.
 Kommutierter Sinusstrom, Kurve des
 79.
 Komplexe Zahlen, Rechnung mit 35. 36.
 Kondensator 23.
 — Ladung und Entladung des 25. 252 ff.
 258. 261.
 — Verhalten bei freien Schwingungen
 304. 325.
 Kondensatortransformator 68.
 Konduktanz 20. 100.
 Konstanten des allgemeinen Wechsel-
 stromkreises 219.
 — von Leitungen 185.
 — Ermittlung durch d. Leerlauf- u. d.
 Kurzschlußversuch 204.
 — von Mehrfachleitungssystemen 208.
 — Tabelle 215.
 Krarup 204.
 Kreisfrequenz 2.
 Kreisdiagramm des allgem. Wechsel-
 stromkreises 226.
 Kuhlmann 267. 271.
 Kurzschluß einer Leitung, Schwin-
 gungen bei Unterbrechung 294. 304.
 Kurzschlußversuch 204. 216. 220.

La Cour 43. 216.
 Ladung eines Kondensators 25. 253 ff. 262.
 Leerlaufversuch bei einer Leitung 204.
 — beim allgemeinen Wechselstromkreis 216.
 Legierte Eisenbleche 168.
 Leistung eines einwelligen Stromes 10.
 — — mehrwelligen Stromes 91.
 — in Mehrphasensystemen 109.
 — Messung mit drei Voltmetern 54.
 — — — Amperemetern 60.
 — — — in Mehrphasensystemen 127.
 — maximale übertragene in einem Wechselstromkreis 223.
 Leistungsfaktor 92. 98.
 Leistungsmesser, Korrekktionsformeln 60.
 Leitung, Konstanten elektrischer Leitungen 185. 208.
 — Mehrphasenleitungen, gegenseitige Induktion 149.
 — Polardiagramme der 193. 200.
 — verzerrungsfreie 198. 285.
 Lichtbogenspannung beim Ausschalten 278.
 Linienspannung 106.
 Linke 250
 Lufttransformator 137.
Magnetisches Feld, Energie des 17.
 — — zweier Stromkreise 133.
 — — einer Maschine 175.
Magnetischer Widerstand 13.
Magnetisierung des Eisens mit Gleichstrom 157.
 — — — Wechselstrom 161.
 — — — Mehrphasenstrom 163.
 — zyklische 159.
Magnetisierungsstrom, einphasig 162.
 — mehrphasig 164.
 — äquivalenter 173.
Magnetmotorische Kraft 14.
Marguerre 279.
 Maximale übertragene Leistung in einem Wechselstromkreis 223.
Maxwell 3. 17. 24. 160. 209. 281.
Mehrfachleitungen, Konstanten von 208.
Mehrphasenströme 103.
Mehrphasensysteme 103 ff.
 — balanzierte 109.
 — symmetrische 104.
 — verkettete 105.
 — gegenseitige Induktion bei 146.
Mehrphasen-Induktionsmotor 184 229.
Mehrwellige Ströme 71.
 — — graphische Darstellung 98.
 — — in Mehrphasensystem 125.
Messung der Leistung von Mehrphasenströmen 127.

Mikrofarad 24.
Mittelwert eines einwelligen Stromes 8.
 — — mehrwelligen Stromes 75.
 — in der symbolischen Darstellung 37.
Moivrescher Satz 34.
Möllinger 170.
Multiplikation von Vektoren 33.
Nichtstationäre Stromkreise 280.
Nulleiter 105.
Oberwellen eines mehrwelligen Stromes 71.
Ölschalter, Unterbrechen mit 278. 279.
Ölschläger 50.
Ohmsches Gesetz 12.
 — — des magnetischen Kreises 13.
Orlich 89. 129.
Ossanna 234.
Oszillierende Ladung und Entladung von Kondensatoren 261. 262. 266.
Parallelschaltung von Stromkreisen 55.
Periodendauer 1.
Periodenzahl 2.
Periodenumformer 181.
Permeabilität 157.
Petersen 307. 311. 319.
Pfiffner 322.
Phasenspannung 106.
Phasenverschiebung 5. 27.
Phasenwinkel 2.
Phasenzahlumformer 181.
Plattenkondensator 24.
Polardiagramm einer Leitung 193. 200.
Poyntingscher Satz 281.
Pupin 204.
Quasistationäre Stromkreise 239.
Querwiderstand 19.
Reaktanz 19.
 — induktive 28.
 — kapazitive 28.
 — bei mehrwelligen Strömen 97. 99.
 — schiefwinklige 147.
Reihenschaltung von Stromkreisen 44.
Reflexion elektrischer Wellen 286. 296 ff. 311 ff.
Reflexionsfaktor 298. 312. 320.
Reluktanz 13.
Remanenz 160.
Resonanz 27.
 — bei mehrwelligen Strömen 95.
 — bei Leitungen 197. 309. 319.
Resonanzstromkreis zur Unterdrückung von Oberwellen 96.
Resonanztransformator 234.
Ringsystem 107. 110.
Richter 170.

- Rogowski 251.
 Rose 163.
 Rüdberg 318. 321. 327.
 Runge 83.
- S**
 Schalter mit Widerstandsstufe 251.
 Schaltwelle 318.
 Scheinwiderstand 19.
 Scheitelfaktor 92.
 Schiefwinklige Reaktanz 147.
 Schleiermacher 80. 84.
 Schlüpfung 183.
 Schwingungen, freie, auf Leitungen 280.
 Selbstinduktion 12.
 — Einfluß auf die Kurvenform des Stromes 89.
 Selbstinduktionskoeffizient 14.
 — einer Doppelleitung 15.
 Skineffekt 151.
 Spannung 20.
 Spannungsabfall in einer Leitung 45. 48.
 Spannungsänderung des allgemeinen Wechselstromkreises 222.
 Spannungsdiagramm 38.
 Spannungssprung einer Welle 287. 316.
 — Reduktion des 323. 326.
 Spannungszunahme, prozentuale 48. 121.
 Spiraldiagramm einer Leitung 200.
 Stefan 155.
 Stehende Wellen bei Leitungen 197.
 Steinmetz 20. 166. 183. 202.
 Sternpunkt 105.
 Sternschaltung 105. 110.
 — Berechnung d. Stromverteilg. 112.
 Streuung 134.
 Streukoeffizient 135.
 Streuinduktivität 135. 173.
 Stromdiagramm 38.
 Stromkreise, zusammengesetzte 62.
 — nicht stationäre 280.
 — quasistationäre 239.
 Stromverdrängung 151.
 Sumpner 54.
 Suszeptanz 20. 100.
 Swinburne 54.
 Symbolische Darstellung von Wechselströmen 32.
 Symmetrische Mehrphasensysteme 105.
- T**
 Thomson, W. 155.
 — J. J. 168.
 Transfigurierung 119.
 Transformator, Luft- 137.
 — mit Eisen 171.
 — Resonanz- 234.
 — allgemeiner 183.
- Transformator, Einschalten eines — 248.
 — Ausgleichsvorgänge beim 272 ff.
- U**
 Unbalancierte Mehrphasensysteme 109.
- V**
 Vektoren, Darstellung einwelliger Ströme durch 29.
 — Addition und Subtraktion 33.
 — Differentialquotient und Zeitintegral 31.
 — Drehung von 32.
 Vektordiagramm eines Transformators 171.
 Verkettete Mehrphasensysteme 105.
 — Spannung 107.
 — Ströme 108.
 Verlustziffer 169.
 Verschiebung 22.
 Verschiebungsfluß 22.
 Verzerrungsfreie Leitung 198. 285.
- W**
 Wagner, K. W. 285.
 Waltz 66.
 Wattlose Spannung 20.
 Wattloser Strom 20.
 Wattspannung 20.
 Wattstrom 20.
 Wechselinduktivität 132. 136.
 Wechselstrommagnetisierung 160.
 Wechselstromwiderstand 152.
 Wellen, ebene elektromagnetische 281.
 — fortschreitende bei Leitungen 190.
 — stehende bei Leitungen 197.
 — Fortpflanzungsgeschwindigkeit der 190. 284.
 Wellenlänge 190.
 Wellenwiderstand (s. Charakteristik) 191. 193. 198. 202. 284.
 Wheatstonesche Brücke 66 ff.
 Widerstand, effektiver 99. 152.
 — — einer Leitung 186. 211.
 Widerstandsschalter 251.
 Windungsüberschläge 316.
 Wirbelströme 163.
 Wirbelstromverluste 166.
- Z**
 Zeitintegral eines Vektors 31. 34.
 Zeitkonstante 240. 251.
 Zeitlinie 30.
 Zerlegung eines mehrwelligen Stromes 74. 77.
 Zusammengesetzte Stromkreise 62.
 Zweiphasensystem 105.
 Zweiphasen-Dreileitersystem 123.
 Zyklische Magnetisierung 159.
 Zylinderkondensator 23.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Die Wechselstromtechnik. Herausgegeben von Dr.-Ing. **E. Arnold**, Professor und Direktor des Elektrotechnischen Instituts der Großherzogl. Technischen Hochschule Fridericiana in Karlsruhe. In fünf Bänden.

Erster Band: **Theorie der Wechselströme.** Von **J. L. la Cour** und **O. S. Bragstad**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 591 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 24,—.

Zweiter Band: **Die Transformatoren.** Ihre Theorie, Berechnung und Arbeitsweise. Von **E. Arnold** und **J. L. la Cour**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 443 Textfiguren und 6 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 16,—.

Dritter Band: **Die Wicklungen der Wechselstrommaschinen.** Von **E. Arnold**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 463 Textfiguren und 5 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 13,—.

Vierter Band: **Die synchronen Wechselstrommaschinen.** Generatoren, Motoren und Umformer. Ihre Theorie, Konstruktion, Berechnung und Arbeitsweise. Von **E. Arnold** und **J. L. la Cour**. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 530 Textfiguren und 18 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 22,—.

Fünfter Band: **Die asynchronen Wechselstrommaschinen.** Erster Teil: **Die Induktionsmaschinen.** Von **E. Arnold**, **J. L. la Cour** und **A. Fraenckel**. Mit 307 Textfiguren und 10 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 18,—.

Zweiter Teil: **Die Wechselstromkommutatormaschinen.** Ihre Theorie, Berechnung, Konstruktion und Arbeitsweise. Von **E. Arnold**, **J. L. la Cour** und **A. Fraenckel**. Mit 400 Textfiguren, 8 Tafeln und dem Bildnis E. Arnolds.

In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.

Die Gleichstrommaschine. Ihre Theorie, Untersuchung, Konstruktion und Arbeitsweise. Von Dr.-Ing. **E. Arnold**, Professor und Direktor des Elektrotechnischen Instituts an der Großherzoglichen Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage.

Erster Band: **Theorie und Untersuchung.** Mit 593 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.

Zweiter Band: **Konstruktion, Berechnung und Arbeitsweise.** Mit 502 Textfiguren und 13 Tafeln.

In Leinwand gebunden Preis M. 20,—.

Arbeiten aus dem Elektrotechnischen Institut der Großherzoglichen Technischen Hochschule Fridericiana in Karlsruhe. Herausgegeben von Professor Dr.-Ing. **E. Arnold**, Direktor des Instituts.

I. Band: 1908—1909. Mit 260 Textfiguren. Preis M. 10,—.

II. Band: 1910—1911. Mit 284 Textfiguren. Preis M. 10,—.

Wechselstromtechnik. Von Dr. **G. Roeßler**, Professor an der Königlichen Technischen Hochschule in Danzig. Zweite Auflage von „Elektromotoren für Wechselstrom und Drehstrom“. I. Teil. Mit 185 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 9,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin.

Aufgaben und Lösungen aus der Gleich- und Wechselstromtechnik.

Ein Übungsbuch für den Unterricht an technischen Hoch- und Fachschulen sowie zum Selbststudium von **H. Vieweger**, Professor am Technikum Mittweida. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 174 Textfiguren und 2 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 7,—.

Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik.

Von Prof. Dr. **Gustav Benischke**. Dritte, teilweise umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 489 Textabbildungen.

In Leinwand gebunden Preis ca. M. 15,—.

Die Fernleitung von Wechselströmen.

Von Dr. **G. Roebler**, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in Danzig. Mit 60 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 7,—.

Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik.

Von Dr. **A. Thomälen**, Elektroingenieur. Fünfte, verbesserte Auflage. Mit 408 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 12,—.

Hilfsbuch für die Elektrotechnik.

Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen. Bearbeitet und herausgegeben von Dr. **Karl Strecker**, Geh. Oberpostrat und Professor. Achte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 800 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 18,—.

Gesammelte Elektrotechnische Arbeiten. (1897—1912.)

Von Dr. **F. Eichberg**. Mit 415 Textfiguren und 1 Tafel.

Preis M. 16,—, in Leinwand gebunden M. 17,—.

Die elektrische Kraftübertragung.

Von Dipl.-Ing. **Herbert Kyser**. Erster Band: **Die Motoren, Umformer und Transformatoren**. Ihre Arbeitsweise, Schaltung, Anwendung und Ausführung. Mit 277 Textfiguren und 5 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 11,—.

Der zweite Band, enthaltend die **Leitungsanlagen** in mechanischer und elektrischer Hinsicht, die **Apparate und Instrumente**, und die **Stromerzeugung** mit den **Schaltanlagen**, wird im Frühjahr 1914 erscheinen.

Elektrische Starkstromanlagen.

Maschinen, Apparate, Schaltungen, Betrieb. Kurzgefaßtes Hilfsbuch für Ingenieure und Techniker sowie zum Gebrauch an technischen Lehranstalten. Von Dipl.-Ing. **Emil Kosack**, Oberlehrer an den Kgl. Vereinigten Maschinenbauschulen zu Magdeburg. Zweite Auflage unter der Presse. Erscheint Anfang April 1914.

Transformatoren für Wechselstrom und Drehstrom.

Eine Darstellung ihrer Theorie, Konstruktion und Anwendung. Von **Gisbert Kapp**. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 185 Textfiguren.

In Leinwand gebunden Preis M. 8,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.