

Eine neue Methode der direkten Analyse von Wechselstromkurven

Dessertation
zur Erlangung der Würde
eines doktor-Ingemeieurs.

Der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin
vorgelegt am 7. Oktober 1961 von

Dipl.-Masch.-Ing. E. T. H. Arnold Roth
aus Teufen (Schweiz)

Genehmigt am
18. Januar 1917

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Eine neue Methode der direkten Analyse von Wechselstromkurven

Dissertation
zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs.

Der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin
vorgelegt am 7. Oktober 1916 von
Dipl.-Masch.-Ing. E. T. H. Arnold Roth
aus Teufen (Schweiz)

Genehmigt am
18. Januar 1917

1917
Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Referent: Professor Dr. E. Orlich.

Korreferent: Geheimrat Prof. Dr. W. Wedding

ISBN 978-3-662-42212-0 ISBN 978-3-662-42481-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-42481-0

Meinen Eltern.

Es sei mir hier gestattet, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. E. Orlich, meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die wertvollen Ratschläge, mit denen er mir während der ganzen Dauer meiner Arbeit zur Seite stand.

Ebenso möchte ich Herrn Dr. Keinath, Herrn Dr. Fassbender und Herrn cand. ing. Lang für ihre Unterstützung danken.

Die Versuche zu vorliegender Arbeit wurden ausgeführt im elektrotechnischen Laboratorium der Technischen Hochschule zu Berlin.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Theorie der Meßmethoden.	
A. Untersuchungen über Schwingungskreise	3
1. Umformung der gebräuchlichen Formeln für den einfachen Schwingungskreis	3
2. Theoretische Untersuchungen über Doppelkreise	4
a) Allgemeiner Fall	4
b) Spezialfall: Die Induktivitäten der Teilkreise sind einander gleich	5
B. Theorie der Spannungsmessung einer Oberwelle	10
1. Messung bei gleichbleibender Frequenz	10
2. Messung bei schwankender Frequenz	19
C. Messung der Stromstärke einer Oberwelle	20
D. Methode zur Messung einer Oberwelle in Prozent der Grundwelle	20
II. Experimentelle Untersuchungen.	
A. Teiluntersuchungen	22
1. Vom Wattmeter verursachte Fehler und ihre Behebung	22
a) Fehler aus elektrostatischer Ursache	24
b) Das Eisen als Fehlerquelle	24
c) Einfluß der Selbstinduktionen von fester Spule i' und beweglicher Spule	25
d) Kompensierung der Selbstinduktion der Instrumentenspule i''	25
e) Kompensierung der Gegeninduktion zwischen beweglicher und festen Spulen	27
f) Einfluß der Gegeninduktion zwischen den beiden festen Spulen des Wattmeters	27
2. Justierung	28
a) Einstellung des Zweiges i'' auf Induktionslosigkeit	28
b) Einstellung der Induktivitäten, Kapazitäten und Widerstände	28
c) Justierung von Instrumentenwiderstand und Vollausschlag	29
d) Justierung der Schaltung für Änderung des Meßbereichs	29
3. Eichkurve	29
4. Einfluß fremder Wellen auf die Messung	30
5. Fehler infolge Änderung der Widerstände mit der Temperatur	31
6. Die Kondensatoren als Fehlerquelle	35
7. Die Wahl der Eigenfrequenzen m_a und m_b	36
8. Frequenzschwankungen. Wahl von m_d und m_e	36
9. Die Wahl von $R/\omega_0 L$	38
B. Vergleichende Messungen mit einer bekannten Methode	39
III. Vorschläge zur Durchbildung des Meßinstrumentes.	
Zusammenfassung und Schluß	43
Quellenangabe	44

Einleitung.

Bei der immer größeren Vervollkommnung moderner Kraftübertragungen wird auf die Erzielung einer guten Kurvenform von Strom und Spannung mehr als früher Gewicht gelegt. Dabei können die Kurven am Generator und im Netz sehr verschieden sein.

Jede rechnerische Behandlung der Form der Kurve gründet sich auf ihre Zerlegung in Grund- und Oberwellen, nach dem Satze von Fourier. Dieser sagt aus, daß sich jede einwertige periodische Funktion und also die Kurve jedes stationären Wechselstromes in eine unendliche Reihe entwickeln läßt von der Form

$$i = \sum_{x=0}^{\infty} J_x \sin(x\omega_0 t + \varphi_x) \dots \dots \dots 1)$$

wobei J_x die Amplituden der zu den einzelnen Periodenzahlen $x\omega_0$ gehörenden x -ten Oberwellen darstellen. Bei reinem Wechselstrom verschwindet das Glied mit $x=0$. Für Stromkurven, deren negative Hälfte das Spiegelbild der positiven darstellt, was bei technischen Wechselströmen fast immer der Fall ist, werden auch Glieder mit geradem x zu 0. Von Interesse ist hier die Berechnung des Effektivwertes des Stromes

$$J = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_x J_x^2} \dots \dots \dots 2)$$

Die den Formeln 1) und 2) entsprechenden Ausdrücke für die Spannung lauten

$$p = \sum_{x=0}^{\infty} P_x \sin(x\omega_0 t + \psi_x) \dots \dots \dots 3)$$

$$P = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_x P_x^2} \dots \dots \dots 4)$$

Bisher standen zur Auswertung der Oberschwingungen drei Methoden zur Verfügung:

1. Aufnahme der Kurve nach irgendeinem Verfahren und nachfolgende mathematische Analyse.
2. Die experimentelle Analyse nach Des Coudres.
3. Die experimentelle Analyse durch Resonanz*).

Die Methoden nach 1. verlangen einen Oszillographen oder einen Kontaktapparat zur Aufnahme der Kurve, beides Apparate, die einen geübten Experimentator und viel Zeit verlangen. Überdies ist die mathematische Ausmittelung der Kurven, erfolge sie rechnerisch oder graphisch, sehr langwierig.

Des Coudres*) schickt den zu analysierenden Strom durch die feste Spule eines Dynamometers. Die bewegliche Spule wird vom konstanten Strom eines Hilfsgenerators von der Frequenz der zu messenden Oberwelle durchflossen. Der Ausschlag des Instrumentes ist proportional der Stromstärke der Oberwelle. Eine technische

*) Über alle drei Verfahren siehe Orlich¹³⁾.

Durchbildung dieses Verfahrens, um einfache Handhabung zu erzielen, ist denkbar, dagegen ist der Hilfsgenerator für ein praktisches Meßinstrument eine unangenehme Beigabe. Will man ferner nach diesem Verfahren nicht nur die Kurven von Generatoren untersuchen, wo eine Kuppelung des Hilfsgenerators meistens möglich, so ist ein eigener Antriebsmotor für letzteren erforderlich. Das darf nicht etwa ein Synchronmotor sein, da ein solcher die Kurvenform sehr stark beeinflussen kann*). Es muß also ein Gleichstrommotor verwendet werden, der wiederum eine Batterie und eine Vorrichtung zur Synchronhaltung von zu messendem Strom und Hilfsstrom verlangt. Dagegen hat die Des Coudressche Methode den Vorteil größter Genauigkeit, auch für kleinste Werte der Oberwellen.

Die Analyse durch Resonanz benutzt im wesentlichen einen Schwingungskreis, von einer Eigenfrequenz gleich derjenigen der zu messenden m -ten Oberwelle, der an die zu analysierende Spannung angelegt wird. Da er allen übrigen Oberwellen einen sehr viel höheren Scheinwiderstand entgegensetzt, werden diese zum großen Teil unterdrückt. Ein in Reihe geschalteter Oszillograph läßt die m -te Oberwelle deutlich heraustreten. Eine Durchbildung der Methode, so daß die Amplitude ohne Photographie des Oszillogramms abgelesen werden könnte, wäre möglich; es bleiben aber die Nachteile des Oszillographen: schwierige Handhabung, kleine Transportfähigkeit, Verwendung von Hilfs-Gleichstrom. Es wurde deshalb versucht, statt des Oszillographen ein Strommeßinstrument einzuschalten. Die Messung der Oberwellen wurde aber durch die benachbarten Wellen und vor allem durch die Grundwelle, deren Amplitude ein Vielfaches derjenigen der Oberwellen ist, viel zu stark beeinflußt.

Ähnlich ist die Methode von Hänni⁷⁾. Er verwendet auch einen Schwingungskreis (Induktivität L , Kapazität C) in Reihe mit einem Strommesser (Thermoelement), aber nicht im Resonanzbereich. Er mißt bei $(m - 1)$ verschiedenen Kombinationen von L und C Strom und Spannung. Mit Berechnungsgleichungen bestimmt er daraus die m -te Oberwelle. Es ist also auch hier Rechnung notwendig. Ferner muß immer eine ganze Reihe von Ablesungen gemacht werden, auch wenn nur eine Oberwelle bestimmt werden soll. Während dieser ganzen Zeit ist die Spannung konstant zu halten. Als weiterer Nachteil besteht die verschiedene Rückwirkung der einzelnen Oberwellen auf den Generator und damit eine Verzerrung der Spannungskurve. Daß keine dieser Methoden den Praktiker befriedigt, zeigen wohl am besten die zahlreichen in den letzten 10 Jahren ausgeführten Arbeiten auf diesem Gebiet. Solche liegen vor von Hazeltine⁸⁾, Fischer-Hinnen⁵⁾, Mader¹¹⁾, Slichter¹⁸⁾, Hermann⁹⁾, Schleiermacher¹⁷⁾, Beattie^{2) 2a)}, Thompson¹⁹⁾, Hänni⁷⁾, Pichelmayer¹⁴⁾, Davis⁴⁾, Lincoln¹⁰⁾. Über die Literatur vor 1906 findet sich ein vollständiges Verzeichnis in dem Buche von E. Orlich¹²⁾. Bestimmend für die Wünschbarkeit einer leichten Kontrolle der Kurvenform sind die Verhandlungen des American Institute of Electrical Engineers im Winter 1913¹⁶⁾. Es zeigte sich dort deutlich, daß es nicht möglich ist, Vorschriften über die Kurvenform von Maschinen aufzustellen, solange nicht ein handliches Meßinstrument dafür vorliegt.

Die obenerwähnten, allen bekannten Methoden prinzipiell anhaftenden Nachteile ließen das Ausarbeiten eines Verfahrens auf anderer Grundlage als wünschenswert erscheinen. Der Verfasser machte es sich zur Aufgabe, ein Instrument zu konstruieren, das bei einfachster Handhabung die Amplituden der Oberwellen direkt anzeigt, unter Vermeidung rotierender Teile. Insbesondere sollte es an Strom- und Spannungswandler angeschlossen werden können, also auch die Messung an Hochspannungsnetzen erlauben. Die Grundlage dazu boten die Eigenschaften parallel geschalteter Schwingungskreise mit verschiedener Eigenfrequenz.

*) Bei einem Oszillographen mit Synchronmotor als Antrieb wurden zusätzliche Oberschwingungen bis zu 4% der Grundschwingung festgestellt.

I. Theorie der Meßmethoden.

Zum Verständnis der nachherigen Ausführungen ist die Umformung einiger Formeln für Schwingungskreise sowie die Untersuchung der Eigenschaften parallel geschalteter Schwingungskreise notwendig.

A. Untersuchungen über Schwingungskreise.

1. Umformung der gebräuchlichen Formeln für den einfachen Schwingungskreis.

Für die folgenden Darlegungen wird die symbolische Methode angewandt. Deutsche Buchstaben bezeichnen die Diagrammvektoren, lateinische die zugehörigen Effektivwerte. Es ist $j = \sqrt{-1}$. ω_0 ist die Grundfrequenz, auf die alle anderen Frequenzen bezogen werden, bei zusammengesetzten Kurven die Frequenz der Grundschwingung.

Ein Schwingungskreis sei gegeben durch R, L, C (Abb. 1). Dann ist seine Eigenfrequenz $m\omega_0$ bestimmt durch die Gleichung

$$m^2 \omega_0^2 LC = 1 \quad \dots \dots \dots 5)$$

Für eine beliebige Frequenz $x\omega_0$ ist dann die Beziehung zwischen Spannung an den Enden und Strom

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{I} = \mathfrak{Z} \left[R + j \left(x\omega_0 L - \frac{1}{x\omega_0 C} \right) \right].$$

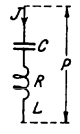


Abb. 1.

\mathfrak{Z} ist der Widerstandsoperator des Kreises. Durch Einsetzen von Gl. 5) kann C oder L eliminiert und dafür m eingeführt werden.

$$\mathfrak{Z} = R + j\omega_0 L \frac{x^2 - m^2}{x} \quad \dots \dots \dots 6)$$

oder

$$\mathfrak{Z} = R + \frac{1 \cdot m^2 - x^2}{jx\omega_0 C \cdot m^2} \quad \dots \dots \dots 6a)$$

Der absolute Betrag des Operators beträgt

$$z = R \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L^2 (x^2 - m^2)^2}{R^2 x^2}} \quad \dots \dots \dots 6b)$$

oder aber:

$$z = \omega_0 L \frac{x^2 - m^2}{x} \sqrt{1 + \frac{R^2 x^2}{\omega_0^2 L^2 (x^2 - m^2)^2}} \quad \dots \dots \dots 6c)$$

Daraus für den Strom J

$$J = \frac{P}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2 x^2}{\omega_0^2 L^2 (x^2 - m^2)^2}}} \quad \dots \dots \dots 7)$$

oder in eine Reihe entwickelt:

$$J = \frac{P}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{\omega_0^2 L^2} \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} + \frac{3}{8} \frac{R^4}{\omega_0^4 L^4} \frac{x^4}{(x^2 - m^2)^4} - \dots \right] \quad \dots \dots \dots 7a)$$

Die Reihe ist für Gebiete, in denen $\frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}$ klein ist gegen 1, also Gebiete in einer gewissen Entfernung von der Resonanzfrequenz $m\omega_0$ sehr rasch konvergent. Für Fehlerrechnungen in jenen Gebieten kann schon das zweite Glied in der eckigen Klammer neben 1 vernachlässigt werden und es ist dann

$$J = \frac{P}{\omega_0 L} \frac{x}{(x^2 - m^2)} \quad \dots \dots \dots 7b)$$

Sei J_m der Strom für die Resonanzfrequenz $m\omega_0$:

$$J_m = \frac{P}{R} \dots \dots \dots 8)$$

Wenn einmal eine Spannung P_m von der Resonanzfrequenz $m\omega_0$, ein ander Mal eine gleichgroße Spannung P von der Frequenz $x\omega_0$ außerhalb des Resonanzgebietes auf den Kreis einwirkt, so ist das Verhältnis der entsprechenden Ströme

$$\frac{J}{J_m} = \frac{z_m}{z} = \frac{R}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2} \right)^4 - \dots \right] \dots 9)$$

Mit wachsendem Abstand von m nimmt dieses Verhältnis rasch sehr kleine Werte an, was der Ausdruck für die bekannte Tatsache ist, daß ein Schwingungskreis einen Strom einen um so größeren Widerstand entgegensetzt, je weiter seine Frequenz von der Resonanzfrequenz entfernt. Diese Erscheinung sei mit „Drosselung“ bezeichnet. Für Fehlerrechnungen genügt wieder die Berücksichtigung des ersten Gliedes.

$$\frac{J}{J_m} = \frac{z_m}{z} = \frac{R}{\omega_0 L} \frac{x}{x^2 - m^2} \dots \dots \dots 9a)$$

Gl. 6) ergibt für den Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung an den Enden

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega_0 L}{R} \frac{x^2 - m^2}{x} \dots \dots \dots 10)$$

Der Verlauf von J und φ in Funktion der Frequenz $x\omega_0$ wird in den Abb. 2 und 3 gezeigt. Es ist dort $\frac{R}{L} = 126$. Diese Form der J - und φ -Kurve ist für Schwingungskreise charakteristisch.

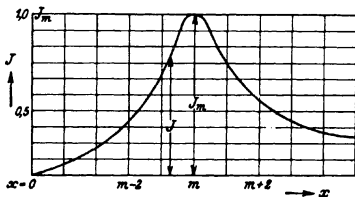


Abb. 2.

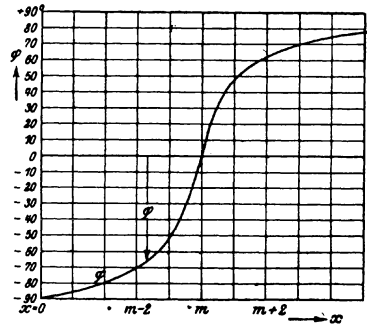


Abb. 3.

2. Theoretische Untersuchungen über Doppelkreise.

a) Allgemeiner Fall. Wir betrachten ein System von zwei parallel geschalteten Schwingungskreisen a und b (Abb. 4). Ihre Induktivitäten seien L_a, L_b , die Kapazitäten C_a, C_b . Die Widerstände R_a und R_b seien einander gleich, wodurch sich die Formeln vereinfachen. Im übrigen sind die Größen voneinander unabhängig. Der Gesamtstrom des Doppelkreises sei \mathfrak{J} , die Spannung an den Enden \mathfrak{P} . Zu untersuchen ist der Verlauf des Widerstandsoperators \mathfrak{z} . Die Resonanzfrequenzen der beiden Kreise liefern wieder die Gleichungen

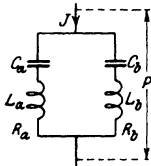


Abb. 4.

$$\omega_0^2 m_a^2 C_a L_a = 1,$$

$$\omega_0^2 m_b^2 C_b L_b = 1.$$

Für die einzelnen Kreise gilt Gl. 6)

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{Z}_a \left[R_a + j\omega_0 L_a \frac{x^2 - m_a^2}{x} \right] \\ &= \mathfrak{Z}_b \left[R_a + j\omega_0 L_b \frac{x^2 - m_b^2}{x} \right], \end{aligned}$$

oder wenn

$$\begin{aligned} \omega_0 L_a \frac{x^2 - m_a^2}{x} &= Y_a, \\ \omega_0 L_b \frac{x^2 - m_b^2}{x} &= Y_b, \\ \mathfrak{P} &= \mathfrak{Z}_a [R_a + jY_a], \\ &= \mathfrak{Z}_b [R_a + jY_b]. \end{aligned}$$

Daraus

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{Z}_a + \mathfrak{Z}_b = P \left[\frac{1}{R_a + jY_a} + \frac{1}{R_a + jY_b} \right], \\ \mathfrak{P} &= \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{I} = \mathfrak{Z} \frac{R_a^2 - Y_a Y_b + jR_a(Y_a + Y_b)}{2R_a + j(Y_a + Y_b)} \dots \dots \dots \text{II1)} \end{aligned}$$

Folglich durch Beseitigen des imaginären Gliedes im Nenner:

$$\mathfrak{Z} = \frac{R_a [2R_a^2 - 2Y_a Y_b + (Y_a + Y_b)^2] + j(Y_a + Y_b)(R_a^2 + Y_a Y_b)}{4R_a^2 + (Y_a + Y_b)^2}.$$

J ist mit P in Phase, wenn das imaginäre Glied des Widerstandsoperators zu 0 wird. Das ist der Fall, wenn $Y_a = -Y_b$, also

$$\omega_0 L_a \frac{x^2 - m_a^2}{x} = -\omega_0 L_b \frac{x^2 - m_b^2}{x}.$$

Die Frequenz, bei der dieser Fall eintritt sei $m\omega_0$. Dann ist

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{m^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \dots \dots \dots \text{II2)}$$

oder

$$m^2 = \frac{L_a m_a^2 + L_b m_b^2}{L_a + L_b} \dots \dots \dots \text{II2a)}$$

Da L_a und L_b immer positiv sind, muß nach Gl. II2) entweder $m_a < m < m_b$ oder $m_b < m < m_a$ sein. Zwischen den Resonanzfrequenzen der Teilkreise a) und b) liegt also immer eine Frequenz m, bei welcher der Gesamtstrom des Doppelkreises in Phase ist mit der Spannung an den Enden.

Für unsere Zwecke ist die Umkehrung des Satzes wichtiger: Gegeben die Resonanzfrequenzen m_a und m_b zweier parallel geschalteter Kreise mit gleichen Widerständen. Für eine dazwischen liegende Frequenz m soll der Phasenwinkel des Gesamtstromes o werden. Das ist der Fall, wenn die Einzelkreise nach Gl. II2) dimensioniert werden.

b) Spezialfall: Die Induktivitäten der beiden Teilkreise sind einander gleich: $L_a = L_b$. Die Voraussetzung $L_a = L_b$ ergibt einen Fall, welcher der mathematischen Behandlung zugänglicher ist als der allgemeine. Aus ihm werden wir Anhaltspunkte für die übrigen Fälle gewinnen. Nach Gl. II2) ist dann

$$m^2 - m_b^2 = m_a^2 - m^2.$$

Es sei

$$m_a^2 - m^2 = s^2.$$

Dann sind

$$\left. \begin{aligned} m_a^2 &= m^2 + s^2 \\ m_b^2 &= m^2 - s^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{II3)}$$

Diese Ausdrücke in die Gleichungen für Y_a und Y_b eingesetzt, ergibt

$$Y_a = \omega_0 L_a \frac{x^2 - m^2 - s^2}{x},$$

$$Y_b = \omega_0 L_a \frac{x^2 - m^2 + s^2}{x},$$

und nach einigen Umformungen für δ aus Gl. 11 a):

$$\delta = \frac{R_a}{2} \frac{R_a^2 + \omega_0^2 L_a^2 \frac{(x^2 - m^2)^2 + s^4}{x^2} + j \frac{\omega_0 L_a}{R_a} \frac{x^2 - m^2}{x} \left\{ R_a^2 + \omega_0^2 L_a^2 \frac{(x^2 - m^2) - s^4}{x^2} \right\}}{R_a^2 + \omega_0^2 L_a^2 \frac{(x^2 - m^2)^2}{x^2}} \quad 14)$$

$$\delta = \frac{R_a}{2} \left[\left\{ 1 + \frac{s^4}{\frac{x^2 R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2} + (x^2 - m^2)^2} \right\} + j \frac{\omega_0 L_a}{R_a} \frac{x^2 - m^2}{x} \left\{ 1 - \frac{s^4}{\frac{x^2 R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2} + (x^2 - m^2)^2} \right\} \right]$$

Eine Reihenentwicklung ist nur möglich für Frequenzen, die entfernt von den Resonanzfrequenzen liegen. Es soll deshalb eine graphische Lösung über den Verlauf des Operators Klarheit verschaffen. N bezeichne den Nenner der beiden zweiten Glieder

$$N = x^2 \cdot \frac{R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2} + (x^2 - m^2)^2 \dots \dots \dots 15)$$

$$N = \left[x^2 - m^2 + \frac{R_a^2}{2 \omega_0^2 L_a^2} \right]^2 + \frac{R_a^2}{\omega_0^2 L_a^2} \left[m^2 - \frac{R_a^2}{4 \omega_0^2 L_a^2} \right] \dots \dots \dots 15a)$$

Es ist also

$$\delta = \frac{R_a}{2} \left[\left\{ 1 + \frac{s^4}{N} \right\} + j \frac{\omega_0 L_a}{R_a} \frac{x^2 - m^2}{x} \left\{ 1 - \frac{s^4}{N} \right\} \right] \dots \dots \dots 14a)$$

Weiter werde bezeichnet

$$\frac{s^4}{N} = U \dots \dots \dots 16)$$

$$\frac{\omega_0 L_a}{R_a} \frac{x^2 - m^2}{x} = V$$

Dann ist

$$\delta = \frac{R_a}{2} [(1 + U) + jV(1 - U)] \dots \dots 14b)$$

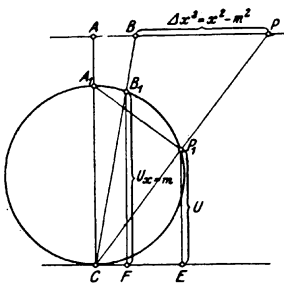


Abb. 5.

Zur Konstruktion der Funktion U führen folgende Überlegungen:

In Gl. 15a) ist N die Summe zweier Quadrate, kann also als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks dargestellt werden: $\triangle ACP$ in Abb. 5.

Dabei ist entsprechend dem zweiten Glied in Gl. 15a):

$$\overline{AC} = \frac{R_a}{\omega_0 L_a} \sqrt{m^2 - \frac{R_a^2}{4 \omega_0^2 L_a^2}} = \text{unabhängig von } x$$

und entsprechend dem ersten Glied:

$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \frac{R_a}{2 \omega_0^2 L_a^2} + (x^2 - m^2) = \frac{R_a^2}{2 \omega_0^2 L_a^2} + \Delta x^2.$$

Dabei ist

$$\overline{AB} = \frac{R_a^2}{2 \omega_0^2 L_a^2} = \text{unabhängig von } x,$$

$$\overline{BP} = (x^2 - m^2) = \Delta x^2 = \text{variabel.}$$

Zu verschiedenen x gehören also verschiedene Punkte P . Dann ist

$$\overline{CP} = \sqrt{N}.$$

Um daraus $\frac{I}{\sqrt{N}}$ zu erhalten, werde eine Inversion vorgenommen: Mit \overline{AC} als Durchmesser wird ein Kreis durch C mit vorerst beliebigem Durchmesser gezogen. Dann ergibt sich aus Beziehungen ähnlicher Dreiecke:

$$\overline{AC} : \overline{P_1C} = \overline{CP} : \overline{A_1C},$$

$$\overline{P_1C} = \overline{AC} \cdot \overline{A_1C} \frac{I}{\overline{PC}} = \overline{AC} \cdot \overline{A_1C} \cdot \frac{I}{\sqrt{N}}$$

in einem Maßstab, der vom Durchmesser $\overline{A_1C}$ abhängt. Folgende Konstruktion liefert daraus $\frac{I}{N}$: In C wird die Tangente an den Kreis gezogen (Abb. 5) und von P_1 die Senkrechte darauf gefällt: Schnittpunkt E . Dann ist

$$\triangle P_1CE \sim \triangle CA_1P_1.$$

Also gilt

$$\overline{CP_1} : \overline{P_1E} = \overline{CA_1} : \overline{CP_1}$$

oder

$$\overline{P_1E} = \overline{P_1C}^2 \cdot \frac{I}{\overline{CA_1}} = \frac{I}{N} \overline{AC}^2 \cdot \overline{A_1C}.$$

Dabei ist der Faktor $\overline{AC}^2 \cdot \overline{A_1C}$ konstant und kann durch geeignete Wahl des Maßstabes für den Kreisdurchmesser auf I gebracht werden. Den Ausdruck $\overline{P_1E} = U = \frac{s^4}{N}$ (Gl. 16) erhält man durch Änderung dieses Maßstabes. Letzteren legt man am einfachsten dadurch fest, daß man U für $x^2 - m^2 = 0$, also für $x = m$ berechnet [Gl. 16) und 15a)]:

$$U_{x=m} = \frac{s^4}{\frac{m^2 R_s^2}{\omega_0^2 L_s^2}} \dots \dots \dots 17)$$

Konstruktiv wird dieses U für $x = m$ (also $\Delta x^2 = 0$) durch die Linie $\overline{B_1F}$ dargestellt (Abb. 5). Umgekehrt kann also zuerst der Maßstab für diese Strecke nach Gl. 17) festgelegt und dann Abb. 5 konstruiert werden.

Ein Beispiel möge das Verfahren erläutern:

Sei:

$$\frac{R_s}{L_s} = 150, \quad \omega_0 = 314,2,$$

$$m = 3, \quad s^2 = 0,6,$$

also; $m_s^2 = m^2 + s^2 = 9,6, \quad m_s = 3,10$

$$m_b^2 = m^2 - s^2 = 8,4, \quad m_b = 2,90$$

$$\frac{R_s}{\omega_0 L_s} = 0,477.$$

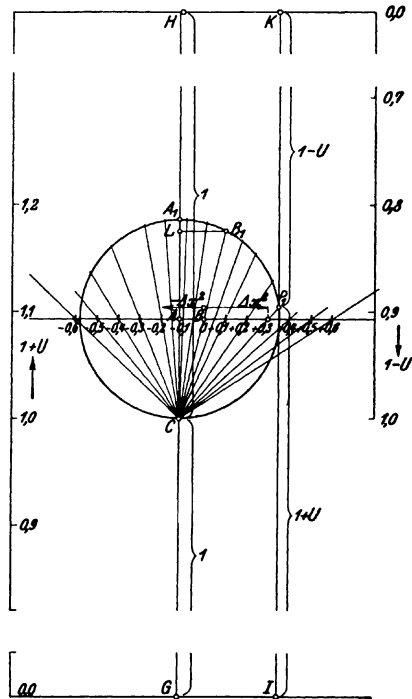


Abb. 6.

Zuerst wird Dreieck ABC konstruiert (Abb. 6), der Maßstab so gewählt, daß einem Δx^2 von 0,1 die Länge 10 mm entspricht. Dann wird berechnet

$$U_{x=m} = \frac{0,36}{9 \cdot 0,228} = 0,175.$$

Diese Strecke wird von C nach oben bis L abgetragen (\overline{CL}), in L die Senkrechte zu LC gezogen und mit dem verlängerten Strahl CB geschnitten: B_1 . Durch B_1 und C wird ein Kreis gezogen mit dem Mittelpunkt auf CL. Von C aus werden noch im Abstand 1 nach oben und unten Parallele zu AB gezogen. Für irgendeine Frequenz $x\omega_0$ erhält man nun die gesuchten Funktionen folgendermaßen: Man trägt von B aus das zugehörige $\Delta x^2 = x^2 - m^2$ ab und zieht durch den erhaltenen Punkt P einen Strahl nach C. Sein Schnittpunkt mit dem Kreis sei P_1 . Dann stellt die Strecke $\overline{P_1I}$ die Funktion $(1 + U)$, die Strecke $\overline{P_1K}$ die Funktion $(1 - U)$ dar. Auf diese Weise wurde in dem gewählten Beispiel für Punkte im Resonanzbereich U konstruiert (Abb. 6) und daraus Scheinwiderstand und Phasenwinkel berechnet (Tafel I, Abb. 7 und 8).

Zahlentafel I.

$\Delta x^2 = x^2 - m^2$	x	1-U	1+U	V.Z $= \frac{2,098}{x} \cdot \frac{x^2 - m^2}{x}$	$(1+U)^2$	$V^2(1-U)^2$	$\frac{(1+U)^2 + V^2(1-U)^2}{2}$	$\frac{z}{R_a/2}$	tg φ	φ
-0,60	2,89 ₈	0,911	1,089	-0,434	1,182	0,156	1,338	1,157	-0,362 ₈	-19° 55'
-0,50	2,91 ₅	0,890	1,110	-0,360	1,232	0,103	1,335	1,155	-0,288 ₀	-16° 5'
-0,40	2,93 ₃	0,865	1,135	-0,286	1,290	0,061	1,351	1,162	-0,218 ₀	-12° 18'
-0,30	2,95 ₀	0,839	1,161	-0,213 ₂	1,346	0,032	1,378	1,173	-0,154 ₁	-8° 46'
-0,20	2,96 ₆	0,820	1,180	-0,141 ₃	1,392	0,013	1,405	1,185	-0,098 ₃	-5° 37'
-0,10	2,98 ₃	0,814	1,186	-0,070 ₃	1,406	0,003	1,409	1,187	-0,048 ₂	-2° 46'
-0,05	2,99 ₂	0,817	1,183	-0,035 ₂	1,402	0,001	1,403	1,186	-0,024 ₂	-1° 23'
0	3,00 ₀	0,825	1,175	0,00	1,380	0,000	1,380	1,173	0	0°
+0,05	3,00 ₈	0,834	1,166	+0,034 ₈	1,360	0,001	1,361	1,168	+0,024 ₀	+1° 26'
0,10	3,01 ₇	0,846	1,154	+0,069 ₈	1,332	0,003	1,335	1,155	+0,051 ₀	+2° 54'
0,20	3,03 ₃	0,872	1,128	+0,138 ₂	1,270	0,015	1,285	1,134	+0,106 ₈	+6° 6'
0,30	3,05 ₀	0,896	1,104	+0,206	1,220	0,034	1,254	1,119	+0,167 ₁	+9° 29'
0,40	3,06 ₆	0,916	1,084	+0,273	1,178	0,063	1,241	1,115	+0,231 ₀	+13° 0'
0,50	3,08 ₃	0,932	1,068	+0,340	1,140	0,100	1,240	1,114	+0,296	+16° 29'
+0,60	3,09 ₈	0,945	1,055	+0,406	1,112	0,148	1,260	1,122	+0,364	+20° 0'

Gl. 14b) ergibt für den Scheinwiderstand

$$z = \frac{R_a}{2} \sqrt{(1+U)^2 + V^2(1-U)^2} \dots \dots \dots 18)$$

oder

$$z = \frac{R_a}{2} \sqrt{(1+U)^2 + \frac{\omega_0^2 L_a^2}{R_a^2} \frac{(x^2 - m^2)^2}{x^2} (1-U)^2}$$

und für den Phasenwinkel

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega_0 L_a}{R_a} \cdot \frac{x^2 - m^2}{x} \cdot \frac{1-U}{1+U} \dots \dots \dots 19)$$

Die entsprechenden Formeln für einen unverzweigten Stromkreis mit dem Widerstand $\frac{R_a}{2}$ und gleichem $\frac{R}{\omega_0 L}$ (also der Induktivität $\frac{L_a}{2}$ und der Eigenfrequenz $m\omega_0$ lauten [Gl. 6b und 10])

$$z = \frac{R_a}{2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L_a^2}{R_a^2} \cdot \frac{(x^2 - m^2)^2}{x^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 L_a}{R_a} \cdot \frac{x^2 - m^2}{x}.$$

Der Vergleich zeigt, daß sich die Formeln für den Doppelkreis von denjenigen für den einfachen Kreis nur durch die Faktoren $(1 + U)$ und $(1 - U)$ unterscheiden. Abb. 6 zeigt aber, daß je mehr sich die Frequenz $x\omega_0$ von der Frequenz $m\omega_0$ entfernt, die Funktionen $(1 + U)$ und $(1 - U)$ immer näher an 1 rücken, d. h. je mehr sich die Frequenz vom Resonanzgebiet entfernt, um so mehr fallen die Kurven für z und φ des Doppelkreises mit denjenigen des ungeteilten Kreises zusammen. Der Doppelkreis kann also in diesem Gebiete durch einen gewöhnlichen Kreis ersetzt werden. Dieser soll Ersatzkreis genannt werden. Die Übereinstimmung ist um so vollständiger, je kleiner der Kreisdurchmesser in Abb. 6 gegen 1 ist, je kleiner also s^2 ist [Gl. 17)].

An Hand des Verlaufes von U ergibt sich jetzt z in Funktion der Frequenz folgendermaßen [Gl. 18]): Im Resonanzgebiet ist x ähnlich so groß wie m , die Funktion V also klein und damit z nahezu proportional dem ersten Gliede in der Wurzel: $(1 + U)$. Dadurch (Abb. 6) ist ein Maximum von z in der Gegend von m bedingt. Je weiter sich x von m entfernt, je größer also $x^2 - m^2$ positiv oder negativ wird, um so größer ist V und damit der Einfluß des zweiten Gliedes in der Wurzel: $V^2(1 - U)^2$. Schließlich überwiegt dieser Einfluß und führt zur Bildung je eines Minimums unter- und oberhalb m und dann zum Anstieg der z -Kurve. Schließlich fällt die Kurve mit derjenigen des ungeteilten Kreises zusammen. Abb. 7 zeigt die z -Kurve im Resonanzgebiet für das oben berechnete Beispiel. Die gestrichelte Kurve ist die entsprechende des Ersatzkreises. Die zugehörigen Stromkurven wären natürlich den z -Kurven reziprok. Einen ganz ähnlichen Verlauf weist die Stromkurve zweier bestimmter Schwingungskreise in loser magnetischer Kopplung auf²¹⁾.

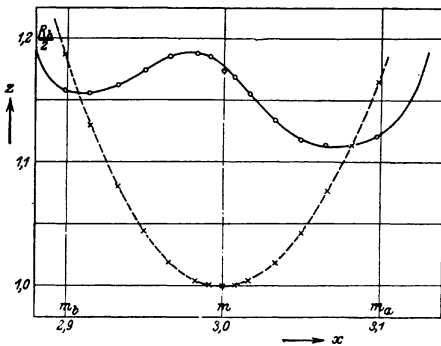


Abb. 7.

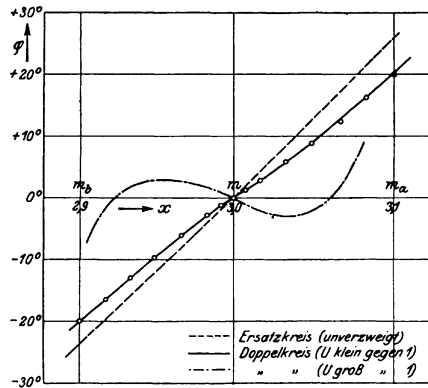


Abb. 8.

Interessant ist der Verlauf des Phasenwinkels φ . Wie schon bemerkt, nähert sich seine Kurve für die von m stark verschiedenen Frequenzen derjenigen des Ersatzkreises. Im Bereiche der Resonanzfrequenz dagegen findet eine starke Einsenkung statt (Abb. 8, ausgezogene Kurve), die um so stärker wird, je größer U gegen 1 wird, je größer also der Kreisdurchmesser in Abb. 6, je größer endlich s^2 ist. Sie kann sogar so groß werden, daß die Kurve die Abszissenachse dreimal statt einmal schneidet (strich-

punktierte Kurve in Abb. 8). Das tritt dann ein, wenn in Abb. 6 der Kreis die obere o-Linie schneidet, wenn also nach Gl. 17) sein Durchmesser*)

$$U_{x=m} > 1$$

oder

$$s^4 > m^2 \frac{R_b^4}{\omega_0^2 L_b^2}$$

wird.

B. Theorie der Spannungsmessung einer Welle.

Bezeichne m die Ordnungszahl der zu messenden Oberwelle. Die übrigen Oberwellen nennen wir „fremde Oberwellen“; als solche kommen nach Seite 1 bei technischen Wechselströmen nur ungerade in Betracht, also von der (m + 2)-ten an aufwärts und der (m - 2)-ten an abwärts. Wird z. B. die dritte Oberwelle gemessen, so sind die 1., 5., 7., 9. usw. fremde Wellen. Zunächst möge die Umlaufzahl des die Spannungskurve erzeugenden Generators und damit die Grundfrequenz als konstant angenommen werden.

1. Messung bei gleichbleibender Frequenz.

Bekanntlich ist der Ausschlag eines Dynamometers

$$\alpha = K \cdot J_1 J_2 \cos \varphi_{12} \dots \dots \dots 20)$$

wenn J₁ der Strom der festen Spule, J₂ derjenige der beweglichen und cos φ₁₂ der Phasenwinkel ist, den beide einschließen. K ist die Instrumentenkonstante, die man am besten durch die den Vollausschlag α_{max} hervorrufenden Werte der Ströme in fester und beweglicher Spule experimentell bestimmen kann:

$$K = \frac{\alpha_{max}}{J_{1max} J_{2max}} \dots \dots \dots 20 a)$$

wenn J_{1max} und J_{2max} die Ströme sind, die mit Phasenwinkel 0 Vollausschlag geben.

Beide Spulen des Dynamometers mögen an die zu analysierende Spannung angeschlossen sein. Gelingt es nun, für die m-te Oberwelle cos φ₁₂ = 1 zu machen, für alle fremden Oberwellen dagegen gleich 0, so ist der Wattmeterausschlag ein Maß für die m-te Oberwelle. Im folgenden wird versucht, mit Hilfe von Schwingungskreisen diese Bedingung zu erfüllen.

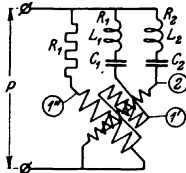


Abb. 9.

Wir verwenden ein Dynamometer, dessen feste Wicklung in 2 Spulen 1' und 1'' unterteilt ist von vorläufig gleicher Windungszahl. 1'' ist in Reihe geschaltet mit einem induktionslosen Widerstand R₁'', 1' mit einem aus Induktivität L₁ und Kapazität C₁ bestehenden Schwingungskreis vom Werkwiderstand R₁' und einer Eigenfrequenz gleich der Frequenz mω₀ der zu messenden Oberwelle (Abb. 9). Also

$$\omega_0^2 m^2 C_1 L_1 = 1.$$

Dabei sei

$$R_1' = R_1'' = R_1.$$

Die bewegliche Spule ist in Reihe mit einem Kreise vom Widerstand R₂ und gleicher Eigenfrequenz (Abb. 9):

$$\omega_0^2 m^2 C_2 L_2 = 1.$$

Alle drei Stromkreise sind parallel geschaltet, die Windungsrichtung der beiden festen

*) Die Bedingung ist nicht ganz genau, da ja U_{x=m} (gleich der Strecke \overline{CL} in Abb. 6) nicht gleich dem Durchmesser ist. Der Unterschied ist aber klein.

Spulen einander entgegengesetzt. Dabei sind die Selbstinduktionen der Dynamometerspulen 1' und 2 (Abb. 9) in L_1 und L_2 enthalten. Diejenige von 1' wird vernachlässigt, da sie kompensiert wird (S. 25). Die gegenseitige Induktion zwischen den Spulen 1' und 1'' kann vernachlässigt werden (S. 27), diejenige zwischen den beweglichen und den festen Spulen wird kompensiert (S. 27), fällt also für die Rechnung außer Betracht. An den Endklemmen wird nun die zu analysierende Spannung angelegt. Die mechanische Wirkung der Ströme J_1' und J_1'' in den beiden festen Spulen auf die bewegliche Spule ist gleichwertig der Wirkung eines einzigen Stromes J , der gleich der Differenz der beiden Ströme ist. Sein Vektor ist

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1'' - \mathfrak{J}_1' \dots \dots \dots 21)$$

wobei

$$\mathfrak{J}_1'' = \frac{\mathfrak{P}}{R_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{P}}{R_1 + j\omega_0 L_1 \frac{x^2 - m^2}{x}}$$

nach Gl. 6). Daraus

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{P} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + j\omega_0 L_1 \frac{x^2 - m^2}{x}} \right]$$

oder

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{P}}{R_1} \frac{\omega_0^2 L_1^2 \frac{(x^2 - m^2)^2}{x^2} + j\omega_0 L_1 R_1 \frac{x^2 - m^2}{x}}{R_1^2 + \omega_0^2 L_1^2 \frac{(x^2 - m^2)^2}{x^2}} \dots \dots \dots 22$$

Hieraus für den Phasenwinkel φ_1 , um den J_1 hinter P herläuft*)

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{-R_1}{\omega_0 L_1 \frac{x^2 - m^2}{x}} \dots \dots \dots 23)$$

Für den Kreis 2 der beweglichen Spule ist er bestimmt [Gl. 10)] durch:

$$\text{tg } \varphi_2 = + \frac{\omega_0 L_2}{R_2} \cdot \frac{x^2 - m^2}{x} \dots \dots \dots 24)$$

Unter der Bedingung

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2} \dots \dots \dots 24a)$$

ist $\text{tg } \varphi_2 = -\text{tg } \varphi_1$, also $\varphi_1 - \varphi_2 = 90^\circ$ für jedes beliebige x (Abb. 10), es wird also überhaupt keine Oberschwingung angezeigt.

Für $x = m$ zeigt die φ_1 -Kurve einen Sprung von $+90^\circ$ auf -90° . Es ist in diesem Punkt

$$J_1'' = \frac{P}{R_1}$$

und nach Gl. 8)

$$J_1' = \frac{P}{R_1},$$

folglich

$$J_1 = J_1'' - J_1' = 0;$$

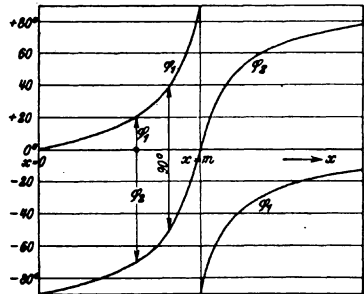


Abb. 10.

*) Das Vorzeichen mußte umgekehrt werden, weil Gl. 22) den Operator des Leitwertes darstellt. Dieser liefert für φ_1 das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Berechnung aus dem Widerstandsoperator.

es wird also auch eine Oberschwingung der Ordnung m nicht angezeigt, d. h. der Apparat ist in dieser Form nicht anwendbar.

Diese Verhältnisse ändern sich, wenn der Resonanzkreis \mathbf{x} in einen Doppelkreis aufgeteilt wird (Abb. 11) mit Eigenfrequenzen m_a und m_b größer, bzw. kleiner als m .

Für diesen sei $R_a = R_b$; die Dimensionierung der übrigen Größen stehe vorerst noch offen.

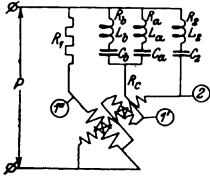


Abb. 11.

Unter Verwertung der in Abschnitt I, A. 2. b) gefundenen Resultate für den Sonderfall $L_a = L_b$ kann angenommen werden, daß auch hier die φ - und z -Kurven des Doppelkreises mit wachsender Entfernung der Frequenz von m sich immer mehr an die entsprechenden Kurven der eben betrachteten Schaltung mit einem Kreis anschließen, es ist also nach wie vor für die fremden Oberwellen $\cos \varphi_{1,2}$ gleich oder wenigstens annähernd 0.

Es wird sich zeigen, daß es zweckmäßig ist, L_a zwar von gleicher Größenordnung, nicht aber gleich L_b zu machen. Daß die Verwertung der Ergebnisse für den Fall $L_a = L_b$ hier auch nur qualitativ zulässig, ist deshalb eine Annahme. Ihre Richtigkeit wird nachher durch die Versuche bewiesen: Sie zeigen, daß der Ausschlag des Instruments für die fremden Oberwellen wirklich zu 0 wird.

Läßt sich nun noch erreichen, daß für die Frequenz $m\omega_0$ der Widerstand z des Doppelkreises ab größer als R_1 wird, so ist $J_1' < J_1''$ und damit J_1 nicht gleich 0; Dann liefert also das Wattmeter für die m -te Oberwelle einen Ausschlag, für die andern Wellen nicht; damit wäre die Aufgabe gelöst. Erwarten läßt sich auch die Erfüllung dieser Bedingung aus dem Verlauf der z -Kurven in Abb. 7. Daß sie wirklich erfüllt ist, wird nachher bewiesen.

Die Bedingung der gleichen Wirksamkeit des Doppelkreises mit dem einfachen Kreis läßt sich natürlich nicht für alle fremden Wellen scharf erfüllen, für einen Teil derselben wäre also $\cos \varphi_{1,2}$ nicht genau 0. Die betreffenden Wellen würden [Gl. 20] einen Ausschlag und damit einen Fehler verursachen. Hier kommt uns die Drosselung im Kreis 2 zu Hilfe, denn J_2 wird für alle fremden Wellen um ein Vielfaches kleiner als für die m -te [Gl. 9a), Abb. 2]. Dadurch wird α verkleinert [Gl. 20], der Fehler also heruntergedrückt, und zwar, wie die Versuche zeigen werden, auf einen vernachlässigbaren Wert. Wie Abb. 2 und Gl. 9a) zeigen, ist die Drosselung für die verschiedenen Wellen nicht gleich stark. Dabei kommt der Bereich von $(m - 2)$ bis $(m + 2)$ nicht in Betracht, da ja dort keine Oberwellen liegen. Wie Abb. 2 zeigt, wird die $(m + 2)$ -te Oberwelle am wenigsten durch die Drosselung beeinflusst. Weiter ist trotz starker Drosselung die Grundwelle gefährlich, da ihre Stärke ein Vielfaches derjenigen aller Oberwellen zu betragen pflegt. Es soll deswegen für die Unterdrückung dieser beiden Wellen von der Mitwirkung der Drosselung abgesehen werden, d. h. für diese Wellen soll $\cos \varphi_{1,2}$ vollständig zu 0 werden. Das ist der Fall, wenn der Widerstandsoperator des Doppelkreises (Abb. 11) für diese beiden Frequenzen nach Größe und Phase vollständig mit demjenigen des ungeteilten Kreises (Abb. 9) übereinstimmt.

Auf Grund dieser beiden Bedingungen wird die Dimensionierung des Doppelkreises vorgenommen. Da beide durch komplexe Gleichungen dargestellt werden, so ergeben sich vier Bedingungen. Demgegenüber kann noch über vier

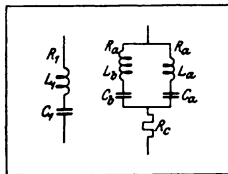


Abb. 12.

Größen verfügt werden: m_b , L_a , L_b , R_a . Denn es ist $R_b = R_a$. Widerstand R_c setzt sich aus Instrumenten- und Justierwiderstand zusammen, m_a soll frei gewählt werden können. Die Aufgabe ist also die folgende:

Ein Doppelkreis mit vorgeschaltetem induktionslosem Widerstand R_c ist so zu dimensionieren, daß sein Widerstandsoperator für die Frequenzen ω_0 und $(m + 2)\omega_0$ nach

Größe und Phase gleich ist wie derjenige eines gegebenen einfachen Kreises von der Eigenfrequenz $m\omega_0$, der Induktivität L_1 und dem Widerstand R_1 (Abb. 12). Dabei kann noch über die Resonanzfrequenz m_a eines der beiden Teilkreise frei verfügt werden. Unter Benutzung der Gl. 11) ist der Widerstandsoperator des Doppelkreises

$$\mathfrak{z}' = \frac{R_a^2 - Y_a Y_b + jR_a(Y_a + Y_b)}{2R_a + j(Y_a + Y_b)} + R_c \dots \dots \dots 25)$$

Dabei ist

$$Y_a = \omega_0 L_a \frac{x^2 - m_a^2}{x},$$

$$Y_b = \omega_0 L_b \frac{x^2 - m_b^2}{x}.$$

Für die Frequenzen $x = 1$ und $x = m + 2$ muß dieser Operator gleich sein dem Operator des einfachen Kreises

$$\mathfrak{z} = R_1 + jY_1,$$

wobei

$$Y_1 = \omega_0 L_1 \frac{x^2 - m^2}{x}.$$

Also:

$$\frac{R_a^2 - Y_a Y_b + jR_a(Y_a + Y_b)}{2R_a + j(Y_a + Y_b)} + R_c = R_1 + jX_1.$$

Daraus durch Trennung von reellen und imaginären Gliedern

$$\left. \begin{aligned} R_a^2 - Y_a Y_b &= (R_1 - R_c) 2R_a - Y_1(Y_a + Y_b) \quad \text{für } x = 1 \\ R_a(Y_a + Y_b) &= (R_1 - R_c)(Y_a + Y_b) + 2R_a Y_1 \quad \text{für } x = m + 2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 26)$$

Für $x = 1$ wird

$$Y_1 = \omega_0 L_1 (1 - m^2); \quad Y_a = \omega_0 L_a (1 - m_a^2); \quad Y_b = \omega_0 L_b (1 - m_b^2).$$

Für $x = (m + 2)$:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \omega_0 L_1 \frac{(m + 2)^2 - m^2}{m + 2}; & Y_a &= \omega_0 L_a \frac{(m + 2)^2 - m_a^2}{m + 2}; \\ Y_b &= \omega_0 L_b \frac{(m + 2)^2 - m_b^2}{m + 2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 27)$$

Zur Abkürzung sei

$$\left. \begin{aligned} 1 - m^2 &= u & 1 - m_a^2 &= u_a & 1 - m_b^2 &= u_b \\ \frac{(m + 2)^2 - m^2}{m + 2} &= v, & \frac{(m + 2)^2 - m_a^2}{m + 2} &= v_a, & \frac{(m + 2)^2 - m_b^2}{m + 2} &= v_b, \\ R_1 - R_c &= R_{ab} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 28)$$

Letzteres kann auch betrachtet werden als derjenige Teil von R_1 , der für die Zerlegung in den Doppelkreis übrigbleibt. Ferner bezeichne

$$k_{ab} = \frac{R_{ab}}{\omega_0 L_1} \dots \dots \dots 29)$$

Aus den Gl. 26) entstehen durch Einsetzen der Ausdrücke für Y_a , Y_b , Y_1 die vier Gleichungen:

$$R_a^2 - \omega_0^2 L_a L_b u_a u_b = (R_1 - R_c) 2R_a - \omega_0^2 L_1 u (L_a u_a + L_b u_b) \dots \dots \dots 30a)$$

$$R_a^2 - \omega_0^2 L_a L_b v_a v_b = (R_1 - R_c) 2R_a - \omega_0^2 L_1 v (L_a v_a + L_b v_b) \dots \dots \dots 30b)$$

$$0 = (R_1 - R_c - R_a)(L_a u_a + L_b u_b) + 2R_a L_1 u \dots \dots \dots 31a)$$

$$0 = (R_1 - R_c - R_a)(L_a v_a + L_b v_b) + 2R_a L_1 v \dots \dots \dots 31b)$$

aus 30a) und b):

$$\frac{L_a L_b}{L_1} (u_a u_b - v_a v_b) = L_a (u u_a - v v_a) + L_b (u u_b - v v_b) \dots 32)$$

aus 31a) und b)

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{u v_b - v u_b}{v u_a - u v_a} \dots 34)$$

Diese beiden wiederum zusammengezogen liefern

$$\left. \begin{aligned} L_a &= L_1 \frac{(v^2 - u^2)(v_a u_b - u_a v_b)}{(v_a v_b - u_a u_b)(u v_a - v u_a)} \\ L_b &= L_1 \frac{(v^2 - u^2)(v_a u_b - u_a v_b)}{(v_a v_b - u_a u_b)(v u_b - u v_b)} \end{aligned} \right\} \dots 34)$$

Die Werte für u, v eingesetzt, erhält man

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{m^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \dots 33a)$$

$$\left. \begin{aligned} L_a &= L_1 \frac{m_a^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \cdot \frac{(m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)}{m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2} \\ L_b &= L_1 \frac{m_a^2 - m_b^2}{m^2 - m_b^2} \cdot \frac{(m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)}{m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2} \end{aligned} \right\} \dots 34a)$$

Aus Gl. 33a) und 5) folgt ohne weiteres

$$\frac{C_a}{C_b} = \frac{m_a^2 - m^2}{m^2 - m_b^2} \cdot \frac{m_b^2}{m_a^2} \dots 33b)$$

Weiter sind zu berechnen R_a und R_b.

Unter Benutzung der Beziehung

$$(L_a u_a + L_b u_b) L_1 = u L_a L_b \frac{v_a v_b - u_a u_b}{v^2 - u^2},$$

die sich aus den Gl. 34) ergibt, erhält man aus Gl. 30a) für R_a

$$R_a = (R_1 - R_c) \pm \sqrt{(R_1 - R_c)^2 + \omega_0^2 L_a L_b \left[\frac{v^2 u_a u_b - u^2 v_a v_b}{v^2 - u^2} \right]} \dots 35)$$

Gl. 31 a) und b) dagegen geben für

$$R_a = (R_1 - R_c) \frac{1}{1 - \frac{2 L_1 v}{L_a v_a + L_b v_b}} = (R_1 - R_c) \frac{1}{1 - \frac{2 L_1 u}{L_a u_a + L_b u_b}} \dots 36)$$

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für R_a liefert:

$$k_{ab} = \frac{R_1 - R_c}{\omega_0 L_1} = \frac{v_a u_b - u_a v_b}{v_a v_b - u_a u_b} \left[\frac{(v^2 - u^2)(v_a u_b - u_a v_b)}{(v_a v_b - u_a u_b) 2v} \left(\frac{1}{u v_a - v u_a} - \frac{1}{v u_b - u v_b} \right) - 1 \right] \cdot \sqrt{\frac{(v^2 u_a u_b - u^2 v_a v_b)(v^2 - u^2)}{(u v_a - v u_a)(v u_b - u v_b)}} \dots 37)$$

Es ist die ganze rechte Seite der Gleichung nur Funktion von m, m_a, m_b [vgl. Gl. 28)], d. h. bei bestimmtem m und $\frac{R_{ab}}{\omega_0 L} \left(= \frac{R_1 - R_c}{\omega_0 L_1} \right)$ ist jedem m_a ein m_b zugeordnet, unabhängig von den übrigen Größen. Für die 3. Oberwelle wurde dieser Zusammenhang für eine Anzahl von Werten berechnet und in dem Diagramm Abb. 13 dargestellt.

Dabei war $R_c = 0$. Die etwas umständliche Differentiation der Gl. 37) nach m_b ergibt bei allen Oberwellen für die Punkte der Abszissenachse

$$\frac{\partial k_{ab}}{\partial m_b} = \infty \text{ für } k_{ab} = 0.$$

Die Tangente an die k_{ab} -Kurven steht also für jene Punkte senkrecht auf der Abszissenachse. Dadurch und durch den flachen Verlauf der Kurven ergibt sich bei kleinem k_{ab} , daß für verschiedene k_{ab} dasselbe m_a zu einem bestimmten m_b gehört, wie für $k_{ab} = 0$: Es wird also für kleine k_{ab} der Zusammenhang von m_a mit m_b von k_{ab} praktisch unabhängig. Da in unsern Kreisen nur Werte für k_{ab} von der Größenordnung 1 vorkommen, dürfen wir diesen Satz immer anwenden.

Den Zusammenhang von m_a mit m_b für $k_{ab} = 0$ ergibt Gl. 35). Es ist nämlich

$$k_{ab} = \frac{R_1 - R_c}{\omega_0 L} = 0, \text{ also } R_1 - R_c = 0 \text{ (für den Fall } R_c = 0 \text{ also } R_1 \text{ selbst} = 0), \text{ nach Gl. 36) auch } R_a = 0. \text{ Dann muß in Gl. 35) sein}$$

$$v^2 u_a u_b - u^2 v_a v_b = 0.$$

Daraus erhält man nach einigen Umformungen

$$m_a^2 + m_b^2 - 2m^2 = \frac{(m_a^2 - m^2)(m^2 - m_b^2)}{4} \cdot \frac{5 - m}{m^2 - 1} \dots \dots \dots 38)$$

Dadurch wird also bei kleinem k_{ab} jedem m_a ein m_b zugeordnet. Die Werte wurden für die 3. bis 9. Oberwelle berechnet und in Diagrammen aufgetragen (Abb. 14 bis 17).

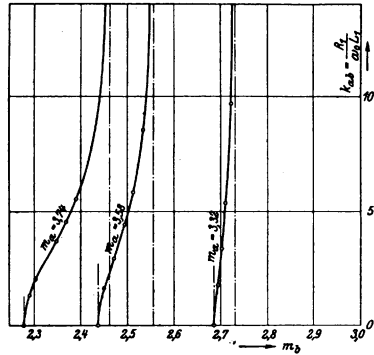


Abb. 13.

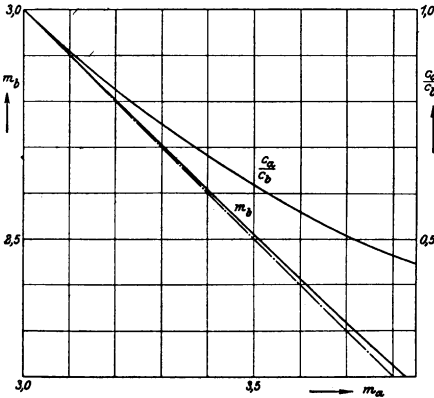


Abb. 14. (3. Oberwelle.)

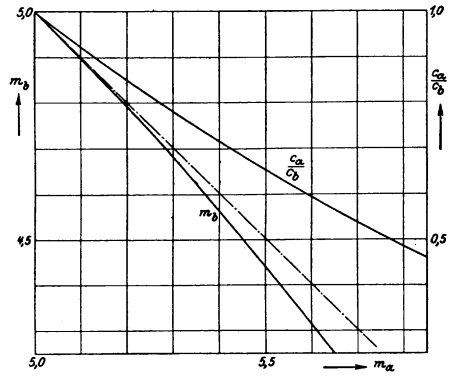


Abb. 15. (5. Oberwelle.)

Damit sind $\frac{L_a}{L_b}$ und $\frac{C_a}{C_b}$ Funktionen von m_a allein. Da es für die Dimensionierung bequem ist, die Werte von $\frac{C_a}{C_b}$ zu kennen, wurden auch sie in den Diagrammen eingetragen (Abb. 14 bis 17).

Als zweite Bedingung wurde oben verlangt, daß der Widerstandsoperator des Doppelkreises (mit vorgeschaltetem Widerstand R_c) für die Frequenz $m\omega_0$ größer als R_1' sei. Vorerst zeigt sich, daß er reiner Werkwiderstand ist. Denn der Doppelkreis besitzt die Eigenschaft [Gl. 33 a)]

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{m^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2}$$

Diese entspricht aber der Gl. 12), mithin ist der Phasenwinkel für die m -te Oberwelle 0. Der Widerstand heiße r_1 . Er berechnet sich aus Gl. 25) zu

$$r_1 = \frac{R_a^2 - X_a X_b}{2 R_a} + R_c = r_{ab} + R_c$$

r_{ab} ist der Widerstand des Doppelkreises allein bei der Frequenz $m\omega_0$. Nach Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke und einigen Umformungen ergibt sich

$$r_{ab} + R_c = \frac{R_a}{2} \left[1 + \frac{\omega_0^2 L_1^2 (m_a^2 - m_b^2)^2 (m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)^2}{R_a^2 m^2 [m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2]^2} \right] + R_c \quad (39)$$

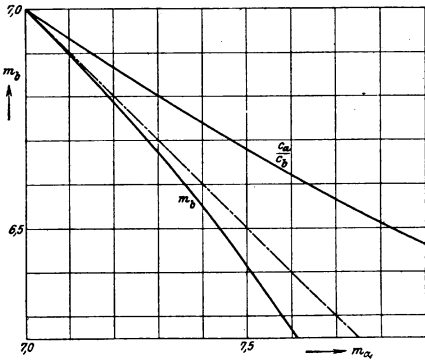


Abb. 16. (7. Oberwelle).

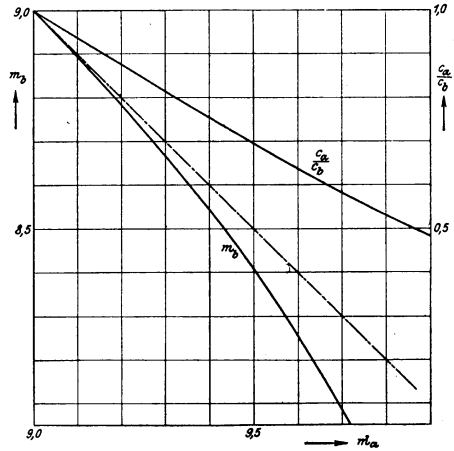


Abb. 17. (9. Oberwelle).

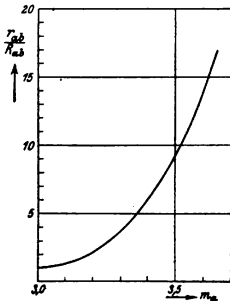


Abb. 18.

Es könnte R_a noch durch R_{ab} und eine Funktion von m_a und m_b ersetzt werden [Gl. 36)]. $\frac{r_{ab}}{R_{ab}}$, d. h. das Verhältnis des Widerstandes des Doppelkreises zum Widerstand des vorherigen einfachen Kreises wäre dann also dargestellt als Funktion von k_{ab} und m_a , da ja auch m_b eine Funktion von m_a ist [Gl. 38)]. Der Ausdruck würde aber in allgemeiner Form viel zu kompliziert. Für die 3. Oberwelle und $k_{ab} = \frac{R_{ab}}{L_1 \omega_0} = 0,382$ wurde die Rechnung durchgeführt und $\frac{r_{ab}}{R_{ab}}$ in Funktion von m_a aufgetragen (Abb. 18). Naturgemäß ist für

$$m_a = m_b = m \quad \frac{r_{ab}}{R_{ab}} = 1$$

Mit wachsendem $(m_a - m)$ dagegen steigt der Wert von r_{ab} sehr rasch auf ein Vielfaches von R_{ab} an. Damit ist die gestellte 2. Bedingung erfüllt. Denn es ist jetzt auch

$$r_1 = r_{ab} + R_c > R_{ab} + R_c,$$

und zwar um ein Mehrfaches. Es ist also auch $J_1' < J_1$ und damit $J > 0$ (S. 11 unten).

Für größere k_{ab} wird die $\frac{r_{ab}}{R_{ab}}$ -Kurve in Abb. 18 flacher, für kleinere steiler.

Die Berechnungsgleichungen mögen nochmals zusammengestellt werden:

$$m_a^2 + m_b^2 - 2m^2 = \frac{(m_a^2 - m_b^2)(m^2 - m_b^2)}{4} \cdot \frac{5 - m}{m^2 - 1} \dots \dots \dots 38)$$

$$\left. \begin{aligned} L_a &= L_1 \frac{m_a^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \cdot \frac{(m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)}{m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2} \\ L_b &= L_1 \frac{m_a^2 - m_b^2}{m^2 - m_b^2} \cdot \frac{(m^2 + m + 2)(m^2 - m - 2)}{m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 34a)$$

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{m^2 - m_b^2}{m_a^2 - m^2} \dots \dots \dots 33a)$$

$$\frac{C_a}{C_b} = \frac{m_a^2 - m^2}{m^2 - m_b^2} \cdot \frac{m_b^2}{m_a^2} \dots \dots \dots 33b)$$

$$\frac{R_{ab}}{R_a} = \frac{R_1 - R_c}{R_a} = 1 - 2 \frac{[m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2] (m_a^2 - m^2) (m^2 - m_b^2)}{(m_a^2 - m_b^2)^2 (m^2 + m + 2) (m^2 - m - 2)} \dots \dots 36a)$$

$$r_{ab} = r_1 - R_c = \frac{R_a}{2} \left[1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{R_a^2 m^2} \cdot \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2}{[m_a^2 m_b^2 - (m + 2)^2]^2} \cdot \frac{(m^2 + m + 2)^2 (m^2 - m - 2)^2}{m^2} \right]. \dots 39)$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst: Kreis r' ist durch einen Doppelkreis so ersetzt, daß bei den Frequenzen ω_0 und $(m + 2)\omega_0$ sein Widerstandsoperator mit demjenigen des ersetzten Kreises identisch ist. Für die Frequenz $m\omega_0$ der zu messenden Oberwelle ist der Widerstand ein Mehrfaches desjenigen des ersetzten Kreises, und zwar reiner Werkwiderstand. Letzterer Umstand ist wichtig, denn nun hat das Instrument für die Frequenz m überhaupt nur Werkwiderstand, indem ja Kreis 2 in Resonanz ist und Kreis r'' nur induktionslosen Widerstand enthält. Ob auch für die übrigen Wellen [außer 1. und $(m + 2)$ ter] die Identität so groß ist, daß dieselben keinen Einfluß auf den Ausschlag haben, werden Versuche zeigen. Damit ist ein Instrument geschaffen, das nur auf die betreffende m -te Oberwelle anspricht. Es muß nur noch mit einer Spannung dieser Frequenz geeicht werden, um die Oberwelle direkt in Volt anzuzeigen.

Abb. 19 zeigt den Verlauf von φ_1 bei ungeteiltem (gestrichelte Kurve) und Doppelkreis (ausgezogene Kurve). Je nach dem kleinern oder größern Abstand der Resonanzfrequenzen m_a und m_b von m zeigt die Kurve einen oder drei 0-Punkte.

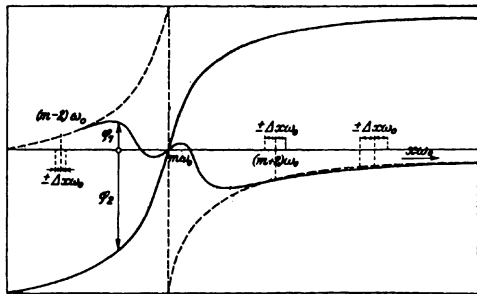


Abb. 19.

Die obige Ableitung der Berechnungsformeln gilt nicht für die Messung der Grundwelle, $m = 1$, da dort naturgemäß für die Frequenz ω_0 keine Übereinstimmung zwischen Doppelkreis und ersetztem Kreis bestehen darf. Damit fallen zwei Bedingungen weg.

Dafür wird die Bedingung gestellt: Der Blindwiderstand soll für $m=1$ zu 0 werden, also nach Gl. 12):

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{1 - m_b^2}{m_a^2 - 1}$$

Ferner kann neben m_a jetzt auch m_b frei gewählt werden. Es bleibt also die Identität mit dem ersetzten Kreis für die $(m+2)$ -te Oberwelle:

$$R_a^2 - \omega_0^2 L_a L_b v_a v_b = (R_1 - R_c) 2 R_c - \omega_0^2 L_1 v (L_a v_a + L_b v_b) \dots 30b)$$

$$(R_1 - R_c - R_a)(L_a v_a + L_b v_b) + 2 R_a L v = 0 \dots 31b)$$

Darin ist für $m=1$:

$$v = \frac{8}{3}, \quad v_a = \frac{9 - m_a^2}{3}, \quad v_b = \frac{9 - m_b^2}{3},$$

und nach einigen Umformungen:

$$(R_1 - R_c - R_a) L_a \frac{m_a^2 - m_b^2}{1 - m_b^2} + 2 R_a L_1 = 0,$$

$$L_a = -L_1 \frac{1 - m_b^2}{m_a^2 - m_b^2} \cdot \frac{2 R_c}{R_1 - R_c - R_a}$$

Aus diesen beiden Formeln würden sich R_a und L_a ergeben. Die Berechnung liefert aber sehr komplizierte Ausdrücke. Deshalb werde gesetzt:

$$R_1 - R_c = \frac{R_a}{2} \dots 40)$$

Beispiele zeigen, daß dadurch L_a um 1 bis 20% falsch wird, was nachher durch die Justierung ausgeglichen werden kann. Dann ist

$$L_a = 4 L_1 \frac{1 - m_b^2}{m_a^2 - m_b^2} \dots 41)$$

$$L_b = 4 L_1 \frac{m_a^2 - 1}{m_a^2 - m_b^2} \dots 42)$$

$$\frac{L_a}{L_b} = \frac{1 - m_b^2}{m_a^2 - 1} \dots 43)$$

$$R_a = 2 (R_1 - R_c) \dots 44)$$

$$r_1 = R_1 \left[1 + \frac{\omega_0^2 L_1^2}{R_a^2} 16 \frac{(1 - m_a^2)^2 (m_b^2 - 1)^2}{(m_a^2 - m_b^2)^2} \right] \dots 45)$$

Oft ist es vorteilhaft, die Windungszahlen der beiden festen Instrumentenspulen entgegen der bisherigen Annahme nicht gleich zu machen. Seien n_1 und n_1'' die betreffenden Windungszahlen. Dann wird der Fall ohne weiteres auf den besprochenen zurückgeführt durch Multiplikation der Größen $L, R, \frac{I}{C}$ (bzw. $R_a, R_c, L_a, L_b, \frac{I}{C_a}, \frac{I}{C_b}$) des Kreises 1 mit dem Faktor $\frac{n_1''}{n_1}$. Durch Vergrößerung von n_1'' ist es z. B. möglich, den Stromverbrauch dieser Spulen gegenüber r'' herunterzudrücken.

Die Berechnung des Ausschlages des Instrumentes für die m -te Oberwelle gestaltet sich sehr einfach, da nur Werkwiderstände auftreten.

Sei

$$\frac{r_1}{R_1} = \varrho_1$$

dann ist in Gl. 20)

$$J_2 = \frac{P}{R_2}$$

$$J_1 = \frac{P}{R_1} - \frac{P}{r_1} = \frac{P}{R_1} \cdot \frac{P-1}{\varrho_1},$$

$$\cos \varphi_{12} = 1;$$

also geht Gl. 20) in die Form über:

$$\alpha = K \frac{P^2}{R_1 R_2} \cdot \frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1} \dots \dots \dots 46)$$

Dabei ist P die zu messende Spannung der m-ten Oberwelle.

2. Messung bei schwankender Frequenz.

Die bisherigen Ausführungen sind richtig unter der Voraussetzung, daß die Frequenz der zu analysierenden Spannung sich nicht ändert. Bei Untersuchungen an Maschinen ist diese Bedingung leicht einzuhalten. In Netzen dagegen werden immer kleinere Abweichungen von der vorgeschriebenen Frequenz stattfinden und die Angaben des Apparates müssen davon unabhängig gemacht werden.

Der Einfluß der Schwankungen kann sich in zwei Richtungen geltend machen, einmal kann eine Beeinflussung des Ausschlages durch fremde Oberwellen stattfinden und dann können im Bereiche der m-ten Oberwelle selbst Fehler auftreten.

Bei den fremden Wellen kommen einmal die (m + 2)-te und die Grundwelle in Betracht. Bei dem flachen Schnitt der beiden φ-Kurven (Abb. 19) darf erwartet werden, daß die Bedingung φ₁₂ = φ₁ - φ₂ = 90° auch bei kleinen Schwankungen um Δxω₀ noch genügend genau erfüllt ist. Für die übrigen fremden Oberwellen ist, wie Abb. 19 zeigt, der Fehler in φ₁₂, der durch Schwanken um Δxω₀ entsteht, kleiner als der durch die Verschiedenheit von Doppelkreis und ersetztem Kreis entstandene. Wird also jener durch die Drosselung unterdrückt, so macht sich auch dieser nicht bemerkbar.

Im Bereich der m-ten Oberwelle soll der Ausschlag α des Instrumentes von der Frequenz im Bereiche der auftretenden Schwankungen unabhängig sein. Dafür ist maßgebend Gl. 20). Darin weisen die Glieder der rechten Seite alle drei ein Maximum für x = m auf (für das Glied cos φ₁₂ allerdings schwach ausgeprägt). Deshalb besitzt α hier ein scharfes Maximum. Schon kleine Frequenzschwankungen würden den Ausschlag stark beeinflussen.

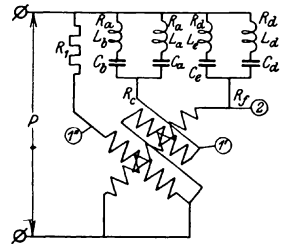


Abb. 20.

Um diese Erscheinung zu vermeiden, wird auch Kreis 2 in einen Doppelkreis zerlegt, mit den Eigenfrequenzen m_d und m_o (Abb. 20). Wieder ist der Instrumentenwiderstand und ein kleiner Betrag für die Justierung vorgeschaltet. Dabei sind diese Eigenfrequenzen aber im Gegensatz zu Kreis 1' nur wenig von m verschieden. Für J₂ entsteht so ein Minimum statt des vorherigen Maximums (Abb. 7 stellt die entsprechenden Scheinwiderstände dar, reziprok J₂). Die günstige Größe von m_d und m_o wird experimentell so ermittelt, daß das Minimum von J₂ die beiden Maxima von J₁ und cos φ₁₂ annähernd aufhebt. Die weitere Dimensionierung des Doppelkreises erfolgt nach den Formeln 33) bis 45), denn die Bedingungen sind wieder dieselben: Identität mit dem zu ersetzenden Kreis für die gefährlichen Frequenzen ω₀ und (m + 2)ω₀. Dagegen muß jetzt $\frac{r_2}{R_2}$ möglichst klein sein, nicht mehr möglichst groß (wie es von $\frac{r_1}{R_1}$ verlangt wurde), da sonst der Strom J₂ zu sehr geschwächt wurde. Abb. 18 zeigt, daß dafür m_s möglichst nahe an m liegen muß. Aus dem gleichen Grunde ist ein großes $k_{d0} = \frac{R_2}{\omega_0 I_2}$ günstiger als ein kleines. r₂ ist wieder der Widerstand des Kreises 2 bei der Meßfrequenz mω₀.

Der Ausschlag α berechnet sich jetzt folgendermaßen: Sei

$$\varrho_2 = \frac{r_2}{R_2}, \dots \dots \dots 47)$$

dann ist für $x = m$

$$J_2 = \frac{P}{R_2 \varrho_2}$$

und aus Gl. 20 ergibt sich

$$\alpha = K \frac{P^2}{R_1 R_2} \frac{\varrho_1 - I}{\varrho_1 \varrho_2} \dots \dots \dots 48)$$

Dabei sind ϱ_1 und ϱ_2 nur von $m_a, m_b, m_c, m_d, k_{ab}$ und k_{da} abhängig.

C. Messung der Stromstärke einer Oberwelle.

Für Stromanalyse wurde der gleiche Apparat verwendet unter Vorschaltung eines Stromwandlers. Letzterer erhielt eine spezielle Wicklung für hohe Sekundärspannung. Da der Widerstand des Apparates fast reiner Werkwiderstand ist, kommt eine Verzerrung der Kurvenform nicht in Betracht. Versuche von Agnew¹⁾ zeigen, daß der Einfluß verschwindend ist.

D. Ableitung einer Methode zur Messung einer Oberwelle in Prozenten der Grundwelle.

Die entwickelte Methode erlaubt die direkte Messung einer Oberwelle in Volt oder Ampere. Es braucht also nur noch durch ein gewöhnliches Volt- resp. Amperemeter die Gesamtspannung (resp. -Strom) gemessen zu werden, um die Oberwelle in Prozenten der Gesamtspannung (-Strom) zu erhalten. Wie die Versuche in Teil II zeigen, ist das Ergebnis richtig. Wird dabei aber dem Instrument und dem parallelen Voltmeter ein großer Widerstand vorgeschaltet, so ist die Spannungskurve an den Klemmen des Instrumentes nicht mehr dieselbe wie die zu untersuchende.

Denn es besteht ja für Kreis 2 des Instrumentes ein Resonanzzustand für die m -te Oberwelle. Für diese ist also der Widerstand des Kreises 2 und damit des ganzen Instrumentes kleiner als für die übrigen Wellen*). Damit ist auch das Verhältnis Vorschaltwiderstand zu Instrumentenwiderstand für die verschiedenen Wellen verschieden, die Spannungsteilung ist eine andere für die zu messende Welle als für alle anderen, die Kurvenform an den Klemmen des Instrumentes ist also verzerrt. Bei Stromanalyse liegen die Verhältnisse ähnlich.

Zur Vermeidung dieses Fehlers wurde die Methode weiter durchgebildet. Es wird jetzt einmal die Grundwelle, dann die gesuchte Oberwelle gemessen. Hat das Instrument bei beiden Messungen denselben Widerstand, so liefert das Verhältnis der beiden den Wert der Oberwelle in Prozenten der Grundwelle, und zwar ist unter dieser Bedingung das Verhältnis Spannung an Instrumentenklemmen zu Spannung an Instrument plus Vorschaltwiderstand beide Male dasselbe.

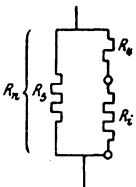


Abb. 21.

Es sind also die gemessenen Werte den Wellen der zu untersuchenden Spannung proportional.

Um zu vermeiden, daß jede Oberwelle eine eigene Skala benötigt, muß verlangt werden, daß bei allen Wellen der Vollausschlag für die gleiche Spannung erfolge.

Diese beiden Forderungen (gleicher Widerstand und gleiche Empfindlichkeit für alle Wellen) führten zu einer Justierschaltung für jede einzelne Welle. Sie besteht aus einem vor- und einem parallelgeschalteten Widerstand (Abb. 21). Für die Berechnung der beiden ergibt sich auf einfache Weise

*) Bei der für die Versuche in Teil II verwendeten Schaltung war das Verhältnis z. B. 3 : 4. Allerdings könnte es bedeutend verbessert werden durch Vergrößerung von R_2 im Verhältnis zu R_1 . Das bedingt aber entweder höhere Spannung oder größeren Stromverbrauch.

$$R_4 = R_1 \left(\frac{P_n}{P_1} - 1 \right), \dots \dots \dots 49)$$

$$R_5 = \frac{R_n}{1 - \frac{R_n P_1}{R_1 P_n}} \dots \dots \dots 50)$$

Dabei ist R_1 der wirkliche Widerstand des Instrumentes für die betreffende Welle, R_n der für alle Wellen verlangte Widerstand, P_1 die Spannung, welche für die betreffende Welle Vollausschlag ergibt, P_n die für Vollausschlag allen Wellen vorgeschriebene Spannung.

Eine gleiche Schaltung wird für die Änderung des Meßbereiches angewandt. Dabei wird vorausgesetzt, daß das Meßinstrument, wie eben ausgeführt, für alle Wellen auf gleichen Widerstand R_n gebracht worden sei. Der Gesamtwiderstand muß derselbe bleiben, der Vollausschlag aber für P_{n1} statt für P_n erfolgen, R_p und R_v (Abb. 22) sind dann für alle Wellen dieselben:

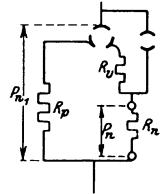


Abb. 22.

$$R_p = R_n \frac{1}{1 - \frac{P_n}{P_{n1}}}, \dots \dots \dots 51)$$

$$R_v = R_n \left[\frac{P_{n1}}{P_n} - 1 \right] \dots \dots \dots 52)$$

Eine Messung wird nun folgendermaßen ausgeführt: Die zur Grundwelle gehörigen Kreise und Widerstände werden eingeschaltet. Ein Vorschaltwiderstand wird so reguliert, daß mit dem Meßbereich für 100% das Instrument 100% anzeigt. Dann wird auf die gesuchte Oberwelle umgeschaltet und ihr Wert direkt in Prozenten der Grundwelle abgelesen.

Für die Stromanalyse wird wieder ein Stromwandler für hohen sekundären Spannungsabfall vorgeschaltet. Der Regulierwiderstand liegt jetzt parallel dazu. Im übrigen bleiben alle Größen dieselben, insbesondere auch die Widerstände für die Meßbereiche und diejenigen für Normalisierung des Instrumentenwiderstandes. Denn R_n ist immer dasselbe, folglich bei gleichem P_n für Vollausschlag auch das zugehörige J.

II. Experimentelle Untersuchungen.

Über eine Reihe von Punkten mußten noch Versuche Aufschluß geben. Vor allem war zu untersuchen, welche Fehler sich aus der praktischen Durchbildung der Theorie ergeben, dann waren Justierung und Eichung vorzunehmen. Ferner war die in Teil I getroffene Annahme zu untersuchen, daß die Drosselung hinreiche, um die aus den Abweichungen in $\cos \varphi_{12}$ von 0 für die fremden Oberwellen entstehenden Fehler zu unterdrücken. Des weitern waren Anhaltspunkte für die Dimensionierung des Instrumentes zu gewinnen (Wahl von $\frac{R}{\omega_0 L}$, m_a , m_b , m_d , m_e). Schließlich wurden noch vergleichende Messungen mit einer bekannten Methode gemacht. Alle Messungen wurden für die 3. und 9. Oberwelle durchgeführt. Die 3. wurde gewählt, weil dort die Grundwelle am gefährlichsten ist, die 9. als ein Vertreter der höheren Oberwellen.

Für die Untersuchungen war die Anwendung von hochfrequentem Wechselstrom notwendig. Dafür standen 2 Hochfrequenzmaschinen zur Verfügung:

- eine Maschine der S. S. W. bis zur Frequenz 500,
- „ „ „ A. E. G. „ „ „ 10000.

Zur bequemen Regelung der Tourenzahl wurden die mit den Maschinen gekuppelten

Gleichstrommotoren von Generatoren in Leonardschaltung angetrieben. Der Frequenzmessung lag ein Zungenfrequenzmesser von Hartmann & Braun für die Frequenzen um 50 Perioden zugrunde. Die Periodenzahl der Hochfrequenzmaschinen wurde auf folgende Weise darauf bezogen: Von den beiden Schleifen eines Oszillographen war die eine an einen Generator gelegt, der vermittelt des Zungenfrequenzmessers auf die Frequenz 50 reguliert wurde, die andere an die Hochfrequenzmaschine. Um die Frequenz $m\omega_0$ zu erhalten, wurde diese reguliert, bis einerseits das Bild im Oszillographen mit Wellen auf eine Grundwelle erkennen ließ, andererseits Stillstehen des Bildes den vollständigen Synchronismus anzeigte. Auf diese Weise wurde ein gleichzeitig angeschlossener Fern-Tourenzeiger — die Maschinen standen nicht im Versuchsraum — geeicht.

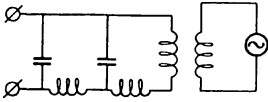


Abb. 23.

Spannungs- und Strommessung der Hochfrequenzströme erfolgte durch Manganin-Konstantan-Thermoelemente in Doppelschaltung nach Schering¹⁶⁾.

In vielen Fällen war ein Strom von reiner Sinusform notwendig. Es wurde dann eine Schaltung von 2 Schwingungskreisen angewendet, wie sie z. B. K. W. Wagner bei seinen Untersuchungen verwendet hat^{20) und 3)} (Abb. 23).

Der Strom von der Frequenz 50 wurde von zwei verketteten Phasen eines Drehstromgenerators geliefert. Hier lagen die Verhältnisse insofern besonders günstig zur Erzielung einer reinen Sinuskurve, als die 3. und 9. Oberwelle darin gar nicht vorkommen¹³⁾.

Die für die Versuche verwendeten Schaltungen besaßen folgende Größen: $\omega_0 = 314,2$.

3. Oberwelle: $m = 3, \quad \frac{R}{\omega_0 L} = 0,68_8.$

$$\left. \begin{array}{l} m_a = 3,5, \quad C_a = 0,8 \mu F, \quad R_a = R_b = 140 \text{ Ohm} \\ m_b = 2,51, \quad C_b = 1,17_6 \mu F, \quad R_c = 36 \text{ Ohm} \end{array} \right\} L_1 = 0,527 \text{ H.}$$

$$R_1'' = 57 \text{ Ohm}, \quad R_s = 37 \text{ Ohm.}$$

$$R_1' = 114 \text{ Ohm}, \quad C = 1,85 \mu F.$$

$$\left. \begin{array}{l} m_d = 3,13, \quad C_d = 0,50 \mu F, \quad R_d = R_e = 220 \text{ Ohm} \\ m_e = 2,87, \quad C_e = 0,57 \mu F, \quad R_f = 106 \text{ Ohm} \end{array} \right\} L_2 = 1,00_3 \text{ H}, \quad R_2 = 217 \text{ Ohm.}$$

9. Oberwelle: $m = 9, \quad \frac{R}{\omega_0 L} = 1,11.$

$$\left. \begin{array}{l} m_a = 9,86, \quad C_a = 0,10 \mu F, \quad R_a = R_b = 196 \text{ Ohm} \\ m_b = 8,14, \quad C_b = 0,133 \mu F, \quad R_c = 60 \text{ Ohm} \end{array} \right\} L_1 = 0,474 \text{ H.}$$

$$R_1'' = 83_6 \text{ Ohm}, \quad R_1' = 167_2 \text{ Ohm.}$$

$$R_s = 37 \text{ Ohm}, \quad C = 1,85 \mu F.$$

$$\left. \begin{array}{l} m_d = 9,45, \quad C_d = 0,10_0 \mu F, \quad R_d = R_e = 218 \text{ Ohm} \\ m_e = 8,55, \quad C_e = 0,11_6 \mu F, \quad R_f = 83_8 \text{ Ohm} \end{array} \right\} L_2 = 0,55_3 \text{ H}, \quad R_2 = 192_8 \text{ Ohm.}$$

A. Teiluntersuchungen.

1. Vom Wattmeter verursachte Fehler und ihre Behebung.

Die Berechnung ergab, daß das Dynamometer, wenn der gesamte Stromverbrauch auf ungefähr 0,3 Ampere festgesetzt wurde, eine viel größere Empfindlichkeit als die bisher gebräuchlichen direkt zeigenden Imstrumente aufweisen mußte. Deshalb wurde Fadenaufhängung gewählt und Eisen verwendet. Für den Eisenkörper wurde ein listenmäßiger Fabrikationsteil von Siemens & Halske genommen, wie er für selbstregistrierende Meßinstrumente verwendet wird. Er besteht aus geblättertem Eisen und

besitzt kreisrunde Bohrung und einen ebensolchen Eisenkern. Die Wicklungen wurden auf Schablonen hergestellt und in Nuten eingepreßt (Abb. 24). Die Stromzuführung erfolgte durch Aufhängefäden und eine Stromzuführungsfeder. Beide bestanden aus Phosphorbronze. Die Feder war in üblicher Weise halb rechts-, halb linksgängig gewickelt, um den Temperatureinfluß zu vermindern. Die Skala umfaßte einen rechten Winkel und war vorerst in 150 gleiche Teile geteilt. Der Kopf war als Torsionskopf ausgebildet, so daß die Ruhelage des Zeigers über die ganze Skala verschoben werden konnte. Eine Luftdämpfung, bestehend aus einem Zylinder in Form eines Kreissektors und einem Aluminiumkolben mit regulierbarer Öffnung für Luftaustritt, ermöglichte aperiodische Einstellung des Zeigers. Es war:

Windungszahl der festen Spule	I'	$n_1' = 130$
„ „ „ „	I''	$n_1'' = 65$
„ „ „ „	2	$n_2 = 240$
Widerstand der festen Spule	I'	$= 9,50 \text{ Ohm}$
„ „ „ „	I''	$= 0,707 \text{ „}$
„ „ „ „	2	$= 72,3 \text{ „}$
„ „ „ „		mit Zuführungen
Selbstinduktion der festen Spule	I'	$= 0,0048 \text{ H}$
„ „ „ „	I''	$= 0,0012 \text{ H}$
„ „ „ „	2	$= 0,0133 \text{ H}$

für $\alpha = 150^\circ$ $J_1 \cdot J_2 = 85,5 \cdot 10^{-6}$ Ampere, wobei J_1 der durch die feste Spule I'' fließende Strom ist. Den Aufbau des Instrumentes zeigt Abb. 24, und zwar von der Zeigerseite her gesehen. Der magnetische Kreis wird vom Körper a und dem Kern f gebildet; beide bestehen aus geblätterm Eisen. Eingepreßt in den Eisenkörper sind die Spulen b. Das ganze System ist an den Laschen c im Gehäuse festgeschraubt. Ein Bügel d (zur Vermeidung von Wirbelstromverlusten aus Widerstandsmaterial hergestellt), trägt einerseits den Eisenkern, andererseits isoliert (h) das Rohr i, welches den Torsionskopf k mit 3 Fixierschrauben hält. Ein Arm des Bügels trägt eine Libelle e, die mit 3 Stellschrauben justiert wird. Am Torsionskopf ist mit einem Faden m aus Phosphorbronze die bewegliche Spule p aufgehängt. Der Faden dient zugleich als Stromzuführung, die zweite wird von der Feder h übernommen. Zentriert wird die Spule mit den erwähnten Fixierschrauben am Torsionskopf. Die Spule trägt auf der einen Seite Balanciergewichte r, auf der andern an dem Drahte q den Dämpferkolben (nicht abgebildet). q ist der Gewichtsparnis wegen als Röhrrchen ausgebildet. Das System ist so konstruiert, daß es als Ganzes abmontiert werden kann, ebenso das bewegliche System für sich.

Äußerlich gleicht das Instrument einem Wattmeter normaler Konstruktion. Es unterscheidet sich davon nur durch einen kamin-

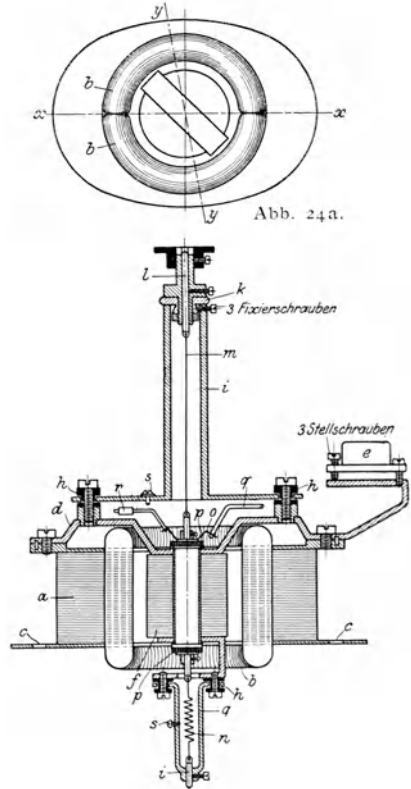


Abb. 24.

artigen Aufbau für den Torsionskopf und durch 3 Stellschrauben an der Grundplatte für Einstellung der horizontalen Lage.

a) Fehler aus elektrostatischer Ursache. Wenn an die bewegliche Spule einerseits und eine feste Spule andererseits eine Spannung gelegt wurde, entstand ein kleiner Ausschlag. Er mußte von der elektrostatischen Anziehung zwischen fester und beweglicher Spule herrühren. Nachdem ein Punkt der festen Spule mit dem Eisenkörper verbunden worden, die bewegliche Spule also von einem konzentrischen Zylinder gleichen Potentials umgeben war, verschwand die Erscheinung.

b) Das Eisen als Fehlerquelle. Wurde durch die bewegliche Spule allein ein Strom geschickt, so zeigte sich ein Ausschlag. Die bewegliche Spule hat nämlich das Bestreben, sich so einzustellen, daß ihr magnetisches Feld den kleinsten Widerstand findet. Infolge der Nutung ist das für die Stellung senkrecht zur langen Achse $x-x$ der Fall (Abb. 24 a). Auf die Spule wirkt also immer ein Drehmoment, das sie in diese Stellungen bringen will und so einen Fehlerausschlag erzeugt. Die Abhängigkeit von der Stromstärke und von der Stellung der beweglichen Spule wurde durch Versuche ermittelt. Der Fehlerwinkel α_f ergibt sich dabei ungefähr proportional dem Quadrate der Stromstärke (Abb. 25. Sie ist für den Fall $\alpha = 0$ aufgenommen, wo die

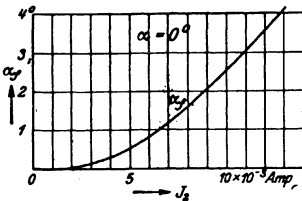


Abb. 25.

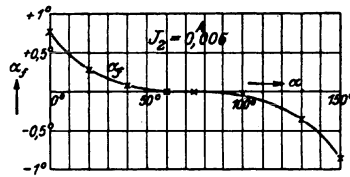


Abb. 26.

Fehlerwinkel am größten sind). In einer zweiten Versuchsreihe wurde jeweils in stromlosem Zustande der betreffende Ausschlag eingestellt, der Stromkreis mit $6 \cdot 10^{-8}$ Amp. geschlossen und der Fehlerausschlag α_f abgelesen, die Ergebnisse sind in Abb. 26 dargestellt.

Bei der Verwendung des Instrumentes zur Kurvenanalyse fließt durch die bewegliche Spule der Strom der m -ten Oberwelle und derjenige Teil der Ströme der übrigen Wellen, der nicht durch die Drosselung unterdrückt wird. Am gefährlichsten sind wieder Grundwelle und $(m+2)$ -te Oberwelle. Die letztere hat bei Anwendung der Versuchsschaltung für die 3. Oberwelle (S. 22) in dem ungünstigen Falle, wo sie 15% der Grundwelle mißt, einen Wert von $2 \cdot 10^{-8}$ Ampere, nach Abb. 25 also keinen Einfluß. Die übrigen Oberwellen werden stärker gedrosselt, fallen also erst recht nicht in Betracht.

Dagegen ist von der Grundwelle noch eine Stromstärke von $6 \cdot 10^{-8}$ Ampere übrig und diese ergibt Fehler bis zu $0,8^\circ$ (Abb. 26). Aus diesem Grunde wurde die 0-Lage des Instrumentes um 50° gedreht (gleich 30 geometrische Grade, Achse $y-y$, Abb. 24 a). Dort ist der Fehler kleiner als $0,1^\circ$ (Abb. 26). Bei Vollausschlag ist er allerdings wieder $0,8^\circ$. Da aber dort der Meßwert selbst groß ist und außerdem die Eichkurve des Instrumentes quadratisch verläuft, resultiert daraus ein relativ

kleiner Fehler. Er entspricht $0,4\%$ des Meßwertes. Wird er als zu groß erachtet, so kann er durch nebenstehende Korrekturtabelle eliminiert werden:

Zahlentafel 2.

α Grad	Korrektur Grad
0	0
20	0
40	0
60	+ 0,2
80	+ 0,3
90	+ 0,5
100	+ 0,8

Der Strom der m-ten Oberwelle dagegen hat keinen Fehler zur Folge, da für ihn dieselbe Erscheinung bei der Eichung auftritt: Der Fehler wird hineingezeichnet.

Derselbe Einfluß des Eisens verhindert auch den Einbau eines ovalen Eisenkerns, wie er zuerst versucht wurde, um eine lineare Eichkurve zu erhalten.

Andere Störungen, die auf die Verwendung von Eisen zurückzuführen wären, wurden nicht festgestellt.

c) Einfluß der Selbstinduktion von fester Spule I und beweglicher Spule. Die Selbstinduktionen beider Spulen wirken gleich wie die übrigen Induktivitäten des betreffenden Schwingungskreises und können zu ihnen addiert werden. Genau stimmt dies für unverzweigte Kreise nach Abb. 9. Bei Verwendung von Doppelkreisen (Abb. 20) werden die Induktivitäten mit ihrem doppelten Wert den einzelnen Teilkreisen zugezählt. Bei der Kleinheit dieser Selbstinduktionen im Verhältnis zu denjenigen der Spulen L_a , L_b , L_d , L_o ist der dadurch entstehende Fehler zu vernachlässigen.

d) Kompensierung der Selbstinduktion der Instrumentenspule i'' . Bei Aufstellung der Gleichungen in Teil I wurde angenommen, daß Kreis i'' vollständig induktionsfrei sei. Für den vorgeschalteten Widerstand trifft dies zu, nicht aber für die Spule des Instruments. Es würde dadurch der Strom J_1'' mit wachsender Frequenz immer mehr gegen die Spannung an den Klemmen verschoben. Mit ihm der Gesamtstrom J_1 der festen Spulen. Dann würde die φ_1 -Kurve nicht mehr asymptotisch zur Abszissenachse verlaufen. Versuche zeigten, daß trotz Drosselung infolge dieser Erscheinung die höhern Oberwellen einen so starken Einfluß auf den Ausschlag erhielten, daß eine Messung dadurch unmöglich wurde. Übrigens läßt sich dies auch leicht durch Rechnung feststellen.

Es wurden deshalb verschiedene Wege versucht, die Selbstinduktion zu kompensieren. Den Forderungen entsprach schließlich eine Anordnung, die aus einem vorgeschalteten Schwingungskreis mit sehr hoher Eigenschwingung parallel zu einem induktionslosen Widerstand bestand. Abb. 27 zeigt das Schema.

Da diese Schaltung vielleicht von allgemeinerem Interesse ist, möge hier näher auf ihre Theorie eingegangen werden.

Seien C und L_o Kapazität und Induktivität des Schwingungskreises, $\omega_0 m_c$ seine Eigenfrequenz, R_c sein Widerstand, R_s der zum Schwingungskreis parallel geschaltete induktionsfreie Widerstand. L_t ist die zu kompensierende Induktion der Dynamometer-spule, R ihr Widerstand, zu dem auch etwaige andere vorgeschaltete Widerstände gerechnet werden mögen. Seine Größe wird zwar nur für den verbleibenden Fehlerwinkel eine Rolle spielen. Ströme und Spannungen tragen die entsprechenden Indexe. Dann ist (Abb. 27) [Gl. 6a):

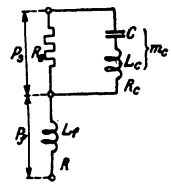


Abb. 27.

$$\mathfrak{S}_s = \frac{P_s}{R_s}, \quad \mathfrak{S}_o = \mathfrak{P}_s \frac{I}{R_c + \frac{I}{j\omega_0 x C} \cdot \frac{m_c^2 - x^2}{m_c^3}}$$

Daraus nach einigen Umformungen, wenn J der Gesamtstrom ist,

$$\mathfrak{P}_s = \mathfrak{S} \frac{R_s \left[I + jx\omega_0 C R_c \frac{m_c^2}{m_c^2 - x^2} \right]}{I + j(R_s + R_c)x\omega_0 C \frac{m_c^2}{m_c^2 - x^2}}$$

Weiter ist $\mathfrak{P}_t = \mathfrak{S}(R + jx\omega_0 L_t)$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_s + \mathfrak{P}_t &= \mathfrak{P} \\ &= \mathfrak{J} \frac{R_s + x^2 \omega_0^2 C^2 R_s R_c (R_s + R_c) \cdot \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2} + jx \omega_0 L_t + R - jx \omega_0 C R_s^2 \cdot \frac{m_c^2}{m_c^2 - x^2}}{1 + (R_s + R_c)^2 x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2} R + jL_t (R_s + R_c)^2 \omega_0^2 x^8 C^2 \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2}} \\ &\quad + \frac{1 + (R_s + R_c)^2 x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2}}{1 + (R_s + R_c)^2 x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2}}. \end{aligned}$$

Daraus:

$$\text{tg } \varphi = x \omega_0 \frac{L_t + (R_s + R_c)^2 x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2} L_t - C R_s^2 \frac{m_c^2}{m_c^2 - x^2}}{R + R_s + (R_s + R_c) x^2 \omega_0^2 C^2 \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2} [R_s R_c + R R_s + R R_c]} \quad . . . \quad 53)$$

Es soll tg φ klein werden, damit also der Zähler klein. Der Nenner wächst mit x, wirkt also im günstigen Sinne. Die Größe der Veränderung fällt aber gewöhnlich nicht in Betracht.

$$\text{Zähler} = x \omega_0 \left[L_t + (R_s + R_c)^2 x^2 \omega_0^2 C^2 L_t \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{m_c^2}\right)^2} - C R_s^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{m_c^2}\right)} \right].$$

Dabei sei m_c höher als das m der höchsten in Betracht fallenden Oberwelle. Dann ist Entwicklung in eine konvergente Reihe möglich:

$$\begin{aligned} \text{Zähler} &= x \omega_0 \left\{ L_t + x^2 \omega_0^2 C^2 L_t (R_s + R_c)^2 \left[1 + 2 \frac{x^2}{m_c^2} + 3 \frac{x^4}{m_c^4} + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. - C R_s^2 \left[1 + \frac{x^2}{m_c^2} + \frac{x^4}{m_c^4} + \frac{x^6}{m_c^6} + \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zähler} &= x \omega_0 [L_t - R_s^2 C] + x^3 \omega_0^3 [L_t (R_s + R_c)^2 - L_c R_s^2] C^2 \\ &\quad + x^5 \frac{\omega_0^3}{m_c^2} [2 L_t (R_s + R_c)^2 - L_c R_s^2] C^2 + x^7 \frac{\omega_0^3}{m_c^4} [3 L_t (R_s + R_c)^2 - L_c R_s^2]. \quad . . . \quad 54) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird für x < m_c klein, wenn einerseits das 1. Glied

$$L_t - R_s^2 C = 0, \quad \quad 55)$$

andererseits das 2. Glied zu 0 wird

$$\omega_0^2 C L_t (R_s + R_c)^2 = R_s^2 \frac{1}{m_c^2} = 0.$$

Daraus

$$m_c^2 = \frac{1}{\omega_0^2 L_t C \left(1 + \frac{R_c}{R_s}\right)^2}$$

oder

$$L_c = \frac{1}{C m_c^2 \omega_0^2} = L_t \left(1 + \frac{R_c}{R_s}\right)^2. \quad \quad 56)$$

Die Dimensionierung der Kompensierung erfolgt an Hand dieser beiden Formeln (55 und 56). R_c/R_s wird klein gewählt, dann ist L_c ähnlich L_t. Sodann wählt man m_c größer als die in Betracht kommenden Oberwellen (ca. 50). Dadurch ist m_c bestimmt und daraus nach Gl. 55) R_s. Wie man sieht, ist die Kompensierung vom Widerstand R der zu kompensierenden Spule vollständig unabhängig.

Es soll der noch verbleibende Phasenwinkel einer so kompensierten Selbstinduktion berechnet werden. In der konvergenten Reihe Gl. 54) werde noch das 3. Glied berücksichtigt.

Dann ist

$$\text{Zähler} = \omega_0^3 \frac{x^5}{m_c^2} [2L_f(R_s + R_c)^2 - L_c R_s^2]$$

oder unter Einsetzen von Formel 56

$$\text{Zähler} = x^5 \omega_0^5 L_c^2 C^3 R_s^2.$$

Eingesetzt in Gl. 53) erhält man für den Fehlerwinkel

$$\text{tg } \varphi_f = \varphi_f = x^5 \frac{\omega_0^5 L_c^2 C^3 R_s^2}{R + R_s + (R_s + R_c)x^2 \omega_0^2 C^2 \cdot \frac{m_c^4}{(m_c^2 - x^2)^2} [R_s R_c + R R_s + R R_c]} \dots 57)$$

oder, wenn das 2. Glied im Nenner vernachlässigt werden kann,

$$\text{tg } \varphi_f = x^5 \cdot \frac{\omega_0^5 L_c^2 C^3 R_s^2}{R + R_s} \dots \dots \dots 57a)$$

Ein Beispiel werde gerechnet für

$$L_f = 0,002 \text{ H}, \quad R = 50 \text{ Ohm}, \quad R_s = 31,6 \text{ Ohm}, \quad C = 2,0 \mu\text{F}.$$

Dann wird nach Gl. 57a)

$$\varphi_f = 12 \cdot 10^{-10} x^5.$$

Ohne Kompensierung wäre

$$\varphi_f = 0,628 x,$$

also noch für $x = 10$ 52000 mal größer als mit Kompensierung.

e) Kompensierung der Gegeninduktion zwischen beweglichen und festen Spulen. Vermittelt dieser Gegeninduktion die fremden Wellen die Angaben des Instrumentes in hohem Maße. Ihre Wirkung wurde durch eine regulierbare Gegeninduktivität aufgehoben. Sie bestand aus einem System von einer drehbaren und zwei festen Spulen mit Eisenkörper und Eisenkern, dessen Bau und Windungszahlen mit denjenigen des Dynamometers identisch waren. Die festen Spulen des Dynamometers wurden mit den entsprechenden festen der regulierbaren Gegeninduktivität in Reihe geschaltet, ebenso die bewegliche Spule mit der drehbaren, aber in entgegengesetztem Sinn. Um die zu einem bestimmten Dynamometerausschlag α gehörige Stellung der Gegeninduktivität zu finden, wurde folgenderweise verfahren: Die beiden Apparate wurden geschaltet, wie eben dargelegt. Durch zwei entsprechende feste Spulen wurde ein Wechselstrom geschickt und die beiden beweglichen Spulen über ein Vibrationsgalvanometer kurzgeschlossen. Mit dem Torsionskopf des Wattmeters wurde dann α eingestellt und hierauf die regulierbare Gegeninduktivität so lange gedreht, bis der Galvanometerausschlag verschwand. Dann waren die in den beweglichen Spulen induzierten elektromotorischen Kräfte einander gleich und damit auch die Gegeninduktionen. Die zu den verschiedenen α gehörenden Stellungen wurden auf einer Skala markiert.

Es ist nun vor jeder Ablesung am Dynamometer die regulierbare Gegeninduktivität auf die entsprechende Zahl einzustellen.

Natürlich muß die Selbstinduktion der zum Zweig I'' gehörenden Spule auch kompensiert werden, sie wird zu L_f (Abschnitt IIA 1d) zugezählt.

f) Einfluß der Gegeninduktion zwischen den beiden festen Spulen des Wattmeters. Die Gegeninduktivität zwischen den beiden festen Spulen wurde zuerst nach demselben Prinzip wie diejenige zwischen beweglicher und festen Spulen (IIA 1e) kompensiert.

Der Ausschlag des Dynamometers für alle fremden Wellen blieb aber 0 mit oder ohne Kompensierung. Daraus wurde geschlossen, daß ein Einfluß dieser Gegeninduktion nicht merklich ist, die Kompensierung wurde wieder entfernt.

2. Justierung.

a) Einstellung des Zweiges I'' auf Induktionslosigkeit. Diese Justierung ist zuerst durchzuführen, da die anderen einen induktionslosen Zweig I'' voraussetzen. Dazu wird die gewöhnliche Wheatstonesche Brücke benutzt, drei Zweige von induktionslosen Widerständen, der vierte von Dynamometerspule I'' samt Kompensationschaltung gebildet. Als Brückeninstrument dient ein Telephon oder Vibrationsgalvanometer.

Dann wird bei einer niedrigen Frequenz (gewöhnlich wurde $x = 1$ genommen) R_s auf Stromlosigkeit im Telephon reguliert. Bei niedriger Periodenzahl sind nämlich in Gl. 54) bei der starken Konvergenz der Reihe die Glieder mit x^8 , x^5 usw. ohne Einfluß. Es wird auf diese Weise also Bedingung 55) erfüllt.

Andererseits kommt die Größe L_c der Kompensierungsinduktivität nur bei diesen höheren Potenzen von x zur Geltung, also bei hohen Frequenzen. Deshalb wurde bei einer hohen Frequenz die Abgleichung von L_c vorgenommen. Und zwar wurde, abweichend von der in II A 1 d entwickelten Theorie, L_c auf Stromlosigkeit in der Brücke reguliert. Statt der Kurve nach Gl. 57 a) erhält man jetzt also eine Kurve, welche die Abszissenachse bei der betreffenden hohen Frequenz, mit der die Abgleichung vorgenommen, schneidet.

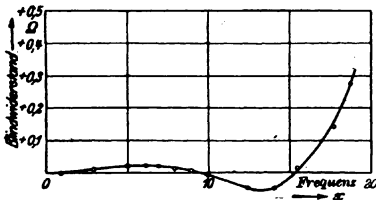


Abb. 28.

Der Verlauf des Blindwiderstandes (proportional $\text{tg } \varphi$) für ein so kompensiertes Dynamometer wurde in einer Wechselstrombrücke nachgemessen. Den Verlauf stellt Abb. 28 dar. Mathematisch kann der Verlauf dieser Kurve wohl so begründet werden, daß in der Reihe der Gl. 54) das x -Glieder statt 0 klein und positiv ist, das Glied mit x^8 dagegen negativ anstatt 0, die höheren Glieder positiv. Dann ist die Einbuchtung von der 10. bis zur 15. Oberwelle auf das x^8 -Glieder zurückzuführen.

Für den Apparat wurde die Abgleichung von L_c bei $25 \omega_0$ durchgeführt. Störungen durch die Selbstinduktion traten dann nicht mehr auf. Die verwendete Drosselspule besaß einen Eisenkreis mit Luftspalt.

b) Einstellung der Induktivitäten, Kapazitäten und Widerstände. Zuerst wurden die Kapazitäten auf die berechneten Werte eingestellt. Für die Abgleichung der Induktivitäten erwies sich die Einstellung auf Resonanz als genügend. Dafür wurde das Dynamometer benützt. Z. B. soll der Kreis d auf Resonanz bei der Frequenz $m_d \omega_0$ eingestellt werden. Dann werden alle Kreise unterbrochen, ausgenommen die Kreise I'' und d (Abb. 29). Die Selbstinduktion von I'' ist bereits kompensiert worden. Nun wird das Instrument mit Wechselstrom von der Frequenz $m_d \omega_0$ beschickt und L_d so lange verändert, bis der Ausschlag des Dynamometers ein Maximum ist.

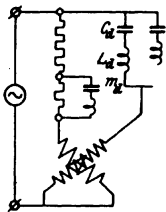


Abb. 29.

Natürlich könnte auch zuerst die Induktivität abgeglichen und dann die Kapazität auf Resonanz eingestellt werden.

Eine kleine Ungenauigkeit tritt in beiden Fällen auf, indem die Selbstinduktion der beweglichen Instrumentenspule nur mit einem einzigen Kreise in Reihe ist, anstatt — wie bei normalem Aufbau — mit dem Doppelkreis. Bei der Kleinheit dieser Selbstinduktion im Verhältnis zu derjenigen des ganzen Kreises verschwindet aber der Fehler.

Auf gleiche Weise werden die Kreise a und b abgestimmt, nur wird hier Zweig I'' unterbrochen und vor die bewegliche Spule anstatt des Schwingungskreises ein induktionsloser Widerstand geschaltet. Dabei wirkte die Selbstinduktion der beweglichen Spule noch

bei $m_n \sim 9$ nicht störend. Es ist aber denkbar, daß sie — nur während dieser Justierung! — bei höheren Frequenzen kompensiert werden müßte, auf dieselbe Weise wie x'' .

Nachdem die einzelnen Kreise reguliert waren, wurden sie zusammengebaut (Abb. 20) und die Widerstände auf die berechneten Werte roh abgeglichen. Hierauf wurde der Apparat abwechselnd mit den Frequenzen ω_0 und $(m+2)\cdot\omega_0$ beschickt, entsprechend den gefährlichsten Wellen. Bei der Frequenz ω_0 wurde dann R_t , bei $(m+2)\omega_0$ die Induktivität L_n so lange abgeändert, bis für beide der Ausschlag 0 war. Von der Induktivität ist nämlich der Ausschlag bei Frequenzen unter $m\omega_0$ wenig abhängig, für Frequenzen über $m\omega_0$ dagegen sehr.

c) Justierung von Instrumentenwiderstand und Vollausschlag. Auf Seite 20 wurde für das Instrument ein bestimmter Widerstand und Vollausschlag bei bestimmter Spannung gefordert. Bei der Einregelung entsprechend den beiden Forderungen kommt uns der Umstand zugut, daß das Instrument für die Frequenz $m\omega_0$ reinen Werkwiderstand besitzt. Es kann deshalb mit der Wheatstoneschen Brücke gearbeitet werden (Abb. 30). Der Wechselstrom wird dabei genau auf der Frequenz $m\omega_0$ gehalten.

R_3 wird gleich R_n gemacht, R_1 gleich R_2 . In Zweig 3 liegt ein induktionsfreier, von der Frequenz unabhängiger Strommesser (Thermoelement in Doppelschaltung)¹⁶⁾. Damit wird der Strom auf dem, der verlangten Spannung für Vollausschlag entsprechenden Wert gehalten: P_n/R_n . Die Justierwiderstände R_4 und R_6 des Instrumentes für die betreffende Oberwelle werden dann abwechselnd reguliert, bis einerseits Stromlosigkeit in der Brücke, andererseits Vollausschlag des Analysators eintritt*). Wesentlich ist, daß reiner Sinusstrom verwendet, also eine Schaltung nach Seite 22, Abb. 23 benutzt wird; denn der Strommesser mißt den Effektivwert des Eichstromes, der Analysator naturgemäß nur seine Grundwelle (die eine Oberwelle von ω_0 ist). Sehr streng braucht diese Forderung aber nicht erfüllt zu werden, da der Effektivwert der Wuzel aus den Quadraten proportional ist [Gl. 4)]. Eine 2%ige Oberwelle des Eichstromes würde z. B. den Effektivwert nur um 0,04% verändern.

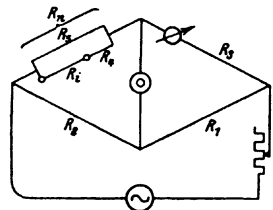


Abb. 30.

d) Justierung der Schaltung für Änderung des Meßbereichs. Die Widerstände R_v und R_p werden nach Gl. 51) und 52) berechnet und einzeln auf diese Werte einreguliert.

3. Eichkurve.

Die Eichung für Vollausschlag wurde in IIA 2c besprochen. Zu untersuchen ist noch der Verlauf der Eichkurve. Vergleichende Messungen mit einem Spannungsmesser [Thermoelemente in Doppelschaltung¹⁶⁾] unter Verwendung von reinem Sinusstrom ergaben rein quadratischen Verlauf der Eichkurve:

Zahlentafel 3.

Grad	Volt	% der Grundwelle	Grad	Volt	% der Grundwelle
1	0,15	1,0	60	1,18	7,75
10	0,48	3,16	70	1,27	8,37
20	0,68	4,47	80	1,36	8,95
30	0,83	5,47	90	1,44	9,49
40	0,96	6,32	100	1,51	10,0
50	1,07	7,07			

*) Die Stromstärke für Vollausschlag des Analysators in Schaltung nach S. 22 war 0,038 Amperes, die Spannung 1,51 Volt.

4. Einfluß fremder Wellen auf die Messung.

Der Beeinflussung des Ausschlages durch eine fremde x-te Welle liegt wieder die Dynamometergleichung 20) zugrunde. Sie lautet dann:

$$\alpha_t = J_{1x} \cdot J_{2x} \cos \varphi_{12x} \cdot K. \dots \dots \dots 58)$$

Eine Beeinflussung findet statt, wenn $\cos \varphi_{12x}$ von 0 verschieden ist. Sie wird herabgesetzt durch die Drosselung von J_{2x} .

In Gl. 58) sollen die Werte eingesetzt werden. Für J_{1x} braucht zur Berechnung seiner Größe (nicht etwa der Phasenverschiebung!) nur sein Teil J_1'' [Gl. 21)] berücksichtigt zu werden, da im anderen Zweig r' im Bereich der fremden Wellen — nur dieser kommt ja hier in Betracht — starke Drosselung vorhanden. Es ist dann

$$J_{1x} = \frac{P_x}{R_1},$$

wenn P_x die Spannung der betreffenden fremden Welle ist. Für J_{2x} ergibt Gl. 7b)

$$J_{2x} = \frac{P_x}{\omega_0 L_2} \cdot \frac{x}{(x^2 - m^2)}.$$

Dann ist [Gl. 58)]

$$\alpha_t = K \frac{P_x^2}{\omega_0 L_2 R_1} \cdot \frac{x}{x^2 - m^2} \cos \varphi_{12x}.$$

Von Bedeutung ist aber weniger der Wert von α_t selbst, als vielmehr sein Verhältnis zum Ausschlag α für die zu messende m-te Oberwelle. Hat diese die Spannung P, so ist der entsprechende Ausschlag [Gl. 48)]

$$\alpha = K \frac{P^2}{R_1 R_2} \cdot \frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1 \varrho_2}.$$

Also ist

$$\frac{\alpha_t}{\alpha} = \frac{P_x^2}{P^2} \frac{R_2}{\omega_0 L_2} \cdot \frac{x}{x^2 - m^2} \cdot \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2}{\varrho_1 - 1} \cos \varphi_{12x} \dots \dots \dots 59)$$

Wesentlich ist, daß K herausfällt: α_t/α ist von der Empfindlichkeit des Wattmeters unabhängig.

Wir sahen in Teil I, daß Doppelkreis und ersetzter Kreis in bezug auf den Phasenwinkel für die fremden Oberwellen kleine Unterschiede aufweisen. Daraus ergibt sich [Gl. 59)] ein Fehlerausschlag α_t , denn es ist dann für diese Oberwelle $\cos \varphi_{12}$ nicht genau gleich 0. Die Frage war offen gelassen, ob der Einfluß der Drosselung stark genug sei, um einen solchen Ausschlag zu unterdrücken. Die folgenden Versuche sollen darüber Aufschluß geben.

Alle von fremden Wellen herrührenden Fehlerausschläge α_t fälschen das Meßergebnis um so mehr, je kleiner der Wert der zu messenden m-ten Oberwelle ist. Denn α_t ist nur von der betreffenden fremden Oberwelle abhängig, also für jede Zeigerstellung des Instrumentes gleich groß. Daher macht sich z. B. ein Fehler von $\alpha_t = 1^\circ$ stärker bemerkbar, wenn $\alpha = 2^\circ$ ist, als wenn $\alpha = 100^\circ$ beträgt. Noch weiter verstärkt wird diese Erscheinung durch den quadratischen Verlauf der Eichkurve. Bei der Eichkurve Tafel 3, S. 29 z. B. fälscht ein Fehlerausschlag $\alpha_t = 1^\circ$ bei $\alpha = 1^\circ$ das Ergebnis um 1% der Grundwelle oder um 100% seines eigenen Wertes, bei $\alpha = 100^\circ$ dagegen um $0,05\%$ der Grundwelle oder um $0,5\%$ seines eigenen Wertes.

Der Gang der Versuche war der folgende: Das Instrument war für Messung der mten Oberwelle geschaltet. Dann ließ man der Reihe nach eine 100% ige Grundwelle und alle Oberwellen von einer Spannung gleich 15% der Grundwelle darauf einwirken. 15% wurden gewählt, weil höhere Werte für Oberwellen praktisch nur ausnahmsweise vorkommen dürften. Wie alle Versuche, wurden auch diese für die

3. und die 9. Oberwelle durchgeführt. Bei Schaltung für die 3. Oberwelle wirkten also nacheinander die 1., 5., 7., 9. Oberwelle auf das Instrument ein, bei Schaltung für die 9. Oberwelle die 1. bis 7., 11. bis 19. Es war R/L gleich 216, bzw. 347. Ein Ausschlag ließ sich nirgends feststellen, die Drosselung war also genügend. Dabei wurden die fremden Wellen von der Hochfrequenzmaschine erzeugt.

Da der Fehlerausschlag α_f dem Quadrate der betreffenden Oberwelle proportional ist, tritt für Werte der Oberwelle kleiner als 15% eine Einwirkung erst recht nicht ein.

5. Fehler infolge Änderung der Widerstände mit der Temperatur.

Die Versuche des vorigen Abschnittes bezogen sich auf den Einfluß der fremden Wellen, wenn die Widerstände des Instrumentes die einregulierte Größe besitzen. Nun müssen aber die Induktivitäten der verschiedenen Kreise aus Kupfer hergestellt werden, da sonst ihr Gewicht zu groß sein würde. Da Kupfer einen Temperaturkoeffizienten des Widerstandes von 0,41% pro 1° C besitzt und Schwankungen der Raumtemperatur von $\pm 10\%$ zu berücksichtigen sind, treten Änderungen der Widerstände von $\pm 4\%$ ihres Wertes auf.

Dadurch kann einmal die Bedingung gestört werden, daß die Widerstände der Kreise I' und I'' gleich sein müssen (S. 10). Versuche zeigten aber, daß R_a, R_b, R_c um 10% ihres Wertes bei der 3. Oberwelle (R/L war 216) und um 4% bei der 9. Oberwelle (R/L war 347) geändert werden dürften, ohne daß sich ein Ausschlag feststellen ließ. Die Werte der fremden Wellen waren dabei wieder 15% der Grundwelle, bzw. 100% für die Grundwelle selbst. Auf die Widerstände des Kreises I' braucht also keine Rücksicht genommen zu werden, um so mehr, als, wie wir nachher sehen werden, auch Zweig I'' zum großen Teil aus Kupfer hergestellt wird, also die gleiche Abhängigkeit von der Temperatur hat wie Kreis 1.

Von großem Einfluß war dagegen die Änderung des Widerstandes von I'' . Einmal zeigten die Versuche, daß unter allen Umständen der zum Kompensierungsschwingungskreis parallele Widerstand R_3 konstant gehalten werden mußte (Abb. 27). Des weitern handelte es sich um die Nichterfüllung der Bedingung 24 a): $R_1/L_1 = R_2/L_2$. Ihr Einfluß möge vorerst theoretisch untersucht werden. Dabei soll im Gebiet der fremden Wellen mit den identischen ungeteilten Kreisen gerechnet werden, während für die m -te Oberwelle die Teilung durch ϱ_1 und ϱ_2 berücksichtigt wird. Maßgebend dafür ist wieder die Gleichung für Einfluß der fremden Wellen [Gl. 59]. Zu bestimmen ist darin noch das Glied $\cos \varphi_{12x} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. Es ist nach Gl. 23)

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{R_1}{\omega_0 L_1 \frac{x^2 - m^2}{x}}$$

und nach Gl. 24)

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega_0 L_2 \cdot x^2 - m^2}{R_2 \cdot x}$$

Danach ist

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) &= \frac{\cos \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1)(1 + \cos^2 \varphi_2)}} \\ &= \left[-\frac{R_2}{L_2} + \frac{R_1}{L_1} \right] \frac{x}{x^2 - m^2} \cdot \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_1^2}{\omega_0^2 L_1^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 - m^2}} \sqrt{1 + \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 - m^2}}} \end{aligned}$$

Für alle fremden Wellen sind die 2. Glieder in den Wurzeln klein gegen 1. Eine Reihenentwicklung ist also zulässig:

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{R_1}{L_1} - \frac{R_2}{L_2} \right] \frac{x}{x^2 - m^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{x^2 - m^2} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} \left[\frac{R_1^2}{L_1^2} + \frac{R_2^2}{L_2^2} \right] \right\},$$

$\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ist eine kleine Größe. Das 2. Glied der Reihe hat die Größenordnung 1% des ersten, kann also vernachlässigt werden:

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{\omega_0 L_2} \left[\frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} - 1 \right] \cdot \frac{x}{x^2 - m^2} \dots \dots \dots 60)$$

Eingesetzt in Gl. 59) ergibt

$$\frac{\alpha_t}{\alpha} = \frac{P_x^2}{P^2} \cdot \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} \left[\frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} - 1 \right] \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 - 1)}$$

Für die richtigen Werte von R_1 und R_2 wird

$$\frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} = 1$$

Ändert sich dagegen R_1 um den Betrag $+f_1\%$, R_2 um $+f_2\%$, so wird

$$\begin{aligned} \frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} - 1 &\equiv \frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} \left(1 + \frac{f_1}{100} \right) - 1 \Rightarrow \frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} \left(1 + \frac{f_1}{100} \right) \left(1 - \frac{f_2}{100} \right) - 1 \\ &= \frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} \left[1 + \frac{f_1}{100} - \frac{f_2}{100} \right] - 1 = \frac{f_1 - f_2}{100} \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\alpha_t}{\alpha} = \frac{P_x^2}{P^2} \cdot \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - 1} \cdot \frac{f_1 - f_2}{100}$$

P und P_x waren die Spannungen von m -ter und x -ter Oberwelle in Volt. Da nur das Verhältnis der beiden vorkommt, können sie statt dessen in $\%$ der Grundwelle gemessen werden. Sie heißen dann p und p_x .

$$\frac{\alpha_t}{\alpha} = \frac{p_x^2}{p^2} \cdot \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 - 1)} \cdot \frac{f_1 - f_2}{100} \dots \dots \dots 61)$$

Sei α_1 der Ausschlag in Grad für eine m -te Oberwelle, deren Wert 1% der Grundwelle beträgt, also $p = 1$, dann ist

$$\alpha_t = \alpha_1 p_x^2 \cdot \frac{R_2^2}{\omega_0^2 L_2^2} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2} \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - 1} \cdot \frac{f_1 - f_2}{100} \dots \dots \dots 62)$$

der Fehlerausschlag in Grad, den eine x -te Welle erzeugt.

Die Diskussion dieser Gleichung ergibt folgendes: Einmal ist der Fehlerausschlag infolge Änderung des Widerstandes dem Quadrate von $\frac{R}{\omega_0 L}$ des Instrumentes proportional.

Entsprechend dem Ausdruck $\frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}$ ist der Einfluß einer Oberwelle auf

die Messung um so kleiner, je weiter sie von m abliegt. Der Ausdruck $\frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - 1}$ ist von

den Eigenfrequenzen der verschiedenen Schwingungskreise abhängig. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß er um so größer, also um so ungünstiger ist, je näher m_1 und m_2 zusammenliegen, je weiter m_1 von m_0 entfernt ist. Seine Größenordnung lag für die ausgeführten Schaltungen zwischen 1,5 und 3. Am wichtigsten in Gl. 62) ist aber die Abhängigkeit des Fehlerwinkels von der Widerstandsänderung selbst. Die Gleichung ergibt, daß er der Differenz der prozentualen Änderung der beiden Widerstände vom festen Kreis 1" und Kreis 2 proportional ist. Ändern sich also R_1 und R_2 im selben Verhältnis, so tritt ein Ausschlag für fremde Wellen nicht auf.

*) Daß bei der Änderung von R_1 nur der Widerstand des Kreises 1" in Betracht kommt, wurde schon S. 31 unter Abschnitt 5, 2. Absatz durch Versuch gezeigt.

Die Richtigkeit dieser Fehlerformel wurde für die 3. und 9. Oberwelle durch Versuche geprüft*).

1. Versuch: 3. Oberwelle. Apparat in Schaltung nach S. 22.

Daraus:

$$\varrho_1 = 4,90, \quad \varrho_2 = 1,28, \quad \alpha_1 = 1^0, \quad \frac{R_2}{\omega_0 L_2} = \frac{R_1''}{\omega_0 L_1} = 0,688$$

$$f = 0,768 p_x^2 \frac{(f_1 - f_2)}{100} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}.$$

Die Versuche ergaben:

Zahlentafel 4.

Welle x	‰ der Grundwelle	α_t bei Änderung von R_1'' um $f_1 =$			
		+ 2‰	+ 1‰	- 1‰	- 2‰
1	100	- 2,2	- 1,0	+ 1,2	+ 2,3
5	15	- 0,2	- 0,05	+ 0,05	+ 0,1
7	15	0	0	0	0
9	15	0	0	0	0

Den Vergleich dieser Werte mit den aus obiger Formel errechneten zeigt folgende Zahlentafel:

Zahlentafel 5.

Welle x	‰ der Grundwelle	α_t	
		berechnet	aus Tafel 4
1	100	$\alpha_t = 1,20f$	$\alpha_t = 1,1 \cdot f$
5	15	0,17f	0,1 · f
7	15	0,05f	0
9	15	0,03f	0

2. Versuch: 9. Oberwelle. Apparat in Schaltung nach S. 22.

Dabei war

$$\varrho_1 = 5,14, \quad \varrho_2 = 2,16, \quad \alpha_1 = 1^0, \quad \frac{R_2}{\omega_0 L_2} = \frac{R_1''}{\omega_0 L_1} = \frac{347}{314,2} = 1,11.$$

Daraus:

$$\alpha_t = 3,30 p_x^2 \frac{f_1 - f_2}{100} \cdot \frac{x^2}{(x^2 - m^2)^2}.$$

Die Versuche ergaben:

Zahlentafel 6.

Welle x	‰ der Grundwelle	α_t bei Änderung von R_1'' um			
		+ 2‰	+ 1‰	- 1‰	- 2‰
1	100	- 0,3	0	0	0
5	15	- 0,2	- 0,1	+ 0,1	+ 0,1
7	15	- 0,9	- 0,4	+ 0,4	+ 0,8
11	15	- 0,8	- 0,3	+ 0,3	+ 0,8
13	15	- 0,3	- 0,1	+ 0,1	+ 0,3

Den Vergleich mit den aus obiger Formel errechneten Werten zeigt Tafel 7:

*) Da die Spannungskurve der Hochfrequenzmaschine eine starke 3. Oberwelle aufwies und zur Zeit dieser Versuche die Kondensatoren für die Schaltung auf reine Sinusform nicht zur Verfügung standen, wurden die Versuche mit der 3. Oberwelle, die also eine 9. enthalten hätte, nicht durchgeführt.

Zahlentafel 7.

Welle x	‰ der Grundwelle	f	
		berechnet	aus Tafel 6
1	100	$\alpha_1 = 0,052 f$	$\alpha_1 = 0$
5	15	0,06 f	0,1 f
7	15	0,23 f	0,4 f
11	15	0,56 f	0,4 f
13	15	0,16 f	0,1 f

Die Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Werten ist wohl bei der Kleinheit der Ausschläge bei beiden Oberwellen und bei der Annahme ungeteilter Kreise im Gebiet der fremden Wellen befriedigend.

Weitere Versuche zeigten, daß sich Änderungen um $+f_1$ und $+f_2/0$ der beiden Widerstände in ihrer Wirkung aufheben, wie Gl. 62) verlangt.

Die Tafeln 4 bis 7 zeigen, daß bei Temperaturänderungen um 10^0 C eine ganz unzulässige Beeinflussung der Messung durch die fremden Wellen stattfindet. Um diese zu vermeiden, muß auch der Widerstand R_1'' aus Kupfer hergestellt und so groß dimensioniert werden, daß seine Erwärmung durch den Strom keine wesentliche Temperaturerhöhung verursacht. Dies ist allerdings nur zum Teil möglich, da R_2 konstant bleiben, also aus Manganin hergestellt werden muß (S. 31). Deshalb wird auch ein Teil von R_3 im gleichen Verhältnis R_0/R_1'' aus Manganin konstruiert. Dieses Verhältnis muß möglichst klein gehalten werden, da dadurch R_1 (Abb. 20) größer, also der für die Konstruktion der Induktivitäten des Kreises 2 verfügbare Widerstand $R_{d0} = R_2 - R_1$ um diesen Betrag kleiner wird, was einen Mehrverbrauch an Kupfer bedingt.

Es dürfte sich wohl erreichen lassen, daß der Temperaturunterschied der beiden Kreise kleiner als $2,5^0$ C bleibt, entsprechend einer Widerstandsdifferenz von $1^0/0$. Damit wäre f festgelegt und der Fehlerwinkel α_1 nur noch von $R_2/\omega_0 L_2$ des Apparates abhängig [Gl. 62)]. Wird z. B. für Messung der 3. Oberwelle $R/\omega_0 L = 0,47$, gemacht (entsprechend 50 Perioden und $R/L = 150$), bei 1^0 Ausschlag = $1^0/0$ der Grundwelle, dann wird $\alpha_1 = 0,6^0$. D. h. das Instrument zeigt statt $0^0/0$ $0,8^0/0$ statt $1^0/0$ $1,3^0/0$ statt $2^0/0$ $2,1^0/0$ statt $10^0/0$ $10,03^0/0$.

Weiter übt die Änderung des Widerstandes einen Einfluß auf den Ausschlag der m-ten Oberwelle selbst aus, wie bei jedem Strom- oder Spannungsmesser, der Kupfer enthält. Da aber die Messung einer m-ten Oberwelle auf die Messung der Grundwelle bezogen wird, besteht nur die Bedingung, daß der Widerstand des Apparates R_n beide Male denselben Wert hat. Es muß also die Abhängigkeit von der Raumtemperatur bei allen Schaltungen dieselbe sein, d. h. theoretisch müßten die Justierwiderstände und die Widerstände für andere Meßbereiche aus Kupfer bestehen. Für diese letzteren muß auch diese Forderung gestellt werden. Da diese Widerstände für Messung aller Wellen dieselben sind (S. 20), betrifft sie bei zwei Meßbereichen nur ein einziges Konstruktionselement. Die Justierwiderstände dagegen können von der Raumtemperatur unabhängig sein, also aus Manganin hergestellt werden. Denn es ist (Abb. 21)

$$R_n = R_1 \frac{1 + \frac{R_4}{R_1}}{1 + \frac{R_4 + R_1}{R_6}}$$

Da $\frac{R_4}{R_1}$ und $\frac{(R_4 + R_1)}{R_6}$ klein sind gegen 1, ist für geringe Änderungen von R_1 das R_n dem R_1 proportional. Für alle Schaltungen ist also die Abhängigkeit von der Raumtemperatur gleich derjenigen von R_1 , also dieselbe.

6. Die Kondensatoren als Fehlerquelle.

Als Massenartikel hergestellte Papierkondensatoren — und nur solche eignen sich des Preises wegen für ein technisches Meßinstrument — haben meistens verschiedene Mängel:

1. Sie besitzen einen ziemlich großen Energieverlust im Dielektrikum. Er machte sich nicht störend bemerkbar.

2. Sie bestehen gewöhnlich aus gewickelten Staniolstreifen mit Stromzuführung in der Mitte oder an den Enden. Es tritt deshalb die sogenannte Kabelwirkung auf. Störungen wurden dadurch nicht verursacht.

3. Sie besitzen einen Temperaturkoeffizienten von der Größenordnung $0,05\text{ ‰}$ auf 1°C^6). Bei Temperaturschwankungen von $\pm 10^{\circ}\text{C}$ treten also Schwankungen der Kapazität um $\pm 1/2\text{ ‰}$ auf.

Diese sind von Einfluß auf die Angaben des Instrumentes, indem dadurch der Winkel zwischen J_1 und J_2 für die fremden Wellen geändert wird, also nicht mehr 90° beträgt. Mathematisch ist die Erscheinung schwierig zu untersuchen, da sich mit den Kapazitäten C auch die Eigenfrequenzen m der Kreise ändern. Der Einfluß dieser Änderungen wurde deshalb durch Versuche klargelegt. Anstatt durch Änderung der Temperatur wurden dabei die Kapazitäten durch Hinzuschalten anderer Einheiten geändert.

Einmal zeigte sich Proportionalität zwischen der Größe der Kapazitätsänderung und dem Ausschlag. Ferner war der Ausschlag, wie zu erwarten, dem Quadrate der Spannung der betreffenden fremden Oberwelle proportional. Über die Größe der Fehler geben folgende Versuche Aufschluß:

3. Oberwelle: Schaltung nach Seite 22, $r^0 = r^0/0$ der Grundwelle, $R/\omega_0 L = 0,688$.

Zahlentafel 8.

Welle $x =$	Proz. der Grundwelle	Fehlerausschlag α_t bei Änderung um $\pm 1/2\text{ ‰}$ von				$\Sigma \alpha_t$
		C_a	C_b	C_d	C_e	
1	100	0	$-0,4^0$	0	$+0,5^0$	$+0,1^0$
5	15	0	0	0	0	0
7	15	0	0	0	0	0
9	15	0	0	0	0	0

9. Oberwelle: Schaltung nach Seite 22, $r^0 = r^0/0$ der Grundwelle, $R/\omega_0 L = 1,11$.

Zahlentafel 9.

Welle $x =$	Proz. der Grundwelle	Fehlerausschlag α_t bei Änderung um $\pm 1/2\text{ ‰}$ von				$\Sigma \alpha_t$
		C_a	C_b	C_d	C_e	
1	100	0	0	0	0	0
7	15	$-0,1^0$	$-0,5^0$	$+0,2^0$	$+0,6^0$	$+0,2^0$
11	15	$+0,3$	$+0,1$	$-0,4$	0	-0^0

Da die Kondensatoren nur von ganz kleinen Strömen durchflossen werden, darf angenommen werden, daß ihre Temperatur annähernd diejenige der Luft ist. Dann haben die Kondensatoren alle die gleiche Temperatur und nach Zahlentafel 8 und 9 heben sich die Änderungen der verschiedenen Kondensatoren in ihren Wirkungen fast auf: Es bleibt nur noch $\Sigma \alpha_t$ als Fehler.

Wird zwischen den Kondensatoren eine Temperaturdifferenz von 2°C zugelassen, so ergeben Zahlentafeln 8 und 9 für die Fehler im ungünstigsten Falle, wo C_d und C_e die höhere Temperatur als C_a und C_b haben: Bei Messung der 3. Oberwelle $+0,2^0$ für den Einfluß der Grundwelle, für die 9. Oberwelle $+0,1^0$ für den Einfluß der 15 ‰ igen 7. Oberwelle.

Aus der Verwendung von Kondensatoren mit Temperaturkoeffizienten von 0,05 pro 1° C ergeben sich also Fehler bis zu 0,3°, wobei 1° 10/100 der Grundwelle entspricht.

Weiter war die Frage zu untersuchen, ob für den zur Kompensierung der Selbstinduktion der festen Dynamometerspule gebrauchten Kondensator C (Abb. 27) auch ein solcher gewöhnlicher Kondensator benutzt werden könne. In betreff der Punkte 1. und 2. ergaben die Versuche keinerlei Störung. Weitere Versuche wurden gemacht über den Einfluß von C entsprechend Punkt 3 (Temperaturschwankungen). Die Resultate zeigen die Zahlentafel 10 und 11 für die 3. und 9. Oberwelle.

Zahlentafel 10.

Welle x =	Proz. der Grundwelle	α_t
1	100	+ 0,15°
5	15	0
7	15	0
9	15	0

Zahlentafel 11.

Welle x =	Proz. der Grundwelle	α_t
1	100	0
7	15	+ 0,05°
11	15	0

Zugrunde liegt beiden Tafeln eine Änderung von C um $+1/3\%$. Die Temperaturänderung von C kann also nur kleine Fehler verursachen. Ob das allerdings auch für die Messung noch höherer Oberwellen zutrifft, müßte untersucht werden. Es wäre dann eventuell dieser Kondensator als Präzisionskondensator auszuführen.

7. Die Wahl der Eigenfrequenzen m_a und m_b

Sie hängen zusammen nach Gl. 38). Einmal ist der Unterschied zwischen m_a und m , und damit zwischen m_b und m , möglichst groß zu machen, denn dadurch wird r_{ab}/R_{ab} (Abb. 18), also auch $r/R_1 = \varrho_1$ groß: Der entgegenwirkende Strom in Kreis 1' wird für die Meßfrequenz klein, der Ausschlag also groß. Mathematisch ausgedrückt: Der Faktor $\frac{\varrho_1 - 1}{\varrho_1}$ in Gl. 46) und 48) wird groß und damit α .

Entfernen sich aber m_a und m_b zu weit von m , so erreichen die Fehler in $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ der fremden Oberwellen unzulässige Werte, da dann die Operatoren von einfachem Kreis und Doppelkreis nicht mehr genügend übereinstimmen.

Bei den Versuchen erwiesen sich als günstig folgende Werte:

Für die 3. Oberwelle $m_a = 3,5$ (nach Abb. 14 entsprechend $m_b = 2,51$) bei $R/\omega_0 L = 0,688$.

Für die 9. Oberwelle $m_a = 9,86$ (nach Abb. 17 entsprechend $m_b = 8,14$) bei $R/\omega_0 L = 1,10$.

8. Frequenzschwankungen, Wahl von m_d und m_e .

Durch das Zusammenwirken von 4 Resonanzkreisen (a, b, d, e) werden die Verhältnisse theoretisch sehr kompliziert, die Untersuchung erfolgte deshalb experimentell.

Es zeigte sich, daß die Eigenfrequenzen $m_d \omega_0$ und $m_e \omega_0$ um ein wenig höher (bzw. tiefer) liegen müssen als die höchsten (bzw. tiefsten) Frequenzen, die bei Schwankungen auftreten können. Die Abhängigkeit des Ausschlages α von der Frequenz ist dann um so kleiner, je größer $R/\omega_0 L$ ist.

Für die beiden ausgeführten Schaltungen für die 3. und 9. Oberwelle war die Abhängigkeit des Ausschlages von der Periodenzahl die folgende:

Zahlentafel 12.
3. Oberwelle.

Schwankung o/o	α	$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_0}}$
-10	14,0	0,55 ₉
-5	39,8	0,94 ₂
-4	41,0	0,95 ₇
-3	43,5	0,98 ₅
-2	44,0	0,99 ₀
0	$\alpha_0 = 44,5$	1,00 ₀
+2	44,8	1,00 ₃
+5	46,0	1,01 ₃
+10	36,0	0,89 ₇

Zahlentafel 13.
9. Oberwelle.

Schwankung o/o	α	$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_0}}$
-6,7	32,0	0,69 ₄
-4,4	63,6	0,97 ₀
-3,3	68,8	1,01 ₈
-2,2	68,8	1,01 ₈
-1,1	67,0	1,00 ₅
0	$\alpha_0 = 66,2$	1,00 ₀
+1,1	66,8	1,00 ₃
+2,2	69,2	1,02 ₃
+3,3	70,0	1,02 ₇
+4,4	70,0	1,02 ₇
+6,7	57,8	0,93 ₃

Die Wurzeln aus α/α_0 wurden aufgetragen, weil ja die Werte der Oberwellen den Wurzeln aus den Ausschlägen proportional sind [Gl. 48], Abb. 31 und 32 zeigen die Ergebnisse in Diagrammen. Der zur Ordinatenachse unsymmetrische Verlauf der Kurve in Abb. 31 ist nicht etwa auf Ungenauigkeit in den Messungen zurückzuführen, denn er tritt auch für theoretisch konstruierte Kurven ein.

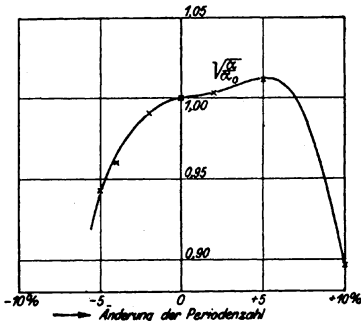


Abb. 31.

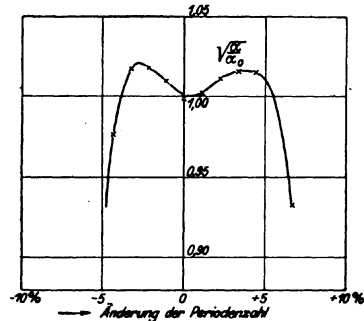


Abb. 32.

Ferner wird durch die Frequenzschwankungen die Zahl der Oberwellen, welche gemessen werden können, beschränkt. Wenn nämlich die Schwankungen zu groß werden, greifen die Gebiete benachbarter Oberwellen ineinander, z. B. schwankt bei $\pm 5\%$ Schwankung die 21. Oberwelle von $19,95 \omega_0$ bis $22,05 \omega_0$. Es müßte also $m_d > 22,05$ sein. Nun schwankt aber bei -5% die 23. Oberwelle bis auf $21,85 \omega_0$ hinunter, sie würde also in das Resonanzgebiet von m_d kommen und so natürlich die Messung fälschen. Man würde deswegen bei $\pm 5\%$ Schwankung der Periodenzahl nur bis zur 19. Oberwelle messen können. Für $\pm 2\%$ wäre die entsprechende Oberwelle die 49. Der Einfluß der benachbarten Wellen macht sich aber schon lange vor ihrem direkten Eingreifen ins Resonanzgebiet störend bemerkbar, da dort die Identität zwischen einfachem und Doppelkreis nicht mehr genügend ist (Abb. 19).

Bei Messung der 3. Oberwelle war ein Einfluß der 5. Oberwelle bei -5% Änderung um $0,4^\circ$ wahrzunehmen, wenn ihr Wert 15% der Grundwelle betrug. Sonst wurde bei $\pm 5\%$ Änderung der Periodenzahl durch fremde Wellen kein Ausschlag verursacht.

Bei Schaltung für Messung der 9. Oberwelle zeigte sich, daß benachbarte Oberwellen im Werte von 15% der Grundwelle bei Schwankung der Periodenzahl um 3% Fehler bis $0,6^\circ$ verursachten (dabei entsprach 1° 1% der Grundwelle, $R/\omega_0 L$ war $1,10$).

Für höhere Wellen konnten Versuche nicht mehr gemacht werden. Es darf wohl angenommen werden, daß bei passendem $R/\omega_0 L$ Messungen bis ungefähr zur 19. Oberwelle bei $\pm 2\%$ Schwankungen möglich sind.

Immerhin sieht man, daß durch die Größe der zulässigen Periodenschwankung die Anzahl der Oberwellen, die gemessen werden können, beeinflußt wird.

Die Oberwellen werden allerdings selten den Betrag 15% der Grundwelle erreichen. Für kleinere Beträge aber nimmt der Fehler wieder quadratisch ab, z. B. ist er für eine 5% ige Oberwelle noch $1/9$ des Fehlerwinkels der 15% igen. Für die seltenen Fälle großer Oberwellen können deshalb Korrekturtabellen aufgestellt werden.

9. Die Wahl von $R/\omega_0 L$.

Bei allen bisherigen Untersuchungen erwies sich die Größe der Meßfehler von dem Faktor

$$\frac{R_2}{\omega_0 L_2} = \frac{R_1}{\omega_0 L_1} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

abhängig. Seine Wahl ist deshalb maßgebend für die Eigenschaften des Instrumentes.

Für ein kleines $R/\omega_0 L$ spricht die Herabsetzung aller Fehler, die durch fremde Wellen verursacht werden, sei es infolge Verschiedenheit von einfachem Kreis und Doppelkreis, oder Schwanken des Widerstandes, der Kapazitäten oder der Periodenzahl, oder infolge des Einflusses der Induktion der festen Instrumentenspule. Dieser Zusammenhang kommt in Gl. 59) zum Ausdruck. Dort ist vorerst die Abhängigkeit von $R/\omega_0 L$ eine quadratische, indem auch $\cos \varphi_{12x}$ diesem Faktor proportional ist. Ausgenommen davon ist nur der Einfluß der Selbstinduktion der festen Spule. Für ihn ist $\cos \varphi_{12x}$ von $R/\omega_0 L$ ziemlich unabhängig, der Zusammenhang von $R/\omega_0 L$ mit α_1 also linear.

Das Herabsetzen von $R/\omega_0 L$ hat aber eine Grenze, indem schließlich das Anwachsen von ϱ_2 in Gl. 59) dem Abnehmen von $R/\omega_0 L$ die Wage hält. Je kleiner nämlich $R/\omega_0 L$ wird, und damit $R_3/\omega_0 L_3$ bzw. $R_0/\omega_0 L_0$ der Teilkreise, um so ausgeprägter wird das Maximum der Widerstandskurve des Kreises z zwischen den Eigenfrequenzen der Teilkreise (Abb. 7), um so höher also der Widerstand r_z für die Frequenz $m\omega_0$. Die Empfindlichkeit für die m -te Oberwelle wird so vermindert. Schließlich kann diese Verminderung die besprochene Verkleinerung der Fehlerausschläge überwiegen, so daß diese Fehlerausschläge im Verhältnis zum Ausschlag selbst wieder größer werden. Mathematisch ausgedrückt: Da bei Abnehmen von $R/\omega_0 L$ die Größe r_z wächst, so nimmt auch $\varrho_2 = r_z/R_2$ in Gl. 59) zu. Es kann schließlich diese Zunahme die Folge der Abnahme von $R/\omega_0 L$ überwiegen, so daß α_1/α größer wird.

Weiter ist $R/\omega_0 L$ nach unten durch praktische Gründe begrenzt. Das Gewicht der Selbstinduktionsspulen ist nämlich¹⁸⁾ ungefähr umgekehrt proportional $\sqrt{R^2/L^3}$, es nimmt also bei Verkleinerung von $R/\omega_0 L$ zu.

Als günstige Werte ergaben die Versuche für die 3. Oberwelle $R/\omega_0 L = 0,477$ (entsprechend $R/L = 150$ bei $\omega_0 = 314$), für die 9. Oberwelle $1,11$ ($R/L = 350$). Für die übrigen Oberwellen dürften die Werte durch Interpolation bzw. Extrapolation zu finden sein. Eine Ausnahme macht die Grundwelle, da hier die Werte der fremden Oberwellen nur Bruchteile ihres eigenen Wertes betragen und deswegen eine Beeinflussung der Ausschläge viel weniger eintritt. Mathematisch ausgedrückt: der Faktor P_2^2/P^2 in Gl. 59) wird sehr klein. Außerdem treten ja für die Grundwelle nur große Ausschläge auf, gegen welche die Fehlerausschläge sowieso relativ klein sind. Es darf also $R/\omega_0 L$ sehr groß gemacht werden.

B. Vergleichende Messungen mit einer bekannten Methode.

Um noch allgemein die Richtigkeit der neuen Meßmethode zu erweisen, wurde eine Reihe von Messungen durchgeführt, die einen Vergleich mit einer bekannten Methode gestatten. Als solche stand oszillographische Aufnahme mit nachfolgender Analyse mit dem Maderschen Analysator¹¹⁾ zur Verfügung.

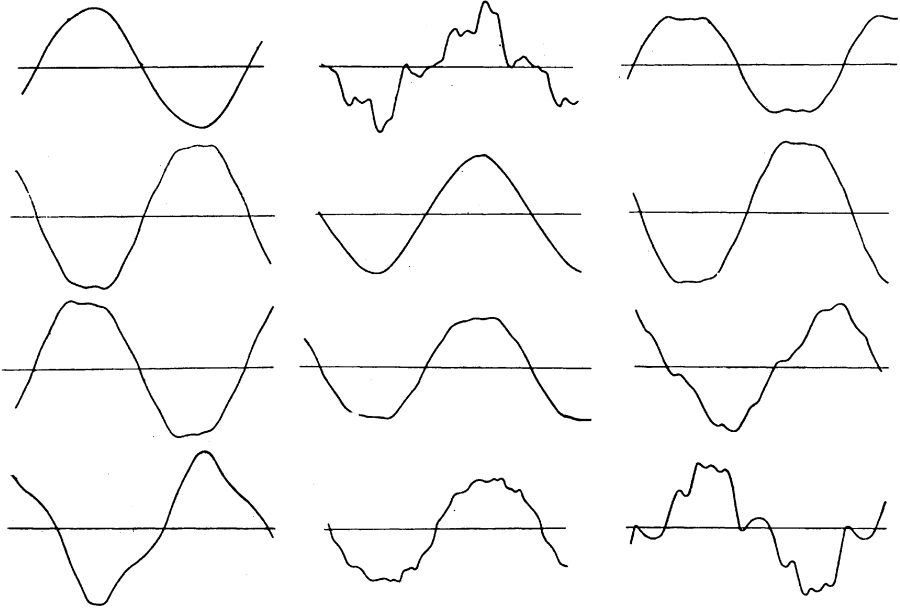


Abb. 33 bis 36.

Abb. 37 bis 40.

Abb. 41 bis 44.

Die Versuche wurden für die unter I B. beschriebene Methode der Messung in Proz. der Effektivwerte von Strom und Spannung durchgeführt. Die Versuchsanordnung zeigen Abb. 45 und 46. Die Abb. 33 bis 44 zeigen die untersuchten Kurven. Die Resultate der Analyse sind in den Tafeln 14 und 15 dargestellt.

Zahlentafel 14.

3. Oberwelle.

Spannung				Strom			
Lfd. Nr.	Abb.	Oszillograph. Aufnahme %	Direkte Analyse %	Lfd. Nr.	Abb.	Oszillograph. Aufnahme %	Direkte Analyse %
1	—	—	0	7	—	—	0
2	33	3,7	3,55	8	38	2,8	3,17
3	34	5,8	5,95	9	39	6,5	6,17
4	35	5,6	6,51	10	40	8,14	8,37
5	36	17,3	17,4	11	41	12,7	12,80
6	37	20,5	21,5				

Zahlentafel 15.
9. Oberwelle. Spannung.

Lfd. Nr.	Abb.	Oszillograph. Aufnahme	Direkte Analyse
		%	%
12	—	—	0
13	42	0,7	1,52
14	43	5,4	4,20
15	44	7,9	7,77

Bei der Analyse der Oszillogramme wurde der Effektivwert gefunden, indem alle Wellen bis zur 9. herausgelesen und der Effektivwert als Wurzel aus der halben Summe ihrer Quadrate gebildet wurde. Daraus wurde das Verhältnis Effektivwert der m-ten Oberwelle zum gesamten Effektivwert gebildet. Bei der direkten Analyse wurde der Effektivwert durch ein vorgeschaltetes Amperemeter, bzw. parallel geschaltetes Voltmeter gemessen (Abb. 45 und 46). Bei den Versuchen Nr. 1, 7, 12 wurde verketteter Drehstrom analysiert, für den bekanntlich die 3., 9., 15. usw. Oberwelle bei symmetrischer Belastung der drei Zweige verschwinden¹²⁾. Die Versuche 4 und 13 stellen die Sternspannung eines modernen Generators dar, Versuch 9 den Strom einer Phase desselben Generators, mit induktionslosem Widerstand belastet. Bei den übrigen Versuchen sind die Strom- und Spannungskurven unter Anwendung von Drosseln und Kondensatoren verbessert oder verschlechtert worden.

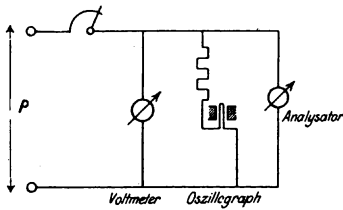


Abb. 45.

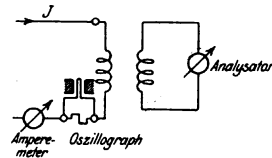


Abb. 46.

Ungenügend scheint die Übereinstimmung auf den ersten Blick bei den Versuchen 4, 13, 14 zu sein. In allen drei Fällen entspricht aber der Unterschied einem Fehler des Maderschen Analysators von höchstens 4 Noniusteilen. Es muß überhaupt gesagt werden, daß die Analyse von aufgezeichneten Kurven für kleine Werte nie genau ist, erfolge sie nun geometrisch oder rechnerisch. Ferner ist der Madersche Analysator für höhere Oberwellen ungenauer als für niedrige. Dazu kommt noch, daß der Oszillograph selbst für die verschiedenen Oberwellen verschiedene Empfindlichkeit aufweist.

Unter Berücksichtigung dieser Punkte dürften die Resultate des Vergleichs befriedigend sein. Den besten Beweis für das richtige Arbeiten des Apparates bilden wohl die Versuche 1, 7, 12. Sie zeigen die Unabhängigkeit des Ausschlages von fremden Oberwellen. Soweit die Vergleiche mit den Oszillographen ein Urteil gestatten, besteht kein Unterschied in der Genauigkeit zwischen Strom- und Spannungsanalyse.

III. Vorschläge zur Durchbildung des Meßinstrumentes.

Auf Grund der vorliegenden Erfahrungen mögen einige Vorschläge für die Durchbildung eines Meßinstrumentes für Messung der Oberwellen in Prozent der Grundwelle gemacht werden.

Vor allem möchte Verfasser vorschlagen, das Wattmeter als Torsionsinstrument auszubilden. Es zeigte sich nämlich, daß das Einstellen der regulierbaren Gegeninduktivität sehr leicht vergessen wird. Um die Vorteile eines direkt zeigenden Instrumentes nicht zu verlieren, könnte so konstruiert werden, daß dieses Torsionswattmeter eine Skala erhält und vorerst ausschlägt wie ein Zeigerinstrument. Dieser Ausschlag würde für rohe Messungen genügen. Für genauere Messungen würde dann der Torsionskopf gedreht, bis der Zeiger der beweglichen Spule auf 0 steht. Die Spulen stehen dann senkrecht, eine Gegeninduktion tritt nicht auf.

Bei dem verwendeten Wattmeter waren die Torsionskräfte von Stromzuführungsfeder und Aufhängefeder ungefähr gleich groß. Bei der Durchbildung als Torsionsinstrument würde das Drehmoment der Zuführungsfeder wegfallen, da dann nur noch der Faden eine Torsion erleidet. Das Drehmoment des Instrumentes brauchte also nur ungefähr den halben Wert zu besitzen: bei gleicher Empfindlichkeit kann die AW-Zahl von festen oder beweglichen Spulen auf die Hälfte herabgesetzt werden.

Wir sahen oben, daß wegen der Veränderung der Widerstände und Kapazitäten mit der Temperatur auch bei günstigem $R/\omega_0 L$ Fehler von der Größenordnung von $0,8^\circ$ auftreten können. Es hat aber keinen Sinn, die Empfindlichkeit des Wattmeters so groß zu machen, daß solche Fehler überhaupt sichtbar werden. Die Empfindlichkeit wird also 5mal kleiner gemacht, d. h. die AW-Zahlen können heruntergesetzt werden. Der Ausschlag für eine Oberwelle von $1^\circ/0$ der Grundwelle sei noch $0,2^\circ$. Bei der Ausführung als Torsionswattmeter ist die Genauigkeit in der Ablesung etwas kleiner, so daß hier 2,5fache Herabsetzung der Empfindlichkeit richtig sein dürfte.

In beiden Fällen — Ausführung als Torsionswattmeter oder Drehspulinstrument mit Kompensierung der Gegeninduktion — ist also das Produkt der AW-Zahlen von fester Spule I'' und beweglicher Spule auf $1/5$ seines Betrages herabzusetzen. Wie oben ausgeführt, wird die Windungszahl n_1' der Spule I' beliebig, unter der Bedingung, daß die Größen $R_1', L_1, 1/C$ (bzw. $R_a, R_c, L_a, L_b, 1/C_a, 1/C_b$) dieses Kreises durch Multiplikation mit n_1''/n_1' auf den Kreis I'' reduziert werden (Seite 18 unten).

Die Verkleinerung der notwendigen AW-Zahlen wird einmal dazu ausgenutzt, den Stromverbrauch der beweglichen Spule etwas herunterzusetzen. Dann kann die AW-Zahl der Spule I'' auf ungefähr $1/4$ ihres Wertes herabgesetzt werden. Also wird L_1 in Gl. 55) ungefähr 16mal kleiner, und damit bei gleichem C das R_a 4mal kleiner. So erreicht das Verhältnis R_a/R_1'' (Seite 34) den günstigen Wert $0,17$.

Die Schaltung für die Grundwelle braucht nur den Meßbereich $100^\circ/0$. Es liegt nahe, die Widerstände R_1 und R_2 von vornherein für diesen Meßbereich zu dimensionieren. Die Rechnung ergibt aber, daß die Selbstinduktionsspulen dadurch unbecom große Werte annehmen würden. Dagegen können die Justierwiderstände R_4 und R_5 zur Vergrößerung des Meßbereiches herangezogen werden. Sie sind dann nach den Formeln für R_p und R_v Gl. 51) und 52) zu dimensionieren und müssen für diese Welle (Grundwelle) aus Kupfer konstruiert werden (Seite 34).

Das Schaltungsschema, durchgebildet für Messung von 2 Oberwellen, zeigt Abb. 47. Für Messung weiterer Wellen sind nur gleiche Elemente anzufügen. Schalter S_2 (für Wahl der Welle) ist mit Schalter S_1 (Meßbereich) so zu verriegeln, daß er nur auf den Kontakt „Grundwelle“ gestellt werden kann, wenn S_1 auf „I“ steht. Eine Umschaltung von S_1 auf „II“ kommt nur selten vor (Oberwelle größer als $20^\circ/0$). Für den 4poligen Umschalter S_3 möchte Verfasser eine Ausführung ähnlich derjenigen der Schaltapparate in automatischen Telephonzentralen vorschlagen: Die festen Kontakte wären auf einem Halbzylinder anzuordnen, ein Schaltarm würde die 4 beweglichen Kontakte tragen. Die Induktivitäten sind so zu gruppieren, daß L_a und L_b von L_d und L_c nicht beeinflußt werden; dagegen dürfen L_a gegen L_b oder L_d gegen L_c Gegeninduktion aufweisen, wie Versuche zeigten.

Für die Stromanalyse wird ein Stromwandler 7:1 vorgeschaltet, so daß Strom-

stärken von 2 bis 5 Ampere analysiert werden können. Für stärkere Ströme wird irgend ein weiterer, normaler Stromwandler vorgeschaltet.

Für Hochspannungsanalysen wird das Instrument über einen normalen Spannungswandler angeschlossen.

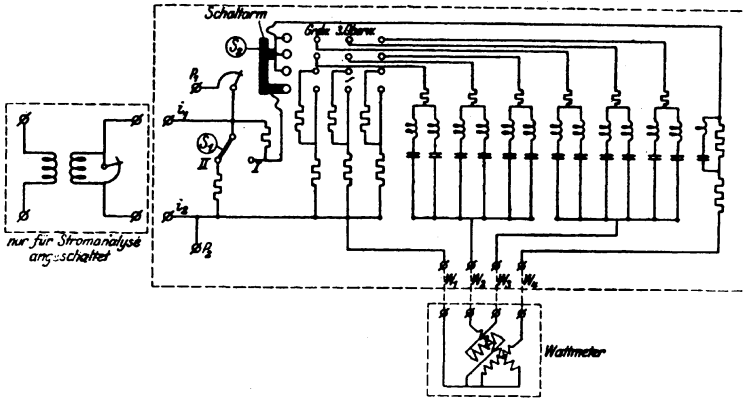


Abb. 47.

Die Handhabung des Apparates für Messung einer m-ten Oberwelle ist folgende: 1. S_2 auf „Grundwelle“, der Regulierwiderstand wird verstellt, bis Ausschlag 100%. 2. S_2 auf „m“, Ablesung.

Verfasser möchte folgende Dimensionierung vorschlagen:

$$\text{für } \omega_0 = 314.$$

$$\text{Windungszahlen des Wattmeters: } n_1' = 294 \quad R_1' = 514 \text{ Ohm}$$

$$n_1'' = 42 \quad R_1'' = 73,5 \text{ Ohm} \quad R_s \sim 12,2 \text{ Ohm}$$

$$n_2 = 240 \quad R_2 = 385 \text{ Ohm} \quad R_s/R_1'' \sim 0,17$$

$$R_c \sim 10 \text{ Ohm}$$

$$R_a = R_b = 1000 \text{ Ohm}$$

$$R_f \sim 90 \text{ Ohm}$$

$$R_d = R_e = 600 \text{ Ohm.}$$

$$\text{Spannung: } 100\%_0 = 20,0 \text{ V.} \quad \text{I. Meßbereich bis } 20\%_0 = 4,0 \text{ V.}$$

$$\text{Grundwelle: } L_1 = 1,14 \text{ H} \quad m_a = 1,4 \quad L_a = 1,43 \text{ H} \quad C_a = 3,62 \mu\text{F}$$

$$m_b = 0,75 \quad L_b = 3,13 \text{ H} \quad C_b = 5,72 \mu\text{F}$$

$$\frac{R}{\omega_0 L} = 1,43$$

$$L_2 = 0,855 \text{ H} \quad m_d = 1,06 \quad L_d = 1,69 \text{ H} \quad C_d = 5,34 \mu\text{F}$$

$$m_e = 0,94 \quad L_e = 1,23 \text{ H} \quad C_e = 6,60 \mu\text{F}$$

$$\text{3. Oberwelle: } L_1 = 3,42 \text{ H} \quad m_a = 3,50 \quad L_a = 6,70 \text{ H} \quad C_a = 0,138 \mu\text{F}$$

$$m_b = 2,51 \quad L_b = 8,10 \text{ H} \quad C_b = 0,198 \mu\text{F}$$

$$\frac{R}{\omega_0 L} = 0,477$$

$$L_2 = 2,57 \text{ H} \quad m_d = 3,13 \quad L_d = 4,30 \text{ H} \quad C_d = 0,256 \mu\text{F}$$

$$m_e = 2,87 \quad L_e = 4,46 \text{ H} \quad C_e = 0,275 \mu\text{F}$$

$$\text{9. Oberwelle: } L_1 = 1,47 \text{ H} \quad m_a = 9,86 \quad L_a = 2,88 \text{ H} \quad C_a = 0,0360 \mu\text{F}$$

$$m_b = 8,14 \quad L_b = 1,35 \text{ H} \quad C_b = 0,0436 \mu\text{F}$$

$$\frac{R}{\omega_0 L} = 1,11$$

$$\begin{array}{llll} L_a = 1,10 \text{ H} & m_d = 9,47 & L_d = 2,10 \text{ H} & C_d = 0,053_8 \mu\text{F} \\ & m_e = 8,57 & L_e = 2,31 \text{ H} & C_e = 0,059_4 \mu\text{F} \end{array}$$

Dabei ist der gesamte Energieverbrauch — für Grundwelle und Oberwellen — ungefähr 5 bis 6 Watt, der gesamte Stromverbrauch ca. 0,28 Ampere. Bekanntlich setzt sich R_1 aus einem konstanten Widerstand (entsprechend der Größe von R_0 des Kreises der festen Spule) und dem Instrumentenwiderstand zusammen. Da der Aufhängefaden des Dynamometers (Phosphorbronze) einen negativen Temperaturkoeffizienten hat, wird die Widerstandsänderung der kupfernen Instrumentenspule teilweise kompensiert. Das Instrument erfüllt also so zu einem Teil die Rolle des konstanten Widerstandes. Der Rest des konstanten Widerstandes muß aus Manganin hergestellt werden.

Zusammenfassung und Schluß.

Fassen wir zum Schlusse die Ergebnisse der Arbeit zusammen, so finden wir, daß sich die neue Meßmethode auf die speziellen Eigenschaften eines Systems von zwei parallel geschalteten Schwingungskreisen mit verschiedener Eigenfrequenz („Doppelkreis“) gründet. Die Eigenschaften solcher Kreise werden untersucht. Unter Verwendung solcher Doppelkreise wurde in einem hochempfindlichen Dynamometer mit zwei festen Spulen der Summenstrom dieser beiden gegen denjenigen der beweglichen Spule um 90° verschoben, für alle Wellen außer der zu messenden m -ten Oberwelle. Dann war der Ausschlag nur noch von der Spannung dieser Oberwelle abhängig, und und zwar proportional ihrem Quadrate. Die Unterdrückung aller übrigen Wellen („fremde Wellen“ genannt) wurde unterstützt durch die „Drosselung“ im Kreise der beweglichen Spule. Damit bezeichnen wir die Erscheinung, daß der Widerstand eines Schwingungskreises für alle Frequenzen außer der zu messenden ein Vielfaches des Resonanzwiderstandes beträgt.

Es wurde so zuerst eine Methode der Messung einer Oberschwingung in Prozenten des Effektivwertes durchgebildet. Die nähere Untersuchung zeigte aber, daß der Apparat eine, wenn auch geringe Kurvenverzerrung verursachte, die das Meßergebnis fälschte. Das Verfahren wurde so umgeformt, daß dieser Fehler nicht mehr auftrat. Maß für die Oberwellen sind jetzt Prozente der Grundwelle. Die Verwendung von Doppelkreis statt einfachem Kreis in Reihe mit der beweglichen Spule ermöglicht Messungen auch bei Abweichungen der Periodenzahl von ihrem normalen Wert. Sodann wurde gezeigt, daß das Instrument für alle Wellen fast reinen Werkwiderstand besitzt. Durch diese beiden Eigenschaften wird erst die Messung an Leitungsnetzen möglich; denn dort kann einerseits die Frequenz nicht genau eingehalten werden, andererseits müssen Meßwandler verwendet werden können.

Zur Stromanalyse dient das gleiche Instrument wie für Spannungsanalyse, unter Zwischenschaltung eines besonders gewickelten, kleinen Stromwandlers.

Es wurden die Gleichungen für Berechnung des Instrumentes aufgestellt, weiter die verschiedenen Fehlerquellen experimentell, teilweise auch mathematisch untersucht und ihre Beseitigung studiert. Als größte Fehlerquellen erwiesen sich die Selbstinduktion der einen festen Spule und die Widerstandsschwankungen in dem aus Kupfer bestehenden Kreise der beweglichen Spule. Erstere wurde durch eine Kompensierung, deren Theorie ausführlicher behandelt wird, auf ein zulässiges Maß heruntergedrückt. In bezug auf die Widerstandsschwankungen zeigte es sich, daß nicht der Widerstand des Kreises der beweglichen Spule selbst, sondern sein Verhältnis zum induktionsfreien Widerstand des Zweiges der einen festen Spule konstant sein muß. Es wird darum auch dieser aus Kupfer hergestellt, die Widerstandsschwankung bleibt aber auch dann noch die größte Fehlerquelle. Weitere Versuche bezogen sich auf die Dimensionierung

des Instrumentes. Als maßgebend für seine Eigenschaften erwies sich der Faktor $R/\omega_0 L$. An Hand der Versuche werden für ihn günstige Werte vorgeschlagen. Weiter wird gezeigt, daß ein Zusammenhang besteht zwischen den zulässigen Frequenzänderungen und der Anzahl der Wellen, die gemessen werden können. So ergibt sich, daß, bei $\pm 2\%$ Schwankung ungefähr, bis zur 19. Oberwelle analysiert werden kann. Diese Begrenzung muß jeder Methode anhaften, welche feste Schwingungskreise verwendet. Schließlich wurden noch vergleichende Messungen mit einem bekannten Verfahren gemacht. Es stand dafür allerdings nur die oszillographische Kurvenaufnahme mit nachfolgender mathematischer Analyse zur Verfügung, ein Verfahren, dessen Ergebnisse allerdings nicht sehr genau sein können. Die Resultate dürfen befriedigend genannt werden.

Das Instrument liefert zuverlässige Werte für Oberwellen, die größer sind als 1 bis $1,5\%$ der Grundwelle. Die Meßgenauigkeit ist dort ungefähr $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$ des Eigenwertes. Mit der Größe der gemessenen Oberwelle nimmt sie aber sehr rasch zu und erreicht bald die normale Genauigkeit von technischen Meßinstrumenten mit Fadenaufhängung. Damit wird das beschriebene Verfahren von der Des Coudreschen Methode für kleine Werte (unter 2%) an Genauigkeit erheblich übertroffen, es erlaubt auch nicht die Messung der Phasenwinkel zwischen Grund- und Oberwellen. Dafür darf wohl behauptet werden, daß es alle bekannten Methoden an Einfachheit der Handhabung und Raschheit der Aufnahme weit übertrifft. Das Dynamometer ist trotz seiner Empfindlichkeit leicht transportfähig; das Anlegen des Instrumentes an den zu analysierenden Strom oder die Spannung ist ebenso einfach wie für einen Strom- bzw. Spannungsmesser.

Quellenangabe.

1. Agnew, Study of the current-transformer with particular reference to the ironloss. Bull. of the B. of St. Bd. 7 (1911) S. 464.
2. Beattie, Harmonic Analysis diagrams. Electrician Bd. 67, S. 326.
- 2a. — Extension of Fischer-Hinnens Method of harmonic analysis. Electrician Bd. 67, S. 847.
3. Breisig, Dämpfung von Pupinleitungen in Beziehung zur Wellenfrequenz. ETZ Bd. 30 (1909) S. 464.
4. Davis, A proposed wave shape standard. Proc. of the Am. inst. of el. engineers Bd. 32 (1913) S. 325.
5. Fischer-Hinnen, Über die Zerlegung periodischer Kurven in ihre harm. Wellen. Elektrotechnik und Maschinenbau Bd. 27 (1909) S. 335.
6. Grover, Capacity and phase-difference of paraffined paper condensers as functions of temperature and frequency. Bull. of the B. of St. Bd. 7 (1911) S. 495.
7. Hänni, Über eine direkte Analyse von Wechselspannungen und Wechselströmen. Dissertation E. T. H. Zürich 1912.
8. Hazeltine, Analysis of alternating-current waves. Electrical Review Bd. 50 (1907) S. 235.
9. Hermann, Deformierte Spannungs- und Stromkurven und deren Analyse. ETZ Bd. 31 (1910) S. 56.
10. Lincoln, Wave form distortions and their effect on electrical apparatus. Proc. of the American inst. of el. engineers Bd. 32 (1913) S. 379.
11. Mader, Ein einfacher harm. Analysator. ETZ Bd. 30 (1909) S. 847.
12. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Braunschweig 1906. S. 12.
13. — Kapazität und Induktivität. Braunschweig 1909. S. 87.
14. Pichelmayer und Schrutka, Eine neue Methode zur Analyse von Wechselstromkurven. ETZ Bd. 33 (1912) S. 129.
15. Proceedings of the Amer. inst. of el. engineers. Discussion Bd. 32 (1913) S. 2089.
16. Schering, Zeigerinstrumente mit geringem Eigenverbrauch. Zeitschr. f. Instrumentenkunde Bd. 32 (1912) S. 108.
17. Schleiermacher, Zur Analyse von Wechselstromkurven. ETZ Bd. 31 (1910) S. 1246.
18. Slichter, Graphical computation of Fourier's constants for alternating current-waves. Electr. World Bd. 54 (1909) S. 146.
19. Thompson, Nouvelle methode d'analyse harmonique par la sommation algébrique d'ordonnées déterminées. Comptes rendus Bd. 153 (1911) S. 88.
20. Wagner, Dielektr. Eigenschaften von versch. Isolierstoffen. Arch. f. El. Bd. 3 (1914) S. 74.
21. Zenneck, Lehrbuch der drahtl. Telegr. Stuttgart 1913. S. 169.