

Lehrbuch der Elektrodynamik 2

J. Frenkel

# Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper

# LEHRBUCH DER ELEKTRODYNAMIK

VON

**DR. J. FRENKEL**

PROFESSOR FÜR THEORETISCHE PHYSIK  
AM POLYTECHNISCHEN INSTITUT  
IN LENINGRAD

ZWEITER BAND

**MAKROSKOPISCHE ELEKTRODYNAMIK  
DER MATERIELLEN KÖRPER**

MIT 50 ABBILDUNGEN



SPRINGER-VERLAG  
BERLIN HEIDELBERG GMBH 1928

ISBN 978-3-7091-2015-6      ISBN 978-3-7091-3274-6 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-7091-3274-6

**ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.**

## Vorwort.

Der vorliegende zweite Band meines Lehrbuches der Elektrodynamik bietet ebenso wie der erste, einige Besonderheiten dar, die ich hier kurz erwähnen möchte.

Ich habe den ganzen Stoff in zwei Abschnitte eingeteilt, wobei zunächst die Grundlagen und dann die Probleme der makroskopischen Theorie behandelt werden.

Da die allgemeinen Gesetze — einschließlich der relativistischen Formulierung der Elektrodynamik — als schon (aus dem I. Bande) bekannt anzusehen sind, konnte ich im ersten Abschnitt neben der gewöhnlichen dreidimensionalen Form der Grundgleichungen auch die vierdimensionale (relativistisch invariante) Form angeben. Dadurch ist es möglich gewesen, die Feldgleichungen und die Ausdrücke für die Energie und Kräfte nicht nur für ruhende Körper, sondern gleichzeitig für bewegte Körper aufzustellen, wobei sich unter anderem eine nicht unwesentliche Berichtigung der erwähnten Ausdrücke ergeben hat. Ich habe ferner versucht, die übliche Einteilung der linearen Größen (Ladungs- und Stromdichte, Feldstärken und Erregungen<sup>1</sup>) in die den *freien* (Leitungs-) Elektronen und den *gebundenen* Elektronen zugehörigen Anteile auch für die quadratischen Größen konsequent durchzuführen, wodurch eine erhebliche Vertiefung und Präzisierung der entsprechenden Begriffe (Energie, Strahlung, Spannungen) für die materiellen Körper erzielt worden ist. Zum Schluß des zweiten Kapitels sind die allgemeinen Begriffe durch Heranziehung der Thermodynamik und der Elastizitätstheorie konkretisiert und auf thermische und elastische Gleichgewichtszustände angewandt worden.

Im dritten Kapitel habe ich die „quasimikroskopische“ Theorie der elektromagnetischen Eigenschaften der materiellen Körper entwickelt, und zwar ohne mich in die Einzelheiten zu vertiefen habe ich die Gesamtheit aller Größen und Erscheinungen betrachtet, welche für diese Eigenschaften (elektrische und magnetische Suszeptilität, optische Gyration, Dispersion, Absorption, Widerstand und elektrolytische Polarisation) maßgebend sind.

Im zweiten Abschnitt, bei der Behandlung der Grundprobleme der makroskopischen Theorie, habe ich einen gegenüber dem gewöhnlichen

---

<sup>1</sup>) Es sei bemerkt, daß ich eine zur üblichen verkehrte Definition und Bezeichnung der magnetischen Feldstärke und magnetischen Erregung eingeführt und im ganzen Buche benutzt habe.

entgegengesetzten Weg eingeschlagen, indem ich zunächst die allgemeine und exakte Theorie der Schwingungsvorgänge, dann die angenäherte Theorie der langsamen Schwingungen (quasi-stationäre Vorgänge) und schließlich die rein statischen Erscheinungen behandelt habe. Wenn einfache Dinge von einem höheren Standpunkte aus betrachtet werden, so erhalten sie eine tiefere Bedeutung, wobei die entsprechenden physikalischen oder formellen Zusammenhänge klar zutage treten. Diese Anordnung scheint mir einen bedeutenden Vorzug zu haben gegenüber der üblichen Darstellungsweise, wo ganz ähnliche Fragen, wie z. B. die galvanischen, elektrostatischen und magnetostatischen Erscheinungen, getrennt voneinander in verschiedenen Abschnitten der Elektrizitätslehre behandelt werden.

Was die allgemeinen Schwingungsvorgänge anbetrifft, so habe ich hier neben der üblichen analytischen Methode der Integration der makroskopischen Feldgleichungen manchmal auch die direkte Methode der Integralgleichungen (in äußerst einfacher Form), welche dem Standpunkte der Fernwirkungstheorie entspricht, benutzt. Auf diese Weise läßt sich der *Mechanismus* der betreffenden Erscheinungen verstehen, wobei die rein formelle Bedeutung der „Nahwirkungstheorie“, deren Ausdruck man in der Differentialform der Feldgleichungen zu sehen pflegt, klargemacht wird. — Gelegentlich habe ich die Beziehung der Optik der quasi-homogenen Medien zur Mechanik (im *Hamilton-Schrödingerschen* Sinne), ferner die Theorie der räumlichen Wellengruppen („Wellenpakete“) und die Theorie der elektrischen Eigenschwingungen etwas ausführlicher entwickelt, als dies üblich ist, wegen der wichtigen Bedeutung dieser Fragen in der modernen Mikrophysik (die im III. Bande zu behandeln ist).

Die vollständige Behandlung (d. h. rechnerische Durchführung) der Probleme der freien und erzwungenen elektrischen Schwingungen, wie auch der entsprechenden statischen Probleme, erfordert einen sehr umfangreichen und ziemlich komplizierten mathematischen Apparat. Dieser Apparat reduziert sich hauptsächlich zur Methode der komplexen Integration (Darstellung der gesuchten und bekannten Funktionen durch Integrale im komplexen Gebiet) und besonders zur Methode der Reihenentwicklung. Leider konnte ich auf eine ausführliche Darstellung dieser Dinge nicht eingehen, um den Umfang meines Buches nicht zu erweitern. Dies wäre übrigens kaum nötig, da die entsprechenden Fragen in vielen Büchern über die Differentialgleichungen der mathematischen Physik behandelt werden (besonders schön und vollkommen in der „Neuausgabe“ von *Riemann-Weber* durch *R. Mises* und *P. Franck*). Um die physikalischen Begriffe durch mathematische Schwierigkeiten nicht zu komplizieren, habe ich im zweiten Abschnitt möglichst elementare Lösungsmethoden benutzt. Die allgemeine Theorie der Krümmungslinigen Koordinaten und der Reihenentwicklung nach den

harmonischen Funktionen oder den Eigenfunktionen dieser Koordinaten habe ich anhangsweise kurz entwickelt und auf die einfachsten (teilweise schon gelösten) statischen und Schwingungsaufgaben angewandt.

Der in den zwei ersten Bänden zurückgelegte Weg umschließt also — obwohl selbstverständlich *sehr unvollkommen*, besonders hinsichtlich der verschiedenen speziellen Probleme — das eigentliche Gebiet der „klassischen Elektrodynamik“ (und Mechanik). In der von mir benutzten Darstellungsweise erscheint dieser Weg als das Überschreiten eines Gebirges, wobei im ersten Bande man auf der einen etwas öden Seite bis zum Gipfel aufsteigt, um dann im zweiten Bande auf der anderen grünen und belebten Seite wieder ins Tal zurückzukommen. Der noch fehlende dritte Band soll dem *Eindringen* in diesen Berg gewidmet werden, durch den Tunnel, welcher eben von manchen Forschern energisch durchgelegt wird, zum Anfangspunkt zurück.

Zum Schluß möchte ich den Herren Dr. *J. Dorfmann* und Dr. *G. Grünberg* für die Durchsicht eines Teiles des Manuskriptes herzlich danken, ebenso Frl. Dr. *H. Müller*, die mir bei der Korrekturarbeit in der freundlichsten Weise sehr viel geholfen hat. Dem Verlage *Julius Springer* möchte ich für die übliche Großzügigkeit ebenfalls meinen tiefsten Dank aussprechen.

Leningrad, Ende 1927.

*J. Frenkel.*

# Inhaltsverzeichnis.

## Erster Abschnitt.

### Allgemeine Grundlagen der makroskopischen Theorie.

	Seite
Erstes Kapitel. Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.	
§ 1. Abhängigkeit der gemittelten Feldgrößen von den gemittelten Substanzgrößen.	
1. Definition der Mittelwerte verschiedener Größen. . . . .	1
2. Bestimmung der Mittelwerte der Feldgrößen . . . . .	3
§ 2. Abhängigkeit der gemittelten Substanzgrößen von den gemittelten Feldgrößen.	
1. Allgemeine Ansätze und Einführung von Materialkonstanten . . . . .	5
2. Behandlung von Schwingungsvorgängen in der quasi-elastischen Theorie . . . . .	6
3. Drehbewegung von Dipolmolekülen und fortschreitende Bewegung von Ionen . . . . .	9
§ 3. Die Differentialgleichungen des makroskopischen Feldes.	
1. Trennung der Beiträge der freien und der gebundenen Elektronen; Erregungsgrößen . . . . .	10
2. Unstetigkeitsflächen und Grenzbedingungen . . . . .	14
§ 4. Die vierdimensionale Form der Grundgleichungen und ihre Anwendung auf langsam bewegte Körper. . . . .	17
§ 5. Die elektromagnetische Polarisierung zweiter und höherer Ordnung.	
1. Die der elektrischen Polarisierung höherer Ordnung äquivalente Raum- und Flächenladung . . . . .	21
2. Relativistische Verallgemeinerung . . . . .	24
§ 6. Geometrische Deutung der makroskopischen Elektrizitätsverteilung mittels Molekülmodellen.	
1. Elektrische Polarisierung und Ladungsdichte . . . . .	26
2. Magnetische Polarisierung und relativistische Verallgemeinerung . . . . .	29
§ 7. Die einfachste Form der elektromagnetischen Feldgleichungen für isotrope und anisotrope Körper.	
1. Die elektromagnetischen Konstanten isotroper Körper . . . . .	32
2. Die Grundgleichungen und die Grenzbedingungen . . . . .	35
§ 8. Die Verallgemeinerung der Feldgleichungen für bewegte Körper.	
1. Direkte Berücksichtigung der relativen Geschwindigkeit . . . . .	38
2. Relativistische Verallgemeinerung der elektromagnetischen Materialkonstanten . . . . .	40
§ 9. Verschiedene Komplikationen der Theorie bei wirklichen Körpern.	
1. Die von der Polarisierung höherer Ordnung herrührenden Komplikationen. . . . .	44
2. Komplikationen, welche die Linearität der Gleichungen aufheben	47

Zweites Kapitel. Energie und Kräfte.

	Seite
§ 1. Vorbemerkungen.	
1. Physikalische Bedeutung der Energie in der makroskopischen Elektrodynamik . . . . .	48
2. Physikalische Bedeutung der makroskopischen elektromagnetischen Kräfte. . . . .	50
§ 2. Die den freien Ladungen zugehörigen quadratischen Größen (Energie, Kräfte, Spannungen).	
1. Einteilung der quadratischen Größen entsprechend den Beiträgen der freien und der gebundenen Elektronen . . . . .	51
2. Die auf die freien Elektronen wirkenden (effektiven) Kräfte und deren Arbeit . . . . .	52
3. Transformation der Arbeit; die den freien Elektronen zugehörige elektromagnetische Energie . . . . .	54
4. Transformation der Kräfte; der den freien Elektronen zugehörige Spannungstensor . . . . .	57
5. Grenzflächen und Flächenkräfte . . . . .	59
§ 3. Die den gebundenen Elektronen zugehörigen quadratischen Größen.	
1. Die den gebundenen Elektronen zugehörige Energie . . . . .	62
2. Kräfte und Spannungen . . . . .	64
§ 4. Beziehung zwischen den gemittelten totalen und effektiven Feldstärken im Falle gebundener Elektronen; Berichtigung der Resultate des vorhergehenden Paragraphen.	
1. Die effektiven Feldstärken im Mittelpunkt eines neutralen Moleküls; Korrektur der Energie- und Strahlungsdichte . . . . .	67
2. Gradient der effektiven Feldstärken im Mittelpunkt eines Moleküls; Korrektur der Kräfte und Spannungen. . . . .	71
3. Effektive Feldstärken im Falle einer Mischung verschiedener Moleküle. . . . .	75
§ 5. Die vollständigen quadratischen Größen und die verallgemeinerten Bedingungen ihrer Aufspaltung.	
1. Der vollständige Energiespannungstensor . . . . .	77
2. Die Mittelwerte der quadratischen Größen im Falle harmonischer Schwingungen; <i>Hermite'sche</i> Bedingungen für die Suszeptibilitätstensoren . . . . .	80
3. Gedämpfte Schwingungen und Zurückführung der Dämpfung auf eine scheinbare Leitfähigkeit. . . . .	83
§ 6. Vierdimensionale Form des Energiespannungstensors.	
1. Oberflächeneffekte und die aus der Invarianzforderung folgenden Zusatzglieder . . . . .	86
2. Aufspaltung des vierdimensionalen Energiespannungstensors in die den gebundenen und den freien Elektronen gehörigen Anteile. . . . .	89
3. Relativistische Betrachtung der <i>Lorentz'schen</i> Korrekturen . . . . .	94
§ 7. Elektromagnetische Energie und Thermodynamik	
1. Allgemeine Prinzipien und fundamentale Größen . . . . .	95
2. Fundamentale thermodynamische Relationen für die elektrischen und magnetischen Polarisationserscheinungen . . . . .	99
3. Thermodynamische Relationen für die von den freien Elektronen abhängigen Kontakterscheinungen . . . . .	103
4. Thermodynamik der elektromagnetischen Strahlungerscheinungen . . . . .	104
§ 8. Elektromagnetische Kräfte und Elastizitätstheorie.	
1. Elektro- und Magnetostriktion in gasförmigen und flüssigen Körpern . . . . .	108

	Seite
2. Grundzüge der Elastizitätstheorie fester Körper. . . . .	110
3. Elektromagnetische Striktionserscheinungen in festen Körpern	115
<b>Drittes Kapitel. Quasi-mikroskopische Theorie der elektromagnetischen Eigenschaften materieller Körper.</b>	
§ 1. Elektrostatische Polarisierung (elektrische Suszeptibilität für zeitlich konstante Felder).	
1. Berechnung der Suszeptibilität von dielektrischen Körpern mittels des Polarisationsensors der einzelnen Moleküle . . . . .	118
2. Berechnung des Polarisationsensors der Moleküle mittels der Polarisationskoeffizienten der einzelnen Atome . . . . .	121
3. Die durch Orientierung von Dipolmolekülen bedingten Polarisierungen . . . . .	123
4. Orientierungseffekt im Falle nicht-polarer Moleküle . . . . .	127
§ 2. Magnetostatische Polarisierung (dia-, para- und ferromagnetische Erscheinungen).	
1. Das Wesen des Diamagnetismus . . . . .	129
2. Berechnung der diamagnetischen Suszeptibilität . . . . .	132
3. Paramagnetismus . . . . .	135
4. Ferromagnetische Erscheinungen . . . . .	137
5. Spontane Magnetisierung . . . . .	140
§ 3. Elektrische Polarisierung bei harmonisch schwingenden Feldern; Gyration und optische Aktivität.	
1. Polarisationsensor und Gyrationsektor . . . . .	142
2. Die durch ein zusätzliches magnetisches Feld bedingte Gyration	144
3. Die durch ein zusätzliches elektrisches Feld bedingte Anisotropie	146
4. Einfluß der magnetischen Schwingungen auf die elektrische Polarisierung . . . . .	148
5. Einfluß der räumlichen Periodizität des elektrischen Feldes; optische Aktivität . . . . .	149
§ 4. Elektrische Dämpfung.	
1. Formale Theorie der Dämpfung und ihr Einfluß auf den elektrischen Polarisationsensor für harmonische Schwingungen. . .	152
2. Strahlungsdämpfung . . . . .	157
3. Stoßdämpfung . . . . .	160
§ 5. Die Orientierungspolarisierung und die ihr entsprechende Dämpfung in harmonisch schwingenden Feldern.	
1. Allgemeine Theorie der Diffusions- und Reibungsbewegung . .	165
2. Anwendung auf die Theorie der Orientierungspolarisierung . .	167
§ 6. Elektrische Leitfähigkeit.	
1. Allgemeine Theorie der elektrischen Leitung: Zurückführung der Leitfähigkeit auf den Diffusionskoeffizienten . . . . .	171
2. Elektrische Leitfähigkeit von Gasen . . . . .	173
3. Leitfähigkeit von flüssigen und festen Elektrolyten . . . . .	174
4. Die Leitfähigkeit von Metallen . . . . .	176
§ 7. Elektrolytische Polarisierung und Kontaktpotentiale.	
1. Diffusionskräfte und Polarisierungsschichten . . . . .	179
2. Elektrolytische Polarisierung im Falle einer beweglichen Ionengattung (feste Elektrolyten und Metalle). . . . .	181
3. Elektrolytische Polarisierung im Falle zweier beweglicher Ionengattungen . . . . .	184
4. Kontaktpotentiale . . . . .	189

**Zweiter Abschnitt.**

**Allgemeine Probleme der makroskopischen Theorie.**

Viertes Kapitel. Fortpflanzung elektromagnetischer Schwingungen (Wellen) in unbegrenzten Körpern.

- § 1. Homogene und isotrope Körper.
  - 1. Allgemeine Differentialgleichungen . . . . . 191
  - 2. Ebene Wellen: Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorptionskoeffizient . . . . . 194
  - 3. Ebene Wellen: Amplituden und Energie . . . . . 196
  - 4. Fortpflanzung ebener Wellen in bewegten Körpern . . . . . 199
- § 2. Ebene Wellen in homogenen anisotropen Körpern.
  - 1. Wellengeschwindigkeit als Funktion der Wellennormale:  $\mathfrak{D}$ -Grundschnvingungen . . . . . 201
  - 2. Strahlengeschwindigkeit als Funktion der Lichtstrahlenrichtung;  $\mathfrak{E}$ -Grundschnvingungen . . . . . 205
  - 3. Graphische Bestimmung der Grundschnvingungsrichtungen mittels der  $(v, \mathfrak{e})$ - und  $(u, \mathfrak{d})$ -Flächen . . . . . 207
  - 4. Strahlenfläche und Normalenfläche. . . . . 209
  - 5. Einachsige Kristalle . . . . . 212
- § 3. Ebene Wellen in gyrotropen Körpern; Verallgemeinerung für beliebige homogene Körper.
  - 1. Allgemeine Theorie der optischen Gyrotropie; Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen und Grundschnvingungstypen . . . 213
  - 2. Nähere Diskussion der vorhergehenden Resultate . . . . . 215
  - 3. Drehung der Polarisationssebene: Faradayeffekt. . . . . 218
  - 4. Allgemeine Theorie durchsichtiger Körper . . . . . 219
  - 5. Einfluß der Dämpfung . . . . . 221
- § 4. Nichtharmonische Schwingungsvorgänge in homogenen Körpern; lineare und räumliche Wellengruppen.
  - 1. Darstellung beliebiger elektromagnetischer Vorgänge durch Superposition ebener sinusoidaler Elementarwellen. . . . . 223
  - 2. Lineare (ebene) Wellengruppen . . . . . 225
  - 3. Dispersion von ebenen Wellen . . . . . 228
  - 4. Stehende Wellen . . . . . 231
  - 5. Räumliche Wellengruppen; Wellenpakete, monochromatische Strahlenbündel . . . . . 232
  - 6. Ergänzungen. . . . . 235
- § 5. Elektromagnetische Wellen in quasi-homogenen Körpern.
  - 1. Allgemeine Diskussion der Wellengleichung . . . . . 236
  - 2. Kurze Wellen; geometrische Optik und ihre Analogie mit der Mechanik . . . . . 239
  - 3. Ergänzungen; Wellenoptik und *Huyghenssche* Elementarwellen 242
- § 6. Streuung der elektromagnetischen Wellen in trüben Körpern.
  - 1. Bestimmung der Streustrahlung durch angenäherte Lösung der „gestörten“ Wellengleichung. . . . . 245
  - 2. Elementare Bestimmung der von den Dichteschwankungen herrührenden Streustrahlung und ihrer Polarisation. . . . . 249
  - 3. Die von den Orientierungsschwankungen herrührende Streustrahlung und ihre depolarisierende Wirkung . . . . . 252
  - 4. Dichteschwankungen in flüssigen und festen Körpern . . . . . 255
- § 7. Behandlung der Wellenfortpflanzung in homogenen Körpern nach der direkten Methode der Fernwirkungstheorie.
  - 1. Vorbemerkungen . . . . . 258

	Seite
2. Die durch eine den primären Wellen parallele Schicht bedingte sekundäre Strahlung . . . . .	260
3. Angenäherte Form der Gesetze der Wellenfortpflanzung in homogenen Körpern und ihre anschauliche Deutung . . . . .	262
4. Die exakte Lösung des Problems mittels einer Integralgleichung	265
 <b>Fünftes Kapitel. Elektromagnetische Schwingungen in begrenzten Körpern.</b>	
§ 1. Reflexion und Durchgang ebener Wellen bei senkrechtem Einfallen auf eine ebene Trennungsfläche zweier homogener Körper.	
1. Behandlung des Problems nach der Methode der Fernwirkungstheorie . . . . .	267
2. Behandlung des Problems nach der üblichen Methode; isotrope Körper . . . . .	269
3. Anisotrope und gyrotrope Körper . . . . .	273
§ 2. Reflexion und Brechung ebener Wellen beim schiefen Einfallen auf eine ebene Grenzfläche.	
1. Isotrope durchsichtige Körper . . . . .	276
2. Vollständige Polarisation, Totalreflexion, Absorption . . . . .	279
3. Anisotrope Körper; Doppelbrechung und konische Refraktion; graphische Konstruktion der gebrochenen Wellen und Strahlen	282
§ 3. Reflexion und Brechung von Kugelwellen an einer ebenen Grenzfläche; Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie.	
1. Vollkommen leitende Ebene . . . . .	285
2. Elektrische und magnetische Antenne bei der Annahme einer ideal leitenden Erde . . . . .	288
3. Zylindrische Elementarwellen und Darstellung beliebiger Wellenvorgänge durch ihre Superposition . . . . .	291
4. Anwendung auf den Fall einer elektrischen Vertikalantenne; zylindrische Oberflächenwellen . . . . .	293
5. Übersicht der anderen Typen von Sendeantennen . . . . .	298
§ 4. Drahtwellen und Oberflächenwellen.	
1. Vollkommen leitende Drähte . . . . .	301
2. Unvollkommen leitende Drähte . . . . .	306
3. Draht von unendlich großem Radius (ebene Oberflächenwellen) . . . . .	309
4. Draht von endlichem Radius; Kabel . . . . .	310
§ 5. Elektromagnetische Schwingungen in allseitig begrenzten Körpern; allgemeine Theorie der Eigenschwingungen.	
1. Mechanismus der elektrischen Eigenschwingungen in Metallkörpern	314
2. Feld und Substanztheorie der Eigenschwingungen . . . . .	317
3. Einige allgemeine Eigenschaften der Eigenschwingungen; Orthogonalität der Eigenfunktionen beim inneren Problem . . . . .	320
§ 6. Wichtigste Spezialfälle von Eigenschwingungen.	
1. Kugel . . . . .	323
2. Geradliniger Draht von endlicher Länge . . . . .	327
3. Hohlraum (rechtwinkliger Kasten) . . . . .	334
§ 7. Erzwungene Schwingungen und Beugungserscheinungen.	
1. Allgemeine Behandlungsweise . . . . .	337
2. Qualitative Betrachtung zweier Grenzfälle . . . . .	338
3. Die einfachsten Diffraktionsprobleme; Beugung des Lichtes an Schirmen und Öffnungen . . . . .	342
4. Elementare Diffraktionstheorie für den Fall paralleler primärer und sekundärer Strahlenbündel . . . . .	348

	Seite
5. Die Beugungsgitter als physikalische und mathematische Instrumente . . . . .	350
<b>Sechstes Kapitel. Theorie der strahlungslosen (quasistationären und quasistatischen) Erscheinungen in begrenzten Körpern.</b>	
§ 1. Grundlagen der angenäherten Theorie der quasistationären (strahlungslosen) Vorgänge.	
1. Angenäherte Feldgleichungen . . . . .	354
2. Grenzbedingungen . . . . .	357
3. Energie . . . . .	358
§ 2. Elektrische Schwingungen in einem linearen Leiter.	
1. Kräfte und Strom in einem nicht vollkommen geschlossenen Leiter	359
2. Die Eigenschwingungen und die erzwungenen Schwingungen eines fast geschlossenen Leiters . . . . .	362
3. Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen in Draht- und Kabelleitungen . . . . .	366
§ 3. Elektrische Schwingungen in einem System von linearen Leitern (quasistationäre lineare Ströme).	
1. Induktiv gekoppelte Leiter . . . . .	370
2. Elektrostatische und galvanische Koppelung . . . . .	376
3. Anwendung auf Stromnetze des allgemeinen Hamiltonschen Variationsprinzips. . . . .	378
4. Mechanische Kräfte zwischen Wechselströmen; bewegte Stromleiter; Dynamomaschinen . . . . .	383
§ 4. Theorie der Induktionsströme in körperlichen (dreidimensionalen) und plattenförmigen Leitern.	
1. Angenäherte Methode zur Bestimmung der Induktionsströme . . . . .	386
2. Axiales (meridionales) magnetisches Wechselfeld . . . . .	388
3. Transversales magnetisches Wechselfeld; Drehfelder und Drehstrommotoren . . . . .	392
4. Relativität der Drehbewegung; dünne Scheiben im transversalen und longitudinalen Magnetfeld. . . . .	396
5. Unbegrenzte ebene Platte in einem beliebigen magnetischen Wechselfeld . . . . .	398
§ 5. Stationäre (galvanische) Ströme und Übergang zur Elektrostatik.	
1. Stromverteilung in Elektrolyten (unvollkommen leitenden Körpern) bei Anwesenheit von metallischen (vollkommen leitenden) Elektroden. . . . .	401
2. Elektrostatische Potentialverteilung und ihre Beziehung zur galvanischen . . . . .	403
3. Der Fall eines homogenen Elektrolyten . . . . .	405
4. Der Fall zweier verschiedener Elektrolyten . . . . .	406
5. Thermoelektrische Erscheinungen und Einfluß der freien Volumladung auf die elektrostatische Potentialverteilung. . . . .	409
§ 6. Allgemeine Prinzipien der Elektro- und Galvanostatik.	
1. Eindeutigkeit der Lösung des elektrostatischen Problems und Minimalsätze . . . . .	412
2. Galvanostatisches Problem und seine Verknüpfung mit dem elektrostatischen im Falle von zwei Elektroden . . . . .	415
3. Nähere Betrachtung der elektrostatischen Energie und der Induktions- bzw. der Kapazitätskoeffizienten . . . . .	417
4. Die elektrostatischen Kräfte. . . . .	420

	Seite
§ 7. Grundprobleme und allgemeine Methoden der Elektro-, Galvano- und Magnetostatik.	
1. Leitende Körper von beliebiger Gestalt (räumliche Probleme) . . . . .	425
2. Zylindrische Leiter (ebene Probleme) . . . . .	428
3. Dielektrische und magnetisierbare Körper im gegebenen primären Feld . . . . .	431
4. Magnetische Ketten . . . . .	434
§ 8. Elementar lösbare elektrostatische Aufgaben.	
1. Ladungsverteilung auf einem leitenden Ellipsoid . . . . .	437
2. Das Potential eines Rotationsellipsoids . . . . .	439
3. Elliptischer Zylinder . . . . .	443
4. Zwei leitende Kugeln; die Methode der elektrischen Bilder . . . . .	444
5. Anwendung der Bildermethode auf zylindrische Leiter . . . . .	449
6. Dielektrische Körper; unvollkommene Spiegelung in einer Ebene; Ellipsoid im homogenen Felde . . . . .	451
Anhang. Mathematische Ergänzungen.	
§ 1. Krümmungslinige orthogonale Koordinaten . . . . .	458
1. Zylindrische Koordinaten . . . . .	461
2. Räumliche Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten . . . . .	461
3. Konform abbildende Koordinaten . . . . .	462
4. Rotationssymmetrische Koordinaten . . . . .	465
5. Ellipsoidales (konfokales) Koordinatensystem . . . . .	466
§ 2. Statische Probleme; Entwicklung nach den harmonischen Grundfunktionen.	
1. Fragestellung und einfachste Lösungsmethode . . . . .	469
2. Allgemeine Eigenschaften der harmonischen Grundfunktionen . . . . .	470
3. Lösung der elektrostatischen Probleme durch Entwicklung des Potentials nach harmonischen Grundfunktionen . . . . .	475
4. Die harmonischen Grundfunktionen für sphäroidale und zylindrische Koordinaten . . . . .	480
5. Ebene Probleme und analytische Funktionen . . . . .	483
6. Räumliche Probleme und <i>Greensche</i> Funktionen . . . . .	485
§ 3. Schwingungsprobleme; Entwicklung nach den Eigenfunktionen.	
1. Die Gestalt der Eigenfunktionen für rotationssymmetrische (sphärische und sphäroidale) Koordinaten . . . . .	487
2. Rotationssymmetrische Eigenschwingungen . . . . .	491
3. Allgemeine Theorie der freien elektrischen Schwingungen einer nicht vollkommen leitenden Kugel . . . . .	494
4. Erzwungene Schwingungen einer Kugel im Felde ebener elektromagnetischer Wellen . . . . .	498
5. Bestimmung der erzwungenen Schwingungen durch Quadratur . . . . .	501
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	502

## Druckfehlerberichtigungen.

S. 41 unten	statt $s_{\alpha\beta}$	lies $s_{k\beta}$
S. 67 1. Zeile	„ (23 a, b, c)	„ (23, 23 a)
S. 69 oben	„ d. h. nach (14)	„ d. h. nach (25)
S. 71 Mitte	„ Ausgangsformel (16)	„ Ausgangsformel (19)
S. 71 Formel (29 b)	„ $d\zeta$	„ $d\mathfrak{B}$
S. 71 2. Zeile von unten	„ (16) und (16 a)	„ (26) und (26 a)
S. 165 unten	„ $N$	„ $n$
S. 167 Anmerkung	„ $kT$	„ $RT$
S. 170 13. Zeile	„ Relationszeit	„ Relaxationszeit
S. 170 21. Zeile	„ Bedeutungen	„ Bedingungen
S. 248 10. Zeile	„ (58 b)	„ (58 c)
S. 281 unten	„ $(E_z^{a+} + E_z^{a-})$	„ $(E_z^{a+} - E_z^{a-})$
S. 295 zwischen F. (23 b) u. (23 c)	„ $\frac{f_b}{\sqrt{l^2 - k_a^2}}$	„ $\frac{f_b}{\sqrt{l^2 - k_b^2}}$
S. 299 1. Zeile	„ $ldl$	„ $l^2 dl$
S. 307 Mitte	„ durch Einsetzen von (34)	„ durch Einsetzen von (35)
S. 310 F. (39)	„ $\varphi^{(h)} = \varphi^{(h)}(r) \dots$	„ $\varphi^{(h)} = \varphi_0^{(h)}(r)$
S. 328 F. (50)	„ $A_1(r)e^{i a z}$	„ $A_1(r)e^{i a z}$
S. 357 12. Zeile	„ $\dots = \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t}$	„ $\dots = -\frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t}$
S. 371 unten	„ folglich nach (15)	„ folglich nach (16 a)
S. 373 F. (18)	„ $\frac{\omega^2}{c^2} L_{12}$	„ $\frac{\omega^2}{c^2} L_{12}^2$
S. 481 unten	„ „zugeordnete“ Legendresche Funktion	„ Legendresche Funktion zweiter Art
S. 491 12. Zeile	„ (4 b, c) und (28 b)	„ (4 b, c).

Erster Abschnitt.

## Allgemeine Grundlagen der makroskopischen Theorie.

Erstes Kapitel.

### Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.

#### § 1. Abhängigkeit der gemittelten Feldgrößen von den gemittelten Substanzgrößen.

##### 1. Definition der Mittelwerte verschiedener Größen.

Die elektromagnetischen Erscheinungen in materiellen Körpern, die aus einer *sehr großen* Anzahl von elementaren Teilchen — Molekülen, Atomen oder Elektronen — bestehen, sind außerordentlich kompliziert. Eine genaue Beschreibung dieser Erscheinungen ist praktisch unmöglich und sogar kaum nötig, denn unsere Sinnesorgane und Beobachtungsmittel sind zu grob, um uns zu erlauben, die Einzelheiten solcher komplizierter Erscheinungen wahrzunehmen. Damit ist nicht gemeint, daß wir im allgemeinen nicht imstande sind, die *elementaren Vorgänge*, welche in den *einzelnen Körperteilchen* stattfinden, zu beobachten. Es handelt sich vielmehr um die empirische Beschreibung und theoretische Beurteilung der elektromagnetischen Vorgänge in Systemen, die *aus einer ungeheuren Anzahl* solcher Teilchen bestehen. Dabei sollen die von der Größe dieser Zahl herrührenden Komplikationen irgendwie ausgeschlossen werden, d. h. wir müssen die wirklichen Erscheinungen durch bestimmte vereinfachte ersetzen, die mit den wirklichen hinsichtlich ihrer beobachtbaren Effekte äquivalent sind.

Diese vereinfachten Ersatzercheinungen bilden den Gegenstand der *makroskopischen Theorie*. Die Vereinfachung besteht im Prinzip in einer Ausglattung der *mikroskopischen Inhomogenitäten*, d. h. der Schwankungen, welche die verschiedenen elektromagnetischen Größen innerhalb sehr kleiner räumlicher und zeitlicher Gebiete wegen der diskontinuierlichen Verteilung der elektrischen Elementarladungen und ihrer raschen Bewegung erfahren. Um diese Begriffe zu präzisieren, wollen wir unter einem „sehr kleinen“ oder „mikroskopischen“ Raumgebiet ein solches Raumgebiet verstehen, dessen lineare Abmessungen  $L$  von der Größenordnung des mittleren Abstandes der Nachbarmoleküle des betrachteten Körpers sind. Mit anderen Worten: ein mikroskopisches Raumgebiet

## 2 Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.

soll das durch ein Molekül durchschnittlich eingenommene Volum bedeuten. Ferner wollen wir ein „sehr kleines“ oder mikroskopisches Zeitintervall  $T$  definieren als ein Zeitintervall von der Größenordnung der natürlichen Umlauf- bzw. Schwingungsperiode der Elektronen (oder Ionen), aus welchen die betrachteten Moleküle aufgebaut sind.

Die obenerwähnte „Ausglattung der mikroskopischen Unhomogenitäten“ für irgendwelche elektromagnetische Größe  $F$ , die als eine gegebene Orts- und Zeitfunktion zu behandeln ist, kann man nun allgemein definieren als den Ersatz des wirklichen Wertes dieser Funktion für einen bestimmten Raumzeitpunkt durch seinen Mittelwert in einem diesen Punkt enthaltenden mikroskopischen Raumzeitgebiet von beliebiger, aber für alle Punkte derselben Gestalt und Größe. Es ist dieser Mittelwert  $\bar{F}$ , welcher in der makroskopischen Theorie statt des wirklichen Wertes  $F$  betrachtet wird.

Eine solche Betrachtungsweise hat, wie leicht einzusehen, gewisse prinzipielle Grenzen, außerhalb deren sie jeden physikalischen Sinn verliert. Und zwar ist sie nur dann erlaubt und vorteilhaft, wenn die mikroskopischen Längen und Zeiten ( $L$ ,  $T$ ) klein genug im Vergleich mit den entsprechenden „makroskopischen“ Größen sind. Im Falle schwingungs- bzw. wellenartiger elektromagnetischer Vorgänge sind diese makroskopischen Längen- und Zeiteinheiten in einer ganz natürlichen und unzweideutigen Weise durch die *Wellenlänge*  $\lambda$  und die *Schwingungsperiode*  $\tau$  festgelegt. Sonst bleiben sie gewissermaßen unbestimmt, ja sogar willkürlich.

Eine konsequente makroskopische Theorie der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in einem materiellen Körper ist also im allgemeinen nur dann möglich, wenn die Ungleichungen

$$\lambda \gg L, \quad \tau \gg T \quad (1)$$

erfüllt sind, d. h. wenn die Wellen nicht zu kurz sind oder wenn die Materie nicht zu verdünnt ist.

Solange  $L$  sehr klein im Vergleich zu  $\lambda$  bleibt, kann man das Ortsmittel der Funktion  $F$  für ein mikroskopisches Gebiet ersetzen durch das entsprechende Mittel für ein mikroskopisch sehr großes Gebiet, welches eine sehr große Anzahl von Molekülen enthält und trotzdem sehr klein gegen das makroskopische Einheitsvolumen ( $\lambda^3$ ) ist. Dies ist besonders bei amorphen Körpern notwendig wegen der nicht ganz regelmäßigen Anordnung der Nachbarmoleküle.

Ein solches „erweitertes“ Ortsmittel stellt im allgemeinen auch das Zeitmittel der betrachteten Funktion dar, denn die zeitlichen Schwankungen, welche von der Bewegung der Elektronen in den einzelnen Molekülen herrühren, zerstören sich gegenseitig bei Zusammensetzung vieler Moleküle.

## 2. Bestimmung der Mittelwerte der Feldgrößen.

Wir wenden uns jetzt speziell dem Falle zu, daß  $F$  eine elektromagnetische *Feldgröße* (elektrische oder magnetische Feldstärke, Potential usw.) bedeutet. Nach der allgemeinen Theorie, die im ersten Bande entwickelt worden ist, kann sie — jedenfalls prinzipiell — bestimmt werden, falls die Lage aller den betrachteten Körper bildenden Elementarladungen (Elektronen) zu jeder Zeit bekannt ist. Diese Bestimmung kann auf zwei verschiedene Weisen geschehen, und zwar entweder *direkt*, mittels der Integralausdrücke für das elektromagnetische Feld (oder Potential) jedes einzigen Elektrons, oder *indirekt*, mittels der Differentialgleichungen, welche die raumzeitlichen Ableitungen von  $F$  mit der räumlichen Dichte  $s$  der Elektrizität (d. h. der Ladung, des Stromes, der Polarisation usw.) verknüpfen. Für die „mikroskopische“ Theorie sind beide Methoden physikalisch wie mathematisch vollkommen äquivalent. Anders ist es mit der makroskopischen Theorie, wo wir nicht die wirklichen Werte von  $F$ , sondern nur die mikroskopischen Mittelwerte  $\bar{F}$  brauchen. Hier erweist sich die indirekte Methode in mathematischer Hinsicht viel einfacher als die direkte, denn die Mittelwertbildung läßt sich schon *vor* der Integration der Feldgleichungen vollziehen. Schreibt man nämlich diese Differentialgleichungen symbolisch in der Form

$$D(F) = s, \quad (2)$$

so gilt wegen der Linearität des Differentialausdruckes  $D(F)$  in bezug auf  $F$

$$\overline{D(F)} = D(\bar{F}), \quad (2a)$$

und folglich

$$D(\bar{F}) = \bar{s}. \quad (2b)$$

Wir wollen die Formel (2a), wegen ihrer fundamentalen Bedeutung für den weiteren Aufbau der makroskopischen Theorie, etwas näher betrachten und strenger beweisen.

Es seien die räumlichen Koordinaten des betrachteten Punktes  $P$  und die Zeit durch  $x_1, x_2, x_3, x_4$  bezeichnet. Die entsprechenden Größen für einen benachbarten Punkt  $P'$  seien  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$ . Den mikroskopischen Mittelwert von  $F$  in  $P$  definieren wir durch die Formel

$$\bar{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\iiint F(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4}{\iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4}, \quad (3)$$

wobei die Integration auf ein den Punkt  $P$  enthaltendes mikroskopisches Raumzeitgebiet erstreckt werden muß. Wir können uns  $P$  als Mittelpunkt dieses Gebiets denken. Setzt man

$$x'_\alpha - x_\alpha = \xi_\alpha$$

und

$$dx'_1, dx'_2, dx'_3, dx'_4 = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 = d\Omega,$$

4 Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.

so wird

$$\bar{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\Omega} \int F(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3, x_4 + \xi_4) d\Omega. \quad (3a)$$

In dem rechtsstehenden Integral treten die Koordinaten des betrachteten Punktes als *Parameter* auf. Differenziert man es nach einem dieser Parameter und beachtet, daß

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F(x_1 + \xi_1, \dots) = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} F(x_1 + \xi_1, \dots) = \frac{\partial}{\partial x'_1} F(x'_1, \dots)$$

ist, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{F}(x_1, \dots) = \frac{1}{\Omega} \int \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} F(x'_1, \dots) d\Omega,$$

d. h.

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{F}(x_1, \dots) = \overline{\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} F(x_1, \dots)}. \quad (3b)$$

Diese Formel läßt sich sofort auf einen beliebigen Differentialoperator  $D$  verallgemeinern.

Neben dem Vorteil der mathematischen *Einfachheit* hat aber die indirekte Methode gegenüber der direkten den Nachteil der physikalischen Unanschaulichkeit und Formalität. Um den physikalischen Sinn ihrer Resultate sich klarmachen zu können und einen tieferen Einblick in den Mechanismus der elektromagnetischen Erscheinungen in materiellen Körpern zu gewinnen, muß man diese Resultate — wenigstens in den *einfachsten Fällen* — auch nach der direkten Methode ableiten und interpretieren.

## § 2. Abhängigkeit der gemittelten Substanzgrößen von den gemittelten Feldgrößen.

Für die Bestimmung von  $\bar{F}$  nach der indirekten Methode ist die genaue Kenntnis der wirklichen Elektrizitätsverteilung nicht nötig; wir brauchen nach (2b) nur den mikroskopischen Mittelwert der entsprechenden Dichtefunktion  $s$  zu wissen. Dieser Mittelwert  $\bar{s}$  ist aber im allgemeinen nicht vorgegeben, sondern muß selbst *als eine bestimmte Funktion des gemittelten Feldes  $\bar{F}$  betrachtet werden*. Die Gestalt dieser Funktion

$$\bar{s} = \bar{s}(\bar{F}) \quad (4)$$

hängt von den speziellen elektromagnetischen Eigenschaften des entsprechenden Körpers ab; ferner von dem Charakter des zu behandelnden Vorgangs, z. B. im einfachsten Falle von rein sinusoidalen Schwingungsvorgängen von der Schwingungsfrequenz (oder der Wellenlänge), und schließlich gewissermaßen auch von der Art der Mittelwertbildung, d. h. von der Größe des gewählten mikroskopischen Raumzeitgebietes. Wir werden aber im folgenden den letzten Umstand außer acht lassen, was in ziemlich weiten Grenzen erlaubt scheint.

Es sei bemerkt, daß diese Grenzen durch den Charakter des für die Funktion  $\bar{s}(\bar{F})$  gemachten Ansatzes tatsächlich festgelegt werden (s. unten).

### 1. Allgemeine Ansätze und Einführung von Materialkonstanten.

Die genaue Ermittlung der Funktion (4) bildet eine Aufgabe, die außerhalb der makroskopischen Theorie liegt und ein tieferes Eindringen in die *Mechanik* der einzelnen Moleküle und Elektronen erfordert. Die allgemeinen Prinzipien einer solchen „mikroskopischen“ Mechanik, die wir im ersten Bande aufgestellt haben, erweisen sich aber dabei als inexakt und unvollkommen. Ihre Berichtigung und Vervollständigung wollen wir nur im dritten Bande unternehmen, wo außer der neuen Quantenmechanik auch die quantentheoretische Umgestaltung der Elektrodynamik dargelegt werden soll.

Verzichtet man also auf die exakte Lösung des mikromechanischen Problems, welche zur Ermittlung der Funktion (4) notwendig ist, so bleiben zwei Methoden übrig, um die Gestalt dieser Funktion wenigstens näherungsweise festzustellen.

In der ersten, rein *phänomenologischen* Methode wird ein ganz bestimmter, möglichst einfacher *Ansatz* über die Funktion  $\bar{s}(\bar{F})$  gemacht. Und zwar wird angenommen, daß die Größe  $\bar{s}$  oder ihre Komponenten sich *linear* durch die Komponenten von  $\bar{F}$  bzw. durch deren Ableitungen nach den räumlichen Koordinaten und nach der Zeit ausdrücken. Die *Koeffizienten* dieses linearen Zusammenhanges betrachtet man dabei als bestimmte *Materialkonstanten*, welche die elektromagnetischen Eigenschaften des betreffenden Körpers charakterisieren und sich empirisch bestimmen lassen (sie können dabei selbstverständlich auch von der Art des betrachteten Vorganges, z. B. von der Schwingungsfrequenz, abhängen). — Diese Betrachtungsweise ist der üblichen Betrachtungsweise der Elastizitätstheorie und der Hydrodynamik, wobei das obenerwähnte lineare Gesetz für die Funktion  $\bar{s}(\bar{F})$  dem *Hookeschen* Gesetz oder dem *Reibungsgesetz* entspricht, ganz analog.

In der zweiten, gewissermaßen *mikroskopischen* Methode wird ein dem *Hookeschen* Gesetz analoger Ansatz für die *einzelnen Körpermoleküle* (oder Atome) gemacht. Und zwar nimmt man an, daß die Elektronen, aus welchen diese Moleküle bestehen, miteinander *quasielastisch* gebunden sind, d. h. bei einer Verschiebung aus ihren (relativen) Gleichgewichtslagen eine *rücktreibende Kraft* erfahren, die dieser Verschiebung *proportional* ist. Obwohl eine solche Annahme sicher unrichtig ist, führt sie trotzdem zu Resultaten, die mit den Erfahrungstatsachen und mit den Ergebnissen der exakten quantenmechanischen Theorie in voller Übereinstimmung sind.

## 6 Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.

Es sei daran erinnert, daß die elektromagnetischen Eigenschaften eines Moleküls durch Angabe seiner *elektrischen und magnetischen Momente* verschiedener Ordnung charakterisiert werden können. Den Einfluß äußerer, z. B. von den anderen Molekülen herrührender Kräfte kann man folglich durch die zusätzlichen, von diesen Kräften „induzierten“ elektromagnetischen Momente des betrachteten Moleküls charakterisieren. Für den Spezialfall zeitlich konstanter äußerer Kräfte haben wir diese Frage schon im ersten Bande (Kap. IV, § 8) behandelt; die dort betrachteten „reellen Systeme“ entsprechen vollkommen dem oben definierten „quasielastischen“ Modell eines Moleküls. Gewöhnlich pflegt man nur die elektrischen und magnetischen Momente erster Ordnung („Dipolmomente“) zu berücksichtigen. Sind diese Momente bekannt, so ist es leicht, ihre Mittelwerte zu berechnen, d. h. die elektrische und magnetische *Polarisation* des betrachteten Körpers als lineare Funktion der entsprechenden gemittelten Feldgrößen zu bestimmen. Die auf diese Weise bestimmte Funktion ist selbstverständlich identisch mit der linearen Funktion  $\bar{s}(\bar{F})$  der phänomenologischen Theorie, wobei die in der letzteren auftretenden makroskopischen Materialkonstanten sich durch die entsprechenden Molekularkonstanten (Komponenten des Polarisationsensors) ausdrücken lassen.

### 2. Behandlung von Schwingungsvorgängen in der quasielastischen Theorie.

Wir sehen also, daß im Falle zeitlich konstanter Felder die phänomenologische und die quasielastische Theorie vollkommen äquivalent sind. Der Vorteil der letzteren liegt aber in dem Umstand, daß sie auch auf den allgemeinen Fall *zeitlich variabler Felder* mit vollem Erfolg angewandt werden kann. Es handelt sich dabei um die Integration der Bewegungsgleichungen der quasielastisch gebundenen Elektronen unter dem kombinierten Einfluß der äußeren Kräfte einerseits und der ihrer Verschiebung proportionalen inneren Kräfte andererseits. Diese Frage werden wir im 3. Kapitel eingehend betrachten. Hier sei zur Erläuterung der Begriffe das einfachste Beispiel eines „linearen Oszillators“, d. h. eines Elektrons, das nur in einer bestimmten Richtung ( $x$ ) sich verschieben kann, behandelt.

Die Gleichgewichtslage sei  $x = 0$ . Wir denken uns in dieser Lage ein zweites unbewegliches Elektron mit der entgegengesetzten Ladung  $-e$ . Das elektrische Moment des durch die beiden Elektronen gebildeten Dipols ist folglich  $p = ex$ . Die innere quasielastische Kraft wollen wir mit  $-kx$  bezeichnen. Dabei bedeutet  $k$  einen konstanten Faktor, welcher die Stärke der Bindung charakterisiert. Bei Anwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes mit der *zeitlich konstanten* Feldstärke  $E$  (in der  $x$ -Richtung) verschiebt sich die Gleichgewichtslage des be-

weglichen Elektrons nach  $x = \frac{eE}{k}$ . Vergleichen wir das entsprechende induzierte Dipolmoment  $p = ex = \frac{e^2}{k} E$  mit dem Ausdruck  $p = \alpha E$  auf S. 120 des ersten Bandes, so ergibt sich die folgende Formel für den *statischen Polarisationskoeffizient*  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{e^2}{k}. \quad (5)$$

Es sei nun  $E$  eine zeitlich variable Größe. Dann lautet die Bewegungsgleichung des Elektrons, wenn  $m$  seine Masse bedeutet:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + eE. \quad (6)$$

Die Integration dieser Gleichung bei Fehlen der äußeren Kraft ( $E = 0$ ) ergibt bekanntlich

$$x = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \quad (7)$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7a)$$

Wir bekommen also ungedämpfte freie Schwingungen mit der „natürlichen“ Frequenz  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

Im Falle eines harmonisch mit der Frequenz  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  schwingenden Feldes

$$E = E_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

läßt sich die Gleichung (6) lösen durch den einfachen Ansatz

$$x = x_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

Dabei wird wegen  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$

$$(k - m\omega^2) x = eE,$$

d. h. wegen (7a)

$$x = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{e}{k} \frac{E}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

und folglich

$$p = \alpha_\omega E \quad (8a)$$

mit

$$\alpha_\omega = \frac{\alpha}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\nu^2}{\nu_0^2}}. \quad (8b)$$

Sofern es also die *erzwungenen* Schwingungen unseres Oszillators anbetrifft, kann man ihn, ebenso wie im statischen Falle, durch einen bestimmten *dynamischen* oder „harmonischen“ Polarisationskoeffizienten  $\alpha_\omega$  charakterisieren.

Im allgemeinen Falle eines *unharmonisch* schwingenden Feldes bleibt die Abhängigkeit des Dipolmomentes von der Feldstärke zwar linear, kann aber durch eine Formel vom Typus (8a), die der einfachsten „statischen“ Form des *Hookeschen* Gesetzes entspricht, nicht ausgedrückt werden. Wir bekommen vielmehr für  $\dot{p}$  eine *Fourierreihe* oder ein *Fourierintegral* von der Gestalt

$$\dot{p} = \sum \alpha_{\omega} E_{\omega}, \quad \text{bzw.} \quad \dot{p} = \int_0^{\infty} \alpha_{\omega} dE_{\omega}, \quad (9)$$

je nachdem  $E$  eine periodische oder unperiodische Funktion der Zeit darstellt, wobei  $E_{\omega}$  bzw.  $dE_{\omega}$  seine harmonischen Komponenten bedeuten ( $E = \sum E_{\omega}$  oder  $E = \int dE_{\omega}$ ). Will man auch die freien Schwingungen des Elektrons berücksichtigen, so muß man zu den angegebenen Ausdrücken für  $\dot{p}$  noch die der Formel (7) entsprechenden Glieder hinzufügen.

Die angeführten Erörterungen machen es klar, daß die makroskopische Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen in materiellen Körpern *zunächst nur für rein harmonische Schwingungsvorgänge entwickelt werden kann* (die statischen Erscheinungen sind dabei als Grenzfall bei verschwindendem  $\omega$  zu betrachten). Die allgemeine Lösung des entsprechenden Problems für beliebige elektromagnetische Vorgänge läßt sich dann leicht als eine Superposition solcher *harmonischer Lösungen* darstellen.

Die Materialkonstanten, welche in den linearen Funktionen  $\bar{s}(\bar{F})$  auftreten, haben nur für diese harmonischen Lösungen bestimmte Werte, die im allgemeinen den mit dem Faktor  $\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$  multiplizierten Werten dieser Konstanten für den statischen Fall gleich sind.

Die für ungedämpfte harmonische Schwingungen abgeleiteten Resultate lassen sich in einer ganz formalen Weise ohne Zerlegung in ein *Fourierintegral* auf den Fall *gedämpfter* harmonischer Schwingungen übertragen. Eine Schwingung dieser Art (für die elektrische Feldstärke  $E$ ) kann man durch den reellen Teil des Ausdrucks  $E_0 e^{i\omega t}$  mit einer *komplexen Frequenz* und einer im allgemeinen auch komplexen Amplitude darstellen. Setzt man nämlich  $\omega = \omega' + i\omega''$  und  $E_0 = |E_0| e^{-i\varphi} = E' - iE''$ , wo  $\omega', \omega'', E'$  und  $E''$  reelle Größen sind, so wird

$$\Re(E_0 e^{-i\omega t}) = |E_0| e^{-\omega'' t} \cos(\omega' t - \varphi) = e^{-\omega'' t} (E' \cos \omega' t + E'' \sin \omega' t).$$

Wir bekommen also eine gedämpfte Schwingung mit der Frequenz  $\omega'$ , der Dämpfungskonstante  $\omega'' (> 0)$  und der ursprünglichen Amplitude  $|E_0|$ .

Wegen der Linearität der Bewegungsgleichung (6) kann man die erzwungenen Schwingungen des Oszillators durch den reellen Teil der

Lösung (8) bestimmen, wenn man dort für  $E$  den allgemeinen komplexen Ansatz  $E = E_0 e^{i\omega t}$  macht. Dabei muß man selbstverständlich für den harmonischen Polarisationskoeffizienten  $\alpha_\omega$  einen komplexen Wert bekommen.

Wir können uns ferner vorstellen, daß *die natürlichen Schwingungen des Oszillators auch gedämpft sind* (wir werden später sehen, daß dies im allgemeinen tatsächlich der Fall ist). Diese natürliche Dämpfung läßt sich formal berücksichtigen durch Einführung einer komplexen Schwingungsfrequenz  $\omega_0 = \omega'_0 + i\omega''_0$ . Dynamisch kann sie erklärt werden durch Hinzufügung einer z. B. der ersten oder dritten Ableitung von  $x$  proportionalen „Reibungskraft“ auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung (6). Dabei muß der Polarisationskoeffizient  $\alpha_\omega$  auch für ungedämpfte erzwungene Schwingungen einen komplexen Wert haben, der neben der Amplitude dieser Schwingungen auch ihre Phasenverschiebung (gegen  $E$ ) bestimmen soll.

### 3. Drehbewegung von Dipolmolekülen und fortschreitende Bewegung von Ionen.

Die oben skizzierte quasielastische Theorie betrachtet nur die *relative Bewegung* der gebundenen Elektronen, aus denen ein Molekül besteht, in bezug auf den Mittelpunkt dieses Moleküls oder eher auf ein mit ihm fest verbundenes Koordinatensystem. Sie ist deshalb ohne weiteres nur auf den Fall idealer fester Körper, wo die Moleküle sich als ganze weder drehen noch verschieben können, anwendbar. Im Falle flüssiger und gasförmiger Körper (und zum Teil auch wirklicher fester Körper) muß man noch diese Drehungs- und Verschiebungsbewegung der Moleküle in Betracht ziehen. Die erstere ist besonders zu berücksichtigen, wenn die betrachteten Moleküle (oder Atome) ein festes („natürliches“) elektrisches oder magnetisches Moment besitzen; infolgedessen müssen sie sich in einem äußeren Felde mehr oder minder in der entsprechenden Richtung *orientieren* und auf diese Weise einen gewissen Beitrag zur vollständigen elektrischen oder magnetischen Polarisation des betreffenden Körpers, unabhängig von der relativen Verschiebung der gebundenen Elektronen, beibringen.

Was die *Verschiebungsbewegung* anbetrifft, so spielt sie eine sehr wichtige Rolle, wenn die Moleküle *geladen* sind, d. h. einen Überschuß von positiven oder negativen Elektronen besitzen. Solche geladenen Moleküle oder Atome pflegt man als *Ionen* zu bezeichnen. Einen Spezialfall der Ionen bilden die *frei beweglichen* oder „freien“ Elektronen, die in festen und flüssigen Metallkörpern stets vorhanden sind und ihre charakteristische elektrische Leitfähigkeit bedingen. In anderen nicht-metallischen Körpern treten solche Elektronen nur ausnahmsweise auf. Die elektrische Leitfähigkeit dieser Körper, sofern sie nicht vollkommene Isolatoren sind, ist also auf den Umstand zurückzuführen, daß sie wenig-

stens teilweise nicht aus neutralen Molekülen (oder Atomen), sondern aus Ionen bestehen, die eine gewisse *Beweglichkeit* besitzen.

Unter der Wirkung eines äußeren elektrischen Feldes müssen die „freien“ Elektronen und die Ionen eine zusätzliche Geschwindigkeit in der Richtung der auf sie ausgeübten Kräfte bekommen. Diese zusätzliche Bewegung äußert sich als der durch das betrachtete Feld hervorgerufene elektrische *Leitungsstrom*. Nach dem *Ohmschen* Gesetze ist die Stärke dieses Stromes immer proportional der entsprechenden elektrischen Feldstärke. Um diesen phänomenologischen Zusammenhang beider Größen, die der üblichen Form des Reibungsgesetzes für die Bewegung fester Körper in Gasen und Flüssigkeiten entspricht, zu erklären, muß man eine *mikroskopische Reibungstheorie* aufbauen, nach welcher der freien Elektronen und Ionen bei ihrer Bewegung im betreffenden Körper eine Reibungskraft erfahren, die der mittleren Geschwindigkeit proportional ist und die der äußeren Kraft das Gleichgewicht hält. Dem Polarisationskoeffizienten eines gebundenen Elektrons entspricht hier die *Beweglichkeit* eines „freien“ Elektrons (oder Ions), die man gewöhnlich als das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{v}$  zu der eingepprägten (äußeren) Feldstärke  $\bar{E}$  definiert. Führt man noch den *Reibungskoeffizienten*  $\vartheta$ , den wir als Verhältnis der äußeren Kraft zu der mittleren Geschwindigkeit definieren wollen, so wird

$$\vartheta \bar{v} = e \bar{E} \quad (10)$$

und folglich für die Beweglichkeit

$$\beta = \frac{e}{\vartheta}. \quad (10a)$$

Es sei bemerkt, daß die Formel (10) oder, was dasselbe ist,

$$\bar{v} = \beta \bar{E}, \quad (10b)$$

streng genommen nur für statische oder harmonisch schwingende Felder gilt, ebenso wie (8a). Dabei ist  $\beta$  als eine bestimmte Funktion der Schwingenzahl  $\omega$  zu betrachten.

### § 3. Die Differentialgleichungen des makroskopischen Feldes.

#### 1. Trennung der Beiträgen der freien und der gebundenen Elektronen; Erregungsgrößen.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir uns zur tatsächlichen Aufstellung der Differentialgleichungen des gemittelten oder *makroskopischen* elektromagnetischen Feldes in materiellen Körpern wenden. Wir müssen also statt der symbolischen Gleichung (2b) die *Maxwell-Lorentz*schen Gleichungen einführen. Der Einfachheit halber wollen wir die die Mittelwertbildung bezeichnenden Querstriche weglassen, d. h. unter  $F(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$  und  $s(\mathfrak{j}, \varrho)$  die mikroskopischen Mittelwerte der entsprechenden

Größen verstehen. Die Grundgleichungen des makroskopischen Feldes werden dann *formal* identisch mit den Gleichungen I und II auf S. 132 des ersten Bandes. Es gilt also mit den üblichen Bezeichnungen:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{I})$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \varrho \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{j} \end{array} \right\} \quad (\text{II})$$

Die mittlere Stromdichte setzt sich im allgemeinen aus zwei verschiedenen Anteilen, die von der fortschreitenden Bewegung der *freien* Elektronen oder Ionen *relativ zum betrachteten Körper als Ganzem* bzw. von der Bewegung der *gebundenen* Elektronen, aus welchen diese Ionen und die neutralen Moleküle bestehen, *relativ zu den letzteren* oder zu ihren Mittelpunkten (Drehungsbewegung) herrühren, zusammen. Der erste Anteil, den wir mit  $\mathfrak{j}_f$  bezeichnen werden, bildet den *Leitungsstrom* und läßt sich nach dem *Ohmschen* Gesetz durch die elektrische Feldstärke ausdrücken. Der zweite Anteil  $\mathfrak{j}_g$  hängt in einer ganz verschiedenen, dem *Hookeschen* Gesetze analogen Weise von der elektrischen und magnetischen Feldstärke ab und muß deshalb einzeln behandelt werden.

Dementsprechend wollen wir auch die (mittlere) elektrische Ladungsdichte  $\varrho$  in zwei Teile zerlegen. Der erste Teil  $\varrho_f$  soll nur von der *Konzentration der freien Elektronen* und der Ionen oder genauer der *Ionenmittelpunkte* abhängen, während der zweite durch die relative Lage der gebundenen Elektronen in bezug auf die Mittelpunkte der Ionen und der neutralen Moleküle, oder kurz: von der *Verteilung* der Elektronen in diesen Teilchen bestimmt wird.

Wir stellen uns vor, daß der betrachtete Körper aus Teilchen mehrerer Arten besteht, mit den *resultierenden* Ladungen  $e^\alpha$  und den Konzentrationen  $N^\alpha$  ( $N^\alpha$  bedeutet die Anzahl der Mittelpunkte der Teilchen  $\alpha$ -er Art pro Volumeinheit). Es können diese Teilchen sowohl Elektronen und Ionen als auch neutrale Moleküle sein (im letzteren Falle hat man  $e^\alpha = 0$ ). Dann gilt nach den obigen Definitionen

$$\varrho_f = \sum_{\alpha} N^{\alpha} e^{\alpha}, \quad \mathfrak{j}_f = \sum_{\alpha} N^{\alpha} e^{\alpha} \frac{\mathfrak{v}^{\alpha}}{c}, \quad (11)$$

wo  $\mathfrak{v}^{\alpha}$  die mittlere Geschwindigkeit der entsprechenden Teilchen ist. Zur Berechnung von  $\varrho_g$  und  $\mathfrak{j}_g$  führen wir die von den Ionen und den neutralen Molekülen bedingte *elektrische und magnetische Polarisation* des betrachteten Körpers  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  ein. Dabei wird nach (18a) und (18b) S. 134—135 des I. Bandes

$$\left. \begin{aligned} \varrho_\sigma &= -\operatorname{div} \mathfrak{P} \\ \mathbf{j}_\sigma &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{M} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Es sei daran erinnert, daß die Vektoren  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  das elektrische und magnetische Moment pro Volumeinheit bedeuten. Wenn man sich die Moleküle (und Ionen) als *elementare* Dipole denkt, d. h. ihre elektrische und magnetische Momente  $\mathbf{p}^\alpha$ ,  $\mathbf{m}^\alpha$  in den entsprechenden Mittelpunkten lokalisiert, so hat man offenbar

$$\mathfrak{P} = \sum_{\alpha} N^{\alpha} \mathbf{p}^{\alpha}, \quad \mathfrak{M} = \sum_{\alpha} N^{\alpha} \mathbf{m}^{\alpha}. \quad (12a)$$

Um die Konzentration  $N^{\alpha}$  als eine bestimmte „glatte“ Ortsfunktion behandeln zu können, betrachtet man jeden Raumpunkt als den Mittelpunkt eines kugelförmigen Volumens  $v$ , welches eine *große Anzahl*  $n^{\alpha}$  der betreffenden Moleküle enthält, und definiert  $N^{\alpha}$  als das Verhältnis  $n^{\alpha} : v$ . Je größer man dabei  $v$  wählt, desto glatter verhält sich die Funktion  $N^{\alpha}(\mathbf{r})$ . Man muß aber  $v$  nicht zu groß wählen, denn sonst verliert diese Funktion und die damit verknüpften Mittelwerte  $\varrho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{M}$  jeden physikalischen Sinn.

Bei einer vollkommen regelmäßigen Verteilung der Moleküle im Raume (wie dies z. B. in kristallinen Körpern der Fall ist) oder auch bei regelloser, aber durchschnittlich homogener Verteilung, ( $N^{\alpha} = \text{konst}$ ) ist es im allgemeinen vorteilhaft, statt der grob definierbaren Konzentration  $N^{\alpha}$  (im obigen Sinne) die dazu reziproken Größen  $V^{\alpha} = \frac{1}{N^{\alpha}}$  einzuführen und sie als das durch *ein* einziges Teilchen der betrachteten Art, bei Fehlen aller Teilchen anderer Art, durchschnittlich eingenommenes Volum zu definieren. Man kann sich also vorstellen, daß die Größen  $\varrho$ ,  $\mathbf{j}$  (oder  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{M}$ ), durch eine gleichförmige Verteilung der Ladungen  $e^{\alpha}$  oder der Momente  $\mathbf{p}^{\alpha}$  usw. über die zugehörigen Volumina ( $V^{\alpha}$ ) und durch eine Superposition solcher Mittelwerte  $\frac{e^{\alpha}}{V^{\alpha}}$  (oder  $\frac{\mathbf{p}^{\alpha}}{V^{\alpha}}$ ) für Teilchen verschiedener Art entstehen.

Es ist wichtig zu bemerken, daß aus den angeführten Definitionen der mittleren Ladungs- und Stromdichte eine ganz bestimmte Vorschrift für die Mittelwertbildung der elektrischen und magnetischen Feldstärken folgt. Und zwar muß man bei dem Übergang von den exakten Feldgleichungen (2) zu den makroskopischen (2b) die Feldstärken ( $F$ ) *auf dieselbe Weise* wie die Elektrizitätsdichte ( $s$ ) mitteln.

Eine konsequente Durchführung dieser Regel führt zur folgenden Vorschrift zur Mittelwertbildung für die Feldstärken ( $F$ ).

Es soll zunächst  $F$  in einzelne Bestandteile  $F^{\alpha}$  zerlegt werden, die den verschiedenen Teilchenarten entsprechen. Jeder dieser Bestandteile muß ferner über *das zugehörige Volumen*  $V^{\alpha} = \frac{1}{N^{\alpha}}$  um den betrachteten Raumpunkt gemittelt werden, und schließlich müssen solche

„Partialmittelwerte“ zusammengesetzt werden zu dem gesuchten makroskopischen Mittelwert<sup>1)</sup>)

$$\bar{F} = \sum_{\alpha} \bar{F}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{V^{\alpha}} \int F^{\alpha} dV^{\alpha} = \sum_{\alpha} N^{\alpha} \int F^{\alpha} dV^{\alpha}. \quad (13)$$

Der Einfachheit und auch der Bestimmtheit halber ist es zweckmäßig, für alle Volumina  $V^{\alpha}$  dieselbe Gestalt anzunehmen, und zwar die Gestalt einer *Kugel*, deren Mittelpunkt mit dem betrachteten Punkt zusammenfällt. Es ist ferner zu beachten, daß neben den Raummittelwerten auch die Zeitmittelwerte zu bilden sind. — Falls die vollständige Feldstärke  $F$  noch einen Teil  $F^0$  enthält, der von fremden („äußeren“) Ladungen herrührt, so muß man für diesen Teil seinen *exakten* Wert benutzen, d. h.  $F^0 = \bar{F}^0$  setzen.

Wenn man die Moleküle und Ionen nicht als elementare Dipole behandelt und ihre elektromagnetischen Momente zweiter und höherer Ordnung berücksichtigt, treten auf der rechten Seite von (12a) zusätzliche Glieder, die wir in § 5 eingehend betrachten werden, auf.

Die Ionen bilden den allgemeinen Typus der Körperteilchen; es können dabei die Elektronen und die neutralen Moleküle als Spezialfälle angesehen werden. Es ist aber manchmal methodologisch vorteilhaft, mit Rücksicht auf die oben angeführte Einteilung der Elektrizitätsdichte, sich die Ionen durch freie Elektronen mit derselben Konzentration und Ladung, und neutrale Moleküle ersetzt zu denken. Eine solche „Aufspaltung“ der Ionen ist auch deshalb nützlich (obwohl selbstverständlich nicht notwendig), weil nur neutrale Teilchen ein ganz bestimmtes, von der Wahl ihres Mittelpunktes unabhängiges elektrisches Dipolmoment besitzen. Will man also die elektrische Polarisation nach (12a) eindeutig bestimmen, so muß man die Ladung des Ions einem quasi freien Ersatzelektron zuschreiben. — Wir werden dementsprechend von den Ionen nicht mehr reden und nur zwischen den freien und den gebundenen Elektronen (die neutrale Moleküle bilden) unterscheiden. Bei Einsetzen von (12) in die Grundgleichungen (II) nehmen die letzteren die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}) &= 4\pi \rho_f, \\ \operatorname{rot} (\mathfrak{H} - 4\pi \mathfrak{M}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}) &= 4\pi \mathfrak{j}_f, \end{aligned}$$

oder, wenn wir noch die Bezeichnungen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}, \quad (14)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} - 4\pi \mathfrak{M} \quad (14a)$$

<sup>1)</sup> Es sei bemerkt, daß die auf diese Weise definierten Mittelwerte auch für den Fall der Fortpflanzung sehr kurzer Wellen — wie es die Röntgenwellen sind — einen physikalischen Sinn beibehalten, während die übliche Definition sich auf diesen Fall gar nicht anwenden läßt.

14 Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.  
 einführen und die Indizes  $f$  weglassen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{D} &= 4\pi \varrho \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{D} &= 4\pi \mathfrak{j} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Gestalt wie (II), aber eine andere Bedeutung. Und zwar sind die elektrische und magnetische Feldstärke ersetzt durch die Vektoren  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$ , die wir als die *elektrische* bzw. *magnetische Erregung* bezeichnen werden<sup>1)</sup>. Dabei sollen  $\varrho$  und  $\mathfrak{j}$  hier und auch im folgenden nicht die totalen, sondern *nur die von den freien* Elektronen herrührende Ladungs- und Stromdichte bedeuten.

## 2. Unstetigkeitsflächen und Grenzbedingungen.

In den vorhergehenden Betrachtungen haben wir die Größen  $\varrho$ ,  $\mathfrak{j}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  als *endlich* und *stetig* vorausgesetzt. Diese Voraussetzung gilt aber im allgemeinen nur für das *innere* irgend eines materiellen Körpers. Sofern der letztere *begrenzt* ist, muß die Grenzfläche in der makroskopischen Theorie als eine *Unstetigkeitsfläche* betrachtet werden, wobei dort  $\varrho$  und  $\mathfrak{j}$  auch unendlich werden können, was einer endlichen *Flächendichte* der elektrischen Ladung ( $\eta$ ) und des elektrischen Stroms ( $\mathfrak{k}$ ) entsprechen soll. Die an der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Körpern (als einer von ihnen kann auch das Vakuum auftreten) geltenden Beziehungen lassen sich sehr einfach aus den Gleichungen (I) und (III) mittels des folgenden Kunstgriffes ableiten. Wir stellen uns zunächst vor, daß der eine Körper ( $a$ ) in den anderen ( $b$ ) *stetig* übergeht und lassen dann die Dicke  $\delta$  der Übergangsschicht gegen Null streben. Integriert man (I) und (III) über ein Volumen  $V$  dieser Schicht, welches einem bestimmten Teil  $S$  der wirklichen Grenzfläche entspricht und bezeichnet die dieser Fläche parallelen (fingierten) Grenzflächen der Schicht mit  $S_a$  und  $S_b$ , so folgt nach den bekannten Formeln der Vektorrechnung [vgl. (16a) und (16b) Einleitung, Bd. I], wenn wir noch die vom Körper  $a$  zum Körper  $b$  weisende Normale mit  $\mathfrak{n}$  bezeichnen ( $\mathfrak{n}_a = \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{n}_b = -\mathfrak{n}$ ) und die Bedingung  $dS_a = dS_b = dS$  berücksichtigen:

$$\int \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{E}^b - \mathfrak{E}^a) dS = 0,$$

$$\int \mathfrak{n} \times (\mathfrak{H}^b - \mathfrak{H}^a) dS + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{E} dV = 0,$$

und ebenso

$$\int \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{D}^b - \mathfrak{D}^a) dS = 4\pi \int \varrho dV;$$

$$\int \mathfrak{n} \times (\mathfrak{H}^b - \mathfrak{H}^a) dS - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{D} dV = 4\pi \int \mathfrak{j} dV.$$

<sup>1)</sup> Diese Bezeichnung ist hinsichtlich der Größen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  gegenüber der üblichen verkehrt. Die Gründe dafür werden wir weiter unten anführen.

Da offenbar die Vektoren  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{D}$  und ihre Ableitungen nach der Zeit endlich bleiben müssen, so ergibt sich bei verschwindender Schichtdicke, wenn wir noch die Flächendichte der Ladung und des Stroms durch die Formeln

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int \rho dV = \int \eta dS, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \mathfrak{j} dV = \int \mathfrak{k} dS$$

definieren und die Bezeichnungen  $\mathfrak{S}^b - \mathfrak{S}^a = \Delta \mathfrak{S}$  usw. einführen:

$$\int \mathfrak{n} \cdot \Delta \mathfrak{S} dS = 0, \quad \int \mathfrak{n} \times \Delta \mathfrak{C} dS = 0$$

und

$$\int \mathfrak{n} \cdot \Delta \mathfrak{D} dS = 4\pi \int \eta dS, \quad \int \mathfrak{n} \times \Delta \mathfrak{B} dS = 4\pi \int \mathfrak{k} dS.$$

Daraus folgt wegen der Willkürlichkeit des betrachteten Flächenteils (S):

$$\mathfrak{n} \cdot \Delta \mathfrak{S} = 0, \quad \mathfrak{n} \times \Delta \mathfrak{C} = 0 \quad (I')$$

und

$$\mathfrak{n} \cdot \Delta \mathfrak{D} = 4\pi \eta, \quad \mathfrak{n} \times \Delta \mathfrak{B} = 4\pi \mathfrak{k}. \quad (III')$$

Diese Formeln<sup>1)</sup> zeigen, daß die Normalkomponente von  $\mathfrak{S}$  und die Tangentialkomponente von  $\mathfrak{C}$  sich immer stetig ändern, die entsprechenden Komponenten von  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{B}$  dagegen nur dann, wenn es keine *freie* Flächenladung oder keinen Flächenstrom gibt. Es sei bemerkt, daß die Formeln (III') tatsächlich den Flächensprung der Normalkomponente von  $\mathfrak{C}$  und der Tangentialkomponente von  $\mathfrak{S}$  bestimmen, und zwar durch die Flächendichte der totalen — d. h. nicht nur von den freien, sondern auch von den gebundenen Elektronen — herrührenden Ladung und des totalen Stroms. In der Tat wird die Flächendichte der „gebundenen“ Ladung und Stromes auf jedem der angrenzenden Körper bestimmt durch die bekannten Formeln [vgl. (31a) S. 90 und (33a) S. 92, Bd. I]:

$$\begin{aligned} \eta_{\sigma}^a &= -\mathfrak{P}^a \cdot \mathfrak{n}_a, & \mathfrak{k}_{\sigma}^a &= \mathfrak{M}^a \times \mathfrak{n}_a, \\ \eta_{\sigma}^b &= -\mathfrak{P}^b \cdot \mathfrak{n}_b, & \mathfrak{k}_{\sigma}^b &= \mathfrak{M}^b \times \mathfrak{n}_b. \end{aligned}$$

Für die resultierende Flächendichte bekommt man folglich mit Rücksicht auf  $\mathfrak{n}_a = -\mathfrak{n}_b = \mathfrak{n}$ :

$$\eta_{\sigma} = \mathfrak{n} \cdot \Delta \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{k}_{\sigma} = \mathfrak{n} \times \Delta \mathfrak{M}. \quad (15)$$

Die Formeln (III') lassen sich also nach (13) und (14) folgendermaßen aufschreiben:

$$\mathfrak{n} \cdot \Delta \mathfrak{C} = 4\pi (\eta_f + \eta_{\sigma}), \quad \mathfrak{n} \times \Delta \mathfrak{S} = 4\pi (\mathfrak{k}_f + \mathfrak{k}_{\sigma}). \quad (II')$$

### 3. Der verkehrte Charakter der üblichen Definition der magnetischen Erregung.

Die von den gebundenen Elektronen herrührende magnetische Polarisation  $\mathfrak{M}$  kann, in ganz formaler Weise, auf fiktive „molekulare“

<sup>1)</sup> Die wir teilweise schon in Bd. I, S. 116 und 117, abgeleitet haben.

*magnetische Dipole*, die den in den Molekülen rotierenden Elektronen äquivalent sind, zurückgeführt werden. Dabei muß man statt der gebundenen Stromdichte  $\mathbf{j}_g$  und  $\mathbf{k}_g$ , die den gebundenen Ladungsdichten  $\rho_g$  und  $\eta_g$  analogen magnetischen Größen  $\rho_m$  und  $\eta_m$  nach den Formeln:

$$\rho_m = -\operatorname{div} \mathfrak{M}, \quad \eta_m = \mathbf{n} \cdot \mathfrak{M} \quad (16)$$

eingeführen. Bei Fehlen von freien Elektronen, d. h. im Falle nichtleitender Körper, erlaubt dieses Verfahren eine weitgehende Analogie zwischen elektrischen und magnetischen Größen durchzuführen, die von der allgemeinen Beziehung zwischen ihnen ganz verschieden ist und gegenüber dieser Beziehung einen sozusagen „gekreuzten“ Charakter hat. Und zwar können dabei die Gleichungen (I), (III) und die Grenzbedingungen (I'), (III') folgendermaßen umgruppiert werden:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \quad (17)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

und

$$\mathbf{n} \times \Delta \mathfrak{D} = 0, \quad \mathbf{n} \times \Delta \mathfrak{H} = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathfrak{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \Delta \mathfrak{B} = 0; \quad (20)$$

statt (II') hat man ferner

$$\mathbf{n} \cdot \Delta \mathfrak{E} = 4\pi \rho_g, \quad \mathbf{n} \cdot \Delta \mathfrak{B} = 4\pi \eta_m. \quad (21)$$

In diesen Formeln spielen die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  einerseits,  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  andererseits eine ganz analoge Rolle. Dabei ist die Beziehung von  $\mathfrak{D}$  zu  $\mathfrak{E}$  ( $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}$ ) identisch mit der Beziehung von  $\mathfrak{H}$  zu  $\mathfrak{B}$  ( $\mathfrak{H} = \mathfrak{B} + 4\pi \mathfrak{M}$ ). Aus diesen Gründen werden gewöhnlich für die beiden letzteren Größen zu den unserigen *umgekehrte* Definitionen und Bezeichnungen benutzt: die mittlere (makroskopische) magnetische Feldstärke ( $\mathfrak{H}$ ) nennt man üblicherweise die „magnetische Erregung“ (oder Induktion) und bezeichnet sie mit  $\mathfrak{B}$ ; dagegen nennt man unsere Größe  $\mathfrak{B}$  die magnetische „Feldstärke“ und bezeichnet sie mit  $\mathfrak{H}$ . Diese Bezeichnungsweise stammt noch aus der Zeit, zu der den magnetischen Substanzen dieselbe physikalische Realität zugeschrieben wurde wie den elektrischen Ladungen. Da wir in diesem Buche die „magnetischen Substanzen“ von Haus aus ausgeschlossen haben, so dürfen wir die alte Bezeichnungsweise modernisieren und wollen es einfach durch Umkehrung der beiden Begriffe tun.

Wir müssen aber noch einen Umstand erwähnen, weshalb die übliche Auffassung der Größen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  für praktische Zwecke manchmal bequemer und „natürlicher“ als die unsrige erscheint. Die magnetische Polarisation wird gewöhnlich<sup>1)</sup> durch Einführung des betreffenden Körpers in ein *äußeres* magnetisches Feld, dessen Kraftlinien *sich inner-*

<sup>1)</sup> Besonders bei der Untersuchung der ferromagnetischen Körper.

*halb dieses Körpers schließen* und folglich *parallel zu seiner Oberfläche* laufen, erzeugt. Dies erreicht man am einfachsten dadurch, daß man einen ringförmigen Körper in ein Stromsolenoid derselben Gestalt einführt.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß im Falle eines homogenen Körpers die durch die äußere Feldstärke erzeugte Erregung  $\mathfrak{B}$  (in unserem Sinne) an jeder Stelle mit dieser Feldstärke selbst identisch ist. Dabei verstehen wir unter „äußerer Feldstärke“ diejenige Feldstärke, welche im betrachteten Stromsolenoid bei Fehlen des Körpers herrscht und nehmen sie als zeitlich konstant an. — Diese Behauptung folgt sofort aus der Grenzbedingung  $\Delta \mathfrak{B} \times \mathfrak{n} = 0$  [siehe (20)] in Verknüpfung mit dem Umstand, daß innerhalb des Körpers die Größe  $\mathfrak{B}$  derselben Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{B} = 0$  wie die erwähnte äußere Feldstärke genügt. — Es ist aber zu beachten, daß diese Identität zwischen den beiden Größen im allgemeinen nicht stattfindet.

Im Falle der elektrischen Polarisation hat man gewöhnlich (bei der Untersuchung von dielektrischen Körpern) mit äußeren zeitlich konstanten Feldern zu tun, deren Kraftlinien nicht geschlossen sind und *senkrecht* zur Oberfläche der betrachteten Körper durchlaufen (wie dies z. B. in einem elektrischen Kondensator der Fall ist). Es muß dabei wegen der Bedingung  $\mathfrak{n} \cdot \Delta \mathfrak{D} = 0$  die elektrische Erregung  $\mathfrak{D}$  mit der äußeren Feldstärke übereinstimmen, und um konsequent zu sein, sollte man diese Größe und nicht  $\mathfrak{E}$  als (makroskopische) Feldstärke bezeichnen.

#### § 4. Die vierdimensionale Form der Grundgleichungen und ihre Anwendung auf langsam bewegte Körper.

Der verkehrte Charakter der üblichen Auffassung der Größen  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{B}$  läßt sich am klarsten erkennen, wenn man die Grundgleichungen (I) und (III) auf eine vierdimensionale Form bringen will. Dabei muß man offenbar die Vektoren  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{E}$  als den räumlichen und zeitlichen Anteil des schon im ersten Bande (Kap. III, §. 1) eingeführten schief-symmetrischen Feldtensors  ${}^2\mathfrak{S}$  — oder genauer seines mikroskopischen Mittelwertes — behandeln und *dementsprechend die Vektoren  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$  als den räumlichen bzw. den zeitlichen Anteil eines zweiten schief-symmetrischen Tensors  ${}^2\mathfrak{B}$* , den wir als *elektromagnetischen Erregungstensor* bezeichnen werden, betrachten.

Die Gleichungen (I) lassen sich bekanntlich zu dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial H_{i,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{k,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, 3, 4) \quad (22)$$

zusammenfassen [vgl. (6) S. 252, Bd. I], wobei

$$\left. \begin{array}{lll} H_{23} = H_1, & H_{31} = H_2, & H_{12} = H_3, \\ H_{14} = -iE_1, & H_{24} = -iE_2, & H_{34} = -iE_3 \end{array} \right\} \quad (22a)$$

gesetzt wird. Die Gleichungen (III) haben, wegen ihrer formalen Analogie mit (II), auch dieselbe vierdimensionale Gestalt, nämlich

$$\sum_{l=1}^4 \frac{\partial B_{kl}}{\partial x_l} = 4\pi j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (23)$$

[vgl. (7) S. 253]. Es sei daran erinnert, daß  $j_k$  hier die nur von den freien Elektronen herrührende mittlere Strom- (und Ladungs-)dichte bedeutet. Für den von den gebundenen Elektronen herrührenden „Viererstrom“ gilt die Formel

$$j_k^g = \sum_{l=1}^4 \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_l}, \quad (24)$$

wo  ${}^2\mathfrak{P}$  der schiefsymmetrische Polarisationsstensor mit den Komponenten

$$\left. \begin{aligned} P_{23} = M_1, \quad P_{31} = M_2, \quad M_{12} = M_3 \\ P_{14} = +iP_1, \quad P_{24} = +iP_2, \quad P_{34} = +iP_3 \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

ist. Die Tensoren  ${}^2\mathfrak{H}$ ,  ${}^2\mathfrak{B}$ ,  ${}^2\mathfrak{P}$  sind miteinander durch die Gleichung

$${}^2\mathfrak{B} = {}^2\mathfrak{H} - 4\pi {}^2\mathfrak{P}, \quad (25)$$

welche den beiden Gleichungen (13) und (14) äquivalent ist, verknüpft. Die Komponenten von  ${}^2\mathfrak{B}$  sind also durch das folgende Schema

$$\left. \begin{aligned} B_{23} = B_1, \quad B_{31} = B_2, \quad B_{12} = B_3 \\ B_{14} = -iD_1, \quad B_{24} = -iD_2, \quad B_{34} = -iD_3 \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

gegeben.

Um die Grenzbedingungen (I'), (III') in die vierdimensionale Gestalt zu bringen, muß man zu den drei räumlichen Komponenten des Vektors  $\mathbf{n}$  noch eine vierte  $n_4 = im$  hinzufügen, die im Falle ruhender Körper gleich Null ist. Die Gleichungen (I') lassen sich dabei folgendermaßen schreiben:

$$\Delta H_{ik} n_l + \Delta H_{kl} n_i + \Delta H_{li} n_k = 0 \quad (26)$$

oder, wenn man statt  ${}^2\mathfrak{H}$  den „dualen“ Tensor  ${}^2\mathfrak{H}^*$  einführt (vgl. Bd. I., S. 257),

$$\sum_{l=1}^4 \Delta H_{kl}^* n_l = 0 \quad (\Delta {}^2\mathfrak{H}^* \cdot \mathbf{n} = 0). \quad (26a)$$

Ebenso bekommt man nach (III')

$$\sum_{l=1}^4 \Delta B_{il} n_l = 4\pi k_i \quad (\Delta {}^2\mathfrak{B} \cdot \mathbf{n} = 4\pi \mathfrak{k}), \quad (27)$$

wo  $k_4$  die mit  $\sqrt{-1}$  multiplizierte Dichte der Flächenladung bedeutet.

Die angeführte vierdimensionale Darstellung der Differentialgleichungen und der Grenzbedingungen, die wir im vorigen Paragraphen für den Fall ruhender Körper aufgestellt haben, zeigt, daß die obigen dreidimensionalen Gleichungen auch für geradlinig und gleichförmig bewegte Körper gültig bleiben. Denn die „Vierdimensionalität“ bedeutet

nichts anderes als die Invarianz gegenüber *Lorentz*transformationen, welche den Übergang von einem „ruhenden“ Koordinatensystem zu einem geradlinig-gleichförmig bewegten bestimmen.

Da die (relative) Geschwindigkeit der materiellen Körper ( $v$ ) immer klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ( $c$ ) bleibt, genügt es bei solchen Transformationen nur die angenäherten, in bezug auf  $\frac{v}{c}$  linearen Transformationsformeln für die in unseren Gleichungen auftretenden Komponenten der Vierer- und Sechservektoren zu berücksichtigen.

Bewegt sich folglich der betrachtete Körper als festes Ganzes relativ zum Koordinatensystem  $S'$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$ , so bestehen zwischen den sich auf dieses System beziehenden Werten von verschiedenen Größen und ihren Werten im mitbewegten Koordinatensystem  $S$  die folgenden angenäherten Beziehungen (vgl. Bd. I, Kap. IX, §§ 1 und 2; das mitbewegte System wurde dort mit  $S'$ , das „ruhende“ mit  $S$  bezeichnet; die Geschwindigkeit  $v$  entspricht der früheren  $v'$ ):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}' &= \mathfrak{H} + \frac{v}{c} \times \mathfrak{E} \\ \mathfrak{E}' &= \mathfrak{E} - \frac{v}{c} \times \mathfrak{H} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}' &= \mathfrak{P} + \frac{v}{c} \times \mathfrak{M} \\ \mathfrak{M}' &= \mathfrak{M} - \frac{v}{c} \times \mathfrak{P} \end{aligned} \right\} \quad (28a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}' &= \mathfrak{B} + \frac{v}{c} \times \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D}' &= \mathfrak{D} - \frac{v}{c} \times \mathfrak{B} \end{aligned} \right\} \quad (28b)$$

Ferner hat man

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{j}' &= \mathfrak{j} + \frac{v}{c} \varrho, & \varrho' &= \varrho + \frac{v}{c} \cdot \mathfrak{j} \\ \mathfrak{f}' &= \mathfrak{f} + \frac{v}{c} \eta, & \eta' &= \eta + \frac{v}{c} \cdot \mathfrak{f} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

und schließlich, wegen  $n_4 = 0$ ,

$$n' = n. \quad (29a)$$

Die mittels dieser Formeln und der Formeln

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + v t, \quad t' = t + \frac{\mathfrak{r} \cdot v}{c^2} \quad (29b)$$

transformierten Gleichungen (I), (III) usw. müssen dieselbe Gestalt haben wie die ursprünglichen (bis auf die in  $\frac{v}{c}$  quadratischen Größen), was sich leicht direkt prüfen läßt. Es gilt speziell

$$\operatorname{div}' \mathfrak{D}' = 4\pi \varrho', \quad \operatorname{rot}' \mathfrak{B}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t'} = 4\pi \mathfrak{j}'$$

20 Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.

oder, wenn man hier  $\mathfrak{D}' = \mathfrak{E}' + 4\pi \mathfrak{P}' = \mathfrak{E}' + 4\pi \mathfrak{P} + 4\pi \frac{v}{c} \times \mathfrak{M}$  und

$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - 4\pi \mathfrak{M}' = \mathfrak{H} - 4\pi \mathfrak{M} + 4\pi \frac{v}{c} \times \mathfrak{P}$  einsetzt:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}' \mathfrak{E}' &= 4\pi \left( \rho' - \operatorname{div}' \mathfrak{P} - \operatorname{div}' \frac{v}{c} \times \mathfrak{M} \right), \\ \operatorname{rot}' \mathfrak{H}' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \mathfrak{E}' &= 4\pi \left( \mathfrak{j}' + \operatorname{rot}' \mathfrak{M} - \operatorname{rot}' \frac{v}{c} \times \mathfrak{P} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t'} + \frac{v}{c^2} \times \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t'} \right) \end{aligned} \right\} (30)$$

Die rechtsstehenden Glieder stellen offenbar die verschiedenen Anteile der totalen elektrischen Ladungs- bzw. Stromdichte dar. Zu den schon früher betrachteten Gliedern kommen jetzt noch einige hinzu, die durch die Mitbewegung der gebundenen Elektronen bedingt sind. Es sei bemerkt, daß die Größe  $-\operatorname{rot}' (v \times \mathfrak{P}) = \operatorname{rot}' \left( \mathfrak{P} \times \frac{v}{c} \right)$  gewöhnlich als *Röntgenstrom* bezeichnet wird. — Diese Zusatzglieder beziehen sich streng genommen *nicht auf die Gleichungen*, sondern auf die elektromagnetischen *Größen*, welche in den letzteren auftreten und welche sich beim Übergange vom ruhenden zum bewegten Körper nach den angegebenen Formeln transformieren. Will man aber die für ruhende Körper gültigen Definitionen dieser Größen — speziell der elektrischen und magnetischen Polarisation — auch im Falle bewegter Körper beibehalten, so muß man in den entsprechenden Differentialgleichungen Zusatzglieder einführen. Diese (übliche) Betrachtungsweise ist aber prinzipiell verkehrt, denn es sind tatsächlich die *Differentialgleichungen* (I) und (III), die bei dem erwähnten Übergang invariant bleiben, während die in ihnen auftretenden Größen nach den Formeln (28) und folgenden transformiert werden müssen.

Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die Grenzbedingungen. Es wird z. B. nach (III') und (29a)

$$n \cdot \Delta \mathfrak{D}' = 4\pi \eta', \quad n \times \Delta \mathfrak{H}' = 4\pi \mathfrak{k}',$$

oder, wenn man hier die ursprünglichen („wahren“) Werte der elektrischen und magnetischen Polarisation einführt:

$$\left. \begin{aligned} n \cdot \Delta \mathfrak{E}' &= 4\pi \left( \eta' - n \cdot \left\{ \Delta \mathfrak{P} - \frac{v}{c} \times \Delta \mathfrak{M} \right\} \right) \\ n \times \Delta \mathfrak{H}' &= 4\pi \left( \mathfrak{k}' + n \times \left\{ \Delta \mathfrak{M} - \frac{v}{c} \times \Delta \mathfrak{P} \right\} \right) \end{aligned} \right\} (31)$$

Wir bekommen also für die linksstehenden Oberflächensprünge der elektrischen und der magnetischen Feldstärke die „Zusatzglieder“

$$\mathcal{W} \cdot \left( -4\pi \frac{v}{c} \times \Delta \mathfrak{M} \right) \text{ und } \left( -4\pi \frac{v}{c} \times \Delta \mathfrak{P} \right).$$

### § 5. Die elektromagnetische Polarisation zweiter und höherer Ordnung<sup>1</sup>.

#### 1. Die der elektrischen Polarisation höherer Ordnung äquivalente Raum- und Flächenladung.

Wir haben in § 3 die Größen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  als die Verhältnisse der mittleren *Dipolmomente eines Moleküls* zu dem von diesem Molekül eingenommenen (mittleren) Volum definiert. Bei einer solchen Definition müssen die Beiträge der Quadrupol- und höheren Multipolmomente der Moleküle zu  $\varrho_g$  und  $\mathfrak{j}_g$  besonders berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck führen wir neben den Vektoren  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  noch die Tensoren zweiten und höheren Ranges  ${}^2\mathfrak{P}$ ,  ${}^2\mathfrak{M}$  usw. ein, die das Verhältnis des mittleren elektrischen bzw. magnetischen Momentes der entsprechenden Ordnung eines Moleküls zu ihrem Volumen [im Sinne der Gleichung (12a)] darstellen sollen.

Wir wollen zunächst der Einfachheit halber nur die „elektrische Polarisation zweiter Ordnung“  ${}^2\mathfrak{P}$  betrachten. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß diese von den elektrischen Quadrupolmomenten herrührende Polarisation auf eine gewöhnliche Polarisation (erster Ordnung) nebst einer elektrischen *Doppelschicht* auf der Grenzfläche  $S$  des betrachteten Körpers zurückgeführt werden kann. — Dies geschieht am einfachsten mittels der Methode, die wir in Bd. I, Kap. III, § 10 bei der Zurückführung der gewöhnlichen Polarisation auf eine Volum- und Flächenladung benutzt haben.

Es bedeute also  $\varphi$  das skalare Potential irgend eines *äußeren* elektrischen Feldes, das wir als *zeitlich konstant* voraussetzen werden. Dann drückt sich die potentielle Energie des betrachteten Körpers — sofern er aus Quadrupolen besteht — in bezug auf dieses Feld durch das Volumintegral

$$U = \int \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} dV \quad (32)$$

(vgl. (9a) S. 102, Bd. I; dabei ist  $e_{ik}$  durch  $P_{ik} \cdot dV$  zu ersetzen).

Man kann nun mittels der Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \varphi \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_i} \right) + \varphi \frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>) Die in diesem und in dem nächsten Paragraphen dargelegten Resultate haben für das folgende keine praktische Bedeutung, sind aber von prinzipiellem Interesse. Ich möchte dazu bemerken, daß sie mir zum Teil zuerst von Herrn V. Bursian mitgeteilt worden sind; ich habe sie aber in einer viel einfacheren unten dargestellten Weise abgeleitet.

das obige Integral auf die folgende Gestalt bringen

$$U = \frac{1}{2} \int \operatorname{div} ({}^2\mathfrak{P} \cdot \nabla \varphi) dV - \frac{1}{2} \int \operatorname{div} {}^2\mathfrak{P} \cdot \nabla \varphi dV \quad (32a)$$

oder

$$U = \frac{1}{2} \int \operatorname{div} ({}^2\mathfrak{P} \cdot \nabla \varphi) dV - \frac{1}{2} \int \operatorname{div} (\varphi \operatorname{div} {}^2\mathfrak{P}) dV + \frac{1}{2} \int \varphi \operatorname{div} (\operatorname{div} {}^2\mathfrak{P}) dV \quad (32b)$$

(vgl. Bd. I, Einleitung, §§ 20 und 23).

Formt man diese Ausdrücke nach der *Gaußschen* Formel um, so ergibt sich im ersten Falle [wegen  $({}^2\mathfrak{P} \cdot \nabla \varphi)_n = ({}^2\mathfrak{P} \cdot \nabla \varphi) \cdot n = ({}^2\mathfrak{P} \cdot n) \cdot \nabla \varphi = {}^2\mathfrak{P}_n \cdot \nabla \varphi$ ]

$$U = \int \eta' \cdot \nabla \varphi dS + \int \mathfrak{P}' \cdot \nabla \varphi dV \quad (33)$$

mit den Bezeichnungen

$$\eta' = \frac{1}{2} {}^2\mathfrak{P}_n, \quad \mathfrak{P}' = -\frac{1}{2} \operatorname{div} {}^2\mathfrak{P}, \quad (33a)$$

und im zweiten Falle

$$U = \int \eta' \cdot \nabla \varphi dS + \int \varphi \eta'' dS + \int \varrho'' dV \quad (34)$$

mit<sup>1)</sup>

$$\eta'' = \mathfrak{P}'_n, \quad \varrho'' = -\operatorname{div} \mathfrak{P}'. \quad (34a)$$

Die betrachtete Polarisation zweiter Ordnung  ${}^2\mathfrak{P}$  ist also nach (33) einer Polarisation erster Ordnung  $\mathfrak{P}'$  und einer Doppelschicht mit dem Moment  $\eta'$  pro Flächeneinheit äquivalent (es sei bemerkt, daß dieses Moment im allgemeinen nicht parallel der Flächennormale  $n$  ist). Die Formeln (34) und (34a) stellen die uns schon bekannte Zurückführung der Polarisation  $\mathfrak{P}'$  auf eine Flächen- und eine Volumladung dar.

Dieselben Resultate ergeben sich selbstverständlich, wenn man statt der Energie  $U$  das Potential des von den Quadrupolmomenten des Körpers herrührenden Feldes

$$\varphi = \int \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{R} \right)}{\partial x_i \partial x_k} P_{ik} dV$$

betrachtet und es in analoger Weise transformiert (vgl. Bd. I, S. 91).

Durch Anwendung des geschilderten Verfahrens auf die elektrische Polarisation  $k$ -er Ordnung bekommt man die Rekursionsformeln:

$$({}^{k-1})\eta' = \frac{{}^k\mathfrak{P} \cdot n}{k}, \quad ({}^{k-1})\mathfrak{P}' = -\frac{1}{k} \operatorname{div} {}^k\mathfrak{P}. \quad (35)$$

Dabei bedeutet  $({}^{k-1})\mathfrak{P}'$  die äquivalente Polarisation  $(k-1)$ -er Ordnung und  $({}^{k-1})\eta'$  die Flächendichte des Moments der sie ergänzenden  $2^{k-1}$ -fachen Schicht. Daraus folgt, daß die betrachtete Polarisation  $k$ -er Ordnung immer auf eine Polarisation erster oder auch nullter Ordnung

<sup>1)</sup> Den Index  $g$  lassen wir in diesem Paragraphen der Einfachheit halber weg.

zurückgeführt werden kann, nebst einer Anzahl ergänzender Oberflächenschichten. Die Volumdichte der äquivalenten elektrischen Ladungsverteilung drückt sich durch die Formel

$$\varrho^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \operatorname{div}^k ({}^k\mathfrak{P}) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i_1 \dots i_k}^{1,3} \frac{\partial^k P_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \quad (35a)$$

aus<sup>1)</sup> oder bei anderer Bezeichnung für die Komponenten von  ${}^k\mathfrak{P}$  [entsprechend der Bezeichnung  $e(k_1, k_2, k_3)$ . Vgl. Bd. I, S. 99]

$$\varrho^{(k)} = (-1)^k \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} \frac{\partial^k P(k_1 k_2 k_3)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}}. \quad (35b)$$

Von den vielfachen Oberflächenschichten, die sich bei Reduktion der Polarisationen höherer Ordnungen auf eine Volumladung ergeben, bewirkt nur die Schicht nullter Ordnung einen Sprung der elektrischen Feldstärke an der Grenze zweier Körper. Bezeichnet man durch  $\Delta {}^k\mathfrak{P}$  die Differenz  ${}^k\mathfrak{P}^{(b)} - {}^k\mathfrak{P}^{(a)}$  an dem betrachteten Grenzflächenelement, so hat man für den entsprechenden Sprung der elektrischen Feldstärke

$$(\Delta \mathfrak{E})^{(k)} \cdot \mathbf{n} = 4\pi \Delta \gamma^{(k)}, \quad (36)$$

wobei nach (35)

$$\gamma^{(k)} = \Delta \mathfrak{P}^{(k-1)} \cdot \mathbf{n} = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Delta \operatorname{div}^{k-1} ({}^k\mathfrak{P}) \cdot \mathbf{n} \quad (36a)$$

ist (die Tangentialkomponente von  $\mathfrak{E}$  bleibt immer stetig).

Es ist aber zu beachten, daß die Oberflächenschichten erster und höherer Ordnung außerdem noch eine sprunghafte Änderung des elektrostatischen Potentials  $\varphi$  bedingen. Es war nämlich in Bd. I (S. 89 und 117) gezeigt, daß  $\varphi$  beim Durchgang im Sinne der äußeren Normale durch eine Doppelschicht mit dem Moment  $i$  pro Flächeneinheit um den Betrag  $4\pi i$  springt. Der Anteil des Sprunges  $\Delta \varphi$ , welcher von der Polarisation  $k$ -er Ordnung herrührt, ist also gleich

$$(\Delta \varphi)^k = 4\pi \Delta \gamma_n^{(k-1)}. \quad (37)$$

Für den Fall  $k = 2$  ergibt sich speziell

$$(\Delta \varphi)^{(2)} = 2\pi \Delta {}^2\mathfrak{P} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}. \quad (37a)$$

Sofern wir diese Unstetigkeiten des skalaren Potentials (und auch des Polarisationspotentials  $\mathfrak{P}$ ) außer acht lassen, können wir den Einfluß der Quadrupol- und höheren elektrischen Momente der Moleküle auf das gemittelte (makroskopische) Feld  $\mathfrak{E}$  formal durch eine Erweiterung der oben angegebenen Definition des Vektors  $\mathfrak{P}$  berücksichtigen; wir brauchen nur darunter nicht nur die von den Dipolmomenten herrührende, sondern die *vollständige* Polarisation erster Ordnung zu verstehen. Die Einteilung dieser Polarisation entsprechend den Beiträgen der elektrischen Momente verschiedener Ordnungen ist darum nötig, weil

<sup>1)</sup> Dabei bedeutet  $\operatorname{div}^k$  die  $k$ -mal wiederholte Divergenzoperation.

diese Beiträge auf eine verschiedene Weise von der makroskopischen Feldstärke und deren Ableitungen nach den Koordinaten abhängen müssen.

Ganz ähnliche Resultate ergeben sich für die *magnetischen Polarisierungen* zweiter und höherer Ordnung, falls man sie als zeitlich konstant voraussetzt und sich die elektrischen Ströme durch fiktive magnetische Ladungen ersetzt denkt.

## 2. Relativistische Verallgemeinerung.

Die Relativitätstheorie erlaubt es aber, die vorhergehenden, sich nur auf zeitlich konstante elektrische Felder und Polarisierungen beziehenden Formeln in einer äußerst einfachen, obwohl etwas formalen Weise auf den Fall *beliebiger* (zeitlich veränderlicher) *elektromagnetischer* Felder und Polarisierungen zu verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung bekommt man nämlich durch eine *vierdimensionale Erweiterung der entsprechenden Größen und Operationen*.

Da die elektrische Ladungsdichte  $\rho^{(k)}$  die (durch  $\sqrt{-1}$  dividierte) vierte Komponente des Viererstroms  $\mathbf{j}^{(k)}$  darstellt, so muß die vierdimensionale Erweiterung der Formel (35b) folgendermaßen lauten:

$$j_h^{(k)} = (-1)^k \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=k} \frac{1}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot k_4!} \frac{\partial^k P_h(k_1, k_2, k_3, k_4)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3} \partial x_4^{k_4}}, \quad (38)$$

oder anders geschrieben:

$$j_h^{(k)} = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k}^{1,4} \frac{\partial^k P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k}^{1,4} \frac{\partial^k P_{h; i_1, i_2, \dots, i_k}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}. \quad (38a)$$

Es bedeuten dabei  $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}$  die Komponenten eines vierdimensionalen Tensors vom Range  $k + 1$ , der die *elektromagnetische Polarisation  $k$ -er Ordnung bestimmt*. Für  $k = 1$  hat man nach (38a)

$$j_h^{(1)} = - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial P_{i, h}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial P_{h, i}}{\partial x_i}. \quad (38b)$$

Diese Formel ist identisch mit der Formel (24), so daß der Tensor  $P_{h, i}$  nichts anderes als der durch (24a) definierte Sechservektor der elektromagnetischen Polarisation (erster Ordnung) ist. Wir können also behaupten, daß auch im allgemeinen Falle ( $k > 1$ ) die Komponenten des Polarisationstensors  $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}$  schief-symmetrisch bezüglich der Indexpaare  $i, h$  sind (daraus folgt die Relation  $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h} = (-1)^k P_{h; i_1, i_2, \dots, i_k}$ ); ihre Symmetrie bezüglich der  $k$  Indizes  $i_1, \dots, i_k$  folgt unmittelbar aus der Symmetrie der entsprechenden dreidimensionalen Tensoren. — Da alle Komponenten von  $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}$ , bei welchen einer der Indizes  $i$  gleich  $h$  ist, verschwinden, ist die Anzahl der nicht-verschwindenden Komponenten, vom Vorzeichen abgesehen, für jeden

Wert von  $h$  identisch mit der Anzahl der Komponenten eines symmetrischen dreidimensionalen Tensors vom Range  $k$ .

Es sei bemerkt, daß die Formel (38a) auch für den Fall  $k = 0$  einen Sinn behält, wenn wir die Größen  $P_h$  mit den Komponenten des von den freien Elektronen herrührenden Viererstromes identifizieren.

Wegen der oben aufgestellten Antisymmetrie des Tensors  $P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}$  in bezug auf die Indexpaare  $(i, h)$  muß die allgemeine Formel (38a) für  $h = 4$  mit der „speziellen“ (35a) zusammenfallen (denn es können dabei Differentiationen nach der Zeit  $x_4$  nicht auftreten). Ebenso treten bei  $h = 1, 2, 3$  die Ableitungen nach  $x_h$  im Ausdruck für  $j_h$  nicht auf. Es ist z. B.

$$j_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 P_{22; 1}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P_{33; 1}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 P_{44; 1}}{\partial x_4^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{23; 1}}{\partial x_2 \partial x_3} + 2 \frac{\partial^2 P_{34; 1}}{\partial x_3 \partial x_4} + 2 \frac{\partial^2 P_{42; 1}}{\partial x_4 \partial x_2} \right\}.$$

Die zweite Gruppe der Differentialgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes kann bei Berücksichtigung der Polarisationen höherer Ordnungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sum_{l=1}^4 \frac{\partial H_{hl}}{\partial x_l} = 4\pi (j_h^{(0)} + j_h^{(1)} + \dots + j_h^{(k)} + \dots),$$

d. h. nach (38a), wenn man sich die Summation bezüglich aller gleichen Indexpaare ausgeführt denkt, unter Fortlassung der entsprechenden Summenzeichen:

$$\frac{\partial H_{hl}}{\partial x_l} = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k P_{i_1, i_2, \dots, i_k; h}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}. \quad (39)$$

Diese Gleichungen lassen sich auf die übliche Form (23) bringen, wenn man  $j_h^0 = P_h^0 = j_h$  setzt und den elektromagnetischen Erregungstensor  $\mathfrak{J}$  mittels der Formel

$$B_{hl} = H_{hl} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k P_{i_1, i_2, \dots, i_k, l; h}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \quad (39a)$$

definiert. Wir können auch die ursprüngliche Definition von  $\mathfrak{J}$  beibehalten, müssen aber dann unter der gewöhnlichen Polarisation (erster Ordnung) die vollständige oder *resultierende* Polarisation, d. h. die Summe

$$P_{lh}^{(r)} = P_{lh} - \frac{1}{2} \frac{\partial P_{il; h}}{\partial x_i} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^2 P_{i_1, i_2, l; h}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} - \dots \quad (39b)$$

verstehen.

Wie schon oben erwähnt wurde, ist diese Einteilung der resultierenden Polarisation für die Bestimmung ihrer Abhängigkeit vom elektromagnetischen Feldtensor wesentlich. Sie ist auch bei der Betrachtung der Potentialsprünge auf der Grenzfläche zweier Körper zu berücksichtigen.

## § 6. Geometrische Deutung der makroskopischen Elektrizitätsverteilung mittels Molekülmodellen.

### 1. Elektrische Polarisierung und Ladungsdichte.

Zur Erläuterung und Veranschaulichung der im vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Resultate wollen wir sie nochmals von einem etwas anderen Standpunkt behandeln.

Wir stellen uns zunächst vor, daß die Moleküle des betrachteten Körpers je zwei Elektronen enthalten, und zwar ein negatives Elektron  $-e$  im Mittelpunkt  $P$  und ein positives Elektron  $+e$  in einem Punkt  $P'$ , dessen Koordinaten in bezug auf  $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  stetige Funktionen der Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  von  $P$  bezüglich eines festen Punktes  $O$  sind. Mit anderen Worten, die Differenz der Vektoren  $OP'$  und  $OP$   $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \xi$  sei eine stetige Funktion von  $\mathbf{r}$ . Die Lage eines Moleküls ist durch den Radiusvektor  $\mathbf{r}$  seines Mittelpunktes definiert. Die Anzahl dieser Mittelpunkte in einem makroskopischen Volumelement  $dV$  bezeichnen wir mit  $N dV$ . Die auf diese Weise definierte Konzentration  $N$  der Moleküle ist dabei als eine gewisse stetige Funktion von  $\mathbf{r}$  zu behandeln. Die entsprechende Größe für die positiven Elektronen, d. h. für die  $P'$ -Punkte, sei  $N'$ . Den  $P$ -Punkten, die im Volumelement  $dV$  (Radiusvektor  $\mathbf{r}$ ) enthalten sind, entsprechen  $P'$ -Punkte, die das „zugehörige“ Volumelement  $dV'$  auffüllen. Es besteht dabei offenbar die Gleichung

$$N'(\mathbf{r}') dV' = N(\mathbf{r}) dV. \quad (40)$$

Vermöge der Relationen

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \xi(\mathbf{r}) \quad (40a)$$

und

$$\frac{dV'}{dV} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}, & 1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}, & 1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (40b)$$

kann man aus dieser Gleichung die Konzentration  $N'$  als Funktion von  $\mathbf{r}$  bestimmen, d. h. eine Beziehung zwischen den Konzentrationen  $N$  und  $N'$  für denselben Raumpunkt ermitteln. Die direkte Methode zur Lösung dieser Aufgabe besteht in der Benutzung der bekannten Lagrangeschen Reihenentwicklung. Man kommt aber viel einfacher zum Ziele durch eine indirekte Methode, die wir im vorigen Paragraphen tatsächlich schon benutzt haben. Und zwar betrachte man das über ein beliebiges Volum  $V'$  erstreckte Integral

$$U = \int \psi(\mathbf{r}') N'(\mathbf{r}') dV', \quad (41)$$

wo  $\psi(\mathbf{r}')$  eine ganz willkürliche stetige Funktion von  $\mathbf{r}'$  bedeutet. Dieses

Integral läßt sich auf zweierlei Arten umformen. *Erstens* kann man setzen

$$U' = \int \psi(\mathbf{r}) N'(\mathbf{r}) dV + \oint F' dS \quad (41a)$$

wobei das rechtsstehende Volumintegral über das zu  $V'$  zugehörige Volum  $V$  erstreckt wird, während das Flächenintegral die Differenz  $\int \psi(\mathbf{r}') N'(\mathbf{r}') dV' - \int \psi(\mathbf{r}) N'(\mathbf{r}) dV$  darstellt. Diese Darstellung ergibt sich unmittelbar, wenn man beachtet, daß die Differenz der beiden Volumina durch das über die Grenzfläche  $S$  von  $V$  erstreckte Integral

$$V' - V = \oint \xi_n dS$$

ausgedrückt werden kann (Abb. 1). Es gilt dementsprechend in erster Annäherung

$$F' = \psi(\mathbf{r}) N'(\mathbf{r}) \xi_n. \quad (41b)$$

Eine genauere Rechnung muß noch die Änderung von  $\psi$  und  $N'$  innerhalb eines dem Flächenelement  $dS$  entsprechenden Volumelement  $\xi_n dS$  berücksichtigen.

*Zweitens* kann man, nach der Gleichung (40), das Integral (41) durch das über das Volum  $V$  erstreckte Integral

$$U' = \int \psi(\mathbf{r}') N(\mathbf{r}) dV \quad (42)$$

ersetzen. Entwickelt man hier

$$\psi(\mathbf{r}') = \psi(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3)$$

in eine Taylorsche Reihe nach Potenzen der Größen  $\xi_i$  und formt das Produkt jedes Gliedes mit  $N(\mathbf{r})$  durch partielle Integration (d. h. durch wiederholte Anwendung des *Gaußschen* Satzes) um, so bekommt man [vgl. die Ableitung der Formeln (32) bis (35b) im vorigen Paragraphen]

$$U' = \int \psi(\mathbf{r}) \left[ N(\mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi_i N(\mathbf{r})) + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (\xi_i \xi_k N(\mathbf{r})) - \dots \right] dV + \int F dS. \quad (42a)$$

Die Summenzeichen bezüglich gleicher Indexpaare sind dabei fortgelassen; wir verzichten auch auf eine explizite Darstellung von  $F$ . — Die Formeln (41a) und (42a) haben eine ganz ähnliche Gestalt. Wegen der willkürlichen Wahl der Funktion  $\psi$  müssen ihre Koeffizienten in den beiden Volumintegralen identisch sein, ebenso wie die Größen  $F$  und  $F'$ . Die gesuchte Beziehung zwischen  $N'(\mathbf{r})$  und  $N(\mathbf{r})$  lautet also:

$$N' = N - \frac{\partial}{\partial x_i} (N \xi_i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (N \xi_i \xi_k) - \dots \quad (43)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $e$  und beachtet, daß

$$\rho = e (N'(\mathbf{r}) - N(\mathbf{r}))$$

die mittlere Dichte der durch die beiden Elektronen der Moleküle bedingten Raumladung darstellt, und daß ferner die Produkte  $N e \xi_i$ ,

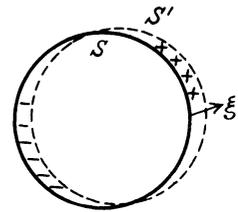


Abb. 1.

$Ne\xi_i\xi_k$  usw. nichts anders als die Komponenten der elektrischen Polarisation erster, zweiter und höherer Ordnungen sind, so folgt

$$\varrho = -\frac{\partial P_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_{ik}}{\partial x_i \partial x_k} - \dots \quad (43a)$$

Wir haben also das uns schon bekannte Resultat wiedergefunden, und zwar praktisch in derselben Weise wie früher<sup>1)</sup>. Das neue, was wir dabei gewonnen haben, ist die *geometrische Interpretation* dieses Resultats. Wir haben nämlich gezeigt, daß die von den gebundenen Elektronen herrührende Volumladung eines Körpers durch die *azentrische Lage* dieser Elektronen oder eines Teiles von ihnen in bezug auf den Mittelpunkt der Moleküle bedingt wird. Die soeben angeführten Betrachtungen lassen sich auf eine beliebige Anzahl von Elektronen verallgemeinern, wobei der „Mittelpunkt“ des von ihnen gebildeten Systems (Moleküls) ganz beliebig gewählt werden kann. Es sei bemerkt, daß die elektrischen Momente zweiter und höherer Ordnung im allgemeinen eine von der Wahl des „Mittelpunktes“ abhängige Größe haben; nur die Momente erster Ordnung sind — sofern das Molekül im ganzen neutral ist — von dieser Wahl unabhängig. Man kann aber leicht zeigen, daß die durch (43a) resultierende bestimmte Volumdichte der elektrischen Ladung von der Wahl des Mittelpunktes unabhängig bleibt. In der Tat schreibt man die relativen Koordinaten  $\xi_i$  der verschiedenen Elektronen in der Form  $\xi'_i + \xi_i^0$ , wo  $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$  die Koordinaten des neuen Mittelpunktes bezüglich des ursprünglichen bedeuten, und drückt die ursprünglichen elektrischen Momente durch die neuen aus, so wird nach der Definition der elektrischen Polarisation ( $P_{i_1 i_2 \dots i_k} = Ne_{i_1 i_2 \dots i_k} = Ne \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}$ , vgl. Bd. I, S. 102)

$$\left. \begin{aligned} P_i &= P'_i, & P_{ik} &= P'_{ik} + \xi_i^0 P'_k + \xi_k^0 P'_i, \\ P_{ikl} &= P'_{ikl} + \sum \xi_i^0 P'_{kl} + \sum \xi_i^0 \xi_k^0 P'_l \end{aligned} \right\} \quad (43b)$$

usw., wo zur Abkürzung mit  $\Sigma$  die Summe aller durch Vertauschung der Indizes sich ergebender Glieder bezeichnet ist. Setzt man diese Ausdrücke in die Formel (43a) ein und beachtet, daß die Reihe

$$\sum_i \frac{\partial P'_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \xi_i^0 \frac{\partial^2 P'_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{3!} \sum_i \sum_k \sum_l \xi_i^0 \xi_k^0 \frac{\partial^3 P'_l}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} - \dots$$

die Entwicklung der Größe  $\sum_i \frac{\partial P'_i}{\partial x_i}$  für den Punkt  $x_i - \xi_i^0 = x'_i$  bedeutet [Ähnliches gilt für andere Größen, die in (43a) auftreten], so bekommt man wieder eine Formel derselben Gestalt, wobei aber  $\varrho$  nicht auf den ursprünglichen, sondern auf den verschobenen Punkt mit den Koordinaten  $x_1 - \xi_1^0, x_2 - \xi_2^0, x_3 - \xi_3^0$  bezogen werden muß.

<sup>1)</sup> Diese Formel gilt selbstverständlich auch dann, wenn es Moleküle von mehreren verschiedenen Arten gibt. Es ist dabei nur nötig, in (43) die Produkte  $eN\xi_i, eN\xi_i\xi_k$  usw. durch Summen solcher Produkte über alle Molekülarten zu ersetzen.

Ganz analog wie die Volumladung läßt sich auch die durch die gebundenen Elektronen bedingte Flächenladung ebenso wie die Momente der Doppel- und Vielfachenschichten erklären.

Diese Oberflächenschichten entstehen durch Verschiebung der die verschiedenen Elektronen enthaltenden Volumina gegeneinander. Im Falle einfacher Dipolmoleküle bekommen wir zwei Volumina (Abb. 1), deren Teile, die sich nicht überdecken, eine dünne Schicht mit der Ladung

$$\eta' = N e \xi_n = P_n$$

pro Flächeneinheit bilden. Diese Schicht kann man in erster Annäherung als eine einfache Flächenbelegung betrachten und sich auf der Oberfläche  $S$ , die durch die äußersten Molekülmittelpunkte geht, verteilt denken. Will man aber ihre *endliche Dicke* berücksichtigen, so muß man zu der letztgenannten *einfachen* Schicht auf  $S$  eine Doppelschicht hinzufügen, deren eine Seite durch die entgegengesetzte Oberflächenschicht auf  $S$  gebildet ist, und die andere Seite durch die zwischen  $S$  und  $S'$  eingeschlossene Volumladung. In zweiter Annäherung kann man diese Volumladung durch eine Flächenladung von derselben Größe ersetzen, wobei die entsprechende Fläche  $S''$  ungefähr in der Mitte zwischen den Flächen  $S$  und  $S'$  laufen muß. Auf diese Weise bekommen wir eine Doppelschicht mit dem Moment  $\eta \cdot \frac{1}{2} \xi_n = \frac{1}{2} N e \xi_n^2 = \frac{1}{2} 2\mathfrak{P}_{nn}$  pro Flächeneinheit — im Einklang mit der Formel (33a). Wenn man noch den Umstand berücksichtigt, daß die Raumdichte der Ladung zwischen  $S$  und  $S'$  nicht exakt konstant ist, sondern sich in einer durch die Abhängigkeit der Konzentration  $N$  von den Koordinaten bestimmten Weise ändert, so erhält man eine zusätzliche einfache Flächenladung (auf  $S$ ) mit der Dichte  $\eta'' = -\frac{1}{2} n_i \frac{\partial(eN\xi_i\xi_k)}{\partial x_k} = -\frac{1}{2} n \cdot \text{div } 2\mathfrak{P}$ . — Diese Betrachtungen können leicht weiter fortgesetzt werden. Doch werden wir auf diese Frage nicht näher eingehen und wollen jetzt die entsprechende Frage für die magnetische Polarisation und die davon herführende Strömungsdichte ganz kurz besprechen.

## 2. Magnetische Polarisation und relativistische Verallgemeinerung.

Wir betrachten wieder das Molekülmodell mit zwei Elektronen, stellen uns aber vor, daß das positive Elektron nicht ruht, sondern um das negative (d. h. den „Mittelpunkt“ des Moleküls) sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \frac{d\xi}{dt}$  bewegt. Dementsprechend muß jedes Molekül das magnetische Moment

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2c} \xi \times \mathbf{v} \tag{44}$$

besitzen (vgl. Bd. I, S. 87, 241).

30 Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.

Die elektrischen Impulse der einzelnen Elektronen  $\frac{e\mathbf{v}}{c}$  setzen sich zu einem Impuls zusammen, dessen mittlere Größe pro Volumeinheit in derselben Weise bestimmt werden kann, wie die mittlere Ladungsdichte. Und zwar behandelt man  $\mathbf{v}$ , ebenso wie  $\xi$  und  $N$ , als stetige Ortsfunktion, so hat man für den Mittelwert des Produktes  $N'v'_h$ , auf die Mittelpunkte der Moleküle bezogen, nach (43)

$$N'v'_h = Nv_h - \frac{\partial}{\partial x_i} (Nv_h \xi_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (Nv_h \xi_i \xi_k) - \dots \quad (45)$$

Da die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  sich sehr schnell ändert, müssen wir um den gesuchten *Raumzeitmittelwert* der Stromdichte  $\mathbf{j}$  zu bekommen, den Ausdruck (45) noch über die Zeit (d. h. über einige Umlaufperioden der Elektronen) mitteln. Der zeitliche Mittelwert der *Ableitung* einer Koordinate ( $\xi_i$ ) oder eines Produktes von mehreren Koordinaten ist offenbar gleich Null zu setzen. Wir haben also

$$\frac{d\xi_h}{dt} = v_h = 0 \quad \frac{d}{dt} (\xi_h \xi_i) = v_h \xi_i + \xi_h v_i = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (\xi_h \xi_i \xi_k) = v_h \xi_i \xi_k + v_i \xi_k \xi_h + v_k \xi_h \xi_i = 0$$

usw. Daraus folgt

$$v_h \xi_i = -\xi_h v_i = \frac{1}{2} (v_h \xi_i - v_i \xi_h);$$

ferner

$$v_h \xi_i \xi_k = -v_i \xi_k \xi_h - v_k \xi_h \xi_i = \frac{1}{2} (v_h \xi_i \xi_k - v_i \xi_k \xi_h - v_k \xi_h \xi_i),$$

d. h.

$$\frac{3}{2} v_h \xi_i \xi_k = \frac{1}{2} (v_h \xi_i \xi_k - v_i \xi_k \xi_h + v_h \xi_i \xi_k - v_k \xi_h \xi_i),$$

oder schließlich

$$v_h \xi_i \xi_k = \frac{1}{3} [(v_h \xi_i - v_i \xi_h) \xi_k + (v_h \xi_k - v_k \xi_h) \xi_i]$$

usw.

Multipliziert man das Zeitmittel von (45) mit  $\frac{e}{c}$  und ersetzt den Vektor  $\mathbf{m}$  durch den entsprechenden schiefsymmetrischen Tensor  ${}^2\mathbf{m}$  mit den Komponenten

$$m_{hi} = \frac{e}{2} (\xi_h v_i - \xi_i v_h), \quad (45a)$$

so bekommt man für die mittlere Dichte des von der Umlaufbewegung der Elektronen herrührenden Stroms (elektrischer Impuls pro Volumeinheit) die folgende Formel

$$\mathbf{j}_h = \frac{\partial}{\partial x_i} (N m_{hi}) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left\{ N (m_{hi} \xi_k + \overline{m_{hk} \xi_i}) \right\} + \dots \quad (45b)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite kann offenbar als die  $h$ -Kompo-

nente des Vektors  $\text{rot } \mathfrak{M}$  aufgefaßt werden, wo  $\mathfrak{M} = Nm$  das (mittlere) magnetische Moment pro Volumeinheit, d. h. die *magnetische Polarisation* erster Ordnung bedeutet. Wir bekommen also in erster Annäherung unsere ursprüngliche Formel  $\mathfrak{j} = \text{rot } \mathfrak{M}$ .

Läßt man die Indizes  $h, i, k \dots$  nicht drei, sondern alle vier Werte 1, 2, 3, 4 durchlaufen, so bekommt man als vierdimensionale Erweiterung von (45b) die Formel (38a) oder eher die Summe der Ausdrücke (38a) von  $k = 1$  bis  $k = \infty$ , wobei für die Größen  $P_{h i_1 i_2 \dots}$  sich die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$P_{hi} = Nm_{hi}, \quad P_{hik} = \frac{2}{3} N (\overline{m_{hi} \xi_k} + \overline{m_{hk} \xi_i}), \text{ usw.} \quad (45c)$$

Diese Ausdrücke haben tatsächlich die Symmetrieeigenschaften, welche oben behauptet (aber nicht streng bewiesen) wurden.

Es seien noch einige Worte zur geometrischen Deutung des von den gebundenen Elektronen bedingten *Flächenstromes* hinzugefügt. — In der durch  $S$  und  $S'$  begrenzten Flächenschicht (Abb. 1) sind durchschnittlich  $N\xi$  Elektronen pro Flächeneinheit eingeschlossen, welche sich in tangentialer Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Dabei bedeuten  $\xi$  und  $v$  Mittelwerte, die derart zu wählen sind, daß die Beziehung  $\xi \cdot v = \frac{1}{2} |\xi \times v|$  bestehen soll. Auf diese Weise ergibt sich für den elektrischen Impuls pro Flächeneinheit, d. h. für die Stromdichte  $\mathfrak{f}$  der bekannte Ausdruck

$$\mathfrak{f} = N \frac{e}{c} \frac{1}{2} \overline{(\xi \times v)} \times \mathfrak{n} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{n}.$$

Wir haben bisher die Tatsache außer acht gelassen, daß die Elektronen wegen ihrer *Eigenrotation* ein zusätzliches magnetisches und elektrisches Moment besitzen. Diese Momente müssen offenbar zur magnetischen und eventuell auch zur elektrischen Polarisation des betrachteten Körpers auch etwas beitragen. Insofern dieser Beitrag bekannt ist, können wir nach der in den vorhergehenden Paragraphen geschilderten analytischen Methode die äquivalente Strom- und Ladungsdichte berechnen. Um ihren Ursprung geometrisch zu deuten, sollte man die Elektronen in Elementarladungen einteilen und die letzteren auf dieselbe Weise behandeln wie wir es oben bei den Elektronen selbst getan haben. Dies ist selbstverständlich nur dann möglich, wenn man die Elektronen als ausgedehnte Teilchen betrachtet.

Bezeichnet man das eigene magnetische Moment eines Elektrons mit  $m$ , so kann man den Mittelwert des Produktes  $N'm_h$ , bezogen auf die Mittelpunkte der Moleküle, durch die Formel

$$M_h = Nm_h - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{Nm_h \xi_i}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (\overline{Nm_h \xi_i \xi_k}) \quad (46)$$

bestimmen [diese Formel ergibt sich aus (45), wenn man dort  $v$  durch  $m$  ersetzt]. Der unmittelbare Effekt der Elektronenmagnete ist folglich

eine *einfache* magnetische Polarisation (erster Ordnung) von der durch (46) definierten Größe. Aus dieser Polarisation bekommt man die äquivalente Stromdichte in der üblichen Weise, d. h. mittels der Formel  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathfrak{M}$  (ohne irgendwelche Zusatzglieder). Ähnliches gilt für die entsprechende elektrische Polarisation (falls sie überhaupt nicht verschwindet). Auf diese Frage werden wir nicht eingehen. Es muß aber darauf geachtet werden, daß die Abhängigkeit des betrachteten Anteils der magnetischen Polarisation von dem (mittleren) Feld von der Abhängigkeit des anderen Anteils, welcher von der Umlaufbewegung herrührt, verschieden sein kann.

### § 7. Die einfachste Form der elektromagnetischen Feldgleichungen für isotrope und anisotrope Körper.

#### 1. Die elektromagnetischen Konstanten isotroper Körper.

Die endgültige Form der Differentialgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes muß, wie im § 2 gezeigt wurde, von der Wahl der Funktion  $s(F)$  oder, ausführlicher geschrieben, der Funktionen

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}), \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}), \quad \rho(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}) \quad \text{und} \quad \mathbf{j}(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$$

abhängen. Es bedeuten dabei  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  die *vollständige* elektrische bzw. magnetische Polarisation im gewöhnlichen Sinne, d. h. die Summe der Polarisationen erster Ordnung, welche von den Dipol-, Quadrupol- und höheren Momenten der Moleküle abhängen, während  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  die von den freien Elektronen herrührenden Ladungs- und Stromdichte sind.

Der einfachste Ansatz, den man für die Funktionen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  in Analogie zum *Hookeschen* Gesetz machen kann, ist der folgende:

$$\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{E}, \quad (47)$$

$$\mathfrak{M} = \gamma \mathfrak{H}, \quad (47a)$$

wo  $\kappa$  und  $\gamma$  zwei Materialkonstanten bedeuten, die wir als elektrische bzw. magnetische *Suszeptibilität* des betrachteten Körpers bezeichnen werden. Dieser Ansatz entspricht offenbar dem Falle eines *isotropen* Körpers, dessen Moleküle keine *natürlichen* elektrischen und magnetischen Momente, sondern nur die durch das äußere Feld induzierten Momente erster Ordnung besitzen; induzierte Momente höherer Ordnung sind in (47) und (47a) nicht berücksichtigt. Bei *homogenen* Körpern haben die Suszeptibilitäten  $\kappa$  und  $\gamma$  dieselben Werte im ganzen Volumen; sonst sind sie als bestimmte Ortsfunktionen zu behandeln. Wir werden später sehen, daß die Formeln (47) und (47a) annäherungsweise auch dann gültig bleiben, wenn die Körpermoleküle natürliche Dipolmomente besitzen, falls sie beim Fehlen des Feldes unregelmäßig orientiert sind, so daß das Zeit- oder Raummittel ihrer Komponente in jeder bestimmten Richtung verschwindet. Es ist ferner zu beachten, daß die

mittels (47) und (47a) eingeführten Suszeptibilitäten streng genommen nur für harmonisch schwingende (oder statische) Felder einen Sinn, d. h. einen bestimmten Wert haben. Im allgemeinen Falle eines beliebig wechselnden Feldes muß man es in harmonische Komponenten zerlegen und jeder Komponente die entsprechende Komponente der Polarisation mit dem zugehörigen Wert der Suszeptibilität zuordnen.

Ähnliches gilt bezüglich der Funktion  $\mathbf{j}$ , die sich nach dem *Ohmschen* Gesetz linear durch die Feldkomponenten ausdrücken muß. Der einfachste, für *isotrope* Körper gültige Ansatz für  $\mathbf{j}$  lautet bei Vernachlässigung der elektromagnetischen Kraft

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}, \tag{48}$$

wo  $\sigma$  die spezifische elektrische *Leitfähigkeit* (oder das *Leitvermögen*) des betreffenden Körpers ist<sup>1)</sup>.

Will man den Einfluß des eventuell vorhandenen magnetischen Feldes auf die Stromdichte berücksichtigen, so muß man  $\mathfrak{E}$  durch die Summe  $\mathfrak{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{H}$  ersetzen, wo  $\mathbf{v}$  die mittlere Geschwindigkeit der betrachteten „freien“ Elektronen bedeutet (wenn mehrere Elektronen oder Ionengattungen vorhanden sind, muß man die entsprechenden Anteile von  $\mathbf{j}$  einzeln behandeln). Es wird folglich

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \left( \mathfrak{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{H} \right).$$

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  läßt sich aus der Stromdichte nach der Formel

$$\mathbf{j} = \frac{n e \mathbf{v}}{c} \tag{48a}$$

berechnen ( $n$  bedeutet hier die mittlere Anzahl freier Elektronen pro Volumeinheit). Wir bekommen auf diese Weise die folgende Gleichung für  $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \left( \mathfrak{E} + \frac{1}{n e} \mathbf{j} \times \mathfrak{H} \right).$$

Vernachlässigt man die in  $\mathfrak{H}$  quadratischen Glieder, so kann man im zweiten Gliede der rechten Seite  $\mathbf{j}$  durch  $\frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}$  ersetzen; dies liefert für  $\mathbf{j}$  den Ausdruck

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E} + \frac{\sigma^2}{n e c^2} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}. \tag{48b}$$

Das erste Glied stellt den gewöhnlichen *Ohmschen* Strom dar; das zweite mag als *Hallscher* Strom bezeichnet werden, da es den von *Hall* entdeckten Effekt mißt. Im folgenden werden wir diesen *Hallschen* Strom weglassen, also die einfache Formel (48) benutzen.

<sup>1)</sup> Bei dieser Definition ist die Leitfähigkeit in *elektrostatischen* Einheiten gemessen. Das Verhältnis  $\frac{\sigma}{c}$  stellt dieselbe Leitfähigkeit in elektromagnetischen Einheiten dar.

Für die elektrische Ladungsdichte  $\varrho$  (die von den freien Elektronen herrührt) gibt es keine Beziehung zu den elektromagnetischen Feldgrößen. Wegen der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

die den Erhaltungssatz der Elektrizität ausdrückt, kann eine selbständige Beziehung dieser Art überhaupt nicht existieren. In dem Falle eines homogenen (und isotropen) Körpers läßt sich die letzte Gleichung leicht integrieren. Setzt man nämlich  $\mathbf{j} = \frac{\sigma \mathfrak{E}}{c}$  ein und berücksichtigt die Gleichung  $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi \varrho$ , und die Beziehung  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{B} = (1 + 4\pi \kappa) \mathfrak{E}$  [nach (47)], so wird

$$c \operatorname{div} \mathbf{j} = \sigma \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\sigma}{1 + 4\pi \kappa} \operatorname{div} \mathfrak{D} = \frac{4\pi \sigma}{1 + 4\pi \kappa} \varrho.$$

Wir haben also für jede Komponente die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma}{1 + 4\pi \kappa} \varrho = 0,$$

deren Integral lautet

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\varrho_0 = \text{konst}), \quad (49)$$

wo zur Abkürzung

$$\tau = \frac{1 + 4\pi \kappa}{4\pi \sigma} \quad (49a)$$

gesetzt ist.

Diese Formeln zeigen, daß in einem homogenen isotropen Körper mit nicht verschwindender Leitfähigkeit eine dauernde Volumverteilung der Elektrizität unmöglich ist; ihre Dichte muß, ganz unabhängig von dem zeitlichen Verlauf der anderen elektromagnetischen Größen in jedem Raumpunkt mit der Zeit exponentiell abklingen, und zwar desto rascher, je kleiner die Größe  $\tau$  — die sogenannte *Relaxationszeit* — ist.

Die soeben eingeführte Größe

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \kappa \quad (50)$$

heißt die *Dielektrizitätskonstante* des Körpers. Sie ist dem Verhältnis der elektrischen Erregung  $\mathfrak{D}$  zur elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  gleich, d. h.

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}. \quad (50a)$$

Die entsprechende Beziehung zwischen der magnetischen Erregung  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} - 4\pi \mathfrak{M}$  und magnetischen Feldstärke lautet

$$\mathfrak{B} = \mu^{-1} \mathfrak{H}, \quad (51)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor — die „magnetische Konstante“ — sich nach (47a) folgendermaßen ausdrückt

$$\mu^{-1} = 1 - 4\pi \gamma. \quad (51a)$$

Wie schon oben erwähnt wurde, definiert man in der üblichen Darstellung der Elektrizitätslehre die gemittelte Feldstärke  $\mathfrak{H}$  als die magnetische Erregung und die Größe  $\mathfrak{B}$  als die „Feldstärke“. Dementsprechend definiert man die magnetische Suszeptibilität  $\chi$  durch die Formel

$$\mathfrak{H} = \chi \mathfrak{B} \quad (52)$$

und führt statt  $\mu^{-1}$  die reziproke Größe  $\mu = \frac{1}{\mu^{-1}}$  ein, die als *magnetische Permeabilität* bezeichnet wird und die sich durch  $\chi$  auf dieselbe Weise wie  $\varepsilon$  durch  $\varkappa$  ausdrückt, d. h. nach der Formel

$$\mu = 1 + 4\pi\chi. \quad (52a)$$

Diese gewöhnliche Suszeptibilität  $\chi$  ist mit unserer  $\gamma$  durch die Beziehung  $1 + 4\pi\chi = \frac{1}{1 - 4\pi\gamma}$  verknüpft. Man hat folglich

$$\gamma = \frac{\chi}{1 + 4\pi\chi} = \frac{\chi}{\mu} \quad (52b)$$

und

$$\mathfrak{H} = \mu \mathfrak{B}. \quad (52c)$$

## 2. Die Grundgleichungen und die Grenzbedingungen.

Wenn man die Ausdrücke (50a) und (52c) in die Gleichungen (17) und (18) für nichtleitende Körper einführt, nehmen diese Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{B} = 0, \quad (53)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \quad (53a)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 0. \quad (53b)$$

Für leitende Körper ( $\sigma > 0$ ) muß die letzte Gleichung durch

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E} \quad (54)$$

ersetzt werden (die elektrische Ladungsdichte  $\rho$  können wir von vornherein gleich Null setzen).

Wie schon manchmal erwähnt wurde, können diese Gleichungen nur in dem Fall harmonisch schwingender Felder streng gültig sein. Wir machen demgemäß den Ansatz

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 e^{i\omega t}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^0 e^{i\omega t} \quad (55)$$

und bekommen zur Bestimmung der Amplituden  $\mathfrak{E}^0$  und  $\mathfrak{B}^0$  als Ortsfunktionen die Gleichungen:

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E}^0 = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{B}^0 = 0, \quad (55a)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E}^0 + \frac{i\omega}{c} \mu \mathfrak{B}^0 = 0, \quad (55b)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B}^0 - \frac{i\omega}{c} \varepsilon' \mathfrak{E}^0 = 0. \quad (55c)$$

Wir haben dabei die beiden Konstanten  $\varepsilon$  und  $\sigma$  zu einer einzigen *komplexen* Größe

$$\varepsilon' = \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (55d)$$

vereinigt, die als „komplexe Dielektrizitätskonstante“ des betreffenden Körpers bezeichnet werden kann. Es sei daran erinnert, daß auch bei  $\sigma = 0$  die Größe  $\varepsilon$  ebenso wie  $\mu$  einen komplexen Wert haben kann (vgl. Ende § 2).

Neben den Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Feldgrößen, wollen wir noch die auf der Grenzfläche zweier solcher Körper ( $a$  und  $b$ ) geltenden Bedingungen kurz betrachten. Falls es keine Flächenladung und keinen Flächenstrom gibt, hat man nach (19) und (20)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^a E_n^a &= \varepsilon^b E_n^b, & E_\tau^a &= E_\tau^b \\ D_n^a &= D_n^b, & \frac{D_\tau^a}{\varepsilon^a} &= \frac{D_\tau^b}{\varepsilon^b} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \mu^a B_n^a &= \mu^b B_n^b, & B_\tau^a &= B_\tau^b \\ H_n^a &= H_n^b, & \frac{H_\tau^a}{\mu^a} &= \frac{H_\tau^b}{\mu^b} \end{aligned} \right\} \quad (56a)$$

wo  $E_\tau, D_\tau$  usw. die tangentiellen Komponenten der entsprechenden Vektoren bedeuten. Bezeichnet man die Winkel zwischen der Flächennormale  $\mathfrak{n}$  und der elektrischen Feldstärke (oder Erregung) in den beiden Körpern mit  $i_a$  und  $i_b$ , so bekommt man nach (56) das folgende „Brechungsgesetz der elektrischen Kraftlinien“

$$\frac{\operatorname{tg} i_b}{\operatorname{tg} i_a} = \frac{\varepsilon^a}{\varepsilon^b}. \quad (56b)$$

Ein ähnliches Gesetz gilt für die magnetischen Kraftlinien, welche die Vektoren  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{B}$  graphisch darstellen.

Die oben angeführten Differentialgleichungen und Grenzbedingungen lassen sich leicht auf den Fall *anisotroper Körper* verallgemeinern. Und zwar muß man einfach statt der *skalaren* Materialkonstanten  $\kappa, \varepsilon, \chi, \mu$  (oder  $\gamma, \mu^{-1}$ ) und  $\sigma$  entsprechende *Tensoren zweiten Ranges* einführen. Es wird dabei

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \kappa_{ik} E_k, \quad D_i = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} E_k, \quad \varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi \kappa_{ik}, \quad (57)$$

wo  $\delta$  den Einheitsensor bedeutet; ferner

$$M_i = \sum_{k=1}^3 \chi_{ik} B_k, \quad H_i = \sum_{k=1}^3 \mu_{ik} B_k, \quad \mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi \chi_{ik} \quad (57a)$$

oder

$$M_i = \sum_{k=1}^3 \gamma_{ik} H_k, \quad B_i = \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{-1} H_k, \quad \mu_{ik}^{-1} = \delta_{ik} - 4\pi \gamma_{ik}, \quad (57b)$$

und schließlich

$$j_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\sigma_{ik}}{c} E_k. \quad (57c)$$

Die Tensoren  ${}^2\mu$  und  ${}^2\mu^{-1}$  sind zueinander reziprok. Bezeichnet man die aus den Komponenten von  ${}^2\mu$  gebildete Determinante mit  $|\mu|$ , so gilt

$$\mu_{ik}^{-1} = \frac{1}{|\mu|} \frac{\partial |\mu|}{\partial \mu_{ki}}.$$

Wie wir es später zeigen werden, sind die obigen Tensoren im allgemeinen alle *symmetrisch*. Man kann folglich für jeden anisotropen Körper solche rechtwinkligen Koordinatenachsen wählen, in bezug auf welche die nichtdiagonalen Komponenten der Tensoren  ${}^2\kappa$  und  ${}^2\varepsilon$  oder  ${}^2\chi$  und  ${}^2\mu$  verschwinden. Diese Achsen heißen die *elektrischen bzw. magnetischen Achsen* des betrachteten Körpers (oder Volumelementes, falls der Körper nicht nur anisotrop, sondern auch inhomogen ist). Die entsprechenden nichtverschwindenden Komponenten der erwähnten Tensoren heißen ihre *Hauptkomponenten* und werden gewöhnlich durch Anhängen eines Indizes, also z. B. mit  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  bezeichnet.

Die elektrischen und magnetischen Achsen, ebenso wie die Achsen des Leitfähigkeitstensors können im allgemeinen verschiedene Richtungen haben. Fallen sie alle zusammen, so nehmen die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes, bezogen auf diese Achsen, die folgende verhältnismäßig einfache Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (\varepsilon_1 E_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\varepsilon_2 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\varepsilon_3 E_3) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (\mu_1 B_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\mu_2 B_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\mu_3 B_3) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\mu_1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\mu_2}{c} \frac{\partial B_2}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\mu_3}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (58a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} &= 4\pi \frac{\sigma_1}{c} E_1 \\ \frac{\partial B_1}{\partial x_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1} - \frac{\varepsilon_2}{c} \frac{\partial E_2}{\partial t} &= 4\pi \frac{\sigma_2}{c} E_2 \\ \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{\varepsilon_3}{c} \frac{\partial E_3}{\partial t} &= 4\pi \frac{\sigma_3}{c} E_3 \end{aligned} \right\}. \quad (58b)$$

Die elektrischen und magnetischen Achsen sind dadurch ausgezeichnet, daß für sie — und nur für sie — die Feldstärken und die entsprechenden Erregungen einander parallel sind. Im allgemeinen aber müssen die Kraftlinien und die Erregungslinien in verschiedenen Richtungen verlaufen. An der Grenzfläche zweier Körper werden sie folglich verschieden gebrochen.

### § 8. Die Verallgemeinerung der Feldgleichungen für bewegte Körper.

#### 1. Direkte Berücksichtigung der Bewegungsgeschwindigkeit.

Die oben angeführten Feldgleichungen für isotrope Körper lassen sich leicht noch nach einer anderen Richtung verallgemeinern, nämlich für den Fall, daß der Körper sich in bezug auf das betreffende Koordinatensystem  $S'$  geradlinig und gleichförmig bewegt. Das mit dem Körper fest verbundene Koordinatensystem sei  $S$ . Wir nehmen an, daß die beiden Systeme gleich orientiert sind und daß  $S$  sich gegenüber  $S'$  in der Richtung der (gemeinsamen) ersten Achse mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt.

Diese Frage haben wir in § 4 von einem allgemeinen Standpunkte aus, d. h. unabhängig von irgend einer Beziehung zwischen den Feldstärken ( $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ ) und den Polarisierungen ( $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{M}$ ) oder Erregungen ( $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{B}$ ) schon ausführlich diskutiert. Jetzt bleibt uns folglich die im vorigen Paragraphen für das System  $S$  eingeführten Beziehungen (47), (47a), (50a) und (51) zu berücksichtigen (wir betrachten zunächst den Fall eines nicht leitenden Körpers, d. h. setzen  $\sigma = 0$ ).

Dies läßt sich mittels der (angenäherten) Transformationsgleichungen (28), (28a) und (28b) des § 4 sehr leicht ausführen. Wir setzen nämlich in den Gleichungen (28a) und (28b) die Ausdrücke  $\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{M} = \gamma \mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{B} = \mu^{-1} \mathfrak{H}$  ein, und drücken ferner  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  durch  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{H}'$  aus nach den Formeln

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}' - \frac{v}{c} \times \mathfrak{E}' \\ \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}' + \frac{v}{c} \times \mathfrak{H}' \end{aligned} \right\}$$

die sich durch Umkehrung von (28) bei Vernachlässigung der in  $\frac{v}{c}$  quadratischen Glieder ergeben. Auf diese Weise bekommen wir die folgenden (angenäherten) Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P}' &= \kappa \mathfrak{E}' + (\kappa + \gamma) \frac{v}{c} \times \mathfrak{H}' \\ \mathfrak{M}' &= \gamma \mathfrak{H}' - (\kappa + \gamma) \frac{v}{c} \times \mathfrak{E}' \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

und mit Rücksicht auf die Relationen (50) und (51a)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}' &= \epsilon \mathfrak{E}' + (\epsilon - \mu^{-1}) \frac{v}{c} \times \mathfrak{H}' \\ \mathfrak{B}' &= \mu^{-1} \mathfrak{H}' + (\epsilon - \mu^{-1}) \frac{v}{c} \times \mathfrak{E}' \end{aligned} \right\} \quad (59a)$$

Aus den letzten Gleichungen ergeben sich mit derselben Annäherung die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}' &= \epsilon \mathfrak{E}' + \frac{\epsilon - \mu^{-1}}{\mu^{-1}} \frac{v}{c} \times \mathfrak{B}' \\ \mathfrak{H}' &= \frac{1}{\mu^{-1}} \mathfrak{B}' - \frac{\epsilon - \mu^{-1}}{\mu^{-1}} \frac{v}{c} \times \mathfrak{E}' \end{aligned} \right\}$$

d. h. mit  $\mu^{-1} = \frac{1}{\mu}$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}' &= \varepsilon \mathfrak{E}' + (\varepsilon \mu - 1) \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{B}' \\ \mathfrak{H}' &= \mu \mathfrak{B}' - (\varepsilon \mu - 1) \frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{E}' \end{aligned} \right\} \quad (59b)$$

Es sei daran erinnert, daß die Grundgleichungen (I) und (III) bei einem Übergang von  $S$  zu  $S'$  unverändert bleiben, d. h. die *übliche* Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}' \mathfrak{H}' &= 0 & \operatorname{rot}' \mathfrak{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial t'} &= 0 \\ \operatorname{div}' \mathfrak{D}' &= 0, & \operatorname{rot}' \mathfrak{B}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

beibehalten. Drückt man aber hier  $\mathfrak{D}'$  und  $\mathfrak{B}'$  (oder  $\mathfrak{H}'$ ) durch  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{H}'$  (bzw.  $\mathfrak{B}'$ ) nach (59a) oder (59b) aus, so bekommt man Gleichungen, die von den einfachen, sich auf das mit dem Körper bewegte Koordinatensystem  $S$  beziehenden Gleichungen (53), (53a) und (53b), wesentlich verschieden sind. Diese verallgemeinerten, für einen in bezug auf das System  $S'$  mit der Geschwindigkeit  $\mathfrak{v}$  bewegten Körper geltenden Gleichungen lauten, mit der Abkürzung

$$\mathfrak{w} = (\varepsilon \mu - 1) \frac{\mathfrak{v}}{c} \quad (61)$$

und mit Rücksicht auf die Identität  $\operatorname{div}' (\mathfrak{w} \times \mathfrak{E}') = -\mathfrak{w} \cdot \operatorname{rot}' \mathfrak{E}'$ , folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}' \varepsilon \mathfrak{E}' + \mathfrak{w} \cdot \operatorname{rot}' \mathfrak{B}' &= 0, \\ \operatorname{div}' \mu \mathfrak{B}' - \mathfrak{w} \cdot \operatorname{rot}' \mathfrak{E}' &= 0, \\ \operatorname{rot}' \mathfrak{E}' + \frac{1}{c} \left( \mu \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t'} - \mathfrak{w} \times \frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial t'} \right) &= 0, \\ \operatorname{rot}' \mathfrak{B}' - \frac{1}{c} \left( \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial t'} + \mathfrak{w} \times \frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t'} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (61a)$$

Wir haben bisher die elektrische Leitfähigkeit des betrachteten Körpers vernachlässigt. Wenn es sich um harmonisch schwingende Felder handelt, kann man sie sehr einfach berücksichtigen, und zwar durch Hinzufügung *der imaginären Größe*  $-i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$  zur dielektrischen Konstante  $\varepsilon$ . Hier bedeutet  $\omega$  die (mit  $2\pi$  multiplizierte) Frequenz der Schwingungen in bezug auf das System  $S$ . In der von uns gebrauchten Annäherung kann  $\omega$  mit der entsprechenden Größe für  $S'$  identifiziert werden (die exakte Beziehung lautet  $\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ).

Im allgemeinen Falle beliebiger elektromagnetischer Vorgänge muß man auf der rechten Seite der ersten und letzten der Gleichungen (61a) die (mit  $4\pi$  multiplizierte) Ladungsdichte  $\rho'$  bzw. die Stromdichte  $\mathfrak{j}'$  einführen. Setzt man wie üblich  $\rho = 0$ , so wird nach (29)  $\rho' = \frac{\mathfrak{v}}{c} \mathfrak{j}$

40 Die Grundgleichungen des makroskopischen elektromagnetischen Feldes.

und  $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$ . Es ergibt sich folglich wegen  $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{H}'$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}' &= \frac{\sigma}{c} \left( \mathfrak{E}' + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{H}' \right) \\ \rho' &= \frac{\sigma \mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathfrak{E} \cong \frac{\sigma \mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathfrak{E}' \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Diese Formeln stellen die angenäherte Form der folgenden exakten vierdimensionalen Relation

$$j'_i = \frac{\sigma}{c} \sum_{k=1}^4 H'_{ik} u_k \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (62a)$$

dar, wo  $H'_{ik}$  die durch (22a) definierten Komponenten des elektromagnetischen Feldtensors bedeuten und  $u_k$  die Komponenten des Vierervektors  $\mathbf{u}$ , welcher die Translationsgeschwindigkeit des Körpers charakterisiert (die räumliche Projektion von  $\mathbf{u}$  ist  $\frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  und die zeitliche  $\frac{i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ).

## 2. Relativistische Verallgemeinerung der elektromagnetischen Materialkonstanten.

Die angeführten Beziehungen zwischen den Polarisationen, Erregungen und Strom- (bzw. Ladungs-) dichte einerseits und den Feldstärken andererseits sind zuerst von *H. Minkowski* abgeleitet worden. Man kann aber diese Beziehungen in einer etwas verschiedenen vierdimensionalen Form darstellen in der Weise, daß die Translationsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Körpers nicht *explizite* in sie eingeht, sondern *implizite* in den *Materialkonstanten* enthalten ist. Diese verallgemeinerten Materialkonstanten eines bewegten isotropen Körpers lassen sich nicht mehr als skalare Größen behandeln, sondern ebenso wie bei anisotropen Körpern (die Anisotropie rührt im betrachteten Fall von der Bewegung her) müssen als gewisse *Tensoren* aufgefaßt werden, und zwar, wie leicht einzusehen ist, als *vierdimensionale Tensoren vierten und dritten Ranges*<sup>1)</sup>.

In der Tat will man die Komponenten des Erregungstensors  ${}^2\mathfrak{S}$  als lineare Funktionen der Komponenten des Feldtensors  ${}^2\mathfrak{E}$  definieren, so müssen die Koeffizienten dieses linearen Zusammenhanges die Komponenten eines Tensors vierten Ranges bilden. Bezeichnet man diesen Tensor mit  ${}^4\mathfrak{S}$ , so wird

$$B_{ik} = s_{ik;\alpha\beta} H_{\alpha\beta}, \quad (63)$$

wobei die Summenzeichen für gleiche Indexpaare ( $\alpha\alpha$  und  $\beta\beta$ ) weglassen sind. Da die Tensoren  ${}^2\mathfrak{E}_{\alpha\beta}$  und  ${}^2\mathfrak{S}_{ik}$  schiefssymmetrisch sind,

<sup>1)</sup> Die nachfolgenden Resultate rühren von *Ig. Tamm* her (*Math. Zs.* 1925).

so müssen die Tensorkomponenten  $s_{ik}; \alpha\beta$ , bezüglich der Indexpaare  $i, k$  und  $\alpha, \beta$  auch schiefsymmetrisch sein. Man kann ferner leicht zeigen, daß im Falle *isotroper* Körper die folgende Formel

$$s_{ik}; \alpha\alpha = s_{i\alpha} s_{k\beta} \tag{63a}$$

gilt, wo  $s_{i\alpha}$  und  $s_{k\beta}$  die Komponenten eines symmetrischen Tensors zweiten Ranges  ${}^2\mathfrak{S}$  sind. Diese Formel läßt sich unmittelbar für einen *ruhenden* Körper beweisen, wobei die Komponenten von  ${}^2\mathfrak{S}$  nach dem folgenden Schema gebildet sind:

$$(s_{k\beta}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon\sqrt{\mu} \end{vmatrix}. \tag{63b}$$

Wegen des invarianten Charakters der Beziehung (63a) gegenüber beliebiger Lorentztransformationen muß sie aber dann auch für bewegte Körper bestehen bleiben.

Die Lorentztransformation, welche dem Übergang vom „mitbewegten“ System  $S$  zum „ruhenden“  $S'$  entspricht, ist bekanntlich durch das folgende Koeffizientenschema

$$(\alpha_{kk'}) = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & \frac{\beta}{i}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\beta}{i}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \quad \left( \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c} \right) \tag{64}$$

definiert (vgl. Bd. I, S. 291; wir müssen dabei das Vorzeichen von  $v$  wechseln).

Setzt man diese Koeffizienten in die Transformationsformel

$$s'_{k'\beta'} = \alpha_{kk'} \alpha_{\beta\beta'} s_{\alpha\beta}$$

ein, so bekommt man nach einer einfachen Rechnung:

$$s'_{k'\beta'} = \begin{vmatrix} \frac{\gamma^2}{\sqrt{\mu}}(1-\beta^2\varepsilon\mu), & 0, & 0, & \frac{\beta\gamma^2}{\sqrt{\mu}}(1-\varepsilon\mu), \\ 0, & \frac{1}{\sqrt{\mu}}, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{\mu}}, & 0, \\ \frac{\beta\gamma^2}{\sqrt{\mu}}(1-\varepsilon\mu), & 0, & 0, & \gamma^2\varepsilon\sqrt{\mu}\left(1-\frac{\beta^2}{\varepsilon\mu}\right) \end{vmatrix}. \tag{64a}$$

Daraus ergibt sich nach (63) und (63a)

$$D'_1 = i B'_{14} = i s'_{1k} s'_{4\beta} H'_{k\beta} = i (s'_{11} s'_{44} H'_{14} + s'_{14} s'_{41} H'_{41}),$$

d. h.

$$D'_1 = (s'_{11} s'_{44} - s'_{14} s'_{41}) E'_1 = E'_1 \varepsilon \gamma^4 \left[ (1 - \beta^2 \varepsilon \mu) \left( 1 - \frac{\beta^2}{\varepsilon \mu} \right) - \beta^2 (1 - \varepsilon \mu)^2 \right]$$

oder

$$D'_1 = \varepsilon \left[ 1 - \gamma^4 \beta^2 \left( \varepsilon^2 \mu^2 - \varepsilon \mu + \frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \right] E_1;$$

ferner

$$D'_2 = i B'_{24} = i s'_{2k} s'_{4\beta} H'_{k\beta} = i s'_{22} (s'_{41} H'_{21} + s'_{44} H'_{24}),$$

d. h.

$$D'_2 = \varepsilon \gamma^2 \left( 1 - \frac{\beta^2}{\varepsilon \mu} \right) E'_2 - \frac{\beta \gamma^2}{\mu} (1 - \varepsilon \mu) H'_3$$

und in derselben Weise

$$D'_3 = \varepsilon \gamma^2 \left( 1 - \frac{\beta^2}{\varepsilon \mu} \right) E'_3 + \frac{\beta \gamma^2}{\mu} (1 - \varepsilon \mu) H'_2.$$

Ähnliche Formeln ergeben sich für die Komponenten von  $\mathfrak{B}$ . Vernachlässigt man die in  $\beta = \frac{v}{c}$  quadratischen Glieder, so kann man diese Komponenten vektoriell zu den schon oben abgeleiteten angenäherten Formeln (59a) oder (59b) zusammenfassen.

Die Formeln (62a) für die Komponenten des Viererstroms kann man in der Gestalt

$$j'_i = H'_{ik} \sigma'_k \quad (65)$$

umschreiben, wodurch statt des Leitfähigkeitsskalars  $\sigma$  der entsprechende Vektor mit den Komponenten  $\sigma'_k = \frac{\sigma}{c} u_k$  eingeführt wird. Im Falle anisotroper Körper ist aber eine solche Darstellung der Leitfähigkeit nicht mehr möglich; wir müssen vielmehr statt des dreidimensionalen Tensors zweiten Ranges  ${}^2\sigma$  einen Tensor dritten Ranges einführen mittels der Gleichung

$$j'_i = \sigma'_{ikl} H'_{kl}. \quad (65a)$$

Auf die Diskussion dieses Tensors, sowie des Tensors  ${}^2\mathfrak{B}$  für anisotrope Körper soll hier nicht eingegangen werden. Es sei nur bemerkt, daß der Leitfähigkeitstensor sich in diesem Falle nicht auf einen Tensor zweiten Ranges zurückführen läßt.

Um die eventuell auch in einem ruhenden Körper vorhandene freie Raumladung zu berücksichtigen, muß man ihre Dichte  $\rho$  als die zeitliche Komponente eines Vierervektors mit verschwindender räumlicher Projektion betrachten. Für einen bewegten Körper, d. h. in bezug auf das Koordinatensystem  $S'$ , ist diese Projektion von Null verschieden,

und zwar gleich  $\frac{\rho}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ . Sie wird gewöhnlich als *Konvektionsstrom* bezeichnet, im Gegensatz zu dem durch das Ohmsche Gesetz bestimmten

*Leitungsstrom.* Dem Konvektionsstrom entspricht als zeitliche Komponente die freie Ladungsdichte  $\varrho' = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ; sie ist praktisch (für kleine Werte von  $\frac{v}{c}$ ) mit  $\varrho$  identisch.

Bei Fehlen eines Konvektionsstromes nehmen die allgemeinen elektromagnetischen Feldgleichungen für bewegte anisotrope Körper in vierdimensionaler Schreibweise nach (22), (23), (63) und (63a) die folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial H_{li}}{\partial x_k} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (s_{ij; kl} \cdot H_{kl}) &= 4\pi \sigma_{ikl} H_{kl} \end{aligned} \right\}. \quad (66)$$

Dieses Gleichungssystem kann man als die Zusammenfassung der gewöhnlichen makroskopischen Theorie des elektromagnetischen Feldes in materiellen Körpern betrachten.

Führt man das *gemittelte Viererpotential*  $\mathfrak{A}$  nach der üblichen Formel

$$H_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad (66a)$$

ein (vgl. Bd. I, S. 252; dort bedeuten  $H_{ik}$  und  $A_i$  die *exakten* Werte der entsprechenden Größen im betrachteten Raumzeitpunkt), so werden die ersten Gleichungen (66) identisch erfüllt, während die zweiten die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ s_{ij; kl} \left( \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) \right] = 4\pi \sigma_{ikl} \left( \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right) \quad (66b).$$

annehmen.

Durch Integration dieser Gleichungen mit Rücksicht auf die oben angeführten Grenzbedingungen kann man ein harmonisch schwingendes (oder statisches) elektromagnetisches Feld eindeutig bestimmen. Im allgemeinen Falle nichtperiodischer Vorgänge müssen noch gewisse *Anfangsbedingungen* angegeben werden, welche zur Bestimmung der harmonischen Komponenten der Feldgrößen dienen. Diese Frage werden wir im zweiten Abschnitt ausführlich behandeln.

### § 9. Verschiedene Komplikationen der Theorie bei wirklichen Körpern.

Die in den letzten zwei Paragraphen entwickelte, von *Maxwell* herführende phänomenologische Theorie des makroskopischen Feldes, vervollständigt durch die mikroskopische *Dispersionstheorie*, welche die Abhängigkeit der Materialkonstanten  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  für harmonische Schwingungen von ihrer Frequenz bestimmt, ist erfahrungsgemäß mit der Mehrzahl der Beobachtungstatsachen in sehr gutem Einklang. In dieser Hinsicht, ebenso wie hinsichtlich der Form der Grundgleichungen entspricht sie vollkommen der klassischen, auf dem *Hookeschen* Gesetz basierenden Elastizitätstheorie, die ihre mathematische Formulierung in *linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* für die Verschie-

bungskomponenten findet (den letzteren entsprechen in der Maxwell'schen Theorie die elektromagnetischen Potentiale).

In beiden Fällen werden aber die materiellen Körper bezüglich ihrer elektromagnetischen bzw. elastischen Eigenschaften etwas *ideali-siert*. Um die Erscheinungen behandeln zu können, wo diese Ideali-sierung nicht mehr zutrifft, mit anderen Worten, um die Abweichungen wirklicher Körper von den „idealen“ zu berücksichtigen, muß man in die übliche phänomenologische Theorie gewisse Komplikationen ein-führen. Diese Komplikationen werden mathematisch durch *Zusatz-glieder*, welche die *Ordnung oder den Grad der Differentialgleichungen er-höhen*, ausgedrückt.

### 1. Die von den Polarisierungen höherer Ordnung herrührenden Komplikationen.

Die ersten dieser Komplikationen rühren in unserem Falle von der elektromagnetischen Polarisation zweiter und höherer Ordnung, die wir in § 5 ausführlich besprochen haben, die aber bei der Aufstellung der Grundgleichungen in § 7 außer acht gelassen wurden, her. — In Bd. I (Kap. IV, § 8) haben wir für die induzierten elektrischen Momente eines Moleküls den folgenden *linearen* Ansatz gemacht:

$$p(n_1, n_2, n_3) = - \sum_{n'_1, n'_2, n'_3} \alpha(n_1, n_2, n_3; n'_1, n'_2, n'_3) \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n'_1} \partial x_2^{n'_2} \partial x_3^{n'_3}},$$

wo  $\varphi$  das Potential des äußeren, zeitlich konstant vorausgesetzten elek-trischen Feldes bedeutet und die Summation sich auf alle (nichtnega-tive) Werte der Zahlen  $n'_1, n'_2, n'_3$  erstreckt, die den Ungleichungen  $0 < n'_1 + n'_2 + n'_3 = n' \leq n = n_1 + n_2 + n_3$  genügen. Die vierdimen-sionale Verallgemeinerung dieses Ansatzes lautet in einer etwas ver-schiedenen Schreibweise unter Weglassung der Summenzeichen für gleiche Indexpaare<sup>1)</sup>

$$m_{h_i i_2 \dots i_n} = \sum_{n'=1}^n \alpha_{h_i i_2 \dots i_n; k i'_1 i'_2 \dots i'_n} \cdot \frac{\partial^n A_k}{\partial x_{i'_1} \partial x_{i'_2} \dots \partial x_{i'_n}} \quad (67)$$

Es bedeuten dabei  $m_{h_i}$  die Komponenten des gewöhnlichen elektro-magnetischen Momententensors ( $m_{23} = m_1, m_{31} = m_2, m_{12} = m_3$  stellen das induzierte magnetische Moment,  $-im_{14} = p_1, -im_{24} = p_2, -im_{34} = p_3$  — das induzierte elektrische Moment des betrachteten Moleküls dar). Man hat ferner nach (45c)

$$m_{h, ik} = \frac{2}{3} (m_{h_i} \xi_k + m_{h_k} \xi_i) \quad \text{usw.}$$

<sup>1)</sup> Diese Indexpaare durchlaufen unabhängig voneinander die *vier* Zahlen-werte 1, 2, 3, 4.

Multipliziert man die mikroskopischen Mittelwerte der induzierten Momente mit der Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit, so bekommt man die entsprechenden Polarisationen. Die letzteren lassen sich nach (39b) auf eine *resultierende* Polarisation erster Ordnung reduzieren, die wegen (67) und (66a) die folgende Gestalt annimmt

$$P_{hi_1}^{(r)} = \sum_n \sum_{n'} \varkappa_{hi_1 \dots in; k i'_1 \dots i'_n} \frac{\partial^{n+n'-2} H_{k i'_1}}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n} \partial x_{i'_2} \dots \partial x_{i'_n}}. \quad (67a)$$

Die Koeffizienten  $\varkappa$  können leicht durch die Polarisationskoeffizienten  $\alpha$  ausgedrückt werden, worauf wir aber nicht eingehen werden.

Vereinigt man in (67a) alle Glieder, welche dieselbe Ableitung von  $H_{k i'_1}$  enthalten, so bekommt man statt (67a) die folgende Formel

$$P_{hi}^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa_{hi; kl; j_1 \dots j_n} \frac{\partial^n H_{kl}}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_n}}, \quad (67b)$$

wo  $\varkappa_{hi; kl; j_1 \dots j_n}$  die Summe aller Koeffizienten von der Form  $\varkappa_{hi j_1 \dots j_\nu; kl j_{\nu+1} \dots j_n}$  für  $\nu=0, 1, \dots, n$  und für verschiedene Permutationen der Indizes  $j_1 \dots j_n$  untereinander bedeutet. Die Koeffizienten  $\varkappa$ , die wir als „Suszeptibilitätskoeffizienten“ bezeichnen können, bilden für jeden festen Wert von  $n$  einen Tensor vom Range  $n+4$ ; sie sind offenbar symmetrisch in bezug auf die Indizes  $j_1, \dots, j_n$  und schiefsymmetrisch in bezug auf die Indexpaare  $hi$  und  $kl$ .

Wir führen nun statt der resultierenden Polarisation die entsprechende Erregung

$$B_{hi} = H_{hi} - 4\pi P_{hi}^{(r)} \quad (68)$$

ein. Aus (67b) folgt

$$B_{hi} = \sum_{h=0}^{\infty} s_{hi; kl; j_1 \dots j_n} \frac{\partial^h H_{kl}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}}, \quad (68a)$$

wobei die „Erregungskoeffizienten“  $s$  mit den Polarisationskoeffizienten durch die Beziehungen

$$s_{hi; kl} = \delta_{hk} \delta_{il} - 4\pi \varkappa_{hi; kl}, \quad s_{hi; kl; j_1 \dots j_n} = -4\pi \varkappa_{hi; kl; j_1 \dots j_n} \quad (68b)$$

verknüpft sind.

Die Formel (68a) stellt die gesuchte, die Polarisationen höherer Ordnungen berücksichtigende Verallgemeinerung der Beziehung (63) dar. Bei Beibehaltung der drei ersten Glieder von (68a) erhält man

$$B_{hi} = s_{hi; kl} H_{kl} + s_{hi; kl; j_1} \frac{\partial H_{kl}}{\partial x_{j_1}} + s_{hi; kl; j_1 j_2} \frac{\partial^2 H_{kl}}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}. \quad (68c)$$

Es sei bemerkt, daß diese drei Glieder die Polarisation erster und zweiter Ordnung (und nur teilweise die der dritten Ordnung) berücksichtigen.

Setzt man den letzten Ausdruck in die Gleichungen  $\frac{\partial B_{hi}}{\partial x_i} = 4\pi \sigma_{ikl} H_{kl}$

ein, so bekommt man mit  $H_{kl} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l}$  vier lineare Gleichungen vierter Ordnung für die Komponenten des Potentials. Diese Gleichungen wollen wir für den allgemeinen Fall nicht diskutieren. Es sei hier nur der einfachste Fall harmonisch schwingender (oder statischer) Felder in einem ruhenden Körper etwas näher betrachtet. Dabei können wir die Differentiation nach  $x_4 = ict$  durch Multiplikation mit  $\frac{\omega}{c}$  ersetzen ( $\frac{\omega}{2\pi}$  bedeutet die Frequenz der Schwingungen) und die entsprechenden Glieder mit solchen der vorhergehenden Ordnung vereinigen. Man kann ferner die elektrische und magnetische Erregung einzeln behandeln, und zwar als Funktionen der entsprechenden Feldstärken. Auf diese Weise ergibt sich für die elektrische Erregung eine Formel von folgender Gestalt

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k + \varepsilon_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l} + \varepsilon_{ikl_1 l_2} \frac{\partial^2 E_k}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}, \quad (69)$$

wobei über gleiche Indexpaare von 1 bis 3 zu summieren ist. In dem Spezialfall isotroper Körper reduziert sich der Tensor  $\varepsilon_{ik}$  auf einen Skalar  $\varepsilon$  oder, genauer gesprochen, auf das Produkt dieses Skalars mit dem symmetrischen Einheitstensor

$$\delta_{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Was den Tensor  $\varepsilon_{ikl}$  anbelangt, so reduziert er sich in diesem Fall auf das Produkt eines zweiten Skalars  $\varepsilon'$  mit dem *schiefssymmetrischen* Einheitstensor dritten Ranges  $\delta_{ikl}$ , dessen Komponenten gleich 1 sind, wenn  $ikl$  eine zyklische Permutation der Indizes 1 2 3 darstellt, — 1 bei Vertauschung zweier Indizes, und Null, falls zwei von ihnen oder alle drei zusammenfallen<sup>1)</sup>. Die Summe  $\delta_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}$  stellt dabei, wie leicht einzusehen ist, die negative  $i$ -Komponente des Vektors  $\text{rot } \mathfrak{E}$  dar, so daß die zwei ersten Glieder von (69) sich vektoriell in der Formel

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} - \varepsilon' \text{rot } \mathfrak{E} \quad (69a)$$

zusammenfassen lassen. Der Tensor  $\varepsilon_{ikh_1 l_2}$  muß sich auch auf zwei Skalare reduzieren, und zwar nach der Formel

$$\varepsilon_{ikh_1 l_2} = \varepsilon'' \delta_{ik} \delta_{h_1 l_2} + \varepsilon''' \delta_{i h_1} \delta_{k l_2},$$

woraus folgt:

$$\varepsilon_{ikh_1 l_2} \frac{\partial^2 E_k}{\partial x_{h_1} \partial x_{l_2}} = \varepsilon'' \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_k \partial x_k} + \varepsilon''' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \varepsilon'' \nabla^2 E_i + \varepsilon''' \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div } \mathfrak{E}.$$

<sup>1)</sup> Die allgemeine Bedingung für die Komponenten von  $\delta$  lautet:  $\delta_{ikl} = -\delta_{k il} = -\delta_{ilk}$ .

Wir haben also bei Berücksichtigung des dritten Gliedes in (69)

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} - \varepsilon' \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \varepsilon'' \nabla^2 \mathfrak{E} + \varepsilon''' \nabla \operatorname{div} \mathfrak{E}. \quad (69b)$$

Ähnliche Formeln ergeben sich für die magnetische Erregung  $\mathfrak{H}$  als Funktion der magnetischen Feldstärke, wobei aber  $\operatorname{div} \mathfrak{H}$  identisch verschwindet.

## 2. Komplikationen, welche die Linearität der Gleichungen aufheben.

Wir haben bisher nur die von den induzierten Quadrupolen herührenden und sich auf die Ordnung der Differentialgleichungen des makroskopischen Feldes beziehenden Komplikationen betrachtet. Es bleiben aber noch andere Komplikationen übrig, welche *den Grad* dieser Gleichungen beeinflussen und ihre Linearität aufheben.

Wir müssen zunächst solche Komplikationen erwähnen, die die Abhängigkeit der elektrischen und magnetischen Polarisation von den Feldstärken betreffen und den bekannten Abweichungen von dem *Hookeschen* Gesetz in der Elastizitätstheorie entsprechen. Sie werden gewöhnlich auf eine Abweichung der elektrischen oder magnetischen Suszeptibilität von den „konstanten“, sich auf schwache Felder beziehenden Werten zurückgeführt. In verhältnismäßig einfachen Fällen kann man diese Abweichungen durch Entwicklung der dielektrischen „Konstante“ oder der magnetischen Permeabilität in eine Reihe nach Potenzen der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke berücksichtigen. Auf diese Weise lassen sich z. B. die für einige Stoffe charakteristischen „Sättigungserscheinungen“ beschreiben, d. h. das Streben der Polarisation gegen einen endlichen Grenzwert bei unendlich wachsender Feldstärke. Es gibt ferner solche Erscheinungen, welche durch die gleichzeitige Wirkung eines schwachen, schnell schwingenden Feldes und eines starken konstanten Feldes bedingt werden (Faraday-Effekt, Kerr-Effekt) und welche sich durch Hinzufügung zur gewöhnlichen Dielektrizitätskonstante eines der Stärke des konstanten Feldes proportionalen Zusatzgliedes erklären lassen.

Ähnliche Abweichungen von der Linearität sind in der allgemeinen Beziehung (65a) zwischen Stromdichte und Feldstärke zu berücksichtigen. Wir haben schon den Fall des *Hallschen* dem Produkte von  $E$  und  $H$  proportionalen Stromes erwähnt [vgl. (48b)]. Aber auch bei Fehlen eines magnetischen Feldes können bei sehr großen elektrischen Feldstärken bestimmte Abweichungen vom *Ohmschen* Gesetze auftreten, welche die Erscheinung des elektrischen Durchschlags in schlecht leitenden oder „isolierenden“ Substanzen bedingen (in Metallen und Elektrolyten sind Abweichungen dieser Art nicht beobachtet).

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Komplikationen „zweiter Art“, infolge deren die Linearität der Gleichungen verloren geht, *nur*

bei sehr starken Feldern vorkommen. Es ist deshalb zweckmäßig, die elektromagnetischen Erscheinungen in materiellen Körpern in zwei Klassen einzuteilen: solche, die schwachen, und solche, die starken Feldern entsprechen. Nur die ersten sind einer *allgemeinen* theoretischen Behandlung fähig. In diesem Buche werden wir deshalb die Elektrodynamik materieller Körper hauptsächlich für schwache Felder entwickeln (entsprechend der gewöhnlichen Elastizitätstheorie, die sich ausschließlich mit kleinen Deformationen, für welche das *Hookesche* Gesetz gültig bleibt, beschäftigt). Die elektromagnetischen Erscheinungen der zweiten Gruppe (starke Felder) werden wir nur für die wichtigsten Spezialfälle, die sich auf konstante Felder beziehen, betrachten.

## Zweites Kapitel.

### Energie und Kräfte.

#### § 1. Vorbemerkungen.

##### 1. Physikalische Bedeutung der Energie in der makroskopischen Elektrodynamik.

Wir haben in Bd. I gezeigt, daß die vollständige elektrische Energie eines Systems ruhender Elektronen mit endlicher Volum- oder Flächenladung durch das auf den ganzen Raum erstreckte Integral  $\frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{E}^2 dV$  dargestellt werden kann, wobei  $\mathfrak{E}$  die resultierende elektrische Feldstärke im Volumelement  $dV$  bedeutet. Wir haben ferner gesehen, daß diese Energie sich aus zwei Teilen zusammensetzt, nämlich 1. der Summe der Eigenenergien der einzelnen Elektronen und 2. der gegenseitigen Energie dieser Elektronen. Und zwar zerlegt man  $\mathfrak{E}$  in Summanden  $\mathfrak{E}_\alpha$ , die den einzelnen Elektronen entsprechen, so drückt sich der erste — immer überwiegende — Anteil durch die Summe  $\sum_\alpha \int \frac{\mathfrak{E}_\alpha^2}{8\pi} dV$  aus, und der zweite durch die Doppelsumme

$$\sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \int \frac{\mathfrak{E}_\alpha \cdot \mathfrak{E}_\beta}{8\pi} dV.$$

Dieselbe Einteilung der Energie ergibt sich, wenn man sie durch die auf das Volum oder die Oberfläche der Elektronen erstreckte Integral  $\frac{1}{2} \int \varphi \rho dV$  bzw.  $\frac{1}{2} \int \varphi \eta dS$  darstellt, falls man dabei das Potential  $\varphi$  in zwei Teile zerlegt, die von dem betrachteten Elektron selbst und von allen übrigen Elektronen herrühren (vgl. Bd. I, Kap. VII, § 1).

Es ist nun von vornherein klar, daß in der makroskopischen Elektrodynamik materieller Körper eine derartige Darstellung der *vollständigen*

elektrischen Energie im obigen Sinne (d. h. der Energie der Elektronen, aus welchen der betrachtete Körper aufgebaut ist) *prinzipiell unmöglich ist*. In der Tat hat ja die makroskopische Theorie nur mit (mikroskopischen) Mittelwerten der Größen  $\mathcal{E}$ ,  $\varphi$ ,  $\rho$  usw. zu tun. Diese Mittelwerte, die wir im folgenden, wie am Anfang des Kap. I, durch Überstreichen bezeichnen werden, sind aber für die Bestimmung der vollständigen Energie ganz unzutreffend, denn die letzte drückt sich durch *Produkte* oder *Quadrate* der entsprechenden *exakten* Größen aus. Man könnte selbstverständlich statt dieser Produkte oder Quadrate ihre Mittelwerte in Betracht ziehen, also z. B. die Energiedichte  $\frac{\overline{\mathcal{E}^2}}{8\pi}$  durch die mittlere Dichte  $\frac{\overline{(\mathcal{E}^2)}}{8\pi}$  ersetzen. Dadurch würde — jedenfalls bei zeitlich konstanten Feldern — das die vollständige Energie darstellende Volumintegral keine Änderung erleiden. Es ist aber im allgemeinen ganz unmöglich, den Mittelwert des Produktes zweier Größen  $a$  und  $b$  durch das Produkt oder irgend eine andere Funktion ihrer Mittelwerte auszudrücken. Es besteht vielmehr zwischen den Ausdrücken  $\overline{ab}$  und  $\overline{a} \cdot \overline{b}$  *gar keine Beziehung*. Dies läßt sich im Falle elektromagnetischer Größen am einfachsten einsehen, wenn man einen materiellen Körper „im Normalzustand“ betrachtet, d. h. in einem solchen Zustand, in dem die Mittelwerte der Ladungsdichte, der Feldstärke usw. verschwinden. Die entsprechenden quadratischen Mittelwerte aber bleiben offenbar dabei von Null verschieden. Wir können also die dem Normalzustand entsprechende elektromagnetische Gesamtenergie  $W_0$  des Körpers in keiner Weise bestimmen, solange wir nur mit den linearen Mittelwerten der makroskopischen Theorie operieren.

Diese „Normalzustandsenergie“ muß unter anderem auch die *Eigenenergie* der Elektronen einschließen, welche durch  $c^2$  dividiert, den Hauptteil ihrer Gesamtmasse bestimmt (es ist noch ein geringer, durch die gegenseitige Energie bedingter „Massendefekt“ zu berücksichtigen). Speziell muß sie die kinetische Energie der Elektronen, Atome und Moleküle enthalten, welche z. B. in der Wärmebewegung zum Vorschein kommt. Zu der „Normalzustandsenergie“ müssen ferner die gegenseitige Energie der Elektronen in den einzelnen Atomen und die gegenseitige Energie dieser Atome und Moleküle gehören. Alle diese Energiebeträge, welche in der mikroskopischen Theorie der materiellen Körper als die verschiedenen Anteile derselben elektromagnetischen Gesamtenergie anzusehen sind, werden in der makroskopischen Theorie als qualitativ verschiedene Energieformen behandelt — nämlich als mechanische, interatomare, chemische, molekulare, elastische Energie, Wärme usw. Als elektromagnetische Energie läßt sich in der makroskopischen Elektrodynamik der materiellen Körper nur derjenige Anteil der mikroskopischen Gesamtenergie definieren, welcher dem Übergange

vom Normalzustand zu einem „elektromagnetisch angeregten“ Zustand, entspricht, d. h. einem solchen Zustand, wo der mikroskopische Mittelwert mindestens einer der „linearen“ Größen  $\varrho$ ,  $\mathfrak{j}(\eta, \mathfrak{k})$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{M}$  usw. von Null verschieden ist. Diese *makroskopische elektromagnetische Energie* oder Zusatzenergie kann als eine gewisse Funktion der „linearen Mittelwerte“ bestimmt werden, und zwar im allgemeinen als eine *quadratische* Funktion, ebenso wie in der mikroskopischen Theorie. Es sei bemerkt, daß diese Funktion, deren Bestimmung uns im folgenden beschäftigen wird, eine andere Form haben kann als die einfachste nach dem Muster der makroskopischen Theorie gebildete Funktion

$$\frac{1}{8\pi} \int \{(\bar{\mathfrak{E}})^2 + (\bar{\mathfrak{H}})^2\} dV.$$

## 2. Physikalische Bedeutung der makroskopischen elektromagnetischen Kräfte.

Wir haben bisher nur von der Energie gesprochen; damit sind aber die im Körper und auf seiner Oberfläche wirkenden Kräfte und Spannungen, ferner auch die Energieströmung und die elektromagnetische Bewegungsgröße eng verknüpft. Alle diese *dynamischen* Größen drücken sich in der mikroskopischen Theorie durch Quadrate oder Produkte der oben erwähnten linearen Größen aus<sup>1)</sup>. Zum Beispiel die auf die Volumeneinheit wirkende elektromagnetische Kraft  $\mathfrak{F}$  ist durch den Ausdruck  $\varrho \mathfrak{E} + \mathfrak{j} \times \mathfrak{H}$  gegeben. — Es fragt sich nun, ob der mikroskopische Mittelwert dieses Ausdrucks als makroskopische „Kraftdichte“ definiert werden darf. Diese Frage müssen wir aber verneinen schon aus dem Grunde, weil der obige Mittelwert dem *Lorentz*schen Bewegungsprinzip gemäß (Bd. I, S. 202) *immer* gleich Null ist, also für die makroskopische Theorie ganz belanglos ist. Der tiefere Grund für eine andere Definition der makroskopischen Kraft (oder Kraftdichte) liegt in der Tatsache, daß diese Definition der oben angeführten Definition der makroskopischen elektromagnetischen Energie entsprechen muß, und zwar in der Weise, daß die Arbeit der Kraft gleich der Energieabnahme sein soll. Betrachtet man die Frage von diesem Standpunkte aus, so sieht man sofort, daß die dem *Lorentz*schen Bewegungsprinzip zugrunde liegenden *Selbstkräfte* aus der mikroskopischen Gesamtkraft ausgeschlossen werden müssen. Denn diesen Kräften entspricht die *Eigenenergie* der Elektronen (oder Atome und Moleküle), die in der makroskopischen Theorie nicht mehr als elektromagnetische Energie, sondern als Masse und kinetische Energie zu behandeln sind. Neben den Selbstkräften (die sich

<sup>1)</sup> In dieser Hinsicht besteht zwischen der Elektrodynamik und der Elastizitätstheorie, die wir im vorigen Kapitel manchmal in Parallele gestellt haben, ein gewisser Gegensatz, da in der Elastizitätstheorie die Kräfte und Spannungen sich *linear* durch die Deformationskomponenten ausdrücken. In der Elektrodynamik entsprechen den Deformationskomponenten die Feldstärken und den Spannungen — die Polarisierungen und die Stromdichte.

hauptsächlich als Trägheitskräfte äußern), müssen wir aus der im Mittel verschwindenden mikroskopischen Gesamtkraft noch andere Bestandteile subtrahieren, welche als interatomare, chemische, Kohäsionskräfte usw. aufgefaßt werden sollen. Der übrigbleibende Bestandteil, welcher im „Normalzustand“, d. h. bei verschwindenden Mittelwerten von  $\rho$ ,  $j$ ,  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{M}$  usw. verschwindet, bildet die eigentliche makroskopische elektromagnetische Kraft (pro Volumeinheit). Diese letztere läßt sich offenbar als eine gewisse — im allgemeinen quadratische — Funktion der erwähnten linearen Mittelwerte bestimmen, ebenso wie die elektromagnetische Energie und selbstverständlich im Einklang damit. Es ist dabei zu beachten, daß diese Funktion von dem einfachsten der mikroskopischen Theorie nachgebildeten Ausdruck  $\rho\mathfrak{E} + j \times \mathfrak{H}$  verschieden sein kann.

Ähnliche Betrachtungen sind bei der makroskopischen Umdeutung anderer dynamischer Größen, die wir hier nicht näher behandeln werden, anwendbar.

Es sei zum Schluß noch folgendes bemerkt. In der allgemeinen oder mikroskopischen Elektrodynamik war die Alternative: ausgedehnte oder punktförmige Elektronen für den Aufbau der Energielehre sehr wichtig. Und zwar wurde eine konsequente Entwicklung dieser Lehre nur im Falle ausgedehnter Elektronen mit endlicher Raum- bzw. Flächenladung möglich. Für die makroskopische Energielehre hat die erwähnte Alternative gar keine Bedeutung. Die räumliche Ausdehnung der Elektronen, solange sie als klein gegen die Abmessungen der Atome und Moleküle vorausgesetzt wird, kommt für die makroskopische Theorie kaum in Betracht. Indem sie die wirkliche Ladungs- und Stromverteilung durch die entsprechenden Mittelwerte über die den einzelnen Molekülen zukommenden (oder noch größeren) Volumina ersetzt, verteilt sie tatsächlich die Elektronenladungen über diese Volumina. Die „Individualität“ der verschiedenen Elektronen geht folglich vollständig verloren, und die Gesamtenergie des sie ersetzenden quasi-kontinuierlichen elektrischen Mediums stellt nur einen äußerst geringen Teil ihrer Eigenenergie dar.

### 3. Einteilung der quadratischen Größen entsprechend den Beiträgen der freien und der gebundenen Elektronen.

Die verschiedenen linearen Größen (Ladungs- und Stromdichte, Feldstärken usw.), welche den elektromagnetischen Zustand eines Körpers im makroskopischen Sinne charakterisieren, lassen sich, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, in zwei Teile zerlegen, welche resp. den freien und den gebundenen Ladungen (Elektronen) entsprechen. Diese zwei Bestandteile irgendeiner linearen Größe  $a$  wollen wir mit  $a_f$  bzw.  $a_g$  bezeichnen (die die Mittelwertbildung ausdrückenden Querstriche lassen wir im folgenden wieder weg).

Für *quadratische* Größen, wie z. B. die elektromagnetische Energie, Kräfte, Spannungen usw., die sich durch Produkte zweier linearer Größen  $a$  und  $b$  (oder Summen von Produkten dieser Art) darstellen lassen, ist eine solche Einteilung offenbar unmöglich. Denn das Produkt  $a \cdot b$  zerfällt in vier Summanden  $a_f b_f$ ,  $a_f b_g$ ,  $a_g b_f$ ,  $a_g b_g$ , die den verschiedenen Kombinationen der freien und der gebundenen Elektronen untereinander entsprechen. Jede quadratische Größe  $Q = \sum ab$  kann dementsprechend in vier Bestandteile zerlegt werden:

$$Q_{ff} = \sum a_f b_f, \quad Q_{fg} = \sum a_f b_g, \quad Q_{gf} = \sum a_g b_f, \quad Q_{gg} = \sum a_g b_g.$$

Die physikalische Bedeutung von  $Q_{ff}$  und  $Q_{gg}$  ist ohnehin klar. Um die Bedeutung von  $Q_{fg}$  und  $Q_{gf}$  zu präzisieren, müssen wie die Tatsache beachten, daß einer der beiden Faktoren, sagen wir  $a$ , im allgemeinen eine *Feldgröße* (Feldstärke, Potential), während der andere die zugehörige *Substanzgröße* (Ladungs- oder Stromdichte, Polarisation usw.) bedeutet. Ist das der Fall für alle Summanden in  $\sum ab$ , so lassen sich  $Q_{fg}$  und  $Q_{gf}$  eindeutig definieren als die Wirkung, welche von den freien (bzw. gebundenen) Ladungen herrührt und auf die gebundenen (freien) ausgeübt wird. Wenn man noch ein *äußeres*, von irgendwelchen fremden Ladungen herrührendes Feld betrachtet, das als gegeben behandelt wird, muß man zu den obigen Bestandteilen  $a_f$  und  $a_g$  von  $a$  (nicht aber  $b$ !) noch einen dritten  $a_0$  hinzufügen und dementsprechend die eigentlich quadratischen Terme von  $Q$  durch lineare  $Q_{0f} = \sum a_0 b_f$  und  $Q_{0g} = \sum a_0 b_g$  vervollständigen. Die Summen

$$Q_f = Q_{0f} + Q_{ff} + Q_{gf}, \quad (1)$$

$$Q_g = Q_{0g} + Q_{fg} + Q_{gg} \quad (1a)$$

können dabei als die den freien bzw. den gebundenen Ladungen des betrachteten Körpers zugehörigen Anteile von  $Q$  aufgefaßt werden.

Diese Einteilung der quadratische Größen ist nicht nur prinzipiell, sondern auch methodologisch wesentlich, denn hinsichtlich der auf sie wirkenden Kräfte bestehen für die freien und die gebundenen Elektronen ganz verschiedene Bedingungen; dementsprechend müssen sie auf verschiedene Weisen behandelt werden.

## § 2. Die den freien Ladungen zugehörigen quadratischen Größen (Energie, Kräfte, Spannungen).

### 1. Die auf die freien Elektronen wirkenden (effektiven) Kräfte und deren Arbeit.

Bei der Behandlung der freien Elektronen macht man (gewöhnlich implizite) die folgende Annahme: Das mittlere „effektive“ elektromagnetische Feld, welches in einem materiellen Körper auf irgend ein freies Elektron seitens aller anderen (fremden, freien und gebundenen) wirkt, ist durchschnittlich mit dem gemittelten Totalfeld der makroskopischen Theorie identisch.

Diese Annahme scheint zunächst ganz trivial zu sein und keiner Rechtfertigung zu bedürfen. Dies ist aber nicht der Fall. Denn das von dem betreffenden Elektron selbst erzeugte Feld muß bei der Berechnung des effektiven Feldes außer acht gelassen werden; dagegen ist es bei der Berechnung des makroskopischen Totalfeldes auch zu berücksichtigen. Die obige Annahme bedeutet also, daß der Mittelwert des von einem Elektron erzeugten Feldes in einem mikroskopischen Volum, dessen Mittelpunkt mit diesem Elektron zusammenfällt, verschwindet. Für das elektrostatische (*Coulombsche*) und das magnetische (*Biot-Savartsche*) Feld, die von der Lage bzw. der Geschwindigkeit des Elektrons abhängen, ist diese Voraussetzung sicher erfüllt. Der Mittelwert des durch die Beschleunigung des Elektrons bedingten elektrischen Feldes ist dagegen von Null verschieden. Es ist aber leicht einzusehen, daß dieser Mittelwert verschwindend klein im Vergleich mit dem effektiven Feld ist, und daß er deshalb außer acht gelassen werden kann. Dies folgt aus der Tatsache, daß der Radius des Elektrons (wenn man sich letzteres als ausgedehnt denkt) sehr klein gegenüber den mikroskopischen Abständen ist. Bei der Berechnung des erwähnten Feldes kann man das Elektron sogar als punktförmig behandeln. Bezeichnet man seine Ladung mit  $e$  und seine Beschleunigung mit  $\mathfrak{w}$ , so bekommt man für die entsprechende Feldstärke im Abstand  $R$ , nach der Formel (17) Bd. I, S. 201, den folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{G}^{(2)} = -\frac{e}{c^2 R} \{ \mathfrak{w} - \mathfrak{R}_0 (\mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{w}) \},$$

dessen Mittelwert für verschiedene Richtungen von  $\mathfrak{R}$  (bei festgehaltener Größe) lautet

$$\overline{\mathfrak{G}^{(2)}} = -\frac{2}{3} \frac{e}{c^2 R} \mathfrak{w}.$$

Wir müssen noch die betrachtete Feldstärke über verschiedene Abstände  $R$  mitteln. Der Einfachheit halber nehmen wir ein kugelförmiges Volumen mit dem mikroskopischen Radius  $l$  (von der Größenordnung des Abstandes zwischen zwei Nachbarmolekülen). Dann ist

$$\overline{\mathfrak{G}^{(2)}} = \frac{1}{4\pi l^3} \int_0^l \mathfrak{G}^{(2)} 4\pi R^2 dR = -\frac{e\mathfrak{w}}{c^2 l^3} \int_0^l 2R dR = -\frac{e\mathfrak{w}}{c^2 l}. \quad (2)$$

Um die Größenordnung von  $\overline{\mathfrak{G}^{(2)}}$  zu bestimmen, ersetzen wir  $\mathfrak{w}$  durch  $\frac{e \mathfrak{G}_{\text{eff}}}{m}$ , wo  $\mathfrak{G}_{\text{eff}}$  die effektive elektrische Feldstärke und  $m$  die Masse des Elektrons bedeuten. Wir setzen ferner

$$m \approx \frac{e^2}{c^2 a},$$

wo  $a$  der Elektronenradius im Sinne der elektromagnetischen Theorie der Masse ist. Aber auch unabhängig von dieser Theorie kann man  $a$  als eine Hilfsgröße, die für negative Elektronen gleich  $10^{-13}$  cm

für positive gleich  $10^{-16}$  cm ist, einführen. Es wird folglich nach (2)

$$\overline{\mathfrak{E}^{(2)}} = -\frac{e^2}{c^2 l m} \mathfrak{E}_{\text{eff}} \cong -\frac{a}{l} \mathfrak{E}_{\text{eff}}. \quad (2a)$$

Da  $l$  immer größer als  $10^{-8}$  cm, also  $\frac{a}{l}$  immer kleiner als  $10^{-5}$  ist, sind wir vollkommen berechtigt, die mittlere effektive Feldstärke mit dem Mittelwert der totalen  $\overline{\mathfrak{E}} = \overline{\mathfrak{E}_{\text{eff}}} + \overline{\mathfrak{E}^{(2)}}$  zu identifizieren.

Die mittlere Kraft  $\mathfrak{F}_f$ , welche auf die sich in der Volumeinheit des betrachteten Körpers befindlichen *freien* Elektronen wirkt, drückt sich folglich durch

$$\sum (e \mathfrak{E}) + \sum \left( \frac{e v}{c} \times \mathfrak{H} \right) = \left( \sum e \right) \mathfrak{E} + \left( \sum \frac{e v}{c} \right) \times \mathfrak{H}.$$

Wir bekommen also wegen  $\sum e = \varrho_f$  und  $\sum \frac{e v}{c} = \mathbf{j}_f$  die übliche Formel

$$\mathfrak{F}_f = \varrho_f \mathfrak{E} + \mathbf{j}_f \times \mathfrak{H}. \quad (3)$$

Ebenso bekommen wir für die entsprechende, pro Volum- und Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$L_f = \sum e \mathfrak{E} \cdot v = c \mathfrak{E} \cdot \sum \frac{e v}{c},$$

d. h. wie in der mikroskopischen Theorie

$$L_f = c \mathfrak{E} \cdot \mathbf{j}_f. \quad (3a)$$

Es sei daran erinnert, daß zwischen  $\mathfrak{F}$  und  $L$  keine direkte Beziehung besteht; sie sind vielmehr als die *Summen* der Elementarkräfte bzw. der Arbeiten dieser Kräfte zu definieren.

## 2. Transformation der Arbeit; die den freien Elektronen zugehörige elektromagnetische Energie.

Der Ausdruck (3a) läßt sich auf eine ähnliche Weise umformen wie der entsprechende Ausdruck (19) Bd. I, S. 205. Setzt man nämlich nach den allgemeinen makroskopischen Feldgleichungen:

$$\mathbf{j}_f = \frac{1}{4\pi} \left( \text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right),$$

so bekommt man unter Hinzufügung des verschwindenden Ausdruckes

$$L_f^{(m)} = -\frac{c}{4\pi} \mathfrak{H} \cdot \left( \text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right),$$

welcher die Arbeit der magnetischen Kräfte bei nicht verschwindender magnetischer Stromdichte darstellen sollte:

$$L_f = L_f + L_f^{(m)} = \frac{c}{4\pi} \{ \mathfrak{E} \cdot \text{rot } \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \cdot \text{rot } \mathfrak{E} \} - \frac{1}{4\pi} \left( \mathfrak{E} \cdot \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{H} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right),$$

d. h.

$$L_f = -\text{div } \mathfrak{R}_f - \frac{\partial \xi_f}{\partial t} \quad (4)$$

mit

$$\mathfrak{R}_f = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{B} \quad (4a)$$

und

$$d\xi_f = \frac{\mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{D} + \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{H}}{4\pi}. \quad (4b)$$

Diese Formeln sind den entsprechenden Formeln des Bd. I (S. 205) ganz analog. Wir können also den Vektor  $\mathfrak{R}_f$  als den Strahlungsvektor definieren und die skalare Größe  $\xi_f$ , falls sie überhaupt existiert (siehe unten), als die Energiedichte. Es ist aber dabei zu beachten, daß *diese Größen nicht die vollständigen, sondern nur die den freien Elektronen zugehörige Energiedichte und Energiestrahlung darstellen*. Nach den allgemeinen Bezeichnungen, die am Anfang dieses Paragraphen eingeführt worden sind, könnten wir schreiben  $\xi_f = \xi_{0f} + \xi_{ff} + \xi_{of}$ ,  $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_{0f} + \mathfrak{R}_{ff} + \mathfrak{R}_{of}$  usw. Die gebundenen Elektronen sind also in den obigen Größen nur teilweise berücksichtigt, und zwar nur hinsichtlich der *von* ihnen herrührenden, nicht aber der *auf* sie ausgeübten Wirkungen.

Zur Existenz der Größe  $\xi_f$  als einer bestimmten Ortzeitfunktion ist es notwendig (und hinreichend), daß der sie definierende Differentialausdruck (4b) ein vollständiges Differential darstellen soll. Wir werden später sehen, daß diese Forderung nicht immer erfüllt zu werden braucht. In den Fällen, wo sie verletzt ist, kann von einer Energie der freien Elektronen überhaupt keine Rede sein.

Solange die Erregungen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{B}$  nur von den entsprechenden Feldstärken abhängen (was nur bei ruhenden Körpern der Fall sein kann), und im Gültigkeitsbereich des *Hookeschen* Gesetzes kann man setzen:

$$\mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \cdot d\mathfrak{E} = \frac{1}{2} d(\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{B} = \frac{1}{2} d(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}),$$

d. h. nach (4b)

$$\xi_f = \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}}{8\pi}. \quad (5)$$

Diese Formel bleibt wie bei isotropen so auch bei anisotropen Körpern gültig. Im ersten Fall nimmt sie die folgende einfache Gestalt an:

$$\xi_f = \frac{\varepsilon E^2 + \mu B^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2 + \mu^{-1} H^2}{8\pi}; \quad (5a)$$

im zweiten Falle aber die etwas kompliziertere

$$\xi_f = \frac{1}{8\pi} \sum_1^3 \sum_1^3 (\varepsilon_{ik} E_i E_k + \mu_{ik} B_i B_k). \quad (5b)$$

*Es sollen aber dabei für die Existenz der Energie  $\xi_f$  die folgenden Symmetriebedingungen erfüllt sein:*

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} \quad \mu_{ik} = \mu_{ki} \quad (\mu_{ik}^{-1} = \mu_{ki}^{-1}). \quad (6)$$

In der Tat, damit  $\mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{D} = \sum_1^3 E_i \cdot dD_i$  ein vollständiges Differential ist, muß es der Ausdruck  $\mathfrak{D} \cdot d\mathfrak{E} = \sum_1^3 D_i dE_i$  offenbar auch sein. Daraus folgt aber  $\frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \frac{\partial D_k}{\partial E_i}$ , d. h. wegen  $D_i = \sum \varepsilon_{il} E_l$ ,  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ . In derselben Weise ergibt sich die zweite Bedingung (6).

Für isotrope Körper hat man nach dem Ohmschen Gesetz  $j = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}$ , und folglich nach (3a)

$$L_f = \sigma E^2. \quad (7)$$

Für anisotrope Körper muß man diese Formel durch

$$L_f = \sum \sum \sigma_{ik} E_i E_k \quad (7a)$$

ersetzen.

Wir bekommen also für die Arbeit der auf die freien Elektronen wirkenden Kräfte zwei äußerlich ganz verschiedene Ausdrücke, nämlich (4) einerseits und (7) oder (7a) andererseits. Diesen zwei Ausdrücken für  $L_f$  entsprechen zwei makroskopisch verschiedene Energieformen, die durch die erwähnte Arbeit miteinander verknüpft werden — die *elektromagnetische Energie* und die mechanische oder *Wärmeenergie*. Die letztere wird auf Kosten der ersteren entwickelt durch einen Mechanismus, welcher allen Reibungsprozessen gemein ist. Und zwar muß die zusätzliche, von der Arbeit  $L_f$  herrührende kinetische Energie der freien Elektronen, wegen der auf sie seitens der Atome (und Moleküle) des Körpers ausgeübten Reibungskräfte in die mechanische Energie dieser Atome übergeführt werden (vgl. Kap. I, Ende des § 2). Diese pro Volum- und Zeiteinheit entwickelte Wärmeenergie oder „Joulesche Wärme“ ist durch (7) oder (7a) gegeben. Bezeichnet man die in einem beliebigen Volumen  $V$  des betrachteten Körpers erzeugte Wärme  $\int L_f dV$  mit  $Q$ , so wird nach (4)

$$-\frac{dW_f}{dt} = Q + \oint \mathfrak{K}_{fn} dS. \quad (8)$$

Hier bedeutet  $W_f$  die im Volumen  $V$  enthaltene, *den freien Elektronen zugehörige* elektromagnetische Energie  $\int \xi_f dV$ . Beschränkt man sich auf den Fall isotroper Körper, so hat man

$$W_f = \frac{1}{8\pi} \int (\varepsilon E^2 + \mu B^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int (\varepsilon E^2 + \mu^{-1} H^2) dV \quad (8a)$$

und

$$Q = \int \sigma E^2 dV. \quad (8b)$$

Die Formel (8) drückt die Tatsache aus, daß die im betreffenden Volumen verlorene elektromagnetische Energie der freien Elektronen teilweise nach außen ausgestrahlt und teilweise in Wärme verwandelt wird.

3. Transformation der Kräfte; der den freien Elektronen zugehörige Spannungstensor.

Ebenso wie die Arbeit  $L_f$ , läßt sich auch die durch (3) definierte Kraft  $\mathfrak{F}_f$  umformen, falls dabei gewisse Bedingungen erfüllt sind, die der Integrierbarkeit des Ausdrucks (4b) für die Energie entsprechen.

Wir ersetzen zunächst  $\varrho$  und  $\mathfrak{j}$  durch die bekannten „Feldausdrücke“

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{j} = \frac{1}{4\pi} \left( \operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \right).$$

Dabei wird

$$\mathfrak{F}_f = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{rot} \mathfrak{B} \times \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \times \mathfrak{H} \right\}.$$

Zur Umformung dieses Ausdrucks versuchen wir ihn zu symmetrieren durch Hinzufügung des entsprechenden Ausdruckes für die „magnetische Kraft“

$$\mathfrak{F}_f^{(m)} = \frac{1}{4\pi} \left( \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{D} - \frac{1}{c} \mathfrak{D} \times \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right),$$

der wegen der Feldgleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0$$

identisch verschwindet (vgl. Bd. I, S. 215). Wir bekommen also

$$\mathfrak{F}_f = \frac{1}{4\pi} \left\{ (\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{D}) + (\mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{B} \times \mathfrak{H}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{D} \times \mathfrak{H}) \right\} \quad (9)$$

Aus dieser Formel folgt, daß der Vektor

$$\mathfrak{g}_f = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{D} \times \mathfrak{H} \quad (9a)$$

als die Raumdichte der den freien Elektronen zugehörigen Bewegungsgröße definiert werden kann. Es läßt sich aber leicht einsehen, daß der Vektor

$$\mathfrak{F}_f = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{D} + \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{B} \times \mathfrak{H}) \quad (9b)$$

im allgemeinen keine Divergenz irgendeines (auch asymmetrischen) Tensors zweiten Ranges ist. Damit nämlich eine Gleichung von der Gestalt

$$\mathfrak{F}_f = -\operatorname{div} {}^2\mathfrak{T}_f \quad (10)$$

bestehen könnte, müssen die Erregungen  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{B}$  mit den entsprechenden Feldstärken durch Beziehungen ganz spezieller Art verknüpft sein. Diese Beziehungen müssen offenbar die räumlichen Koordinaten nicht explizite oder implizite — durch die Materialkonstanten — enthalten (dasselbe gilt im Falle von (4b) bezüglich der Zeit). Daraus folgt, daß die Formel (10) nur im Falle *homogener Körper* bestehen kann. Für den Spezialfall isotroper Körper, die dem Hookeschen Gesetz gehorchen,

läßt sich  ${}^2\mathfrak{T}_f$  sofort bestimmen. Und zwar setzt man in (9b)  $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H} = \mu \mathfrak{B}$  (oder  $\mathfrak{B} = \mu^{-1} \mathfrak{H}$ ) ein, so wird

$$\mathfrak{T}_f = \frac{\varepsilon}{4\pi} (\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{E}) + \frac{\mu}{4\pi} (\mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{B} + \operatorname{rot} \mathfrak{B} \times \mathfrak{B})$$

und folglich nach der Formel (30b) S. 216, Bd. I:

$$\mathfrak{T}_{fn} = - \left( \varepsilon \mathfrak{E} E_n + \mu \mathfrak{B} B_n + n \frac{\varepsilon E^2 + \mu B^2}{2} \right) \quad (10a)$$

oder

$$\mathfrak{T}_{fn} = - \frac{1}{4\pi} \left( \mathfrak{E} D_n + \mathfrak{H} B_n - n \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}}{2} \right). \quad (10b)$$

Es ist leicht zu zeigen, daß die letzte Formel auch im Falle anisotroper Körper gültig bleibt, sofern für diese Körper die Symmetriebedingungen (6) erfüllt sind. — Zu diesem Zweck betrachten wir irgend eine — z. B. die erste — Komponente des Vektors  $\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{D}$ , d. h. die Größe

$$\begin{aligned} E_1 \sum \frac{\partial D_i}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) D_3 - \left( \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) D_2 &= E_1 \sum \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \\ + \sum D_i \frac{\partial E_1}{\partial x_i} - \sum D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_1} &= \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (E_1 D_i) - \sum D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Setzt man im letzten Gliede  $D_i = \sum \varepsilon_{ik} E_k$  ein, so wird wegen  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ :

$$\begin{aligned} \sum D_i \frac{\partial E_i}{\partial x_1} &= \sum \sum \varepsilon_{ik} E_k \frac{\partial E_i}{\partial x_1} = \sum \sum \varepsilon_{ik} E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_1} \\ &= \sum \sum \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \left( E_k \frac{\partial E_i}{\partial x_1} + E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2} \sum \sum \varepsilon_{ik} E_i E_k \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} \sum E_i D_i = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}}{2} \right). \end{aligned}$$

Wir bekommen also nach (9b)

$$J_{f1} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}}{2} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (E_1 D_i) - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}}{2} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (H_1 B_i),$$

d. h.

$$J_{fk} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{fki} \quad (11)$$

mit

$$-T_{fki} = \frac{1}{4\pi} \left( E_k D_i + H_k B_i - \delta_{ki} \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}}{2} \right), \quad (11a)$$

wo  $\delta_{ni}$  die Komponenten des Einheitstensors sind. Diese Formeln sind offenbar mit (10) und (10b) gleichbedeutend. Es ist zu beachten, daß der Tensor  ${}^2\mathfrak{T}_f$  im Gegensatz zum vollständigen Spannungstensor  ${}^2\mathfrak{T}$  des Bd. I *nicht symmetrisch* ist (vgl. unten, § 3). Sonst aber unterscheidet er sich von  ${}^2\mathfrak{T}$  nur in dem Sinne, daß er die passive Wirkung der gebundenen Elektronen gar nicht enthält.

Nach der ursprünglichen Definition der Volumkraft  $\mathfrak{F}_f$  in Verbindung mit dem Ohmschen Gesetz hat man für isotrope Körper

$$\mathfrak{F}_f = \varrho_f \mathfrak{E} + \mathbf{j}_f \times \mathfrak{H} = \varrho_f \mathfrak{E} + \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}.$$

In diesem Ausdruck ist der Hallsche Strom selbstverständlich nicht berücksichtigt. Im Falle *homogener* isotroper Körper kann man ferner  $\varrho_f = 0$  setzen, denn die Raumdichte der freien Ladung nimmt mit der Zeit nach dem Gesetz  $\varrho_f = \text{const } e^{-\frac{t}{\tau}}$ , wo  $\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$  die in § 7, Kap. I eingeführte Relaxationszeit bedeutet, ab. Andererseits haben wir in diesem Falle nach (9a)

$$\mathfrak{g}_f = \frac{\varepsilon}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}.$$

Es wird folglich

$$\mathfrak{F}_f = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} = \frac{1}{\tau} \mathfrak{g}_f. \quad (12)$$

Durch Integration der Kraft  $\mathfrak{F}_f$  über ein beliebiges Volumen des betrachteten (homogenen und isotropen) Körpers bekommen wir nach (9), (9a) und (9b)

$$\int \mathfrak{F}_f dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{g}_f dV - \oint \mathfrak{F}_{fn} dS.$$

Daraus folgt nach (12):

$$\frac{1}{\tau} \int \mathfrak{g}_f dV + \frac{d}{dt} \int \mathfrak{g}_f dV = -\oint \mathfrak{F}_{fn} dS. \quad (12a)$$

#### 4. Grenzfläche und Flächenkräfte.

Die angeführten Formeln lassen sich im allgemeinen auf den Fall inhomogener Körper oder mehrerer aneinander grenzender homogener Körper nicht übertragen. Dabei ist nur die Inhomogenität bezüglich der Parameter  $\varepsilon$  und  $\mu$  wesentlich; die elektrische Leitfähigkeit kann dagegen eine ganz beliebige Ortsfunktion sein. Bei der Behandlung begrenzter (d.h. gegen den leeren Raum oder gegeneinander grenzender) homogener Körper ist es ferner notwendig, die gewöhnlich vorhandenen Flächenladungen und eventuell auch die Flächenströme zu berücksichtigen. Die entsprechenden zusätzlichen Flächenkräfte lassen sich mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen durch die Grenzwerte der Feldstärken und der Erregungen ausdrücken, wobei sie eine zur Normalprojektion des Spannungstensors  ${}^2\mathfrak{F}_f$  analoge Gestalt annehmen.

Wir betrachten zunächst die auf der Grenzfläche zwischen zwei Körpern  $a$  und  $b$  verteilte Ladung mit der Dichte  $\eta = \eta_f + \eta_g$ . Die von der sich auf einem Flächenelement  $dS$  befindlichen Ladung bedingte Feldstärke muß offenbar auf den beiden Seiten von  $dS$  den-

selben Betrag und entgegengesetzte, zu  $dS$  senkrechte Richtungen haben. Da die Differenz der beiden Feldstärken (oder genauer, ihrer Normalkomponenten) gleich  $4\pi(\eta_f + \eta_g)$  ist, so bekommen wir für ihre Werte in  $b$  und  $a$   $2\pi(\eta_f + \eta_g)n$  bzw.  $-2\pi(\eta_f + \eta_g)n$  (die Normale  $n$  ist von  $a$  nach  $b$  gerichtet, vgl. Abb. 2).

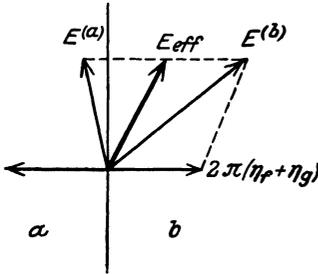


Abb. 2.

Die effektive elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}_{\text{eff}}$ , welche auf die im betrachteten Flächenelement befindliche Ladung seitens anderer mehr oder minder entfernter Ladungen wirkt, bestimmt sich also durch die Gleichungen

$$\mathfrak{E}_{\text{eff}} = \mathfrak{E}^b - 2\pi(\eta_f + \eta_g)n = \mathfrak{E}^a + 2\pi(\eta_f + \eta_g)n,$$

woraus folgt

$$\mathfrak{E}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^a + \mathfrak{E}^b). \quad (13)$$

Andererseits haben wir für die Flächendichte der freien Ladung nach (III'), § 3, Kap. I

$$\eta_f = \frac{1}{4\pi} n \cdot \Delta \mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} \Delta \varepsilon E_n = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon^b E_n^b - \varepsilon^a E_n^a).$$

Die auf diese Ladung wirkende Kraft  $\mathfrak{X}_f^{(e)}$  ist folglich gleich

$$-\mathfrak{X}_f^{(e)} = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^a + \mathfrak{E}^b) (\varepsilon^b E_n^b - \varepsilon^a E_n^a). \quad (13a)$$

Um die vollständige Kraft zu bestimmen, welche auf den Körper  $a$ , einschließlich seiner Oberfläche, ausgeübt wird, müssen wir zu (13a) noch den elektrischen Anteil des Vektors (10a) für diesen Körper, also

$$-\mathfrak{X}_{fn}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \left( \varepsilon^a \mathfrak{E}^a E_n^a - n \frac{\varepsilon^a E_n^a{}^2}{2} \right) \quad (13b)$$

hinzufügen. Wenn die Dielektrizitätskonstante von  $b$  (z. B. des den Körper  $a$  umgebenden leeren Raumes) denselben Wert hat wie für  $a$ , muß die Summe von (13a) und (13b) mit dem Vektor  $\mathfrak{X}_{fn}^{(e)}$  auf der  $b$ -Seite der Grenzfläche  $S$  identisch sein. Diese Gleichung (die man symbolisch in der Form  $\mathfrak{X}^a + \mathfrak{X}^{ab} = \mathfrak{X}^b$  schreiben kann) muß offenbar auch dann bestehen bleiben, wenn die Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon^a$  und  $\varepsilon^b$  verschieden sind, falls die elektrische Feldstärke im Körper  $a$  verschwindet (denn dabei wird die Verschiedenheit von  $\varepsilon^a$  und  $\varepsilon^b$  belanglos). Das ist z. B. der Fall, wenn  $a$  ein Metallkörper ist, der sich im elektrostatischen Gleichgewicht befindet. Es muß dabei die Feldstärke  $\mathfrak{E}^a$  verschwinden und  $\mathfrak{E}^b$  senkrecht zur Oberfläche stehen (vgl. unten Kap. VI). Die Flächenkraft (13a) reduziert sich in diesem Falle auf  $n \frac{\varepsilon^b E_n^b{}^2}{8\pi}$ , fällt also mit dem Vektor (13b) für den Körper  $b$  zusammen. Die auf die

Flächeneinheit eines Metalls wirkende Zugkraft ist also der den freien Elektronen zugehörigen elektrostatischen Energie im angrenzenden Dielektrikum gleich.

Ähnliche Betrachtungen sind bei Anwesenheit von Flächenströmen anwendbar. Es gilt dabei, wenn mit  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_f + \mathfrak{k}_g$  die Flächendichte des totalen (von freien und gebundenen Elektronen herrührenden) Stromes bezeichnet wird:

$$\mathfrak{H}_{\text{eff}} = \mathfrak{H}^a - 2\pi \mathfrak{k} \times \mathfrak{n} = \mathfrak{H}^b + 2\pi \mathfrak{k} \times \mathfrak{n},$$

d. h.

$$\mathfrak{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (\mathfrak{H}^a + \mathfrak{H}^b). \quad (14)$$

Die Flächendichte der freien Strömung ist nach (III') Kap. I:

$$\mathfrak{k}_f = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{n} \times \Delta \mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{n} \times (\mathfrak{B}^b - \mathfrak{B}^a).$$

Wir bekommen also für die entsprechende magnetische Flächenkraft den Ausdruck

$$\mathfrak{F}_f^{(m)} = \frac{1}{8\pi} [\mathfrak{n} \times (\mathfrak{B}^b - \mathfrak{B}^a)] \times (\mu^b \mathfrak{B}^b + \mu^a \mathfrak{B}^a)$$

oder

$$\mathfrak{F}_f^{(m)} = \frac{1}{8\pi} \left\{ (\mathfrak{B}^b - \mathfrak{B}^a) (\mu^b \mathfrak{B}_n^b + \mu^a \mathfrak{B}_n^a) - \mathfrak{n} [(\mathfrak{B}^b - \mathfrak{B}^a) \cdot (\mu^b \mathfrak{B}^b + \mu^a \mathfrak{B}^a)] \right\}. \quad (14a)$$

### § 3. Die den gebundenen Elektronen zugehörigen quadratischen Größen.

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der Kräfte, welche auf die *gebundenen* Elektronen, d. h. auf die *neutralen Moleküle*, wirken und der zugehörigen Energie über. Wir sollten dabei, ebenso wie im Falle freier Elektronen, die Beziehung der gemittelten *totalen* Feldstärken zu den entsprechenden *effektiven* untersuchen. Wir wollen dies aber erst im nächsten Paragraphen tun und zunächst den Unterschied zwischen den Feldstärken beider Art außer acht lassen.

Es scheint nun, daß dabei die auf die gebundenen Elektronen ausgeübten Wirkungen einer Volumkraft  $\mathfrak{F}_g = \varrho_g \mathfrak{E} + \mathfrak{j}_g \times \mathfrak{H}$  und einer Arbeit  $L_g = c \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{j}_g$  (pro Volum- und Zeiteinheit) entsprechen müssen. Dieser Ansatz ist aber physikalisch nicht zutreffend, denn die gebundenen Elektronen, welche einem beliebigen Körperteil (z. B. einem einzigen Molekül) angehören, können durch eine räumliche Ladung und Strömung nur in Verknüpfung mit den entsprechenden *Flächenbelegungen* repräsentiert werden. Es ist deshalb natürlicher, die Volumkraft  $\mathfrak{F}_g$  und die Arbeit  $L_g$  in diesem Fall durch die Formeln:

$$\int F_g dV = \int (\varrho_g \mathfrak{E} + \mathfrak{j}_g \times \mathfrak{H}) dV + \oint (\eta_g \mathfrak{E} + \mathfrak{k}_g \times \mathfrak{H}) dS, \quad (15)$$

$$\int L_g dV = c \int \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{j}_g dV + c \oint \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{k}_g dS \quad (16)$$

zu definieren.

1. Die den gebundenen Elektronen zugehörige Energie.

Setzt man in die Formel (16) die bekannten Ausdrücke

$$\mathbf{j}_g = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot } \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad \mathfrak{k}_g = \mathfrak{M} \times \mathfrak{n}$$

ein, so wird mit Rücksicht auf die Identität  $\mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{M} \times \mathfrak{n}) = \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{C} \times \mathfrak{M})$

$$\int L_g dV = \int \mathfrak{C} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} dV + c \int \text{rot } \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{C} dV + c \int \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{C} \times \mathfrak{M}) dS.$$

Berücksichtigt man noch die Identität

$$\mathfrak{C} \cdot \text{rot } \mathfrak{M} = \text{div} (\mathfrak{M} \times \mathfrak{C}) + \mathfrak{M} \cdot \text{rot } \mathfrak{C}$$

und die Gleichung

$$\text{rot } \mathfrak{C} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t},$$

so bekommt man

$$\int L_g dV = \int \left( \mathfrak{C} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} - \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \right) dV + c \int \text{div} (\mathfrak{M} \times \mathfrak{C}) dV + c \int \mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{C} \times \mathfrak{M}) dS,$$

oder, da die beiden letzten Integrale sich nach der *Gaußschen* Formel gegenseitig aufheben,

$$L_g = \mathfrak{C} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} - \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}. \quad (17)$$

Diese Formel entspricht der Formel (4) für die auf die freien Elektronen geleistete Arbeit  $L_f$ . Sie läßt sich in derselben Gestalt schreiben

$$L_g = -\text{div } \mathfrak{R}_g - \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{E}_g, \quad (17a)$$

wenn man die den gebundenen Elektronen zugehörige Energiedichte durch den Differentialausdruck

$$d\mathfrak{E}_g = -\mathfrak{C} \cdot d\mathfrak{P} + \mathfrak{M} \cdot d\mathfrak{S} \quad (18)$$

definiert und die entsprechende Energiestrahlung gleich Null setzt

$$\mathfrak{R}_g = 0. \quad (18a)$$

Es sei bemerkt, daß der Ansatz  $L_g = c\mathfrak{C} \cdot \mathbf{j}_g$  ebenso wie (16) zur Formel (17a) führt, und zwar mit derselben Definition der Energiedichte, aber mit einer von Null verschiedenen Energiestrahlung

$$\mathfrak{R}_g = c\mathfrak{C} \times \mathfrak{M}. \quad (18b)$$

Der Differentialausdruck (18) ist im allgemeinen kein vollständiges Differential, so daß die Einteilung der elektromagnetischen Energie nach den freien und gebundenen Elektronen nicht immer möglich ist. Die Bedingungen der Integrierbarkeit von (18) sind selbstverständlich dieselben wie für (4a). Im Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes hat man offenbar

$$\mathfrak{E}_g = -\frac{1}{2} \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{P} + \frac{1}{2} \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{S}. \quad (19)$$

Die verschiedenen Vorzeichen der beiden Glieder erklären sich dadurch,

daß das erste der potentiellen und das zweite der kinetischen Energie entspricht.

Wir wollen noch eine direkte elementare Ableitung dieser Formel angeben; es wird sich daraus unter anderem ergeben, daß die magnetische Energie  $+\frac{1}{2}\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{H}$  ebenso wie die elektrische  $-\frac{1}{2}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{E}$  im allgemeinen *negativ* sein muß.

Wir stellen uns zunächst vor, daß ein Molekül des betrachteten Körpers in einem äußeren elektrischen Felde ein induziertes Dipolmoment  $\mathfrak{p}$  bekommt von einer der effektiven Feldstärke  $\mathfrak{E}$  proportionalen Größe und *positiven* Richtung (d. h.  $\mathfrak{p}_E > 0$ ). Die diesem Dipolmoment entsprechende potentielle Energie  $U$  setzt sich aus zwei Teilen zusammen: aus der gewöhnlichen „äußeren“ elektrischen Energie  $-\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{E}$  und der inneren „quasielastischen“ Energie  $\frac{1}{2}\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{E}$ . Es wird also

$$U = -\frac{1}{2}\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{E} < 0 \quad (20)$$

(vgl. Bd. I, S. 102). Die potentielle Energie der polarisierten Moleküle in der Volumeinheit ist folglich gleich  $-\frac{1}{2}\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{E}$  in Übereinstimmung mit (19).

Wenn man die magnetische Energie als potentielle behandelt (wie wir es am Anfang von Bd. I getan haben), so ergibt sich bei Proportionalität zwischen dem induzierten magnetischen Moment eines Moleküls  $\mathfrak{m}$  und der effektiven Feldstärke  $\mathfrak{H}$  eine Energie  $-\frac{1}{2}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{H}$  pro Molekül oder  $-\frac{1}{2}\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{H}$  pro Volumeinheit, ebenso wie in dem elektrischen Fall. Dieser Energie entspricht die auf die Moleküle ausgeübte „pondermotorische“ Wirkung. Berücksichtigt man aber neben dieser mechanischen Wirkung noch die elektromotorischen Kräfte, welche auf die im Molekül kreisenden Elektronen in longitudinaler Richtung wirken, so bekommt man statt der potentiellen Energie eine kinetische Energie von entgegengesetzter Größe (Bd. I, S. 128).

Um eine tieferes Verständnis dieser Beziehungen und gleichzeitig ein Urteil über die (normale) Richtung der magnetischen Polarisation zu gewinnen, wollen wir noch beispielsweise den Fall eines elementaren linearen Leiters, welcher ein wirkliches Molekül modellmäßig vertreten soll, betrachten.

Wir haben in Bd. I gezeigt, daß in einem linearen Leiter bei Einschaltung eines äußeren Magnetfeldes oder bei Einführung in ein schon vorhandenes Feld *elektrische Induktionskräfte* erzeugt werden, derart, daß ein im Sinne dieser Kräfte zirkulierender Strom ein magnetisches Moment von der zur äußeren Feldstärke entgegengesetzten Richtung bedingen würde [dieser Umstand ist durch das negative Vorzeichen in den Formeln (3) und (4) auf S. 125 und 127 angedeutet]. Nun muß

in jedem wirklichen Leiter ein solcher Induktionsstrom tatsächlich entstehen und desto länger fließen, je größer die Leitfähigkeit ist. Bei unendlich großer Leitfähigkeit kann seine Stärke sich nur bei Änderung der magnetischen Feldstärke oder eher des äußeren magnetischen Flusses  $\int H_n ds$  ändern, und zwar, wie leicht zu sehen ist, *genau proportional zu diesem Fluß*. In der Tat, bezeichnet man den Selbstinduktionskoeffizienten des betrachteten Leiters mit  $L$  und die Stromstärke mit  $i$ , so hat man für die Änderung seiner eigenen magnetischen Energie  $\frac{1}{2} L i^2$  die folgende Gleichung (vgl. Bd. I, S. 127 und 199):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) = L i \frac{di}{dt} = c \oint F_r i d\sigma = -i \frac{d}{dt} \oint H_n dS$$

( $\oint F_r d\sigma$  ist die induzierte elektromotorische Kraft), woraus folgt:

$$L i = - \oint H_n dS + \text{konst.}$$

Da das magnetische Moment des Leiters  $m$  der Stromstärke proportional ist, so muß auch  $m$  bei festgehaltener Orientierung und Feldrichtung der Feldstärke proportional sein. Im Falle eines elementaren Leiters oder eines homogenen äußeren Feldes hat man bekanntlich die Beziehung  $i \int H_n dS = m \cdot \mathfrak{H}$  (Bd. I, S. 56). Es wird also, wenn wir die Konstante in der vorhergehenden Formel gleich Null setzen, entsprechend dem Fehlen des Stromes (oder des Moments) bei  $H = 0$

$$\frac{1}{2} L i^2 = - \frac{1}{2} m \cdot \mathfrak{H}. \quad (20a)$$

Aus dieser Formel folgt sofort, daß das induzierte magnetische Moment eine zur magnetischen Feldstärke *negative* Richtung haben muß, denn die „innere“ Energie  $\frac{1}{2} L i^2$  ist eine wesentlich positive Größe. Um die vollständige magnetische Energie  $T$  des betrachteten Leiters zu erhalten, muß man noch dazu seine „äußere“ (oder gegenseitige) Energie  $+ m \cdot \mathfrak{H}$  addieren. Es wird also

$$T = + \frac{1}{2} m \cdot \mathfrak{H} < 0.$$

## 2. Kräfte und Spannungen.

Setzt man in die Formel (15), welche die auf die gebundenen Elektronen (oder neutralen Moleküle) pro Volumeinheit wirkende Kraft definiert, die bekannten Ausdrücke für  $\rho_\sigma$ ,  $j_\sigma$ ,  $\eta_\sigma$ ,  $\mathfrak{k}_\sigma$  ein, so wird

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{F}_\sigma dV &= \int \left[ -\text{div } \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E} + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot } \mathfrak{M} \right) \times \mathfrak{H} \right] dV \\ &+ \oint [P_n \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \times \mathfrak{n}) \times \mathfrak{H}] dS. \end{aligned}$$

Nun ist [vgl. Bd. I, Einleitung, Formeln (16c) und (27)]:

$$\begin{aligned} \oint P_n \mathfrak{E} dS &= \oint (n \mathfrak{P}) \mathfrak{E} dS = \int \{ (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} \} dV, \\ \oint (\mathfrak{M} \times n) \times \mathfrak{H} dS &= \oint [n (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}) - \mathfrak{M} (n \cdot \mathfrak{H})] dS \\ &= \int [\nabla (\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}) - (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{M} - \mathfrak{M} \operatorname{div} \mathfrak{H}] dV \\ &= \int [(\mathfrak{M} \nabla) \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \times \operatorname{rot} \mathfrak{M} - \mathfrak{M} \operatorname{div} \mathfrak{H}] dV. \end{aligned}$$

Es wird folglich:

$$\int \mathfrak{F}_\sigma dV = \int \left[ (\mathfrak{P} \cdot \nabla) \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{H} + (\mathfrak{M} \nabla) \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \mathfrak{M} \operatorname{div} \mathfrak{H} \right] dV$$

oder nach den Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{F}_\sigma dV &= \int \left[ (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \times \operatorname{rot} \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \nabla) \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{H} + \mathfrak{P} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \right] dV. \end{aligned}$$

Wir bekommen also wegen der Willkürlichkeit des ausgewählten Volumens

$$\mathfrak{F}_\sigma = (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \times \operatorname{rot} \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \nabla) \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{P} \times \mathfrak{H}). \quad (21)$$

Diese Formel läßt sich bei gewissen Bedingungen in der Gestalt

$$\mathfrak{F}_\sigma = - \frac{\partial g_\sigma}{\partial t} - \operatorname{div} {}^2 \mathfrak{X}_\sigma \quad (21a)$$

mit

$$g_\sigma = - \frac{1}{c} \mathfrak{P} \times \mathfrak{H} \quad (21b)$$

und

$$- \operatorname{div} {}^2 \mathfrak{X}_\sigma = (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \times \operatorname{rot} \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \nabla) \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H} \quad (21c)$$

aufschreiben. Dies ist sicher dann möglich, wenn der betrachtete Körper homogen und isotrop ist. Setzt man nämlich

$$\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \gamma \mathfrak{H},$$

so bekommt man mit Rücksicht auf die Identität

$$\begin{aligned} \nabla (E^2) &= 2 (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} + 2 \mathfrak{E} \times \operatorname{rot} \mathfrak{E}: \\ \mathfrak{F}_\sigma &= - \frac{\partial g_\sigma}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\kappa E^2 + \gamma H^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

In diesem Falle reduziert sich also der Spannungstensor  ${}^2 \mathfrak{X}_\sigma$  auf einen Skalar, der einem negativen hydrostatischen Druck  $-\frac{1}{2} (\kappa E^2 + \gamma H^2)$  entspricht, oder eher auf das Produkt dieses Skalars mit dem Einheits-tensor  ${}^2 \delta$ :

$${}^2 \mathfrak{X}_\sigma = - {}^2 \delta \frac{1}{2} (\kappa E^2 + \gamma H^2). \quad (22a)$$

Dieses Resultat läßt sich auf den Fall homogener anisotroper Körper

mit *symmetrischen* Tensoren  ${}^2\kappa$  und  ${}^2\gamma$  verallgemeinern. Bildet man die erste Komponente des Vektors  $(\mathfrak{P}\nabla)\mathfrak{E} + \mathfrak{P} \times \text{rot } \mathfrak{E}$ , so bekommt man [vgl. oben die Ableitung der Formeln (11) und (11a)]:

$$\begin{aligned} \sum_i P_i \frac{\partial}{\partial x_i} E_1 + P_2 \left( \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) - P_3 \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) &= \sum_i P_i \frac{\partial}{\partial x_1} E_i \\ &= \sum_i \sum_k \kappa_{ik} E_k \frac{\partial}{\partial x_1} E_i = \sum_i \sum_k \kappa_{ik} E_i \frac{\partial E_k}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \kappa_{ik} E_i E_k \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E}}{2} \end{aligned}$$

und ebenso

$$[(\mathfrak{M}\nabla)\mathfrak{H} + \mathfrak{M} \times \text{rot } \mathfrak{H}]_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H}}{2}.$$

Es wird folglich

$$\mathfrak{F}_\sigma = - \frac{\partial g_\sigma}{\partial t} + \nabla \frac{1}{2} (\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H}), \quad (23)$$

d. h.

$${}^2\mathfrak{F}_\sigma = - {}^2\delta \frac{\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H}}{2} \quad (23a)$$

wie oben.

Die angeführten Formeln können leicht direkt aufgestellt werden, wenn man die Kraft betrachtet, welche auf die *einzelnen Moleküle* wirkt. Die Moleküle müssen dabei als *elementare elektrische und magnetische Dipole* behandelt werden. Die auf einen solchen Dipol mit dem elektrischen Moment  $\mathfrak{p}$  in einem äußeren elektrischen Felde  $\mathfrak{E}$  wirkende Kraft ist bekanntlich gleich  $(\mathfrak{p}\nabla)\mathfrak{E}$  (vgl. Bd. I, S. 47). Wenn das Moment  $\mathfrak{p}$  sich mit der Zeit ändert, muß man bei Anwesenheit eines äußeren magnetischen Feldes  $\mathfrak{H}$  zu der obigen „elektrostatischen“ Kraft noch die „elektromagnetische“ Kraft  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t} \times \mathfrak{H}$  hinzufügen und ferner die magnetostatische Kraft  $\nabla(m\mathfrak{H})$ , wo  $m$  das *als fest gedachte* magnetische Moment des Moleküls ist [Bd. I, S. 56, Formel (9)]. Es gilt folglich  $\nabla(m\mathfrak{H}) = (m\nabla)\mathfrak{H} + m \times \text{rot } \mathfrak{H}$ . Durch Addition der obigen drei Kräfte und Multiplikationen mit der Anzahl  $N$  der Moleküle in der Volumeinheit ergibt sich für die Kraft  $\mathfrak{F}_\sigma$  die Formel

$$\mathfrak{F}_\sigma = (\mathfrak{P}\nabla)\mathfrak{E} + (\mathfrak{M}\nabla)\mathfrak{H} + \mathfrak{M} \times \text{rot } \mathfrak{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{H}, \quad (24)$$

die durch Hinzufügung des immer verschwindenden Ausdrucks

$$\mathfrak{P} \times \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathfrak{E} \right) = 0$$

in die frühere Formel (21) übergeht.

Nach derselben direkten Methode bekommen wir den folgenden Ausdruck für das auf die Volumeinheit bezogene *Drehmoment*  $\mathfrak{G}$  der auf die Moleküle wirkenden Kräfte

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}. \quad (24a)$$

Diese Formeln (23a, b, c) sind nur *innerhalb* homogener Körper gültig, nicht aber an ihrer Oberfläche, wo die Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  sich sprunghaft ändern.

Will man die vollständige Kraft berechnen, die auf einen begrenzten Körper  $a$  (oder eher die darin enthaltenen gebundenen Elektronen) ausgeübt wird, so muß man in dem oben benutzten Ausdruck für die Flächenkraft  $\oint [P_n \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \times n) \times \mathfrak{H}] dS$ , die inneren Feldstärken  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^a$  und  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^a$  durch

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^a + \mathfrak{E}^b), \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{2} (\mathfrak{H}^a + \mathfrak{H}^b)$$

ersetzen, ebenso wie dies im vorhergehenden Paragraphen bei Berücksichtigung der freien Flächenladungen und Ströme getan wurde.

Wir müssen folglich nach den oben angeführten Formeln berechneten Volumkraft  $\int \mathfrak{F} dV$  noch eine eigentliche (d. h. auf Volumkräfte irreducible) Flächenkraft

$$\frac{1}{2} \oint [P_n (\mathfrak{E}^b - \mathfrak{E}^a) + (\mathfrak{M} \times n) \times (\mathfrak{H}^b - \mathfrak{H}^a)] dS_a$$

hinzufügen, d. h. pro Flächeneinheit die Kraft

$$\frac{1}{2} \{ (\mathfrak{P} \cdot n) \Delta \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \times n) \times \Delta \mathfrak{H} \}. \quad (24b)$$

Statt dessen kann man selbstverständlich die betrachtete vollständige Kraft auch als Summe der eigentlichen Volumkraft

$$\int \left[ -\operatorname{div} \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E} + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{M} \right) \times \mathfrak{H} \right] dV_a$$

und der Flächenkraft

$$\frac{1}{2} \oint [(\mathfrak{P} \cdot n) (\mathfrak{E}^a + \mathfrak{E}^b) + (\mathfrak{M} \times n) \times (\mathfrak{H}^a + \mathfrak{H}^b)] dS_a \quad (24c)$$

darstellen.

Es sei bemerkt, daß auch das vollständige Drehmoment in ähnlicher Weise ergänzt werden muß, und zwar durch Hinzufügung zu dem nach (24a) bestimmten Volummoment  $\int (\mathfrak{P} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{M} \times \mathfrak{H}) dV_a$  eines eigentlichen Flächenmomentes

$$\frac{1}{2} \oint \mathfrak{r} \times [\mathfrak{P} \cdot n \Delta \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \times n) \times \Delta \mathfrak{H}] dS_a \quad (24d)$$

oder durch Addition der Drehmomente, welche der „eigentlichen Volumkraft“ und der vollständigen Flächenkraft entsprechen.

#### § 4. Beziehung zwischen den gemittelten, effektiven und totalen Feldstärken im Falle gebundener Elektronen; Berichtigung der Resultate des vorhergehenden Paragraphen.

1. Die effektiven Feldstärken im Mittelpunkt eines neutralen Moleküls; Korrektur der Energie- und Strahlungsdichte.

Die mittlere effektive Feldstärke in irgend einem Punkte eines gegebenen Moleküls kann man allgemein definieren als die Differenz

zwischen der entsprechenden totalen Feldstärke und dem Mittelwert derjenigen Feldstärke ( $\mathfrak{E}_{\text{elg}}, \mathfrak{H}_{\text{elg}}$ ), welche von dem betrachteten Molekül selbst erzeugt wird. Unsere Aufgabe reduziert sich folglich auf die Untersuchung des gemittelten Feldes eines einzigen neutralen Moleküls.

Wir denken uns ein solches Molekül als eine kleine Kugel  $K$  mit dem Radius  $a$ , innerhalb deren die gebundenen Elektronen ganz beliebig angeordnet sein können. Sofern es sich um die Bestimmung des vom Molekül erzeugten *äußeren* Feldes handelt, kann man diese Anordnung durch eine beliebige andere Verteilung der elektrischen Ladung und Strömung innerhalb oder *auf der Oberfläche von  $K$*  ersetzen, die zu denselben Werten der elektrischen und magnetischen Momente des Moleküls Anlaß geben. Wir wollen nun annehmen, daß auch bei der Berechnung des *mittleren* Feldes *innerhalb* des Moleküls (d. h. innerhalb der Kugel  $K$ ) alle *solche äquivalenten Elektrizitätsverteilungen dasselbe Resultat liefern*. Diese Annahme läßt sich selbstverständlich nicht streng rechtfertigen; doch muß sie als erste Approximation sicher zutreffend sein.

Wir denken uns also statt der wirklichen Anordnung der Elektronen die äquivalente Flächenverteilung auf  $K$  und berechnen den räumlichen Mittelwert der elektrischen und magnetischen Feldstärke innerhalb einer mit  $K$  konzentrischen Kugel  $S$  mit dem Radius  $l > a$ ;  $l$  soll dabei von der Größenordnung des mittleren Abstandes zwischen zwei Molekülen sein, so daß das Volumen von  $S$  ( $\frac{4\pi}{3}l^3$ ) mit dem Volumen zusammenfällt, welches durchschnittlich einem Molekül des betrachteten Körpers angehört. Ist also die Anzahl der Moleküle pro Volumeinheit gleich  $N^1$ ), so bestimmt sich  $l$  durch

$$\frac{4\pi}{3}l^3 = \frac{1}{N}. \quad (25)$$

Wir betrachten zunächst das elektrostatische Feld, welches dem Dipolmoment des Moleküls oder, genauer, seinem zeitlichen Mittelwert  $\mathfrak{p}$  entspricht. Das Potential dieses Feldes außerhalb  $K$  ist bekanntlich  $\varphi^{(a)} = \frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}}{R^3}$  und innerhalb  $\varphi^{(i)} = \frac{\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{R}}{a^3}$  (vgl. Bd. I, S. 108). Die entsprechenden Feldstärken sind folglich

$$\mathfrak{E}_{\text{elg}}^a = \frac{1}{R^3} [3 \mathfrak{R}_0 (\mathfrak{R}_0 \cdot \mathfrak{p}) - \mathfrak{p}] \quad (\text{vgl. Bd. I S. 85})$$

und

$$\mathfrak{E}_{\text{elg}}^i = -\frac{\mathfrak{p}}{a^3}.$$

Der gesuchte Mittelwert drückt sich durch die Formel

$$\overline{\mathfrak{E}_{\text{elg}}^0} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}l^3} \int_0^l \mathfrak{E}_{\text{elg}} dV = \frac{1}{\frac{4\pi}{3}l^3} \left\{ \int_0^a \mathfrak{E}_{\text{elg}}^i dV + \int_a^l \mathfrak{E}_{\text{elg}}^a dV \right\}$$

<sup>1)</sup> Wir nehmen nur *eine* Art von Molekülen an; vgl. unten Nr. 3.

aus. Durch den Index  $0$  wird die Tatsache angedeutet, daß dieser Mittelwert sich auf den Mittelpunkt des Moleküls bezieht. Es ist nun leicht zu sehen, daß das Integral  $\int_a^l \mathfrak{G}^a dV$  verschwindet, denn der Mittelwert von  $\mathfrak{G}^a$  für verschiedene Richtungen von  $\mathfrak{R}_0$  (bei festgehaltenem Abstand  $R$ ) gleich Null ist. Wir bekommen also

$$\overline{\mathfrak{G}_{\text{elg}}^0} = -\frac{1}{\frac{4\pi}{3} l^3} \cdot \frac{p}{a^3} \cdot \frac{4\pi}{3} a^3,$$

d. h. nach (14)

$$\overline{\mathfrak{G}_{\text{elg}}^0} = -\frac{4\pi}{3} N p = -\frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}, \tag{26}$$

wo  $\mathfrak{P}$  die elektrische Polarisation des betrachteten Körpers bedeutet.

Auf eine ähnliche Weise kann man den Mittelwert der anderen, den elektrischen Momenten zweiter und höherer Ordnung entsprechenden Feldstärken berechnen. Es sind dabei nur die *innerhalb*  $K$  wirkenden Felder zu berücksichtigen, denn die Mittelwerte der äußeren Feldstärken für verschiedene Richtungen von  $\mathfrak{R}_0$  sind immer gleich Null. Die in einer beliebigen festen Richtung  $x$  genommene Komponente der elektrischen Feldstärke, die von einem Moment  $n$ -ter Ordnung herrührt, ist in der Tat außerhalb  $K$  formal mit dem Potential eines Multipols ( $n + 1$ )-er Ordnung, dessen eine Achse mit dieser Richtung zusammenfällt, identisch. Da aber ein solches Potential einer Kugelfunktion ( $n + 1$ )-er Ordnung proportional ist, muß sein Mittelwert auf jeder mit  $K$  konzentrischen Kugelfläche verschwinden (Bd. I. S. 110). Was die inneren Feldstärken anbelangt, so muß man zwei Fälle unterscheiden, je nachdem sie elektrischen Momenten gerader oder ungerader Ordnung entsprechen. Im ersten Falle ist das elektrische Potential eine gerade und die Feldstärke eine ungerade Funktion der Koordinaten (innerhalb  $K$ ), so daß ihr Mittelwert verschwindet. Im zweiten Fall kann dieser Mittelwert von Null verschieden sein. — Insbesondere geben die Quadrupolmomente keinen Beitrag zur mittleren Feldstärke, so daß die letztere, wenn man die Momente dritter und höherer Ordnung außer acht läßt, durch die einfache Formel (26) ausgedrückt werden kann.

Ähnliche Resultate ergeben sich für den Mittelwert der von einem Molekül erzeugten *magnetischen* Feldstärke<sup>1)</sup>. Denkt man sich die wirkliche Stromverteilung innerhalb  $K$  durch eine äquivalente Flächenströmung mit dem magnetischen Moment  $m$  ersetzt, so bekommt man innerhalb  $K$  ein homogenes Magnetfeld von der Stärke

$$\mathfrak{G}_{\text{elg}}^i = \frac{2m}{a^3}$$

---

<sup>1)</sup> Sofern die letztere von seinem magnetischen Moment abhängt. Dazu kommt noch die zeitliche Änderung des elektrischen Moments. Es ist aber leicht zu sehen, daß das entsprechende Feld keinen Beitrag zum obigen Mittelwert gibt (vgl. unten).

(vgl. Bd. I, S. 118) und außerhalb ein Feld von demselben Typus wie im Falle eines elektrischen Dipols. Da dieses äußere Feld keinen Beitrag zum Mittelwert gibt, so wird

$$\overline{\mathfrak{E}}_{\text{eig}}^0 = \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{l^3} \cdot \frac{4\pi}{3} a^3,$$

d. h.

$$\overline{\mathfrak{E}}_{\text{eig}}^0 = \frac{8\pi}{3} N m = \frac{8\pi}{3} \mathfrak{M}, \quad (26a)$$

wo  $\mathfrak{M}$  die magnetische Polarisation des betrachteten Körpers ist. Diese Formel, ebenso wie (15), erfordert noch eine von den magnetischen Momenten dritter, fünfter usw. Ordnung herrührende Korrektur, die wir aber im folgenden außer acht lassen werden.

Wir sind jetzt imstande, die auf ein Molekül wirkende äußere oder effektive Feldstärke zu berechnen. Diese effektive Feldstärke ergibt sich, wenn man von der mittleren totalen Feldstärke ( $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$ ) den Mittelwert des von dem betreffenden Molekül selbst erzeugten Feldes, d. h. die Größe (26) bzw. (26a) subtrahiert. Es wird folglich

$$\mathfrak{E}_{\text{eff}}^0 = \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \quad (27)$$

und

$$\mathfrak{H}_{\text{eff}}^0 = \mathfrak{H} - \frac{8\pi}{3} \mathfrak{M}. \quad (27a)$$

Die letztere Formel nimmt eine der Formel (27) ganz ähnliche Gestalt an, wenn man statt der magnetischen Feldstärke die entsprechende Erregung  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} - 4\pi\mathfrak{M}$  einführt, nämlich

$$\mathfrak{H}_{\text{eff}}^0 = \mathfrak{B} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{M}. \quad (27b)$$

Die Formeln (27) und (27a) sind zuerst von *H. A. Lorentz* (in einer von der hier angeführten, etwas verschiedenen Weise) abgeleitet worden.

Sie sind selbstverständlich nur als eine erste Näherung anzusehen, auch wenn man sich auf die Polarisation erster Ordnung beschränkt. Es ist aber unmöglich, sie theoretisch zu verbessern, ohne genauere Kenntnis der Struktur der Atome und Moleküle. Man könnte versuchen, sie durch empirische Formeln von der Gestalt

$$\mathfrak{E}_{\text{eff}}^0 = \mathfrak{E} + \gamma \mathfrak{P} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{E}_{\text{eff}}^0 = \mathfrak{E} + {}^2\gamma \cdot \mathfrak{P} \quad (27c)$$

zu ersetzen. Es erweist sich aber, daß der theoretische Wert des Koeffizienten  $\gamma$  sehr gut mit der Erfahrung übereinstimmt (vgl. unten Kap. III).

Es ist nun leicht, die im § 3 gegebenen Ausdrücke für die elektrische und magnetische Energiedichte zu berichtigen. Dazu braucht man nämlich in die erwähnten Ausdrücke statt der totalen die entsprechenden effektiven Feldstärken für die Mittelpunkte der Moleküle einzu-

führen. Für die elektrische Energie eines Moleküls bekommt man dabei  $U = -\frac{1}{2} p \left( \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \right)$ , d. h. eine Energie

$$\xi_{\sigma}^e = -\frac{1}{2} \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E} - \frac{2\pi}{3} P^2 \quad (28)$$

pro Volumeinheit.

Eine analoge Formel ergibt sich für die magnetische Energie, falls letztere als potentielle Energie der pondermotorischen Kräfte definiert wird. Will man aber die eigentliche magnetische Energie, die der Arbeit der elektrischen Induktionskräfte entspricht, betrachten, so muß man wieder die entgegengesetzte Größe einführen, d. h.

$$\xi_{\sigma}^m = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + \frac{2\pi}{3} M^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H} - \frac{4\pi}{3} M^2 \quad (28a)$$

setzen.

Der Ursprung des Zusatzgliedes  $-\frac{4\pi}{3} M^2$  mag zunächst etwas rätselhaft erscheinen, denn in unserer allgemeinen Ausgangsformel (16) für  $\xi_{\sigma}$  tritt die magnetische Feldstärke gar nicht auf (sie bleibt in der Tat immer „arbeitslos“). Wir müssen vielmehr in dieser Formel  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{E}_{\text{eff}}$  ersetzen und dabei den Umstand beachten, daß für den Mittelpunkt des Moleküls die Beziehung  $\text{rot } \mathfrak{E}_{\text{eff}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{H}_{\text{eff}}$  gilt<sup>1)</sup>. Dementsprechend bekommen wir statt (17) die Formel

$$L_{\sigma} = \mathfrak{E}_{\text{eff}}^0 \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} - \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{H}_{\text{eff}}^0}{\partial t} \quad (29)$$

und folglich, falls die Beziehung

$$L_{\sigma} = -\frac{\partial \xi_{\sigma}}{\partial t}$$

überhaupt möglich ist, nach (27) und (27a)

$$d \xi_{\sigma} = -\mathfrak{E} \cdot d \mathfrak{P} + \mathfrak{M} \cdot d \mathfrak{H} - d \left( \frac{2\pi}{3} P^2 + \frac{4\pi}{3} M^2 \right) \quad (29a)$$

oder:

$$d \xi_{\sigma} = -\mathfrak{E} \cdot d \mathfrak{P} + \mathfrak{M} \cdot d \mathfrak{H} - d \left( \frac{2\pi}{3} P^2 - \frac{2\pi}{3} M^2 \right) \quad (29b)$$

## 2. Gradient der effektiven Feldstärken im Mittelpunkt eines Moleküls; Korrektur der Kräfte und Spannungen.

Wir müssen jetzt die von dem Unterschied zwischen den gemittelten totalen und effektiven Feldstärken herrührenden Korrekturen in den Formeln des vorangehenden Paragraphen für die Kräfte und Spannungen einführen. — Es scheint zunächst, daß man dafür nur die Feldstärken  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  durch die effektiven Feldstärken (16) und (16a) zu ersetzen braucht. Was die Formel (24a) betrifft, die nur die Feld-

<sup>1)</sup> Beziehungen dieser Art werden wir eingehend unten betrachten.

stärken, nicht aber deren Ableitungen nach den Koordinaten enthält, so ist dies sicher richtig. Dadurch aber wird keine Änderung in den Ausdruck für  $\mathfrak{C}$  eingeführt, denn die äußeren Produkte von  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  mit den entsprechenden Lorentzischen Korrektionsgliedern identisch verschwinden.

Ganz anders wird die Sache im Falle der Formel (24). Hier müssen wir bei den drei ersten Gliedern nicht die effektiven Feldstärken selbst, sondern ihre Differentialquotienten im Mittelpunkt des Moleküls betrachten. Es wäre ganz irrig anzunehmen, daß aus der Gleichung  $\mathfrak{C}_{\text{eff}}^0 = \mathfrak{C} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}$  auch  $[(\mathfrak{P}\nabla)\mathfrak{C}]_{\text{eff}}^0 = (\mathfrak{P}\nabla)\left(\mathfrak{C} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}\right)$  folgen soll. Um die Beziehung zwischen den Differentialquotienten von  $\mathfrak{C}_{\text{eff}}$  und  $\mathfrak{C}$  im *Mittelpunkt* eines Moleküls zu erhalten, muß man nach dem am Anfang dieses Paragraphen geschilderten Verfahren die (mittlere) effektive Feldstärke nicht nur für diesen Mittelpunkt ( $O$ ), sondern auch für naheliegende Punkte ( $O'$ ) bestimmen. Unsere frühere effektive Feldstärke  $\mathfrak{C}_{\text{eff}}^0$  bezieht sich nur auf den Punkt  $O$ . Es ist nun ganz klar, daß die Differenz  $\mathfrak{C}'_{\text{eff}} - \mathfrak{C}_{\text{eff}}^0$ , wo  $\mathfrak{C}'_{\text{eff}}$  die effektive Feldstärke im Punkte  $O'$  bedeutet, nichts mit der Größe  $(\vec{OO'}\nabla)\mathfrak{C}_{\text{eff}}^0 = (\vec{OO'}\nabla)\left(\mathfrak{C} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}\right)$  zu tun hat. Bezeichnet man die unendlich kleine Strecke  $OO'$  mit  $\mathfrak{d}$ , so hat man  $\mathfrak{C}'_{\text{eff}} - \mathfrak{C}_{\text{eff}}^0 = [(\mathfrak{d}\nabla)E_{\text{eff}}]^0$ , wobei durch den Index  $^0$ , wie früher angedeutet wird, daß die entsprechende Größe für den Punkt  $O$  zu berechnen ist.

Die Bestimmung von  $\mathfrak{C}'_{\text{eff}}$  reduziert sich auf die Berechnung des Mittelwertes der von dem Molekül selbst erzeugten Feldstärke  $\mathfrak{C}_{\text{eig}}$  in einer Kugel von derselben Größe wie früher, aber mit exzentrisch liegendem Mittelpunkt  $O'$ . Die Differenz zwischen den Integralen dieser Feldstärke über das Volumen der Kugeln  $S'$  (Radius  $l$ , Mittelpunkt  $O'$ ) und  $S$  (Radius  $l$ , Mittelpunkt  $O$ ) läßt sich offenbar durch das Flächenintegral  $\oint \mathfrak{C}_{\text{eig}} d_n dS$  darstellen (es bedeutet hier  $d_n dS$  das mit positiven oder negativen Vorzeichen genommene Element des zwischen  $S$  und  $S'$  eingeschlossenen Volumens). Dieses Integral hängt nur vom *äußeren* Feld des Moleküls ab und kann folglich ohne irgendwelche vereinfachenden Annahmen ausgerechnet werden.

Die Komponente von  $\mathfrak{C}_{\text{eig}}$  in einer festen Richtung kann auf  $S$  durch eine Reihe von Kugelfunktionen verschiedener Ordnung ausgedrückt werden. Wenn das Molekül neutral ist, wie wir es von Anfang an vorausgesetzt haben, muß diese Reihe mit einer Funktion zweiter Ordnung, die dem Dipolmoment des Moleküls entspricht, anfangen. Die Größe  $d_n$ , d. h. die Projektion des Vektors  $\mathfrak{d}$  auf den Kugelradius stellt offenbar auch eine Kugelfunktion, und zwar erster Ordnung dar (denn sie ist dem Kosinus des Winkels zwischen  $\mathfrak{d}$  und  $\mathfrak{n}$  proportional). Wegen der Orthogonalitätseigenschaft der Kugelfunktionen verschiedener Ordnung (Bd. I, S. 110) muß das Integral  $\oint \mathfrak{C}_{\text{eig}} d_n dS$  identisch

verschwinden. Es gilt also  $\overline{\mathfrak{E}'_{\text{elg}}} - \overline{\mathfrak{E}_{\text{elg}}} = [(\delta V) \overline{\mathfrak{E}_{\text{elg}}}]^0 = 0$  und folglich

$$[(\delta V) \overline{\mathfrak{E}_{\text{err}}}]^0 = [(\delta V) (\mathfrak{E} - \overline{\mathfrak{E}_{\text{elg}}})]^0 = (\delta V) \mathfrak{E}.$$

Dasselbe gilt selbstverständlich auch bezüglich des magnetischen Feldes, sofern es von der magnetischen Polarisierung abhängt. Wir müssen aber noch dasjenige magnetische Feld berücksichtigen, welches von der zeitlichen Änderung des *elektrischen* Momentes des Moleküls herrührt. Da dieses Feld eine Zylindersymmetrie besitzt (d. h. seine Linien sind koaxiale Kreise, die senkrecht zum Vektor  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t}$  verlaufen, vgl. Bd. I, S. 83), so muß sein Mittelwert für den Mittelpunkt des Moleküls verschwinden — wie schon oben bemerkt wurde. Es ist aber leicht einzusehen, daß für solche Punkte, die außerhalb der den Vektor  $\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t}$  enthaltenden Gerade liegen, dieser Mittelwert  $\overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}}$  und folglich auch das Differential  $[(\delta V) \overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}}]^0$  einen von Null verschiedenen Wert hat. Es gilt in der Tat nach dem *Biot-Savartschen* Gesetz für den betrachteten Anteil des Magnetfeldes außerhalb des Moleküls

$$\mathfrak{H}_{\text{elg}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t} \times \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}^2}.$$

Auf der Oberfläche der Kugel  $S$  fällt der Einheitsvektor  $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R} : R$  mit der äußeren Normale zusammen, so daß wir

$$[(\delta V) \overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}}]^0 = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} l^3} \oint \mathfrak{H}_{\text{elg}} d_n dS = \frac{N}{R^2} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t} \times \oint \mathfrak{n} d_n dS$$

bekommen, oder, da der Mittelwert des Vektors  $\mathfrak{n} d_n = \mathfrak{n} (\delta \cdot \mathfrak{n})$  auf der Kugeloberfläche gleich  $\frac{1}{3} \delta$  ist,

$$[(\delta V) \overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}}]^0 = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t} \times \delta. \quad (30)$$

Daraus folgt ferner, wenn man  $\overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}}$  als Funktion des Radiusvektors  $\delta$  betrachtet:

$$\text{rot} (\overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}} - \overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}})^0 = \text{rot} \overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}} = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t}. \quad (30a)$$

Es sei bemerkt, daß diese Formel sich direkt aus der Gleichung

$$\text{rot} \overline{\mathfrak{H}_{\text{elg}}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\mathfrak{E}_{\text{elg}}}}{\partial t} = 4\pi \overline{\mathfrak{j}_{\text{elg}}}$$

ergibt, wenn man hier  $\overline{\mathfrak{j}_{\text{elg}}} = 4\pi \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t}$  und  $\overline{\mathfrak{E}_{\text{elg}}} = -\frac{4\pi}{3} \mathfrak{p}$  einsetzt.

Der von dem magnetischen Moment des Moleküls bedingte Anteil der Stromdichte darf außer acht bleiben, da der Volumstrom  $\int \text{rot} \mathfrak{M} dV$  durch den entsprechenden Oberflächenstrom  $\oint \mathfrak{M} \times \mathfrak{n} dS$  kompensiert wird — in Übereinstimmung mit der vorangehenden Betrachtung.

Es ist nun klar, daß auch bei der Berechnung von  $(\mathfrak{d}\nabla)\overline{\mathfrak{E}}_{\text{elg}}$  das von der zeitlichen Änderung des magnetischen Moments des Moleküls herührende elektrische Feld zu berücksichtigen wäre. Dieses zusätzliche (nicht rein elektrostatische) Feld läßt sich aus der Gleichung

$$\text{rot } \overline{\mathfrak{E}}_{\text{elg}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\mathfrak{H}}_{\text{elg}}}{\partial t} = 0$$

mit Rücksicht auf die Beziehung  $\overline{\mathfrak{H}}_{\text{elg}} = \frac{8\pi}{3} \mathfrak{M}$  bestimmen. Daraus folgt aber, wie der Vergleich von (25) und (25a) zeigt,

$$[(\mathfrak{d}\nabla)\overline{\mathfrak{E}}_{\text{elg}}]^0 = -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \times \mathfrak{d} = \frac{4\pi}{3c} \mathfrak{d} \times \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}. \quad (30b)$$

Diese Formel kann man auch aus der Definition des betrachteten zusätzlichen elektrischen Feldes

$$\overline{\mathfrak{E}}_{\text{elg}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial t} \times \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}^2}$$

(vgl. Bd. I, S. 165) unmittelbar ableiten, ebenso wie (30).

Durch Subtraktion der Größen (30), (30a) und (30b) von den entsprechenden Größen für das totale gemittelte Feld bekommt man, wenn man den Vektor  $\mathfrak{d}$  durch  $\mathfrak{P}$  oder  $\mathfrak{M}$  ersetzt

$$[(\mathfrak{P}\nabla)\overline{\mathfrak{E}}_{\text{eff}}]^0 = (\mathfrak{P}\nabla)\overline{\mathfrak{E}} + \frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \times \mathfrak{P}, \quad (31)$$

$$[(\mathfrak{M}\nabla)\overline{\mathfrak{H}}_{\text{eff}}]^0 = (\mathfrak{M}\nabla)\overline{\mathfrak{H}} - \frac{4\pi}{3} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \mathfrak{M}, \quad (31a)$$

$$[\mathfrak{M} \times \text{rot } \overline{\mathfrak{H}}_{\text{eff}}]^0 = \mathfrak{M} \times \text{rot } \overline{\mathfrak{H}} - \frac{8\pi}{3} \mathfrak{M} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}. \quad (31b)$$

Ersetzt man die drei ersten Glieder von (24) § 3 durch die obigen Ausdrücke und führt im vierten statt  $\mathfrak{H}$  die effektive Feldstärke

$$\overline{\mathfrak{H}}_{\text{eff}}^0 = \overline{\mathfrak{H}} - \frac{8\pi}{3} \mathfrak{M}$$

ein, so wird

$$\overline{\mathfrak{F}}_e = (\mathfrak{P}\nabla)\overline{\mathfrak{E}} + (\mathfrak{M}\nabla)\overline{\mathfrak{H}} + \mathfrak{M} \times \text{rot } \overline{\mathfrak{H}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \times \overline{\mathfrak{H}} + \frac{4\pi}{3c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{M} \times \mathfrak{P}), \quad (32)$$

oder [vgl. (22)]

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathfrak{F}}_e = & (\mathfrak{P}\nabla)\overline{\mathfrak{E}} + \mathfrak{P} \times \text{rot } \overline{\mathfrak{E}} + (\mathfrak{M}\nabla)\overline{\mathfrak{H}} + \mathfrak{M} \times \text{rot } \overline{\mathfrak{H}} \\ & + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{P} \times \left( \overline{\mathfrak{H}} - \frac{4\pi}{3} \mathfrak{M} \right) \right] \mathfrak{M}. \end{aligned} \right\} \quad (32a)$$

Die Berücksichtigung der Differenz zwischen den effektiven und den totalen (gemittelten) Feldstärken und deren Ableitungen läßt also den den gebundenen Elektronen zugehörigen Spannungstensor (sofern er überhaupt existiert) unverändert, während der frühere Ausdruck (21b)

für die Dichte der entsprechenden Bewegungsgröße dabei durch

$$g_v = -\frac{1}{c} \mathfrak{P} \times \left( \mathfrak{S} - \frac{4\pi}{3} \mathfrak{M} \right) \quad (32b)$$

ersetzt werden muß.

### 3. Effektive Feldstärken im Falle einer Mischung verschiedener Moleküle.

Wir haben bisher nur solche Körper betrachtet, die aus neutralen Molekülen einer *einzig*en Art und eventuell auch aus freien Elektronen aufgebaut sind. Wir wollen nun die Verallgemeinerung der obigen Resultate aufsuchen für den Fall eines Körpers, der aus einer Menge *verschiedenartiger Moleküle* oder *Ionen* besteht (die letzteren können selbstverständlich auch unbeweglich sein).

Die durch diese Ionen bedingten Ladungs- und Stromdichten sind durch die Formeln (11), (12) und (12a) des Kap. I gegeben. Wir müssen aber noch neben den totalen Feldstärken  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{S}$  die für verschiedene Ionenarten verschiedenen effektiven Feldstärken  $\mathfrak{E}_{\text{eff}}^\alpha$ ,  $\mathfrak{S}_{\text{eff}}^\alpha$  unterscheiden. Wir können dabei wie im Falle *einer* Ionengattung

$$\mathfrak{E}_{\text{eff}}^\alpha = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha, \quad \mathfrak{S}_{\text{eff}}^\alpha = \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_{\text{eig}}^\alpha. \quad (33)$$

setzen.

Es wäre aber irrtümlich anzunehmen, daß die Größen  $(\mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha)^0$   $(\mathfrak{S}_{\text{eig}}^\alpha)^0$  — oder eher ihre Mittelwerte für die Mittelpunkte der entsprechenden Ionen — mit den von diesen Ionen herrührenden „partiellen“ Polarisationen“  $\mathfrak{P}^\alpha = N^\alpha p^\alpha = \frac{p^\alpha}{V^\alpha}$ ,  $\mathfrak{M}^\alpha = N^\alpha m^\alpha = \frac{m^\alpha}{V^\alpha}$  durch dieselben Beziehungen

$$(\mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha)^0 = -\frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}^\alpha, \quad (\mathfrak{S}_{\text{eig}}^\alpha)^0 = \frac{8\pi}{3} \mathfrak{M}^\alpha, \quad (33a)$$

welche für *eine* Ionengattung gelten, verknüpft sind. Dies läßt sich am einfachsten aus der folgenden Überlegung einsehen. Wir denken uns die Ionen einer Gattung (Konzentration  $N$ , Moment  $p$ ) in zwei gleichzahlige Hälften eingeteilt. Dann würde man gemäß (32a) für jede Hälfte eine zweimal kleinere Korrektur für die mittlere effektive Feldstärke bekommen als ohne diese Einteilung.

Es ist leicht einzusehen, daß die Sachlage nicht wesentlich verbessert wird, wenn man die Koeffizienten  $-\frac{4\pi}{3}$  und  $\frac{8\pi}{3}$  in (33a) durch irgendwelche andere Zahlenkoeffizienten ersetzt. Erstens müßten dabei die letzteren von den relativen Konzentrationen der verschiedenen Ionen und von ihren Momenten abhängen, so daß die Beziehung zwischen  $(\mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha)^0$  und  $\mathfrak{P}^\alpha$  [oder  $(\mathfrak{S}_{\text{eig}}^\alpha)^0$  und  $\mathfrak{M}^\alpha$ ] *nicht linear* sein sollte. — Ferner würde man dabei auf Widersprüche mit den aus den Gleichungen  $\text{rot } \mathfrak{S}_{\text{eig}}^\alpha - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha = 4\pi j^\alpha$  und  $\text{rot } \mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{S}_{\text{eig}}^\alpha}{\partial t} = 0$  folgenden Be-

ziehungen stoßen [vgl. Nr. 2]. Damit ist noch eine andere Schwierigkeit verknüpft. Verschwindet nämlich die resultierende freie Ladungsdichte  $\sum \varrho_j^\alpha$ , so sind die einzelnen Summanden im allgemeinen von Null verschieden; dementsprechend sollte auch die resultierende Kraft  $\sum \mathfrak{E}_{\text{eff}}^\alpha \cdot \varrho_j^\alpha = - \sum \mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha \cdot \varrho_j^\alpha$  nach unserem Ansatz von Null verschieden sein. Dies ist aber sicher unmöglich, denn sonst würde ein neutraler, aus entgegengesetzten Ionen aufgebauter Körper in einem homogenen elektrostatischen Felde eine im allgemeinen sehr große Kraft erfahren.

Aus allen diesen Widersprüchen scheint es nur einen Ausweg zu geben, und zwar in der Ersetzung der Formeln (33a) durch die allgemeinen *linearen* Beziehungen von der Gestalt

$$(\mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha)^0 = - \sum_{\beta} s_{\alpha\beta}^{(e)} \mathfrak{P}^\beta, \quad (\mathfrak{E}_{\text{eig}}^\alpha)^0 = + \sum_{\beta} s_{\alpha\beta}^{(m)} \mathfrak{M}^\beta \quad (33b)$$

mit *Zahlenkoeffizienten*  $s_{\alpha\beta}^{(e)}$ ,  $s_{\alpha\beta}^{(m)}$ , die nur von dem allgemeinen Charakter der Ionenverteilung (unregelmäßige oder regelmäßige Anordnung im Raume usw.) abhängen. Die Notwendigkeit des Auftretens von „gegenseitigen“ Koeffizienten ( $\beta \neq \alpha$ ) läßt sich am einfachsten aus der folgenden Überlegung erkennen. Wir stellen uns vor, daß der betrachtete Körper aus zweiatomigen Molekülen besteht, die vollkommen identisch und gleichorientiert sind. Nun können wir offenbar diese Atome als einzelne Moleküle  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 2$  behandeln. Ist die effektive elektrische Feldstärke für die zusammengesetzten Moleküle nach der Formel  $(\mathfrak{E}_{\text{eff}})^0 = \mathfrak{E} + s \mathfrak{P}$  bestimmt, so muß man bei der Bestimmung der effektiven Feldstärken für die einzelnen Atome auch ihre gegenseitige Wechselwirkung in Betracht ziehen. Die effektiven Feldstärken  $(\mathfrak{E}_{\text{eff}}^{(1)})^0$  und  $(\mathfrak{E}_{\text{eff}}^{(2)})^0$  ergeben sich in erster Näherung aus  $(\mathfrak{E}_{\text{eff}})^0$  durch Hinzufügung der Feldstärken  $\mathfrak{E}^{1,2}$  bzw.  $\mathfrak{E}^{2,1}$ , welche die betrachteten Atome *aufeinander ausüben* und welche offenbar ihren elektrischen Momenten, d. h. den entsprechenden partiellen Polarisierungen  $\mathfrak{P}^{(1)}$  und  $\mathfrak{P}^{(2)}$  proportional sind (wir setzen die Atome als neutral voraus).

Man bekommt selbstverständlich wesentlich verschiedene Resultate, je nachdem die einzelnen Atome (oder Atomgruppen) relativ zueinander regelmäßig oder unregelmäßig angeordnet sind. Im ersten Falle kann man sie in sehr natürlicher Weise zu Molekülen vereinigen (oder vereinigt denken); im zweiten Falle ist dies kaum möglich.

Wir können hier auf diese Frage nicht näher eingehen, da sie außerhalb des Rahmens der makroskopischen Theorie liegt. Wir werden darauf noch in einem etwas verschiedenen Zusammenhange (und zwar bei der Bestimmung der Dielektrizitätskonstante zweiatomiger Substanzen, Kap. III, § 1) zurückkommen. In diesem Kapitel werden wir aber die materiellen Körper als chemisch homogen behandeln und nur diejenige Inhomogenität zulassen, die der Anwesenheit von neutralen Molekülen und freien Elektronen (oder „Ersatzelektronen“) entspricht.

### § 5. Die vollständigen quadratischen Größen und die verallgemeinerten Bedingungen ihrer Aufspaltung.

#### 1. Der vollständige Energiespannungstensor.

Durch Addition der quadratischen Größen, die sich einzeln auf die freien und die gebundenen Elektronen beziehen und die in den vorhergehenden Paragraphen berechnet worden sind, bekommt man die entsprechenden *vollständigen* Größen. Es lassen sich dabei, wie wir sogleich sehen werden, die elektromagnetische Energie und der Spannungstensor *immer* ganz unabhängig von irgendwelchen Beziehungen zwischen den Polarisationen und den Feldstärken definieren.

In der Tat, durch Addition der Ausdrücke (4b) und (29b) ergibt sich für die vollständige Energiedichte der Differentialausdruck

$$d\xi = d\xi_f + d\xi_v = \frac{1}{4\pi} \{ \mathfrak{E} \cdot (d\mathfrak{D} - 4\pi d\mathfrak{P}) + (\mathfrak{B} + 4\pi\mathfrak{M}) \cdot d\mathfrak{H} \} \\ - d\left(\frac{2\pi}{3} P^2 + \frac{4\pi}{3} M^2\right),$$

d. h.

$$d\xi = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E} d\mathfrak{E} + \mathfrak{H} d\mathfrak{H}) - d\left(\frac{2\pi}{3} P^2 + \frac{4\pi}{3} M^2\right),$$

woraus folgt

$$\xi = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} - \frac{2\pi}{3} P^2 - \frac{4\pi}{3} M^2. \quad (34)$$

In derselben Weise bekommen wir für den vollständigen Spannungstensor nach (9b) und (32a)

$$-\operatorname{div} \mathfrak{T} = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{D} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{D}) + (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \times \operatorname{rot} \mathfrak{E} \\ + \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{B} \times \mathfrak{H}) + (\mathfrak{M} \nabla) \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H},$$

d. h. wegen

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{B} - 4\pi \mathfrak{M},$$

$$-\operatorname{div} \mathfrak{T} = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}) \\ + \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} + (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} - \mathfrak{M} \operatorname{div} \mathfrak{H} - \operatorname{rot} \mathfrak{M} \times \mathfrak{H} + (\mathfrak{M} \nabla) \mathfrak{H} + \mathfrak{M} \times \operatorname{rot} \mathfrak{H}$$

oder

$$-\operatorname{div} \mathfrak{T} = \frac{1}{4\pi} (\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + \operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \mathfrak{E} + \mathfrak{H} \operatorname{div} \mathfrak{H} + \operatorname{rot} \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}) \\ + \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} + (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} - \mathfrak{M} \operatorname{div} \mathfrak{H} - (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{M} + \nabla (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H})$$

Der mit  $\frac{1}{4\pi}$  multiplizierte Klammerausdruck ist formal mit dem auf der S. 215, Bd. I, angeführten Ausdruck für die (negative) Divergenz des Spannungstensors identisch. Es gilt ferner bei der Integration über ein beliebiges Volumen [nach Formel (16c) Bd. I, S. 15]

$$\int [\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} + (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E}] dV = \oint (\mathfrak{P} \mathfrak{n}) \mathfrak{E} dS = \oint \mathfrak{E} P_n dS. \\ \int [\mathfrak{M} \operatorname{div} \mathfrak{H} + (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{M}] dV = \oint \mathfrak{M} H_n dS$$

$$\text{und} \quad \int \nabla (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{S}) dS = \oint \mathfrak{n} (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{S}) dS.$$

Wir sehen also, daß der Tensor  ${}^2\mathfrak{X}$  immer existiert, denn das Integral  $-\int \text{div } {}^2\mathfrak{X} dV$  läßt sich in ein Flächenintegral  $-\oint \mathfrak{X}_n dS$  transformieren. Der Vektor  $\mathfrak{X}_n$ , d. h. die Projektion des Tensors  ${}^2\mathfrak{X}$  auf die Normalenrichtung drückt sich dabei folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{X}_n = \frac{1}{4\pi} \left( \mathfrak{n} \frac{E^2 + H^2}{2} - \mathfrak{E} E_n - \mathfrak{H} H_n \right) - \mathfrak{E} P_n + \mathfrak{M} H_n - \mathfrak{n} (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{S})$$

oder

$$\mathfrak{X}_n = \frac{1}{4\pi} \left\{ \mathfrak{n} \frac{E^2 + (\mathfrak{B} - 4\pi \mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{S}}{2} - \mathfrak{E} D_n - \mathfrak{B} H_n \right\}. \quad (34a)$$

Die Komponenten von  ${}^2\mathfrak{X}$  in bezug auf je zwei Koordinatenachsen lauten folglich

$$T_{ik} = \delta_{ik} \left( \frac{E^2 + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{S}}{8\pi} - \frac{1}{2} \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{S} \right) - E_i D_k - B_i H_k. \quad (34b)$$

Was schließlich die elektromagnetische Energiestrahlung  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_g$  und die Dichte der Bewegungsgröße  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_f + \mathfrak{g}_g$  anbetrifft, so bekommen wir nach (4a), (9a), (18a) und (32b):

$$\mathfrak{R} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{B} \quad (35)$$

und

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c} \left[ \mathfrak{D} \times \mathfrak{S} - 4\pi \mathfrak{P} \times \left( \mathfrak{S} - \frac{4\pi}{3} \mathfrak{M} \right) \right].$$

d. h.

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E} \times \mathfrak{S} + \frac{4\pi}{3c} \mathfrak{P} \times \mathfrak{M}. \quad (35a)$$

Es ist beachtenswert, daß die elektrischen und magnetischen linearen Größen in einer nicht ganz symmetrischen Weise in die quadratischen Größen  $\xi$ ,  ${}^2\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{g}$  eingehen.

Man könnte den Vektor  $\mathfrak{R}$  und den Tensor  ${}^2\mathfrak{X}$ , d. h. die Energie- und Impulsstrahlung auf eine etwas verschiedene Weise definieren, wenn man die den gebundenen Elektronen entsprechende Flächenladung und den Flächenstrom bei der Berechnung der Kraft außer acht lassen wollte. Es wäre dabei nach (18b)  $\mathfrak{R}_g = c \mathfrak{E} \times \mathfrak{M}$  zu setzen und folglich

$$\mathfrak{R} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{S}. \quad (35b)$$

Ebenso ergibt sich unter Weglassung der Lorentzschen Korrekturen

$$\mathfrak{X}_n = \frac{1}{4\pi} \left( \mathfrak{n} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} - E E_n - H H_n \right). \quad (35c)$$

Die exakte Formel sieht ziemlich kompliziert aus. Die Größen (35b) und (35c) sind formal mit den entsprechenden Vektoren der allgemeinen Theorie des I. Bandes identisch. Dies folgt sofort aus der entsprechenden Definition der (unvollständigen) Arbeit und Kraft nach den Formeln

$$L^0 = L_f + L_g = c \mathfrak{E} (\mathfrak{j}_f + \mathfrak{j}_g) = c \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{j}$$

und  $\mathfrak{F}^0 = \mathfrak{F}_f + \mathfrak{F}_g = (\varrho_f + \varrho_g) \mathfrak{E} + (\mathfrak{j}_f + \mathfrak{j}_g) \times \mathfrak{H} = \varrho \mathfrak{E} + \mathfrak{j} \times \mathfrak{H}$ ,

denn die vollständigen (mittleren) Elektrizitätsdichten  $\varrho$  und  $\mathfrak{j}$  sind mit den entsprechenden Feldstärken durch die in Bd. I behandelten Feldgleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \varrho, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{j}$$

verknüpft. Die Ausdrücke  $L^0$  und  $\mathfrak{F}^0$  lassen sich deshalb auf dieselbe Weise wie dort (Kap. VII, §§ 4 und 5) umformen.

Die obigen Formeln gelten ganz unabhängig von der Beziehung zwischen den Polarisationen und den Feldstärken. Sie können also auf beliebige Körper oder Körpersysteme angewandt werden, im Gegensatz zu den Formeln der zwei vorhergehenden Paragraphen, die nur bei gewissen, in der Wirklichkeit nicht streng erfüllbaren Bedingungen gültig sind. Wir können also sagen, daß die vollständige elektromagnetische Energie und der Spannungstensor immer existieren — und zwar als quadratische oder bilineare Funktionen der gemittelten Feldstärken und Polarisationen (totalen oder auch partiellen); ihre Zerlegung in die den freien und den gebundenen Elektronen zugehörigen Anteile ist dagegen im allgemeinen nicht möglich.

In dem Spezialfall *nicht leitender Körper*, die aus unbeweglichen Ionen oder aus lauter neutralen Molekülen aufgebaut sind (für die also die Leitfähigkeit  $\sigma$  verschwindet), müssen die vollständigen quadratischen Größen mit solchen, die den gebundenen Elektronen zugehören, *physikalisch äquivalent sein*. Beide Größenarten bleiben aber, wie leicht zu sehen ist, auch in diesem Fall *formal voneinander verschieden*. Es sei daran erinnert, daß die Bedingungen, welche wir in den §§ 2 und 3 für die Existenz der Größen  $\xi_g$  und  ${}^2\mathfrak{X}_g$  (als bestimmter Funktionen der linearen Größen) aufgestellt haben, sich nur auf die Abhängigkeit der *Polarisationen* von den Feldstärken beziehen und von der elektrischen Leitfähigkeit der betreffenden Körper ganz unabhängig sind. Sofern diese Bedingungen erfüllt werden, d. h. sofern die Größen  $\xi_g$ ,  $\mathfrak{R}_g$ ,  $g_g$ ,  ${}^2\mathfrak{X}_g$  sich überhaupt definieren lassen, müssen sie mit den entsprechenden vollständigen Größen durch die Gleichungen

$$-L = \frac{\partial \xi_g}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{R}_g = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{R}, \quad (36)$$

$$-\mathfrak{F} = \frac{\partial g_g}{\partial t} + \operatorname{div} {}^2\mathfrak{X}_g = \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div} {}^2\mathfrak{X} \quad (36a)$$

verknüpft sein. Es sind dies die Gleichungen, welche die physikalische Äquivalenz beider Größenarten ausdrücken; daraus aber soll keineswegs geschlossen werden, daß die Gleichungen  $\xi_g = \xi$ ,  $\mathfrak{R}_g = \mathfrak{R}$ ,  $g_g = g$ ,  ${}^2\mathfrak{X}_g = {}^2\mathfrak{X}$  einzeln bestehen. In der Tat sind die letzteren Gleichungen

strenggenommen *niemals* erfüllt. Dies läßt sich schon aus dem Umstand ersehen, daß der Vektor  $\mathfrak{R}_g$  *immer* gleich Null bleibt, während  $\mathfrak{R}$  im allgemeinen von Null verschieden ist.

Diese Bemerkung wirft ein neues Licht auf den physikalischen Sinn der Bedingungen, welche für die Existenz der Größe  $\xi_g$  notwendig sind<sup>1)</sup>. Damit nämlich die Gleichung

$$\int L dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int \xi_g dV \quad (37)$$

bestehen kann, muß die resultierende durch die Bewegung der gebundenen Elektronen bedingte Energieausstrahlung *verschwinden*. Das ist aber nur dann möglich, wenn die freien Schwingungen dieser Elektronen *ungedämpft* sind. Im entgegengesetzten Falle kann man die elektromagnetische Energie eines (nicht leitenden) Körpers durch die Größe  $\xi_g$  nur bei rein *statischen* Erscheinungen definieren.

## 2. Die Mittelwerte der quadratischen Größen im Falle harmonischer Schwingungen; Hermitesche Bedingungen für die Suszeptibilitätstensoren.

Wir wollen jetzt den allgemeineren Fall eines *harmonischen Schwingungsvorgangs* betrachten unter der Voraussetzung, daß die elektrische und magnetische Polarisation der entsprechenden Feldstärken proportional sind. Die Abhängigkeit der verschiedenen linearen Größen von der Zeit soll dabei durch den komplexen Faktor  $e^{i\omega t}$  dargestellt werden (wo  $\frac{\omega}{2\pi} = \nu$  die Frequenz der Schwingungen bedeutet). Wie schon in Kap. I angedeutet wurde, muß man den Suszeptibilitäten  $\kappa, \chi$  und den Erregungskoeffizienten  $\varepsilon, \mu$  — oder den entsprechenden Tensoren im Falle anisotroper Körper — im allgemeinen *komplexe Werte beilegen*, um eine eventuelle *Phasenverschiebung* in den Schwingungen der Größen  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  (oder  $\mathfrak{S}, \mathfrak{M}$ ), zu berücksichtigen. Im Falle erzwungener Schwingungen der gebundenen Elektronen äußert sich die für ihre freien Schwingungen charakteristische Dämpfung gerade in einer solchen Phasenverschiebung des elektrischen Moments der aus ihnen gebildeten Moleküle bezüglich der äußeren Kraft (vgl. Kap. I, § 2; siehe auch unten Kap. III, § 4). Wir sehen also, daß bei Anwesenheit von natürlicher Dämpfung die Größen  $\kappa, \chi, \varepsilon, \mu$  — oder allgemeiner die entsprechenden Tensorkomponenten — komplexe Werte annehmen müssen.

Bei der Formulierung der Symmetriebedingungen (6), welchen die Größen  $\varepsilon_{ik}$  und  $\mu_{ik}$  für die Existenz der Energie  $\xi$ , und folglich auch der Energie  $\xi_g$  genügen müssen, haben wir diese Größen als reell voraus-

<sup>1)</sup> Es sei in diesem Zusammenhang bemerkt, daß die Energie  $\xi_g$  *im betrachteten Körper selbst zu lokalisieren ist*, denn sie verschwindet mit  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$ , während die „vollständige“ Energie im allgemeinen auch außerhalb des Körpers verbreitet ist (siehe unten § 7).

gesetzt. Es ist leicht zu zeigen, daß auch bei Fehlen der (natürlichen) Dämpfung die betrachteten Tensorkomponenten komplexe Werte annehmen können, die nur den folgenden sogenannten *Hermiteischen* Bedingungen genügen müssen

$$\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}^*, \quad \mu_{ki} = \mu_{ik}^*, \quad (37a)$$

wo durch  $a^*$  die zu  $a$  komplex-konjugierte Größe bezeichnet wird. Die Gleichungen (37) stellen selbstverständlich gleichzeitig die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der Energie  $\xi_g$  dar und können dementsprechend als die Verallgemeinerung der früheren Symmetriebedingungen (6) angesehen werden<sup>1)</sup>.

Zum Beweis genügt es nur, den allgemeinen Zusammenhang zwischen quadratischen und linearen Größen für den betrachteten Fall, wenn letztere als reelle Anteile komplexer Größen definiert sind, festzustellen.

Es seien also  $a$  und  $b$  zwei Größen von der Form  $a = a_0 e^{i\omega t}$ ,  $b = b_0 e^{i\omega t}$ , wo  $a_0$  und  $b_0$  im allgemeinen auch komplex sind. Ihre reellen Anteile  $Re a = \frac{1}{2}(a + a^*)$  und  $Re b = \frac{1}{2}(b + b^*)$  sollen zwei beliebige lineare Größen, z. B. die Feldstärke und die Polarisierung darstellen; die (reellen) *Amplituden* dieser Größen sind offenbar gleich den Moduln der entsprechenden komplexen Amplituden  $|a_0|$  und  $|b_0|$ .

Wir betrachten nun die quadratische Größe

$$(Ra)(Rb) = \frac{1}{2}(a + a^*) \cdot \frac{1}{2}(b + b^*). \quad (38)$$

Sie läßt sich offenbar als reeller Anteil der folgenden komplexen Größe

$$Q = \frac{1}{2}(a + a^*)b = \frac{1}{2}(ab + a^*b) \quad (38a)$$

oder auch

$$\frac{1}{2}(ab^* + a^*b^*), \quad \frac{1}{2}(ab + ab^*), \quad \frac{1}{2}(a^*b + a^*b^*)$$

auffassen. Da der zeitliche Mittelwert von  $e^{i\omega t}$  und  $e^{i2\omega t}$  verschwindet, reduziert sich der zeitliche Mittelwert von  $Q$  auf  $\frac{1}{2}a^*b$ , und wir bekommen folglich

$$\bar{Q} = \frac{1}{2}Ra^*b = \frac{1}{2}Ra_0^*b_0. \quad (38b)$$

Es sei nun  $a = -\mathfrak{E}$  und  $b = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$ , wo  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{P}$  komplexe Vektoren sind, welche die elektrische Feldstärke und Polarisierung darstellen. Es bedeutet dann  $Q$  die zeitliche Ableitung der (komplexen) elektrischen Energiedichte  $\xi_g^e$ , so daß wir schreiben können

$$R \frac{\partial \xi_g^e}{\partial t} = -R\mathfrak{E} \cdot R \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}.$$

d. h.

$$\frac{\partial \xi_g^e}{\partial t} = -\frac{1}{2}R \left( \mathfrak{E} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \mathfrak{E}^* \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \right).$$

<sup>1)</sup> Im Falle isotroper Körper bedeuten die Bedingungen (43a) nichts anderes als die *Realität* der dielektrischen Konstante und der magnetischen Permeabilität.

Damit die Funktion  $\xi_g^e$  existiere, muß ihr *Mittelwert* durch die komplexen *Amplituden* von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{P}$  sich folgendermaßen ausdrücken:

$$d\bar{\xi}_g^e = -\frac{1}{2} R \mathfrak{E}_0^* \cdot d\mathfrak{P}_0 = -\frac{1}{2} R \sum_{i=1}^3 E_{0i}^* dP_{0i},$$

d. h. es soll die Summe

$$\sum_{i=1}^3 E_{0i}^* dP_{0i} + \sum_{k=1}^3 E_{0k} \cdot dP_{0k}^*$$

und folglich auch die Summe:

$$dU \equiv \sum P_{0i} dE_{0i}^* + \sum P_{0k}^* dE_{0k} \quad (39)$$

ein vollständiges Differential darstellen.

Setzt man nun (für eine gegebene Schwingungsfrequenz)

$$P_{0i} = \sum_{k=1}^3 \varkappa_{ik} E_{0k}$$

ein und behandelt die Größen  $E_{0i}$  und  $E_{0k}^*$  als unabhängige Variable, so wird

$$\frac{\partial}{\partial E_{0k}^*} \left( \frac{\partial U}{\partial E_{0i}} \right) = \frac{\partial P_{0i}^*}{\partial E_{0k}^*} = \varkappa_{ik}^* \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial E_{0i}} \left( \frac{\partial U}{\partial E_{0k}^*} \right) = \frac{\partial P_{0k}}{\partial E_{0i}} = \varkappa_{ki},$$

d. h.  $\varkappa_{ik}^* = \varkappa_{ki}$ . Dieselben *Hermiteischen* Symmetriebedingungen müssen sich für die Komponenten des Erregungstensors  ${}^2\mathfrak{E}$  ergeben.

Für die Größe  $U$  als homogene quadratische Funktion der Argumente  $E_{0i}$  und  $E_{0k}^*$  ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left( \sum P_{0i}^* E_{0i} + \sum_k P_{0k} E_{0k}^* \right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k (\varkappa_{ik}^* E_{0i} E_{0k}^* + \varkappa_{ki} E_{0k}^* E_{0i}) \\ &= \frac{1}{2} \sum \sum \varkappa_{ki} E_{0i} E_{0k}^* + \frac{1}{2} \sum \sum \varkappa_{ki} E_{0k}^* E_{0i} = \sum \sum \varkappa_{ki} E_{0i} E_{0k}^*. \end{aligned}$$

Die rechtsstehende quadratische Form ist reell, denn sie ist, wegen der Bedingung  $\varkappa_{ki}^* = \varkappa_{ik}$ , mit der konjugierten Größe

$$\sum_i \sum_k \varkappa_{ki}^* E_{0k} E_{0i}^* = \sum_i \sum_k \varkappa_{ik} E_{0k} E_{0i}^* = \sum_i \sum_k \varkappa_{ki} E_{0i} E_{0k}^*$$

identisch. Der Mittelwert der Energie  $\xi_g^e$  ergibt sich dabei ebenfalls als eine reelle Größe, die durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}_g^e &= -\frac{1}{4} \sum_k \sum_i \varkappa_{ki} E_{0k}^* P_{0i} = -\frac{1}{4} \sum E_{0i}^* P_{0i} \\ &= -\frac{1}{4} \sum E_{0i} P_{0i}^* \end{aligned} \right\} \quad (39a)$$

dargestellt werden kann.

Ähnliche Resultate ergeben sich für den magnetischen Anteil der Energie  $\xi_g$ .

Bei harmonischen Schwingungsvorgängen muß der Mittelwert der Arbeit  $L (= L_g)$  nach (37) verschwinden, denn die Energie  $\xi_g$ , falls sie

überhaupt existiert, kann nur um seinen konstanten Mittelwert schwingen. Es wird also in diesem Fall auf die Bewegung der gebundenen Elektronen durchschnittlich keine Energie verbraucht. Dieses Resultat gilt bekanntlich für ungedämpfte Schwingungen jeder Art. — In Wirklichkeit aber sind die Schwingungen der gebundenen Elektronen *immer* als gedämpft anzusehen, obwohl diese Dämpfung in manchen Fällen sehr gering ist. Es läßt sich dementsprechend die Energie  $\xi_0$  — außerhalb des Falles *statischer* Erscheinungen — nicht streng definieren. Wir müssen folglich strenggenommen stets, auch bei nicht leitenden Körpern, mit der vollständigen Energie  $\xi$  und anderen damit verknüpften Größen operieren.

### 3. Gedämpfte Schwingungen und Zurückführung der Dämpfung auf eine scheinbare Leitfähigkeit.

Im Falle harmonischer Schwingungen ist es aber gewöhnlich möglich, den Begriff der Energie  $\xi_0$  formal zu retten, und zwar durch Zurückführung der Dämpfungserscheinungen auf *eine fiktive elektrische Leitfähigkeit* des betreffenden Körpers. Diese „effektive“ Leitfähigkeit läßt sich für einen isotropen Körper mit der komplexen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon'$  nach der Formel (55d), Kap. I, bestimmen (es soll dabei in der genannten Formel  $\epsilon$  nicht die wirkliche Dielektrizitätskonstante, sondern deren reellen Teil bedeuten). Die wirkliche elektrische Leitfähigkeit des Körpers, falls es kein absoluter Isolator ist, kann dabei mit der erwähnten fiktiven „Dämpfungsleitfähigkeit“ zu einer einzigen Konstante vereinigt werden. — Es ist aber gewöhnlich einfacher und vorteilhafter, umgekehrt die wirkliche elektrische Leitfähigkeit durch eine imaginäre Dielektrizitätskonstante (oder bei anisotropen Körpern durch einen der *Hermite*schen Bedingung nicht genügenden Tensor) zu ersetzen und den Körper als einen vollkommenen Isolator zu behandeln, der nur gebundene, schwingungsfähige Elektronen enthält, wobei ihre Schwingungen schwach oder stark, je nach dem Material und der Schwingungsfrequenz, gedämpft sind. — Es sei bemerkt, daß komplexe Werte der magnetischen Permeabilität sich auf eine gewöhnliche elektrische Leitfähigkeit nicht zurückführen lassen. Man könnte selbstverständlich den entsprechenden magnetischen Begriff konstruieren und fiktive „magnetische Ströme“ betrachten. Dies würde aber kaum eine Vereinfachung der Theorie bedeuten.

Bei langsamen Schwingungen und besonders bei *zeitlich konstanten Feldern* ist eine Verschmelzung der dynamischen Effekte, welche von den freien und den gebundenen Elektronen herrühren, nicht mehr möglich. Eine Trennung der vollständigen Energie oder des vollständigen Spannungstensors in die den freien und den gebundenen Elektronen gehörigen Anteile ist deshalb in diesem Falle empfehlenswert. Die vollständige Arbeit  $L$  reduziert sich dabei offenbar auf den ersten

Anteil ( $L_f$ ), während der zweite ( $L_g$ ) verschwindet. Wir bekommen also

$$L = \sigma E^2. \quad (40)$$

Dies ist die in der Volumeinheit pro Zeiteinheit entwickelte (*Joulesche*) Wärme.

Es wird folglich nach (30)

$$\int \sigma E^2 dV = -\frac{c}{4\pi} \oint (\mathfrak{E} \times \mathfrak{B})_n dS. \quad (40a)$$

Diese Formel drückt die Tatsache aus, daß die von außen durch die Oberfläche  $S$  eingestrahlte Energie vollständig in Wärme transformiert wird.

In ähnlicher Weise ergibt sich bei Fehlen von Dämpfung für harmonische Schwingungen die Formel

$$\int \sigma \mathfrak{E} \mathfrak{E}^* dV = -\frac{c}{4\pi} \oint (\mathfrak{E}^* \times \mathfrak{B})_n dS, \quad (40b)$$

welche das (doppelte) Zeitmittel der entsprechenden quadratischen Größen bestimmt.

Bei *Anwesenheit von Dämpfung* tritt auf der linken Seite noch die Größe  $2 \int L_g dV$  auf, wobei  $L_g$  nach (21) und (38b) folgendermaßen definiert wird:

$$2\bar{L}_g = R \left( \mathfrak{E}^* \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} - \mathfrak{M}^* \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} \right) = Ri\omega (\mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{P} - \mathfrak{M}^* \cdot \mathfrak{S}). \quad (41)$$

Die zusätzliche Größe  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{2\pi}{3} P^2 + \frac{4\pi}{3} M^2 \right)$  ist hier weggelassen, da ihr Mittelwert verschwindet. Es verschwindet ebenfalls derjenige Anteil von (41), welcher den *Hermiteischen* Anteilen von  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  entspricht (denn damit wird die zeitliche Ableitung einer bestimmten Funktion der linearen Größen ausgedrückt). Es bleibt uns folglich nur den nicht-*Hermiteischen* Anteil der Polarisationen zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck spalten wir die komplexen Suszeptibilitätstensoren  $\varkappa$  und  $\gamma$  in die symmetrischen oder genauer „*Hermiteischen*“ Anteile  $\varkappa'$ ,  $\gamma'$  und die „*Anti-Hermiteischen*“  $\varkappa''$ ,  $\gamma''$  nach den Formeln

$$\left. \begin{aligned} \varkappa'_{ik} &= \frac{1}{2} (\varkappa_{ik} + \varkappa_{ki}^*) = \varkappa'_{ki}, & \varkappa''_{ik} &= \frac{1}{2} (\varkappa_{ik} - \varkappa_{ki}^*) = -\varkappa''_{ki} \\ \gamma'_{ik} &= \frac{1}{2} (\gamma_{ik} + \gamma_{ki}^*) = \gamma'_{ki}, & \gamma''_{ik} &= \frac{1}{2} (\gamma_{ik} - \gamma_{ki}^*) = -\gamma''_{ki} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

und setzen dementsprechend  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}''$  und  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ . Da die Größen  $\mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{P}'$  und  $\mathfrak{M}''^* \cdot \mathfrak{S}$  reell sind, liefern sie keinen Beitrag zu  $\bar{L}_g$ . Die Größen  $\mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{P}''$  und  $\mathfrak{M}''^* \cdot \mathfrak{S}$  sind dagegen rein imaginär. Es gilt in der Tat

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{P}'' &= \sum_i E_i^* P''_i = \sum_i \sum_k \varkappa''_{ik} E_i^* E_k = -\sum_i \sum_k \varkappa''_{ki}^* E_i^* E_k \\ &= -\sum_k \sum_i \varkappa''_{ik}^* E_i E_k^* = -\sum_i E_i P''_i{}^* = -\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P}''^* \end{aligned}$$

und ebenfalls

$$\mathfrak{M}''^* \cdot \mathfrak{S} = -\mathfrak{M}'' \cdot \mathfrak{S}^*.$$

Das Produkt dieser Größen mit dem imaginären Faktor  $i\omega$  stellt folglich eine reelle Größe dar, und zwar gerade den gesuchten Wert von  $2\bar{L}_g$ . Führt man also die Bezeichnungen

$$\sqrt{-1}\omega \varkappa''_{ik} = \sigma_{ik}^e, \quad \sqrt{-1}\omega \gamma''_{ik} = -\sigma_{ik}^m \quad (42a)$$

ein, so wird

$$2\bar{L}_g = \sum_i \sum_k \sigma_{ik}^e E_i^* E_k + \sum_i \sum_k \sigma_{ik}^m H_i H_k^* \quad (43)$$

und folglich

$$\int \sum_i \sum_k [(\delta_{ik} \sigma + \sigma_{ik}^e) E_i^* E_k + \sigma_{ik}^m H_i H_k^*] dV = -\frac{c}{4\pi} \oint (\mathfrak{E}^* \times \mathfrak{H})_n dS. \quad (43a)$$

Das linksstehende Volumintegral ist der doppelte Mittelwert der pro Zeiteinheit in Wärme (und eventuell auch andere Energieformen) umgewandelten elektromagnetischen Energie, welche in das entsprechende Volum von außen zugestrahlt wird. Die Größen  $\sigma_{ik}^e$  und  $\sigma_{ik}^m$  sind die oben erwähnten Komponenten der fiktiven elektrischen und magnetischen Leitfähigkeitstensoren, welche die von den gebundenen Elektronen erfahrenen Reibungskräfte charakterisieren. Was die freien Elektronen anbelangt, so muß man die auf sie ausgeübten Reibungskräfte im allgemeinen auch durch einen Tensor  ${}^2\sigma$  (die wirkliche Leitfähigkeit) charakterisieren, dessen Komponenten  $\sigma_{ik}$  statt der Größen  $\delta_{ik}\sigma$  in (43a) eingesetzt werden sollen.

Wir haben bisher hauptsächlich die Frage nach der Arbeit, Energie und Strahlung diskutiert. Ähnliche Betrachtungen sind aber auf die entsprechenden Impulsgrößen  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{g}$ ,  ${}^2\mathfrak{X}$  anwendbar. Es besteht ein Unterschied zwischen diesen Größen und den Energiegrößen  $L$ ,  $\xi$ ,  $\mathfrak{R}$  nur insofern, als  $\mathfrak{g}$  immer eine Zerlegung in die den freien und den gebundenen Elektronen gehörigen Anteile zuläßt, im Gegensatz zu  $\xi$ , während für  ${}^2\mathfrak{X}$  (im Gegensatz zu  $\mathfrak{R}$ ) eine solche Zerlegung nur in gewissen speziellen Fällen möglich ist. Da aber hier (bei der Betrachtung *räumlicher* und nicht zeitlicher Differentialquotienten) die auf die gebundenen Elektronen wirkenden Dämpfungskräfte nicht berücksichtigt zu werden brauchen, kann nichts Neues zu dem früher Gesagten hinzugefügt werden. Es sei nur bemerkt, daß die Symmetriebedingung (6) die wir früher für die Existenz des Tensors  ${}^2\mathfrak{X}_g$  aufgestellt hatten, ebenso wie im Falle der Energie durch die allgemeinere Hermitesche Bedingung (37a) ersetzt werden kann. Das Zeitmittel der auf die gebundenen Elektronen wirkenden Kraft drückt sich dabei (beiharmonischen Schwingungsvorgängen) nach (23) und (38b) durch die folgende einfache Formel

$$\int \bar{\mathfrak{F}}_g dV = \frac{1}{4} \oint n (\mathfrak{P}^* \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{M}^* \cdot \mathfrak{S}) dS \quad (44)$$

aus, in welcher die partiellen Polarisierungen explizite nicht auftreten [vgl. die Formeln (21) und (32a)]. Für die freien Elektronen bekommen wir dementsprechend nach (10b)

$$\int \overline{\mathfrak{F}}_f dV = \frac{1}{8\pi} \oint \left[ -n \left( \frac{\mathfrak{D}^* \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{B}^* \cdot \mathfrak{H}}{2} \right) + \mathfrak{E} D_n^* + \mathfrak{H} \cdot B_n^* \right] dS \quad (44a)$$

(freie Oberflächenladungen und Ströme sind dabei auszuschließen), wobei andererseits im Falle einer skalaren Leitfähigkeit die Beziehung

$$\overline{\mathfrak{F}}_f = \frac{\sigma}{2c} \mathfrak{E}^* \times \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \overline{\mathfrak{g}}_f \quad (44b)$$

gilt [vgl. (11)]. — Wenn die Hermiteschen Bedingungen nicht erfüllt sind, verlieren die Gleichungen (44) und (44a) jeden Sinn, denn ihre rechten Seiten nehmen komplexe Werte an, und wir können in diesem Falle nur die Summe  $\overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}}_f + \overline{\mathfrak{F}}_g$  bestimmen.

## § 6. Vierdimensionale Form des Energiespannungstensors.

### 1. Oberflächeneffekte und die aus der Invarianzforderung folgenden Zusatzglieder.

Bei Weglassung der Lorentzschen Korrekturen und der Oberflächeneffekte kann man die Größen  $\xi, \mathfrak{R}, \mathfrak{g}, {}^2\mathfrak{F}$  zu einem vierdimensionalen symmetrischen Tensor  ${}^2\Theta^0$  vereinigen, und zwar genau in derselben Weise, wie dies in Bd. I ausgeführt worden ist (vgl. Bd. I, S. 255). Wie aber schon manchmal angedeutet wurde, sind die von den gebundenen Elektronen herrührenden dynamischen Oberflächeneffekte von den entsprechenden Volumeffekten prinzipiell untrennbar. Bei der Aufstellung des vierdimensionalen *Energiespannungstensors*  ${}^2\Theta$ , der die vier „vollständigen“ Größen  $\xi, \mathfrak{R}, \mathfrak{g}, {}^2\mathfrak{F}$  als zeitliche, raumzeitliche und räumliche Projektionen enthalten soll, müssen wir deshalb zunächst die erwähnten Oberflächeneffekte untersuchen,

Diese Effekte reduzieren sich bekanntlich, bei dreidimensionaler Rechnung, auf die zusätzliche Arbeit

$$\int L' dV = c \oint (\mathfrak{M} \times n) \cdot \mathfrak{E} dS$$

und die zusätzliche Kraft

$$\int \overline{\mathfrak{F}}' dV = \oint [P_n \mathfrak{E} + (\mathfrak{M} \times n) \times \mathfrak{H}] dS.$$

Es gilt folglich

$$L' = c \operatorname{div} (\mathfrak{E} \times \mathfrak{M}) \quad (45)$$

und

$$\overline{\mathfrak{F}}' = (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \operatorname{div} P - (\mathfrak{H} \nabla) \mathfrak{M} - \mathfrak{M} \operatorname{div} \mathfrak{P} + \nabla (\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H}) \quad (45a)$$

[vgl. die Formel (28a)].

Um die vollständige Arbeit  $L$  und Kraft oder Impuls  $\overline{\mathfrak{F}}$  pro Volumen und Zeiteinheit zu finden, muß man die obigen Größen zu den Größen

$$L^0 = c \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{j}, \quad \overline{\mathfrak{F}}^0 = \rho \mathfrak{E} + \mathfrak{j} \times \mathfrak{H} \quad (46)$$

addieren ( $\rho = \rho_f + \rho_g$ ,  $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_f + \mathfrak{j}_g$ ).

Setzt man  $ict = x_4$  und  $\frac{i}{c}L^0 = F_4^0$ , so wird nach Bd. I, S. 254 und 255:

$$F_\alpha^0 = \sum_1^4 \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}^0}{\partial x_\beta} \quad (46a)$$

wo der Tensor  ${}^2\Theta^0$  durch die auf S. 255 angeführten Formeln definiert ist (wir müssen uns nur bei den dort auftretenden Größen  $\xi, \mathfrak{R}, \mathfrak{g}, {}^2\mathfrak{Z}$  den Index  $^0$  hinzugefügt denken). Wir versuchen dementsprechend die vier Größen  $F'_1, F'_2, F'_3, \frac{i}{c}L' = F'_4$  in der Form

$$F'_\alpha = \sum_1^4 \frac{\partial \Theta'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \quad (47)$$

darzustellen.

Im Falle *statischer* Erscheinungen, die von der Zeit ( $x_4$ ) unabhängig sind, läßt sich die Formel (47) tatsächlich befriedigen, und zwar durch den Ansatz

$$\Theta'_{\alpha\beta} = - \sum_{\gamma=1}^4 H_{\alpha\gamma} P_{\gamma\beta} = \sum H_{\alpha\gamma} P_{\beta\gamma}, \quad (47a)$$

wo  $H_{\alpha\gamma}$  und  $P_{\beta\gamma}$  die nach den Formeln (22a) und (24a) des Kap. I definierten Komponenten des Feldtensors und des Polarisationsensors bedeuten. Es wird z. B. bei  $\alpha = 4$

$$\Theta'_{41} = -H_{42}P_{21} - H_{43}P_{31} = i(E_2M_3 - E_3M_2) = i(\mathfrak{E} \times \mathfrak{M})_1. \quad (47b)$$

und ebenso  $\Theta'_{42} = i(\mathfrak{E} \times \mathfrak{M})_2$ ,  $\Theta'_{43} = i(\mathfrak{E} \times \mathfrak{M})_3$ , woraus folgt nach (47)

$$F'_4 = i \operatorname{div}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{M}), \text{ d. h. } L = c \operatorname{div}(\mathfrak{E} \times \mathfrak{M}).$$

Man hat ferner bei  $\alpha = 1$

$$\left. \begin{aligned} \Theta'_{11} &= H_{12}P_{12} + H_{13}P_{13} + H_{14}P_{14} = H_3M_3 + H_2M_2 + E_1P_1 \\ \Theta'_{12} &= H_{13}P_{23} + H_{14}P_{24} = -H_2M_1 + E_1P_2 \\ \Theta'_{13} &= H_{12}P_{32} + H_{14}P_{34} = -H_3M_1 + E_1P_3 \end{aligned} \right\} \quad (47c)$$

und folglich

$$F'_1 = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \Theta'_{1\beta}}{\partial x_\beta} = \sum_1^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P_\beta E_1) - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (H_\beta M_1) + \frac{\partial}{\partial x_1} (H_\beta M_\beta) \right\}.$$

Das ist aber nichts anderes als die erste Komponente des Vektors  $\mathfrak{F}'$ , denn es wird nach (45a) bei  $\alpha = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} F'_\alpha &= \sum_{\beta=1}^3 \left\{ P_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} E_\alpha + E_\alpha \frac{\partial P_\beta}{\partial x_\beta} - H_\beta \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\beta} - M_\alpha \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (M_\beta H_\beta) \right\} \\ &= \sum_{\beta=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P_\beta E_\alpha - H_\beta M_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (M_\beta H_\beta) \right\}. \end{aligned}$$

Aus der Tatsache, daß die Gleichungen (47) und (47a) bei statischen Erscheinungen richtig sind, folgt sofort wegen ihrer Symmetrie hinsichtlich aller vier Indizes 1, 2, 3, 4 (d. h. wegen ihrer Invarianz gegen Lorentztransformationen), daß sie allgemein für beliebige, von der Zeit abhängige Erscheinungen gültig bleiben müssen.

Wir sehen also, daß unsere Ausgangsformeln (45) und (45a) *unvollständig* sind, denn es fehlen bei ihnen auf der rechten Seite die zeitlichen Ableitungen des „Skalars“

$$-\Theta'_{44} = -(H_{41} P_{41} + H_{42} P_{42} + H_{43} P_{43}) = -\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P} \quad (47d)$$

bzw. des dreidimensionalen Vektors mit den Komponenten

$$\frac{1}{i c} \Theta'_{14}, \quad \frac{1}{i c} \Theta'_{24}, \quad \frac{1}{i c} \Theta'_{34},$$

d. h.

$$\frac{1}{i c} (\Theta'_{\alpha 4}) = \frac{1}{c} (\mathfrak{S} \times \mathfrak{P})_{\alpha}. \quad (47e)$$

Wir müssen folglich, wie es scheint, die Größen  $L'$  und  $\mathfrak{F}'$  durch die Formeln

$$L' = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P}) + c \operatorname{div} \mathfrak{E} \times \mathfrak{M}, \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}' &= \frac{\partial}{c \partial t} (\mathfrak{S} \times \mathfrak{P}) + (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{P} - (\mathfrak{S} \nabla) \mathfrak{M} \\ &\quad - \mathfrak{M} \operatorname{div} \mathfrak{S} + \nabla (\mathfrak{S} \cdot \mathfrak{M}) \end{aligned} \right\} \quad (48a)$$

definieren, die als zeitliche und räumliche Projektion der vierdimensionalen Gleichung (47a) anzusehen sind.

Durch Addition von (46a) und (47) bekommt man die vollständige Viererkräft in der Form

$$F_{\alpha} = \frac{\partial \Theta_{\alpha \beta}}{\partial x_{\beta}} \quad (49)$$

(die Summationszeichen in bezug auf gleiche Indexpaare, welche alle vier Werte 1, 2, 3, 4 durchlaufen sollen, lassen wir im folgenden weg), mit

$$\Theta_{\alpha \beta} = \Theta_{\alpha \beta}^0 + \Theta'_{\alpha \beta}, \quad (49a)$$

d. h. nach (47a) und nach der Formel (11) auf S. 255, Bd. I:

$$\Theta_{\alpha \beta} = \delta_{\alpha \beta} \frac{H^2 - E^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} H_{\alpha \gamma} (H_{\gamma \beta} - 4\pi P_{\gamma \beta}),$$

oder nach der Definition des Erregungstensors  $B_{\alpha \beta}$  [siehe Formel (25) des Kap. I]:

$$\Theta_{\alpha \beta} = \delta_{\alpha \beta} \frac{H^2 - E^2}{8\pi} + \frac{H_{\alpha \gamma} B_{\gamma \beta}}{4\pi}. \quad (49b)$$

Führt man die räumliche, raumzeitliche und zeitliche Projektion des Tensors  $\Theta_{\alpha \beta}$  nach dem Schema

$${}^2\Theta = \begin{pmatrix} -{}^2\mathfrak{I}, & -icg \\ \frac{1}{ic} \mathfrak{R}, & \xi \end{pmatrix} \quad (50)$$

ein (vgl. das entsprechende Schema auf S. 255, Bd. I), so ergeben sich für die Größen  $\xi$ ,  $\mathfrak{R}$ ,  $g$ ,  ${}^2\mathfrak{I}$  die folgenden Formeln:

$$\xi = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P} = \frac{H^2 - E^2}{8\pi} + \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}}{4\pi}, \quad (50a)$$

$$\mathfrak{R} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{B}, \quad (50b)$$

$$g = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{D} \times \mathfrak{H} \quad (50c)$$

und

$$-\mathcal{O}_n = \mathfrak{I}_n = \frac{1}{4\pi} \left[ n \left( \frac{H^2 + E^2}{2} - 4\pi \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{S} \right) - H_n \mathfrak{B} - D_n \mathfrak{E} \right] \quad (50d)$$

oder

$$-\mathfrak{I}_n = \frac{1}{4\pi} \left[ n \left( \frac{H^2 - E^2}{2} - \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{B} \right) + H_n \mathfrak{B} + D_n \mathfrak{E} \right]. \quad (50e)$$

Es erhalten folglich  $\mathfrak{R}$  und  ${}^2\mathfrak{I}$  ihren früheren Wert (35) und (34a), während bei  $\xi$  und  $g$  zusätzliche Glieder auftreten, welche ihre ursprüngliche Symmetrie hinsichtlich der elektrischen und magnetischen Größen zerstören, und zwar in einer zu  $\mathfrak{R}$  und  ${}^2\mathfrak{I}$  entgegengesetzten „komplementären“ Weise.

Das Auftreten der Größe  $\mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{E}$  statt  $-\mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{P}$  im Energiedifferential  $d\xi_v$  kann man sich folgendermaßen erklären. — Ein (elementarer) Dipol mit dem *festen* elektrischen Moment  $\mathfrak{P}$  hat in einem äußeren Felde  $\mathfrak{E}$  die potentielle Energie  $-\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P}$ . Das Integral  $-\int \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{P}$  ist im allgemeinen von  $-\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P}$  verschieden, und die Differenz

$$-\int \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{P} - (-\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P}) = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P} - \int \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{P} = \int \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{E}$$

stellt offenbar die *innere* elektrische Energie des Dipols, d. h. die Arbeit, welche gegen die *inneren* „quasielastischen“ Kräfte bei Zunahme des Moments von 0 bis  $\mathfrak{P}$  geleistet werden muß, dar. Im einfachsten Falle der Proportionalität zwischen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{E}$  ist diese innere quasielastische Energie gleich  $+\frac{1}{2} \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E}$ , während  $-\int \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{P} = -\frac{1}{2} \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E}$  ihre Summe mit der äußeren potentiellen Energie darstellt (vgl. Bd. I, S. 120). — Im Falle der magnetischen Polarisation hat man statt der quasielastischen die innere *kinetische* Energie  $\int \mathfrak{M} \cdot d\mathfrak{H}$ , aus welcher sich durch Subtraktion von  $+\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{M}$  die der Größe  $-\int \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{P}$  entsprechende „vollständige“ magnetische Energie ergibt. Diese Beziehung zwischen den Größen beider Art werden wir im nächsten Paragraphen noch von einem anderen Standpunkte aus betrachten.

## 2. Aufspaltung des vierdimensionalen Energiespannungstensors in die den gebundenen und den freien Elektronen gehörigen Anteile.

Die physikalische Bedeutung der sich aus der Invarianzforderung der Relativitätstheorie ergebenden Zusatzglieder wird uns klarer sein,

wenn wir die nach den Formeln (17) und (21) bestimmte Arbeit  $L_g$  und Kraft  $\mathfrak{F}_g$  in vierdimensioneller Schreibweise darzustellen suchen. Wir müssen dabei die Komponenten von  $\mathfrak{F}_g, F_1^g, F_2^g, F_3^g$  und die Größe  $\frac{i}{c} L_g = F_4^g$  als die vier Komponenten des vierdimensionalen Impulsarbeitsvektor  ${}^2\mathfrak{F}^g$  auffassen, welcher die auf die (neutralen) Moleküle pro Volum- und Zeiteinheit ausgeübte Wirkung charakterisiert. Wir haben schon bei der Ableitung der Formel (23) gesehen, daß die Komponenten des Vektors  $(\mathfrak{P}\nabla)\mathfrak{E} + \mathfrak{P} \times \text{rot } \mathfrak{E}$  gleich  $\sum_{i=1}^3 P_i \frac{\partial}{\partial x_k} E_i$  sind ( $k = 1, 2, 3$ ). Es wird folglich nach (21)

$$F_k^g = \sum_{i=1}^3 P_i \frac{\partial}{\partial x_k} E_i + \sum_{i=1}^3 M_i \frac{\partial}{\partial x_k} H_i + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{P} \times \mathfrak{H})_k,$$

oder

$$F_k^g = \frac{1}{2} P_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_k} H_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{P} \times \mathfrak{H})_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

wobei nach den Indizes  $\alpha$  und  $\beta$  von 1 bis 4 zu summieren ist. Ebenso bekommen wir nach (17)

$$\frac{iL_g}{c} = F_4^g = \frac{1}{2} P_{\alpha\beta} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_4} + \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P}).$$

Vom Standpunkte der Relativitätstheorie können diese Ausdrücke *nicht* richtig sein, da sie dem fundamentalen Invarianzprinzip wegen des Auftretens der Zusatzglieder  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{P} \times \mathfrak{H})_k$  und  $\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P})$  nicht genügen. Man kann sie mit diesem Prinzip am einfachsten in Einklang bringen, wenn man diese Zusatzglieder wegläßt, d. h. wenn man

$$F_\alpha^g = \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \quad (51)$$

setzt und dementsprechend in den Gleichungen

$$L = - \frac{\partial \xi}{\partial t} - \text{div } \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{F} = - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t} - \text{div } {}^2\mathfrak{Z}$$

für die vollständige Arbeit und den Impuls (pro Volum- und Zeiteinheit) die ursprünglichen Größen  $\xi$  und  $\mathfrak{g}$  durch die Zusatzglieder  $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{P}$  bzw.  $\frac{1}{c} \mathfrak{P} \times \mathfrak{H}$  erweitert; dabei ergeben sich gerade die oben aufgestellten Formeln (50a) und (50c).

Infolge der Feldgleichungen

$$\frac{\partial H_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial H_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0$$

läßt sich (51) folgendermaßen umschreiben

$$F_\alpha^g = \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} \left( \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial H_{\beta\alpha}}{\partial x_\gamma} \right) = \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2} P_{\gamma\beta} \frac{\partial H_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} = P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta}.$$

Es folgt daraus durch Subtraktion aus (49)

$$F_{\alpha}^i = F_{\alpha} - F_{\alpha}^q = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \mathcal{G}_{\alpha\beta}^0 + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (H_{\alpha\gamma} P_{\beta\gamma}) - P_{\beta\gamma} \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\beta}},$$

d. h.

$$F_{\alpha}^i = \frac{\partial \mathcal{G}_{\alpha\beta}^0}{\partial x_{\beta}} + H_{\alpha\gamma} \frac{\partial P_{\beta\gamma}}{\partial x_{\beta}}. \quad (51a)$$

Diese Formel für die auf die freien Elektronen wirkende Viererkraft ergibt sich sofort aus dem Ausdruck

$$F_{\alpha}^i = H_{\alpha\beta} j_{\beta}^i,$$

wenn man hier  $j_{\beta}^i = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x_{\gamma}}$  einsetzt [vgl. § 4 Kap. I].

Die durch die Relativitätstheorie erforderte Modifikation der Viererkraft, sofern es die dreidimensionale Kraft  $\mathfrak{F}_g$  angeht, reduziert sich, wie leicht zu sehen ist, auf die Ersetzung unseres ursprünglichen Ausdrucks  $(\mathfrak{p}\mathcal{V})\mathcal{E}$  für die auf einen elektrischen Dipol wirkende Kraft durch den Ausdruck  $\mathcal{V}(\mathfrak{p} \cdot \mathcal{E}) = (\mathfrak{p}\mathcal{V})\mathcal{E} + \mathfrak{p} \times \text{rot } \mathcal{E}$  (das Moment  $\mathfrak{p}$  des Dipols ist dabei als fest zu denken). Es kann zunächst scheinen, daß irgendwelche Änderung des früheren Ausdrucks aus rein physikalischen Gründen ausgeschlossen sei. In der Tat: definiert man die auf einen elementaren Dipol wirkende Kraft  $\mathfrak{f}$  als die geometrische Summe derjenigen Kräfte  $+e\mathcal{E}_2$  und  $-e\mathcal{E}_1$ , welche auf seine Enden wirken, so ergibt sich  $\mathfrak{f} = e(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = e(\mathcal{V}\mathcal{E}) = (\mathfrak{p}\mathcal{V})\mathcal{E}$ . Es ist aber zu beachten, daß diese Definition oder vielmehr diese Formel auf der *impliziten* Annahme beruht, daß die beiden Enden des Dipols *zu derselben Zeit* betrachtet werden sollen. Diese Annahme hat vom Standpunkte der Relativitätstheorie keinen physikalischen Sinn. Läßt man sie fallen, so ist das Erscheinen eines Zusatzgliedes nicht mehr verwunderlich. Man könnte nun für dieses Zusatzglied die Gestalt  $e \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \Delta t$  vermuten, wo  $\Delta t$  ein der Dipollänge  $l$  proportionales Zeitintervall bedeutet, d. h. die Gestalt  $c_1 \mathfrak{p} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$  ( $c_1 =$  unbestimmter Proportionalitätskoeffizient) und nicht  $\mathfrak{p} \times \text{rot } \mathcal{E}$ . Die Beziehungen  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathfrak{H}$  und  $\text{rot } \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$  in Verknüpfung mit der engen Relation zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Moment eines Dipols scheinen nun die folgende Vermutung zu stützen: in dem vollständigen Ausdruck für die auf ein Teilchen mit den Momenten  $\mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{m}$  wirkende Kraft

$$\mathcal{V}(\mathfrak{p} \cdot \mathcal{E} + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{H}) = (\mathfrak{p}\mathcal{V})\mathcal{E} + \mathfrak{p} \times \text{rot } \mathcal{E} + (\mathfrak{m}\mathcal{V})\mathfrak{H} + \mathfrak{m} \times \text{rot } \mathfrak{H}$$

ist

$$\mathfrak{m} \times \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \mathfrak{m} \times \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

als das elektrische und

$$\mathfrak{p} \times \text{rot } \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \mathfrak{p} \times \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

als das magnetische Zusatzglied zu den statischen Ausdrücken  $(pV) \mathfrak{E}$  bzw.  $(mV) \mathfrak{H}$  anzusehen.

Es sei bemerkt, daß der Ansatz (51) vollkommen mit der im letzten Paragraphen des Bd. I entwickelten relativistischen Theorie der Bewegung eines „rotierenden“ Elektrons übereinstimmt. Wir haben nämlich dort die auf ein solches Elektron infolge seines elektromagnetischen Moments  $(\mu_{\alpha\beta})$  wirkende Viererkraft auf eine Energiefunktion  $U = -\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$  zurückgeführt [siehe Formel (55a) auf S.356], d. h. diese Kraft durch die Formel

$$F_{\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} U = +\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\mu_{\beta\gamma} H_{\beta\gamma}) \quad (52)$$

bestimmt, wobei die Differentiation nur auf den Tensor  $H_{\beta\gamma}$  bezogen wurde. Will man aber den Momententensor auch als von den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  abhängig betrachten, so muß man offenbar die obige Formel durch (51) ersetzen. Wir haben ferner gezeigt, daß das auf das rotierende Elektron ausgeübte Drehmoment sich durch den Sechservektor  $M_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - \mu_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma}$  darstellen läßt. Dementsprechend bekommen wir für den auf die Volum- und Zeiteinheit bezogenen Drehmomententensor  ${}^2\mathfrak{M}^{\sigma}$ , der die auf die Moleküle infolge der Existenz ihrer elektrischen und magnetischen Momente ausgeübten Drehkräfte charakterisiert, den Ausdruck

$$M_{\alpha\beta}^{\sigma} = P_{\alpha\gamma} H_{\beta\gamma} - P_{\beta\gamma} H_{\alpha\gamma}.$$

Da die freien, *als momentlos gedachten* Elektronen keine Drehkraft erleiden können, ist durch diese Formel auch die *vollständige* Drehwirkung  $M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^{\sigma}$  bestimmt. Der räumliche Anteil des Sechservektors (51a), d. h. das eigentliche dreidimensionale Drehmoment drückt sich offenbar durch die Formel (24a) aus. Es sei bemerkt, daß der Tensor  $M_{\alpha\beta}$  den (doppelten) antisymmetrischen Anteil des Energiespannungstensors (49b) bildet. Es gilt in der Tat wegen

$$\begin{aligned} B_{\gamma\beta} &= H_{\gamma\beta} - 4\pi P_{\gamma\beta} \\ M_{\alpha\beta} &= \Theta_{\alpha\beta} - \Theta_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (53)$$

Damit es möglich wäre, den Tensor  $\Theta_{\alpha\beta}$  in zwei, den gebundenen und den freien Elektronen — oder genauer den elektromagnetischen Momenten und den Ladungen der Ionen — zugehörnde Anteile zu spalten, wäre es nach (51) notwendig und hinreichend, daß die Summe  $-\frac{1}{2} P_{\beta\gamma} dH_{\beta\gamma}$ , welche als die bei einer unendlich kleinen Änderung der Feldstärken geleistete elementare Arbeit  $dL_{\sigma}$  definiert werden kann, ein vollständiges Differential, d. h. das Differential einer bestimmten Funktion des Tensors  $H_{\beta\gamma}$  darstellt. Bezeichnet man diese Funktion mit  $\Theta^{\sigma}$ , so muß folglich gelten:

$$-dL_{\sigma} = \frac{1}{2} P_{\beta\gamma} dH_{\beta\gamma} = \sum_{i=1}^3 (P_i dE_i + M_i dH_k) = d\Theta^{\sigma}, \quad (54)$$

d. h.

$$\frac{\partial P_{\beta\gamma}}{\partial H_{\sigma\tau}} = \frac{\partial P_{\sigma\tau}}{\partial H_{\beta\gamma}} \quad (54a)$$

oder in dreidimensionaler Schreibweise

$$\frac{\partial P_i}{\partial E_k} = \frac{\partial P_k}{\partial E_i}, \quad \frac{\partial M_i}{\partial H_k} = \frac{\partial M_k}{\partial H_i}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial H_k} = \frac{\partial M_k}{\partial E_i}. \quad (54b)$$

Die beiden ersten Gruppen dieser Gleichungen sind uns schon bekannt. Die dritte Gruppe ist dann zu berücksichtigen, wenn die elektrische Polarisation auch von der magnetischen Feldstärke und *vice versa* abhängt, wie dies z. B. bei bewegten Körpern der Fall ist. Nimmt man an, daß die Größen  $P_{\beta\gamma}$  sich linear durch  $H_{\sigma\tau}$  nach den Formeln

$$P_{\beta\gamma} = \kappa_{\beta\gamma; \sigma\tau} H_{\sigma\tau} \quad (55)$$

ausdrücken, so ergeben sich aus (52a) die folgenden Symmetrieeigenschaften des „Suszeptibilitätstensors“  $\kappa$ :

$$\kappa_{\beta\gamma; \sigma\tau} = \kappa_{\sigma\tau; \beta\gamma}. \quad (55a)$$

Sind diese Bedingungen für einen ruhenden Körper erfüllt, so müssen sie wegen ihrer Invarianz gegen die Lorentztransformation auch bei geradlinig gleichförmiger Bewegung erfüllt bleiben. Es ist leicht zu sehen, daß im Falle harmonischer Schwingungsvorgänge diese Symmetriebedingungen durch die etwas allgemeineren Hermiteschen Bedingungen

$$\kappa_{\beta\gamma; \sigma\tau} = \kappa_{\sigma\tau; \beta\gamma}^* \quad (55b)$$

ersetzt werden können.

Es folgt aus (54) und (55)

$$\Theta^g = \frac{1}{4} P_{\beta\gamma} H_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H}) \quad (56)$$

und

$$F_\alpha^g = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Theta^g = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \Theta_{\alpha\beta}^g \quad (56a)$$

mit

$$\Theta_{\alpha\beta}^g = \delta_{\alpha\beta} \cdot \Theta^g \quad (56b)$$

[vgl. (23a), § 3].  $\Theta^g$  ist folglich mit der Energie  $\xi_g$  identisch. Für den den freien Elektronen, d. h. der Ionenladungen zugehörigen Energiespannungstensor  $\Theta_{\alpha\beta}^f = \Theta_{\alpha\beta}^g - \Theta_{\alpha\beta}^g$  ergibt sich folglich im betrachteten Falle nach (49b) mit Rücksicht auf die Formeln

$$H^2 - E^2 = \frac{1}{2} H_{\sigma\tau} H_{\sigma\tau}, \quad B_{\sigma\tau} = H_{\sigma\tau} - 4\pi P_{\sigma\tau} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} B_{\sigma\tau} H_{\sigma\tau} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} - \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}$$

$$\Theta_{\alpha\beta}^f = \delta_{\alpha\beta} \frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} - \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}}{8\pi} + \frac{H_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}}{4\pi}, \quad (57)$$

d. h.

$$\left. \begin{aligned} \xi^f &= \frac{\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}}{8\pi}, & \mathfrak{H}^f &= \mathfrak{H}, \\ \mathfrak{g}^f &= \mathfrak{g}, & \mathfrak{D}_n^f &= \frac{1}{4\pi} \left[ n \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B}}{2} - H_n \mathfrak{B} - D_n \mathfrak{E} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (57a)$$

Die beiden Anteile von  $\mathcal{O}$  sehen also ganz symmetrisch in bezug auf die elektrischen und magnetischen Größen aus. Bei ihrer Addition wird aber diese Symmetrie teilweise zerstört infolge der entgegengesetzten Vorzeichen in den Beziehungen  $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{H} = \mathfrak{H} - 4\pi \mathfrak{M}$ .

### 3. Relativistische Betrachtung der Lorentzschen Korrekturen.

Wir haben bisher den Unterschied zwischen den totalen und den effektiven Feldstärken außer acht gelassen. Bei Berücksichtigung dieses Unterschieds auf Grund der Relativitätstheorie stößt man ebenfalls auf einen Widerspruch mit den Resultaten der in § 4 angeführten dreidimensionalen Rechnung bezüglich der Zahlenkoeffizienten  $s^e = \frac{4\pi}{3}$  und  $s^m = \frac{8\pi}{3}$  in den Formeln  $\mathfrak{E}_{\text{eig}}^e = -s^e \mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{H}_{\text{eig}}^e = +s^e \mathfrak{M}$ . Und zwar können diese Formeln mit dem Invarianzprinzip der Relativitätstheorie nur dann verträglich sein, wenn diese Koeffizienten *denselben Wert s haben*. Sie lassen sich dabei zu *einer* vierdimensionalen Beziehung

$$(H_{\alpha\beta}^{\text{eig}})^0 = s P_{\alpha\beta}, \quad (58)$$

vereinigen, welche, wie leicht einzusehen ist, die einzige durch (invariante) skalare Größen darstellbare *lineare* Beziehung zwischen Sechservektoren bildet. Im allgemeinen Fall asymmetrischer Tensoren könnte man noch auf der rechten Seite von (58) einen Tensor von der Form  $\tau \delta_{\alpha\beta} \cdot \sum_1^4 P_{\gamma\gamma}$  mit einem zweiten, von  $s$  unabhängigen Zahlenkoeffizienten  $\tau$  hinzufügen. In unserem Falle aber sind die Komponenten  $P_{\gamma\gamma}$  identisch gleich Null. Über die Größe des Koeffizienten  $s$  kann man auf Grund des Invarianzprinzips allein selbstverständlich keine Aussage machen. Es wäre aber von vornherein natürlich, für ihn das Mittel der beiden früher gefundenen Werte  $s^e = \frac{4\pi}{3}$  und  $s^m = \frac{8\pi}{3}$  anzunehmen, d. h.

$$s = 2\pi \quad (58a)$$

zu setzen.

Wir haben aber in § 4 auf die Tatsache hingewiesen, daß alle von der obigen (Lorentzschen) verschiedenen Zahlenwerte der Koeffizienten  $s^e$  und  $s^m$  den Feldgleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H}_{\text{eig}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}_{\text{eig}}}{\partial t} = 4\pi \mathfrak{j}_{\text{eig}}, \quad \text{rot } \mathfrak{E}_{\text{eig}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_{\text{eig}}}{\partial t} = 0$$

widersprechen müssen, falls man für die mittlere Stromdichte  $\mathfrak{j}_{\text{eig}}$  den Wert  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$  annimmt und dementsprechend den Gradient von  $\mathfrak{H}_{\text{eig}}$  in irgend einer Richtung nach der Formel (30), d. h. auf Grund des *Biot-*

Savartschen Gesetzes bestimmt. Wegen des grob angenäherten Charakters der Überlegungen, die zu der Formel (30) und folgenden geführt haben und die ohne genaue Kenntnis des Aufbaus und der Mechanik der einzelnen Atome und Moleküle sich kaum verfeinern und präzisieren lassen, wollen wir auf diese Frage hier nicht näher eingehen. Es sei nur bemerkt, daß man bei einer genauen Rechnung vielleicht den bei Betrachtung der Arbeit  $L'$  entdeckten, dem Zusatzgliede  $-\frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H})$  entsprechenden Oberflächeneffekt auch berücksichtigen muß.

Sofern der erwähnte Widerspruch beseitigt ist, kann die der Einführung der effektiven Feldstärken entsprechende Änderung der Energie ohne Schwierigkeit bestimmt werden. Wir müssen nämlich in der Formel (54) die totalen Feldstärken  $H_{\alpha\beta}$  durch die effektiven  $H_{\alpha\beta} - s P_{\alpha\beta}$  ersetzen (für die „freien Elektronen“ sind die beiden als identisch anzusehen). Dabei ergibt sich sofort, daß der Energieskalar  $\Theta^0$ , falls er tatsächlich existiert, durch die Größe

$$\Delta \Theta^0 = -\frac{s}{4} P_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} = +\frac{s}{2} (P^2 - M^2) \quad (59)$$

zu vermehren ist.

Es wird also nach (50a)

$$\xi = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{2} s (P^2 - M^2). \quad (59a)$$

Dieselbe Korrektur wie  $\xi$  (nur dividiert durch  $c$ ) erhält auch der Vektor  $\mathfrak{g}$ . Da aber die Formel

$$(H_{\alpha\beta}^{\text{eff}})^0 = H_{\alpha\beta} - s P_{\alpha\beta}$$

nicht differenziert werden darf, können wir daraus keine Schlüsse für die Korrekturen der beiden anderen Größen  $\mathfrak{H}$  und  ${}^2\mathfrak{E}$  ziehen.

## § 7. Elektromagnetische Energie und Thermodynamik.

1. Allgemeine Prinzipien und fundamentale Größen;  
Bedeutung der den gebundenen Elektronen zugehörigen Energie.

Nach der im Bd. I entwickelten allgemeinen Elektronentheorie können *alle* Erscheinungen in materiellen Körpern als elektromagnetische Erscheinungen aufgefaßt werden. Die makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper beschäftigt sich dagegen nur mit solchen Erscheinungen, bei welchen die raumzeitlichen Mittelwerte der Elektrizitätsdichten, Polarisierungen, Feldstärken usw. von Null verschieden sind. Diese im makroskopischen Sinne elektromagnetischen Erscheinungen sind aber mit anderen — *chemischen, thermischen und mechanischen* — eng verknüpft und lassen sich oft nur in Verbindung mit jenen verstehen.

Das einfachste und vielleicht wichtigste Beispiel dieser Verknüpfung ist die schon oben betrachtete *Verwandlung der elektromagnetischen Energie in Wärme*. Dieser Vorgang findet fast immer in leitenden und in nichtleitenden Körpern, bei Stromdurchgang oder bei gedämpften Schwingungen der gebundenen Elektronen statt. Nur in vollkommen isolierenden Körpern, die keine freien Elektronen oder bewegte Ionen enthalten, bei *rein statischen Erscheinungen*, d. h. bei zeitlich konstanten elektrischen und magnetischen Feldern tritt keine Wärmeentwicklung auf Kosten der elektromagnetischen Energie auf. — Es bestehen aber auch in diesem Falle sehr wichtige Beziehungen zwischen elektromagnetischen und thermischen Größen, und zwar solche, welche nach den bekannten *thermodynamischen* Methoden untersucht werden können. Die Beziehungen dieser Art spielen eine wichtige Rolle bei verschiedenen *quasistatischen* Vorgängen, welche in der Thermodynamik als „umkehrbar“ (oder reversibel) bezeichnet werden. Dazu gehören bekanntlich alle genügend langsamen Zustandsänderungen, die als eine Reihe nacheinanderfolgender Gleichgewichtszustände aufgefaßt werden können, in denen *also die Zeit nicht explizite auftritt*.

Um die erwähnten Beziehungen zu formulieren, müssen wir zunächst noch zwei *thermische* Größen einführen, und zwar die (absolute) Temperatur  $T$  und die Entropie  $S$ , die wir auf die Volumeinheit des betrachteten Körpers beziehen werden (das spezifische Volum setzen wir vorläufig als konstant voraus). Die Entropie entspricht offenbar den Polarisierungen und die Temperatur den Feldstärken.

Wir nehmen ferner an, daß die durch den Ausdruck  $d\xi_g = \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{E} + \mathfrak{M} \cdot d\mathfrak{H}$  definierte, den gebundenen Elektronen zugehörige innere Energie  $\xi_g$  existiere, d. h. daß die Bedingungen (52b) *bei gegebener Temperatur* erfüllt sind. Die Konstanz der Temperatur war früher deshalb nicht ausdrücklich vorausgesetzt, weil wir nur mit elektromagnetischen Größen zu tun hatten. Sofern aber die Polarisierungen nicht nur von den Feldstärken, sondern auch von der Temperatur abhängig sind, was tatsächlich der Fall ist, wenn sie wenigstens teilweise durch Orientierung der Moleküle mit natürlichen Dipolmomenten bedingt werden, muß man bei der Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen für die unendlich kleine Arbeit  $dL_g = -d\xi_g$  eine gleichzeitige Änderung der Temperatur von vornherein ausschließen.

Man könnte freilich statt der Größe  $\xi_g$  die vollständige Energiedichte  $\xi$  betrachten. Die letzte Größe ist aber nicht mit dem betreffenden Körper selbst, sondern mit *seinem elektromagnetischen Feld* verbunden und muß deshalb manchmal größtenteils außerhalb des Körpers lokalisiert werden. Die Energie  $\xi_g$  dagegen, falls sie überhaupt existiert, muß durch die elektrische und magnetische Polarisation *an der betreffenden Stelle* bestimmt werden; sie ist folglich, *ebenso wie die Entropie  $S$* , im Körper selbst zu lokalisieren und darf dementsprechend

als eine Eigenschaft dieses Körpers und nicht seines Feldes angesehen werden.

Es sei daran erinnert, daß die unendlich kleine Änderung der *inneren Energie*  $U$  eines homogenen Körpers, welcher bei einem allseitigen Druck  $p$  das Volum  $V$  besitzt, nach den Grundprinzipien der Thermodynamik durch die Gleichung

$$dU = T dS - p dV \quad (60)$$

bestimmt wird. Es bedeutet hier  $T dS$  die dem Körper zugeführte Wärme und  $-p dV$  die durch die äußeren Druckkräfte, welche bei  $p > 0$  das Volumen zu vermindern streben, geleistete Arbeit.

Führt man statt  $U$  die freie Energie des Körpers

$$F = U - TS$$

oder sein thermodynamisches Potential

$$\Phi = F + pV = U - TS + pV$$

ein, so bekommt man statt (60) die Gleichungen:

$$dF = -S dT - p dV \quad (60a)$$

bzw.

$$d\Phi = -S dT + V dp. \quad (60b)$$

Wir setzen nun das (spezifische) Volumen als konstant voraus und ziehen statt der äußeren Druckkräfte effektive *elektrische Kräfte*, die das elektrische Moment der Volumeinheit  $\mathfrak{P}$  zu *vergrößern* suchen, in Betracht. Die Arbeit dieser Kräfte bei einer unendlich kleinen Änderung von  $\mathfrak{P}$  läßt sich bekanntlich durch das innere Produkt  $+ \mathfrak{E}_{\text{eff}} \cdot d\mathfrak{P}$  darstellen [vgl. (18)]. Es entspricht also die Polarisation  $\mathfrak{P}$  dem Volumen  $V$  und die effektive elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}' \equiv \mathfrak{E}_{\text{eff}}$  dem negativen Druck  $-p$  in der Gleichung (60). Diese Gleichung müssen wir folglich in unserem Falle durch

$$dU = T dS + \mathfrak{E}' \cdot d\mathfrak{P} \quad (61)$$

ersetzen. Ebenso bekommen wir statt (60a) und (60b) die Gleichungen

$$dF = -S dT + \mathfrak{E}' \cdot d\mathfrak{P} \quad (61a)$$

und

$$d\Phi = -S dT - \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{E}' \quad (61b)$$

mit

$$F = U - TS \quad \text{und} \quad \Phi = F - \mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{P}. \quad (61c)$$

Bei konstanter Temperatur ( $dT = 0$ ) und  $H = M = 0$  fällt  $dF$  mit der nach (18) definierten Größe  $-d\xi_g$  zusammen, während  $d\Phi$  mit der nach (52) definierten Größe  $-d\xi_g$  übereinstimmt. Die Tatsache, daß in beiden Fällen negative Vorzeichen auftreten, erklärt sich dadurch, daß wir die Arbeit der elektrischen Kräfte nicht der *Zunahme* der elektrischen Energie gleichgesetzt hatten, wie dies in der Thermodynamik üblich ist, wenn es sich um äußere Kräfte handelt, sondern ihrer *Ab-*

nahme. Wir haben folglich die elektrische Energie nicht als innere Energie des Körpers selbst, sondern als die äußere Energie der auf ihn wirkenden Kräfte definiert. Die Gleichung (61) drückt den Gedanken aus, daß diese äußere elektrische Energie vermöge der erwähnten Arbeit bei *adiabatischen Vorgängen* in innere Energie des betreffenden Körpers übergeht. Dagegen geht sie bei *isothermischen* Vorgängen nach (61a) in seine *freie Energie* über. Dementsprechend bedeutet die Größe  $\mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{E}'$ , die wir in § 6 als Zunahme der inneren Energie zu interpretieren versuchten, tatsächlich die Abnahme des thermodynamischen Potentials bei konstanter Temperatur. Da die Existenzbedingungen für die Funktionen

$$\int_0^{\mathfrak{P}} \mathfrak{E}' d\mathfrak{P} \quad \text{und} \quad -\int_0^{\mathfrak{E}'} \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{E}'$$

im allgemeinen nur für isothermische Prozesse formuliert werden können, sind diese Funktionen als elektrische Anteile nicht der totalen inneren Körperenergie, sondern der freien Energie oder des thermodynamischen Potentials zu behandeln. Bei nicht isothermischen Prozessen sind die Werte der obigen Integrale, sofern  $\mathfrak{P}$  nicht nur von  $\mathfrak{E}'$ , sondern auch von der Temperatur abhängt, durch die Integrationsgrenzen, d. h. die Endzustände, nicht eindeutig bestimmt.

Auf dieselbe Weise lassen sich die für isothermische Vorgänge bestimmten Integrale  $\int \mathfrak{H}' \cdot d\mathfrak{M}$  und  $-\int \mathfrak{M} \cdot d\mathfrak{H}'$  ( $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'_{\text{eff}}$ ) als die *magnetischen* Anteile der freien Energie bzw. des thermodynamischen Potentials des betreffenden Körpers definieren. Dabei bekommt man für die vollständigen Werte dieser Größe ( $F$  bzw.  $\Phi$ ) und der inneren Energie  $U$  (alle auf die Volumeinheit bezogen) die Gleichungen

$$dU = T dS + \mathfrak{E}' \cdot d\mathfrak{P} + \mathfrak{H}' \cdot d\mathfrak{M}, \quad (62)$$

$$dF = -S dT + \mathfrak{E}' \cdot d\mathfrak{P} + \mathfrak{H}' \cdot d\mathfrak{M}, \quad (62a)$$

$$d\Phi = -S dT - \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{E}' - \mathfrak{M} \cdot d\mathfrak{H}' = -S dT - d\xi_g, \quad (62b)$$

mit

$$F = U - TS \quad \text{und} \quad \Phi = F - \mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{P} - \mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{M}. \quad (62c)$$

In der Gleichung (62b) haben wir die Größe  $\xi_g$  in Einklang mit (52) eingeführt.

Für die Aufstellung der oben erwähnten thermodynamischen Beziehungen sind die Ausdrücke (62a) und (62b) vollkommen äquivalent, da sie sich voneinander durch ein vollständiges Differential unterscheiden. Aus demselben Grunde kann man in diesen Formeln die effektiven Feldstärken durch die totalen oder auch durch die entsprechenden *Erregungen* ersetzen, wobei selbstverständlich unter  $W$ ,  $F$  und  $\Phi$  von den ursprünglichen etwas verschiedene Funktionen desselben Typus zu verstehen sind. Setzt man z. B.

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + s_e \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + s_m \mathfrak{M},$$

so wird nach (62), (62a) und (62b)

$$\begin{aligned} dU' &= T dS + \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{P} + \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{M}, \\ dF' &= -S dT + \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{P} + \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{M}, \\ d\Phi' &= -S dT - \mathfrak{P} d\mathfrak{E} - \mathfrak{M} \cdot d\mathfrak{B} \end{aligned}$$

mit

$$U' = U - \frac{1}{2} s_e P^2 - \frac{1}{2} s_m M^2, \quad F' = F - \frac{1}{2} s_e P^2 - \frac{1}{2} s_m M^2$$

und

$$\Phi' = \Phi + \frac{1}{2} s_e P^2 + \frac{1}{2} s_m M^2.$$

2. Fundamentale thermodynamische Relationen für die elektrischen und magnetischen Polarisationserscheinungen.

Der Einfachheit halber wollen wir uns auf den Fall ruhender isotroper Körper beschränken und die Polarisierungen als skalare Funktionen der entsprechenden Feldstärken oder Erregungen behandeln. Die Frage nach der Gestalt dieser Funktionen lassen wir dabei ganz offen. Die Integrabilitätsbedingungen der Differentialausdrücke

$$-P dE - M dH, \quad E' dP - M dH', \quad E dP + B dM$$

usw. sind dabei (für  $T = \text{konst}$  oder  $S = \text{konst.}$ ) von selbst erfüllt, und es müssen nur die Integrabilitätsbedingungen ihrer Summe mit  $T dS$  oder  $-S dT$  berücksichtigt werden.

Führt man als unabhängige Variable die Größe  $T, E, H$  ein, so lauten diese eigentlich thermodynamischen Bedingungen:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{T,H} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{E,H}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_{T,E} = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E,H}. \quad (63)$$

Sie verknüpfen also den thermischen (kalorischen) Effekt der elektrischen und magnetischen Feldstärken mit den Temperaturkoeffizienten der entsprechenden Polarisierungen.

Die Größe  $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T$  bedeutet die durch  $T$  dividierte Wärmemenge, welche bei einer isothermischen Änderung der elektrischen Feldstärke der Volumeinheit des betrachteten Körpers zugeführt werden muß. In ähnlicher Weise bekommt man eine Reihe anderer Beziehungen derselben Art, z. B.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H'}\right)_{T,E} = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E,H'}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_{T,E} = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E,B}$$

usw. Es gilt dabei, wegen  $dH' = dB + s_m dM$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E,B} &= \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E,H'} + \left(\frac{\partial M}{\partial H'}\right)_{E,T} \left(\frac{\partial H'}{\partial T}\right)_{E,B} \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E,H'} + s_m \left(\frac{\partial M}{\partial H'}\right)_{E,T} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{E,B}, \end{aligned}$$

d. h., wenn wir den Index  $E$  weglassen,

$$\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{H'}}{1 - s_m \left(\frac{\partial M}{\partial H'}\right)_T}.$$

Da die thermoelektrischen und thermomagnetischen Beziehungen ganz analog sind, wollen wir nur die letzteren betrachten und  $P = E = 0$  setzen. Es sei daran erinnert, daß die magnetische Erregung gewöhnlich mit der äußeren Feldstärke (d. h. der Feldstärke des äußeren Feldes, in welchem sich der betreffende Körper befindet) identisch ist (vgl. Kap. I, § 3). — Bezeichnet man die Wärmekapazität (pro Volumeinheit) bei konstanten Werten von  $B$  oder  $M$  mit  $c_B$  bzw.  $c_M$ , so bekommt man nach (62)

$$c_B = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B = c_M - H' \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B,$$

d. h.

$$c_B = c_M - \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( B M + \frac{1}{2} s_m M^2 \right) \right]_B. \quad (63a)$$

Es ergibt sich ferner durch partielle Differentiation von (63) nach  $T$  (wenn man  $H$  durch  $B$  ersetzt)

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial S}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B} \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{c_B}{T} \right)$$

und folglich

$$\frac{\partial c_B}{\partial B} = T \left( \frac{\partial^2 M}{\partial T^2} \right)_B. \quad (63b)$$

Diese Beziehungen sind besonders für *ferromagnetische* Körper, die unter einer bestimmten „kritischen“ (oder *Curie*-) Temperatur durch ihre außerordentlich große Suszeptibilität  $\left(\frac{M}{B}\right)$  für kleine Erregungen ( $B$ ) charakterisiert sind, wichtig. In der Nähe dieses kritischen Punktes fällt aber diese Suszeptibilität sehr rasch ab. — Bei sehr großen Feldstärken (äußeren  $B$  oder totalen  $H$ ) strebt die Magnetisierung  $M$  oberhalb wie unterhalb der kritischen Temperatur zu einem Maximal- oder „Sättigungswert“  $M_{\max}$ , der von der Temperatur ebenso wie von der Feldstärke unabhängig ist.

Aber gerade bei den ferromagnetischen Körpern sind die obigen Beziehungen streng genommen nicht anwendbar. Denn diese Körper unterscheiden sich von den gewöhnlichen (schwach magnetischen) noch durch den Umstand, daß ihre magnetische Polarisation auch bei konstanter Temperatur *keine eindeutige Funktion* von  $B$  oder  $H$  ist, d. h. daß der Ausdruck  $M dH$  kein vollständiges Differential ist.

Es hängt also  $M$  in diesem Falle nicht nur von dem momentanen Wert von  $B$ , sondern gewissermaßen auch von der „Vorgeschichte“ d. h. von der Weise, auf welche der betreffende Wert der äußeren Feld-

stärke erreicht worden ist, ab. Diese Erscheinung heißt die *magnetische Hysteresis*. Sie ist unmittelbar mit der Erscheinung der „*permanenten Magnetisierung*“ verknüpft. Letztere beobachtet man, wenn man einen ferromagnetischen Körper, der ursprünglich keine Magnetisierung besaß, durch ein starkes äußeres Feld magnetisiert und dann das Feld wieder zum Verschwinden bringt. Es ergibt sich die in der Abb. 3 durch die Kurve  $OA O_1$  angedeutete Änderung von  $M$  mit  $B$ .  $OO_1$  stellt die erwähnte permanente Magnetisierung dar. Um diese „*permanente*“ oder besser *remanente* Magnetisierung zu vernichten, muß man ein äußeres Feld von *entgegengesetzter Richtung*

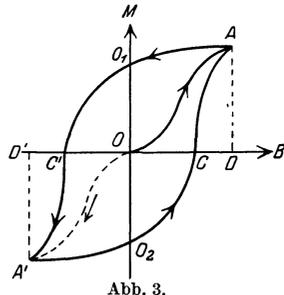


Abb. 3.

einwirken lassen. Seine Stärke ( $OC'$ ) bestimmt die sogenannte „*Koerzitivkraft*“. Falls man jetzt die äußere Feldstärke zum Verschwinden bringt, bleibt der Körper wieder entmagnetisiert. Vergrößert man sie dagegen weiter bis zum ursprünglichen Wert  $OD' = OD$ , so wächst die Magnetisierung nicht nach der zu  $OA$  symmetrisch liegenden (punktierten) Kurve  $OA'$ , sondern nach der Kurve  $C'A'$ . Wenn die maximale Feldstärke groß genug ist (was oben vorausgesetzt wurde), sind die entsprechenden Sättigungswerte der Magnetisierung einander gleich und überhaupt von der Feldstärke unabhängig.

Wenn man die Feldstärke von  $OD'$  wieder bis zu  $OD$  ändert, verläuft die Magnetisierung längs der zu  $AO_1 C'A'$  symmetrischen (in bezug auf den Nullpunkt  $O$ ) Kurve  $AO_2 CA$ . Die durch die beiden Kurven gebildete Schleife heißt die *Hysteresisschleife*. Bei den sogenannten „*magnetisch-weichen*“ Körpern ist sie sehr schmal, so daß  $M$  näherungsweise als eine bestimmte eindeutige Funktion von  $B$  oder  $H$  behandelt werden kann. Im entgegengesetzten Falle „*magnetisch harter*“ Körper läßt sich  $M$  als Funktion von  $B$  und  $T$  überhaupt nicht definieren. Es kann also in diesem Falle von einer magnetischen Energie (oder auch freien „*Energie*“ und „*Potential*“) in dem am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Sinne keine Rede sein. Es bleibt selbstverständlich die Möglichkeit übrig, statt dieser Energie die immer existierende Energie des *magnetischen Feldes* einzuführen. Es wäre dann aber nötig, auch den Begriff der Entropie auf eine ähnliche Weise umzuformen. Wir werden auf diese Frage noch später zurückkommen.

Der Flächeninhalt der Hysteresisschleife, d. h. das Integral  $\oint M dB$  stellt offenbar die Arbeit dar, welche bei dem entsprechenden Kreisprozeß in der Volumeinheit des Körpers durch die elektrischen Induktionskräfte geleistet wird. Diese Arbeit kann man auch in der Gestalt  $-\int B dM$  oder  $\int M dH = -\int H dM$  darstellen und dementsprechend als die Arbeit der „*magnetischen Kräfte*“ (die dabei auf

fiktive magnetische Pole wirken sollen) auffassen. Sie muß selbstverständlich auf Kosten einer äußeren Energiequelle stattfinden, ebenso wie die Arbeit der in einem leitenden Körper auf die freien Elektronen wirkenden Kräfte, falls dieser Körper zum ursprünglichen Zustand wiederkehrt. Und in derselben Weise wie im letzten Fall — obwohl durch einen verschiedenen Mechanismus — muß die äußere Energie in *Wärmeenergie*, die an der betreffenden Stelle des ferromagnetischen Körpers entwickelt wird, übergehen. Dieser Effekt — die sogenannte „*Hysteresiswärme*“ — läßt sich im Falle schwacher harmonisch schwingender magnetischer Felder durch eine Phasenverschiebung der Magnetisierung (bezüglich der Erregung  $B$  oder der Feldstärke  $H$ ) beschreiben und kann dementsprechend in derselben Weise behandelt werden wie die *Dämpfungswärme*, welche durch die (natürliche) Dämpfung der elektrischen Oszillatoren erzeugt wird.

Es muß aber beachtet werden, daß die beiden Effekte nur formal einander (und zugleich der *Jouleschen Wärme*) analog sind, und daß sie von ganz verschiedenen Ursachen herrühren. Dies läßt sich am klarsten aus der Tatsache erkennen, daß die erwähnte Analogie bei starken langsam wechselnden Feldern (quasi-statische Vorgänge) verschwindet. Es gibt nämlich kein elektrisches Analogon zur oben beschriebenen Erscheinung der magnetischen Hysteresis, obwohl Kristalle existieren, die eine permanentelektrische Polarisierung aufweisen („*piezoelektrische*“ Kristalle, siehe § 8). — Man kann folglich bei der Betrachtung der elektrischen Polarisierung die entsprechende Energie (freie Energie, Potential) immer definieren, und es bleibt die zur Gleichung (63b) analoge elektrische Beziehung

$$\frac{\partial \epsilon_E}{\partial E} = T \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \quad (63c)$$

immer gültig.

Neben diesen Beziehungen kann man eine Reihe anderer von derselben Art ableiten, indem man als unabhängige Variable die Größen  $P, M$  (eventuell auch  $S$ ) wählt und von den Differentialausdrücken für die entsprechenden Energie- oder Potentialfunktionen ausgeht. Wir wollen aber auf diese Frage hier nicht näher eingehen.

Wir haben bisher nur von den nichtleitenden Körpern gesprochen. Die angeführten Resultate — sofern sie sich auf die *Polarisationerscheinungen* beziehen — lassen sich aber ohne jegliche Änderung auf den Fall, daß alle oder einige der betrachteten Körper eine endliche Leitfähigkeit besitzen, ausdehnen. Will man aber dabei statt der Größe  $\xi_o$  die entsprechende, den freien Elektronen zugehörige Größe  $\xi_f$  in Betracht ziehen, so stößt man auf die folgende Schwierigkeit.

Im Gegensatz zur Energie  $\xi_o$ , die, falls sie überhaupt existiert, in dem betreffenden Körper lokalisiert werden muß, ist die Energie  $\xi_f$  nicht mit diesem Körper, sondern mit seinem elektromagnetischen Feld

verbunden — denn sie ist im allgemeinen auch außerhalb des Körpers (bei  $P = M = 0$ ) von Null verschieden. Dies erklärt sich, wie schon oben angedeutet wurde, durch den Umstand, daß in leitenden Körpern eine irreversible Wärmeentwicklung stattfindet, und daß die Quelle dieser Wärmeenergie im äußeren elektromagnetischen Felde liegt, aus welchem sie in Form elektromagnetischer Energie durch die Körperoberfläche immer mit einer durch den Vektor  $\mathfrak{R}_f = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{B}$  bestimmten Intensität strömt.

Es scheint deshalb nicht erlaubt zu sein, irgendwelche zu den vorhergehenden ähnliche thermodynamischen Beziehungen für die den freien Elektronen zugehörige Energie  $\xi_f$  aufzustellen.

### 3. Thermodynamische Relationen für die von den freien Elektronen abhängigen Kontakterscheinungen.

Die freien Elektronen und frei beweglichen Ionen können aber bei Berührung zweier leitender Körper zu einer zusätzlichen *Oberflächenenergie* Anlaß geben, und zwar durch Bildung von elektrischen *Doppelschichten* auf der entsprechenden Grenzfläche. *Einfache* Oberflächenschichten dieser Art haben wir in § 2 untersucht. Man kann aber die ihnen zugehörige Energie nicht als Flächenenergie darstellen, d. h. auf der Grenzfläche lokalisieren. Sie bieten auch vom thermodynamischen Standpunkte aus kein Interesse, da ihre Dichte mit der Temperatur nichts zu tun hat und im Gleichgewichtszustand nur von der resultierenden Ladung des Körpers und seiner Gestalt abhängt. Die *Doppelschichten* erzeugen dagegen kein oder ein nur sehr schwaches *äußeres* Feld, so daß die mit ihnen verknüpfte Energie als Flächenenergie aufgefaßt werden kann.

Die erwähnten Doppelschichten lassen sich durch ihr auf die Flächeneinheit bezogenes elektrisches Moment oder den entsprechenden Potentialsprung  $\varphi$ , der bekanntlich gleich dem Produkt dieses Moments mit  $4\pi$  ist, charakterisieren. Dieser Potentialsprung entspricht einer zusätzlichen Arbeit  $dL = \varphi de$ , welche von den elektrostatischen Kräften geleistet wird, wenn die Elektrizitätsmenge  $de$  durch die Schicht in positiver Richtung (d. h. in der Richtung des Potentialgefälles) durchgeht. Wir bezeichnen mit  $e$  die vollständige Elektrizitätsmenge, die durch die Schicht pro Flächeneinheit vom Körper  $a$  zum Körper  $b$  in der erwähnten Richtung hindurchgeflossen ist. Im allgemeinen muß man  $\varphi$  als Funktion von  $e$  und zugleich als Funktion *der Temperatur* behandeln (im Falle zweier Metallkörper, die keine beweglichen Ionen enthalten, hängt  $\varphi$  *nur* von der Temperatur ab). Führt man noch die auf die Flächeneinheit bezogene Entropie  $s$  ein, so bekommt man die folgende Gleichung für die Änderung der freien Energie  $\psi$  (pro Flächeneinheit)

$$d\psi = -s dT - \varphi de \tag{64}$$

[vgl. (60a)]. Es ergibt sich daraus die Beziehung

$$\text{oder} \quad \frac{\partial s}{\partial e} = \frac{\partial \varphi}{\partial T}$$

$$q = T \frac{\partial \varphi}{\partial T}, \quad (64a)$$

wo  $q$  die Wärmemenge bedeutet, welche bei Durchgang der Elektrizitätsmenge  $e = 1$  in der Doppelschicht entwickelt wird (und selbstverständlich von ihr abgeführt werden muß, damit ihre Temperatur konstant bleiben kann). Das ist die sogenannte *Peltierwärme*. Sie entspricht — obwohl nicht vollkommen — der durch (63) bestimmten „latenten Polarisationswärme“. Ein vollkommenes Analogon zur Peltierwärme ergibt sich, wenn man statt  $E$  (oder)  $H$  die Polarisation  $P$  (bzw.  $M$ ) als unabhängige Variable einführt. — Die der Größe  $\psi$  entsprechende gewöhnliche Energie  $w$  läßt sich nach der Formel

$$w = \psi + Ts$$

berechnen oder wenn man hier den aus (64) folgenden Ausdruck  $s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}$  einsetzt,

$$w = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (64b)$$

Es sei bemerkt, daß die dem isothermischen Durchgang der Elektrizitätseinheit entsprechende Abnahme von  $\psi$  gleich  $\varphi$  ist. Die entsprechende Abnahme von  $w$  ist folglich gleich

$$\Delta w = \varphi - T \frac{\partial \varphi}{\partial T}. \quad (64c)$$

Wenn der Stromdurchgang mit einer chemischen Umsetzung verbunden ist (das ist immer dann der Fall, wenn der elektrische Strom durch *Ionen* bedingt wird), kann man  $\Delta w$  als die entsprechende *Reaktionswärme* definieren und nach den üblichen thermodynamischen Methoden direkt bestimmen. Sie ist mit der Peltierwärme nach (64a) durch die Beziehung  $q = \varphi - \Delta w$  verknüpft.

#### 4. Thermodynamik der elektromagnetischen Strahlungserscheinungen.

Wir müssen noch zum Schluß den Weg andeuten, auf welchem die thermodynamische Betrachtungsweise ausgedehnt werden kann auf den Fall der der klassischen Mechanik und Wärmelehre ganz fremden Darstellung der elektromagnetischen Energie als einer nicht mit den materiellen Körpern, sondern mit ihrem Feld verbundenen und in diesem Feld lokalisierbaren Größe.

Zu diesem Zweck ist es offenbar notwendig, die Entropie ebenfalls als eine *Feldgröße* zu betrachten. Man muß ferner dem elektromagneti-

schen Feld auch eine *Temperatur* zuschreiben, die im Falle thermodynamischen Gleichgewichts im betrachteten Raumgebiet (wenn nicht im ganzen Raum) denselben Wert haben soll. Dementsprechend würde es nötig sein, die übliche Wärmeenergie (und überhaupt jede andere Energieform) als elektromagnetische Feldenergie aufzufassen. Mit anderen Worten, es sollte zum betrachteten makroskopischen Feld ein anderes, vom makroskopischen Standpunkte aus nicht beschreibbares Feld hinzugefügt werden, das als Träger dieser Wärmeenergie anzusehen wäre.

Man kann aber dieses recht radikale Programm durch einen Kompromiß mit den üblichen mechanischen Vorstellungen etwas verengen und vereinfachen. Die Möglichkeit eines solchen Kompromisses ergibt sich aus der in Bd. I, S. 209 angeführten Zerlegung der vollständigen elektromagnetischen Energie in zwei Teile  $W^{(0)} + W^{(1)}$  und  $W^{(2)}$ , wobei der erste Teil durch die Lage und die Geschwindigkeit der Elektronen bedingt wird und der zweite durch ihre Beschleunigung. Der erste Teil entspricht der gewöhnlichen mechanischen Energie der betreffenden Körper und kann (näherungsweise) in diesen Körpern lokalisiert werden. Den zweiten Teil muß man aber als eine zusätzliche nichtmechanische Feldenergie behandeln. Das obenerwähnte Programm wird dementsprechend nur auf diese Energie  $W^{(2)}$ , die man als „Strahlungsenergie“ zu bezeichnen pflegt, angewandt, während die Energie  $W^{(0)} + W^{(1)}$  in der üblichen Weise behandelt wird.

Man schreibt also dem Strahlungsfeld, welches sich mit einem System materieller Körper im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und den Energieaustausch zwischen ihnen — wenigstens teilweise — bedingt, dieselbe Temperatur zu wie diesen Körpern selbst und eine mit bestimmter Dichte verteilten Entropie  $S^{(2)}$ . Man zieht ferner die *mechanische Wirkung*, welche von dem Strahlungsfeld auf die materiellen Körper ausgeübt wird, in Betracht. Diese mechanische Wirkung reduziert sich bekanntlich auf einen *Strahlungsdruck*, dessen Betrag durch die Formel

$$T_{nn} = \xi \cos^2 \theta \quad (65)$$

(Bd. I, S. 220) bestimmt wird. Es bedeutet hier  $T_{nn}$  die Normalkomponente des Spannungstensors, welcher einem *elementaren Bestandteil* des Strahlungsfeldes angehört, und zwar einem Lichtbündel (oder Lichtwelle), das mit der Flächennormale den Winkel  $\theta$  bildet. Es sei bemerkt, daß ein in einer bestimmten Richtung einfallendes Lichtbündel nach (65) denselben Druck ausübt wie ein in der entgegengesetzten Richtung emittiertes Lichtbündel derselben Intensität. Man kann sich das betrachtete Strahlungsfeld aus einer Menge solcher einfallender und emittierter Lichtbündel (oder ebenen Wellen) zusammengesetzt denken, die nach den verschiedenen Richtungen gleichförmig verteilt sind und

keine konstanten Phasenbeziehungen zueinander haben. Dann läßt sich der resultierende mittlere Lichtdruck  $p$  auf die Flächeneinheit irgend eines Körpers nach der Formel (65) berechnen, wenn man dort unter  $\xi$  die resultierende mittlere Energiedichte versteht und für  $\cos^2 \theta$  seinen Mittelwert  $\frac{1}{3}$  einsetzt. Es wird folglich

$$p = \frac{1}{3} \xi. \quad (65a)$$

Die tangentiellen Kräfte brauchen dabei nicht berücksichtigt zu werden, da ihr Mittelwert offenbar verschwindet.

Wir sehen also, daß die „Hohlraumstrahlung“, die durch feste materielle Wände in einer Hülle mit dem Volumen  $V$  eingeschlossen ist, sich in ähnlicher Weise wie ein gasförmiger Körper verhält. Es besteht ein Unterschied zwischen ihnen nur in der Hinsicht, daß der von einem Gas ausgeübte Druck nicht *ein*, sondern *zwei* Drittel der mittleren Energiedichte beträgt, wie dies aus der bekannten gaskinetischen Formel  $p = \frac{1}{3} N m \bar{v}^2$  folgt. Es bedeutet hier  $N$  die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit,  $m$  ihre Masse und  $v$  ihre Geschwindigkeit; die kinetische Energie pro Volumeinheit drückt sich dabei nach der klassischen Mechanik durch  $\frac{1}{2} N m \bar{v}^2$  aus.

Will man aber die Analogie zwischen dem Strahlungsfeld und einem materiellen Gas konsequent durchführen, so muß man die Tatsache berücksichtigen, daß die den Lichtstrahlen entsprechenden Teilchen sich mit der Geschwindigkeit  $c$  bewegen (vgl. Bd. I, S. 207 und 217) und daß für diese kritische Geschwindigkeit, ebenso wie für solche Geschwindigkeiten, die ihr nahe kommen, die klassische Mechanik versagt und durch die relativistische Mechanik ersetzt werden muß. Nach der letzteren besitzt aber ein sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegtes Teilchen mit der Ruhmasse  $m_0$  eine kinetische Energie

$$c^2 m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = c^2 (m - m_0)$$

(Bd. I, Kap. X, § 1). Im Falle von Teilchen, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen, muß man die Ruhmasse gleich Null setzen, wobei sich für ihre kinetische Energie der Ausdruck  $mc^2$ , d. h.  $mv^2$  ( $v=c$ ) statt der klassischen  $\frac{1}{2} mv^2$  ergibt. Die oben angeführte klassische Druckformel bleibt auch im betrachteten Falle gültig, da der Gasdruck nicht durch die Energie der Teilchen, sondern durch das Produkt ihrer *Bewegungsgröße* mit der Geschwindigkeit bestimmt wird; die Bewegungsgröße aber drückt sich in der Relativitätsmechanik auf dieselbe Weise wie in der klassischen durch das Produkt  $mv$  aus. Es folgt daraus, daß der Druck eines dem Strahlungsfeld analogen Gases sich durch *dieselbe* Formel (65a) ausdrücken würde.

Es sei bemerkt, daß es richtiger wäre, die Hohlraumstrahlung, d. h. das außerhalb der materiellen Körper im leeren Raum befindliche Strahlungsfeld nicht als ein Gas, sondern als einen *Dampf* zu behandeln, der sich mit dem in den materiellen Körpern enthaltenen „Lichtstoff“ im statischen Gleichgewicht befindet. Denn die Energiedichte  $\xi$ , und auch die Entropiedichte  $s$  der Hohlraumstrahlung ist von ihrem Volum  $V$  offenbar unabhängig und muß nur von der Temperatur abhängen, ebenso wie dies für einen sich mit den entsprechenden festen oder flüssigen Körpern im Gleichgewicht befindlichen Dampf der Fall ist.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir die thermodynamische Grundgleichung für den betrachteten Fall in der üblichen Form

$$dW = TdS - pdV$$

aufschreiben mit den folgenden Werten für die im Volum  $V$  vorhandene Energie  $W$  und Entropie  $S$ :

$$W = \xi V, \quad S = sV.$$

Es wird also:

$$Vd\xi + \xi dV = TVds + TsdV - pdV$$

oder, da  $\xi$  und  $s$  nur von  $T$  abhängen:

$$d\xi = Tds \tag{66}$$

und

$$\xi = Ts - p,$$

d. h. nach (65a)

$$\xi = \frac{3}{4} Ts. \tag{66a}$$

Daraus folgt nach leichter Rechnung

$$\xi = \sigma T^4, \tag{66b}$$

wo  $\sigma$  einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Das ist die wohlbekannte *Stephan-Boltzmannsche* Formel.

Diese Formel kann man als einen Spezialfall der allgemeinen Dampfdruckformel betrachten, und zwar für eine solche Substanz, deren latente Verdampfungswärme bei  $T = 0$  gleich Null ist. Führt man statt der Energie  $W$  die freie Energie nach der Gleichung

$$dF = -SdT - pdV$$

ein, so bekommt man die Beziehung

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T,$$

die in dem Falle eines gewöhnlichen Verdampfungsprozesses in der bekannten Form

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{r}{T(V_1 - V_2)}$$

geschrieben werden kann (Clausius'sche Formel;  $r$ -Verdampfungswärme pro Masseneinheit,  $V_2 - V_1$  — die entsprechende Volumvermehrung). In unserem Falle gilt offenbar

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_T = \frac{1}{T} \left[ \frac{dW + p dV}{dV} \right]_T = \frac{\xi + p}{T},$$

woraus folgt

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\xi + p}{T}$$

oder wegen (65a)

$$\frac{d\xi}{dT} = \frac{4\xi}{T}$$

d. h. die Formel (66b).

### § 8. Elektromagnetische Kräfte und Elastizitätstheorie.

#### 1. Elektro- und Magnetostriktion in gasförmigen und flüssigen Körpern.

Bei der Aufstellung der Beziehungen (62), (62a), (62b) haben wir das spezifische Volumen ( $v$ ) als konstant vorausgesetzt. Wir wollen nun diese Voraussetzung fallen lassen und verschiedene, mit den elektromagnetischen Kräften verknüpfte elastische *Deformationen* des Körpers betrachten.

Im einfachsten Fall, der bei gasförmigen und flüssigen Körpern immer verwirklicht wird, lassen sich diese Deformationen auf eine Änderung des spezifischen Volums (oder Dichte) zurückführen. Bezieht man die Größen  $S, F, \Phi$  usw. nicht auf die Volumeinheit (was nur bei konstantem Volumen erlaubt ist), sondern auf die Masseneinheit, d. h. auf das (veränderliche) spezifische Volumen, so kann man den Einfluß der Volumänderung durch Hinzufügung des Produktes —  $p dv$  oder  $v dp$  zu den früheren Ausdrücken für  $dF$  bzw.  $d\Phi$  berücksichtigen (je nachdem es sich von der freien Energie oder des thermodynamischen Potentials handelt), wobei selbstverständlich die Polarisierungen  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{M}$  mit  $v$  zu multiplizieren sind. Da wir den Fall isotroper Körper betrachten, können wir die Größen  $P, M, E, H$  als Skalare behandeln. Es wird also

$$d\Phi = -SdT - PvdE - MvdH + vdp. \quad (67)$$

Daraus ergibt sich bei  $T = \text{konst.}$  und  $M = H = 0$  die Relation

$$\left(\frac{\partial v}{\partial E}\right)_p = - \left[ \frac{\partial(Pv)}{\partial p} \right]_E = -E \left(\frac{\partial(\kappa v)}{\partial p}\right)_E, \quad (67a)$$

wo  $\kappa = \frac{P}{E}$  die elektrische Suszeptibilität ist. Die vollständige Änderung von  $v$  bei gleichzeitiger Änderung von  $E$  und  $p$ ,

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial E}\right)_p dE + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_E dp$$

läßt sich folglich in der Gestalt

$$dv = - \left( \frac{\partial(\kappa v)}{\partial p} \right)_E E dE + \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_E d p \quad (68)$$

schreiben, oder auch mit der Abkürzung

$$\kappa_1 = \left( \frac{\partial \kappa}{\partial p} \right)_E, \quad (68a)$$

$$\frac{dv}{v} = - \kappa_1 E dE + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_E (d p - \kappa E dE). \quad (68b)$$

Nun gilt nach der Grundgleichung der Hydrostatik im Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit oder eines Gases:

$$\nabla p = \mathfrak{F}, \quad (69)$$

wo  $\mathfrak{F}$  die (äußere), auf die Volumeinheit bezogene Kraft bedeutet. In unserem Falle ist  $\mathfrak{F} = (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{C} + \mathfrak{P} \times \text{rot } \mathfrak{C} = \kappa \nabla \left( \frac{E^2}{2} \right) = \kappa E \nabla E$ , so daß die Gleichgewichtsbedingung (69) die Form

$$\nabla p = \kappa E \nabla E = \kappa \nabla \frac{E^2}{2} \quad (69a)$$

annimmt. Daraus aber folgt, daß bei einer quasistatischen Änderung von  $p$  und  $E$

$$d p = \kappa E dE$$

ist und wir erhalten nach (68b) die Gleichung

$$\frac{dv}{v} = - \kappa_1 E dE. \quad (69b)$$

Diese Gleichung bestimmt die sogenannte Erscheinung der *Elektrostriktion*, d. h. die durch das elektrische Feld bedingte Änderung des (spezifischen) Volums (oder der Dichte) des betrachteten Körpers.

Im Falle eines Gases ist die elektrische Suszeptibilität der Dichte  $\left( \frac{1}{v} \right)$  streng proportional. Man hat folglich

$$\kappa v = \text{konst} = \kappa_0$$

und wegen der Beziehung  $p v = R T$  (wo  $R$  die Gaskonstante und  $T$  die absolute Temperatur bedeutet):

$$\kappa = \frac{\kappa_0 p}{R T}, \quad \kappa_1 = \frac{\kappa_0}{R T}.$$

Es läßt sich nun die Gleichung (69a) sofort integrieren und man bekommt

$$\lg v = - \frac{\kappa_0 E^2}{2 R T} + \text{konst} \quad (70)$$

oder

$$\lg p = + \frac{\kappa_0 E^2}{2 R T} + \text{konst} \quad (70a)$$

Im Falle schwach komprimierbarer Flüssigkeiten kann man die Größe  $\kappa_1$

ebenfalls als konstant behandeln, sofern sie von der Feldstärke unabhängig ist, und man bekommt für kleine Volumänderungen

$$\frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{\kappa_1 E^2}{2}. \quad (70b)$$

Ist aber  $\kappa$  eine Funktion von  $E$ , so muß man in diesen Formeln  $\frac{1}{2} \kappa_1 E^2$  durch das Integral  $\int_0^E \kappa_1 E dE$  ersetzen. Es sei bemerkt, daß dieses Integral nichts anderes als die Ableitung nach  $p$  der elektrischen „Energie“  $\xi = \int \kappa E dE = \int P dE$  ist.

Ganz ähnliche Resultate ergeben sich für die *Magnetostriktion*; man braucht nur in den vorhergehenden Formeln  $E$  durch  $H (= \mu B)$  und  $\kappa$  durch  $\gamma = \frac{\chi}{\mu}$  zu ersetzen.

Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung (69) kann man noch in der folgenden Form darstellen:

$$-\nabla p + \nabla \left( \frac{\kappa E^2}{2} \right) - \frac{E^2}{2} \nabla \kappa = 0. \quad (71)$$

Es lassen sich folglich die elektrischen Volumkräfte durch einen allseitigen *Zug* (negativer Druck) vom Betrage  $\frac{\kappa E^2}{2}$  und durch zusätzliche oder eher *Restkräfte*  $-\frac{E^2}{2} \nabla \kappa$  ersetzen, die in einem homogenen Körper nur insofern von Null verschieden sind, als  $\kappa$  wegen der Elektrostriktion und auch eventuell wegen seiner Abhängigkeit von  $E$  eine veränderliche Größe sein muß. Man kann offenbar im allgemeinen

$$\nabla \kappa = \kappa_1 \nabla p + \kappa_2 \nabla E \quad (71a)$$

setzen, wo  $\kappa_2 = \left( \frac{\partial \kappa}{\partial E} \right)_p$  bedeutet. Wir können uns folglich vorstellen, daß die Oberfläche einer Flüssigkeit, die sich in einem elektrischen Feld befindet, einen von der Richtung dieses Feldes unabhängigen Zug  $\frac{\kappa E^2}{2}$  in Richtung der äußeren Normalen erfährt. Die Grenzfläche zweier sich berührender Flüssigkeiten (oder einer Flüssigkeit und eines Gases) mit den Suszeptibilitäten  $\kappa^a$  und  $\kappa^b$  wird folglich einer senkrechten Zugkraft

$$\mathfrak{F} = n(\kappa^a E^{a2} - \kappa^b E^{b2}) \quad (71b)$$

unterworfen. Es sei erinnert, daß die Tangentialkomponenten der beiden Feldstärken  $E^a$  und  $E^b$  denselben Wert haben, während die Normalkomponenten zueinander im Verhältnis der reziproken Dielektrizitätskonstanten stehen.

## 2. Grundzüge der Elastizitätstheorie fester Körper.

Auf den Fall *fester* Körper lassen sich die obigen Resultate nicht streng anwenden, auch wenn es sich von einer einfachen Volumänderung

eines isotropen Körpers handelt. Wir müssen deshalb diesen Fall besonders untersuchen und wollen dies etwas eingehender machen wegen der zahlreichen Analogien der Elastizitätstheorie fester Körper mit der in diesem Kapitel dargelegten Theorie der elektromagnetischen Kräfte und Spannungen.

Wir stellen uns die Verrückungen  $u$  der Teilchen eines festen Körpers als Funktionen ihrer Gleichgewichtslagen vor, d. h. der entsprechenden Radiusvektoren  $r$  dargestellt. Es bedeutet also die Summe  $r' = r + u$  die verschobene Lage eines Teilchens, das sich im undeformierten Zustande des Körpers im Punkte  $r$  befindet.

Wir betrachten ferner die *relative* Verschiebung zweier Nachbar-  
teilchen  $r_1 = r$  und  $r_2 = r + \delta r$ , d. h. die Differenz

$$\delta u = u_2 - u_1 = u(r + \delta r) - u(r).$$

Diese relative Verschiebung kann man offenbar durch die Formel

$$\delta u = (\delta r \nabla) u \quad (72)$$

darstellen oder in tensorieller Schreibweise bei Weglassung der Summenzeichen für paarweise gleichen Indizes

$$d u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k.$$

Die Ableitungen  $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  bilden einen asymmetrischen Tensor zweiten Ranges mit dem symmetrischen Anteil

$$a_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (72a)$$

und dem asymmetrischen

$$b_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad (72b)$$

der offenbar dem Vektor

$$b = \frac{1}{2} \text{rot } u$$

äquivalent ist ( $b_1 = b_{23}$ ,  $b_2 = b_{31}$ ,  $b_3 = b_{12}$ , vgl. Bd. I, Einleitung).

Dieser Vektor bestimmt die unendlich kleine Rotation des die beiden betrachteten Punkte enthaltenden Volumelements als ganzen und ist deshalb für die Elastizitätstheorie unwesentlich, ebenso wie die absolute Verschiebung  $u$ . Die eigentliche relative Deformation ist also vollkommen durch den Tensor  $a_{ik}$  bestimmt. Wenn die Koordinatenachsen mit den Symmetrieachsen dieses Tensors zusammenfallen (was durch eine Drehung des ursprünglichen Koordinatensystems immer erzielt werden kann), sind nur seine Hauptkomponenten  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  von Null (und im allgemeinen auch voneinander) verschieden. Man kann sie offenbar als die linearen *Ausdehnungskoeffizienten* des Körpers im betreffenden *Punkte* definieren (Hauptdilatationen). Ihre Summe

$$a_{ii} = \text{div } u$$

ist von der Koordinatenwahl unabhängig und bestimmt die relative Volumdilatation  $\left(\frac{\Delta v}{v}\right)$ .

Die durch die Deformation hervorgerufenen elastischen Kräfte lassen sich ebenfalls durch einen Tensor charakterisieren, dessen Komponente  $p_{ik}$  die auf eine zur  $i$ -Achse senkrechte Einheitsfläche in Richtung der  $k$ -Achse wirkende Kraft bedeutet. Wir stellen uns dabei vor, daß diese Kraft auf den in der „positiven“ Richtung von  $i$  liegenden Teil des Körpers seitens des anderen „negativen“ Teils ausgeübt wird. Es bedeutet also die Größe  $p_{11}$  die von der „negativen“ Hälfte auf die positive pro Flächeneinheit ausgeübte *Druckkraft* bei  $p_{11} > 0$  und *Zugkraft* bei  $p_{11} < 0$ .

Wir stellen uns ein Volumelement des Körpers, welches (im Gleichgewichtszustand) die Gestalt eines *Quaders* (Parallelepipeds) mit den Kanten  $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$  hat, vor. Die auf seine Grundflächen in Richtung der  $k$ -Achse wirkende Kraft läßt sich offenbar durch die Summe

$$-\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$$

darstellen, woraus sich für die auf die *Volumeinheit* bezogene elastische Kraft der Ausdruck

$$f_k = -\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i} \quad (73)$$

ergibt. Man kann diesen Ausdruck auch durch eine koordinatenfreie Rechnung bekommen, wenn man den Umstand beachtet, daß die auf einen beliebigen Teil des Körpers ausgeübte elastische Kraft durch das Flächenintegral  $-\oint p_n dS$  ausgedrückt werden kann (es bedeutet hier  $p_n$  die Projektion des elastischen Spannungstensors  ${}^2p$  auf die Richtung der äußeren Normale;  $S$  bezieht sich auf den undeformierten Zustand), und daß dieses Integral dem Volumintegral  $-\int \operatorname{div} {}^2p dV$  gleich ist.

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß der Spannungstensor  $p_{ik}$  ebenso wie der Deformationstensor  $a_{ik}$  symmetrisch ist<sup>1)</sup>. — Wir betrachten ferner die unendlich kleine Arbeit, welche bei einer unendlich kleinen Änderung der Deformation des oben erwähnten Quaders durch die auf ihn wirkenden Flächenkräfte geleistet wird. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Koordinatenachsen mit den Symmetrieachsen des Tensors  $da_{ik}$ , welcher die zusätzliche Deformation bestimmt, zusammenfallen. Die betrachtete Arbeit drückt sich dabei, wenn man die Drehung außer acht läßt, durch die Summe

$$-(p_{11} \cdot \delta x_2 \delta x_3 \cdot da_{11} \delta x_1 + p_{22} \delta x_3 \delta x_1 \cdot da_{22} \delta x_2 + p_{33} \delta x_1 \delta x_2 \cdot da_{33} \delta x_3)$$

<sup>1)</sup> Dies folgt aus der Untersuchung der *Drehkräfte*, die auf einen beliebigen Teil des Körpers (Volum und Oberfläche) wirken. Auf den Beweis werden wir hier nicht eingehen.

aus, oder, da die nichtdiagonalen Komponenten  $da_{ik}$  verschwinden, durch

$$-p_{ik} da_{ik} \cdot \delta V \quad (\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3).$$

Wir nehmen nun an, daß es eine elastische Energie (oder freie Energie) gibt, die im Körper mit einer bestimmten Volumdichte  $w$  verteilt ist. Dann können wir die obige Arbeit der *Vermehrung* der dem betrachteten Volumelement  $\delta V$  zugehörigen Energie (oder eher freien Energie, da die Temperatur als konstant vorausgesetzt wird)  $w \delta V$  setzen. Es wird folglich

$$dw = -p_{ik} da_{ik}. \quad (73a)$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen invariant und muß deshalb für jedes (rechtwinklige) Koordinatensystem gültig bleiben. Es folgt ferner

$$p_{ik} = -\frac{\partial w}{\partial a_{ik}} \quad (73b)$$

und

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial a_{hl}} = \frac{\partial p_{hl}}{\partial a_{ik}}. \quad (73c)$$

Der Symmetrie der Deformationskomponenten ( $a_{ik} = a_{ki}$ ) entspricht dabei die Symmetrie der Spannungskomponenten ( $p_{ik} = p_{ki}$ ). Nach dem *Hookeschen* Gesetz müssen diese Größen miteinander durch lineare Beziehungen von der Form

$$-p_{ik} = \lambda_{ik, hl} a_{hl}, \quad (74)$$

$$a_{hl} = -\gamma_{ik, hl} p_{ik} \quad (74a)$$

verknüpft sein. Die Proportionalitätsfaktoren  $\lambda$  und  $\gamma$  bezeichnet man gewöhnlich als die Elastizitätsmoduln bzw. die Elastizitätskoeffizienten des betreffenden Körpers. Es gelten offenbar die Symmetrierelationen

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ki, hl} &= \lambda_{ik, hl} = \lambda_{hl, ik} \\ \gamma_{ki, hl} &= \gamma_{ik, hl} = \gamma_{hl, ik} \end{aligned} \right\} \quad (74b)$$

welche die Anzahl der voneinander verschiedenen Komponenten der Tensoren  ${}^4\lambda$  und  ${}^4\gamma$  von  $3^4 = 81$  auf  $36$  reduzieren.

In dem einfachsten Fall isotroper Körper reduzieren sich ferner diese  $36$  varianten, d. h. von der Wahl des Koordinatensystems abhängigen, Skalare auf zwei invariante Materialkonstanten. Die allgemeinste lineare Beziehung zwischen den beiden Tensoren  ${}^2p$  und  ${}^2a$  mit lauter invarianten Proportionalitätsfaktoren muß in der Tat die Gestalt

$$-p_{ik} = \lambda' \delta_{ik} a_{ll} + \lambda'' a_{ik} \quad (75)$$

oder

$$-a_{ik} = \gamma' \delta_{ik} p_{ll} + \gamma'' p_{ik} \quad (75a)$$

haben. Die Moduln  $\lambda'$  und  $\lambda''$  (die man gewöhnlich mit  $\lambda$  und  $2\mu$  be-

zeichnet), sind mit den Koeffizienten  $\gamma', \gamma''$  durch die Formeln

$$\gamma'' = \frac{1}{\lambda''}, \quad 3\lambda' + \lambda'' = \frac{1}{3\gamma' + \gamma''} \quad (75b)$$

verknüpft.

Diese Gleichungen können auch auf den Fall flüssiger und gasförmiger Körper angewandt werden, wenn man die Konstante  $\mu = \frac{\lambda''}{2}$  — den sogenannten *Scherrungsmodul* — gleich Null setzt. — In allen Fällen drückt sich die Deformationsenergie  $w$  nach der Formel

$$w = -\frac{1}{2} p_{ik} a_{ik} \quad (76)$$

aus.

Die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung (69) ist jetzt durch die folgende allgemeinere Gleichung:

$$-\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + F_i = 0 \quad (77)$$

zu ersetzen. Wir nehmen wieder an, daß die äußere Volumkraft  $\mathfrak{F}$  von einem elektrostatischen Feld herrührt und setzen dementsprechend

$$F_i = P_k \frac{\partial}{\partial x_i} E_k = \frac{\partial \xi}{\partial x_i}, \quad (77a)$$

wobei für anisotrope Körper mit einem konstanten, d. h. von der Feldstärke unabhängigen, Suszeptibilitätstensor die Formel

$$\xi = \frac{1}{2} P_k E_k = \frac{1}{2} \varkappa_{ik} E_i E_k \quad (77b)$$

gilt (die Integrabilitätsbedingungen  $\frac{\partial P_i}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k}{\partial x_i}$  setzen wir als erfüllt voraus).

Es sei bemerkt, daß die Gleichung (77) in der Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{ik} \xi - p_{ik}) = 0 \quad (77c)$$

umgeschrieben werden kann<sup>1)</sup>. Sie läßt sich im allgemeinen nicht direkt integrieren. Man muß vielmehr zu diesem Zweck die Spannungskomponenten  $p_{ik}$  durch die Verrückungskomponenten  $u_i$  ausdrücken. Man bekommt dabei im Falle isotroper Körper nach (75) und (72a)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda' \operatorname{div} \mathbf{u} + \xi) + \frac{\lambda''}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [(\lambda + \mu) \operatorname{div} \mathbf{u} + \xi] + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} = 0$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\nabla (\xi + (\lambda + \mu) \operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0. \quad (78)$$

<sup>1)</sup> Die elektrische Energie  $\xi$  entspricht folglich *nicht* der elastischen Energie  $w$ , sondern dem elastischen Spannungstensor.

Daraus ergibt sich durch Divergenzbildung die folgende Gleichung für die kubische Dilatation  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \vartheta = \frac{\Delta v}{v}$

$$K \nabla^2 \vartheta + \nabla^2 \xi = 0, \quad (78a)$$

wo

$$K = \lambda + 2\mu = \lambda' + \lambda'' \quad (78b)$$

den *Kompressibilitätsmodul* (für allseitigen Druck) bedeutet. Die Gleichung (78a) ist mit der entsprechenden, sich aus (69a) mittels der Relation  $\dot{p} = K \cdot \vartheta$  ergebenden hydrostatischen Gleichung für schwach kompressible Flüssigkeiten identisch.

### 3. Elektromagnetische Striktionserscheinungen in festen Körpern.

Die Arbeit  $-\dot{p} dv$ , welche durch die äußeren Druckkräfte bei einer Änderung des Volums einer bestimmten Flüssigkeitsmasse geleistet wird, ist im Falle fester Körper nach (73a) durch  $-v_0 \dot{p}_{ik} da_{ik}$  zu ersetzen, wo  $v_0$  das von der betrachteten Masse im undeformierten Zustand eingenommene Volumen bedeutet. Diese Arbeit stellt bei konstant gehaltener Temperatur die Zunahme der *freien* Energie des betreffenden Körperelements dar. Dementsprechend bekommen wir für die Änderung seines thermodynamischen Potentials statt (67) die folgende allgemeine Gleichung

$$d\Phi = -SdT - vP_i dE_i - vM_i dH_i + v_0 a_{ik} d\dot{p}_{ik}, \quad (79)$$

aus welcher sich die Gleichung (67) als Spezialfall ergibt.

Wir betrachten wieder wie früher quasistatische Vorgänge bei konstanter Temperatur und bei Fehlen des Magnetfeldes. Es wird dabei statt (67a)

$$\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial E_i}\right)_p = -\frac{1}{v_0} \left[\frac{\partial (vP_i)}{\partial \dot{p}_{ik}}\right]_E = -\frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial (v\kappa_{ih})}{\partial \dot{p}_{ik}}\right)_E E_h \quad (79a)$$

und ferner wegen

$$\begin{aligned} da_{ik} &= \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial E_i}\right)_p dE_i + \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial \dot{p}_{hl}}\right)_E d\dot{p}_{hl} \\ da_{ik} &= -\frac{1}{v_0} \frac{\partial (v\kappa_{ih})}{\partial \dot{p}_{ik}} E_h dE_i + \frac{\partial a_{ik}}{\partial \dot{p}_{hl}} d\dot{p}_{hl}. \end{aligned} \quad (79b)$$

Setzt man hier

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{v - v_0}{v_0} = 1 + a_{nn} = 1 + \vartheta \quad (80)$$

und ferner zur Abkürzung

$$\left(\frac{\partial \kappa_{ih}}{\partial \dot{p}_{ik}}\right)_E = \kappa_{ih, ik}, \quad (80a)$$

so wird bei Vernachlässigung von  $a_{nn}$  gegen 1 in dem Faktor  $1 + a_{nn}$ :

$$da_{ik} = -\kappa_{ih, ik} E_h dE_i + \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial \dot{p}_{hl}}\right)_E d\dot{p}_{hl} - \left(\frac{\partial a_{nn}}{\partial \dot{p}_{ik}}\right)_E \kappa_{ih} E_h dE_i \quad (80b)$$

oder nach (74)

$$d a_{ik} = -\kappa_{lh, ik} E_h d E_l - \gamma_{ik, hl} d p_{hl} + \gamma_{nn, ik} d \xi. \quad (80c)$$

Die Größen  $p_{hl}$  sind hier als die durch (77c) bestimmten Funktionen anzusehen. Falls es möglich wäre, diese Gleichungen durch den Ansatz  $p_{hl} = \delta_{hl} \xi + \text{konst}$  zu befriedigen, so müßten sich die zwei letzten Glieder (oder eher Summen) auf der rechten Seite von (80c) gegenseitig zerstören und man würde einfach

$$a_{ik} = -\frac{1}{2} \kappa_{lh, ik} E_h E_l = -\left(\frac{\partial \xi}{\partial p_{ik}}\right)_E$$

bekommen. Der obige Ansatz ist aber zu speziell und führt zu Widersprüchen mit den allgemeinen Beziehungen (74a), welche bei der Lösung der Gleichungen (77c) und (80c) mitberücksichtigt werden müssen.

Man bekommt einfachere Resultate, wenn man nicht die Deformationskomponente  $a_{ik}$ , sondern die Spannungskomponente  $p_{ik}$  nach der thermodynamischen Methode untersucht. Betrachtet man nämlich statt (79) das „gemischte“ thermodynamische Potential

$$d \Phi = -S dT - v P_l d E_l - v_0 p_{ik} d a_{ik}, \quad (81)$$

so ergeben sich die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial E_l}\right)_a = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial (v P_l)}{\partial a_{ik}}\right)_E, \quad (81a)$$

d. h. nach (80)

$$\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial E_l}\right)_a = \zeta_{lh, ik} E_h + \delta_{ik} \kappa_{lh} E_h \quad (82)$$

mit der neuen Abkürzung

$$\zeta_{lh, ik} = \left(\frac{\partial \kappa_{lh}}{\partial a_{ik}}\right)_E. \quad (82a)$$

Daraus folgt

$$d p_{ik} = \left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial E_l}\right)_a d E_l + \left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial a_{hl}}\right)_E d a_{hl} = \zeta_{lh, ik} E_h d E_l + \delta_{ik} d \xi + (d p_{ik})_E.$$

Es bedeutet hier  $(d p_{ik})_E$  die Zunahme der gewöhnlichen, durch die Deformation  $a_{ik}$  bedingten Spannung bei konstant gehaltener Feldstärke (näherungsweise bei  $E = 0$ ). Die Größe

$$\Delta p_{ik} = \frac{1}{2} \zeta_{lh, ik} E_h E_l + \frac{1}{2} \delta_{ik} \kappa_{hl} E_h E_l = \frac{\partial \xi}{\partial a_{ik}} + \delta_{ik} \xi \quad (82b)$$

stellt dagegen die zusätzliche Spannung, welche bei festgehaltener Deformation durch das Einschalten des elektrischen Feldes erzeugt wird. Sie besteht aus einem allseitigen Druck  $\xi$  und einem „ergänzenden“ Spannungssystem  $\frac{\partial \xi}{\partial a_{ik}}$

Die dieses System charakterisierenden Größen (82a) bilden einen Tensor 4-ten Ranges mit denselben Symmetrieeigenschaften wie bei den Tensoren  $\mathfrak{A}$  oder  $\mathfrak{A}'$ . Daraus folgt, daß im Spezialfall isotroper

Körper die Formel (82b) sich auf die folgende Gestalt reduzieren muß [vgl. (75)],

$$\Delta \phi_{ik} = \delta_{ik} (\xi + \zeta' E^2) + \zeta'' E_i E_k, \quad (82c)$$

wo  $\zeta'$  und  $\zeta''$  zwei für den betreffenden Körper charakteristische Konstanten sind. Wie leicht zu ersehen ist, entspricht dieses ergänzende Spannungssystem einem Druck  $\zeta' E^2$  senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien und einem Druck  $(\zeta' + \zeta'') E^2$  parallel dazu.

In den obigen Ausführungen haben wir das elektrische Feld als gegeben, d. h. die elektrische Feldstärke als eine bekannte Ortsfunktion vorausgesetzt. Bei der tatsächlichen Behandlung der Elektrostriktion irgend eines Körpers pflegt man aber nur den *äußeren* Anteil dieses Feldes anzugeben, d. h. dasjenige äußere Feld, welches an der betreffenden Stelle bei *Abwesenheit* des Körpers herrschen würde. Bei Anwesenheit des Körpers bekommt man ein davon verschiedenes resultierendes Feld, das nach den allgemeinen Methoden der Elektrostatik (oder Elektrodynamik) bestimmt werden muß, bevor man zur Lösung des Striktionsproblems übergeht. Streng genommen muß man die beiden Probleme — das elektrische und das elastische — *simultan* lösen, denn die elektrischen Eigenschaften des Körpers, welche das resultierende Feld bedingen, werden durch die Elektrostriktion einigermaßen modifiziert. Da aber diese Änderung gewöhnlich äußerst gering ist, kann man sie bei der Lösung des elektrischen Problems (in erster Annäherung) vernachlässigen.

Wir müssen noch zum Schluß den zur Elektrostriktion reziproken Effekt erwähnen, nämlich die Änderung der elektrischen Polarisation eines Körpers, welcher sich in einem *gegebenen äußeren elektrischen Feld* befindet, bei elastischen Deformationen, die durch irgendwelche *nicht-elektrische* äußere Kräfte (z. B. durch einen äußeren Druck oder Zug) erzeugt werden. Im Falle einiger *azentrischer* Kristalle (wie z. B. Quarz und Turmalin), tritt dieser *piesoelektrische Effekt* auch bei Fehlen äußerer elektrischer Kräfte auf. Man bekommt also in diesem Fall eine elektrische Polarisation des betreffenden Körpers *infolge* seiner elastischen Deformation. Die Komponenten der Polarisation drücken sich dabei durch lineare Funktionen der Deformationskomponenten aus nach der Gleichung

$$P_i = P_i^0 + e_{ikl} a_{kl}, \quad (83)$$

wo  $P_i^0$  die bei verschwindender Deformation eventuell auch vorhandene natürliche oder „remanente“ Polarisation bedeutet. Die piesoelektrischen Konstanten  $e_{ikl}$  bilden einen Tensor dritten Ranges, der wegen ihrer Symmetrie bezüglich der letzten zwei Indizes nur 18 verschiedene Komponenten besitzt. Setzt man die Ausdrücke (83) in die Beziehungen (81a) ein, so bekommt man statt (82)

$$\left( \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial E_i} \right)_a = e_{ikl} + \delta_{ik} P_l.$$

Daraus folgt, daß ein (äußeres) elektrisches Feld bei festgehaltener Deformation die zusätzlichen Spannungen

$$\Delta p_{ik} = e_{lik} E_l + \delta_{ik} P_l E_l \quad (83a)$$

erzeugt. Wir haben dabei die Abhängigkeit der piesoelektrischen Polarisierung von der elektrischen Feldstärke in erster Näherung außer acht gelassen.

Ähnliche Resultate ergeben sich für die Magnetostriktion und die dazu reziproke Erscheinung des Piesomagnetismus, sofern man die Hysteresis vernachlässigen kann. Bei Berücksichtigung der Hysteresis bekommt man wegen des *Aufhörens des Energiebegriffs* viel kompliziertere Erscheinungen, auf welche wir hier nicht näher eingehen wollen.

### Drittes Kapitel.

## Quasi-mikroskopische Theorie der elektromagnetischen Eigenschaften materieller Körper.

### § 1. Elektrostatische Polarisierung (elektrische Suszeptibilität für zeitlich konstante Felder).

1. Berechnung der Suszeptibilität von dielektrischen Körpern mittels des Polarisationsensors der einzelnen Moleküle.

Wie schon in Kap. I, § 2 erwähnt wurde, kann die elektrische Polarisierung eines materiellen Körpers (abgesehen von piesoelektrischen und anderen zusammengesetzten Effekten derselben Art) durch *zwei* verschiedene Ursachen bedingt werden, und zwar erstens durch eine *quasielastische Deformation* der Moleküle im äußeren elektrischen Felde und zweitens durch ihre *Orientierung* in diesem Felde. Sofern das letztere in demjenigen sehr kleinen Raumgebiet, welches von einem Molekül eingenommen ist, als (näherungsweise) *homogen* angesehen werden darf, braucht man dabei nur die elektrischen Momente erster Ordnung zu berücksichtigen, d. h. die Moleküle als *elementare Dipole* zu behandeln.

Wir betrachten zunächst den am häufigsten vorkommenden Fall, daß die Moleküle kein natürliches oder „remanentes“ Dipolmoment besitzen. In diesem Fall kann der oben erwähnte Orientierungseffekt nicht auftreten, und es bleibt nur der Deformationseffekt übrig, welchen wir als eine intramolekulare oder „mikroskopische“ Elektrostriktion behandeln dürfen.

Wir stellen uns also ein Molekül als einen sehr kleinen, festen, elastischen, deformierbaren Körper vor und nehmen an, daß er in einem äußeren, *räumlich und zeitlich konstanten* elektrischen Felde  $\mathfrak{E}^0$  ein der Feldstärke proportionales und im positiven Sinne gerichtetes elektrisches Moment  $p$  annimmt. Führt man ein mit dem Molekül fest ver-

bundenes Koordinatensystem ( $S$ ) ein, so bekommt man zwischen den Komponenten von  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{C}^0$  eine Beziehung von der Form

$$\phi_i = \sum \alpha_{ik} E_k^0, \quad (1)$$

wo die  $\alpha_{ik}$  ganz bestimmte, für das betrachtete Molekül charakteristische Größen sind, die einen *symmetrischen Tensor* — den sogenannten *Polarisationstensor* — bilden. Seine Symmetrie für den hier betrachteten Fall eines zeitlich konstanten Feldes ist als eine Folge des Energieprinzips, d. h. der Tatsache, daß die Summe  $\sum E_i^0 d\phi_i$  oder  $\sum \phi_i dE_i^0$  ein vollständiges Differential darstellt, anzusehen. Falls die Koordinatenachsen mit den Symmetrieachsen dieses Tensors zusammenfallen, kann man einfach

$$\phi_1 = \alpha_1 E_1^0, \quad \phi_2 = \alpha_2 E_2^0, \quad \phi_3 = \alpha_3 E_3^0 \quad (1a)$$

setzen, wo  $\alpha_1 = \alpha_{11}$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{22}$ ,  $\alpha_3 = \alpha_{33}$  die Hauptkomponenten des Polarisationstensors bedeuten (die anderen Komponenten müssen dabei verschwinden).

Wir nehmen nun an, daß der betrachtete Körper aus gleichen und *gleich orientierten* Molekülen besteht, wie dies bei festen kristallinen Körpern tatsächlich der Fall ist. Um die Polarisation, d. h. das elektrische Moment der Volumeinheit  $\mathfrak{P}$  zu bekommen, genügt es dann,  $\mathfrak{p}$  mit der Konzentration der Moleküle, d. h. ihrer Anzahl  $N$  in der Volumeinheit zu multiplizieren. Das äußere Feld ist dabei mit dem im vorigen Kapitel (§ 4) bestimmten *effektiven* Feld zu identifizieren. Es wird also

$$\mathfrak{P} = N \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{C}^0 = \mathfrak{C} + s \mathfrak{P}, \quad s = \frac{4\pi}{3}, \quad (1b)$$

wo  $\mathfrak{C}$  wie üblich die mittlere totale Feldstärke bedeutet. Man könnte statt des Lorentzschen Wertes  $\frac{4\pi}{3}$  für den Koeffizient  $s$  einen anderen empirisch zu bestimmenden Zahlenwert benutzen. — Durch Einsetzen von (1b) in (1a) bekommt man die Gleichungen

$$P_i = N \alpha_i (E_i + s P_i),$$

deren Lösung lautet:

$$P_i = \kappa_i E_i \quad (2)$$

mit

$$\kappa_i = \frac{N \alpha_i}{1 - N \alpha_i s}. \quad (2a)$$

Das sind die Hauptkomponenten des *Suszeptibilitätstensors*  ${}^2\kappa$  ( $\kappa_i = \kappa_{ii}$ ). Die Hauptkomponenten des Tensors  ${}^2\epsilon$  (dielektrische Konstante) lassen sich daraus nach den Beziehungen  $\epsilon_i = 1 + 4\pi \kappa_i$  berechnen.

Wir wenden uns jetzt dem Falle eines *isotropen* Körpers mit vollkommen regellos orientierten Molekülen zu. Diese Regellosigkeit kann man sich bei Gasen und Flüssigkeiten durch die Drehung der Moleküle entstanden denken. Es läßt sich dabei die Polarisation als das Produkt der Konzentration  $N$  mit dem *zeitlichen* Mittelwert des Momentes irgend

eines Moleküls definieren. Sonst muß man die Raummittelwertbildung über ein physikalisch kleines Gebiet vollziehen, welches genügend viele Moleküle enthält. In beiden Fällen bekommt man statt (1) eine „isotrope“ Beziehung von der Gestalt

$$p = \alpha \mathfrak{E}^0, \quad (3)$$

woraus sich ergibt:

$$\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{E}, \quad (3a)$$

mit

$$\kappa = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha s}. \quad (3b)$$

Der mittlere Polarisationskoeffizient  $\alpha$  stellt offenbar eine Molekular-konstante dar, die von der Konzentration  $N$  und anderen Zustandsgrößen des betreffenden Körpers unabhängig ist. Die Formel (3b) bestimmt folglich die Abhängigkeit der elektrischen Suszeptibilität dieses Körpers von seiner *Dichte* — falls die letztere verändert werden kann. Bei experimenteller Prüfung der Formel (3b) in dieser Hinsicht ist es bequemer, die Größe  $N\alpha$ , welche der Dichte exakt proportional ist, durch  $\kappa$  oder durch die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$  auszudrücken. Es wird dabei

$$N\alpha = \frac{\kappa}{1 + s\kappa} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi + s(\epsilon - 1)} \quad (4)$$

oder mit dem theoretischen Wert von  $s$  ( $= \frac{4\pi}{3}$ )

$$N\alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}. \quad (4a)$$

Diese letzte *Lorentzsche* Formel ist experimentell bei komprimierten Gasen und Flüssigkeiten sehr gut bestätigt worden. Im Falle verdünnter Gase kann man die Größe  $s\kappa$  gegen 1 vernachlässigen und einfach

$$N\alpha = \kappa = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \quad (4b)$$

setzen. Es sei bemerkt, daß die elektrische Suszeptibilität von Flüssigkeiten und festen (amorphen) Körpern gewöhnlich von der Größenordnung 1 oder etwas kleiner ist. Daraus folgt, daß der (mittlere) Polarisationskoeffizient  $\alpha$  von derselben Größenordnung (und auch selbstverständlich von derselben physikalischen Dimension) ist, wie das Volum  $\frac{1}{N}$ , welches von einem Molekül in solchen Körpern eingenommen ist. Da aber dieses Volum von dem eigentlichen Volum des Moleküls selbst nicht sehr verschieden ist, so kann man schließlich sagen, daß *der Polarisationskoeffizient eines Moleküls der Größenordnung nach mit seinem Volum übereinstimmt*. Um die physikalische Bedeutung dieses Resultats einzusehen, stellen wir uns ein Molekül als eine Kugel vor, wie wir es bei der Bestimmung der effektiven Feldstärke in § 4, Kap. II schon getan haben. Dann ist die mittlere Feldstärke, die *innerhalb*

eines polarisierten Moleküls mit dem Radius  $a$  herrscht, bekanntlich gleich  $-\frac{p}{a^3}$ . Nach dem oben Gesagten hat man aber  $a^3 \ll \alpha$ . Es muß folglich das durch die Polarisation (oder Elektrostriktion) des Moleküls erzeugte *innere* Feld das äußere Feld  $\mathfrak{E}^0$ , welche diese Polarisation bedingt, *näherungsweise kompensieren*. Wir sehen also, daß das Molekül sich gegenüber äußeren elektrischen Kräften wie ein *elektrisch leitendes* Teilchen von derselben Größe verhält.

Es ist leicht zu sehen, daß der mittlere Polarisationskoeffizient eines Moleküls  $\alpha$  gleich dem arithmetischen Mittel aus seinen drei Hauptpolarisationskoeffizienten:

$$\alpha = \frac{1}{3} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \tag{5}$$

ist. In der Tat, bezieht man die Komponenten von  $p$  und  $\mathfrak{E}^0$  in der Formel (1) auf ein *raumfestes* Koordinatensystem und bildet die entsprechenden Mittelwerte für verschiedene Orientierungen des Moleküls, so ergibt sich, da die Mittelwerte von  $p$  und  $\mathfrak{E}^0$  einander parallel sein müssen:

$$\bar{p}_1 = \alpha_{11} \bar{E}_1^0, \quad \bar{p}_2 = \alpha_{22} \bar{E}_2^0, \quad \bar{p}_3 = \alpha_{33} \bar{E}_3^0$$

mit

$$\bar{\alpha}_{11} = \alpha_{22} = \bar{\alpha}_{33} = \frac{1}{3} (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) = \alpha.$$

Die Summe  $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$  ist aber invariant gegenüber verschiedenen Koordinatentransformationen; sie bleibt folglich immer gleich  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

## 2. Berechnung des Polarisationsensors der Moleküle mittels der Polarisationskoeffizienten der einzelnen Atome.

Die elektrische Anisotropie der Moleküle läßt sich auf die Wechselwirkung der Atome, aus welchen sie aufgebaut sind, zurückführen, wobei *jedes Atom in elektrischer Hinsicht als kugelsymmetrisch angesehen werden darf*. Wir betrachten z. B. ein zweiseitiges Molekül  $A'A''$  und nehmen an, daß die beiden Atome, *einzelnen genommen*, sich isotrop verhalten, d. h. durch die skalaren Polarisationskoeffizienten  $\alpha'$  und  $\alpha''$  charakterisiert werden können. Wenn das äußere Feld zur Molekülachse, d. h. zur Verbindungslinie der beiden Atome (oder eher ihrer Mittelpunkte  $A'$  und  $A''$ ) parallel gerichtet ist (Abb. 4a), muß seine Wirkung durch ihre Wechselwirkung verstärkt werden. Bei senkrechter Richtung des Feldes (Abb. 4b) ist dagegen seine Wirkung durch die Wechselwirkung der beiden Atome geschwächt. Der vollständige Polarisationskoeffizient des Moleküls muß deshalb im ersten Falle größer und im zweiten kleiner sein als die Summe  $\alpha' + \alpha''$ . Es müssen

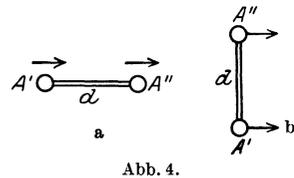


Abb. 4.

dabei offenbar in beiden Fällen die induzierten Dipolmomente der Atome  $p'$  und  $p''$  mit dem äußeren Feld gleichgerichtet sein. Bezeichnet man mit  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{E}''$  die zusätzlichen Feldstärken, welche im Mittelpunkt jedes Atoms ( $A'$  bzw.  $A''$ ) durch die Polarisation des anderen erzeugt werden, so hat man zur Bestimmung dieser Polarisation die Gleichungen

$$p' = \alpha' (\mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}'), \quad p'' = \alpha'' (\mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}'').$$

Es wird dabei im Falle (a) (vgl. Bd. I, S. 85):

$$\mathfrak{E}' = \frac{2p''}{d^3}, \quad \mathfrak{E}'' = \frac{2p'}{d^3}$$

und im Falle (b)

$$\mathfrak{E}' = -\frac{p''}{d^3}, \quad \mathfrak{E}'' = -\frac{p'}{d^3}.$$

wobei  $d$  den Abstand  $A'A''$  bedeutet.

Wir bekommen also im ersten Fall:

$$p' - \frac{2\alpha'}{d^3} p'' = \alpha' E^0, \quad p'' - \frac{2\alpha''}{d^3} p' = \alpha'' E^0,$$

d. h.

$$\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{2}{d^3}\right) p' = \left(\frac{1}{\alpha''} + \frac{2}{d^3}\right) p''$$

und

$$(p' + p'') = p_1 = \alpha_1 E^0$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha' - \frac{2\alpha'}{d^3} + 2\alpha''} + \frac{1}{\alpha'' - \frac{2\alpha''}{d^3} + 2\alpha'}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich im zweiten Falle:

$$p' + p'' = p_2 = \alpha_2 E^0$$

mit

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha' + \frac{1}{d^3} - \alpha''} + \frac{1}{\alpha'' + \frac{1}{d^3} - \alpha'}.$$

Diese ziemlich komplizierten Formeln vereinfachen sich beträchtlich, wenn man den beiden Atomen dieselben Polarisationskoeffizienten zuschreibt. Setzt man nämlich  $\alpha' = \alpha''$ , so wird

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2\alpha'}{1 - \frac{2\alpha'}{d^3}} \\ \alpha_2 &= \frac{2\alpha'}{1 + \frac{\alpha'}{d^3}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Es stellen offenbar die Koeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Hauptpolarisationskoeffizienten des betrachteten Moleküls für die Richtungen parallel und senkrecht zu seiner „Figurenachse“  $A'A''$  dar, die wir als

erste Koordinatenachse gewählt haben. Da die dritte Achse der zweiten vollkommen äquivalent ist, so muß  $\alpha_3 = \alpha_2$  sein. Man kann also den Polarisationsensor eines zweiatomigen Moleküls durch ein Rotationsellipsoid darstellen. Für den mittleren Polarisationskoeffizienten  $\alpha$  bekommt man dabei nach (5) und (6)

$$\alpha = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2) = \frac{2}{3}\alpha' \left( \frac{1}{1 - \frac{2\alpha'}{d^3}} + \frac{2}{1 + \frac{\alpha'}{d^3}} \right). \quad (6a)$$

Wenn das Molekül nicht aus neutralen Atomen, sondern aus zwei Ionen mit entgegengesetzten Ladungen ( $\pm e$ ) aufgebaut ist, muß es auch bei Fehlen äußerer elektrischer Kräfte ein natürliches Dipolmoment  $p^0$  besitzen. Bei Vernachlässigung der gegenseitigen Polarisation der beiden Ionen kann man dieses Moment einfach dem Produkt  $ed$  gleichsetzen. Bei Berücksichtigung dieser Polarisation muß man dazu noch die entgegengesetzt gerichteten induzierten Momente addieren. Diese induzierten Momente lassen sich näherungsweise aus den Gleichungen

$$p' = -\alpha' \left( \frac{e}{d^2} - \frac{2p''}{d^3} \right), \quad p'' = -\alpha'' \left( \frac{e}{d^2} - \frac{2p'}{d^3} \right),$$

die sich aus den oben für den Fall (a) betrachteten ergeben, wenn man die äußere Feldstärke  $E^0$  durch die innere Coulombsche Feldstärke  $-\frac{e}{d^2}$  ersetzt, bestimmen. Bei Anwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes  $\mathfrak{E}^0$  muß das Molekül noch ein zusätzliches Dipolmoment

$$p - p^0 = \Delta p$$

bekommen, welches bei fester Orientierung durch die Polarisation der beiden Ionen und zum Teil durch die Änderung ihres Abstandes bedingt wird. Neben diesem Striktionseffekt muß aber jetzt, sofern der Molekül frei drehbar ist, d. h. in flüssigen und gasförmigen Körpern, der viel wesentlichere Orientierungseffekt entstehen. Bei der Betrachtung dieses Effektes kann man in erster Näherung den Striktionseffekt ganz außer acht lassen, d. h. das elektrische Moment der Moleküle seinem Betrage nach als konstant ( $= p^0$ ) voraussetzen.

### 3. Die durch Orientierung von Dipolmolekülen bedingte Polarisation.

Die orientierende Wirkung des (äußeren) Feldes besteht in der Tendenz, die Moleküldipole in seiner eigenen Richtung einzustellen, was dem Minimalwert ihrer potentiellen Energie  $-\mathfrak{E}^0 \cdot p$  entspricht. Diese Tendenz kann sich aber bei schnell rotierenden Molekülen gar nicht äußern. Nur solche Moleküle, deren Rotationsenergie so klein ist, daß sie ihre Richtung nicht umkehren können und deshalb um die Feldrichtung pendeln müssen, sind durch das Feld tatsächlich — wenn auch teilweise — orientiert. Der Bruchteil aller Moleküle, den die

„pendelnden“ Moleküle bilden, oder — was auf dasselbe herauskommt — die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmtes Molekül wegen Mangel an Rotationsenergie eine solche Pendelbewegung ausführt, ist eine abnehmende Funktion der *Temperatur* des betreffenden Körpers. Diese Funktion läßt sich näherungsweise auf Grund des *Maxwellschen* Verteilungsgesetzes ermitteln. Man kann nämlich leicht zeigen, daß im Falle zweiatomiger Moleküle, die zwei Rotationsfreiheitsgrade besitzen, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Rotationsenergie  $W$  im Intervalle  $dW$  liegt, proportional dem Produkte von  $dW$  mit

$$e^{-\frac{W}{kT}}, \quad (7)$$

ist, wo  $T$  die absolute Temperatur und  $k$  die bekannte Boltzmannsche Konstante bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Energie gleich oder kleiner als ein vorgegebener Wert  $W_0$  ist, drückt sich folglich durch die Formel

$$\int_0^{W_0} e^{-\frac{W}{kT}} dW : \int_0^{\infty} e^{-\frac{W}{kT}} dW = 1 - e^{-\frac{W_0}{kT}} \quad (7a)$$

aus. Man kann die pendelnden Moleküle von den rotierenden näherungsweise durch den Grenzwert  $W_0 = pE^0$  trennen; das ist die kinetische Energie, die notwendig ist, damit ein zum Feld  $\mathfrak{E}^0$  senkrecht orientiertes Molekül die zu  $\mathfrak{E}^0$  entgegengesetzte Richtung erreichen kann.

Wir sehen also, daß der Bruchteil der Moleküle, die wegen ihrer Orientierung zur Polarisation des Körpers beitragen, näherungsweise gleich  $1 - e^{-\frac{pE^0}{kT}}$  ist; bei genügend schwachen Feldern oder nicht zu tiefen Temperaturen (d. h. bei der Bedingung  $pE^0 \ll kT$ ) reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$\frac{pE^0}{kT}.$$

Um die gesuchte Orientierungspolarisation der Größenordnung nach zu bestimmen, genügt es, diesen Ausdruck mit  $Np$  zu multiplizieren. Es wird folglich

$$\mathfrak{P} \sim \frac{Np^2}{kT} \mathfrak{E}^0. \quad (7b)$$

Die angeführte, anschauliche, aber ungenaue Überlegung<sup>1)</sup> wollen wir nun durch eine exakte, von *Debye* herrührende Überlegung, die zuerst von *Langevin* auf die magnetische Polarsiation desselben Typus angewandt worden ist, ersetzen. Die Maxwellsche oder eher *Boltzmannsche* Wahrscheinlichkeitsfunktion (7) bezieht sich bekanntlich nicht nur auf die kinetische Energie, sondern auch auf die *potentielle* und ebenfalls auf die Summe beider Energieformen, d. h. auf die vollständige Energie.

<sup>1)</sup> Sie rührt von *W. Pauli* her.

Bei der Betrachtung des Orientierungseffektes und anderer Effekte derselben Art, die *unmittelbar* nur durch die Koordinaten der Moleküle und nicht durch ihre Geschwindigkeiten bedingt werden, kann man von der kinetischen Energie ganz absehen und dementsprechend unter  $W$  die *potentielle* Energie eines Moleküls verstehen. Bezeichnet man mit  $\overline{F}$  den *geometrischen* Mittelwert irgend einer Funktion  $F$  der Koordinaten, d. h. denjenigen Mittelwert, welcher der *Gleichwahrscheinlichkeit* aller Konfigurationen (oder im betrachteten Falle aller Orientierungen entspricht), so läßt sich der *physikalische* oder *statistische* Mittelwert derselben Funktion unter Berücksichtigung von (7) nach der Formel

$$[\overline{F}] = \frac{\overline{F e^{-\frac{W}{kT}}}}{\overline{e^{-\frac{W}{kT}}}} \tag{8}$$

berechnen.

Die potentielle Energie eines Moleküls, dessen Dipolmoment den Winkel  $\Theta$  mit der Feldrichtung bildet, ist gleich

$$W = -\mathfrak{E}^0 \cdot \mathfrak{p} = -E^0 p \cos \Theta.$$

Wenn diese Energie kein gegen  $kT$ , d. h. gegen die mittlere Energie der Wärmebewegung ist, kann man für ihren statistischen Mittelwert die Reihenentwicklung

$$[\overline{W}] = \frac{\overline{W e^{-\frac{W}{kT}}}}{\overline{e^{-\frac{W}{kT}}}} = \frac{\overline{W} - \frac{\overline{W^2}}{kT} + \frac{1}{2} \frac{\overline{W^3}}{(kT)^2} - \frac{\overline{W^4}}{6(kT)^3} + \dots}{1 - \frac{\overline{W}}{kT} + \frac{1}{2} \frac{\overline{W^2}}{(kT)^2} - \frac{\overline{W^3}}{6(kT)^3} + \dots}$$

benutzen. Es ergibt sich dabei nach den bekannten Formeln (vgl. Bd. I, S. 238)

$$\overline{\cos \Theta} = 0, \quad \overline{\cos^2 \Theta} = \frac{1}{3}, \quad \overline{\cos^3 \Theta} = 0, \quad \overline{\cos^4 \Theta} = \frac{1}{5}, \quad \dots$$

$$[\overline{W}] = -\frac{\frac{(E^0 p)^2}{3kT} + \frac{(E^0 p)^4}{30(kT)^3} + \dots}{1 + \frac{(E^0 p)^2}{6(kT)^2}},$$

d. h.

$$[\overline{W}] = -\frac{(E^0 p)^2}{3kT} \left( 1 - \frac{(E^0 p)^2}{15(kT)^2} + \dots \right). \tag{8a}$$

Da andererseits

$$[\overline{W}] = -[\overline{\mathfrak{E}^0 \cdot \mathfrak{p}}] = -\mathfrak{E}^0 \cdot [\overline{\mathfrak{p}}]$$

ist und da der statistische Mittelwert des Vektors  $\mathfrak{p}$  mit der Feldstärke gleichgerichtet ist, genügt es, um diesen Mittelwert zu bekommen, (8a) durch  $-E^0$  zu dividieren. Daraus ergibt sich durch Multipli-

kation mit  $N$  die gesuchte Polarisation

$$\mathfrak{P} = \frac{Np^2}{3kT} \mathfrak{E}^0 \left[ 1 - \frac{1}{15} \left( \frac{E^0 p}{kT} \right)^2 + \dots \right]. \quad (8b)$$

Wir sehen also, daß diese „Orientierungspolarisation“ im Gegensatz zur gewöhnlichen „Striktionspolarisation“ von der Feldstärke *nicht linear* abhängt. Bei sehr großen Feldstärken oder sehr tiefen Temperaturen muß die Polarisation (8b) dem Sättigungswert

$$P_{\max} = Np \quad (8c)$$

zustreben, welcher derselben Orientierung aller Moleküle entspricht. Für diesen Grenzfall ist die Reihenentwicklung (8b) unbrauchbar. Es ist aber nicht schwer, die exakte Form der entsprechenden Funktion zu ermitteln.

Bei derselben Wahrscheinlichkeit aller Orientierungen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Winkel  $\Theta$  im Intervall  $d\Theta$  liegt, bekanntlich gleich  $\frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi \sin \Theta d\Theta = \frac{1}{2} \sin \Theta d\Theta = -\frac{1}{2} d \cos \Theta$ . Daraus folgt

$$[\bar{W}] = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\pi W e^{-\frac{W}{kT}} d \cos \Theta \int_{-1}^{+1} e^{ax} x dx}{\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-\frac{W}{kT}} d \cos \Theta \int_{-1}^{+1} e^{ax} dx} = -E^0 p \frac{-1}{+1}$$

wo zur Abkürzung

$$W = a \cos \Theta, \quad a = \frac{E^0 p}{kT} \quad (9)$$

gesetzt ist. Nun gilt

$$\int_{-1}^{+1} e^{ax} x dx = \frac{\partial}{\partial a} \int_{-1}^{+1} e^{ax} dx = \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^a - e^{-a}}{a} = \frac{e^a + e^{-a}}{a} - \frac{e^a - e^{-a}}{a^2}.$$

Es wird folglich

$$[W] = -E^0 p \left( \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right)$$

oder

$$P = Np \left( \coth a - \frac{1}{a} \right). \quad (9a)$$

Bei kleinen Werten von  $a$  ergibt sich aus dieser *Langevin-Debyeschen* Formel wieder die Reihe (8b).

Im Falle von Gasen, wo die effektive Feldstärke  $E^0$  mit der totalen  $E$  praktisch übereinstimmt, kann man sofort durch Division von (8b) mit  $E^0$  die Orientierungssuszeptibilität bestimmen. Sonst muß man sie aus der transzendenten Gleichung, die sich ergibt, wenn man in (8b)  $E^0 = E + \frac{4\pi}{3} P$  einsetzt, ermitteln. Es ist aber dabei auch die

Striktionspolarisation zu berücksichtigen. Mit einer gewöhnlich genügenden Approximation kann man sie einfach zu (8b) addieren und sich auf die zwei ersten Glieder dieser Reihe beschränken. Wenn man noch im zweiten Gliede  $\frac{4\pi}{3} P$  gegen  $E$  vernachlässigt, so bekommt man für die vollständige Dielektrizitätskonstante als Funktion der Dichte ( $N$ ) der Temperatur und der Feldstärke die folgende Formel [vgl. (4a)]

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = N \left[ \alpha + \frac{p^2}{3kT} \left( 1 - \frac{1}{15} \left( \frac{pE}{kT} \right)^2 \right) \right]. \quad (9b)$$

Mittels dieser Formel lassen sich die natürlichen Momente der Moleküle aus experimentellen Daten über die Temperaturabhängigkeit von  $\epsilon$  bestimmen. Man bekommt dabei Zahlenwerte von der Größenordnung  $10^{-18}$  (z. B.  $p = 1,87 \cdot 10^{-18}$  für Wasser), was nach der angenäherten Beziehung  $p = ed$  bei  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  (Elementarladung) einem Abstand  $d \approx 10^{-8}$  cm zwischen den Ionen, aus welchen das Molekül besteht, entspricht. — Die angeführten Resultate bleiben selbstverständlich nicht nur bei zweiatomigen Molekülen, sondern auch bei mehratomigen Molekülen mit festen Dipolmomenten gültig. Die entsprechenden, aus solchen Molekülen bestehenden Flüssigkeiten und Gase sind gerade durch die starke Temperaturabhängigkeit ihrer Dielektrizitätskonstante ausgezeichnet. Bei den gewöhnlichen nicht polaren (oder „homopolaren“) Substanzen ist die Dielektrizitätskonstante eine von der Temperatur praktisch unabhängige Größe.

#### 4. Orientierungseffekt im Falle nicht-polarer Moleküle.

Es muß aber erwähnt werden, daß auch in diesem Falle eine vielleicht auch sehr schwache Temperaturabhängigkeit stattfindet, solange die Moleküle in elektrischer Hinsicht keine Kugelsymmetrie besitzen, d. h. solange die Hauptkomponenten ihres Polarisationstensors nicht einander gleich sind. Denn die potentielle Energie eines solchen Moleküls in einem gegebenen äußeren Felde  $\mathcal{E}^0$  hängt — obwohl in nicht so hohem Grade wie bei Dipolmolekülen — von seiner Orientierung ab. In dem oben betrachteten Falle eines zweiatomigen Moleküls entspricht die Lage *a* (Figurenachse parallel zur Feldrichtung) dem Minimum und die Lage *b* (Figurenachse senkrecht zur Feldrichtung) dem Maximum der potentiellen Energie. Dies bedeutet, daß das Molekül im allgemeinen ein Drehmoment  $p \times \mathcal{E}^0$  erfährt, welches seine Figurenachse parallel zur Feldrichtung einzustellen sucht. Die entgegengesetzten Orientierungen sind dabei energetisch äquivalent (im Gegensatz zu den Dipolmolekülen, wo sie entgegengesetzten Werten der Energie entsprechen). In der Tat bezeichnet man den Winkel zwischen der Feldrichtung und der Figurenachse mit  $\theta$ , so bekommt man nach (1)

oder (1a) mit Rücksicht auf  $\alpha_2 = \alpha_3$  den folgenden Ausdruck für die Energie

$$W = -\frac{1}{2} \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{E}^0 = -\frac{1}{2} E^{02} (\alpha_1 \cos^2 \Theta + \alpha_2 \sin^2 \Theta). \quad (10)$$

Es wird dabei vorausgesetzt, daß die Feldstärke in der (1, 2)-Ebene liegt. Wegen der Symmetrie der Moleküle ist aber die Wahl dieser Ebene, sofern sie die Figurenachse enthält, belanglos. Im allgemeinen Falle eines Moleküls mit drei verschiedenen Hauptpolarisationskoeffizienten muß man (10) durch

$$W = -\frac{1}{2} E^{02} (\alpha_1 \cos^2 \Theta + \alpha_2 \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi + \alpha_3 \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi) \quad (10a)$$

ersetzen, wo  $\varphi$  den Winkel zwischen der (1, 2)-Ebene und der (1,  $E^0$ )-Ebene bedeutet.

Die Formel (10) läßt sich auch in der folgenden Gestalt schreiben:

$$W = -\frac{1}{2} E^{02} (\alpha_2 + \Delta \cos^2 \Theta) \quad (10b)$$

mit

$$\Delta = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (10c)$$

Wir haben früher bei der Berechnung des mittleren Polarisationskoeffizienten  $\alpha$  nach den Formeln (5) oder (6a) alle Orientierungen als gleichwahrscheinlich angenommen. Diese Formeln stellen folglich den geometrischen und nicht den statistischen Mittelwert dar. Um diesen statistischen Mittelwert  $[\bar{\alpha}] = \alpha$  zu erhalten, berechnen wir wieder den statistischen Mittelwert der Energie  $W$  nach der schon benutzten Formel

$$[\bar{W}] = \overline{W e^{-\frac{W}{kT}} : e^{-\frac{W}{kT}}}.$$

Es wird dabei nach (10b):

$$[\bar{W}] = -\frac{1}{2} E^{02} (\alpha_2 + \Delta \cos^2 \Theta) e^{+\frac{E^{02} \Delta \cos^2 \Theta}{2kT}} : e^{+\frac{E^{02} \Delta \cos^2 \Theta}{2kT}} \quad (11)$$

oder mit der Abkürzung

$$b = \frac{E^{02} \Delta}{2kT} \quad (11a)$$

$$[\bar{W}] = -\frac{1}{2} E^{02} \left\{ \alpha_2 + \Delta \cdot \frac{\cos^2 \Theta \left( 1 + b \cos^2 \Theta + \frac{1}{2} b^2 \cos^4 \Theta \dots \right)}{1 + b \cos^2 \Theta + \frac{1}{2} b^2 \cos^4 \Theta \dots} \right\}.$$

Unter Weglassung von Gliedern dritter und höherer Ordnung in  $\Delta$  ergibt sich daraus mit Rücksicht auf  $\overline{\cos^2 \Theta} = \frac{1}{3}$  und  $\overline{\cos^4 \Theta} = \frac{1}{5}$ ,

$$[\bar{W}] = -\frac{1}{2} E^{02} \left\{ \alpha_2 + \frac{1}{3} \Delta \left( 1 + \frac{4}{15} b \right) \right\}.$$

Andererseits gilt nach der Definition von  $\alpha = [\bar{\alpha}]$

$$[\bar{W}] = -\frac{1}{2} \alpha E^{02}.$$

Wir bekommen folglich

$$\alpha = \alpha_2 + \frac{1}{3} (\alpha_1 - \alpha_2) \left( 1 + \frac{2}{15} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E^{02}}{\hbar T} \right). \quad (11b)$$

Bei kleinen Feldstärken oder hohen Temperaturen geht dieser Ausdruck in den früheren (6b) über.

Wir haben bisher das elektrische Feld als homogen vorausgesetzt. Bei stark inhomogenen Feldern treten zusätzliche Striktions- und Orientierungseffekte auf, die man durch Einführung induzierter und natürlicher Quadrupolmomente berücksichtigen kann. Diese Komplikationen spielen aber in der makroskopischen Elektrostatik, die nur mit schwach inhomogenen Feldern zu tun hat, gar keine Rolle.

## § 2. Magnetostatische Polarisation (dia-, para- und ferromagnetische Erscheinungen).

Die mikroskopische Theorie der magnetischen Polarisation oder kurz der *Magnetisierung* ist in vieler Hinsicht zu der in § 1 dargelegten Theorie der elektrischen Polarisation ganz analog. Der Striktionspolarisation entspricht dabei die *diamagnetische Polarisation*, die ebenfalls einen allgemeinen, bei allen Körpern zu beobachtenden Effekt darstellt. Der Orientierungspolarisation entspricht die *paramagnetische Polarisation*, welche man nur bei solchen Substanzen beobachtet, deren Atome oder Moleküle feste (natürliche) magnetische Momente besitzen. Schließlich gibt es noch eine verhältnismäßig sehr geringe Anzahl *ferromagnetischer* Körper, die unterhalb gewisser „kritischer“ Temperaturen durch eine paramagnetische Polarisation von anomaler Größe und Charakter ausgezeichnet sind (vgl. Kap. II, § 7).

### 1. Das Wesen des Diamagnetismus.

Während die elektrische Striktionspolarisation als eine *elektrostatische* Induktionswirkung aufgefaßt werden kann, läßt sich ihr magnetisches Analogon als eine *elektromagnetische* Induktionswirkung erklären. Bei der Betrachtung der magnetischen Kräfte muß man stets auch die *elektrischen Induktionskräfte*, welche während der Einstellung des Magnetfeldes und bei seiner zeitlichen Änderung immer tätig sind und von deren Arbeit die magnetische Energie herrührt, in Betracht ziehen. Dieselbe Rolle können auch diejenigen „elektromotorischen“ Kräfte spielen, die bei der Bewegung eines materiellen Körpers in einem zeitlich konstanten magnetischen Felde auftreten. Nach dem Relativitätsprinzip sind sie mit den obigen Induktionskräften prinzipiell gleichwertig (vgl. Bd. I, Kap. V).

Die elektrostatische Induktion (oder „Striktion“) hat immer eine positive, d. h. im Sinne des elektrischen Feldes gerichtete Polarisation zur Folge. Die entsprechende *diamagnetische* Polarisation hat aber

dagegen eine zur magnetischen Feldstärke immer *umgekehrte Richtung*. Dabei bleibt sie dieser Feldstärke streng proportional und ist von der Temperatur und anderen Zustandsgrößen, ebenso wie ihr elektrisches Analogon, praktisch unabhängig. Diese Tatsachen können, worauf schon *Ampère* hingewiesen hat, in einer quasi-makroskopischen Weise erklärt werden, wenn man annimmt, daß sich die Atome und Moleküle gegenüber dem magnetischen Feld, ebenso wie gegenüber dem elektrischen, wie sehr kleine *ideal* leitende Teilchen verhalten. Eine solche grob modellmäßige Erklärung des Diamagnetismus, bei welcher das Molekül durch einen elementaren Stromleiter ersetzt wurde, haben wir schon in Kap. II, § 4 angeführt. Man kann sie aber leicht verfeinern und präzisieren, und zwar indem man statt des elementaren linearen Stromleiters ein Atom mit einem um seinen Mittelpunkt kreisenden Elektron einführt. Die Eigenenergie des Stromes  $\frac{1}{2} Li^2$  ( $L$ -Selbstinduktionskoeffizient,  $i$ -Stromstärke) muß man dabei einfach durch die kinetische Energie des Elektrons  $\frac{1}{2} mv^2$  ersetzen. Es wird dann nach der Formel (20a), Kap. II

$$\frac{1}{2} m v^2 = - \frac{1}{2} m \cdot \mathfrak{H} . \quad (12)$$

Bei der Ableitung dieser Formel haben wir nur die Arbeit der elektromotorischen Kräfte berücksichtigt, d. h. keine anderen Kräfte als diese elektrischen Induktionskräfte in Betracht gezogen. In dem Augenblick, wo die magnetische Feldstärke ihren konstanten Endwert  $\mathfrak{H}$  erreicht, müssen die elektrischen Induktionskräfte verschwinden und das Elektron muß sich von hier an mit der gewonnenen Geschwindigkeit gleichförmig bewegen. Es ist leicht zu sehen, daß die übrig bleibenden magnetischen Kräfte gerade *diese* durch die elektrischen Kräfte erzeugte und ihnen *als Erbung übergebene Bewegung* bedingen müssen. Bewegt sich nämlich ein Elektron mit der Geschwindigkeit  $v$  senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien (d. h. in der Richtung der *induzierten* elektrischen Kräfte, von denen es, nach unserer Voraussetzung, im Ruhezustand angegriffen wurde), so erfährt es eine ihrem Betrag nach konstante Kraft  $\frac{evH}{c}$ , die in derselben, zu  $\mathfrak{H}$  senkrechten Ebene bleibt und nach der Bahnnormale gerichtet ist. Das Elektron muß folglich (sofern keine anderen Kräfte auf es wirken) eine Kreisbahn beschreiben mit dem Radius  $r$ , der sich aus der Gleichung

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{e v}{c} H$$

bestimmen läßt. Falls das Elektron um ein festes Zentrum kreist, muß das Produkt  $\frac{1}{2} r \frac{ev}{c}$  gleich seinem magnetischen Moment  $m$  sein.

Man könnte dann, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß im Falle eines positiven Elektrons der Umlaufssinn negativ (hinsichtlich der Feldrichtung) ist, die vorhergehende Formel in der Gestalt

$$\frac{1}{2} m v^2 = - m \cdot \mathfrak{H},$$

schreiben. Das Fehlen des Faktors  $\frac{1}{2}$  (auf der rechten Seite) erklärt sich dadurch, daß die obige Definition des magnetischen Moments nur für *gebundene* Elektronen gilt, d. h. für solche Elektronen, die sich (wie im Falle eines linearen Leiters) in einer festen Bahn bewegen oder — wie dies bei Atomen tatsächlich der Fall ist — um ein festes Anziehungszentrum kreisen. Aber im Falle eines *freien* Elektrons, das nur magnetischen Kräften unterworfen ist, muß man nach der Formel (12) das magnetische Moment *verdoppeln*, d. h. es durch das Produkt  $r \frac{ev}{c}$  definieren [vgl. Bd. I, S. 339, Formel (31)].

Die entsprechende Formel für ein gebundenes Elektron muß, wie leicht einzusehen ist, folgendermaßen lauten:

$$\Delta \frac{1}{2} m v^2 = m \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} = - m \cdot \mathfrak{H}, \quad (12a)$$

wo  $\Delta \mathbf{v}$  die zusätzliche, durch das magnetische Feld (oder eher durch die elektrischen Induktionskräfte, welche bei seinem Anwachsen erzeugt wurden) bedingte Geschwindigkeit und  $m$  das *ursprüngliche* magnetische Moment der ungestörten Elektronenbahn bedeuten. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die Änderung dieses Moments  $\Delta m$  relativ sehr klein ist, d. h. daß die Geschwindigkeit des Elektrons bei der Einschaltung des Magnetfeldes nur unbedeutend geändert wird. — Zur Ableitung der Formel (12a) ersetzen wir wieder das kreisende Elektron durch einen elementaren linearen Strom, nehmen aber an, im Gegensatz zu unserer früheren Voraussetzung, daß die ursprüngliche Stromstärke (bei  $H = 0$ ) nicht Null ist, sondern einen sehr großen Wert  $i$  hat, welcher bei Anwachsen des Feldes eine verhältnismäßig kleine Änderung  $\Delta i$  erfährt. Es ergibt sich dann [vgl. die Ableitung der Formel (26) des Kap. II]:

$$\frac{d}{di} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) = - i \frac{d}{di} \int H_n dS,$$

d. h. in erster Näherung

$$L i \Delta i = - i \oint H_n dS = - m \cdot \mathfrak{H}.$$

Das ist aber, wenn man  $\frac{1}{2} L i^2$  durch  $\frac{1}{2} m v^2$  ersetzt, nichts anderes als die Formel (12a). Man könnte sie selbstverständlich auch direkt ab-

leiten durch zeitliche Mittelwertbildung über die Bewegung des Elektrons, ohne irgendwelche Ersatzmodelle einzuführen<sup>1)</sup>).

Falls für die ungestörte Bewegung der Flächensatz gilt, d. h. wenn das mechanische Impulsmoment des Elektrons  $\mathfrak{J} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$  konstant bleibt, muß sich die durch die elektrischen Induktionskräfte bedingte Störung auf eine gleichförmige Präzession reduzieren. Setzt man in der Tat  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ , wo  $\mathbf{v}$  die entsprechende (zusätzliche) Winkelgeschwindigkeit bedeutet, so wird:

$$m\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathfrak{J}$$

und folglich nach (12a) 
$$\mathbf{v} \cdot \mathfrak{J} = -m \cdot \mathfrak{H} \quad (12b)$$

oder, da die Vektoren  $\mathfrak{J}$  und  $m$  einander parallel sind,

$$\mathbf{v} = - \left| \frac{m}{\mathfrak{J}} \right| \mathfrak{H}.$$

Mit der üblichen Definition des magnetischen Momentes

$$m = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{e\mathbf{v}}{c}$$

bekommen wir also

$$\mathbf{v} = - \frac{e}{2cm} \mathfrak{H}. \quad (12c)$$

Das ist aber genau die *Larmorsche Präzessionsgeschwindigkeit*, die, wie in Bd. I (S. 243 und 244) gezeigt wurde, durch ein zeitlich konstantes magnetisches Feld bedingt werden muß.

## 2. Berechnung der diamagnetischen Suszeptibilität.

Es ist nun leicht das dieser Präzessionsbewegung entsprechende zusätzliche magnetische Moment des betrachteten Elektrons auszurechnen. Man hat nämlich nach der Definition von  $m$  für seinen zeitlichen Mittelwert:

$$\Delta m = \frac{e}{2c} \overline{\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{v}} = \frac{e}{2c} \overline{\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})} = \frac{e}{2c} [\overline{\mathbf{v} \mathbf{r}^2} - \overline{\mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}],$$

d. h. wegen (12c)

$$\Delta m = - \frac{e^2}{4c^2 m} [\overline{\mathfrak{H} \mathbf{r}^2} - \overline{\mathbf{r} (\mathfrak{H} \cdot \mathbf{r})}], \quad (13)$$

oder in Koordinatendarstellung (unter Weglassung der Summationszeichen)

$$\Delta m_i = \beta_{ik} H_k \quad (13a)$$

mit

$$\beta_{ik} = - \frac{e^2}{4c^2 m} (\delta_{ik} \overline{x_h x_h} - \overline{x_i x_k}). \quad (13b)$$

<sup>1)</sup> Sie läßt sich übrigens als ein unmittelbarer Ausdruck der Tatsache auffassen, daß die *potentielle Energie* eines gebundenen Elektrons in einem äußeren magnetischen Felde nichts anderes ist als die *zusätzliche kinetische Energie* seiner Umlaufbewegung.

Es bedeuten hier die Querstriche zeitliche Mittelwerte für die *unge- störte* Bewegung. Diese Mittelwerte lassen sich ohne genaue Kenntnis der Bewegung nicht berechnen. Im einfachsten Falle einer ebenen Bewegung mit durchschnittlicher Symmetrie bezüglich der Bahnachse, d. h. der durch den Mittelpunkt (Anziehungszentrum) in Richtung des Impulsmoments gezogenen Geraden, hat man, wenn man diese Gerade zur 1. Achse wählt,

$$\overline{x_1} = 0, \quad \overline{x_2 x_3} = 0, \quad \overline{x_2^2} = \overline{x_3^2} = \frac{1}{2} \overline{r^2}$$

und folglich

$$\left. \begin{aligned} \beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{31} = 0, \\ \beta_{11} = -\frac{e^2 \overline{r^2}}{4 c^2 m}, \quad \beta_{22} = \beta_{33} = -\frac{e^2 \overline{r^2}}{8 c^2 m} = \frac{1}{2} \beta_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Man bekommt dabei für das innere Produkt von  $\Delta m$  und  $\mathfrak{H}$

$$\left. \begin{aligned} (\Delta m) \cdot \mathfrak{H} &= \beta_{11} \left[ H_1^2 + \frac{1}{2} (H_2^2 + H_3^2) \right] = \beta_{11} H^2 \left( \cos^2 \Theta + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \beta_{11} H^2 (1 + \cos^2 \Theta), \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

wo  $\Theta$  den Winkel zwischen der Bahnachse und der Feldrichtung bedeutet.

Nimmt man ferner an, daß alle Orientierungen der Bahnachse (oder Bahnebene) gleichwahrscheinlich sind und bildet den entsprechenden Mittelwert von (14a), so wird

$$\overline{(\Delta m) \cdot \mathfrak{H}} = \frac{2}{3} \beta_{11} H^2$$

oder nach (14)

$$\overline{\Delta m} \cdot \mathfrak{H} = -\frac{e^2 \overline{r^2}}{6 c^2 m} H^2. \quad (14b)$$

Da offenbar der Mittelwert von  $\Delta m$  parallel zur Feldstärke ist, so folgt daraus

$$\overline{\Delta m} = -\frac{e^2 \overline{r^2}}{6 c^2 m} \mathfrak{H}. \quad (14c)$$

Dieses Resultat läßt sich auf den Fall der Atome mit beliebig vielen Elektronen ausdehnen. Denn jedes Atom besteht bekanntlich aus einem Zentralkern mit positiver Ladung und einer Anzahl von „Planetelektronen“, welche dieselbe Ladung  $e = -4,77 \cdot 10^{-10}$  und Masse  $m_0 = 9 \cdot 10^{-28}$  haben. Sie müssen deshalb, sofern man von ihrer Eigenrotation absieht, bei Einschaltung eines äußeren Magnetfeldes ohne Änderung ihrer relativen Konfiguration als ein festes Ganzes um die Feldrichtung mit der durch (12c) bestimmten Winkelgeschwindigkeit präzessieren. Um das zusätzliche magnetische Moment des ganzen Atoms zu ermitteln, genügt es folglich, die oben berechneten Beiträge der einzelnen Elektronen einfach zu addieren. Eine wesentliche Rolle spielen dabei nur die *äußeren* Elektronen, deren Bahnradius ( $r$ ) von der Größenordnung  $10^{-8}$  cm ist. Da diese (mittleren) Bahnradien quadratisch im Aus-

druck von  $\Delta m$  eintreten, können die inneren Elektronen nur einen verhältnismäßig kleinen Beitrag zu  $\Delta m$  liefern.

Die Eigenrotation der Elektronen kann auf die Größe des gesamten induzierten Momentes des Atoms keinen *unmittelbaren* Einfluß haben (sie ist in dieser Hinsicht vollkommen einer Bewegung in einer Bahn von den Eigendimensionen des Elektrons selbst äquivalent). Sie muß sich aber *indirekt* äußern, und zwar in der durch sie bedingten Störung in der *Umlaufsbewegung* des Elektrons. Diese Störung darf keineswegs als unwesentlich angesehen werden, besonders bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes. Denn die natürliche Präzessionsgeschwindigkeit für die Eigenrotation ist zweimal größer als die *Larmorsche*. Sofern die Drehimpulse der Rotations- und der Umlaufsbewegung miteinander fest gekoppelt bleiben, müssen sie um das resultierende Impulsmoment des Elektrons präzessieren, während das letztere mit einer „kompromißhaften“, zwischen  $o$  und  $2o$  liegenden Winkelgeschwindigkeit um die Feldrichtung präzessiert.

Wir können aber auf diese Einzelheiten hier nicht näher eingehen, denn sie gehören zur eigentlichen mikroskopischen Theorie, die wir erst in Bd. III ausführlich behandeln werden. Wir müssen vielmehr schon damit zufrieden sein, daß die dargelegte quasi-mikroskopische Theorie<sup>1)</sup> nicht nur den allgemeinen Charakter der betrachteten Erscheinung, sondern auch seine Größenordnung zu bestimmen gestattet.

Was diese Größenordnung anbetrifft, so ergibt sich für das Verhältnis  $\left| \frac{\Delta m}{\mathfrak{M}} \right|$  nach (14c) mit  $e \cong -4,8 \cdot 10^{-10}$ ,  $m = 9 \cdot 10^{-28}$ ,  $c = 3 \cdot 10^{10}$  und  $r \cong 10^{-8}$  cm etwa  $4 \cdot 10^{-30}$ . Um die Größenordnung der diamagnetischen Suszeptibilität  $\chi$  eines festen oder flüssigen Körpers zu bestimmen, muß man diese Zahl noch durch das von einem Atom durchschnittlich eingenommene Volum (etwa  $10^{-23} - 10^{-24}$  cm<sup>3</sup>) dividieren. Es ergibt sich dabei  $-\chi \cong 10^{-6} - 10^{-7}$ , und das ist tatsächlich der Maximalwert der experimentell bestimmten diamagnetischen Suszeptibilitäten verschiedener Substanzen (abgesehen von einigen Ausnahmefällen).

Wegen dieser Kleinheit der diamagnetischen Suszeptibilität braucht man bei ihrer theoretischen Bestimmung den Unterschied zwischen der effektiven und der totalen (gemittelten) Feldstärke gar nicht zu berücksichtigen. Es ist ebenfalls kaum nötig, die beiden Suszeptibilitäten  $\gamma = \frac{M}{H}$  und  $\chi = \frac{M}{B}$  ( $B = H - 4\pi M$ ) zu unterscheiden, da sie praktisch zusammenfallen. Für isotrope Körper kann man also einfach setzen:

$$\mathfrak{M} = \chi \mathfrak{H} \quad (15)$$

mit

$$\chi \cong - \frac{Ne^2}{6c^2m} \sum \bar{r}^2, \quad (15a)$$

<sup>1)</sup> Sie ist ebenso wie die Theorie des Paramagnetismus zuerst von *Langevin* entwickelt worden.

wo  $N$  die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit bedeutet und die Summe  $\sum \bar{r}^2$  auf alle Elektronen, die sich in einem Molekül befinden, zu erstrecken ist.

Den Fall diamagnetisch anisotroper Körper wollen wir nicht diskutieren. Es sei bemerkt, daß diese Anisotropie nur von einer bestimmten *Orientierung der Atome* herrühren kann, nicht aber von ihrer Wechselwirkung wie im Falle der elektrischen Striktionspolarisation.

### 3. Paramagnetismus.

Eine solche Orientierung ist selbstverständlich nur in dem Fall möglich, wenn die Atome in magnetischer Hinsicht nicht kugelsymmetrisch sind, d. h. wenn sie ein von Null verschiedenes Moment haben. In diesem Fall tritt aber neben der diamagnetischen Polarisation noch eine durch die orientierende Wirkung des Feldes unmittelbar bedingte *paramagnetische Polarisation* auf, die sie gewöhnlich vollkommen überdeckt. Diese paramagnetische Polarisation läßt sich formal in genau derselben Weise wie die entsprechende elektrische Orientierungspolarisation behandeln. Sie hängt in der Tat nicht von den elektromotorischen, sondern von der „pondermotorischen“ Wirkung des Magnetfeldes ab, d. h. von dem durch dieses Feld ausgeübten *Drehmoment*  $\mathfrak{m} \times \mathfrak{H}^0$  ( $\mathfrak{m}$ -resultierendes magnetisches Moment des Atoms,  $\mathfrak{H}^0$ -effektive Feldstärke) oder der *entsprechenden potentiellen Energie*

$$W = -\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{H}^0. \quad (16)$$

Sie muß deshalb im Gegensatz zur diamagnetischen Polarisation eine *positive* Richtung — ebenso wie im elektrischen Falle — haben. Seine Größe kann man folglich durch die (*Langevinsche*) Formel

$$\left. \begin{aligned} M &= Nm \left( \coth a - \frac{1}{a} \right) \\ a &= \frac{m H^0}{k T} \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

bestimmen oder näherungsweise durch die Formel

$$\mathfrak{M} = \frac{Nm^2}{3kT} \mathfrak{H}^0 \left[ 1 - \frac{1}{15} \left( \frac{H^0 m}{kT} \right)^2 + \dots \right], \quad (16b)$$

die sich aus (9a) bzw. (8a) ergeben, wenn man  $\mathfrak{p}$  durch  $\mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{E}^0$  durch  $\mathfrak{H}^0$  ersetzt.

Es muß dabei beachtet werden, daß diese Identität der elektrischen und magnetischen Orientierungspolarisation rein formaler Natur ist und daß sie ihrem Mechanismus nach voneinander ganz verschieden sind. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß die elektrische Polarisation durch das Pendeln der Dipolmoleküle mit geringer Drehungsenergie um die Feldrichtung entsteht. Das magnetische Feld kann eine solche Pendelbewegung nicht bedingen. Seine *Tendenz*, die magnetischen Atome oder die einzelnen Magnetonen (Elektronenbahnen) in seine eigene Richtung

einzustellen, wird durch den gyroskopischen Effekt vollkommen zerstört; deshalb entsteht statt der Orientierung eine *Präzessionsbewegung* der Atome um die Feldrichtung. Diese Präzessionsbewegung bedingt aber, wie wir soeben gezeigt haben, eine diamagnetische Polarisation. Der sich aus der formalen statistischen Betrachtung ergebende — und tatsächlich beobachtbare — Orientierungseffekt ist folglich nicht als direkte Wirkung des Magnetfeldes selbst anzusehen, sondern ist der kombinierten Wirkung dieses Feldes und gewisser anderer durch die Wärmebewegung der Atome oder durch ihre Wärmestrahlung bedingten Kräfte zuzuschreiben. Diese zusätzlichen Wechselwirkungskräfte spielen also eine doppelte Rolle: einerseits eine begünstigende und andererseits verzögernde, denn mit der Erhöhung der Temperatur muß die Orientierungspolarisation nach (16a) und (16b) rasch abnehmen.

Während die elektrische Orientierungspolarisation nur in Gasen und Flüssigkeiten mit zwei oder mehratomigen Molekülen stattfindet, kann die „Paramagnetisierung“ ebensogut bei einatomigen Substanzen im festen Zustand auftreten, wobei ihre Abhängigkeit von der Feldstärke und der Temperatur durch dieselbe Langevinsche Formel ausgedrückt wird. Diese Tatsache erklärt sich dadurch, daß die einzelnen Atome keine *angreifbaren* elektrischen Dipolmomente besitzen, und daß die Moleküle, bei welchen solche Dipolmomente vorhanden sind, in festen Körpern sich weder drehen noch orientieren können. — Die magnetischen Momente dagegen sind schon bei den einzelnen Atomen oder sogar Elektronen vorhanden; ihre Orientierung kann deshalb unabhängig von der chemischen Zusammensetzung und dem Aggregatzustand entstehen.

Wie schon in Bd. I (S. 245) erwähnt wurde, sind die magnetischen Momente der Atome kleine Vielfache einer Elementargröße  $|m| \approx 10^{-20}$ . Diese Tatsache, die zuerst von *Weiß* experimentell gefunden worden ist, werden wir in Bd. III erklären. Hier sei nur eine kleine Überschlagsrechnung zur Prüfung der Größenordnung angeführt. — Im Falle eines Elektrons, welches sich in einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$  um ein festes Zentrum mit der entgegengesetzten Ladung ( $-e$ ) bewegt, muß die folgende Gleichung gelten:

$$\text{(Zentrifugalkraft)} \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \text{ (Anziehungskraft).}$$

Es ergibt sich daraus

$$|m| = \frac{e}{2c} rv = \frac{e^2}{2c} \sqrt{\frac{r}{m}}.$$

Setzt man hier  $r \approx 10^{-8}$ , was ungefähr den Bahndimensionen der äußeren Elektronen entsprechen muß, so wird mit den üblichen Werten für  $e$ ,  $c$  und  $m$ :

$$|m| \approx 3 \cdot 10^{-20}$$

in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Daraus folgt ferner, daß der Sättigungswert von  $M$ , d. h. das Produkt  $N|m|$  die Größenordnung  $10^3 - 10^4$  haben muß. Der größte tatsächlich beobachtete Wert ist gleich etwa  $2 \cdot 10^3$  (im Falle von Eisen). — Bei tiefen Temperaturen kann dieser Sättigungswert schon bei verhältnismäßig sehr schwachen äußeren Magnetfeldern erreicht werden. Bei hohen Temperaturen bleibt dagegen die paramagnetische Polarisation auch in starken Feldern sehr gering, obwohl doch im allgemeinen viel größer als die diamagnetische.

#### 4. Ferromagnetische Erscheinungen.

Bei großen Werten von  $M$  muß man die effektive Feldstärke  $H^0$  von der totalen  $H$  und von der magnetischen Erregung  $B$  scharf unterscheiden. Es ist dabei zu beachten, daß bei den gewöhnlichen experimentellen Bedingungen  $B$  mit der äußeren Feldstärke zusammenfällt (vgl. Kap. I, §3). — Will man also nach der *Langevinschen* Formel (16a) die Magnetisierung als Funktion dieser äußeren Feldstärke bestimmen, d. h. die übliche magnetische Suszeptibilität  $\chi = \frac{M}{B}$  berechnen, so muß man  $H^0 = H - \frac{8\pi}{3} M = B + \frac{4\pi}{3} M$  setzen und die Möglichkeit berücksichtigen, daß  $M$  eventuell viel größer als  $B$  ist.

In diesem Fall ist eine direkte Ermittlung von  $\chi$  aus (16a) kaum möglich, und es ist vorteilhafter, die folgende von *Weiß* eingeführte graphische Methode zu benutzen.

Man zeichnet einerseits die *Langevinsche* Kurve  $M = L(a)$  nach (16a) und andererseits die „Lorentzsche Gerade“

$$a = \frac{|m|}{kT} \left( B + \frac{4\pi}{3} M \right)$$

mit  $a$  als Abszisse,  $M$  als Ordinate und  $B$  als *willkürlich angebbarem Parameter*.

Der Allgemeinheit halber ersetzen wir den Lorentzschcn Koeffizient  $\frac{4\pi}{3}$  durch einen zunächst unbestimmten Zahlenkoeffizient  $s$ . Es wird dabei

$$H^0 = B + sM \quad (17)$$

und

$$M = \frac{1}{s} \left( \frac{kT}{m} a - B \right) \quad (17a)$$

Der Wert von  $M$ , welcher einem gegebenen Wert von  $B$  und  $T$  entspricht, ergibt sich als die Ordinate des Schnittpunktes der *Langevinschen* Kurve und der Gerade (17a). Dabei bestimmt die Temperatur die Neigung dieser Geraden gegen die  $a$ -Achse und die Erregung ihren Schnittpunkt mit der  $M$ -Achse (Abb. 5).

Aus dieser graphischen Darstellung lassen sich leicht die folgenden Schlüsse ziehen.

1. Solange der Neigungskoeffizient der Geraden (17a)  $\frac{kT}{sm}$  kleiner ist als der Neigungskoeffizient  $\frac{1}{3} Nm$  der Tangente zur Langevinschen Kurve im Nullpunkt  $O$  [vgl. die asymptotische Formel (16b)], bleibt die Magnetisierung auch bei  $B = 0$ , d. h. bei Verschwinden des äußeren Feldes von Null verschieden. Die „kritische Temperatur“, unterhalb welcher diese *remanente Magnetisierung* existieren kann, ist folglich gleich

$$\Theta = \frac{s}{3} \frac{Nm^2}{k}. \quad (18)$$

Oberhalb dieser Temperatur kann die Abhängigkeit der Magnetisierung von der Erregung  $B$  (bei kleinen Werten von  $B$ ) näherungsweise durch die aus (16b) und (17) folgende Formel

$$M = \frac{Nm^2}{3kT} (B + sM)$$

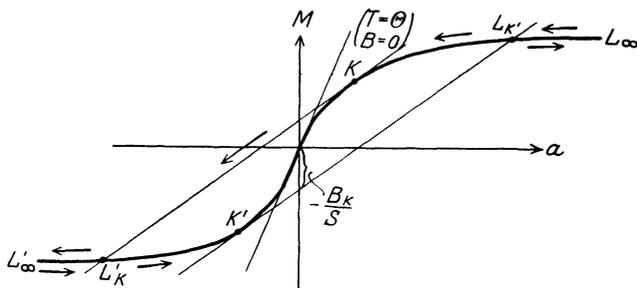


Abb. 5.

dargestellt werden. Ersetzt man hier den Koeffizienten  $s$  nach (18) durch  $\frac{3k\Theta}{Nm^2}$ , so wird

$$M = \frac{Nm^2 B}{3k(T - \Theta)}. \quad (18a)$$

Bei  $\Theta = 0$  bekommt man das von *Curie* experimentell gefundene Gesetz  $MT = \text{konst. } B$ . Die kritische Temperatur wird gewöhnlich als die *Curie-Temperatur* bezeichnet.

2. Unterhalb der kritischen Temperatur bekommt man für denselben Wert der Erregung im allgemeinen drei verschiedene Werte der Magnetisierung, die drei Schnittpunkten der Langevinschen Kurve mit der Geraden (17a) entsprechen. Um diese Tatsache zu erklären, stellen wir uns zunächst vor, daß die Erregung einen sehr großen positiven Wert hat, bei welchem der Sättigungszustand erreicht wird. Es gibt in diesem Falle nur *einen* Schnittpunkt  $L_\infty$  (ebenso wie bei  $T > \Theta$ ), und zwar für  $M = +Nm = M_{\text{max}}$ . Wenn man nun bei konstanter Temperatur die Erregung verkleinert, d. h. die Gerade (17a) bei festgehaltener Neigung nach oben verschiebt, bekommt man neben dem ersten Schnittpunkt, der sich dabei allmählich nach unten und nach links verschiebt, einen Berührungspunkt  $K'$  auf dem negativen Aste der

Kurve. Der entsprechende Schnittpunkt mit dem positiven Ast sei mit  $L_k$  und die Erregung mit  $B_k$  bezeichnet. Obwohl die „mathematische Möglichkeit“ besteht, daß die Magnetisierung in diesem Augenblick auf die negative Achse überspringt, kann sich diese Möglichkeit offenbar nicht verwirklichen, und bei weiterer Abnahme der Erregung wird sich die Magnetisierung in einer ähnlichen Weise wie bisher ändern, einen positiven Wert beibehaltend, bis man die Richtung der Erregung umkehrt und den negativen Wert  $B = -B_k$  erreicht. Bei diesem Werte von  $B$  berührt die Gerade (17a) den positiven Ast im Punkte  $K$  und schneidet den negativen im Punkte  $L'_k$ , die symmetrisch (bezüglich  $O$ ) zu den Punkten  $K'$  und  $L'_k$  liegen. Wenn man die Erregung noch ferner in der negativen Richtung vergrößert, muß die Magnetisierung zu dem negativen Wert, welcher dem Schnittpunkte  $L'_k$  entspricht, überspringen (positive Werte von  $M$  sind nicht mehr möglich!) und schließlich den negativen Sättigungswert  $M = -Nm$  erreichen.

Nachdem man in umgekehrter Ordnung zur ursprünglichen positiven Erregung zurückgekehrt ist, wird man nicht die früheren Werte der Magnetisierung bekommen, sondern Werte, die der Strecke  $L'_\infty - L'_k - K'$  des negativen Astes entsprechen und dann der  $L_k - L_\infty$ -Strecke des positiven Astes.

Wir sehen also, daß die Strecken  $K - K'$  zwischen den beiden Berührungspunkten *niemals* und die Strecken  $L_k \rightarrow K$  und  $L'_k \rightarrow K'$  nur *einmal* in der durch die Pfeile angedeuteten Richtung passiert werden können. Die Übergangspunkte  $KK'$  sind dabei um so mehr von dem Nullpunkt  $O$  entfernt, je weniger die Neigung der Geraden, d. h. je tiefer die Temperatur ist.

Wir bekommen folglich für die Temperaturen, die unterhalb der kritischen Temperatur  $\Theta$  liegen, eine teilweise zweideutige Abhängigkeit der Magnetisierung von der Erregung, die durch die Abb. 6 graphisch dargestellt ist. Diese Kurve ist nichts anderes als eine Schematisierung der in Kap. II, § 7 schon angeführten experimentellen Hysteresiskurve der ferromagnetischen Substanzen (vgl. Abb. 3). Die Größen  $M_k$  und  $B_k$ , d. h. die *remanente Magnetisierung* und die sogenannte *Koerzitivität* (oder „koerzitive Kraft“) sind dabei gewisse Funktionen der Temperatur, die nach der graphischen Methode der Abb. 5 leicht bestimmt werden können; bei Annäherung der Temperatur an den kritischen Punkt streben sie gegen Null und bei  $T \geq \Theta$  verschwinden sie.

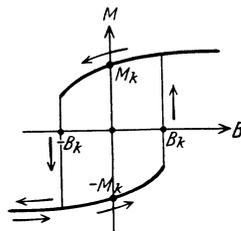


Abb. 6.

Wir sehen also, daß die am Anfang dieses Paragraphen angeführte Einteilung der positiv magnetisierbaren Körper in para- und ferromagnetische theoretisch nicht zutreffend ist. Wir sollten vielmehr sagen, daß

die paramagnetischen Körper in zwei *Zuständen* existieren können, die etwa dem gasförmigen und dem flüssigen Aggregatzustand der Materie entsprechen und die voneinander in einer ähnlichen Weise — durch eine bestimmte kritische Temperatur — getrennt sind.

Was die Größenordnung dieser Temperatur anbetrifft, so sollte man dafür nach den oben erwähnten Daten für  $N|\mathbf{m}|$  und  $|\mathbf{m}|$  in Verbindung mit dem bekannten Wert der Boltzmannschen Konstante ( $k \underline{\approx} 1,4 \cdot 10^{-16}$ ) und bei Benutzung des *Lorentz*schen Wertes für den Koeffizienten  $s \left( = \frac{4\pi}{3} \right)$  etwa  $\Theta = 1$  Grad (Maximum!) bekommen. Tatsächlich aber *liegt die kritische Temperatur* im Falle von Eisen und anderer eigentlich ferromagnetischer Körper *zwischen etwa 500 und 1000 Grad* (der absoluten Skala). Will man also die dargelegte Theorie des Ferromagnetismus — oder des ferromagnetischen Zustandes — behalten, so muß man den *Lorentz*schen Koeffizienten  $s$  etwa *tausendmal vergrößern*. *P. Weiß*, von welchem diese Theorie herrührt, hat das sich ergebende zusätzliche Glied  $sM$  in (17) als *molekulares Feld* bezeichnet. Es ist aber sicher unmöglich, die Größe  $sM$  bei  $s \underline{\approx} 1000$  als eine wirkliche magnetische Feldstärke zu deuten. Denn die (gemittelte) totale Feldstärke  $H = B + 4\pi M$  muß bei verhältnismäßig kleinen Werten von  $B$  von der Größenordnung  $13 \cdot M$  sein. Dies gibt im Sättigungszustand ungefähr  $H \underline{\approx} 25000$ , während das *Weiß*sche molekulare Feld von der Größenordnung  $10^7$  ist.

Die rein formale Natur des *Weiß*schen molekularen Feldes folgt am klarsten aus der Tatsache, daß sich die Suszeptibilität mancher paramagnetischer Stoffe (z. B. des Sauerstoffes und einer großen Anzahl von Salzen) sehr genau durch die Formel (18a) mit einem *negativen Wert der Konstante*  $\Theta$  ausdrückt. Dies entspricht offenbar einem negativen Wert des Koeffizienten  $s$  und folglich einem negativen molekularen Feld.

Die *Langevin-Weiß*sche Theorie kann also nur als *formal* richtig anerkannt werden; den eigentlichen *Mechanismus* des äußeren (von  $B$  herrührenden) und des inneren oder gegenseitigen (durch  $sM$  dargestellten) Orientierungseffektes läßt sie aber vollkommen ungeklärt.

### 5. Spontane Magnetisierung.

Nach dieser Theorie sollten die eigentlich ferromagnetischen Körper unterhalb ihrer (sehr hohen) kritischen Temperatur *immer*, d. h. auch bei Fehlen äußerer magnetischer Kräfte magnetisiert sein. Da aber die Richtung dieser „spontanen“ Magnetisierung ganz unbestimmt bleibt, so muß sie im allgemeinen nur in verhältnismäßig kleinen Volumelementen (die aber eine große, vielleicht auch sehr große Anzahl Atome enthalten) dieselbe Richtung haben. Beim Übergang von einem solchen Volumelement zum nächsten kann sich die letzte — in einer stetigen oder unstetigen Weise — ändern. Wenn diese Änderung ganz unregel-

mäßig geschieht, so wird in makroskopisch großen Raumgebieten keine resultierende Magnetisierung beobachtet. Es genügt aber schon ein sehr schwaches äußeres Feld, um die spontane Magnetisierung in derselben Richtung einzustellen, wobei man sofort die für die ferromagnetischen Körper charakteristische Abhängigkeit der resultierenden Magnetisierung von der äußeren Feldstärke erhält. — Bei magnetisch harten Körpern wird diese Richtung auch beim Verschwinden des Feldes teilweise beibehalten (remanente Magnetisierung); bei magnetisch weichen Körpern bekommt man dagegen wieder die ursprüngliche unregelmäßige Verteilung der spontanen Magnetisierung, die sich unmittelbar nicht äußert, obwohl sie bei niedrigen Temperaturen zum Sättigungswert sehr nahe sein kann.

Ihre Verkleinerung bei Erhöhung der Temperatur muß sich aber indirekt äußern, und zwar in einem abnorm großen Wert der *Wärmekapazität* des betreffenden Körpers. Diese zusätzliche, durch die Abnahme der spontanen Magnetisierung bedingte „ferromagnetische Wärmekapazität“ kann man nach der Formel

$$\Delta c = c_B - c_M = -\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{2} s M^2 \right) \quad (19)$$

berechnen, die sich aus der Formel (63a) Kap. II bei verschwindender Erregung ergibt. Die Gestalt der Funktion  $M(T)$  für  $B = 0$  läßt sich leicht graphisch ermitteln (siehe Abb. 5) und darstellen (Abb. 7). Man bekommt dabei den größten Wert für  $\Delta c$  in der Nähe des kritischen Punktes, wo die Magnetisierung am raschesten abnimmt. Bei Übergang durch diesen Punkt muß sie aber plötzlich verschwinden, was tatsächlich beobachtet wird (vgl. die schraffierte Kurve in der Abb. 7).

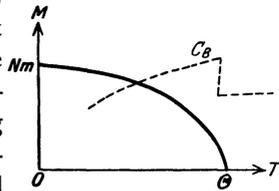


Abb. 7.

Diese sprunghafte Änderung der Wärmekapazität bei  $T = \Theta$  und  $B = 0$  kann näherungsweise direkt ausgerechnet werden mittels der etwas fortgesetzten Reihenentwicklung (16b) in Verbindung mit (17) und (18). Es ergibt sich dabei

$$(\Delta c)_\Theta \cong \frac{5}{6} \frac{s (N m)^2}{\Theta} = \frac{5}{2} kN \quad (19a)$$

in qualitativer Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Auf die Frage nach der Natur der „magnetischen Härte“ und auf die weitere Entwicklung der Theorie der ferromagnetischen Körper können wir hier nicht eingehen. Es sei zum Schluß bemerkt, daß man ähnliche Erscheinungen auch im Falle der elektrischen Orientierungspolarisation bekommen würde, falls die entsprechenden Dipolsubstanzen unterhalb ihrer „elektrischen kritischen Temperatur“ im flüssigen Zustand existieren könnten. Bei einigen kristallinisch-flüssigen Körpern,

deren Moleküle sehr große Momente haben, ist das nach *Born* tatsächlich der Fall. Für gewöhnliche Dipolflüssigkeiten mit Momenten von der üblichen Größenordnung ( $m \approx 10^{-18}$ ) bekommt man aber bei  $s = \frac{4\pi}{3}$  kritische Temperaturen, die unterhalb des Erstarrungspunktes liegen. Der obige (*Lorentz*sche) Zahlenwert für  $s$  wird also im Falle der elektrischen Polarisierung nicht nur durch die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Dichte bestätigt, sondern auch durch das Fehlen eines ferromagnetisch-ähnlichen Zustandes.

### § 3. Elektrische Polarisierung bei harmonisch schwingenden Feldern; Gyration und optische Aktivität.

#### 1. Polarisierungstensor und Gyrationsektor.

Die im § 1 dargelegte Theorie der Striktionspolarisierung läßt sich sofort auf den Fall eines harmonisch schwingenden elektrischen Feldes verallgemeinern, wenn man die Moleküle wie quasielastische Oszillatoren (oder Systeme von quasielastisch gebundenen Elektronen) behandelt. Zur vollkommenen Charakterisierung dieser Oszillatoren genügt es, wie im § 2, Kap. I gezeigt wurde, neben ihren *statischen* Polarisierungskoeffizienten ihre *Eigenfrequenzen* anzugeben. Man muß dabei den resultierenden statischen Polarisierungstensor eines Moleküls  ${}^2\alpha$  im allgemeinen als die Summe einer Anzahl von elementaren Bestandteilen  ${}^2\alpha^{(h)}$  auffassen, die von *harmonischen Oszillatoren mit verschiedenen Eigenfrequenzen*  $\nu_h$  herrühren. Diese Auffassung ist nicht nur im Falle mehratomiger Moleküle, wo sie ganz natürlich erscheint, sondern erfahrungsgemäß auch im Falle der einzelnen Atome beizubehalten: man muß sich also jedes Atom als ein System von harmonischen Oszillatoren vorstellen mit den für sein Emissions- oder Absorptionsspektrum charakteristischen Eigenfrequenzen, wobei die Anzahl dieser Ersatzoszillatoren mit der Anzahl der im Atom tatsächlich vorhandenen Elektronen nichts zu tun hat.

Bezeichnet man die Frequenz der durch die effektive Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  erzwungenen Schwingungen mit  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ , so erhält man für die Komponenten des elektrischen Momentes eine Formel von der üblichen Gestalt [vgl. (1)]

$$p_i = \alpha_{ik}(\nu) E_k^0 \quad (2^c)$$

mit

$$\alpha_{ik}(\nu) = \sum_h \frac{\alpha_{ik}^{(h)}}{1 - \frac{\nu^2}{\nu_h^2}} \quad (20a)$$

nach (8b) Kap. I. Es müssen dabei  $\mathfrak{E}^0$  und  $\mathfrak{p}$  als komplexe Vektoren behandelt werden, die demselben Phasenfaktor  $e^{i\sqrt{-1}2\pi\nu t} = e^{i\omega t}$  proportional sind.

Wir wollen zunächst die Eigenfrequenzen  $\nu_h$  als *reell* ansetzen, d. h. jegliche Dämpfung ausschließen und dementsprechend nur solche erzwungene Schwingungen betrachten, deren Frequenz mit den Eigenfrequenzen nicht zusammenfällt; das Versagen der Formel (20a) bei  $\nu = \nu_h$  bedeutet nichts anderes als die Unmöglichkeit stationärer Schwingungen für solche „Resonanzstellen“ (siehe unten § 4).

Was die partiellen Polarisationskoeffizienten  $\alpha_{ik}^{(h)}$  anbetrifft, so nehmen wir sie als reell und symmetrisch oder im allgemeinen als *komplex* und *konjugiert symmetrisch* an im Sinne der *Hermite*schen Bedingungen (37a) Kap. III.

Diese Annahme ist prinzipiell notwendig, um die Existenz einer den gebundenen Elektronen, d. h. den sie vertretenden Ersatzoszillatoren zugehörigen elektrischen Energie zu sichern. — Die Komponenten des resultierenden harmonischen Polarisationsensors  $\alpha_{ik}(\nu)$  müssen folglich auch den *Hermite*schen Bedingungen

$$\alpha_{ik}^*(\nu) = \alpha_{ki}(\nu) \tag{21}$$

genügen. Wir zerlegen nun diesen Tensor in seinen reellen (symmetrischen) und imaginären (antisymmetrischen) Anteil

$$\alpha_{ik}(\nu) = \beta_{ik} + \sqrt{-1} \gamma_{ik} \tag{21a}$$

und führen den dem Tensor  $\gamma_{ik}$  äquivalenten Vektor  $\mathfrak{g}$  mit den Komponenten

$$g_1 = \gamma_{23}, \quad g_2 = \gamma_{31}, \quad g_3 = \gamma_{12} \tag{21b}$$

ein. Dieser Vektor bestimmt die sogenannte *Gyration* des betreffenden Moleküls (s. unten) und wird als Gyrationvektor bezeichnet. — Es läßt sich dann das induzierte elektrische Moment  $\mathfrak{p}$  nach (20) in der Gestalt

$$\mathfrak{p} = {}^2\beta \cdot \mathfrak{E}^0 + \sqrt{-1} \mathfrak{E}^0 \times \mathfrak{g} \tag{22}$$

darstellen, oder in koordinatenmäßiger Schreibweise, bezüglich eines mit den Symmetrieachsen des Tensors  ${}^2\beta$  zusammenfallenden Achsen-system:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \beta_1 E_1^0 + \sqrt{-1} (E_2^0 g_3 - E_3^0 g_2) \\ p_2 &= \beta_2 E_2^0 + \sqrt{-1} (E_3^0 g_1 - E_1^0 g_3) \\ p_3 &= \beta_3 E_3^0 + \sqrt{-1} (E_1^0 g_2 - E_2^0 g_1) \end{aligned} \right\} \tag{22a}$$

Es sei bemerkt, daß die Symmetrieachsen der partiellen Polarisationsensoren  $\beta_{ik}^{(h)} = R\alpha_{ik}^{(h)}$  im allgemeinen voneinander und von den Symmetrieachsen des resultierenden Tensors  ${}^2\beta$  verschieden sind. Setzt man also, entsprechend (20a)

$$\beta_k = \sum_h \frac{\beta_k^{(h)}}{1 - \frac{\nu^2}{\nu_h^2}}, \quad \mathfrak{g} = \sum_h \frac{\mathfrak{g}^{(h)}}{1 - \frac{\nu^2}{\nu_h^2}}, \tag{22b}$$

so muß man unter  $\beta_k^{(h)}$  nicht die Hauptkomponenten der Tensoren  ${}^2\beta^{(h)}$ , sondern einfach ihre  $(k, k)$ -Komponenten in bezug auf das betrachtete Koordinatensystem verstehen. Es ist schließlich zu beachten, daß im statischen Falle ( $\nu = 0$ ) der Tensor  $\alpha_{ik}$  reell und symmetrisch sein muß. Daraus folgt, daß die Vektoren  $g^{(h)}$  im Gegensatz zu den Tensoren  ${}^2\beta^{(h)}$  von der Frequenz der erzwungenen Schwingungen abhängen müssen, und zwar in der Weise, daß sie bei  $\nu = 0$  sämtlich verschwinden. Diese eigentümliche Abhängigkeit kann aus der quasielastischen Theorie der Striktionspolarisation nicht abgeleitet werden, denn nach der letzteren sollte man immer  $g^h = 0$  haben.

Es läßt sich zeigen, daß man für  $g^{(h)}$  von Null verschiedene Werte bekommt, wenn man die Elektronen nicht als quasielastisch gebundenen behandelt, sondern das wirkliche *Rutherford'sche* Kernatommodell zugrunde legt und die Störung betrachtet, welche durch das elektrische Feld  $\mathfrak{E}^0$  in der normalen Umlaufsbewegung der Elektronen bedingt wird. Wir können auf diese Frage nicht näher eingehen, da sie außerhalb des Rahmens der hier dargelegten quasi-mikroskopischen Theorie liegt. Wir wollen aber beispielsweise einen einfachen Fall untersuchen, wo neben den phänomenologischen quasielastischen Kräften zusätzliche Kräfte auf die Elektronen wirken, welche von einem zeitlich konstanten magnetischen Feld herrühren. Wegen der durch dieses Feld bedingten „diamagnetischen“ Präzessionsbewegung bekommt man dabei, solange die Frequenz  $\nu$  von Null verschieden bleibt, nicht verschwindende Werte für die Vektoren  $g^{(h)}$ .

## 2. Die durch ein zusätzliches magnetisches Feld bedingte Gyration.

Der Einfachheit halber stellen wir uns einen isotropen harmonischen Oszillator vor, welcher aus einem quasielastisch gebundenen Elektron mit der Ladung  $e$  und der Masse  $m$  und einer zweiten im Mittelpunkt  $O$  festgehaltenen Ladung  $-e$  besteht. Die Bewegung dieses Elektrons unter kombinierter Wirkung der harmonisch schwingenden elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  und der zeitlich und räumlich konstanten magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}^0$  geschieht nach der folgenden Gleichung

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + k \mathbf{r} = e \mathfrak{E}^0 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathfrak{H}^0, \quad (23)$$

wo  $k = m\omega_0^2 = 4\pi\nu_0^2 m$  den Bindungsfaktor und  $\nu_0$  die Eigenfrequenz bedeutet (vgl. [6] § 2 Kap. I);  $\mathbf{r}$  ist der Radiusvektor des Elektrons bezüglich  $O$  und  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  — seine Geschwindigkeit.

Führt man in (23) statt  $\mathbf{r}$  das Dipolmoment des betrachteten Oszillators  $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$  ein, so wird

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{e}{m} \mathfrak{E}^0 + \frac{e}{cm} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathfrak{H}^0 \right)$$

oder da  $\mathfrak{p} \sim e^{i\omega t}$  ist ( $\omega = 2\pi\nu$ )

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\mathfrak{p} = \frac{e}{m}\mathfrak{E}^0 + \frac{i\omega e}{cm}\mathfrak{p} \times \mathfrak{H}^0. \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (23a)$$

Um den Einfluß des magnetischen Feldes in erster Näherung zu bestimmen, setzen wir auf der rechten Seite von (23a) für  $\mathfrak{p}$  den Ausdruck  $\frac{e\mathfrak{E}^0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$  ein, der sich daraus in nullter Näherung, d. h. bei  $H^0 = 0$  ergibt. Dies gibt als erste Näherung

$$\mathfrak{p} = \frac{e^2\mathfrak{E}^0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + \frac{i\omega e^2}{cm^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\mathfrak{E}^0 \times \mathfrak{H}^0. \quad (23b)$$

Diese Formel stimmt mit der allgemeinen Formel (22) überein, wenn man

$$\beta_{ik} = \delta_{ik} \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (24)$$

und

$$\mathfrak{g} = \frac{\omega e^2 \mathfrak{H}^0}{cm^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (24a)$$

setzt. Diese letzte Formel kann man auch in der Gestalt

$$\mathfrak{g} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \mathfrak{v} \quad (24b)$$

schreiben, wo

$$\mathfrak{v} = \frac{e}{2cm}\mathfrak{H}^0$$

die Winkelgeschwindigkeit der Larmorpräzession bedeutet. Wie zu erwarten war, verschwindet  $\mathfrak{g}$  bei  $\omega = 0$ .

Die betrachtete Wirkung des magnetischen Feldes äußert sich, wie wir im folgenden Kapitel zeigen werden, in der *Drehung der Polarisationssebene* des Lichtes, welches sich im betreffenden Körper parallel zu den magnetischen Kraftlinien fortpflanzt (der sogenannte *Faradayeffekt*). Da sie von der *effektiven* Feldstärke abhängt, so bietet sie eine neue Möglichkeit, auf einem rein optischen Wege die durch die *Weißsche* Theorie des Ferromagnetismus verlangten Werte des „molekularen Feldes“ zu prüfen. Es ergeben sich dabei für ferromagnetische Körper tatsächlich dieselben ungeheuren Werte von  $H^0 (= B + sM)$ .

Man muß aber darauf achten, daß dieser Effekt in einer ganz verschiedenen Weise entstehen kann, und zwar nicht durch eine außerordentlich rasche Präzessionsbewegung und die damit verknüpfte diamagnetische Polarisation, sondern durch die orientierende „paramagnetische“ Wirkung des Magnetfeldes. Es muß dabei angenommen werden, daß auch bei Fehlen des letzteren die Atome (oder Moleküle) feste Gyrationsektoren besitzen, die ihren natürlichen magnetischen Momenten parallel sind. Man bekommt dabei für den statistischen Mittelwert von  $\mathfrak{g}$  oder die auf die Volumeneinheit bezogene Gyration

$$\mathfrak{G} = N[\bar{\mathfrak{g}}] \quad (25)$$

eine Formel derselben Gestalt wie für die magnetische Polarisation  $\mathfrak{M} = N [\overline{\mathfrak{m}}]$ , so daß man einfach

$$\mathfrak{G} = \left| \frac{g}{m} \right| \mathfrak{M} \tag{25a}$$

setzen kann.

Eine solche Orientierung der Gyrationsektoren kann auch durch ein zusätzliches, genügend starkes elektrisches Feld bedingt werden, falls die Moleküle des betreffenden flüssigen oder gasförmigen Körpers feste Dipolmomente mit dazu parallelen Gyrationsektoren besitzen.

Um die Abhängigkeit der elektrischen Polarisation von der totalen (harmonisch schwingenden) Feldstärke  $\mathfrak{G}$  nach (22) zu bestimmen, multiplizieren wir diese Gleichung mit  $N$ , und ersetzen  $\mathfrak{G}^0$  durch die Summe  $\mathfrak{G} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}$ . Es ergibt sich dabei im einfachsten Falle, wenn der Tensor  ${}^2\beta$  sich auf einen Skalar  $\beta$  reduziert:

$$\mathfrak{P} = N \beta \left( \mathfrak{G} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \right) + i \left( \mathfrak{G} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \right) \times \mathfrak{G}.$$

Diese Gleichung kann man näherungsweise lösen, indem man in das zweite Glied auf der rechten Seite den Wert von  $\mathfrak{P}$  einsetzt, welcher  $G = 0$  entspricht. Nun gilt bekanntlich in diesem Fall [vgl. (3a) und (3b)]:

$$\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{G}, \quad \kappa = \frac{N \beta}{1 - \frac{4\pi}{3} N \beta}. \tag{26}$$

Wir bekommen folglich in erster Annäherung

$$\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{G} + i \frac{\left(1 + \frac{4\pi}{3} \kappa\right)}{1 - \frac{4\pi}{3} N \beta} \mathfrak{G} \times \mathfrak{G},$$

d. h.

$$\mathfrak{P} = \kappa \mathfrak{G} + i \frac{\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}}{\left(1 - \frac{4\pi}{3} N \beta\right)^2}. \tag{26a}$$

Ein Körper der betrachteten Art, d. h. mit einer von Null verschiedenen Gyration  $\mathfrak{G}$ , wollen wir als „gyrotrop“ bezeichnen, um ihn von den gewöhnlichen isotropen und anisotropen Körpern zu unterscheiden. Ein Körper kann selbstverständlich gleichzeitig anisotrop und gyrotrop sein. Diesen allgemeinen Fall wollen wir aber nicht näher betrachten.

### 3. Die durch ein zusätzliches elektrisches Feld bedingte optische Anisotropie.

Ebenso wie die Gyrotropie kann auch die Anisotropie bei Flüssigkeiten und Gasen durch äußere Einwirkungen, speziell durch zusätzliche statische Felder bedingt werden. Eine solche künstliche An-

isotropie bezüglich der schnellen Lichtschwingungen erreicht man z. B. durch Einschalten eines starken zusätzlichen elektrostatischen Feldes (Kerr-Effekt). Wenn die Frequenz  $\nu$  hoch genug ist, und die Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  sehr schwach im Vergleich zu der zusätzlichen zeitlich konstanten Feldstärke  $\mathfrak{F}$ , muß die Orientierung der Moleküle *ausschließlich* durch die letztere bedingt werden (s. unten). Wir nehmen an, daß die Moleküle eine Rotationssymmetrie um ihre „erste“ Achse besitzen. Die Hauptkomponenten des Polarisationstensors  ${}^2\beta$  für die dazu senkrechten Richtungen müssen folglich denselben Wert  $\beta_2 = \beta_3$  haben. Wir wollen nun die statistischen Mittelwerte seiner Komponenten für die raumfeste Richtung des Vektors  $\mathfrak{F}$  ( $\beta'_{11}$ ) und für die dazu senkrechten Richtungen ( $\beta'_{22}$ ) bestimmen<sup>1)</sup>. Dabei betrachten wir die potentielle Energie der Moleküle  $W$  als eine bekannte Funktion ihrer Orientierung, d. h. des Winkels  $\Theta$  zwischen ihrer Figurenachse und  $\mathfrak{F}$ .

Wir führen für einen Augenblick die Winkelkosinus  $\gamma_{ik}$  zwischen den mit einem Molekül verbundenen und den raumfesten Achsen ein. Dann lassen sich die neuen (raumfesten) Komponenten von  ${}^2\beta$  folgendermaßen ausdrücken

$$\beta'_{11} = \sum_i \sum_k \gamma_{i1} \gamma_{k1} \beta_{ik} = \gamma_{11}^2 \beta_1 + (\gamma_{21}^2 + \gamma_{31}^2) \beta_2 = \gamma_{11}^2 (\beta_1 - \beta_2) + \beta_2,$$

$$\beta'_{22} = \sum_i \sum_k \gamma_{i2} \gamma_{k2} \beta_{ik} = \gamma_{12}^2 \beta_1 + (\gamma_{22}^2 + \gamma_{32}^2) \beta_2 = \gamma_{12}^2 (\beta_1 - \beta_2) + \beta_2.$$

Es gilt ferner für die statistischen (oder auch geometrischen) Mittelwerte

$$[\overline{\gamma_{12}^2}] = [\overline{\gamma_{13}^2}] = \frac{1}{2} [\overline{\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2}] = \frac{1}{2} (1 - [\overline{\gamma_{11}^2}])$$

und folglich, mit Rücksicht auf  $\gamma_{11} = \cos \Theta$ ,

$$\left. \begin{aligned} [\overline{\beta'_{11}}] &= \beta_2 + (\beta_1 - \beta_2) [\overline{\cos^2 \Theta}] \\ [\overline{\beta'_{22}}] &= \beta_2 + (\beta_1 - \beta_2) \frac{1}{2} [\overline{\sin^2 \Theta}] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Für den Mittelwert von  $\cos^2 \Theta$  hat man die übliche Formel

$$[\overline{\cos^2 \Theta}] = \frac{\overline{\cos^2 \Theta e^{-\frac{W}{kT}}}}{\overline{e^{-\frac{W}{kT}}}}$$

[vgl. (8) § 1]. Man bekommt daraus im Falle von Dipolmolekülen ( $W = -\frac{pF}{kT} \cos \Theta$ )

$$[\overline{\cos^2 \Theta}] = \frac{\overline{\cos^2 \Theta} + \frac{1}{2} a^2 \overline{\cos^4 \Theta} + \dots}{1 + \frac{1}{2} a^2 \overline{\cos^2 \Theta} + \dots} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{a^2}{10}}{1 + \frac{a^2}{6}} \quad \left( a = \frac{pF}{kT} \right),$$

<sup>1)</sup> Die hier dargelegte Theorie stammt von P. Langevin.

d. h. in erster Annäherung

$$[\overline{\cos^2 \Theta}] = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{15} \left( \frac{pF}{kT} \right)^2 \right), \quad (27a)$$

und im Falle von nichtpolaren Molekülen mit den *statischen* Polarisationskoeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_3$  [ $W = -\frac{1}{2} F^2 (\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2 \Theta)$ , vgl. (10b) § 1]:

$$[\overline{\cos^2 \Theta}] = \frac{\overline{\cos^2 \Theta} + b \overline{\cos^4 \Theta}}{1 + b \overline{\cos^2 \Theta}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{b}{5}}{1 + \frac{b}{3}} \quad \left( b = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) F^2}{2kT} \right),$$

d. h.

$$[\overline{\cos^2 \Theta}] = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2) F^2}{15kT} \right). \quad (27b)$$

Die mit  $\frac{4\pi}{3} N$  multiplizierten Größen (27) sind gleich  $\frac{\epsilon'_1 - 1}{\epsilon'_1 + 2}$  bzw.  $\frac{\epsilon'_2 - 1}{\epsilon'_2 + 2}$ , wo  $\epsilon'_1, \epsilon'_2$  die Hauptdielektrizitätskonstanten des betrachteten Körpers für die  $E^0$ -Schwingungen bedeuten.

#### 4. Einfluß der magnetischen Schwingungen auf die elektrische Polarisation.

Wegen der Kleinheit der diamagnetischen Polarisation kann man sie bei Betrachtung schneller elektromagnetischer Schwingungen ganz außer acht lassen.

Es ist aber zu beachten, daß die elektrischen und magnetischen Schwingungen niemals getrennt stattfinden können, sondern sich immer gegenseitig induzieren. In der Wellenzone, d. h. in großer Entfernung von ihrer gemeinsamen Quelle, haben die elektrische und magnetische Feldstärke bekanntlich genau denselben Betrag und eine zueinander und zur Wellennormale senkrechte Richtung. Aber auch in diesem Fall bleibt der Beitrag der magnetischen Kräfte zur elektrischen Polarisation, ebenso wie die diamagnetische Polarisation, welche strenggenommen ebenfalls von den elektrischen Kräften herrührt, verschwindend klein im Vergleich mit dem unmittelbaren Striktions-effekt („statischer Induktionseffekt“) der letzteren.

Die Bewegung eines *freien* Elektrons im elektromagnetischen Felde ebener Lichtwellen haben wir im ersten Bande (S. 341) ausführlich untersucht. Die Wirkung des magnetischen Feldes besteht hauptsächlich, wie dort gezeigt wurde, in der Erzeugung des *Lichtdruckes*, der eine fortschreitende Bewegung des Elektrons bedingt. Im Falle eines *gebundenen* Elektrons kann eine solche Bewegung nicht stattfinden und wird durch eine zusätzliche longitudinale Verschiebung ersetzt. Diese Verschiebung muß offenbar zur transversalen, durch die elektrische Kraft allein bedingten Verschiebung im Verhältnis der

magnetischen Kraft  $\frac{v}{c} \times \mathfrak{H}$  zur elektrischen stehen, d. h. im Verhältnis der durch die letztere bedingten Geschwindigkeit  $v$  zur Lichtgeschwindigkeit. Bei den gewöhnlichen Bedingungen bleibt aber dieses Verhältnis verschwindend klein.

Zur Präzisierung der angeführten Überlegungen wollen wir noch die Bewegungsgleichung (23) für den betrachteten Fall ( $\mathfrak{H} = n \times \mathfrak{E}$ ,  $n$  — Wellennormale) näherungsweise integrieren (den Index  $0$  lassen wir fort). Zu diesem Zwecke setzen wir wieder im zweiten Gliede auf der rechten Seite für  $v$  denjenigen Ausdruck ein, welcher sich bei Weglassung dieses Gliedes ergibt, d. h. den reellen Anteil von  $\frac{i \omega \epsilon \mathfrak{E}}{m (\omega_0^2 - \omega^2)}$ . Setzt man  $\omega_0$  als reell voraus und  $\mathfrak{E}$  proportional zu  $\cos \omega t$ , so wird

$$v = \frac{\omega \epsilon \mathfrak{E}'}{m (\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t,$$

wo  $\mathfrak{E}'$  die reelle Amplitude von  $\mathfrak{E}$  bedeutet, und folglich nach (23)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathfrak{E}' \cos \omega t + \frac{e^2 \omega}{c m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \mathfrak{E}' \times (n \times \mathfrak{E}') \cos \omega t \sin \omega t$$

oder wegen  $n \cdot \mathfrak{E}' = 0$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathfrak{E}' \cos \omega t + \frac{e^2 \omega}{2 c m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} n E'^2 \sin 2 \omega t. \quad (28)$$

Da diese Gleichung linear ist, so setzt sich ihre Lösung (beim Fehlen von freien Schwingungen) aus zwei Anteilen zusammen, die den durch die zwei Glieder auf der rechten Seite dargestellten Kräften entsprechen. Den ersten Anteil brauchen wir nicht zu betrachten. Für den zweiten  $\Delta \mathbf{r}$  bekommen wir in der üblichen Weise (mittels des Ansatzes  $\Delta \mathbf{r} \sim \sin 2 \omega t$ )

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{e^2 \omega n E'^2}{2 c m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin 2 \omega t. \quad (28a)$$

Diese zusätzliche longitudinale Verschiebung hat also eine *doppelte* Frequenz, sie kann sich deshalb in den optischen Erscheinungen, wie wir später sehen werden, gar nicht äußern. Es ist ferner interessant, zu bemerken, daß ihr Mittelwert verschwindet und nicht positiv ist, wie zu erwarten war. Dies entspricht dem Verschwinden des mittleren Lichtdrucks bei fehlender Dämpfung (s. unten § 4).

### 5. Einfluß der räumlichen Periodizität des elektrischen Feldes; optische Aktivität.

Obwohl die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes viel größer sind als die Molekülabmessungen, ist es doch in einigen Fällen notwendig, neben ihrer zeitlichen Periodizität auch ihre räumliche Periodizität — oder eher die dadurch bedingte Inhomogenität des effektiven elektrischen Feldes — zu berücksichtigen. Diese Inhomogenität hat die Tat-

sache zur Folge, daß die Atome, aus welchen das betrachtete Molekül aufgebaut ist, zwar mit derselben Frequenz, aber mit etwas *verschiedenen Phasen* schwingen.

Bezeichnet man die äußere (oder effektive) Feldstärke im Mittelpunkt  $O$  eines Moleküls mit  $\mathfrak{E}^0$ , so kann man ihren Wert im Mittelpunkt eines Atoms  $A$  mit dem Radiusvektor  $\mathbf{r}^a$  durch  $\mathfrak{E}^a = \mathfrak{E}^0 + (\mathbf{r}^a \nabla) \mathfrak{E}^0$  bestimmen. Man erhält dabei, *wenn man die Wechselwirkung der Atome außer acht läßt*, den folgenden Ausdruck für das induzierte Dipolmoment des ganzen Moleküls

$$\mathbf{p} = \sum \alpha^a \mathfrak{E}^0 + \sum \alpha^a (\mathbf{r}^a \nabla) \mathfrak{E}^0, \quad (29)$$

wo  $\alpha^a$  die Polarisationskoeffizienten der einzelnen Atome bedeuten.

Bei Berücksichtigung der erwähnten Wechselwirkung muß man zur äußeren Feldstärke  $\mathfrak{E}^a$  noch die von den übrigen Atomen herrührenden Feldstärken  $\mathfrak{E}^{ab}$  ( $b = 1, 2 \dots$ ) hinzufügen. Diese drücken sich durch die entsprechenden Momente  $\mathbf{p}^b$  nach der Formel

$$\mathfrak{E}^{ab} = \frac{1}{R_{ba}^3} (3 \mathfrak{R}_{ba}^0 (\mathfrak{R}_{ba}^0 \cdot \mathbf{p}^b) - \mathbf{p}^b), \quad (29a)$$

aus, wo  $\mathfrak{R}_{ba}^0 = \mathbf{r}^a - \mathbf{r}^b$  den Vektor  $BA$  und  $\mathfrak{R}_{ba}^0$  den entsprechenden Einheitsvektor bedeuten (vgl. Bd. I, S. 85). Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Formeln

$$\mathbf{p}^a = \alpha^a \mathfrak{E}^a = \alpha^a [E^0 + (\mathbf{r}^a \nabla) E^0 + \sum_{b \neq a} \mathfrak{E}^{ab}] \quad (29b)$$

bekommen wir ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Momente der einzelnen Atome, wobei sich für das resultierende Moment des Moleküls ein Ausdruck von der Gestalt

$$\mathbf{p}_i = \alpha_{ik} E_k^0 + \alpha_{ikl} \frac{\partial E_l^0}{\partial x_k} \quad (29c)$$

ergibt. Die Koeffizienten  $\alpha_{ik}$  bilden den uns schon bekannten Polarisationsensor des Moleküls. Dazu tritt aber noch ein zweiter, für das letztere charakteristischer, Tensor dritten Ranges mit den Komponenten  $\alpha_{ikl}$ .

Er bestimmt nach M. Born die sogenannte „optische Aktivität“ des betreffenden Körpers, die sich in einer Drehung der Polarisationsebene des durchgehenden Lichtes äußert (s. unten Kap. IV § 3).

Im Falle ebener Wellen hat man

$$\mathfrak{E}^0 \sim e^{2\pi i \left( \nu t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{\lambda} \right)}, \quad (30)$$

wo  $\lambda$  die Wellenlänge und  $\mathbf{n}$  die Wellennormale bedeuten. Es wird dabei

$$\frac{\partial E_l^0}{\partial x_k} = -\frac{2\pi i}{\lambda} n_k E_l^0 \quad (30a)$$

und folglich nach (29c)

$$\mathbf{p}_i = \alpha_{ik} E_k^0 - \frac{2\pi i}{\lambda} \alpha_{ikl} n_k E_l^0. \quad (30b)$$

Wenn es sich um einen amorphen (flüssigen oder gasförmigen) Körper handelt, dessen Moleküle vollkommen regellos orientiert sind, muß man zur Berechnung der Polarisation den geometrischen Mittelwert von (30a) bilden. Der Mittelwert von  $\alpha_{ik}$  reduziert sich bekanntlich beim Fehlen der Gyration auf  $\frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})$   $\delta_{ik} = \alpha \delta_{ik}$ . Für den Mittelwert von  $\alpha_{ikl}$  bekommt man, wie leicht zu zeigen ist, das Produkt eines invarianten Skalars  $\gamma$  mit dem *antisymmetrischen Einheitstensor* dritten Ranges  $\delta_{ikl}$ , dessen Komponenten sich durch die Bedingungen

$$\delta_{123} = 1, \quad \delta_{ikl} = -\delta_{kil} = \delta_{kli}$$

bestimmen lassen. Sie sind also gleich  $\pm 1$ , wenn alle drei Indizes verschieden sind und Null, wenn zwei von ihnen zusammenfallen<sup>1)</sup>.

Die Summe  $\delta_{1kl} n_k E_l^0 = n_2 E_3^0 - n_3 E_2^0$  stellt die erste Komponente des Vektors  $\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}^0$  dar. Die der Formel (30a) entsprechende Polarisation ist folglich gleich

$$\mathfrak{P} = N \mathfrak{E}^0 + i \mathfrak{E}^0 \times \Gamma \tag{31}$$

oder [vgl. (26)]

$$\mathfrak{P} = \varkappa \mathfrak{E} + i \frac{\mathfrak{E} \times \Gamma}{\left(1 - \frac{4\pi}{3} N \beta\right)^2}, \tag{31a}$$

wo

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \gamma N \mathfrak{n} \tag{31b}$$

ist.

Der Vektor  $\Gamma$  spielt hier dieselbe Rolle wie die dem antisymmetrischen (imaginären) Anteil des Tensors  $\alpha_{ik}$  entsprechende Gyration  $\mathfrak{G}$ . Es besteht aber zwischen ihnen der wichtige Unterschied, daß  $\mathfrak{G}$  ein *fester*, von der Richtung der Lichtstrahlen unabhängiger Vektor ist, während der „Aktivitätsvektor“  $\Gamma$  der Wellennormale parallel bleiben muß, falls er überhaupt von Null verschieden ist. Es sei bemerkt, daß, wenn man den Mittelwert von  $\mathfrak{p}$  aus (29c) bestimmt, bekommt man einfach

$$\mathfrak{p} = \beta \mathfrak{E}^0 + \gamma \text{rot } \mathfrak{E}^0 \tag{32}$$

und folglich

$$\mathfrak{P} = \varkappa \mathfrak{E} + a \text{rot} \left( \mathfrak{E} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P} \right) \tag{32a}$$

mit  $a = \frac{\gamma N}{1 - \frac{4\pi}{3} N \beta}$ . Diese Formel ist allgemeiner als (31a), denn sie

läßt sich auf beliebige Wellenvorgänge anwenden.

Falls wir bei der Berechnung des elektrischen Momentes der Moleküle auch die Größen zweiter und höherer Ordnung in den Koordinaten der

<sup>1)</sup> Vgl. C. G. Darwin: Optical Constants of Matter.

Atome (in bezug auf den Mittelpunkt  $O$ ) berücksichtigen wollten, würden wir für  $p_i$  eine Reihe von der Form

$$p_i = \alpha_{ik} E_k^0 + \alpha_{ikl} \frac{\partial E_l^0}{\partial x_k} + \alpha_{iklm} \frac{\partial^2 E_m^0}{\partial x_k \partial x_l} + \dots \quad (33)$$

bekommen [vgl. Ende des § 9, Kap. I]. Wegen der Gleichung

$$\nabla^2 \mathfrak{E}^0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}^0}{\partial t^2} = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 E_m^0}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} E_m^0 = 0 \quad (33a)$$

lassen sich aber alle höheren Glieder dieser Reihe (wenn man die Mittelwerte der Polarisationskoeffizienten für verschiedene Orientierungen der Moleküle nimmt), auf die ersten zwei reduzieren. Wir erhalten röglich auf diese Weise keine Verallgemeinerung der oben gefundenen Resultate.

#### § 4. Elektrische Dämpfung.

1. Formale Theorie der Dämpfung und ihr Einfluß auf den elektrischen Polarisationsensor für harmonische Schwingungen.

Wir haben im vorigen Paragraphen die Moleküle als Systeme von Oszillatoren aufgefaßt, die *ungedämpfte* harmonische Schwingungen von bestimmten Eigenfrequenzen ausführen können. Diese *freien* Schwingungen haben wir aber außer acht gelassen und nur die mit der äußeren Feldstärke synchronen oder „kohärenten“ Anteile der erzwungenen Schwingungen betrachtet. Das vollständige elektrische Moment eines isotropen harmonischen Oszillators, der sich unter der Wirkung einer effektiven elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E} \sim e^{i\omega t}$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ) befindet, setzt sich aber bekanntlich zusammen aus dem erwähnten kohärenten Anteile

$$p = \frac{e^2 \mathfrak{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (34)$$

[nach (23b)] und einem von den freien Schwingungen herrührenden Anteile

$$p = p'_0 e^{i\omega_0 t} + p''_0 e^{-i\omega_0 t} \quad (34a)$$

wo die komplexen Amplituden  $p'_0$ ,  $p''_0$  sich im allgemeinen aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen.

Um die eventuell vorhandene Dämpfung dieser freien Schwingungen zu berücksichtigen, genügt es, die in (34a) auftretenden Eigenfrequenzen  $\pm \omega_0$  durch *komplexe* Zahlen

$$\pm \omega' + i\omega''$$

mit einem positiven imaginären Anteil  $\omega'' > 0$  zu ersetzen. Man muß dementsprechend in (34)  $\omega_0$  ebenfalls durch eine komplexe Zahl ersetzen, aber wie leicht einzusehen ist, *nicht* durch dieselbe, sondern durch eine *andere* Zahl, die von der Frequenz der erzwungenen Schwingungen ( $\omega$ ) in einer von dem Mechanismus der Dämpfung bestimmten Weise abhängt und bei  $\omega = 0$  reell wird.

Wir stellen uns z. B. vor, daß das isotrop und quasielastisch gebundene Elektron eine seiner Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft  $-\vartheta \mathbf{v}$  ( $\vartheta > 0$ ) erfährt. Dann lautet seine Bewegungsgleichung folgendermaßen [vgl. (23) § 3]:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \vartheta \cdot \frac{d \mathbf{r}}{dt} + k \mathbf{r} = e \mathfrak{E}. \quad (35)$$

Bei  $E = 0$  bekommt man daraus mit dem Ansatz  $\mathbf{r} \sim e^{i\omega t}$  die „charakteristische“ Gleichung

$$-m\omega^2 + i\vartheta\omega + k = 0$$

oder wenn man hier

$$\omega = \omega' + i\omega''$$

einsetzt

$$-m(\omega'^2 - \omega''^2) - \vartheta\omega'' + k + i(-2m\omega'\omega'' + \vartheta\omega') = 0.$$

Es wird also

$$\omega'' = \frac{\vartheta}{2m} \quad (35a)$$

und

$$\omega'^2 = \omega''^2 - \frac{\vartheta\omega''}{m} + \frac{k}{m} = \frac{k}{m} - \frac{\vartheta^2}{4m^2},$$

d. h.

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \pm \sqrt{\omega_0^2 - \omega''^2} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned} \right\} \quad (35b)$$

Es bedeutet hier  $\omega_0$ , wie früher, diejenige Frequenz der freien Schwingungen, die sich beim Fehlen der Dämpfung ( $f = 0$ ) ergeben würde.

Die Lösung von (35) stellt sich also bei  $E = 0$  folgendermaßen dar, wenn man statt  $\mathbf{r}$  das Moment des Oszillators  $\mathbf{p} = e \mathbf{r}$  einführt:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}'_0 e^{-\frac{\vartheta}{2m}t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \omega''^2}t} + \mathbf{p}''_0 e^{-\frac{\vartheta}{2m}t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \omega''^2}t},$$

wo  $\mathbf{p}'_0$  und  $\mathbf{p}''_0$  zwei unabhängige konstante Vektoren sind. Wenn man diese Vektoren als komplexe Größen auffaßt, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den einen von ihnen, z. B. den zweiten gleich Null setzen. Man bekommt dabei

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{(i\omega' - \omega'')t}. \quad (35c)$$

Bei Anwesenheit der äußeren Feldstärke ergibt sich für den synchronen Anteil von  $\mathbf{r}$  die Gleichung

$$(-m\omega^2 + i\vartheta\omega + k)\mathbf{r} = e\mathfrak{E}.$$

Der entsprechende Anteil des elektrischen Momentes läßt sich folglich nach (35a) und (35b) in der Gestalt

$$\mathfrak{p} = \frac{e^2 \mathfrak{C}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega'')} \quad (36)$$

schreiben, oder wenn man die komplexe Amplitude von  $\mathfrak{C}$  einführt ( $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 e^{i\omega t}$ )

$$\mathfrak{p} = \frac{e^2 \mathfrak{C}_0 e^{i(\omega t - \varphi)}}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega''^2}}, \quad (36a)$$

wo  $\varphi$  die Phasenverschiebung von  $\mathfrak{p}$  gegen  $\mathfrak{C}$  bedeutet. Diese Phasenverschiebung ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega\omega''}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (36b)$$

bestimmt und im *Resonanzfall* ( $\omega = \omega_0$ ) wird sie gleich  $\frac{\pi}{2}$ . Die entsprechende maximale Amplitude ist

$$\mathfrak{p}_{\max} = \frac{e^2 |\mathfrak{C}_0|}{2m\omega_0\omega''} = \frac{e^2}{\omega_0 \mathfrak{D}} E_0. \quad (36c)$$

Wir müssen den Umstand betonen, daß die Resonanzfrequenz  $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \nu_0$  von der Dämpfung unabhängig und folglich von der tatsächlichen Frequenz der freien gedämpften Schwingungen  $\frac{\omega'}{2\pi}$  verschieden ist.

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung (35) drückt sich durch die Summe von (35c) und (36) aus. Da aber der erste kohärente Anteil von  $\mathfrak{p}$  mit der Zeit exponentiell abklingt, kann man ihn, wenn die Dämpfung groß genug ist, außer acht lassen, wie wir es im vorigen Paragraphen tatsächlich getan haben.

Um die allgemeine Formel (20a), welche die Frequenzabhängigkeit des Polarisationsensors eines Moleküls bestimmt, auf den Fall gedämpfter Schwingungen auszudehnen, wollen wir zunächst statt der statischen Polarisationskoeffizienten  $\alpha_{ik}^{(h)}$  neue dimensionslose Zahlenkoeffizienten  $f_{ik}^{(h)}$ , nach der Formel,

$$\alpha_{ik}^{(h)} = \frac{e^2}{4\pi^2 m \nu_h^2} f_{ik}^{(h)} \quad (37)$$

einführen. Es wird dann bei Berücksichtigung der Dämpfung

$$\alpha_{ik}(\nu) = \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum \frac{f_{ik}^{(h)}}{\nu_h^2 - \nu^2 + 2i\nu\nu_h''}, \quad (37a)$$

wobei  $\nu_h = \frac{\omega_h}{2\pi}$  wie früher als die Eigenfrequenz oder besser als die Resonanzfrequenz und  $\nu_h'' = \frac{\omega''}{2\pi}$  als die Dämpfungsfrequenz oder der Dämpfungsdekrement des entsprechenden Ersatzoszillators bezeichnet

werden mag. — Es sei bemerkt, daß diese Größen in dem Fall eines anisotropen Oszillators verschiedene Werte für die drei Grundschwingungen des letzteren haben müssen. Es ist deshalb zweckmäßig, *lineare* Ersatzoszillatoren zu benutzen, die nur in *einer* Richtung schwingen können, d. h. einen räumlichen Oszillator durch drei lineare zu ersetzen.

Zerlegt man den Polarisationskoeffizienten  $\alpha_{ik}$  in seinen reellen und imaginären Anteil, so wird

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ik} &= \beta_{ik} - i\gamma_{ik} \\ \beta_{ik} &= \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum \frac{(\nu_h^2 - \nu^2) f_{ik}^{(h)}}{(\nu_h^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \nu_h'^2} \\ \gamma_{ik} &= \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum \frac{2\nu \nu_h' f_{ik}^{(h)}}{(\nu_h^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 \nu_h'^2} \end{aligned} \right\} \quad (37b)$$

Die Koeffizienten  $f_{kk}^{(h)}$  haben in dem Falle eines *isotropen* Oszillators eine sehr anschauliche Bedeutung. Und zwar kann man dabei die Zahl  $f^{(h)} = 3f_{11}^{(h)} = 3f_{22}^{(h)} = 3f_{33}^{(h)}$  als die Anzahl der in einem Molekül isotrop und quasielastisch gebundenen Elektronen mit der Ladung  $e$ , der Masse  $m$  und der Eigenfrequenz  $\nu_h$  behandeln. Diese Deutung braucht selbstverständlich nicht physikalisch zutreffend zu sein. Man erhält aber in manchen Fällen auf Grund der optischen Messungen sehr vernünftige Werte für  $f$ , die mit den chemischen Daten über die Anzahl der valenten Elektronen in den einzelnen Atomen genau oder näherungsweise übereinstimmen. Dies bezieht sich auf das sichtbare Spektralgebiet. Für solche Substanzen, die Resonanzlinien  $\nu_h$  im fernen Ultrarot besitzen, erhält man gute Werte für  $f^{(h)}$ , wenn man die Elektronen durch die entsprechenden *Ionen* mit derselben (oder doppelten usw. je nach der Valenz) Ladung und einer viel größeren Masse ersetzt.

Es sei bemerkt, daß die Koeffizienten  $\beta$  die *Dispersion* der betreffenden Substanz, d. h. die Abhängigkeit der Geschwindigkeit der Wellen von der Schwingungsfrequenz ( $\nu$ ), während die Koeffizienten  $\gamma$  ihre Dämpfung oder *Absorption* bestimmen (s. unten). Die Dämpfung ist bekanntlich mit einer *Wärmeentwicklung* verknüpft. Obwohl diese Wärmeentwicklung schon oben (Kap. II, § 5) in einer ganz allgemeinen Form behandelt wurde, wollen wir sie — oder vielmehr den ihr entsprechenden elementaren Effekt — in dem einfachen Beispiel eines isotropen Oszillators etwas ausführlicher betrachten.

Nach (36), (36a) und (36b) kann man in diesem Fall schreiben

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}, & \mathfrak{p} &= \alpha \mathfrak{E}, & \alpha &= |\alpha| e^{-i\varphi} = \beta - i\gamma \\ \beta &= |\alpha| \cos \varphi, & \gamma &= |\alpha| \sin \varphi, & |\alpha| &= \frac{e}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega'^2}} \\ \beta &= \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega'^2}, & \gamma &= \frac{e^2}{m} \frac{2\omega \omega'}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega'^2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die auf den Oszillator pro Zeiteinheit durchschnittlich aufgewandte

Arbeit drückt sich bekanntlich [vgl. Kap. II, (41)] durch die Formel

$$\bar{L} = \frac{1}{2} R \left( \mathfrak{E}^* \cdot \frac{d\mathfrak{p}}{dt} \right) = \frac{1}{2} R (i\omega \mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{p})$$

aus, d. h. nach (38) mit Rücksicht auf die Beziehung  $\bar{E}^2 = \frac{1}{2} E_0^2$ :

$$\bar{L} = \frac{1}{2} \omega E_0 \cdot \mathfrak{p}_0 \sin \varphi = \frac{\omega}{2} \gamma E_0^2 = \omega \gamma \bar{E}^2. \quad (38a)$$

In der Resonanzstelle ( $\omega = \omega_0$ ) erhält sie den Maximalwert

$$L_{\max} = \frac{e^2 \bar{E}^2}{2m\omega''} = \frac{e^2}{\vartheta} \bar{E}^2, \quad (38b)$$

der sich merkwürdigerweise um so größer ergibt, je *kleiner* die Dämpfung ist.

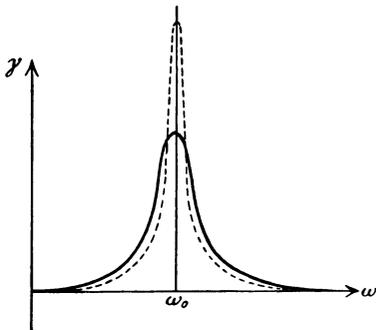


Abb. 8. Resonanzkurve.

Trägt man die  $L$ - oder die  $\gamma$ -Werte als Ordinaten und die entsprechenden  $\omega$ -Werte als Abszissen auf, so bekommt man eine sogenannte „Resonanzkurve“ (Abb. 8), die desto steiler von ihrem Höhepunkt abfällt, je höher dieser Punkt liegt. In der Nähe der Resonanzstelle, d. h. bei  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$  kann man näherungsweise

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_0^2 (\omega - \omega_0)^2$$

und

$$\gamma = \frac{e^2 \omega''}{2m\omega_0 \omega''^2 + (\omega - \omega_0)^2} = \gamma_{\max} \frac{1}{1 + x^2} \quad (39)$$

setzen mit den Abkürzungen  $\gamma_{\max} = \frac{e^2}{2m\omega_0 \omega''} = \frac{e^2}{\omega_0 \vartheta}$  und  $x = \frac{\omega - \omega_0}{\omega''}$ .

Definiert man die *Halbwertsbreite* der Resonanzkurve  $\Delta\omega$  als den horizontalen Abstand zwischen den auf der Mittelhöhe liegenden Punkten, so wird nach der obigen Formel

$$\Delta\omega = 2\omega'' = \frac{\vartheta}{m}. \quad (39a)$$

Der Flächeninhalt der ganzen Resonanzkurve läßt sich dabei mit genügender Näherung durch das Integral

$$\gamma_{\max} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1+x^2} = \gamma_{\max} \cdot \omega'' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{\pi \omega'' e^2}{2m\omega_0 \omega''} = \frac{\pi e^2}{2m\omega_0} \quad (39b)$$

darstellen. Sie ist also von der *Schärfe* der Resonanz  $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$  unabhängig.

In der Abb. 9 ist die der  $\gamma(\omega)$ -Kurve entsprechende  $\beta(\omega)$ -Kurve angegeben. Ihre Gestalt in der Nähe der Resonanzstelle wird näherungs-

weise durch die Gleichung

$$\beta = -\gamma x = -\gamma_{\max} \frac{x}{1+x^2}$$

bestimmt. Die Extremalwerte von  $\beta$  liegen in einem Abstand voneinander, der ungefähr mit der Halbwertsbreite übereinstimmt. Zur Unterscheidung der beiden Resonanzkurven bezeichnet man gewöhnlich die  $\beta(\omega)$ -Kurve als die *Dispersionskurve* und die  $\gamma(\omega)$ -Kurve als die *Absorptionskurve*. Wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, bestimmt die erste die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen oder genauer ihrer *Phasen* in materiellen Körpern, und die zweite ihre Absorption, d. h. die Verminderung ihrer Energie. Die letztere muß dabei, wie schon erwähnt wurde in mechanische und schließlich in Wärmeenergie übergehen.

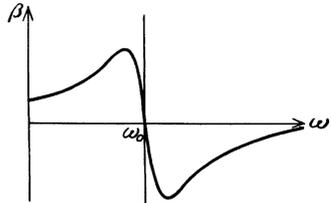


Abb. 9.

Der Mechanismus dieses Übergangs ist aufs innigste mit dem Mechanismus des ganzen Dämpfungsvorgangs verbunden, d. h. mit der Natur der in den obigen Überlegungen in einer rein formalen Weise eingeführten Reibungskraft. Wie kann man sich nun den Ursprung einer solchen Kraft vorstellen?

## 2. Strahlungsdämpfung.

Die einfachste und universellste Kraft dieser Art ist die uns schon bekannte *Plancksche Strahlungsdämpfung* (Bd. I, S. 210)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3}. \quad (40)$$

Im Falle des kohärenten Anteiles der erzwungenen harmonischen Schwingungen ( $\mathbf{r} \sim e^{i\omega t}$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ ) kann man diese Kraft als eine gewöhnliche der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  proportionale Reibungskraft

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\vartheta \mathbf{v} \quad (40a)$$

darstellen mit einem von der Schwingungsfrequenz abhängigen Koeffizienten

$$\vartheta = \frac{8\pi^2 \nu^2 e^2}{3c^3}. \quad (40b)$$

Dies entspricht nach (35a) dem folgenden Wert für die „Dämpfungsfrequenz“  $\nu'' = \frac{\omega''}{2\pi}$

$$\nu'' = \frac{2\pi e^2 \nu^2}{3c^3} = \frac{\pi a \nu}{\lambda}, \quad (40c)$$

wo  $a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2 m}$  den „Radius“ des Elektrons im Sinne der gewöhnlichen

elektromagnetischen Theorie des Masse (Bd. I, S. 201) und  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  die der Frequenz  $\nu$  zugehörige Wellenlänge bedeutet.

Für gewöhnliches Licht ist  $\lambda$  von der Größenordnung  $10^{-5}$  cm, während  $a$  etwa  $10^{-13}$  cm beträgt. Wir sehen also, daß die Strahlungsdämpfung einer außerordentlich schmalen Resonanzkurve mit einem sehr hohen Maximum entspricht (relative Breite  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\nu''}{\nu} \approx 10^{-8}$ ).

Es fragt sich nun: in welche Energieform und in welcher Weise die elektromagnetische Energie infolge der Strahlungsdämpfung umgewandelt wird? Diese Frage ist nicht so einfach zu beantworten, wie es im ersten Augenblick scheinen kann. Denn nach unserer ursprünglichen Annahme sind die erzwungenen Schwingungen des Oszillators wegen der Abklingung des inkohärenten Anteils als streng *stationär* anzusehen. Ihre Energie, d. h. die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie des Elektrons bezüglich des als fest gedachten Anziehungszentrums  $O$ , muß folglich konstant bleiben. Um also einen Widerspruch mit dem Energieprinzip zu vermeiden, ist es notwendig, die letzte Voraussetzung fallen zu lassen und sich vorzustellen, daß die elektromagnetische Energie in die *kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung des Oszillators als Ganzen übergeht*. Der entsprechende Mechanismus ist offenbar in dem durch die elektromagnetischen Wellen ausgeübten „Lichtdruck“ zu sehen. Wir haben zwar in unserer Ausgangsgleichung (35) nur die elektrische Feldstärke eingeführt, aber, wie schon manchmal angedeutet wurde, muß ein harmonisch schwingendes elektrisches Feld immer von einem synchron schwingenden magnetischen Feld begleitet werden. Die vollständige Bewegungsgleichung des Oszillators bei Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung und der magnetischen Feldstärke hat die folgende Gestalt [vgl. die Formel (23)]:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} + k \mathbf{r} = e \mathfrak{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathfrak{H}. \quad (41)$$

Um den Mittelwert der durch das letzte Glied dargestellten Kraft  $\mathfrak{H}$  in erster Näherung zu bestimmen, genügt es für die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  die nullte Näherung einzusetzen [vgl. die Ableitung von (28a), § 3]. Nun gilt bei  $H = 0$

$$(-m\omega^2 + i\vartheta\omega + k) \mathbf{r} = e \mathfrak{E},$$

und folglich

$$\frac{e}{c} \mathbf{v} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{p},$$

wobei  $\mathbf{p}$  nach den früheren Formeln (38) zu bestimmen ist, mit dem nach (40b) definierten Werte von  $\vartheta$ . Es wird also

$$\bar{\mathfrak{H}} = \frac{1}{2} R \left( \frac{i\omega}{c} \mathbf{p} \times \mathfrak{H}^* \right) = \frac{1}{2} R \left( i \frac{\omega}{c} \alpha \mathfrak{E} \times \mathfrak{H}^* \right). \quad (41a)$$

Im einfachsten Falle ebener elektromagnetischer Wellen hat man  $\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}^* = n \mathfrak{E}_0^2$ , wo  $n$  wie üblich die Wellennormale bedeutet. Man hat ferner [vgl. (38a)]  $\frac{1}{2} \mathfrak{E}_0^2 = \bar{\mathfrak{E}}^2$  und  $R(i\alpha) = \gamma$ . Der gesuchte mittlere Lichtdruck ist folglich gleich

$$\bar{\mathfrak{F}} = n \frac{\omega}{c} \gamma \bar{E}^2 = n \frac{\bar{L}}{c}. \quad (41b)$$

Diese Relation stimmt vollkommen überein mit der entsprechenden Relation zwischen der elektromagnetischen Energie ( $\xi$ ) und Bewegungsgröße ( $g = n \frac{\xi}{c}$ ). Sie drückt also die Tatsache aus, daß die dem Oszillator pro Zeiteinheit zugeführte *mechanische* Energie und Bewegungsgröße in derselben Beziehung *zueinander* stehen, wie die entsprechenden elektromagnetischen Größen. Man kann aber daraus noch nicht schließen, daß ihre Absolutwerte übereinstimmen, wie dies von dem Erhaltungssatz gefordert wird.

Wir werden auf diese Frage nicht näher eingehen, denn sie hat für die makroskopische Elektrodynamik keine (oder eine ziemlich geringe) Bedeutung. Der oben skizzierte Mechanismus der „reinen“ Strahlungsdämpfung kann nur in dem Falle stattfinden, wenn die Moleküle des betreffenden Körpers sich ganz ohne irgendwelche gegenseitige Beeinflussung bewegen können. Diese Verhältnisse sind aber nur in *äußerst verdünnten Gasen* realisierbar. Bei den gewöhnlichen irdischen Bedingungen muß man schon im Falle sehr verdünnter Gase die *Zusammenstöße der Moleküle* miteinander in Betracht ziehen. Diese Zusammenstöße haben aber zur Folge, daß der durch die Strahlungsdämpfungstheorie betrachtete stationäre Zustand sich niemals verwirklichen kann. Die erzwungenen Schwingungen müssen in der Tat bei jedem Zusammenstoß gestört oder vollkommen zerstört werden, um dann wieder von Anfang an zu beginnen. Es ist nun leicht zu sehen, daß die Zeit  $\tau$ , die zwischen zwei nachfolgenden Zusammenstößen durchschnittlich zur Verfügung steht, im allgemeinen so klein ist, daß der Schwingungsvorgang am Ende dieses Intervalls noch sehr entfernt von demjenigen stationären Zustand bleibt, welcher dem Abklingen der inkohärenten Schwingungen entspricht.

Die der Strahlungsdämpfung entsprechende Frequenz  $\nu''$  für freie Schwingungen von der Eigenfrequenz  $\nu$  drückt sich ungefähr durch dieselbe Formel (40c) aus, wie für kohärente erzwungene Schwingungen derselben Frequenz. Die Amplitude dieser freien Schwingungen fällt mit der Zeit nach dem Exponentialgesetz  $e^{-\omega'' t} = e^{-2\pi \nu'' t}$  ab [s. (35c)]. Ihre relative Verminderung (bezüglich ihres Anfangswertes) in der Zeit  $\tau$  ist folglich gleich  $e^{-\omega'' \tau}$ . Im Falle von Lichtwellen des sichtbaren Spektralgebietes, die sich in einem Gase von normaler Temperatur und Druck fortpflanzen, hat man nach (40c)  $\omega'' \cong 10^{-8} \cdot 10^{15} = 10^7$  und

$\tau \approx 10^{-9} - 10^{-10}$ . Das Produkt  $\omega''\tau$  beträgt also etwa  $10^{-2} - 10^{-3}$ . Das Abklingen der freien Schwingungen in dem Zeitintervall zwischen zwei nachfolgenden Zusammenstößen eines Moleküls mit den anderen bleibt folglich unbeträchtlich, so daß man von der Strahlungsdämpfung praktisch absehen und diese Schwingungen als *vollkommen ungedämpft* behandeln kann.

### 3. Stoßdämpfung.

Es kommt aber jetzt statt der Strahlungsdämpfung eine viel kräftigere Dämpfung vor, die von der Zerstörung der erzwungenen Schwingungen der Moleküle bei ihren Zusammenstößen mit den anderen Molekülen abhängt. Diese von *Lorentz* zuerst untersuchte Dämpfung pflegt man als *Stoßdämpfung* zu bezeichnen. Ihren Mechanismus kann man sich folgendermaßen vorstellen. Während der Zeit  $\tau$  ist jedes Molekül ausschließlich der Wirkung der äußeren (oder effektiven) elektrischen Kräfte unterworfen. Die dabei von der letzteren durchschnittlich geleistete Arbeit  $L$  ist gleich der zusätzlichen mechanischen Energie  $W$ , die das Molekül vertretenden Oszillatoren auf Kosten der elektromagnetischen Energie des sie umhüllenden Feldes erhalten. Bei einem Zusammenstoß zweier Moleküle geht diese „innere“ mechanische Energie in die gewöhnliche kinetische Energie ihrer fortschreitenden oder ihrer Drehungsbewegung über, d. h. mit anderen Worten in Wärme. — Die angeführte Vorstellung ist selbstverständlich sehr schematisch und drückt nur die mittleren Verhältnisse aus, ohne Rücksicht auf die dabei auftretenden Schwankungen. Sie genügt aber vollkommen, um die effektive Größe des Dämpfungsdekrementes zu bestimmen.

Der Einfachheit halber wollen wir die Moleküle als isotrope harmonische Oszillatoren der am Anfang dieses Paragraphen betrachteten Art behandeln. Wir versuchen zunächst die Dämpfung *formal* durch eine stetig wirkende Reibungskraft  $-\vartheta v$  darzustellen. Die Arbeit, welche gegen diese Kraft pro Zeiteinheit aufgewandt werden muß, ist offenbar gleich  $\vartheta v^2$ , oder durchschnittlich in der Zeit  $\tau$

$$L = \vartheta \overline{v^2} \tau.$$

Diese Arbeit muß andererseits gleich der während der Zeit  $\tau$  aufgenommenen Energie  $W$  sein. Die letztere setzt sich dabei zusammen aus der kinetischen Energie  $\frac{1}{2} m v^2$  und der potentiellen  $\frac{1}{2} k r^2$ , die durchschnittlich denselben Wert haben. Es ist also

$$\overline{W} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} + \frac{1}{2} k \overline{r^2} = m \overline{v^2}$$

und folglich, wenn wir noch die Beziehung  $\overline{W} = \frac{1}{2} W$  berücksichtigen<sup>1)</sup>,

$$\vartheta \overline{v^2} \tau = 2m \overline{v^2},$$

d. h.

$$\vartheta = \frac{2m}{\tau} \quad (42)$$

oder nach (35a)

$$\omega'' = \frac{1}{\tau} = 2\pi\nu'' \quad (42a)$$

Dieses Resultat kann man nach *Lorentz* noch in der folgenden Weise ableiten, die etwas komplizierter als die angeführte formale Ableitung ist, aber ihr gegenüber den Vorteil größerer Anschaulichkeit besitzt.

Wie schon oben hingewiesen wurde, bleiben die erzwungenen Schwingungen eines Moleküls während der Zeit, die zwischen zwei Zusammenstößen verstreicht, tatsächlich *vollkommen ungedämpft* (abgesehen selbstverständlich von der Strahlungsdämpfung). Die Projektion seines elektrischen Momentes in einer bestimmten Richtung, z. B. die Richtung der elektrischen Feldstärke, läßt sich folglich in diesem Intervall als Funktion der Zeit  $t$  durch die Formel

$$\phi = \alpha e^{i\omega t} + \alpha' e^{i\omega_0 t} + \alpha'' e^{-i\omega_0 t} \quad (43)$$

darstellen, wo zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

gesetzt ist.  $\alpha'$  und  $\alpha''$  sind zwei zunächst unbestimmte Konstanten, die wir derart wählen werden, daß im Augenblick  $t_0 < t$   $\phi$  und  $\frac{d\phi}{dt}$  verschwinden sollten. Dieser Augenblick entspricht dem vorhergehenden Zusammenstoß, bei welchem der Oszillator in Ruhe gebracht wurde. Es gilt also

$$\alpha e^{i\omega t_0} + \alpha' e^{i\omega_0 t_0} + \alpha'' e^{-i\omega_0 t_0} = 0,$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} \alpha e^{i\omega t_0} + \alpha' e^{i\omega_0 t_0} - \alpha'' e^{-i\omega_0 t_0} = 0,$$

woraus folgt

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right) e^{i(\omega - \omega_0)t_0},$$

$$\alpha'' = -\frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) e^{i(\omega + \omega_0)t_0}$$

und mit  $t - t_0 = t'$ , nach (43):

$$\phi = \alpha e^{i\omega t} \left[ 1 - \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} e^{i(\omega_0 - \omega)t'} - \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0} e^{-i(\omega_0 + \omega)t'} \right]. \quad (43a)$$

Der durch diese Formel dargestellte Schwingungsvorgang kann auf-

<sup>1)</sup> Es sei erinnert, daß  $W$  nicht die mittlere, sondern die maximale Energie bedeutet, welche der Oszillator während der Zeit  $\tau$  aufgespeichert hat. Wir nehmen dabei an, daß diese Energie mit der Zeit proportional wächst.

gefaßt werden als eine Überlagerung dreier Schwingungen *derselben* Frequenz  $\frac{\omega}{2\pi}$ , deren Amplituden nicht alle konstant sind, sondern mit den Frequenzen  $0$ ,  $\frac{\omega_0 - \omega}{2\pi}$ ,  $\frac{\omega_0 + \omega}{2\pi}$  schwingen. Um den Charakter dieses Vorgangs besser einzusehen, betrachten wir den Spezialfall  $t_0 = 0$ . Geht man dabei zu den reellen Größen über, so ergibt sich einfach

$$p = \alpha (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = 2\alpha \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t. \quad (43b)$$

Dieses Resultat läßt sich sofort aus der allgemeinen reellen Darstellung von  $p (= \alpha \cos \omega t + \beta' \cos \omega_0 t + \beta'' \sin \omega_0 t)$  ableiten unter der Bedingung  $\dot{p} = 0$  und  $\frac{d^2 p}{dt^2} = 0$  bei  $t = 0$ .

Die Formel (43b) bestimmt einen *Schwebungsvorgang*, den man auffassen kann als eine harmonische Schwingung der Frequenz  $\frac{\omega_0 + \omega}{4\pi}$ , deren Amplitude ihrerseits mit einer verhältnismäßig kleinen — be-

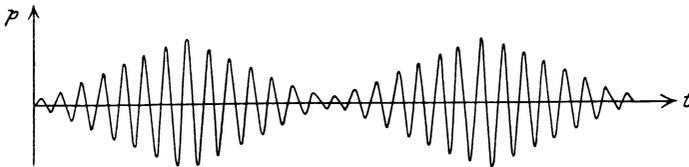


Abb. 10.

sonders in der Nähe der Resonanzstelle — Frequenz  $\frac{\omega_0 - \omega}{4\pi}$  schwingt (s. Abb. 10).

Es ist dabei zu beachten, daß sie von ihrem ursprünglichen Wert  $0$  zum Maximalwert  $2\alpha$  in der Zeit  $T = \frac{2\pi}{|\omega_0 - \omega|}$  gelangt, um danach wieder bis Null herabzufallen usw. Im Falle der Resonanz ( $\omega = \omega_0$ ) wird  $T = \infty$ ; d. h. die Schwingungsamplitude muß immer wachsen, und zwar wie leicht einzusehen ist, proportional der Zeit. Man bekommt dabei in der Tat nach (43b)

$$p = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{2e^2 E_0 \sin \left( \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right) \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{e^2 E_0}{m\omega_0} \cos \omega_0 t \cdot \lim \left( \frac{\sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t}{\omega_0 - \omega} \right)$$

d. h.

$$p = \frac{e^2 E_0}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t. \quad (43c)$$

Der Mechanismus der Stoßdämpfung besteht in der Bremsung oder der Vernichtung des nach jedem Stoß beginnenden Schwebungsvorgangs der beschriebenen Art; in der Nähe der Resonanzfrequenz wird der letztere schon in seinem Anfangsstadium „totgeschlagen“.

Um den Mittelwert des elektrischen Momentes einer großen Anzahl Moleküle für denselben Augenblick  $t$  zu bestimmen, muß man den Mittelwert des Ausdruckes (43a) für verschiedene Werte der Zeit  $t'$  die von dem letzten Zusammenstoß verlaufen ist, bilden. Nun ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül während der Zeit  $t'$  keinen Zusammenstoß erfährt, bekanntlich gleich

$$e^{-\frac{t'}{\tau}}, \quad (44)$$

wo  $\tau$  den mittleren (oder wahrscheinlichsten) Wert von  $t'$  bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit, daß der letzte Zusammenstoß im Intervall zwischen  $t'$  und  $t' + dt'$  eingetreten ist, drückt sich folglich durch

$$\left| de^{-\frac{t'}{\tau}} \right| = e^{-\frac{t'}{\tau}} \cdot \frac{dt'}{\tau}$$

aus. Wir müssen also (43a) mit diesem Ausdruck multiplizieren und nach  $t'$  von 0 bis  $\infty$  integrieren. Es wird dabei wegen der bekannten Formel

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+iy)t} dt = \frac{1}{x+iy}, \quad (x > 0)$$

$$p = \frac{e^2 E_0 e^{i\omega t}}{m \omega_0^2 - \omega^2} \left[ 1 - \frac{\omega_0 + \omega}{2\omega_0} \frac{1}{1 - i(\omega_0 - \omega)\tau} - \frac{\omega_0 - \omega}{2\omega_0} \frac{1}{1 + i(\omega_0 + \omega)\tau} \right]$$

oder schließlich nach einer elementaren Rechnung

$$\bar{p} = \frac{e^2}{m} \frac{E_0 e^{i\omega t}}{\left( \omega_0^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) - \omega^2 + 2i \frac{\omega}{\tau}}. \quad (44a)$$

Diese Formel, abgesehen von dem Zusatzgliede  $\frac{1}{\tau^2}$  bei  $\omega_0^2$ , stimmt vollkommen überein mit unserer ursprünglichen Formel (36) und dem oben gefundenen Wert  $\omega'' = \frac{1}{\tau}$  für das Dämpfungsdekrement. Bei den gewöhnlichen Umständen ist die Größe  $\frac{1}{\tau^2}$  sehr klein gegen  $\omega_0^2$ , so daß man sie in (44a) weglassen kann. — Es sei bemerkt, daß  $\tau = \frac{l}{v}$  ist, wo  $l$  die mittlere Weglänge und  $v$  die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle bedeuten. Es gilt dabei näherungsweise

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k T$$

( $m$  = Masse des Moleküls,  $T$  = Temperatur). Man hat also

$$\omega'' = \frac{1}{\tau} \cong \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (44b)$$

Bei tiefen Temperaturen muß folglich die Stoßdämpfung gegen Null streben.

Die angeführte Lorentzsche Theorie kann in einer rein formalen Weise auf den Fall flüssiger und fester Körper übertragen werden. Man muß dabei den Begriff der „Zusammenstöße“ im eigentlichen Sinne des Wortes ganz weglassen, da die Moleküle und Atome dieser Körper sich in einer *stetigen* Wechselwirkung miteinander befinden. Es folgt aber daraus nicht notwendig, daß die Dämpfung der induzierten elektrischen Schwingungen auch in einer stetigen Weise vor sich gehen muß. Man kann sich im Gegenteil vorstellen, daß die Umwandlung der Schwingungsenergie der in den Atomen verborgenen Oszillatoren in die kinetische Energie dieser Atome nur unter bestimmten Bedingungen stattfindet, so daß während einer gewissen Zeit der Schwingungsvorgang in jedem Atom sich ungestört entwickelt. Wenn man dabei für diese „Verweilszeiten“ dasselbe Verteilungsgesetz (44) wie im Falle von Gasen annimmt, muß man wieder für das elektrische Moment eine Formel von der Gestalt (44a) bekommen. Was den Wert der mittleren Verweilszeit  $\tau$  betrifft, so kann man darüber a priori keine bestimmte Aussage machen. Diese Zeit muß jedenfalls viel kleiner als die Stoßzeit sein und ebenso wie die letztere bei sinkender Temperatur zunehmen.

Neben der skizzierten Vorstellung der un stetigen Dämpfungsvorgänge ist es aber möglich, im Falle flüssiger und fester Körper diese Vorgänge durch bestimmte, in einer stetigen Weise wirkende Reibungskräfte zu erklären. Diese Kräfte lassen sich dabei interpretieren als diejenigen zusätzlichen mechanischen Wechselwirkungskräfte zwischen den benachbarten Molekülen, welche gerade von ihren induzierten elektrischen Momenten abhängen. Im Falle mehratomiger Moleküle müssen solche Kräfte auch zwischen den verschiedenen Atomen tätig sein, sofern die letzteren miteinander nicht starr gebunden sind, sondern um ihren gemeinsamen Schwerpunkt schwingen können. Die Energie der elektrischen Schwingungen in den einzelnen Atomen muß dabei teilweise in die Energie dieser mechanischen Schwingungen der Atome, d. h. in die Wärmeenergie des von ihr gebildeten Moleküls stetig übergehen. Das ist vielleicht auch der eigentliche Mechanismus der Verwandlung der inneren Schwingungsenergie der Gasmoleküle in ihre kinetische Energie bei den Zusammenstößen, — eine Verwandlung, die von der Lorentzschcn Stoßdämpfungstheorie *postuliert* aber keineswegs *erklärt* worden ist.

### § 5. Die Orientierungspolarisation und die ihr entsprechende Dämpfung in harmonisch schwingenden Feldern.

Die theoretische Bestimmung der Orientierungspolarisation und der ihr entsprechenden Dämpfung für harmonisch schwingende Felder läßt sich auf eine ganz verschiedene Weise als für die gewöhnliche

Striktionspolarisation durchführen, und zwar nach einer zuerst von *Einstein* in die Theorie der Brownschen Bewegung eingeführten Methode, die auf die hier behandelte Frage durch *Debye* angewandt worden ist, und die wir im folgenden Paragraphen zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit anwenden werden.

Zur Erläuterung dieser Methode betrachten wir zunächst die folgende eindimensionale Aufgabe.

### 1. Allgemeine Theorie der Diffusions- und Reibungsbewegung.

Wir stellen uns einen Körper vor, dessen Teilchen sich parallel zu einer bestimmten Richtung, die wir zur  $X$ -Achse wählen, bewegen können. Bei Fehlen äußerer Kräfte sind positive und negative Geschwindigkeiten als gleichwahrscheinlich anzusehen, so daß die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  eines Teilchens gleich Null ist. Wenn die Konzentration der betrachteten Teilchen ( $n$ ) nicht konstant ist, d. h. sich mit  $x$  ändert, muß die Anzahl der Teilchen, die durch eine zur  $X$ -Achse senkrechte Fläche in positiver und in negativer Richtung durchgehen, trotz der Gleichwahrscheinlichkeit der positiven und negativen, der Größe nach gleicher Geschwindigkeiten, verschieden sein. Und zwar muß ein *Diffusionsstrom* in der Richtung abnehmender Konzentration entstehen. Die *Dichte* dieses Stromes  $J$ , d. h. die Differenz der Anzahl Teilchen, die pro Zeit- und Flächeneinheit in positiver und in negativer Richtung hindurchgehen, ist proportional dem Konzentrationsgefälle  $-\frac{dn}{dx}$ , d. h. gleich

$$J = -D \frac{dn}{dx}, \quad (45)$$

wo  $D$  den „Diffusionskoeffizienten“ bedeutet.

Bei Anwesenheit einer in positiver Richtung wirkenden Kraft müssen die positiven Geschwindigkeiten wahrscheinlicher (oder größer) als die negativen werden. Wir wollen dabei annehmen, daß die *mittlere* Geschwindigkeit eines Teilchens ( $\bar{v}$ ) der auf es wirkenden mittleren effektiven Kraft  $f$  proportional ist. Unter Einführung eines „Reibungskoeffizienten“  $\vartheta$  kann man folglich setzen

$$\vartheta \bar{v} = f. \quad (45a)$$

Bei gleichförmiger Verteilung der Teilchen, d. h. bei konstanter Konzentration muß man dabei einen *Konvektionsstrom* von der Stärke  $K = N\bar{v}$ , d. h.

$$K = \frac{n}{\vartheta} f \quad (45b)$$

bekommen.

Die Konzentration wird sich dabei mit der Zeit ändern, und zwar nach den folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (J + K) = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{n}{\vartheta} f \right). \quad (46)$$

Wenn die Kraft  $f$  zeitlich konstant ist, muß sich schließlich ein stationärer Zustand einstellen, bei welchem der Konvektions- und der Diffusionsstrom sich einander genau kompensieren. Die Bedingung dafür lautet

$$D \frac{dn}{dx} - \frac{n}{\vartheta} f = 0 \quad (46a)$$

oder wenn man die der Kraft  $f$  entsprechende potentielle Energie  $U$  nach

$$f = - \frac{dU}{dx} \quad (46b)$$

einführt und die obige Gleichung durch  $\frac{n}{\vartheta}$  dividiert,

$$D \vartheta \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} + \frac{dU}{dx} = 0,$$

d. h. wegen der Konstanz von  $D$  und  $\vartheta$

$$D \vartheta \lg n + U = \text{konst},$$

oder schließlich

$$n = \text{konst} \cdot e^{-\frac{U}{D\vartheta}}. \quad (47)$$

Es muß aber andererseits diese stationäre Verteilung der Teilchen mit der allgemeinen, durch das *Boltzmannsche* Gesetz bestimmten Verteilung

$$n = \text{konst} \cdot e^{-\frac{U}{kT}} \quad (47a)$$

übereinstimmen, wo  $k$  wie üblich die Boltzmannsche Konstante und  $T$  die absolute Temperatur des betrachteten Körpers bedeuten. Daraus folgt die merkwürdige von *Einstein* aufgestellte Beziehung

$$D \vartheta = kT. \quad (47b)$$

Es sei bemerkt, daß die Temperatur in dieser Beziehung nicht als Maß der mittleren kinetischen Energie der Teilchen auftritt, sondern als der Parameter des *Boltzmannschen* Verteilungsgesetzes. Die Eigentümlichkeit der angeführten Ableitung liegt gerade in ihrer Allgemeinheit, die durch keine spezielle Annahme über den Charakter der Bewegung beschränkt wird. Diese Bewegung muß nur bei Fehlen

äußerer Kräfte *vollkommen ungeordnet* sein und dem Diffusionsgesetz (45) gehorchen. Das „Reibungsgesetz“ (45a) kann man dabei als Folge des letzteren und des *Boltzmannschen* Verteilungsgesetzes (47a) betrachten. Die diesem Gesetz äquivalente Gleichung (46a) läßt sich wegen (47b) in der Gestalt

$$\frac{dp}{dx} = F \quad (48)$$

schreiben mit

$$p = nkT, \quad F = nf \quad (48a)$$

und drückt das bekannte *hydrostatische Gleichgewichtsgesetz* (69) (Kap. II aus, wobei die Größe  $p$  als *hydrostatischer Druck* aufgefaßt werden muß — in Übereinstimmung mit dem üblichen Ausdruck der elementaren Gastheorie oder der Theorie des osmotischen Druckes in verdünnten Lösungen. Die evtl. vorhandene Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Teilchen muß dabei im Ausdruck der pro Volumeinheit wirkenden effektiven Kraft  $F$  berücksichtigt werden. Unter dieser Bedingung kann man die Formel  $p = nkT$  auf reelle Gase und Flüssigkeiten, konzentrierte Lösungen und überhaupt auf beliebige materielle Körper anwenden<sup>1)</sup>.

## 2. Anwendung auf die Theorie der Orientierungspolarisation.

Die dargelegte Theorie bleibt nicht nur für die fortschreitende Bewegung, sondern mit einer geringen formalen Modifikation, auch für die *Drehungsbewegung* der Moleküle in flüssigen und teilweise auch in gasförmigen Körpern gültig.

Dafür ist es nur nötig, in den obigen Formeln (45) bis (47b) statt der Längenkoordinate  $x$  eine Winkelkoordinate  $\Theta$  (oder im allgemeinen Falle einer nicht ebenen Drehung zwei Winkelkoordinaten  $\Theta, \varphi$ ) einzuführen und die Größen  $n, D, f, \vartheta$  durch die entsprechenden Winkelgrößen zu ersetzen. Wir wollen für die letzten drei Größen die frühere Bezeichnung beibehalten. Was nun die Konzentration  $n$  betrifft, so muß man folgendes beachten: In dem oben betrachteten Falle bedeutete

<sup>1)</sup> Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei hier beispielsweise der Fall eines reellen, der *Van der Waalschen* Gleichung  $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = kT$  gehorchenden Gases betrachtet. Wir ersetzen diese Gleichung der Einfachheit halber durch  $p = \frac{RT}{v} + \frac{(bkT - a)}{v^2}$  und führen statt der vollständigen Kraft  $f$  nur die *äußere*  $f^a$  ein. Es wird dann nach (48), wenn wir das spezifische Volum  $v$  durch  $\frac{1}{n}$  ersetzen:  $RT \frac{dn}{dx} + 2(bRT - a)n \frac{dn}{dx} = nf^a = -n \frac{dU^a}{dx}$ , woraus folgt:  $RT \lg n + 2(bRT - a)n + U^a = \text{konst.}$  oder  $RT \lg n + U = \text{konst.}$  mit  $U = U^a + 2(bRT - a)n$ . Das zweite Glied muß hier als die innere (Wechselwirkungsenergie) der Moleküle interpretiert werden.

das Produkt  $ndx$  die Anzahl Teilchen, die sich im Intervall zwischen  $x$  und  $x + dx$  befinden. Es sei dementsprechend mit  $nd\Theta$  die (relative) Anzahl der Teilchen bezeichnet, deren Dipolmomente  $\mathfrak{p}$  einen zwischen  $\Theta$  und  $\Theta + d\Theta$  liegenden Winkel mit einer gegebenen festen Richtung — z. B. der Richtung der Amplitude  $\mathfrak{E}_0$  der elektrischen Schwingungen — bilden. Die so definierte Zahl  $n$  bedeutet dann nicht die wirkliche „Richtungskonzentration“ der Moleküle  $n'$ , sondern, wie leicht zu sehen ist, das Produkt davon mit  $2\pi \sin \Theta$ . Denn das dem Intervall  $d\Theta$  zugehörige *Raumwinkelement* ist offenbar gleich  $2\pi \sin \Theta d\Theta$ . Es wird also definitionsgemäß  $n'2\pi \sin \Theta d\Theta = nd\Theta$ , d. h.

$$n = 2\pi n' \sin \Theta. \quad (49)$$

Der Einfachheit halber wollen wir die Drehung der Moleküle nur in den die „Polarachse“  $\mathfrak{E}_0$  enthaltenden Meridionalebenen betrachten (ihre Verteilung nach den Asimuten kann offenbar durch das elektrische Feld nicht verändert werden, und muß folglich gleichförmig bleiben). Der Ausdruck (45) für die Dichte des Diffusionsstromes ist dabei durch

$$\{J = -2\pi \sin \Theta D \frac{dn'}{d\Theta} \quad (49a)$$

zu ersetzen. Man bekommt dementsprechend statt (46) die Gleichung

$$\sin \Theta \frac{\partial n'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( D \sin \Theta \frac{\partial n'}{\partial \Theta} - \frac{n' \sin \Theta}{\vartheta} f \right),$$

wo  $f$  das auf das Molekül durch die effektive elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}$  ausgeübte Drehmoment

$$f = |\mathfrak{p} \times \mathfrak{E}| = -pE \sin \Theta \quad (49b)$$

bedeutet. Wir haben hier das Minuszeichen deshalb angefügt, weil dieses Moment bei positiv gerichteter Feldstärke  $\mathfrak{E}$  den Winkel  $\Theta$  zu vermindern strebt, d. h. in negativer Richtung wirkt.

Wir bekommen schließlich mit Rücksicht auf (47b) die folgende Grundgleichung für die „Richtungskonzentration“ oder die „Verteilungsfunktion“  $n'$ :

$$\vartheta \frac{\partial n'}{\partial t} = \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( kT \sin \Theta \frac{\partial n'}{\partial \Theta} + n' p E_0 e^{i\omega t} \sin^2 \Theta \right). \quad (50)$$

Diese Gleichung läßt sich bei der Bedingung  $\frac{pE_0}{kT} \ll 1$  leicht durch sukzessive Approximationen auflösen. Es gilt nämlich in nullter Annäherung ( $E_0 = 0$ )

$$\frac{\vartheta}{kT} \frac{\partial n'_0}{\partial t} = \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial n'_0}{\partial \Theta} \right) \quad (50a)$$

und ferner in erster Annäherung, mit  $n' = n'_0 + n'_1$ :

$$\vartheta \frac{\partial n'_1}{\partial t} = \frac{kT}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial n'_1}{\partial \Theta} \right) + p E_0 e^{i\omega t} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (n'_0 \sin^2 \Theta). \quad (50b)$$

Zur Ermittlung des stationären Zustandes kann man einfach  $n'_0 = \text{konst}$  setzen (was einer gleichförmigen Richtungsverteilung bei Fehlen von äußeren Kräften entspricht). Es ergibt sich dabei für  $n'_1$  die partikuläre Lösung von der Gestalt

$$n'_1 = A e^{i\omega t} \cos \Theta$$

mit

$$A = \frac{n'_0 p E_0}{k T + \frac{i\omega \vartheta}{2}}.$$

Man hat also

$$n' = \text{konst} \left( 1 + \frac{p E_0 e^{i\omega t}}{k T + \frac{i\omega \vartheta}{2}} \cos \Theta \right). \quad (51)$$

Bei  $\omega = 0$  stimmt diese Formel mit der angenäherten Form des bekannten Verteilungsgesetzes

$$e^{-\frac{p E}{k T} \cos \Theta} \cong \left( 1 + \frac{p E}{k T} \cos \Theta \right)$$

(vgl. (9) § 1) überein. Durch Multiplikation von (51) mit  $N p \cos \Theta$  ( $N$  Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit) und geometrische Mittelwertsbildung ( $\overline{\cos \Theta} = 0$ ,  $\overline{\cos^2 \Theta} = \frac{1}{3}$ ) ergibt sich schließlich die folgende Formel für die Orientierungspolarisation

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{3} \frac{N p^2 \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}}{k T + \frac{i\omega \vartheta}{2}}. \quad (51a)$$

Bei  $\omega = 0$  geht sie in das erste Glied der früher abgeleiteten Formel (8b) über.‡

Um die Größenordnung des Reibungskoeffizienten  $\vartheta$  zu bestimmen, stellen wir uns ein Molekül (nach *Debye* oder eher nach *Einstein*) vor als eine kleine Kugel mit dem Radius  $a \cong 10^{-8}$  cm, und behandeln es als eine gewöhnliche Kugel von makroskopischen Abmessungen. Wenn eine solche Kugel sich in einer Flüssigkeit mit dem Viskositätskoeffizienten  $\eta$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\Theta}{dt}$  dreht, erfährt sie, wie in der Hydrodynamik gezeigt wird, eine Reibungsdrehkraft mit dem Moment  $-8\pi\mu a^3 \frac{d\Theta}{dt}$ . Wir können also näherungsweise

$$\vartheta \cong 8\pi\eta a^3$$

setzen. Im Falle von Wasser ( $\eta \cong 10^{-2}$ ) gibt diese Formel

$$\vartheta \cong 10^{-25}.$$

Für Lichtschwingungen von einer in dem sichtbaren Spektralgebiet liegenden Frequenz ( $\omega \cong 10^{15} - 10^{16}$ ) hat man folglich

$$\frac{\omega \vartheta}{2} \cong 10^{-10},$$

während  $k T$  für gewöhnliche Temperaturen etwa  $10^{-13}$  beträgt.

In diesem Fall und im allgemeinen in dem Fall sehr schneller Schwingungen kann man deshalb den Einfluß der Temperatur vernachlässigen und in der Formel (51a)  $T = 0$  setzen.

Es sei bemerkt, daß die allgemeine Lösung der Gleichung (50a) sich in der Form einer Reihe der folgenden Gestalt

$$n'_0 = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-s \frac{kT}{\vartheta}} P_s(\cos \Theta), \quad (51b)$$

darstellen läßt, wo  $P_s(\cos \Theta)$  die *Legendreschen* Polynome der entsprechenden Ordnung bedeuten [ $P_0 = 1$ ,  $P_1 = \cos \Theta$ ,  $P_2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \Theta - 1\right)$  usw.]. Diese Gleichung entspricht den *freien* Schwingungen eines gedämpften Oszillators, aber mit einer so starken Dämpfung, daß tatsächlich keine Schwingungen eintreten können und der ganze Vorgang aperiodisch wird [dieser Fall ergibt sich nach (35b) bei  $\frac{\vartheta}{\sqrt{2m}} > \omega_0$ ].

Die Abklingungszeit oder wie man sie gewöhnlich nennt, die *Relationszeit*, d. h. die Zeit, in welcher die ursprüngliche nicht gleichförmige Richtungsverteilung der Moleküle sich bei Fehlen des elektrischen Feldes praktisch uniformisiert, oder die Zeit, in welcher diese gleichförmige Verteilung bei Anwesenheit der elektrischen Schwingungen in die stationäre durch (51) bestimmte Verteilung übergeht, ist nach (51b) von der Größenordnung

$$\frac{\vartheta}{kT},$$

d. h. für Wasser bei gewöhnlichen Bedeutungen von der Größenordnung  $10^{-11}$  Sek.

Die Formel (51a) entspricht offenbar dem kohärenten Anteil der erzwungenen Schwingungen eines harmonischen Oszillators mit dem Polarisationskoeffizienten

$$\alpha = \frac{p^2}{3} \frac{1}{kT + i \frac{\omega \vartheta}{2}}.$$

Es gibt also in diesem Fall *keine Resonanzstelle*; mit wachsender Frequenz fällt  $\alpha$  monoton ab. Die auf diese „erzwungenen Drehschwingungen“ pro Volum- und Zeiteinheit aufgewandte Arbeit drückt sich nach (38a) durch

$$\bar{L} = N \omega \gamma \bar{E}^2 = \frac{N p^2}{6} \frac{\omega}{(kT)^2 + \frac{\omega^2 \vartheta^2}{4}} \bar{E}^2 \quad (52)$$

aus.

Der Maximalwert dieses Ausdruckes wird bei  $\frac{\omega \vartheta}{2} = kT$ , d. h. bei

$$\omega = \frac{2kT}{\vartheta} \quad (52a)$$

erreicht.

Die Arbeit (52) ist offenbar gleich der im betreffenden Körper (pro Volum- und Zeiteinheit) entwickelten *Wärme*.

### § 6. Elektrische Leitfähigkeit.

#### 1. Allgemeine Theorie der elektrischen Leitung; Zurückführung der Leitfähigkeit auf den Diffusionskoeffizienten.

Die Hauptquelle der Wärme, welche in den materiellen Körpern bei elektrischen Schwingungen kleiner Frequenz erzeugt wird, liegt nicht in der mit der elektrischen Polarisation verknüpften Dämpfung, sondern in den von den *freien* Elektronen oder den frei beweglichen Ionen abhängigen *Leistungsströmen*. Im Gegensatz zum Polarisationsstrom tritt der Leitungsstrom auch im Falle zeitlich konstanter elektrischer Felder auf, wobei seine Stärke durch das *Ohmsche* Gesetz

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma \mathfrak{E}}{c} \quad (53)$$

bestimmt wird, und die zugehörige Wärmeentwicklung durch das *Joulesche* Gesetz

$$L = \sigma E^2. \quad (53a)$$

Diese Formeln beziehen sich selbstverständlich auf den Fall isotroper Körper. Wenn der betreffende Körper mehrere Ionengattungen (einschließlich der freien Elektronen) enthält, läßt sich die Stromstärke durch die Summe

$$\mathbf{j} = \sum_i \frac{e_i}{c} n_i \bar{\mathbf{v}}_i \quad (54)$$

darstellen, wo  $e_i$ ,  $n_i$  und  $\bar{\mathbf{v}}_i$  die Ladungen, Konzentrationen und mittleren Geschwindigkeiten der verschiedenen Ionengattungen bedeuten. Wir nehmen nun an, daß beim Fehlen äußerer (oder effektiver) elektrischer Kräfte die Ionen sich in einer ganz ungeordneten Weise bewegen, und daß ferner unter der Wirkung der von der effektiven Feldstärke  $\mathfrak{E}$  bedingten Kraft  $\mathbf{f}_i = e_i \mathfrak{E}$  die entsprechenden Ionen eine mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \frac{e_i \mathfrak{E}}{\mathfrak{D}_i} \quad (54a)$$

erhalten. Durch Einsetzen in (54) bekommen wir

$$\mathbf{j} = \frac{1}{c} \left( \sum_i \frac{e_i^2 n_i}{\mathfrak{D}_i} \right) \mathfrak{E}, \quad (54b)$$

d. h. das *Ohmsche* Gesetz (53) mit dem folgenden Wert für die Leitfähigkeit:

$$\sigma = \sum_i \frac{e_i^2 n_i}{\mathfrak{D}_i}. \quad (54c)$$

Wir beschränken uns zunächst der Einfachheit halber auf Ionen *einer* Gattung, und setzen die anderen als vollkommen unbeweglich voraus. Führt man statt des Reibungskoeffizienten  $\vartheta$  den entsprechenden Diffusionskoeffizienten  $D$  nach der *Einsteinschen* Beziehung (47b) ein, so wird

$$\sigma = \frac{e^2 n D}{k T}. \quad (55)$$

Die theoretische Abschätzung der elektrischen Leitfähigkeit reduziert sich nach dieser Formel, sofern die Konzentration der Ionen bekannt ist, auf die Bestimmung ihres Diffusionskoeffizienten. Diese Bestimmung kann man für verschiedene Körper — gasförmige, flüssige und feste — näherungsweise ausführen, mittels der Formel

$$D = \frac{\bar{r}^2}{6t}, \quad (55a)$$

wo  $\bar{r}^2$  den Mittelwert des Verschiebungsquadrates eines Ions in der Zeit  $t$  beim Fehlen äußerer Kräfte bedeutet.

Die angeführte Formel läßt sich folgendermaßen aufstellen. Wir fassen eine Menge von Ionen ins Auge, die sich ursprünglich, d. h. im Augenblick  $t = 0$ , in der Nähe des Nullpunktes  $\mathbf{r} = 0$  befinden. Wegen ihrer ungeordneten Bewegung müssen sich die betrachteten Ionen allmählich über den ganzen Raum zerstreuen, und zwar gleichförmig nach allen Richtungen. Ihre Konzentration  $m$  (die mit der totalen Konzentration  $n$  nicht zu verwechseln ist!) darf folglich als eine Funktion der Zeit und des Abstandes  $r = |\mathbf{r}|$  angesehen werden, die bei  $t = 0$  der Bedingung  $m = 0$  für  $r > 0$  und  $m = \infty$  für  $r = 0$  genügt, und außerdem für alle Zeiten der Bedingung

$$\int m dV = \int_0^\infty 4\pi m r^2 dr = M = \text{konst.},$$

welche die Konstanz der Zahl der betreffenden Ionen ausdrückt.

Diese Funktion muß man in Einklang mit den angeführten Bedingungen als eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D \nabla^2 m$$

bestimmen. Es wird dabei, da  $m$  von der Richtung des Radiusvektors unabhängig ist,  $\nabla^2 m = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r m)$  [vgl. Bd. I, S. 75], und folglich

$$\frac{\partial}{\partial t} (m r) = D \frac{\partial^2 (r m)}{\partial r^2}.$$

Die gesuchte Lösung dieser Gleichung lautet, wie man sich leicht überzeugen kann:

$$m = \frac{M}{(2\pi D t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}.$$

Daraus folgt nach einer einfachen Rechnung:

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{M} \int_0^{\infty} r^2 m 4\pi r^2 dr = 6Dt.$$

Es sei bemerkt, daß der Mittelwert der *vektoriellen* Verschiebung  $\mathbf{r}$  der Ionen verschwinden muß, während der Mittelwert ihres *absoluten* Betrag  $r$  einen von Null verschiedenen Wert

$$\bar{r} = \frac{1}{M} \int_0^{\infty} r m 4\pi r^2 dr = \sqrt{\frac{4}{\pi}} Dt$$

hat. Man kann folglich (55 a) durch

$$D = \frac{\pi(\bar{r})^2}{4t} \quad (55 b)$$

ersetzen.

Diese Formeln sind strenggenommen nur für makroskopische Verschiebungen und Zeitintervalle gültig. Sie müssen aber näherungsweise auch für mikroskopische Verschiebungen und Zeiten gültig sein, solange die letzteren oberhalb gewisser Grenzwerte bleiben, die wir als *elementare Verschiebung* ( $l$ ) bzw. *elementare Zeit* ( $\tau$ ) bezeichnen werden. Die elementaren Verschiebungen kann man ganz allgemein definieren als *diejenigen kleinstmöglichen Verschiebungen, deren Richtungen voneinander unabhängig, d. h. nach Zufallsgesetzen verteilt sind*. Die elementaren Zeiten sind die entsprechenden Zeitintervalle.

## 2. Elektrische Leitfähigkeit von Gasen.

Im Falle von *Gasen* stimmt die elementare Verschiebung in unserem Sinne offenbar mit der *freien Weglänge* und die elementare Zeit mit der Stoßzeit überein. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül den Weg  $r$  ohne Zusammenstoß zurücklegt, ist bekanntlich gleich  $e^{-\frac{r}{l}}$ , wo  $l$  die *mittlere* freie Weglänge bedeutet. Es folgt daraus für den Mittelwert des Verschiebungsquadrats

$$r^2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r}{l}} r^2 \frac{dr}{l} = 2l^2.$$

Setzt man diesen Wert in (55 b) ein, und führt statt  $t$  die mittlere Stoßzeit  $\tau$  ein, so wird

$$D = \frac{1}{3} \frac{l^2}{\tau} = \frac{1}{3} lv, \quad (56)$$

wo  $v$  die mittlere Geschwindigkeit der Ionen ist. Diese Geschwindigkeit drückt sich als Funktion der Temperatur näherungsweise durch die Formel

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (56 a)$$

aus. Wir brauchen uns um eine exakte Bestimmung der Zahlenkoeffizienten nicht zu kümmern, schon aus dem Grunde, weil die Ersetzung der makroskopischen Größen in (55a) durch mikroskopische strenggenommen nicht erlaubt ist. Bei Benützung der Formel (55b) statt (55a) würden wir z. B. statt (56) den Wert

$$D = \frac{\pi l^2}{4 \tau}$$

bekommen.

Die elektrische Leitfähigkeit eines Gases, sofern sie von den Ionen der betrachteten Gattung abhängt, kann man nach (55), (56) und (56a) folgendermaßen darstellen:

$$\sigma = \frac{e^2 n l}{m v}. \quad (56b)$$

Diese Formel wird gewöhnlich auf eine viel einfachere Weise abgeleitet. Und zwar betrachtet man die *zusätzliche Geschwindigkeit*  $\Delta v$ , welche ein Ion in dem Zeitintervall  $\tau$  zwischen zwei Zusammenstößen infolge der auf es wirkenden elektrischen Kraft  $e\mathfrak{E}$  erhält. Da die entsprechende Beschleunigung gleich  $\frac{e\mathfrak{E}}{m}$  ist, so wird  $\Delta v = \frac{e\mathfrak{E}}{m} \tau = \frac{e\mathfrak{E}}{m v} l$ . Um den Mittelwert dieser zusätzlichen Geschwindigkeit zu erhalten, muß man noch den vorhergehenden Wert halbieren. Es ergibt sich dabei für die Stromstärke der Ausdruck

$$j = \frac{en}{c} \Delta \bar{v} = \frac{ne^2 l}{2 m v c} \mathfrak{E} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}$$

mit einem Wert von  $\sigma$ , der sich nur durch den Faktor  $\frac{1}{2}$  von (56a) unterscheidet<sup>1)</sup>.

### 3. Leitfähigkeit von flüssigen und festen Elektrolyten.

Diese einfache und anschauliche Methode ist aber *nur auf den Fall von Gasen* anwendbar. Im Falle von flüssigen und festen Körpern muß man sich die Wärmebewegung der Atome und Ionen ganz anders wie in Gasen vorstellen. Die Tatsache, daß die atomare Wärmekapazität der Flüssigkeiten und der festen Körper ungefähr denselben Wert (6 Kal.) hat, und zwar zweimal größer als bei Gasen ist, zeigt daß 1. die Flüssigkeitsatome und Ionen um gewisse Gleichgewichtslagen schwingen, ebenso wie es in festen Körpern geschieht, und 2. daß diese Gleichgewichtslagen in festen Körpern ebenso wie in Flüssigkeiten nicht unveränderlich sind, sondern sich allmählich durch das ganze Körpervolumen verschieben. Wir können hier auf die Einzelheiten dieser

<sup>1)</sup> Um eine numerische Übereinstimmung zu bekommen, sollte man in der ursprünglichen Methode den Diffusionskoeffizienten nach der Formel  $\frac{1}{6} \frac{l^2}{\tau} = \frac{1}{6} l v$  bestimmen.

Frage nicht näher eingehen. Es genügt für unseren Zweck die Tatsache festzustellen, daß die *elementaren Verschiebungen* der Ionen in festen und flüssigen Körpern in *Übergängen von einer Schwingungslage* (oder Gleichgewichtslage) *zur nächsten bestehen*.

Diese elementaren Verschiebungen ( $l$ ) müssen offenbar von derselben Größenordnung sein, wie die Abstände zwischen den Nachbaratomen oder Molekülen. Was die entsprechenden elementaren Zeiten ( $\tau$ ) anbetrifft, so setzen sie sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich aus der Schwingungsdauer  $\tau'$  um dieselbe Gleichgewichtslage und aus der eigentlichen Übergangszeit  $\tau''$  zum nächsten. Diese Übergangs- oder „Sprungzeit“ muß im allgemeinen sehr klein im Vergleich mit der Schwingungsdauer sein. Es läßt sich leicht zeigen, daß die letzte mit der Schwingungsperiode  $\tau_0$  durch eine Beziehung von der Gestalt

$$\tau' = \tau_0 e^{\frac{U'}{kT}} \quad (57)$$

verknüpft ist, wo  $U'$  die nötige Energie für das Entreißen von einer bestimmten Gleichgewichtslage bedeutet<sup>1)</sup>. Das Verhältnis  $\frac{\tau'}{\tau_0} = e^{\frac{U'}{kT}}$  ist gleich der mittleren Anzahl von Schwingungen, die um dieselbe Gleichgewichtslage ausgeführt werden. Diese Zahl kann — besonders bei festen Körpern und tiefen Temperaturen — sehr groß (von der Größenordnung mehrerer Zehnerpotenzen) sein. Die Sprungszeit dagegen muß immer von derselben Größenordnung wie die Schwingungsperiode bleiben. Das Verhältnis  $\frac{l}{\tau''}$  muß folglich näherungsweise gleich der durch (56a) bestimmten mittleren Geschwindigkeit der Wärmebewegung sein, während die in (56) auftretende mittlere *Verschiebungsgeschwindigkeit*  $v = \frac{l}{\tau' + \tau''}$  nur einen *sehr geringen Bruchteil* davon darstellt. Wenn man  $\tau''$  gegen  $\tau'$  vernachlässigt, bekommt man für den Diffusionskoeffizienten der Ionen die Formel

$$D = \frac{l^2 e^{-\frac{U'}{kT}}}{6\tau_0} \quad (57a)$$

und dementsprechend für die elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{e^2 n l^2 e^{-\frac{U'}{kT}}}{6\tau_0 k T}. \quad (57b)$$

Diese Formel bezieht sich nur auf *elektrolytisch leitende* Körper, d. h. solche (feste und flüssige) Körper, die *keine freien Elektronen* enthalten,

<sup>1)</sup> Diese Formel kann man als eine direkte Folge des Boltzmannschen Verteilungsgesetzes betrachten, in Verbindung mit der Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeiten von zwei verschiedenen Zuständen (in unserem Fall des Schwingungs- und des Übergangszustandes) den entsprechenden mittleren Verweilzeiten proportional sind.

und wo der Strom durch *eigentliche Ionen*, d. h. durch geladene Atome oder Atomgruppen übertragen wird<sup>1)</sup>.

#### 4. Die Leitfähigkeit von Metallen.

Im Falle von *Metallen*, deren Leitfähigkeit ausschließlich von den *freien Elektronen* bedingt wird, sind die obigen Vorstellungen über die Ionenbewegung weder in Gasen noch in festen und flüssigen Körpern gar nicht anwendbar. Es läßt sich nämlich leicht beweisen, daß 1. die freien Elektronen in einem festen oder flüssigen *Metallkörper* bei Fehlen äußerer Kräfte sich mit einer Geschwindigkeit von derselben Größenordnung bewegen, wie die Umlaufgeschwindigkeit der äußeren (Valenz-) Elektronen in isolierten Atomen, und 2. daß sie nur *eine* oder höchstens einige Umdrehungen um *dasselbe* Atom machen und sofort zu einem der Nachbaratome übergehen, wobei die nachfolgenden Übergangsrichtungen voneinander im allgemeinen unabhängig bleiben.

In der Tat sind die als „freie“ bezeichneten Elektronen nichts anderes als diejenigen Elektronen, welche im dampfförmigen Zustand des entsprechenden Metalls am schwächsten mit den einzelnen Atomen gebunden sind, d. h. in den größten Abständen um ihren Mittelpunkt (Kern) herumlaufen. Wenn man ein Atom, nach *Rutherford*, mit dem Sonnensystem vergleicht, so sind die Metallatome dadurch ausgezeichnet, daß sie neben den gewöhnlichen stark gebundenen „Planetenelektronen“ noch ein oder einige — je nach ihrer chemischen Valenz — schwach gebundene „Kometenelektronen“ enthalten. Bei der Kondensation des Metaldampfes können diese „Kometenelektronen“ sich nicht länger stets um dieselben Atome drehen, da die Abstände zwischen den Nachbaratomen von derselben Größenordnung wie die Abmessungen ihrer Bahnen werden. Sie müssen folglich nach einer Umdrehung in einem bestimmten „Planetensystem“ zu einem der Nachbarsysteme übergehen. Die Kometen- oder Valenzelektronen in einem festen oder flüssigen Metall sind nur in dem Sinn „frei“, daß sie keinem *bestimmten* Atom, sondern dem ganzen Kollektiv angehören. Es ist aber leicht einzusehen, daß sie mit diesem Kollektiv noch fester gebunden sind als mit den einzelnen isolierten Atomen des entsprechenden Metaldampfes und daß sie sich gleichzeitig noch etwas rascher bewegen müssen. Dies folgt unmittelbar aus dem im ersten Bande (S. 343) bewiesenen *Virialsatz* mit Rücksicht auf die Tatsache, daß bei der Kondensation des Metaldampfes die Energie des ganzen Aggregats um einen bestimmten Betrag  $W$ , der gleich der Kondensationswärme ist, *abnimmt*. Die potentielle Energie der Valenzelektronen muß dabei um den doppelten Betrag

<sup>1)</sup> Die Konzentration  $n$  der frei beweglichen Ionen muß dabei besonders im Falle fester Körper einen sehr geringen Bruchteil der Konzentration aller Atome oder auch aller Ionen (wenn nur die dissoziierten Ionen als beweglich betrachtet werden) darstellen.

abnehmen und ihre kinetische Energie um denselben Betrag *zunehmen* (da die kinetische Energie der Wärmebewegung der Atome, sofern die Kondensation bei konstanter Temperatur stattfindet, unverändert bleibt).

Die Geschwindigkeit der Valenzelektronen läßt sich leicht abschätzen als das Verhältnis der Bahnabmessungen  $l \approx 10^{-8}$  cm zu der Umlaufperiode  $\tau \approx 10^{-16}$  sec (die letzte entspricht näherungsweise den Eigenfrequenzen der Ersatzoszillatoren und kann deshalb aus spektroskopischen Daten ermittelt werden). Wir bekommen auf diese Weise Zahlenwerte von der Größenordnung  $10^7$ — $10^8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ . Mit ungefähr derselben Geschwindigkeit müssen nach dem oben Gesagten die „freien“ Elektronen in einem festen oder flüssigen Metall von einem Atom zum nächsten übergehen. Es sei bemerkt, daß diese Geschwindigkeit *einige tausend Male* größer ist als die mittlere Geschwindigkeit der Wärmebewegung der Atome und Ionen bei den gewöhnlichen Temperaturen (die Geschwindigkeit der Elektronen, falls sie sich wie die Gasmoleküle mit der üblichen Energie  $\frac{3}{2} kT$  tatsächlich frei bewegen sollten, würde bei denselben Bedingungen nur etwa  $10^6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$  betragen). Wir bekommen also für die Diffusionskonstante der freien Elektronen in Metallen nach (56) einen tausendmal größeren Wert als für die Diffusionskonstante der Gasionen, die ihrerseits viele tausend Male größer sein kann als die Diffusionskonstante der Ionen in elektrolytisch leitenden Körpern. Durch diesen Umstand in Verknüpfung mit der sehr großen *Konzentration* der freien Elektronen, die ungefähr mit der Konzentration der Metallatome übereinstimmt, erklärt sich die außerordentlich große Leitfähigkeit der Metalle im Vergleich mit allen anderen Körpern.

Diese Leitfähigkeit läßt sich durch die allgemeine Formel (55a) ausdrücken, wenn man  $n = zN$  setzt ( $N$  Anzahl Atome pro Volumeneinheit,  $z$  Zahl der Valenzelektronen pro Atom) und bei Bestimmung von  $D$  nach (56) die elementare Verschiebung  $l$  mit dem Abstand zwischen den nächsten Atomen und die entsprechende elementare Zeit  $\tau$  mit der Umlaufperiode der Valenzelektronen in isolierten Atomen identifiziert. Ersetzt man dabei den sicher inexakten Zahlenkoeffizienten  $\frac{1}{3}$  (oder  $\frac{1}{6}$ , oder  $\frac{\pi}{4}$ ) durch einen unbestimmten Zahlenkoeffizienten  $\gamma$  von der Größenordnung 1, so wird

$$\sigma = \frac{Nze^2 D}{kT} = \gamma \frac{Nze^2 l^2}{\tau kT}. \quad (58)$$

Diese Formel, abgesehen von absoluten Zahlenwerten, liefert die erfahrungsgemäß richtige Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle von der absoluten Temperatur — jedenfalls für nicht zu

tiefe Temperaturen. Bei tiefen Temperaturen wächst die Leitfähigkeit viel schneller als umgekehrt proportional zu  $T$ . Dies erklärt sich wahrscheinlich dadurch, daß die Wärmebewegung der Atome einen mehr *geordneten Charakter* annimmt, so daß die Nachbaratome in derselben Phase oder mit einer konstanten Phasendifferenz schwingen. Die „elementare Verschiebung“  $l$  muß sich dabei vergrößern und da die elementare Zeit  $\tau$  ihr proportional bleibt, muß die Diffusionskonstante in demselben Verhältnis zunehmen<sup>1)</sup>. Bei einigen (verhältnismäßig schlecht leitenden) Metallen tritt in der Nähe des absoluten Nullpunktes der Temperatur ein sprunghaftes Unendlichwerden der Leitfähigkeit ein. Diese Erscheinung („Supraleitfähigkeit“) läßt sich im Rahmen der obigen Theorie nicht erklären.

Was den absoluten Wert der Leitfähigkeit anbetrifft, so bekommt man nach (58) — wenigstens in dem einfachsten Falle der Alkalimetalle ( $z = 1$ ) — Zahlenwerte von der richtigen Größenordnung. Bei anderen Metallen mit mehreren Valenzelektronen gibt die Formel (58) bei gewöhnlichen Temperaturen zu große Werte für  $\sigma$ . Dies kann man in der Weise deuten, daß die Elektronenbahnen in diesem Fall etwas kleiner werden, so daß jedes Elektron mehrere Umdrehungen in demselben Atom macht, bevor es die Gelegenheit hat zum nächsten überzugehen.

Es sei bemerkt, daß die freien Elektronen keine selbständigen Elemente des Metallkörpers bilden in dem Sinne, daß sie in der Verteilung der Wärmeenergie keinen selbständigen Anteil nehmen. Jedes Metallatom mit den zugehörigen (oder eher in dem betreffenden Augenblick hindurchlaufenden) Valenzelektronen, besitzt dieselbe mittlere Wärmeenergie  $3kT$  als ob diese Elektronen damit immer festgebunden blieben. Mit anderen Worten, die sehr große kinetische Energie der freien Elektronen hat mit der kinetischen Energie der Wärmebewegung  $\frac{3}{2}kT$  (die bei gewöhnlichen Temperaturen etwa hundertmal kleiner ist) gar nichts zu tun. Die freien Elektronen können aber diese Wärmeenergie von einem Atom zum nächsten *übertragen* und auf diese Weise die *thermische Leitfähigkeit* der Metalle bedingen. Die Wärmeleitung wird formal beschrieben mittels der Gleichung

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T ,$$

wo  $c$  die Wärmekapazität der Volumeinheit des betrachteten Körpers und  $\lambda$  seinen Wärmeleitfähigkeitskoeffizient bedeutet. Vergleicht man diese Gleichung mit der „Diffusionsgleichung“

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D \nabla^2 m ,$$

<sup>1)</sup> Denn solange das Elektron mit einer solchen „geordneten“ Atomgruppe verbunden ist, kann seine Bewegungsrichtung nicht „zufällig“, d. h. auf eine durch seine Vorgeschichte nicht bestimmte Weise wechseln.

welche die Verteilung einer beliebig ausgewählten Menge von freien Elektronen bestimmt, so bekommt man als Bedingung dafür, daß die Wärmeenergie durch die freien Elektronen übertragen wird, die Beziehung

$$\lambda = cD. \quad (58a)$$

Setzt man hier  $c = \frac{d}{dT}(N \cdot 3kT) = 3kN$  ein und drückt den Diffusionskoeffizient durch die elektrische Leitfähigkeit nach (58) aus, so ergibt sich die folgende Relation

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{3}{z} \left( \frac{k}{e} \right)^2 T. \quad (58b)$$

Diese Relation stimmt mit den Erfahrungstatsachen (*Wiedemann-Franz'sches Gesetz*) überein, aber merkwürdigerweise nur bei  $z = 1$ .

## § 7. Elektrolytische Polarisierung und Kontaktpotentiale.

### 1. Diffusionskräfte und Polarisierungsschichten.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen bestimmten Werte der elektrischen Leitfähigkeit erlauben es, die Stromstärke nur in dem Fall zu berechnen, daß die Konzentration der Ionen (oder der freien Elektronen) *räumlich konstant* ist. Wenn die Konzentration  $n$  der Ionen einer bestimmten Gattung sich in der Umgebung des betrachteten Punktes irgendwie ändert, so setzt sich der elektrische Strom aus dem eigentlichen Leitungsstrom  $\frac{ne^2}{\phi} \mathfrak{E}$  und dem *Diffusionsstrom*, dessen Projektion in einer beliebigen Richtung  $x$  gleich  $-De \frac{\partial n}{\partial x}$  ist. Die vollständige Stromstärke ist folglich gleich

$$\mathbf{j} = \sum \left( \frac{ne^2}{\phi} \mathfrak{E} - De \nabla n \right) = \sigma \mathfrak{E} - \sum De \nabla n, \quad (59)$$

wo die Summation auf die verschiedenen Ionengattungen (einschließlich der freien Elektronen, falls sie vorhanden sind) erstreckt werden muß. Die diese Ionengattungen charakterisierenden Indizes lassen wir der Einfachheit halber weg.

Der übliche Ansatz (53) der makroskopischen Theorie berücksichtigt den Diffusionsstrom scheinbar gar nicht. Es ist aber klar, daß dieser Strom auch dort enthalten werden soll, denn sonst würde sich die aus den Differentialgleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{D} = 4\pi \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathfrak{D} = 4\pi \rho \quad (59a)$$

ergebende Formel

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (59b)$$

dem Erhaltungssprinzip der Elektrizität nicht immer Genüge leisten. Mit dem Ansatz (59) und

$$\varrho = \sum n e \quad (59c)$$

wird sie wegen der Differentialgleichung (46) oder eher der entsprechenden Gleichung für drei Dimensionen, identisch erfüllt, und zwar nicht nur für die gesamte Ladungs- und Stromdichte, sondern schon für die von den einzelnen Ionengattungen herrührenden Anteile.

Wenn man also in der makroskopischen Theorie den Ansatz  $\mathbf{j} = \sigma \mathfrak{E}$  oder  $\mathbf{j} = {}^2\sigma \cdot \mathfrak{E}$  macht, so führt man im allgemeinen eine „scheinbare“ elektrische Leitfähigkeit ein, die von der eigentlichen, der gleichförmigen Verteilung der Ionen entsprechenden Leitfähigkeit mehr oder minder verschieden ist. Diese scheinbare oder resultierende Leitfähigkeit werden wir von der wirklichen durch einen Akzent unterscheiden. Es gilt also definitionsgemäß:

$${}^2\sigma' \mathfrak{E} = \sigma \mathfrak{E} - \sum D e \nabla n. \quad (60)$$

Man kann aber den Diffusionsstrom noch auf eine andere Weise formal berücksichtigen, und zwar durch Einführung statt der wirklichen elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  einer scheinbaren oder resultierenden Feldstärke  $\mathfrak{E}'$  nach der Gleichung

$$\mathbf{j} = \sigma \mathfrak{E}'. \quad (60a)$$

Die Differenz

$$\mathfrak{E}' - \mathfrak{E} \equiv \mathfrak{E}^s = -\frac{1}{\sigma} \sum D e \nabla n \quad (60b)$$

stellt eine fiktive elektrische Feldstärke dar, welche der von dem Konzentrationsgefälle abhängigen osmotischen Druckkraft äquivalent ist. Im einfachsten Fall, wenn man nur mit *einer* Gattung von (beweglichen) Ionen zu tun hat, reduziert sich (60b) wegen  $\sigma = \frac{D e^2 n}{k T}$  [vgl. (55a)] auf

$$\mathfrak{E}^s = -\frac{k T}{e n} \nabla n. \quad (60c)$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als die übliche hydrostatische Gleichgewichtsbedingung, wobei  $n k T = p$  den osmotischen Druck der Ionen und  $e n \mathfrak{E}^s$  die auf die Volumeinheit bezogene elektrische Kraft bedeutet. Wir werden die Größe  $\mathfrak{E}^s$  als die *elektrolytische Polarisationsstärke* bezeichnen. Bei  $\mathbf{j} = 0$  muß sie die effektive Feldstärke  $\mathfrak{E}$  genau kompensieren.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß in homogenen Körpern wenigstens bei statischen elektrischen Feldern, merkliche Konzentrationsunterschiede der Ionen und besonders der freien Elektronen nur in äußerst dünnen *Grenzschichten* auftreten können. Es sind gerade diese sogenannten *Polarisationsschichten*, oder eher die damit verbundenen elektrischen Ladungen, die in der makroskopischen Theorie als *freie Flächenladungen*

(d. h. von den freien Elektronen oder Ionen bedingte Ladungen mit endlicher Flächendichte) behandelt werden. Nur im Falle schlecht leitender Substanzen bei zeitlich wechselnden Feldern sind die von den raumzeitlichen Änderungen der Ionenkonzentration bedingten elektrolytischen Polarisationserscheinungen im ganzen Körpervolumen zu berücksichtigen.

Um das Wesen dieser Erscheinungen besser einzusehen, wollen wir sie an einem einfachen Beispiel ausführlich behandeln.

## 2. Elektrolytische Polarisation im Falle einer beweglichen Ionengattung (feste Elektrolyten und Metalle).

Wir stellen uns eine planparallele Platte vor, die in ein homogenes äußeres Feld von der gegebenen Stärke  $\mathfrak{E}^a$  senkrecht zu dessen Kraftlinien eingeführt wird. Es bildet sich dabei fast augenblicklich die übliche, von der Verschiebung der gebundenen Elektronen abhängige Polarisation  $\mathfrak{P}$ , weshalb die elektrische Feldstärke innerhalb der Platte von der ursprünglichen Größe  $\mathfrak{E}^a$  auf  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^a - 4\pi\mathfrak{P}$  sinkt. Die elektrische Erregung  $\mathfrak{D}$  bleibt dabei mit  $\mathfrak{E}^a$  identisch. Es sei bemerkt, daß  $\pm P$  mit der Flächendichte der gebundenen Grenzladungen übereinstimmt und daß die Größe  $-4\pi\mathfrak{P}$  nichts anderes ist, als die zusätzliche, von diesen Flächenladungen bedingte Feldstärke (außerhalb der Platte ist die letztere gleich Null).

Es beginnen ferner auch die beweglichen Ionen (die wir positiv voraussetzen wollen; die entgegengesetzten negativen Ionen seien fest gebunden und haben eine unveränderliche Konzentration  $n_0$ ) sich in der Feldrichtung zu verschieben. Sie müssen sich dabei an einer Seite der Platte ansammeln, während an der anderen Seite die entgegengesetzten Ionen in überschüssiger Anzahl bleiben werden. Sie können aber keine echten Flächenladungen bilden, denn bei Vergrößerung oder Verkleinerung der Konzentration treten osmotische Druckkräfte ein, welche die vorhandenen Konzentrationsunterschiede auszugleichen streben. (Es sei bemerkt, daß diese Druckkräfte eine rein fiktive Bedeutung haben und nur als ein dynamischer Äquivalent der Diffusionsbewegung anzusehen sind). Es müssen sich deshalb an den beiden Seiten der Platte zwei entgegengesetzte *Ionenschichten* bilden, welche ebenso wie die von den gebundenen Elektronen herrührenden Flächenladungen das Feld innerhalb der Platte noch weiter — praktisch bis auf Null — herabsetzen.

Der Gang dieses Prozesses läßt sich leicht quantitativ mittels der Gleichungen (59) bis (59c) bestimmen. Man muß dabei noch den Umstand berücksichtigen, daß die Leitfähigkeit  $\sigma$  an jeder Stelle der tatsächlichen und nicht der mittleren Konzentration der beweglichen Ionen proportional ist. Es wird folglich  $\sigma = \sigma_0 \frac{n}{n_0}$ , wo  $\sigma_0$  als die normale

Leitfähigkeit des betreffenden Materials bezeichnet werden kann. Wir können ferner nach (55a)  $D e = \frac{\sigma_0 k T}{n_0 e}$  setzen. Die erwähnten Gleichungen nehmen dabei in unserem eindimensionalen Fall die folgende Gestalt an:

$$\varrho = (n - n_0) e, \quad \mathbf{j} = \frac{\sigma_0}{c n_0 e} \left( n e \mathfrak{E} - k T \frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad (61)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} = 0, \quad (61a)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} = 4 \pi \varrho. \quad (61b)$$

Wir haben hier die Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + 4 \pi \mathbf{j}$  durch (61a) ersetzt, um die magnetische Feldstärke nicht explizite einzuführen.

Zu den obigen Gleichungen müssen wir noch die Beziehung

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} \quad (61c)$$

und die Anfangs- und Grenzbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D} &= \mathfrak{E}^a \text{ für } t = 0 \text{ und alle } x \\ \mathfrak{D} &= \mathfrak{E}^a \text{ an den Grenzflächen der Platte für alle } t \end{aligned} \right\} \quad (61d)$$

hinzufügen. Mittels (61c) und (61b) kann man  $\mathbf{j}$  durch  $\mathfrak{D}$  ausdrücken. Es gilt nämlich:

$$n e \mathfrak{E} = n_0 e \mathfrak{E} + (n - n_0) e \mathfrak{E} = \frac{n_0 e}{\varepsilon} \mathfrak{D} + \frac{1}{4 \pi \varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{e} \frac{\partial (n - n_0) e}{\partial x} = \frac{1}{e} \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{1}{4 \pi e} \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial x^2}$$

und folglich

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma_0}{c \varepsilon} \left[ \left( 1 + \frac{1}{4 \pi n_0 e} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} \right) \mathfrak{D} - \frac{\varepsilon k T}{4 \pi e^2 n_0} \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial x^2} \right]. \quad (62)$$

Wir bekommen also nach (61a) und (61b) die folgende Gleichung für  $\mathfrak{D}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{4 \pi \sigma_0}{\varepsilon} \left[ \left( 1 + \frac{1}{4 \pi n_0 e} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} \right) \mathfrak{D} - \frac{\varepsilon k T}{4 \pi e^2 n_0} \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial x^2} \right] \right\} = 0. \quad (62a)$$

Der eingeklammerte  $\{ \}$  Ausdruck ist folglich von  $x$  unabhängig und stellt eine Funktion der Zeit allein dar.

Es sei bemerkt, daß der Koeffizient  $\frac{\varepsilon}{4 \pi \sigma_0}$  nichts anderes ist als die schon im I. Kap. (§ 7) eingeführte „Relaxationszeit“  $\tau$ , welche bei Annahme einer räumlich und zeitlich konstanten Leitfähigkeit, das Verschwinden einer ursprünglich vorhandenen und ganz beliebig verteilten Volumladung nach der Formel  $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  bestimmen sollte.

Im betrachteten Fall wird sich dagegen eine solche Ladung erst später bilden, und zwar in einer Zeit von der Größenordnung  $\tau$ . Dieser scheinbare Widerspruch mit der elementaren Theorie erklärt sich

folgendermaßen. — Das Verschwinden der freien Volumladung kann nach der letzteren (mit Rücksicht auf das Erhaltungsgesetz der Elektrizität) nur seine Verschiebung auf die *Oberfläche* des betreffenden Körpers bedeuten. Nach der hier entwickelten exakteren Theorie ist aber diese freie „Flächenladung“ als eine eigentliche Volumladung aufzufassen, deren Dichte aber nur in einer sehr dünnen Oberflächenschicht beträchtliche Werte erreichen kann.

Die exakte Formel (62), wenn man dort  $n_0 e = \infty$  oder auch  $kT = 0$  setzt, d. h. die Konzentrationsunterschiede und die damit verknüpften Diffusionsströme vernachlässigt, reduziert sich auf

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{D} + \frac{1}{\tau} \mathfrak{D} \right) = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} = \left( \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} \right)_{t=0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

in Übereinstimmung mit dem früheren Resultat.

Wenn man den Diffusionsstrom berücksichtigt, aber die Größe

$$\frac{1}{4\pi n_0 e} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} = \frac{\rho}{n_0 e} = \frac{n - n_0}{n_0}$$

gegen 1 vernachlässigt und sich auf den Fall eines *statischen* Zustandes, bei welchem die Stromstärke  $j = 0$  ist, beschränkt, bekommt man die folgende einfache Gleichung

$$\frac{d^2 \mathfrak{D}}{dx^2} = \frac{4\pi e^2 n_0}{\varepsilon k T} \mathfrak{D}, \tag{63}$$

deren Lösung lautet

$$\mathfrak{D} = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

mit der Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{\varepsilon k T}}. \tag{63a}$$

Wir nehmen an, daß der Nullpunkt  $x = 0$  in der Mitte der Platte liegt, und bezeichnen ihre Dicke mit  $2d$ .

Es wird dann wegen der Grenzbedingung (61c)

$$c_1 = c_2 = \frac{\mathfrak{G}^\alpha}{e\alpha d + e^{-\alpha d}},$$

und folglich

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G}^\alpha \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{e\alpha d + e^{-\alpha d}}. \tag{63b}$$

Wenn  $d$  sehr groß im Vergleich mit dem Parameter  $\frac{1}{\alpha}$  ist, kann man die elektrische Erregung in der Nähe einer Grenzfläche als Funktion des Abstandes  $|x - d| = x'$  durch die Formel

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G}^\alpha e^{-\alpha x'} \tag{63c}$$

ausdrücken. Man kann sich nun leicht überzeugen, daß  $\frac{1}{\alpha}$  bei den

gewöhnlichen Bedingungen eine außerordentlich kleine Länge darstellt. Wir betrachten zunächst den Extremfall von freien Elektronen in einem festen oder flüssigen Metallkörper. Ihre (normale) Konzentration beträgt etwa  $n_0 \cong 10^{23}$ , so daß bei  $T \cong 300$  und  $\varepsilon \cong 1$   $\frac{1}{\alpha}$  von der Größenordnung  $10^{-8}$  wird. Etwas größere Werte ergeben sich für den Fall nicht sehr verdünnter flüssiger Elektrolytenlösungen. Und nur im Falle sehr schlecht leitender fester Körper mit einer außerordentlich geringen Konzentration der beweglichen Ionen ergeben sich für  $\frac{1}{\alpha}$  Werte von einer makroskopischen Größenordnung (etwa  $\frac{1}{\alpha} = 10^{-4}$  cm bei  $n_0 = 10^{15}$ ). Nach (62c) ist  $\frac{1}{\alpha}$  gleich demjenigen Abstand von der Oberfläche des betreffenden Körpers, bei welchem die Erregung und folglich auch die Ladungsdichte  $\varrho = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x}$  in dem Verhältnis  $\varepsilon : 1$  ( $\varepsilon = 2, 7 \dots$ ) herabgesetzt wird. In einem Abstand, der einige Male größer als  $\frac{1}{\alpha}$  ist und doch vom makroskopischen Standpunkt aus im allgemeinen sehr klein bleibt, ist das äußere Feld praktisch vollkommen *abgeschirmt*. Die auf die Flächeneinheit bezogene freie Ladung beträgt dabei

$$\eta_f = \int_0^{\infty} \varrho d\xi = \frac{1}{4\pi} |\mathfrak{D}_0| = \frac{E_0}{4\pi}$$

in Übereinstimmung mit der üblichen „Grenzbedingung“ für die sprunghafte Änderung der elektrischen Erregung beim Durchgang durch die idealisierte geometrische Körperoberfläche.

Was die gebundene Ladung anbetrifft, so muß sie auch wegen der Inhomogenität des Feldes eine von Null verschiedene Raumdichte

$$\varrho_g = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi \varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \varrho$$

besitzen. Außerdem aber bedingt die Polarisation  $P$  noch eine eigentliche Flächenladung von der Dichte  $\eta_a = P_0 = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi \varepsilon} D_0$ . Es wird folglich  $\eta_g + \int_0^{\infty} \varrho_g d\xi = 0$ . Dies bedeutet, daß in einem leitenden Körper die *effektive* Flächendichte der von den gebundenen Elektronen herrührenden Ladung bei zeitlich konstanten Feldern immer gleich Null bleibt (im Gegensatz zu dem Fall *idealer* Isolatoren).

### 3. Elektrolytische Polarisation im Falle zweier beweglicher Ionengattungen.

Wir wollen jetzt noch den Fall eines Körpers betrachten, der *zwei* bewegliche Ionengattungen (mit entgegengesetzt gleichen Ladungen)

enthält. Bei flüssigen Elektrolyten ist dieser Fall tatsächlich der einfachste, denn unbewegliche Ionen können nur in festen Körpern auftreten.

Die oben erwähnte „Schirmwirkung“, d. h. das Verschwinden des elektrischen Feldes in makroskopischen Abständen von der Grenzfläche bei verschwindender Stromstärke findet in diesem Fall im allgemeinen *nicht* statt. Denn es können dabei gleichzeitig  $j$  und  $\rho$  gleich Null sein, während  $E \neq 0$  ist.

Man hat nämlich bei diesen Bedingungen  $n_1 e_1 + n_2 e_2 = 0$ , d. h. wegen  $e_1 = -e_2 = e$ ,

$$n_1 = n_2 = n,$$

und ferner nach (59), mit Rücksicht auf die Relation  $D = \frac{kT}{\vartheta}$ :

$$\mathfrak{E} n e^2 \left( \frac{1}{\vartheta_1} + \frac{1}{\vartheta_2} \right) = k T e \left( \frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2} \right) \nabla n$$

d. h.

$$\mathfrak{E} = \frac{k T \vartheta_2 - \vartheta_1}{e n \vartheta_2 + \vartheta_1} \nabla n. \quad (64)$$

Führt man hier statt der Feldstärke das entsprechende Potential  $\varphi$  ein, so wird für zwei beliebige Punkte  $P'$  und  $P''$ :

$$\varphi' - \varphi'' = \frac{k T \vartheta_1 - \vartheta_2}{e \vartheta_1 + \vartheta_2} \lg \frac{n'}{n''}. \quad (64a)$$

Diese zuerst von *Nernst* aufgestellte Formel läßt sich auf zweierlei Weise interpretieren — je nachdem die elektrische Potentialdifferenz als Ursache oder als Folge der ungleichförmigen Verteilung der Ionen im betreffenden Körper betrachtet wird. Im zweiten Fall kann man den letzteren als ein *galvanisches Element* auffassen. Wenn man zwei verschiedene Stellen eines solchen „Konzentrationselementes“ durch einen Metalldraht verbindet, so wird in diesem Draht ein elektrischer Strom fließen, und zwar so lange, bis die an den Drahtenden vorhandene Konzentrationsdifferenz verschwindet. Es muß beachtet werden, daß, während die Stromrichtung im Drahte mit der Richtung der Potentialgefälle  $\varphi' - \varphi''$ , d. h. der elektrischen Feldstärke, übereinstimmt, sie innerhalb des Elektrolytes einen dazu entgegengesetzten Sinn hat. Und zwar ist hier die Stromstärke nicht durch die effektive Feldstärke  $\mathfrak{E}$ , sondern durch ihre Summe mit der *elektrolytischen Polarisationsstärke*  $\mathfrak{E}^s$  bestimmt. Das ursprünglich vorhandene und durch die Gleichung (64) ausgedrückte Gleichgewicht zwischen den elektrischen und osmotischen Kräften muß bei Einführung des Drahtes etwas (zugunsten der letzteren) zerstört werden, und gerade auf diese Weise entsteht tatsächlich der „galvanische Strom“.

Das Linienintegral der elektrolytischen Polarisationsstärke heißt die zwischen den entsprechenden Punkten wirkende *elektromotorische Kraft*. Diese elektromotorische Kraft ist im betrachteten Fall durch die rechte

Seite von (64) gegeben. Im Gleichgewichtszustand stimmt sie mit der entsprechenden elektrischen Potentialdifferenz überein, im allgemeinen ist sie aber davon verschieden.

Es muß beachtet werden, daß es sich hier *nicht* um einen *echten Gleichgewichtszustand*, sondern bloß um das Gleichgewicht zwischen elektrischen und Diffusionskräften handelt. Denn das Verschwinden der *totalen* Stromstärke bedeutet nur, daß die beiden Ionengattungen sich zusammen mit derselben mittleren Geschwindigkeit bewegen. Die Dichte dieser neutralen Materieströmung, d. h. die Anzahl Ionen irgend einer Gattung, die pro Zeit- und Flächeneinheit hindurchgehen, drückt sich nach Größe und Richtung durch den Vektor

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \frac{ne}{\vartheta_1} - \frac{kT}{\vartheta_1} \nabla n = - \frac{\mathfrak{E}ne}{\vartheta_2} - \frac{kT}{\vartheta_2} \nabla n$$

aus, d. h. nach (64) durch

$$\mathfrak{S} = - \frac{2kT}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \nabla n = - \frac{2ne\mathfrak{E}}{\vartheta_2 - \vartheta_1}. \quad (64b)$$

Wenn der wirkliche Gleichgewichtszustand erreicht ist, muß dieser Strom verschwinden. Die Bedingung  $n_1 = n_2$  kann aber bei Anwesenheit äußerer elektrischer Kräfte in diesem Gleichgewichtszustand *nicht* erfüllt werden, besonders in der *Nähe der Grenzflächen*, wo die Raumdichte der freien Ladung  $\rho = e(n_1 - n_2)$  von Null verschieden wird.

Wir stellen uns wieder den betreffenden Körper als plattenförmig vor. Im Falle eines flüssigen Elektrolyts kann man sich denken, daß er in ein isolierendes Gefäß mit planparallelen Wänden eingegossen ist. Das äußere Feld sei wie früher senkrecht dazu gerichtet.

Nach der Einstellung des Gleichgewichtszustandes (das äußere Feld  $\mathfrak{E}^a$  setzen wir als konstant voraus) müssen  $n_1$  und  $n_2$  den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} E n_1 e - kT \frac{dn_1}{dx} &= 0 \\ E n_2 e + kT \frac{dn_2}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

genügen, die nach (59) das *Verschwinden der einzelnen von den beiden Ionengattungen herrührender Anteile der Stromstärke ausdrücken*.

Führt man das elektrische Potential nach  $E = - \frac{d\varphi}{dx}$  ein, so läßt sich die Lösung von (65) in der Form

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{e\varphi}{kT}}, \quad n_2 = n_0 e^{+\frac{e\varphi}{kT}} \quad (65a)$$

darstellen, im Einklang mit dem allgemeinen *Boltzmannschen* Vertei-

lungsgesetz. Zur Bestimmung des Potentials hat man ferner die Gleichung

$$\varepsilon \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi \varrho,$$

d. h.

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} e(n_1 - n_2), \tag{65b}$$

die sich aus  $\frac{d\mathfrak{D}}{dx} = 4n\varrho$  in Verbindung mit  $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E} = -\varepsilon \frac{d\varphi}{dx}$  ergibt.

Wenn die Konzentrationen  $n_1$  und  $n_2$  von ihrem gemeinsamen Mittelwert  $n_0$  nicht sehr verschieden sind ( $\frac{n_1 - n_0}{n_0}$  und  $\frac{n_2 - n_0}{n_0}$  klein gegen 1), kann man näherungsweise

$$n_1 = n_0 \left(1 - \frac{e\varphi}{kT}\right) \quad \text{und} \quad n_2 = n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{kT}\right)$$

setzen, wobei (65b) die Gestalt

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{8\pi e^2 n_0}{\varepsilon k T} \varphi \tag{66}$$

annimmt. Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (63) nur dadurch, daß statt der Erregung  $\mathfrak{D}$  das Potential  $\varphi$  auftritt und der Parameter  $\alpha^2$  verdoppelt wird. Diese Verdoppelung entspricht dem Umstand, daß wir jetzt nicht mit einer, sondern mit *zwei* beweglichen Ionengattungen zu tun haben. Setzt man also jetzt

$$\alpha = \sqrt{\frac{8\pi e^2 n_0}{\varepsilon k T}} \tag{66a}$$

so lautet die Lösung von (66)

$$\varphi = \varphi_m \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\alpha d} - e^{-\alpha d}}, \tag{66b}$$

wo  $\pm \varphi_m$  den maximalen und minimalen Wert des Potentials an den Grenzflächen bedeutet (es wird dabei angenommen, daß im Mittelpunkt  $\varphi = 0$ ). Diese Formel kann man aus (63b) mit Rücksicht auf die Beziehung  $\varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \int \mathfrak{D} dx$  erhalten. Daraus folgt unter anderem die Relation

$$E^a = \alpha \varepsilon \varphi_m \cosh \alpha d. \tag{66c}$$

Die durch (66b) und (63b) bestimmte Verteilung des Potentials und der Feldstärke (oder der Erregung) ist in der Abb. 11 graphisch dargestellt. Bei den tatsächlich vorkommenden sehr großen Werten von  $\alpha$  (s. oben) ist die Feldstärke nur in der unmittelbaren Nähe der Grenzflächen von Null verschieden. Geringen Werten der Potentialdifferenz  $2\varphi_m$  ent-

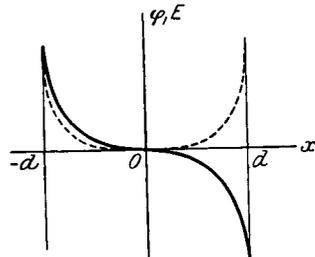


Abb. 11.

sprechen dabei ungeheure Werte der Feldstärke in den beiden „Polarisationsschichten“.

Es ist nicht schwierig, die exakte Lösung der Gleichung (65b) zu finden. Setzt man zur Abkürzung  $\frac{e\varphi}{kT} = f$  und  $\alpha x = \xi$ , so läßt sie sich, wie leicht zu sehen ist, in der Form

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \sinh f \quad (67)$$

schreiben. Wir behandeln zunächst  $f$  als die unabhängige Variable und bekommen, wegen

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \frac{df'}{d\xi} = \frac{df'}{df} \cdot \frac{df}{d\xi} = \frac{f' df'}{df},$$

$$\frac{1}{2} f'^2 = \cosh f + \text{konst} = \cosh f - \cosh f_0,$$

woraus folgt

$$\xi + \text{konst} = \int \frac{df}{\sqrt{\cosh f - \cosh f_0}}. \quad (67a)$$

Auf die Untersuchung dieser Lösung werden wir nicht näher eingehen.

Es sei nun auf die folgende Schwierigkeit hingewiesen, die sich ergibt, wenn man den Fall zweier beweglicher Ionengattungen mit dem früher betrachteten Fall einer Ionengattung vergleicht. Die Unbeweglichkeit der Ionen zweiter Gattung kann man offenbar als den Grenzfall eines unendlich großen Reibungskoeffizienten  $\vartheta_2$  auffassen. Da aber dieser Koeffizient in das Boltzmannsche Verteilungsgesetz (65a) gar nicht eingeht, muß das letztere auch bei  $\vartheta_2 = \infty$  bestehen bleiben, während wir in diesem Fall  $n_2 = n_0 = \text{konst}$  gesetzt hatten. Dieser Widerspruch läßt sich dadurch erklären, daß bei  $\vartheta_2 = \infty$  der Gleichgewichtszustand sich nur in einem unendlich großen Zeitraum, d. h. tatsächlich *niemals*, einstellen kann, da dabei die Relatationszeit  $\tau_2$  unendlich groß wird.

Wenn man also den Gleichgewichtszustand bestimmen will, ist es vorteilhaft, solche Ionen, die eine sehr kleine Beweglichkeit besitzen, als vollkommen unbewegliche oder als quasielastisch gebundene Ladungen zu behandeln. Nach der im vorhergehenden Paragraphen skizzierten Vorstellung von der Wärmebewegung der Ionen in festen und flüssigen Körpern müssen sie tatsächlich als solche quasielastisch gebundene Ladungen aufgefaßt werden, aber nicht mit festen, sondern mit verschiebbaren Gleichgewichtslagen.

Man muß ferner den Umstand beachten, daß die in (61) auftretende effektive Feldstärke, sofern sie nach der Gleichung (65b) bestimmt wird, nur bei kleinen Ionenkonzentrationen ihre Wechselwirkungskräfte richtig darstellen kann. Denn es treten in (65b) nur die *Ladungen* der Ionen auf, d. h. die letzteren werden als Punktladungen behandelt.

Wenn ihre Abstände von derselben Größenordnung wie ihre eigenen Abmessungen sind, muß man auch die letzteren berücksichtigen, d. h. neben den Ladungen auch die elektrischen Momente höherer Ordnung, welche die Wechselwirkungskräfte zwischen ungeladenen Atomen bestimmen, in Betracht ziehen. Diese Aufgabe liegt aber außerhalb des Rahmens der makroskopischen oder der hier dargelegten „quasi-mikroskopischen“ Theorie.

#### 4. Kontaktpotentiale.

Wenn zwei verschiedene Metalle, oder ein Metall und ein Elektrolyt, oder zwei Elektrolyte — kurz zwei verschiedene leitende Körper  $a$  und  $b$  — sich berühren, müssen im allgemeinen die  $a$ -Ionen in  $b$  und die  $b$ -Ionen in  $a$  diffundieren. Es werden dabei elektrische Kräfte erzeugt, die schließlich den Diffusionskräften das Gleichgewicht halten. Auf diese Weise bilden sich auf oder eher *an* der Berührungsfläche *elektrische Doppelschichten* mit bestimmten Potentialsprüngen, die man gewöhnlich als *Kontaktpotentiale* bezeichnet. Im Gleichgewichtszustand sind sie mit den entsprechenden elektromotorischen Kräften identisch.

Im einfachsten Fall zweier Metalle mit verschiedenen Konzentrationen der freien Elektronen ( $n'$  bzw.  $n''$ ) drückt sich diese elektromotorische Kraft oder das entsprechende Kontaktpotential durch die Formel

$$\varphi' - \varphi'' = \varphi = \frac{kT}{e} \lg \frac{n'}{n''} \quad (68)$$

aus, die unmittelbar aus dem Boltzmannschen Verteilungsgesetz

$$n' : n'' = e^{-\frac{e\varphi'}{kT}} : e^{-\frac{e\varphi''}{kT}}$$

folgt. Die Konzentrationen  $n'$  und  $n''$  beziehen sich auf das innere der beiden Metalle und bleiben bei ihrer Berührung unverändert.

Im Falle zweier Elektrolyte, die dieselben Ionengattungen (1, 2) mit verschiedenen festgegebenen Konzentrationen  $n'_1 = n'_2 = n'$ ,  $n''_1 = n''_2 = n''$ , enthalten, muß sich eine durch die Formel (64a) bestimmte Potentialdifferenz bilden. Es sei bemerkt, daß die Formel (68) sich daraus ergibt, wenn man  $\vartheta_1$  oder  $\vartheta_2 = \infty$  setzt, d. h. eine Ionengattung als unbeweglich voraussetzt, wie dies bei Metallen näherungsweise der Fall ist.

Bei der Berührung eines festen Metalls und eines flüssigen Elektrolyten treten die Metallionen in das letztere hinein, die freien Elektronen aber nicht. Im Gleichgewichtszustand erreicht ihre Konzentration  $n''$  einen ganz bestimmten Wert, der mit dem entsprechenden Potentialsprung und der Temperatur durch eine Formel von derselben Gestalt wie (68) verknüpft ist. Die Größe  $n'$  stellt dabei eine für das betreffende Metall charakteristische Konstante dar, die aber von der wirklichen Konzentration der Ionen ganz verschieden ist.

Wenn man eine geschlossene Kette aus mehreren Metallen und Elektrolyten bildet, bekommt man eine resultierende elektromotorische Kraft, die so lange von Null verschieden bleibt, als die ursprüngliche Konzentration der Ionen in den Elektrolyten durch Auflösung der Metallelektroden oder durch andere chemische Umsetzungen beibehalten wird. Wenn die so gebildete Kette nur Metalle enthält, muß die resultierende elektromotorische Kraft nach (68) verschwinden, sofern keine Temperaturunterschiede vorhanden sind. Bei Anwesenheit solcher Temperaturunterschiede (in den Verbindungsstellen) bekommt man sogenannte „thermoelektrische“ Kräfte, die sich nach (86) qualitativ (nicht aber quantitativ) erklären lassen.

## Zweiter Abschnitt.

# Allgemeine Probleme der makroskopischen Theorie.

## Viertes Kapitel.

### Fortpflanzung elektromagnetischer Schwingungen (Wellen) in unbegrenzten Körpern.

#### § 1. Homogene und isotrope Körper.

##### 1. Allgemeine Differentialgleichungen.

Obwohl alle materiellen Körper immer begrenzt sind, wollen wir sie doch bei der Untersuchung der Fortpflanzungsgesetze elektromagnetischer Schwingungen als unbegrenzte Medien behandeln. Die von den Grenzerscheinungen herrührenden Komplikationen werden wir in den nachfolgenden Kapiteln berücksichtigen.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall eines homogenen und isotropen Körpers, dessen Eigenschaften durch die Konstanten  $\varepsilon$  (Dielektrizitätskonstante  $= \frac{D}{E}$ ),  $\mu$  (magnetische Permeabilität  $\frac{H}{B}$ ) und  $\sigma$  (elektrische Leitfähigkeit) charakterisiert werden können. Wie im vorhergehenden Kapitel ausführlich gezeigt worden ist, haben diese Konstanten nur für harmonische Schwingungen bestimmte von der Frequenz abhängige Werte; im allgemeinen Fall läßt sich die Beziehung zwischen den Erregungen  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{B}$  und den Feldstärken  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  mittels zwei Proportionalitätsfaktoren nicht charakterisieren. Wir wollen deshalb von vornherein annehmen, daß diese Vektoren als Funktionen der Zeit in der Form  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^0 e^{-i\omega t}$  usw. dargestellt werden können<sup>1)</sup>. Wir werden zunächst die Konstanten  $\varepsilon$  und  $\mu$  als *reell* ansetzen. Die Dämpfung der elektrischen Schwingungen, unabhängig davon, ob sie von der freien oder den gebundenen Elektronen herrührt, werden wir dabei durch eine reelle „effektive“ Leitfähigkeit  $\sigma$  charakterisieren. Wenn die wirkliche Dielektrizitätskonstante gleich  $\varepsilon + i\varepsilon'$  ist, und die wirkliche Leitfähigkeit gleich  $\sigma_0$ , so hat man, nach der Gleichung

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{B} &= \frac{\varepsilon + i\varepsilon'}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma_0}{c} \mathfrak{E}, \\ \sigma &= \sigma_0 + \frac{\varepsilon'\omega}{4\pi}. \end{aligned} \tag{1}$$

<sup>1)</sup> Es wird für das Folgende bequemer sein, den Exponentialfaktor  $e^{-i\omega t}$  statt  $e^{+i\omega t}$  wie früher zu benutzen.

Die allgemeinen Feldgleichungen lassen sich also im betrachteten Fall in der Gestalt schreiben:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathfrak{E}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \quad (1b)$$

(vgl. (53) bis (54) Kap. I). Die Gleichungen  $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$  und  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$  sind übrigens überflüssig, denn sie ergeben sich durch Divergenzbildung aus den vorhergehenden Gleichungen. Es sind dabei freie Volumladungen selbstverständlich ausgeschlossen. Sonst wäre die obige Zurückführung der elektrischen Dämpfung auf die Leitfähigkeit nicht möglich, denn wir hätten statt  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$  die Gleichung  $\operatorname{div} (\varepsilon + i\varepsilon') \mathfrak{E} = 4\pi\rho$ .

Wenn man in (1a) und (1b)  $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$  und  $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$  durch  $-i\omega \mathfrak{E}$  bzw.  $-i\omega \mathfrak{H}$  ersetzt und statt der wirklichen Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon + i\varepsilon'$  die effektive

$$\varepsilon_s = \varepsilon + i\varepsilon' + i \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (2)$$

einführt, so wird:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} - \frac{i\omega}{c} \mathfrak{H} = 0, \quad (2a)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} + \frac{i\omega\mu\varepsilon_s}{c} \mathfrak{E} = 0. \quad (2b)$$

Obwohl diese Gleichungen formal einfacher sind als (1a) und (1b), sind doch die letzteren, da sie lauter *reelle* Größen enthalten, für das Verständnis der dadurch ausgedrückten allgemeinen physikalischen Gesetze vielfach bequemer.

Durch Differentiation von (1b) nach  $ct$  ergibt sich mit Rücksicht auf (1a)

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

d. h. wegen der Identität

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= \nabla \operatorname{div} \mathfrak{E} - \nabla^2 \mathfrak{E}, \\ \nabla^2 \mathfrak{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ebenso bekommt man durch Elimination von  $\mathfrak{E}$ :

$$\nabla^2 \mathfrak{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \quad (3a)$$

Bei  $\sigma = 0$  reduzieren sich diese Gleichungen auf die bekannte *d'Alembertsche* Form

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\psi = \mathfrak{E}, \mathfrak{H}) \quad (4)$$

mit

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}. \quad (4a)$$

Dies bedeutet, daß bei Fehlen der elektrischen Dämpfung oder Leitung die elektromagnetischen Schwingungen sich in einem homogenen und isotropen Körper auf dieselbe Weise wie im leeren Raum fortpflanzen, aber mit einer von  $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$  verschiedenen, durch (3b) bestimmten, Geschwindigkeit. Solche Körper werden wir als *durchsichtig* bezeichnen. Der Koeffizient  $n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon \mu}$  heißt ihr *Brechungsindex* (der Grund für diese Bezeichnung liegt in den bekannten Brechungserscheinungen an der Trennungsoberfläche zweier homogener Körper, s. unten, Kap. V).

Im entgegengesetzten Falle einer sehr großen Dämpfungskonstante und bei nicht zu hohen Schwingungsfrequenzen, kann man die in (3) und (3a) auftretenden zweiten Ableitungen nach der Zeit, d. h. die Größen  $\frac{\epsilon \mu}{c^2} \omega^2 \psi$ , gegen die rechten Seiten  $\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\omega\psi$  vernachlässigen, und man bekommt

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \nabla^2 \psi \quad (5)$$

mit

$$a = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma\mu}}. \quad (5a)$$

Die Gleichung (5) hat dieselbe Gestalt wie die im vorigen Kapitel betrachtete Diffusionsgleichung, oder die Grundgleichung der Theorie der Wärmeleitung, wobei die Konstante  $a$  die Rolle der Diffusionskonstante oder des thermischen Leitfähigkeitskoeffizienten spielt. Es müssen also in diesem Falle — den man hauptsächlich bei Metallkörpern trifft — die ursprünglich vorhandenen räumlichen Inhomogenitäten des elektromagnetischen Feldes gegen Null streben.

Im allgemeinen Falle, der der Gleichung

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (6)$$

entspricht, pflanzen sich die elektromagnetischen Schwingungen in einer komplizierteren, die beiden betrachteten Typen zusammenfassenden Weise fort.

Da die Gleichungen (1a) dieselbe Form wie für den leeren Raum haben, kann man die Feldstärken durch die Potentiale  $\varphi$  und  $\mathfrak{A}$  nach den üblichen Formeln

$$\mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \quad (6a)$$

ausdrücken. Um aber für diese Potentiale dieselbe Fortpflanzungsgleichung (6) wie für die Feldstärken zu erhalten, muß man, wie leicht zu ersehen ist, die übliche Relation  $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{A} = 0$  durch

$$\text{div } \mathfrak{A} + \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c} \varphi = 0 \quad (6b)$$

ersetzen. Es lassen sich schließlich diese Potentiale durch einen einzigen Vektor  $\mathfrak{Z}$  — welcher dem üblichen Polarisationspotential entspricht — ausdrücken, und zwar nach den Formeln

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{A} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c} \mathfrak{Z} \quad (6c)$$

(vgl. Bd. I, S. 134), wobei  $\mathfrak{Z}$  ebenfalls der Gleichung (6) genügt.

Geht man wieder zu komplexen Größen über, so wird mit Rücksicht auf

$$\frac{\omega^2}{u^2} - \frac{i\omega}{a} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s \mu, \\ \nabla^2 \psi + \frac{\omega^2 \varepsilon_s \mu}{c^2} \psi = 0, \quad (7)$$

( $\psi = \mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \varphi, \mathfrak{A}, \mathfrak{Z}$ ); ferner

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\nabla \varphi + \frac{i\omega}{c} \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{Z} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s \mu \mathfrak{Z} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Z} \\ \mathfrak{H} &= -\frac{i\omega}{c} \varepsilon_s \mu \operatorname{rot} \mathfrak{Z} \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} - \frac{i\omega}{c} \varepsilon_s \mu \varphi = 0. \quad (7b)$$

## 2. Ebene Wellen:

Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Absorptionskoeffizient.

Wir wollen jetzt unseren Ansatz noch weiter spezialisieren und solche elektromagnetischen Vorgänge untersuchen, die nicht nur zeitlich, sondern auch *räumlich*, d. h. hinsichtlich der Abhängigkeit von den räumlichen Koordinaten, harmonisch oder sinusoidal sind. Wir setzen also

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi^0 e^{iS} \\ S &= -\omega t + \mathfrak{k} \cdot \mathbf{r}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wo  $\mathfrak{k}$  einen konstanten (im allgemeinen komplexen) Vektor bedeutet;  $S$  ist die für alle Vektoren  $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$  usw. gemeinsame Schwingungsphase;  $\psi^0 = \mathfrak{E}^0, \mathfrak{H}^0, \dots$  bedeutet die (im allgemeinen ebenfalls komplexe) Amplitude der entsprechenden elektromagnetischen Größen. Wenn der Vektor  $\mathfrak{k}$  reell ist, stimmt der Ansatz (8) mit dem im ersten Bande vielfach betrachteten Ansatz für *ebene sinusoidale Wellen* überein. Es gilt dabei

$$\mathfrak{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}, \quad (8a)$$

wo  $\lambda$  die Wellenlänge und  $\mathbf{n}$  die Wellennormale (in der Fortpflanzungsrichtung) sind.

Im allgemeinen Falle kann man zwei verschiedene Einheitsvektoren  $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}$  einführen und  $\mathfrak{k}$  in der Form

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^{(1)} + i\mathfrak{k}^{(2)} = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{n}^{(1)} + i\varrho \mathbf{n}^{(2)}) = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}^{(1)} + i\zeta \mathbf{n}^{(2)} \quad (8b)$$

darstellen.

Wir bekommen dann nach (8) eine sogenannte *gedämpfte* ebene Welle mit der reellen Amplitude

$$|\psi| = |\psi^0| e^{-\mathfrak{f}^{(2)} \cdot \mathfrak{r}} = |\psi^0| e^{-\zeta n^{(2)} \cdot \mathfrak{r}}, \quad (8c)$$

die in der  $n^{(2)}$ -Richtung im Verhältnis  $e^\zeta : 1$  pro Längeneinheit (oder  $e^{2\pi e} : 1$  pro Wellenlänge  $\lambda$ ) abnimmt, während ihre reelle Phase  $S^{(1)} = -\omega t + \mathfrak{f}^{(1)} \cdot \mathfrak{r}$  sich in der  $n^{(1)}$ -Richtung ändert. Die letzte Richtung ist als die eigentliche Fortpflanzungsrichtung der Welle anzusehen; zur Unterscheidung werden wir die  $n^{(2)}$ -Richtung als die Dämpfungsrichtung bezeichnen. Der Koeffizient  $\zeta$  heißt dementsprechend der *Dämpfungskoeffizient* oder auch der *Absorptionsindex* (s. unten).

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der Ansatz (8) bei passender Wahl von  $\mathfrak{f}$  die Grundgleichung (7) [oder (6)] tatsächlich befriedigt.

Es gilt nämlich (unabhängig davon, ob  $\psi$  eine skalare oder vektorielle Größe ist, s. Bd. I, S. 152):

$$\nabla^2 \psi = -\mathfrak{f}^2 \psi$$

und folglich nach (7):

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s \mu = \mathfrak{f}^{(1)2} - \mathfrak{f}^{(2)2} + 2i \mathfrak{f}^{(1)} \cdot \mathfrak{f}^{(2)} \quad (9)$$

oder wegen (2)

$$\left. \begin{aligned} k^{(1)2} - k^{(2)2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu, \\ \mathfrak{f}^{(1)} \cdot \mathfrak{f}^{(2)} &= k^{(1)} \cdot k^{(2)} \cos \Theta = \frac{2\pi \sigma \mu \omega}{c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Wir sehen also, daß die Dämpfungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung immer *einen spitzen Winkel* ( $\Theta$ ) bilden muß. Außerhalb dieser Bedingung sind die Richtungen  $n^{(1)}$  und  $n^{(2)}$  vollkommen willkürlich und voneinander unabhängig. Durch Auflösen von (9a) bekommt man die folgenden Formeln für die Beträge der Vektoren  $\mathfrak{f}^{(1)}$  (Phasenvektor) und  $\mathfrak{f}^{(2)}$  (Dämpfungsvektor)

$$\left. \begin{aligned} k^{(1)2} &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 \nu^2 \cos^2 \Theta}} \right) \\ k^{(2)2} &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2} \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 \nu^2 \cos^2 \Theta}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

Wir merken noch die Näherungsformeln

$$k^{(1)} \cong \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad k^{(2)} \cong \frac{2\pi}{c} \frac{\sigma}{\cos \Theta} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \left( \frac{\sigma}{\varepsilon \nu \cos \Theta} \ll 1 \right), \quad (10)$$

$$k^{(1)} \cong k^{(2)} \cong \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu \sigma \nu}{\cos \Theta}} \quad \left( \frac{\sigma}{\varepsilon \nu \cos \Theta} \gg 1 \right) \quad (10a)$$

die für den Fall sehr kleiner bzw. sehr großer Dämpfung gelten.

Die entsprechenden Näherungsformeln für  $\lambda$  und  $q$  lauten, wenn man noch die der betrachteten Schwingungsfrequenz entsprechende Wellen-

länge im leeren Raum  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$  einführt

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} \cong \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \varrho \cong \frac{2\sigma}{\varepsilon\nu \cos \Theta} \quad \left( \frac{\sigma}{\varepsilon\nu \cos \Theta} \ll 1 \right), \quad (10b)$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} \cong \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\nu \cos \Theta}}, \quad \varrho \cong 1, \quad \left( \frac{\sigma}{\varepsilon\nu \cos \Theta} \gg 1 \right). \quad (10c)$$

In dem betrachteten Falle ebener sinusoidaler Wellen kann man neben  $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$  noch  $\nabla = i\mathfrak{k}$  setzen. Es wird also nach (7a) und (9)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\mathfrak{k} \times (\mathfrak{k} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{B}k^2 - \mathfrak{k}(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{k}) \\ \mathfrak{H} &= \frac{\omega}{c} \varepsilon_s \mu \mathfrak{k} \times \mathfrak{B} = \frac{c}{\omega} k^2 \mathfrak{k} \times \mathfrak{B} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(vgl. Bd. I, S. 152). Daraus ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\omega}{c} \mathfrak{H} = \mathfrak{k} \times \mathfrak{E}, \quad (11a)$$

$$\varepsilon_s \mu \frac{\omega}{c} \mathfrak{E} = -\mathfrak{k} \times \mathfrak{H}, \quad (11b)$$

die offenbar nichts anderes als die spezielle Form der Grundgleichungen (2a) und (2b) für den betrachteten Fall sind. Aus diesen Gleichungen kann man durch Elimination von  $\mathfrak{E}$  oder  $\mathfrak{H}$  die Gleichung (9) für  $k^2$  bekommen. Es folgen daraus ferner die Gleichungen

$$\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{E} = 0, \quad \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{H} = 0, \quad (11c)$$

die sich auch unmittelbar aus den Gleichungen  $\text{div } \mathfrak{E} = 0$  und  $\text{div } \mathfrak{H} = 0$  ergeben.

### 3. Ebene Wellen: Amplituden und Energie.

Wir führen nun die reellen Komponenten der komplexen Amplituden von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  nach

$$\mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}' + i\mathfrak{E}'', \quad \mathfrak{H}^0 = \mathfrak{H}' + i\mathfrak{H}'' \quad (12)$$

ein. Es sei erinnert, daß  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{E}''$  zwei konjugierte Halbmesser der Schwingungsellipse darstellen, die von dem Endpunkt des Vektors  $R (\mathfrak{E}^0 e^{-i\omega t}) = \mathfrak{E}' \cos \omega t + \mathfrak{E}'' \sin \omega t$ , und zwar in der Richtung von  $\mathfrak{E}'$  nach  $\mathfrak{E}''$  beschrieben wird.

Um die Beziehungen zwischen diesen reellen Komponenten und den reellen Komponenten von  $\mathfrak{k}$  zu bekommen, setzen wir (12) in die Gleichungen (11c) ein. Es wird dabei

$$(\mathfrak{k}^{(1)} + i\mathfrak{k}^{(2)}) \cdot (\mathfrak{E}' + i\mathfrak{E}'') = \mathfrak{k}^{(1)} \cdot \mathfrak{E}' - \mathfrak{k}^{(2)} \cdot \mathfrak{E}'' + i(\mathfrak{k}^{(1)} \cdot \mathfrak{E}'' + \mathfrak{k}^{(2)} \cdot \mathfrak{E}') = 0,$$

d. h.

$$\mathfrak{k}^{(1)} \cdot \mathfrak{E}' = \mathfrak{k}^{(2)} \cdot \mathfrak{E}'', \quad \mathfrak{k}^{(1)} \cdot \mathfrak{E}'' = -\mathfrak{k}^{(2)} \cdot \mathfrak{E}' \quad (12a)$$

und ebenso

$$\mathfrak{k}^{(1)} \mathfrak{H}' = \mathfrak{k}^{(2)} \cdot \mathfrak{H}'', \quad \mathfrak{k}^{(1)} \cdot \mathfrak{H}'' = -\mathfrak{k}^{(2)} \cdot \mathfrak{H}'. \quad (12b)$$

Durch Einsetzen von (12) in (11a) bekommt man ferner

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} (\mathfrak{H}' + i\mathfrak{H}'') &= (\mathfrak{f}^{(1)} + i\mathfrak{f}^{(2)}) \times (\mathfrak{E}' + i\mathfrak{E}'') \\ &= \mathfrak{f}^{(1)} \times \mathfrak{E}' - \mathfrak{f}^{(2)} \times \mathfrak{E}'' + i(\mathfrak{f}^{(1)} \times \mathfrak{E}'' + \mathfrak{f}^{(2)} \times \mathfrak{E}'), \end{aligned}$$

d. h.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{c} \mathfrak{H}' &= \mathfrak{f}^{(1)} \times \mathfrak{E}' - \mathfrak{f}^{(2)} \times \mathfrak{E}'' \\ \frac{\omega}{c} \mathfrak{H}'' &= \mathfrak{f}^{(1)} \times \mathfrak{E}'' + \mathfrak{f}^{(2)} \times \mathfrak{E}' \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

Daraus ergeben sich neben den Beziehungen (12b) noch die folgenden Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{c} \mathfrak{f}^{(1)} \cdot \mathfrak{H}' &= (\mathfrak{f}^{(2)} \times \mathfrak{f}^{(1)}) \cdot \mathfrak{E}'' \\ \frac{\omega}{c} \mathfrak{f}^{(1)} \cdot \mathfrak{H}'' &= (\mathfrak{f}^{(1)} \times \mathfrak{f}^{(2)}) \cdot \mathfrak{E}' \end{aligned} \right\} \quad (12d)$$

Wir nehmen zunächst an, daß der elektrische Vektor *linear* schwingt und setzen dementsprechend  $\mathfrak{E}'' = 0$  ( $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}^0$ ). Es folgt dann aus (12a), daß diese Schwingungen eine zu den beiden Vektoren  $\mathfrak{f}^{(1)}$  und  $\mathfrak{f}^{(2)}$  senkrechte Richtung haben müssen. Die magnetischen Schwingungen ergeben sich dann nach Größe und Richtung aus (12c). Und zwar liegen die beiden Komponenten von  $\mathfrak{H}$  in der  $(\mathfrak{f}^{(1)}, \mathfrak{f}^{(2)})$ -Ebene, senkrecht zu  $\mathfrak{f}^{(1)}$  und  $\mathfrak{f}^{(2)}$  und stehen zueinander im Verhältnis  $k^{(1)}:k^{(2)}$ .

Wenn die magnetischen Schwingungen linear sind, müssen sie ebenfalls nach (12b) eine zu  $\mathfrak{f}'$  und  $\mathfrak{f}''$  senkrechte Richtung haben. Daraus folgt aber wegen (12d), daß die elektrischen Schwingungen in der  $(\mathfrak{f}^{(1)}, \mathfrak{f}^{(2)})$ -Ebene stattfinden. Die beiden Fälle sind also zueinander reziprok.

Wir wenden uns jetzt dem einfachsten und in Wirklichkeit am meisten vorkommenden Falle, daß die Vektoren  $\mathfrak{f}^{(1)}$  und  $\mathfrak{f}^{(2)}$  *dieselbe Richtung* haben ( $n^{(1)} = n^{(2)} = n$ ), zu. Es ist in diesem Falle nicht nötig, die Amplitudenvektoren  $\mathfrak{E}^0$  und  $\mathfrak{H}^0$  in ihre reellen und komplexen Anteile zu zerlegen. Man sieht zunächst aus (12), daß die elektrische und magnetische Feldstärke senkrecht zu  $n$  sind. Setzt man ferner

$$k = k^{(1)} + ik^{(2)} = |k| e^{i\delta}, \quad (13)$$

so wird nach (11a) für beliebige (d. h. im allgemeinen elliptisch polarisierte) harmonische Schwingungen

$$\mathfrak{H}^0 = \frac{c}{\omega} |k| n \times \mathfrak{E}^0 e^{i\delta}, \quad (13a)$$

d. h. nach (9b) mit Rücksicht auf  $|k| = k^{(1)2} + k^{(2)2}$ :

$$H^0 = \varepsilon \mu \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 \nu^2}} E^0. \quad (13b)$$

Für die Phasenverschiebung wollen wir nur die angenäherten Formeln angeben, die sehr kleinen oder sehr großen Dämpfungen ent-

sprechen. Dies sind nach (10) und (10a)

$$\text{bzw.} \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta \approx \delta &= \frac{\sigma}{\nu \varepsilon} \quad (\ll 1) \\ \operatorname{tg} \delta &= 1, \text{ d. h. } \delta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (13c)$$

Bei vollkommen durchsichtigen Körpern ( $\sigma = 0$ ) hat man  $\delta = 0$  und

$$H^2 = \varepsilon \mu E^2$$

oder

$$\mu B^2 = \varepsilon E^2. \quad (13d)$$

Diese Relation wird gewöhnlich interpretiert als die Gleichheit der elektrischen und magnetischen Energiedichte für ungedämpfte elektromagnetische Wellen. Eine solche Interpretation ist aber kaum zulässig, denn der Ausdruck  $\frac{\mu B^2 + \varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mathfrak{B} \mathfrak{H} + \mathfrak{E} \mathfrak{D}}{8\pi}$  stellt bekanntlich nur den *freien Elektronen zugehörigen Anteil* der Energiedichte dar (s. Kap. II, § 1). Es kann aber im betrachteten Fall überhaupt keine freien Elektronen geben, denn sie müßten eine Dämpfung der Wellen bedingen. Bei  $\sigma > 0$ , d. h. bei Anwesenheit von Dämpfung, haben nur die vollständigen quadratischen Größen einen unmittelbaren physikalischen Sinn. Da sie in Kap. II ausführlich untersucht worden sind, werden wir hier nur die einfachste und für die Wellenvorgänge wichtigste von ihnen diskutieren, nämlich die *Energiestrahlungsdichte*

$$\mathfrak{R} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{B} = \frac{c}{4\pi\mu} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \quad (14)$$

[s. z. B. Kap. II, Formel (50b)]. Es sei bemerkt, daß dieser Ausdruck ganz exakt ist, d. h. auch bei der Berücksichtigung des Unterschiedes zwischen den totalen und effektiven Feldstärken richtig bleibt. Die in (14) auftretenden Feldstärken sind dabei selbstverständlich als reell anzusehen. Bei ihrer komplexen Darstellung bekommt man für den zeitlichen Mittelwert von  $\mathfrak{R}$  den Ausdruck:

$$\overline{\mathfrak{R}} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi\mu} R (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}^*).$$

Wenn die Dämpfungsrichtung der Wellen mit ihrer Fortpflanzungsrichtung zusammenfällt, hat man nach (13a) und (13b)

$$\overline{\mathfrak{R}} = n \cdot \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt[4]{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2 \nu^2}} \cos \delta |\overline{\mathfrak{E}}|^2. \quad (14a)$$

Bei kleiner Dämpfung ergibt sich daraus mit Rücksicht auf (13c) die folgende bis auf Größen zweiter Ordnung in  $\frac{\sigma}{\varepsilon \nu}$  richtige Formel:

$$\overline{\mathfrak{R}} \approx n \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2\varepsilon^2 \nu^2} \right) |\overline{\mathfrak{E}}|^2. \quad (14b)$$

In dem entgegengesetzten Extremfall wird

$$\bar{n} \cong n \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu\mu}} |\bar{\mathfrak{E}}|^2. \quad (14c)$$

#### 4. Fortpflanzung ebener Wellen in bewegten Körpern.

Wir wollen noch zum Schluß einige der hier angeführten Resultate für den Fall *bewegter* Medien verallgemeinern. Wir denken uns dabei eine geradlinig-gleichförmige Bewegung mit einer gegen  $c$  sehr kleinen Geschwindigkeit  $v$  (relativ zu dem als ruhend vorausgesetzten Bezugssystem  $S$ ). Es müssen in diesem Falle die Grundgleichungen (1a) und (1b) durch die Gleichungen (61a) des I. Kapitels (§ 8) ersetzt werden. Der Einfachheit halber wollen wir die dort auftretende Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  (die unserer  $\varepsilon_s$  entspricht) als eine reelle Größe betrachten, d. h. eine Dämpfung ausschließen. Für den Fall ebener sinusoidaler Wellen (8) nehmen diese Gleichungen bei Weglassen der jetzt belanglosen Striche die folgende Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{E} + \mathfrak{w} \times (\mathfrak{f} \times \mathfrak{B}) &= 0, \\ \mu \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{w} \times (\mathfrak{f} \times \mathfrak{E}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{f} \times \mathfrak{E} - \frac{\omega}{c} (\mu \mathfrak{B} - \mathfrak{w} \times \mathfrak{E}) &= 0, \\ \mathfrak{f} \times \mathfrak{B} + \frac{\omega}{c} (\varepsilon \mathfrak{E} + \mathfrak{w} \times \mathfrak{B}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15a)$$

an, mit

$$\mathfrak{w} = (\varepsilon \mu - 1) \frac{v}{c}. \quad (15b)$$

Wir betrachten zunächst solche Wellen, die sich in der Bewegungsrichtung fortpflanzen. Es wird dann mit  $\frac{\mathfrak{f}}{k} = \frac{\mathfrak{w}}{w} = \mathfrak{n}$

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{E} = 0, \quad \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{B} = 0 \quad (16)$$

und ferner nach (15a)

$$\left. \begin{aligned} \left(k + \frac{\omega}{c} w\right) \mathfrak{n} \times \mathfrak{E} - \frac{\omega}{c} \mu \mathfrak{B} &= 0, \\ \left(k + \frac{\omega}{c} w\right) \mathfrak{n} \times \mathfrak{B} + \frac{\omega}{c} \varepsilon \mathfrak{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen vektoriell mit  $\left(k + \frac{\omega}{c} w\right) \mathfrak{n}$  und die zweite mit  $\frac{\omega}{c} \mu$ , so ergibt sich durch ihre Addition

$$\left(k + \frac{\omega}{c} w\right)^2 \mathfrak{n} \times (\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \mathfrak{E} = 0,$$

d. h. wegen  $\mathfrak{n} \times (\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}) = -\mathfrak{E}$ :

$$\left(k + \frac{\omega}{c} w\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu,$$

oder folglich:

$$k = \frac{\omega}{c} (\sqrt{\varepsilon\mu} - w) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \left[ 1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon\mu} \right) \right]. \quad (16b)$$

Hier bedeutet  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = u$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der betrachteten Schwingungen im ruhenden Körper. Für den bewegten Körper ist sie nach der Definition von  $k$  gleich  $u' = \frac{\omega}{k}$ . Wir haben also:

$$\frac{u'}{u} = 1 - \frac{v}{u} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon\mu} \right),$$

d. h. näherungsweise (wegen  $v \ll u$ )

$$\frac{u'}{u} = 1 + \frac{v}{u} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon\mu} \right)$$

oder mit  $\varepsilon\mu = \frac{c^2}{u^2}$

$$u' = u + v \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right). \quad (16c)$$

Diese Formel zeigt, daß die Geschwindigkeit  $u'$  sich aus  $u$  und  $v$  nicht durch einfache Addition, sondern nach dem Additionsgesetz der Relativitätstheorie zusammensetzt (vgl. Bd. I, S. 278 und 288).

Die exakte Form dieses Kompositionsgesetzes für den betrachteten Fall ( $u \parallel v$ ) lautet

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}.$$

Daraus ergibt sich in erster Näherung (bezüglich  $\frac{v}{c}$ ) die vorhergehende Formel.

Es ist nicht schwierig, die Gleichungen (15a) auch für den allgemeinen Fall ( $\mathfrak{k}$  nicht parallel zu  $v$ ) zu lösen. Man bekommt dann mittels desselben Verfahrens wie früher statt (16b) die Gleichung

$$\left( \mathfrak{k} + \frac{\omega}{c} w \right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu,$$

d. h.

$$k^2 + \frac{2\omega}{c} w k \cos \Theta + \frac{\omega^2}{c^2} w^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu,$$

wo  $\Theta$  den Winkel zwischen  $\mathfrak{k}$  und  $v$  bedeutet. Es wird folglich in erster Näherung

$$k = \frac{\omega}{c} (\sqrt{\varepsilon\mu} - w \cos \Theta), \quad (17)$$

oder

$$u' = u + \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) v \cos \Theta, \quad (17a)$$

in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Kompositionsgesetz (4) (s. Bd. I, S. 288).

Der Energieströmungsvektor drückt sich in diesem Falle wegen

$$\mu \mathfrak{B} = \left( \frac{c}{\omega} \mathfrak{k} - \mathfrak{w} \right) \times \mathfrak{E},$$

[siehe die erste Gleichung (15a)] durch die Formel

$$\mathfrak{R} = \frac{c}{4\pi\mu} \mathfrak{E} \times \left[ \left( \frac{c}{\omega} \mathfrak{k} - \mathfrak{w} \right) \times \mathfrak{E} \right] \quad (17b)$$

aus. Es hat eine von der Wellennormale verschiedene Richtung, was der Tatsache entspricht, daß die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{B}$  nach (15) nicht mehr in der Wellenebene liegen.

Wir sehen also, daß die Bewegung eines homogenen und isotropen Körpers eine eigenartige *Anisotropie* verursacht. Diese „kinematische Anisotropie“ ist übrigens ganz verschieden von derjenigen „physikalischen Anisotropie“, die für ruhende kristallinische Körper charakteristisch ist.

## § 2. Ebene Wellen in homogenen anisotropen Körpern.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Fortpflanzungsgesetze ebener elektromagnetischer Wellen in physikalisch anisotropen Körpern, die sich im allgemeinen durch drei Tensoren  $\varepsilon_{ik}$ ,  $\mu_{ik}$  (oder  $\mu_{ik}^{-1}$ ) und  $\sigma_{ik}$  (statt der Skalaren  $\varepsilon$ ,  $\mu$  oder  $\frac{1}{\mu}$  und  $\sigma$ ) charakterisieren lassen, über.

Die allgemeinen Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= 0, & \text{div } \mathfrak{H} &= 0, \\ \text{rot } \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} &= 4\pi \mathfrak{j}, & \text{div } \mathfrak{D} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

nehmen für den Fall ebener harmonischer Wellen [Ansatz (8)] die Gestalt

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{E} - \frac{\omega}{c} \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{H} = 0, \quad (18)$$

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{B} + \frac{\omega}{c} \mathfrak{D} = 4\pi \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{D} = 0 \quad (18a)$$

an (die Dichte der freien Ladung setzen wir von vornherein gleich Null).

Der Übersichtlichkeit halber wollen wir sie *nicht* in voller Allgemeinheit lösen, sondern beschränken uns zunächst auf den *einfachsten Fall*  ${}^2\mu = 1$ ,  ${}^2\sigma = 0$ ,  ${}^2\varepsilon = \text{reell}$ . Dies entspricht einem vollkommen durchsichtigen unmagnetischen Kristallkörper ohne Gyrotropie oder natürliche Aktivität.

### 1. Wellengeschwindigkeit als Funktion der Wellennormale; $\mathfrak{D}$ -Grundschrwingungen.

Die Gleichungen (18a) reduzieren sich dabei auf

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{H} + \frac{\omega}{c} \mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{D} = 0. \quad (18b)$$

Ersetzt man hier  $\mathfrak{S}$  durch  $\frac{c}{\omega} \mathfrak{k} \times \mathfrak{E}$  nach (18), so wird

$$\mathfrak{k} \times (\mathfrak{k} \times \mathfrak{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathfrak{D} = 0 \tag{19}$$

oder auch

$$n(\mathfrak{E} \cdot n) - \mathfrak{E} + \frac{u^2}{c^2} \mathfrak{D} = 0, \tag{19a}$$

wo wie üblich  $n = \frac{\mathfrak{k}}{k}$  die Wellennormale und  $u = \frac{\omega}{k}$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeuten.

Wir führen nun die Beziehung zwischen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  in der Form

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2, \quad D_3 = \varepsilon_3 E_3 \tag{19b}$$

ein, lassen also die Koordinatenachsen mit den Symmetrieachsen des Tensors  ${}^2\varepsilon$  zusammenfallen, und bestimmen  $u$  als Funktion von  $n_1, n_2, n_3$  (Richtungskosinus der Wellennormale). Diese Aufgabe läßt sich besonders einfach lösen, wenn  $n$  einer der Koordinatenachsen parallel ist. Es wird z. B. bei  $n_2 = n_3 = 0$ , nach (19a):

$$E_1 - E_1 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_1 E_1 = 0, \quad -E_2 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_2 E_2 = 0, \quad -E_3 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_3 E_3 = 0,$$

d. h.  $E_1 = 0$  und  $u =$  entweder  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}$  oder  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_3}}$ , je nachdem  $E_3$  oder  $E_2$  ebenfalls verschwindet. Dies bedeutet, daß in der Richtung einer Symmetrieachse des Tensors  ${}^2\varepsilon$  sich nur solche lineare Schwingungen fortpflanzen können, die parallel zu einer der zwei anderen Achsen sind, und zwar mit einer ihrer Richtung nach der Formel

$$u_i = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_i}} \tag{19c}$$

entsprechenden Geschwindigkeit. Wir wollen diese Geschwindigkeiten als *Hauptgeschwindigkeiten* bezeichnen.

Zur Bestimmung von  $u$  im allgemeinen Falle schreiben wir die Gleichung (19a) koordinatenmäßig in der Gestalt

$$n_i \sum n_k E_k - E_i + \frac{u^2}{u_i^2} E_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{20}$$

um. Wir bekommen also ein homogenes System von drei linearen Gleichungen mit drei unbekanntem  $E_1, E_2, E_3$  (oder  $D_1, D_2, D_3$ , wenn man die ersteren durch die letzteren ausdrückt). Als Kompatibilitätsbedingung ergibt sich die Gleichung

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} n_1^2 - 1 + \frac{u^2}{u_1^2}, & n_1 n_2, & n_1 n_3, \\ n_2 n_1, & n_2^2 - 1 + \frac{u^2}{u_2^2}, & n_2 n_3, \\ n_3 n_1, & n_3 n_2, & n_3^2 - 1 + \frac{u^2}{u_3^2} \end{vmatrix} = 0, \tag{20a}$$

welche gerade die gesuchte Gleichung für  $u$  darstellt. Sie ist vom dritten Grade in  $u^2$ , und muß wegen der Symmetrie der Determinante drei *reelle* Wurzeln haben. Eine dieser Wurzeln ist aber, wie leicht zu ersehen, *unendlich* und kommt deshalb nicht in Betracht. Die zwei anderen Wurzeln  $u'$  und  $u''$  entsprechen zwei bestimmten Schwingungstypen, die sich in der betreffenden Richtung  $\mathfrak{n}$  fortpflanzen können, und zwar zwei *lineare* Schwingungen von ganz bestimmten Richtungen  $\mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{E}''$  bzw.  $\mathfrak{D}'$ ,  $\mathfrak{D}''$ . Ihre Linearität folgt aus dem Umstand, daß die Koeffizienten des Gleichungssystems (20) einschließlich der  $u$ -Werte, reell sind. Die Verhältnisse  $E_1 : E_2 : E_3$  (und  $D_1 : D_2 : D_3$ ) müssen deshalb auch reell sein. Die Beträge der Vektoren  $\mathfrak{E}$  (und  $\mathfrak{D}$ ), d. h. die *Amplituden* der entsprechenden Schwingungen, bleiben selbstverständlich willkürlich.

Aus den Identitäten

$$\begin{aligned} n_i \sum_k n_k E'_k - E'_i + \frac{u^2}{u_i^2} E'_i &= 0 \\ n_i \sum_k n_k E''_k - E''_i + \frac{u'^2}{u_i^2} E''_i &= 0 \end{aligned}$$

ergibt sich durch Multiplikation mit  $E''_i$  bzw.  $E'_i$ , Summierung bezüglich  $i$  und Subtraktion:

$$\begin{aligned} \left( \sum n_i \cdot E''_i \right) \left( \sum_k n_k E'_k \right) - \left( \sum_i n_i E'_i \right) \left( \sum_k n_k E''_k \right) \\ + (u'^2 - u^2) \sum_i \frac{E'_i E''_i}{u_i^2} = 0, \end{aligned}$$

d. h. wenn  $u'$  und  $u''$  verschieden sind:

$$c^2 \sum \frac{E'_i E''_i}{u_i^2} = \mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{E}'' = \mathfrak{D}'' \cdot \mathfrak{E}' = 0. \quad (20b)$$

In ähnlicher Weise bekommt man aus (19a) mit Rücksicht auf (20b) und  $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{D} = 0$  die Relation

$$\mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{D}'' = 0, \quad (20c)$$

welche zeigt, daß die Richtungen von  $\mathfrak{D}'$  und  $\mathfrak{D}''$  senkrecht zueinander sind. Wir wollen diese Richtungen als die zu der betreffenden Wellennormale gehörigen *Grundrichtungen* oder *Grundschiwungsrichtungen* bezeichnen. Es sei bemerkt, daß  $\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{E}'' \neq 0$ ; es wäre deshalb nicht zweckmäßig die Grundrichtungen durch den Vektor  $\mathfrak{E}$  zu definieren; desto mehr, da er außerhalb der Wellenebene liegt ( $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n} \neq 0$ ).

Die Gleichung (20a) läßt sich beträchtlich vereinfachen, wenn man die Determinante ausrechnet und die Beziehung  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  berücksichtigt. Man kommt aber schneller zum Ziele, wenn man direkt von den Gleichungen (20) ausgeht. Man hat nämlich

$$\frac{n_i}{1 - \frac{u^2}{u_i^2}} \sum_k n_k E_k = E_i,$$

woraus durch Multiplikation mit  $n_i$  und Summierung die Relation

$$\sum_i \frac{n_i^2}{1 - u_i^2} = 1$$

oder schließlich

$$\frac{n_1^2}{u_1^2 - u^2} + \frac{n_2^2}{u_2^2 - u^2} + \frac{n_3^2}{u_3^2 - u^2} = 0 \tag{20d}$$

folgt. Diese zuerst von *Fresnel* aufgestellte Gleichung ist offenbar mit (20a) äquivalent.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und die Schwingungsrichtungen sind miteinander eindeutig verknüpft. Man kann in der Tat die ersten unmittelbar durch die zweiten in eindeutiger Weise ausdrücken, ohne die Fortpflanzungsrichtung *explizite* einzuführen. Man bekommt nämlich durch Multiplikation von (19a) mit  $\mathfrak{D}$  wegen  $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{D} = 0$ :

$$\frac{u^2}{c^2} D^2 = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} = \sum_i \frac{u_i^2}{c^2} D_i^2,$$

d. h.

$$u^2 D^2 = \sum u_i^2 D_i^2 \tag{21}$$

oder

$$u^2 = \sum u_i^2 d_i^2, \tag{21a}$$

wo

$$d_i = \frac{D_i}{D} \tag{21b}$$

die Richtungskosinus des Vektors  $\mathfrak{D}$  sind.

Es wäre aber irrtümlich zu glauben, daß eine lineare  $\mathfrak{D}$ -Schwingung von einer gegebenen Richtung sich nach *allen* dazu senkrechten Richtungen mit derselben durch (21a) bestimmten Geschwindigkeit fort-

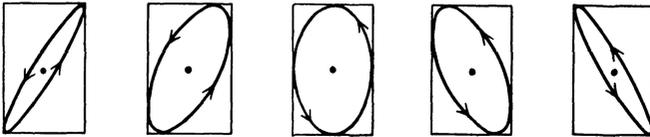


Abb. 12.

pflanzen kann. Denn eine solche Schwingung wird nur einer ganz bestimmten Fortpflanzungsrichtung (oder eher zwei entgegengesetzten Richtungen der Wellennormale) als Grundschwingung zugeordnet und kann sich nach den anderen Richtungen gar nicht fortpflanzen.

Es sei bemerkt, daß sich zwei lineare Grundschwingungen  $\mathfrak{D}'$  und  $\mathfrak{D}''$ , obwohl sie sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen, an jeder Stelle zu einer resultierenden harmonischen Schwingung vereinigen lassen, deren Gestalt („Polarisationsart“) von der Zeit unabhängig bleibt, aber sich in der Fortpflanzungsrichtung in einer bestimmten stetigen Weise ändert. An denjenigen Stellen, wo die Phasen von

$\mathfrak{D}'$  und  $\mathfrak{D}''$  übereinstimmen, setzen sie sich zu einer linearen Schwingung zusammen; bei einer Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$  ergibt sich eine elliptische Schwingung mit den Halbachsen  $|\mathfrak{D}'|$  und  $|\mathfrak{D}''|$  usw. Diese Gestaltsänderungen der resultierenden Schwingung

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}'_0 e^{i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}} + \mathfrak{D}''_0 e^{i\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t}$$

sind in der Abb. 12 schematisch dargestellt.

### 2. Strahlengeschwindigkeit als Funktion der Lichtstrahlenrichtung; $\mathfrak{E}$ -Grundschiebungen.

Die Gleichung (19a) zeigt, daß die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  in der Schwingungsebene ( $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{n}$ ) liegt; sie steht aber nicht senkrecht auf  $\mathfrak{n}$ , sondern bildet mit  $\mathfrak{D}$  einen bestimmten, im allgemeinen von Null verschiedenen Winkel  $\Theta$ , welcher von  $\mathfrak{D}$  (und  $\mathfrak{n}$ ) abhängt. Dieser Winkel verschwindet nur in dem Falle, wenn  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{n}$  zwei Symmetrieachsen des Tensors  ${}^2\epsilon$  parallel sind. Die magnetische Feldstärke ist dagegen nach (18) immer senkrecht zu  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{n}$  gerichtet, und zwar so, daß der Vektor  $\mathfrak{D} \times \mathfrak{H}$  mit  $\mathfrak{n}$  übereinstimmt (Abb. 13).

Der Vektor

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{D} \times \mathfrak{H} \tag{22}$$

stellt bekanntlich die Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße dar [Kap. II, (50c)].

In der Kristalloptik hat man meistens nicht mit unbegrenzten ebenen Wellen, sondern mit dünnen Strahlenbündeln (d. h. seitlich begrenzten Wellen) zu tun. Die Richtung dieser Strahlenbündel fällt *nicht* mit der Wellennormale, sondern mit der des *Energiestrahlungsvektors*

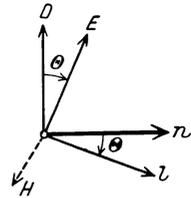


Abb. 13.

$$\mathfrak{R} = \frac{c}{4\pi} \mathfrak{E} \times \mathfrak{H} \quad (\mathfrak{H} = \mathfrak{B}) \tag{22a}$$

zusammen. Letzterer bestimmt gleichzeitig auch die *Intensität* der Lichtstrahlen. Es ist deshalb zweckmäßig, neben der oben betrachteten skalaren Wellengeschwindigkeit  $u$  noch eine vektorielle *Strahlengeschwindigkeit*  $\mathbf{v}$  einzuführen, die mit  $\mathfrak{R}$  gleichgerichtet ist und ihrem Betrage nach durch die Formel

$$u = \mathfrak{n} \cdot \mathbf{v} = v \cos \Theta \tag{22b}$$

bestimmt wird.

Mittels dieser Geschwindigkeit kann man den Strahlungsvektor in der Form

$$\mathfrak{R} = \xi \mathbf{v} \tag{23}$$

mit

$$\xi = \frac{c}{4\pi} \frac{EH}{v}$$

darstellen. Nun gilt nach der ersten Gleichung (18) mit Rücksicht auf

$$|\mathbf{f} \times \mathfrak{E}| = k E \cos \Theta, \quad \frac{\omega}{k} = u \quad \text{und} \quad \frac{u}{\cos \Theta} = v:$$

$$E = \frac{v}{c} H. \tag{23a}$$

Ebenso bekommt man aus (18 b):

$$H = \frac{u}{c} D. \tag{23b}$$

Man hat folglich mit Rücksicht auf  $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} = E D \cos \Theta$ :

$$\xi = \frac{H^2}{4\pi} = \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}}{4\pi} = \frac{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} + H^2}{8\pi} \tag{23c}$$

Die Größe  $\xi$  ist also gleich der „den freien Elektronen zugehörigen Energiedichte“. Es sei daran erinnert, daß die vollständige Energiedichte (bei Identifizierung der totalen und effektiven Feldstärken) nach (50) Kap. II gleich

$$\frac{1}{4\pi} \left( \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} + \frac{H^2 - E^2}{2} \right)$$

ist.

Die Gleichungen (23a) und (23b) lassen sich mit Rücksicht auf die Richtung der entsprechenden Vektoren durch die Vektorgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{v}{c} \times \mathfrak{H} + \mathfrak{E} &= 0, \\ \frac{v}{c} \times \mathfrak{D} - \mathfrak{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

ersetzen. Die erste von ihnen ist ohne weiteres klar. Was die zweite anbetrifft, so folgt sie aus dem Umstand, daß die Differenz der Vektoren  $u\mathbf{n}$  und  $v$  parallel zu  $\mathfrak{D}$  ist; es müssen deshalb die Vektorprodukte  $u\mathbf{n} \times \mathfrak{D}$  und  $v \times \mathfrak{D}$  identisch sein.

Die Gleichungen (18) und (18b) lassen sich offenbar in der zu (24) analogen oder eher *reziproken* Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{u} \mathbf{n} \times \mathfrak{E} - \mathfrak{H} &= 0, \\ \frac{c}{u} \mathbf{n} \times \mathfrak{H} + \mathfrak{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{24a}$$

schreiben. Das Verhältnis  $\frac{u}{c}$  spielt in (24a) dieselbe Rolle wie das Verhältnis  $\frac{c}{v}$  in (24); es entspricht dabei dem Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  der Einheitsvektor  $\frac{v}{v} = \mathbf{l}$ , welcher die Lichtstrahlenrichtung bestimmt. Durch Elimination von  $\mathfrak{H}$  ergibt sich aus (24) die folgende zu (19a) analoge Gleichung

$$l(\mathfrak{D} \cdot \mathbf{l}) - \mathfrak{D} + \frac{c^2}{v^2} \mathfrak{E} = 0. \tag{24b}$$

Daraus bekommt man ferner, mittels der Relationen

$$E_i = \frac{D_i}{\varepsilon_i} = D_i \frac{u_i^2}{c^2},$$

in derselben Weise wie (20d), (20c) und (21a) aus (19a), die Formeln:

$$\sum_i \frac{l_i^2}{1 - \frac{u_i^2}{v^2}} = 1,$$

d. h.

$$\frac{l_1^2}{\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{v^2}} + \frac{l_2^2}{\frac{1}{u_2^2} - \frac{1}{v^2}} + \frac{l_3^2}{\frac{1}{u_3^2} - \frac{1}{v^2}} = 0, \quad (25)$$

$$\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{E}'' = 0 \quad (25a)$$

und

$$\frac{c^2}{v^2} E^2 = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} \quad (25b)$$

oder

$$v^{-2} = u_1^{-2} e_1^2 + u_2^{-2} e_2^2 + u_3^{-2} e_3^2, \quad (25c)$$

wobei  $e$  den Einheitsvektor  $\mathfrak{E} : E$  bedeutet.

Die Beziehung von  $\frac{1}{v}$  zu  $\mathfrak{E}$  und  $l$  ist folglich vollkommen identisch mit der Beziehung von  $u$  zu  $\mathfrak{D}$  und  $n$ .

### 3. Graphische Bestimmung der Grundschwingungsrichtungen mittels der $(v, e)$ - und $(u, \delta)$ -Flächen.

Diese Beziehungen lassen sich in einer sehr anschaulichen Weise graphisch darstellen.

Wir betrachten zunächst die Fläche, welche sich ergibt, wenn man aus einem festen Punkt  $O$  in jeder Richtung  $e$  eine Strecke von der durch die Gleichung (25c) bestimmten Länge  $v$  zieht. Bezeichnet man die Komponenten dieser Strecke, d. h. die Größen  $e_i \cdot v$  mit  $x_i$ , so bekommt man

$$\frac{x_1^2}{u_1^2} + \frac{x_2^2}{u_2^2} + \frac{x_3^2}{u_3^2} = 1. \quad (26)$$

Das ist die Gleichung eines *Ellipsoids* mit den Halbachsen  $u_1, u_2, u_3$ .

Mittels dieses Ellipsoids kann man aber nicht nur die einer beliebigen Richtung der elektrischen Feldstärke ( $e$ ) entsprechende Strahengeschwindigkeit  $v$  bestimmen, sondern auch die beiden einer beliebigen Strahlenrichtung  $l$  zugehörigen Richtungen der elektrischen Feldstärke  $e'$  und  $e''$  (und selbstverständlich, die entsprechenden Geschwindigkeiten  $v'$  und  $v''$ ).

Wir bemerken zunächst, daß die Vektoren  $e'$  und  $e''$  in einer zu  $l$  senkrechten Ebene liegen müssen und denken uns diese Ebene durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gezogen. Ihre Schnittlinie stellt bekanntlich eine Ellipse dar. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß die Halbachsen

dieser Ellipse  $v'$  und  $v''$  — sofern sie voneinander verschieden sind — nach ihrer Richtung mit den elektrischen Schwingungsvektoren  $e'$  und  $e''$  und nach ihrer Größe mit den entsprechenden Strahlengeschwindigkeiten übereinstimmen (Abb. 14). Um dies einzusehen, betrachten wir die Variationsgleichung

$$\delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \quad (26a)$$

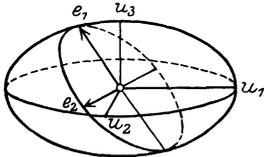


Abb. 14.

welche in Verknüpfung mit den Nebenbedingungen (26) und

$$x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3 = 0 \quad (26b)$$

die Halbachsen der zu  $l$  senkrechten Schnittellipse bestimmt. Nach der bekannten *Lagrangeschen* Multiplikatormethode bilden wir die Variationen der linken Seite der letzten Gleichung und der Gleichung (26), multiplizieren sie mit zwei unbestimmten Faktoren  $-2\alpha$  bzw.  $-\beta$ , addieren zu der Variation von  $\sum x_i^2$  und setzen schließlich die Koeffizienten der Variationen  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$ ,  $\delta x_3$  gleich Null, als ob die letzteren voneinander unabhängig wären. Wir bekommen auf diese Weise die folgenden Gleichungen

$$x_i - \alpha l_i - \beta \frac{x_i}{u_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

oder

$$x_i = \frac{\alpha}{\beta} \frac{l_i}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{u_i^2}}.$$

Durch Multiplikation mit  $x_i$  bzw.  $l_i$  und Addition ergibt sich daraus

$$\sum x_i^2 - \beta \sum \frac{x_i^2}{u_i^2} = 0, \quad \text{d. h. } \beta = v^2 \text{ nach (26)}$$

und

$$\sum_i \frac{l_i^2}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{u_i^2}} = 0,$$

d. h. die Gleichung (25).

Wenn die beiden Wurzeln dieser Gleichung zusammenfallen, reduziert sich die Schnittellipse auf einen *Kreis*. Es gibt wie leicht zu sehen ist, *zwei* solche Kreisschnitte des Ellipsoids (26); sie gehen durch seine mittlere Achse ( $u_2$ ) in solcher Weise, daß ihre Normalen  $l$  mit der großen Achse ( $u_1$ ) den durch die Formel

$$\text{tg } \Theta = \pm \sqrt{\frac{u_1^2 - u_2^2}{u_3^2 - u_2^2}} \quad (26c)$$

definierten Winkel bilden.

Diese ausgezeichneten Normalen- oder eher *Strahlenrichtungen* heißen die *optischen Achsen* des betreffenden Kristallkörpers. Ihnen entsprechen keine bestimmten Grundschwingungen, sondern alle dazu

senkrechten Richtungen erweisen sich als vollkommen gleichberechtigt.

Man erhält ganz analoge Resultate mittels der graphischen Darstellung der Gleichung (21b). Zieht man nämlich in jeder durch den Einheitsvektor  $\mathfrak{d}$  definierten Richtung eine Strecke  $r$  mit der durch (21b) bestimmten Länge  $r = u$ , so bekommt man eine dem oben betrachteten Ellipsoid ähnliche Fläche — das sogenannte *Fresnelsche Ovaloid*:

$$u_1^2 x_1^2 + u_2^2 x_2^2 + u_3^2 x_3^2 = r^4. \quad (x_i = r \cdot d_i)$$

Es ist nun leicht zu beweisen — und zwar in genau derselben Weise, wie oben —, daß die Halbachsen ( $r_{\max}$  und  $r_{\min}$ ) eines beliebigen ebenen Zentralschnittes dieses Ovaloids mit einer Ebene ihrer Richtung nach mit den  $\mathfrak{D}$ -Grundschwingungen zusammenfallen, welche der dazu senkrechten Wellennormale zugehören (es gilt dabei selbstverständlich  $r_{\max} = u'$  und  $r_{\min} = u''$ ). Das *Fresnelsche Ovaloid*, ebenso wie das Ellipsoid (26) besitzt zwei kreisförmige Zentralschnitte ( $r_{\max} = r_{\min}$ ), welche zwei den optischen Achsen analogene Richtungen der Wellennormale definieren.

#### 4. Strahlenfläche und Normalenfläche.

In den angeführten graphischen Darstellungen werden die Geschwindigkeiten  $v$  und  $u$  in der Richtung der elektrischen Feldstärke bzw. der Erregung gezogen. Zieht man sie — was natürlicher erscheint — in der Strahlenrichtung bzw. in der Richtung der Wellennormale gemäß den Gleichungen

$$\sum \frac{l_i^2}{u_i^2 - v^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum \frac{n_i^2}{u_i^2 - u^2} = 0,$$

so bekommt man zwei Flächen, die als *Strahlenfläche* bzw. *Normalfläche* bezeichnet werden. Diese Flächen haben eine sehr ähnliche Gestalt (ebenso wie das Ellipsoid (26) und das *Fresnelsche Ovaloid*), die in der Abb. 15 schematisch dargestellt ist. Wegen ihrer Symmetrie haben wir uns nur auf einen Oktant beschränkt, und die Schnittlinien mit den Koordinatenebenen gezeichnet. Im Falle der Strahlenfläche ( $v, l$ ) sind diese Schnittlinien Kreise oder Ellipsen; die schraffierte Gerade bezeichnet eine der beiden optischen Achsen.

Die Strahlenfläche hat eine sehr einfache physikalische Bedeutung. Sie stellt nämlich den geometrischen Locus derjenigen Raumpunkte dar,

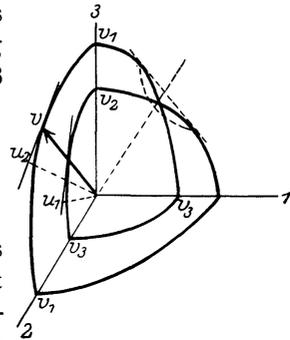


Abb. 15.

nach welchen die im Mittelpunkt auftretende elektromagnetische Störung sich in der Zeiteinheit fortpflanzt. Es entsprechen dabei jeder Fortpflanzungsrichtung (1) zwei Elementarstrahlen mit zueinander senkrechten  $E$ -Schwingungsrichtungen (diese Aufspaltung der ursprünglichen Störung in eine Menge linear polarisierter Strahlenbündel muß offenbar von selbst eintreten). Die optischen Achsen bilden eine Ausnahme: in ihren Richtungen erfolgt die Lichtfortpflanzung auf eine quasi-isotrope Weise (mit der Geschwindigkeit  $v = u_2$ ).

Der Normalfläche kommt eine ähnliche unmittelbare physikalische Bedeutung nicht zu. Sie steht aber in einer sehr einfachen und einleuchtenden geometrischen Beziehung zur Strahlenfläche. Und zwar sind die *Tangentialebenen zur Strahlenfläche parallel den Wellenebenen, die den entsprechenden Strahlenrichtungen zugehören*. Mit anderen Worten: die Strahlenfläche ist die einhüllende derjenigen (doppelten) Ebenenschar, die sich ergibt, wenn man ebene Wellen von allen möglichen Richtungen durch den Punkt  $O$  gleichzeitig passieren und sich während der Zeiteinheit mit den entsprechenden Geschwindigkeiten  $u'$ ,  $u''$  fortpflanzen läßt.

Zum Beweis schreiben wir zunächst die Gleichung der erwähnten Ebenenschar

$$f \equiv \sum x_i n_i - u = 0 \quad (27)$$

auf. Diese Gleichung enthält 4 Parameter  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $u$ , die miteinander durch die Relationen

$$\sum n_i^2 = 1, \quad \sum \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2} = 0$$

verknüpft sind. Die Einhüllende von (27) ergibt sich bekanntlich durch Elimination dieser Parameter aus  $f = 0$  und aus der Gleichung  $\delta f = 0$ , wo  $\delta$  einer beliebigen Variation der *unabhängigen* Parameter entspricht. Unter Einführung von zwei unbestimmten Multiplikatoren  $-\frac{1}{2}\alpha$  und  $-\frac{1}{2}\beta$  kann man die letzte Gleichung durch

$$\delta f - \frac{\alpha}{2} \delta \sum n_i^2 - \frac{\beta}{2} \delta \sum \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2} = 0 \quad (27a)$$

ersetzen und dabei alle vier Parameter als unabhängig behandeln, d. h. die Koeffizienten der einzelnen Variationen  $\delta n_1$ ,  $\delta n_2$ ,  $\delta n_3$ ,  $\delta u$  gleich Null setzen. Es wird also:

$$x_i - \alpha n_i - \beta \frac{n_i}{u^2 - u_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (27b)$$

$$1 - \beta u \sum \frac{n_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2} = 0. \quad (27c)$$

Aus (27b) folgt durch Multiplikation mit  $n_i$  und Summierung [mit Rücksicht auf (20d)]:

$$\sum x_i n_i - \alpha = 0, \quad \text{d. h. nach (27) } \alpha = u.$$

Aus (27c) ergibt sich sofort der zweite Multiplikator

$$\beta = \frac{1}{u \sum_i \frac{n_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2}}.$$

Man hat ferner nach (27b)

$$\sum x_i^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_i \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2} + \beta^2 \sum \frac{n_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2},$$

d. h.

$$r^2 = u^2 + \frac{\beta}{u}$$

oder

$$\beta = u(r^2 - u^2).$$

Die Gleichungen (27b) können jetzt in der Gestalt

$$x_i = n_i u \left( 1 + \frac{r^2 - u^2}{u^2 - u_i^2} \right) = n_i u \frac{r^2 - u_i^2}{u^2 - u_i^2}$$

geschrieben werden. Daraus ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} \sum \frac{x_i^2 u_i^2}{r^2 - u_i^2} &= u \sum \frac{n_i x_i u_i^2}{u^2 - u_i^2} = -u \sum n_i x_i + u^3 \sum \frac{n_i x_i}{u^2 - u_i^2} \\ &= -u^2 + u^3 \sum \frac{n_i x_i}{u^2 - u_i^2} \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf

$$n_i x_i = \alpha n_i^2 + \beta \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2}$$

und

$$\begin{aligned} \sum \frac{n_i x_i}{u^2 - u_i^2} &= \alpha \sum \frac{n_i^2}{u^2 - u_i^2} + \beta \sum \frac{n_i^2}{(u^2 - u_i^2)^2} = \frac{1}{u}, \\ \sum \frac{x_i^2 u_i^2}{r^2 - u_i^2} &= 0, \end{aligned} \quad (27d)$$

d. h. schließlich

$$\sum \frac{l_i^2}{u_i^2 - r^2} = 0 \quad \left( l_i = \frac{x_i}{r} \right).$$

Das ist aber nichts anderes als die Gleichung der Strahlenfläche (mit  $r = v$ ).

Es sei bemerkt, daß jeder Strahlenrichtung im allgemeinen zwei Normalenrichtungen entsprechen (s. Abb. 15). Eine Ausnahme bilden nur die optischen Achsen; die zugehörigen Normalenrichtungen bilden, wie man leicht zeigen kann, einen *Kegel*.

Umgekehrt, zu jeder Normalenrichtung gehören im allgemeinen zwei Strahlenrichtungen. Es gibt aber zwei ausgezeichnete Tangentialebenen zur Strahlenfläche, welche sie längs einem *Kreis* berühren: ihnen entsprechen zwei *Strahlenkegel*. Die erwähnten Tangentialebenen stellen diejenigen Wellenebenen dar, für welche die beiden Geschwindigkeiten  $u'$  und  $u''$  übereinstimmen. Diese eigenartigen Beziehungen zwischen

den ausgezeichneten Wellen- und Strahlenrichtungen bedingen die merkwürdigen Erscheinungen der inneren und äußeren *konischen Refraktion* (s. unten Kap. V).

### 5. Einachsige Kristalle.

Kristalle der oben betrachteten Art mit zwei verschiedenen optischen Achsen nennt man *zweiachsige*. In solchen Kristallen, bei welchen zwei der Hauptgeschwindigkeiten zueinander gleich sind, die also in bezug auf den Tensor  ${}^2\varepsilon$  eine Rotationsymmetrie besitzen, fallen die optischen Achsen mit der Rotationsachse dieses Tensors zusammen. Dabei zerfällt die Strahlenfläche in eine *Kugel* und ein Ellipsoid, die sich in den Endpunkten der optischen Achse berühren.

Schreibt man in der Tat die Gleichung (27 d) in der Form  $u_1^2 x_1^2 (r^2 - u_2^2) (r^2 - u_3^2) + u_2^2 x_2^2 (r^2 - u_3^2) (r^2 - u_1^2) + u_3^2 x_3^2 (r^2 - u_1^2) (r^2 - u_2^2) = 0$  um, so ergibt sich bei  $u_1 = u_2$ :

$$(r^2 - u_1^2) \{ u_1^2 x_1^2 (r^2 - u_3^2) + u_1^2 x_2^2 (r^2 - u_3^2) + u_3^2 x_3^2 (r^2 - u_1^2) \} = 0,$$

d. h.

$$r = u_1 \text{ (Kugel)} \tag{27e}$$

und

$$u_1^2 (x_1^2 + x_2^2) (r^2 - u_3^2) + u_3^2 x_3^2 (r^2 - u_1^2) = r^2 [u_1^2 (x_1^2 + x_2^2) + u_3^2 x_3^2 - u_1^2 u_3^2] = 0$$

oder

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{u_3^2} + \frac{x_3^2}{u_1^2} = 1 \text{ (Rotationsellipsoid)}. \tag{27f}$$

Im Falle  $u_1 = u_2 > u_3$  hat man ein erstrecktes, im entgegengesetzten Falle ( $u_1 = u_2 < u_3$ ) ein abgeplattetes Rotationsellipsoid (Abb. 16 a und 16 b)<sup>1)</sup>. Die entsprechenden einachsigen Kristalle bezeichnet man als *positive* bzw. *negative*.

Man bezeichnet ferner diejenigen Strahlen, deren Geschwindigkeit von der Richtung unabhängig ist, die also durch die Kugelfläche dargestellt werden, als die *gewöhnlichen*, die anderen durch das Ellipsoid dargestellten Strahlen, heißen *außergewöhnliche*. In positiven Kristallen ist die Geschwindigkeit der *gewöhnlichen* Strahlen größer als der *außergewöhnlichen*, in negativen umgekehrt.

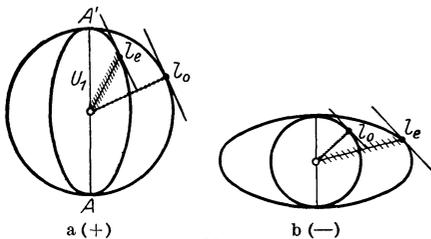


Abb. 16.

Die Richtung der  $\mathfrak{D}$ - oder der  $\mathfrak{E}$ -Schwingungen in irgend einem Strahl läßt sich im allgemeinen aus dem Umstand bestimmen, daß sie in der Ebene enthalten ist, die diesen Strahl und die zugehörige Wellennormale enthält (s. Abb. 13). Im Falle ein-

<sup>1)</sup> Diese Ellipsoide sollen nicht mit denjenigen verwechselt werden, die sich bei den erwähnten Voraussetzungen aus dem Ellipsoid ergeben, welches die Beziehung  $v^{-2} = \sum u_i^{-2} e_i^2$  darstellt (Abb. 14).

achsiger Kristalle ist diese Regel nur auf den außergewöhnlichen Strahl anwendbar; die  $\mathfrak{E}$ — $\mathfrak{D}$ -Schwingungsebene fällt dabei mit der durch diesen Strahl und die optische Achse gehenden Meridionalebene zusammen. Die Schwingungsrichtung in dem derselben Wellennormale zugehörigen gewöhnlichen Strahl ergibt sich dann einfach als die zu der obigen Meridionalebene senkrechte Richtung. Im gewöhnlichen Strahl sind die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{D}$  immer parallel; das Verhältnis  $D : E$  ist dabei gleich  $\frac{c^2}{u_1^2} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ .

### § 3. Ebene Wellen in gyrotropen Körpern; Verallgemeinerung für beliebige homogene Körper.

Wir haben im vorigen Paragraphen den Tensor  ${}^2\varepsilon$  als symmetrisch und reell vorausgesetzt. Wir wollen nun den Fall betrachten, daß seine Komponenten komplex und konjugiert-symmetrisch, d. h. „hermitisch“ sind. Dieser Fall entspricht im allgemeinen der Kombination der gewöhnlichen Anisotropie mit der *Gyrotropie*. Um die Bedeutung der letzteren besser zu verstehen, werden wir zunächst den reellen Anteil von  ${}^2\varepsilon$  als *kugelsymmetrisch* ansetzen. Es wird dabei nach der Formel (26a) Kap. III:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi \mathfrak{F} = (1 + 4\pi \kappa) \mathfrak{E} + \frac{4\pi i}{\left(1 - \frac{4\pi}{3} N\beta\right)^2} \mathfrak{E} \times \mathfrak{E} \quad (28)$$

oder

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} + i \mathfrak{E} \times \mathfrak{F} \quad (28a)$$

mit der Abkürzung

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \kappa, \quad \mathfrak{F} = \frac{4\pi \mathfrak{E}}{\left(1 - \frac{4\pi}{3} N\beta\right)^2}. \quad (28b)$$

Wir beschränken uns wieder auf den Fall ebener Wellen, führen aber eine von 1 verschiedene skalare magnetische Permeabilität  $\mu$  ein, wodurch die Frage nicht beträchtlich kompliziert wird.

#### 1. Allgemeine Theorie der optischen Gyrotropie; Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen und Grundschwingungstypen.

Die Grundgleichungen (18b) ersetzen wir dementsprechend durch

$$\mathfrak{f} \times \mathfrak{F} + \frac{\omega \mu}{c} \mathfrak{D} = 0, \quad (29)$$

während die Gleichung (18)

$$\mathfrak{f} \times \mathfrak{E} - \frac{\omega}{c} \mathfrak{F} = 0, \quad (29a)$$

unverändert bleibt.

Die Elimination von  $\mathfrak{F}$  ergibt, wie früher,

$$\mathfrak{f} \times (\mathfrak{f} \times \mathfrak{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \mathfrak{D} = 0,$$

oder mit  $\mathfrak{k} = kn$  und  $\frac{\omega}{k} = u$

$$n(\mathfrak{E} \cdot n) - \mathfrak{E} + \frac{u^2}{c^2} \mu \mathfrak{D} = 0. \quad (29b)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von (19a) nur durch den Faktor  $\mu$ .

Durch Einsetzen von (28a) in (29b) erhalten wir:

$$n(\mathfrak{E} \cdot n) - \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu\right) \mathfrak{E} + i \frac{u^2}{c^2} \mu \mathfrak{E} \times \mathfrak{N} = 0, \quad (30)$$

oder in Komponenten

$$\left. \begin{aligned} (n_1^2 - 1 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu) E_1 + (n_1 u_2 + i \frac{u^2}{c^2} \mu J_3) E_2 + (n_1 n_3 - i \frac{u^2}{c^2} \mu J_2) E_3 &= 0, \\ (n_2 n_1 - i \frac{u^2}{c^2} \mu J_3) E_1 + (n_2^2 - 1 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu) E_2 + (n_2 n_3 + i \frac{u^2}{c^2} \mu J_1) E_3 &= 0, \\ (n_3 n_1 + i \frac{u^2}{c^2} \mu J_2) E_1 + (n_3 n_2 - i \frac{u^2}{c^2} \mu J_1) E_2 + (n_3^2 - 1 + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu) E_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (30a)$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich auf dieselbe Weise wie das System (20) lösen. Wir bilden also zunächst die Determinante  $\Delta$  der Koeffizienten von  $E_1, E_2, E_3$  und bekommen als Kompatibilitätsbedingung die Gleichung

$$\Delta = 0,$$

aus welcher man die einer gegebenen Wellenrichtung  $n$  zugehörigen Geschwindigkeiten berechnen kann. Wegen des hermiteschen Charakters der Elemente der Determinante  $\Delta$  müssen die Wurzeln von  $\Delta = 0$  sämtlich reell sein (s. unten Nr. 4); es kommen dabei in Betracht nur zwei Wurzeln  $u'$  und  $u''$ , während die dritte unendlich wird.

Die diesen Wurzeln entsprechenden Lösungen  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{E}''$ , d. h. die Verhältnisse  $E'_1 : E'_2 : E'_3$  und  $E''_1 : E''_2 : E''_3$  haben aber jetzt, im Gegensatz zu dem im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Fall, *komplexe* Werte.

Dies bedeutet, daß  $E'_1, E'_2, E'_3$  (oder  $E''_1, E''_2, E''_3$ ) verschiedene *Phasen* haben, oder mit anderen Worten, daß die *Grundschnwingungen*, welche sich in einer gegebenen Richtung mit bestimmten Geschwindigkeiten fortpflanzen können, nicht linear, sondern im allgemeinen *elliptisch polarisiert sind*, und zwar in einer *ganz bestimmten*, für verschiedene Fortpflanzungsrichtungen verschiedenen Weise.

Diese Grundschnwingungen sind miteinander durch Orthogonalitätsrelationen ähnlicher Gestalt wie im oben betrachteten Falle verknüpft. Es gilt nämlich nach (29b) mit Rücksicht auf  $n \cdot \mathfrak{D} = 0$ :

$$\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{D}''^* = \frac{u'^2}{c^2} \mu \mathfrak{D}' \mathfrak{D}''^*,$$

$$\mathfrak{E}''^* \cdot \mathfrak{D}' = \frac{u''^2}{c^2} \mu \mathfrak{D}' \mathfrak{D}''^*.$$

Ferner hat man wegen des hermiteschen Charakters des Tensors  ${}^2\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{D}''^* &= \sum_i E'_i D_i''^* = \sum \sum \varepsilon_{ik}^* E'_i E_k''^* = \sum \sum \varepsilon_{ki} E'_i E_k''^* \\ &= \sum_k E_k''^* D_k' = \mathfrak{E}''^* \cdot \mathfrak{D}'.\end{aligned}$$

Es wird also

$$\frac{\mu}{c^2} (u'^2 - u''^2) \mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{D}''^* = 0,$$

d. h.

$$\mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{D}''^* = 0 \quad (30b)$$

und folglich auch

$$\mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{E}''^* = \mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{D}''^* = 0. \quad (30c)$$

## 2. Nähere Diskussion der vorhergehenden Resultate.

Die Gleichung  $\Delta = 0$  läßt sich erheblich vereinfachen, wenn man die erste Achse in der  $\mathfrak{Z}$ -Richtung und die zweite in der  $(\mathfrak{X}, n)$ -Ebene zieht. Setzt man also  $J_1 = J$ ,  $J_2 = J_3 = 0$ ,  $n_3 = 0$ ,  $n_1 = \cos \Theta$ ,  $n_2 = \sin \Theta$  ( $\Theta \nlessdot n, \mathfrak{Z}$ ), so ergibt sich mit den Abkürzungen  $\frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu - 1 = a$ ,  $\frac{u^2}{c^2} \mu J = b = (a + 1) \frac{J}{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} \cos^2 \Theta + a & \cos \Theta \sin \Theta & 0 \\ \cos \Theta \sin \Theta & \sin^2 \Theta + a & ib \\ 0 & -ib & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \cos^2 \Theta + a & \cos \Theta \sin \Theta \\ \cos \Theta \sin \Theta & \sin^2 \Theta + a \end{vmatrix} \\ &\quad + ib \begin{vmatrix} \cos^2 \Theta + a & 0 \\ \cos \Theta \sin \Theta & ib \end{vmatrix}\end{aligned}$$

d. h.

$$\Delta = a^2 (a + 1) - (a + 1)^2 \frac{J^2}{\varepsilon^2} (\cos^2 \Theta + a),$$

und folglich (wegen  $a + 1 \neq 0$ ):

$$a^2 \left(1 - \frac{J^2}{\varepsilon^2}\right) - a \frac{J^2}{\varepsilon^2} (\cos^2 \Theta + 1) - \frac{J^2}{\varepsilon^2} \cos^2 \Theta = 0,$$

oder schließlich

$$u^2 \frac{\varepsilon \mu}{c^2} = 1 + \frac{1 + \cos^2 \Theta \pm \sqrt{(1 + \cos^2 \Theta)^2 + 4 \left(\frac{\varepsilon^2}{J^2} - 1\right) \cos^2 \Theta}}{2 \left(\frac{\varepsilon^2}{J^2} - 1\right)} \quad (31)$$

Wenn  $\frac{J}{\varepsilon}$  sehr klein gegen 1 ist (diese Voraussetzung trifft praktisch fast immer zu), hat man in erster Näherung

$$u^2 \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cong \left(1 \pm \frac{J}{\varepsilon} \cos \Theta\right)$$

oder

$$u \cong u_0 \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{J_n}{\varepsilon}\right), \quad (31a)$$

wo  $u_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei Fehlen der Gyration und  $J_n$  die Projektion des Vektors  $\mathfrak{S}$  auf die Wellennormale bedeutet.

Wir geben noch die exakten Formeln für  $u$  bei  $\Theta = 0$  und  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  an. Dies sind

$$u = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 \mp \frac{J}{\varepsilon}}} \quad (\Theta = 0) \quad (31b)$$

und

$$u' = u_0, \quad u'' = \frac{u_0}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{\varepsilon^2}}} \quad \left(\Theta = \frac{\pi}{2}\right). \quad (31c)$$

Diese zwei Spezialfälle lassen sich leicht direkt behandeln. Im ersten Falle setzen wir  $\mathfrak{S} = Jn$  und schreiben die Grundgleichung (30) in der Gestalt:

$$n(\mathfrak{E} \cdot n) + \mathfrak{E}a + i b \mathfrak{E} \times n = 0$$

um.

Durch skalare Multiplikation mit  $n$  ergibt sich daraus

$$(\mathfrak{E} \cdot n)(a + 1) = \mathfrak{E} \cdot n \frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu = 0.$$

Wir sehen also, daß  $\mathfrak{E} \cdot n = 0$  ist, d. h. die Schwingungsebene von  $\mathfrak{E}$  fällt mit der Wellenebene zusammen. Die vorhergehende Gleichung reduziert sich folglich auf

$$\mathfrak{E} + i \frac{b}{a} \mathfrak{E} \times n = 0. \quad (32)$$

Durch äußere Multiplikation mit  $n$  bekommt man ferner

$$n \times \mathfrak{E} + i \frac{b}{a} [\mathfrak{E} - n(\mathfrak{E} \cdot n)] = n \times \mathfrak{E} + \frac{ib}{a} \mathfrak{E} = 0.$$

Daraus folgt durch Vergleich mit (32)

$$\frac{ib}{a} = -\frac{a}{ib},$$

oder

$$\frac{a}{b} = \pm 1, \quad (32a)$$

d. h.

$$\frac{u^2}{c^2} \varepsilon \mu - 1 = \pm \frac{u^2}{c^2} \mu J$$

in Übereinstimmung mit (31b).

Zur Bestimmung der zugehörigen Grundschwingungen setzen wir

$$\mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}_2 + i \mathfrak{E}_3,$$

wo  $\mathfrak{E}_2$  und  $\mathfrak{E}_3$  die reellen Komponenten der komplexen Amplitude von  $\mathfrak{E}$  ( $= \mathfrak{E}^0 e^{-i\omega t}$ ) nach der zweiten und dritten Achse bedeuten. Durch Einsetzen in (32) ergibt sich mit Rücksicht auf (32a):

$$\mathfrak{E}_2 \pm \mathfrak{E}_3 \times n = 0. \quad (32b)$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Beträge von  $\mathfrak{E}_2$  und  $\mathfrak{E}_3$  einander gleich sind, d. h. daß wir zwei *zirkular polarisierte Schwingungen* mit *entgegengesetztem Drehungssinn* haben.

Im zweiten Falle ( $\mathfrak{S} \perp \mathfrak{n}$ ) läßt sich die Gleichung (30) sofort durch den Ansatz  $\mathfrak{E} \parallel \mathfrak{S}$ , d. h.  $\mathfrak{E} \times \mathfrak{S} = 0$  und  $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n} = 0$  befriedigen. Diese erste *lineare* Grundschiwingung pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit  $u_0$  wie bei Fehlen der Gyration fort. — Die zweite Grundschiwingung muß offenbar [nach (30c)] in der zu  $\mathfrak{S}$  senkrechten Ebene stattfinden. Wir bezeichnen die letztere als die (1, 2)-Ebene und denken uns die erste Achse in der Richtung der Wellennormale gezogen. Setzt man nun für die betrachtete Schwiwingung

$$\mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}_1 + i \mathfrak{E}_2,$$

so bekommt man nach (30)

$$\left. \begin{aligned} E_1 u^2 \frac{\varepsilon \mu}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \mu J E_2 &= 0, \\ i E_2 \left( u^2 \frac{\varepsilon \mu}{c^2} - 1 \right) - i \frac{u^2 \mu}{c^2} J E_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Daraus folgt

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{J}{\varepsilon} \quad (33a)$$

und

$$u^2 \frac{\varepsilon \mu}{c^2} - 1 - \frac{u^2}{c^2} \mu \frac{J^2}{\varepsilon} = 0,$$

d. h.

$$u^2 \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \left( 1 - \frac{J^2}{\varepsilon^2} \right) = 1$$

in Übereinstimmung mit (31c).

Bei  $\frac{J}{\varepsilon} \ll 1$  kann man diese zweite Grundschiwingung ebenfalls als linear behandeln und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit  $u_0$  identifizieren.

Es ist leicht zu zeigen, daß die Grundschiwingungen, welche anderen Richtungen der Wellennormale in bezug auf den Gyrationvektor entsprechen, elliptisch polarisiert sind. Die großen Achsen der  $\mathfrak{E}$ -Schwiwingungsellipsen liegen in der Wellenebene parallel und senkrecht zu der  $(\mathfrak{n}, \mathfrak{S})$ -Ebene, wobei die Ebene der ersten Ellipse senkrecht zur Wellennormale und die der zweiten zum Gyrationvektor ist. Die  $\mathfrak{D}$ -Schwiwingungsellipsen liegen dagegen beide in der Wellenebene (dies folgt unmittelbar aus der Gleichung  $\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{n} = 0$ ) und haben entgegengesetzte

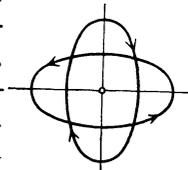


Abb. 17.

Drehungssinne; ihre Achsenverhältnisse sind näherungsweise (bei  $\frac{J}{\varepsilon} \ll 1$ ) einander gleich, und zwar betragen sie  $\cos \Theta$  (Abb. 17).

Wir wollen hier in die Diskussion dieser Schwiwingungen nicht näher eingehen und begnügen uns mit dem Hinweis darauf, daß die im vorigen

Paragraphen dargelegten Zusammenhänge zwischen Wellen und Strahlenfortpflanzung sich *mutatis mutandis* auch auf den hier betrachteten Fall anwenden lassen. Zu jeder Normalenrichtung gehört ein „gewöhnlicher“, damit zusammenfallender Strahl und ein außergewöhnlicher, der zu ihr etwas geneigt ist und in der  $(n, \mathfrak{S})$ -Ebene liegt. Die gyrotropen Körper sind also in dieser Hinsicht einachsigen Kristallen äquivalent, wobei die Gyrationenrichtung die Rolle der optischen Achse spielt.

### 3. Drehung der Polarisationssebene; Faradayeffekt.

Jede lineare Schwingung läßt sich bekanntlich als Summe zweier zirkularer Schwingungen mit denselben Amplituden und entgegengesetztem Drehungssinn auffassen. Wenn man die Fortpflanzung solcher zirkularen Schwingungen in der Gyrationenrichtung betrachtet, bekommt man an jeder Stelle eine resultierende lineare Schwingung mit zeitlich konstanter Richtung. Diese Richtung oder die sie und die Wellennormale enthaltende „Polarisationsebene“ muß aber, wegen der verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden zirkularen Schwingungen, bei Fortschreiten in der Fortpflanzungsrichtung sich um die letztere *gleichmäßig drehen*. Der Betrag dieser „Drehung der Polarisationssebene“ pro Längeneinheit drückt sich, wie leicht zu sehen ist, durch die Formel

$$\varphi = \frac{1}{2} (k' - k'') = \pi \left( \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''} \right) = \pi \frac{u'' - u'}{\lambda' u''} \quad (34)$$

aus. Es gilt in der Tat für die resultierende Schwingung:

$$\mathfrak{E}^0 e^{-i\omega t} = (\mathfrak{E}_2 + i\mathfrak{E}_3) e^{i(-\omega t + k' x_1)} + (\mathfrak{E}_2 - i\mathfrak{E}_3) e^{i(-\omega t + k'' x_1)},$$

d. h.

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^0 e^{-i\omega t} &= \left[ (\mathfrak{E}_2 + i\mathfrak{E}_3) e^{i \frac{k' - k''}{2} x_1} + (\mathfrak{E}_2 - i\mathfrak{E}_3) e^{-i \frac{k' - k''}{2} x_1} \right] e^{i \left( -\omega t + \frac{k' + k''}{2} x_1 \right)} \\ &= 2 \left[ \mathfrak{E}_2 \cos \frac{k' - k''}{2} x_1 - \mathfrak{E}_3 \sin \frac{k' - k''}{2} x_1 \right] e^{i \left( -\omega t + \frac{k' + k''}{2} x_1 \right)}. \end{aligned}$$

Man kann sich also vorstellen, daß die betrachtete Schwingung sich mit einer mittleren Geschwindigkeit

$$u = \frac{2\omega}{k' + k''} = \frac{2u' u''}{u' + u''} \quad (34a)$$

fortpflanzt, während ihre Amplitude um den Winkel  $\left( \frac{k' - k''}{2} \right) x_1$  auf einem Strahlenweg  $x_1$  gedreht wird. Nach (31a) hat man näherungsweise (für  $\frac{J}{\varepsilon} \ll 1$ ):

$$\varphi \cong \frac{\pi J}{\varepsilon \lambda} \cos \Theta. \quad (34b)$$

Diese Formel bleibt auch für solche lineare Schwingungen gültig, die

sich schief zur Richtung des Gyrationsektors fortpflanzen ( $\Theta > 0$ ). Man muß sie nämlich in diesem Falle in zwei elliptische Grundschwingungen zerlegen, d. h. die Gleichheit von  $|\mathfrak{E}_2|$  und  $|\mathfrak{E}_3|$  nicht voraussetzen. Für die vorhergehende Überlegung ist aber diese Voraussetzung offenbar unwesentlich.

Wir haben in § 3 Kap. II gezeigt, daß die Gyrotropie eines isotropen Körpers durch ein äußeres zeitlich konstantes Magnetfeld bedingt werden kann; der Vektor  $\mathfrak{S}$  ist dabei der magnetischen Feldstärke parallel und proportional [vgl. die Formeln (24a) und (25a), Kap. III]. Dieser Effekt ist von *Faraday* entdeckt worden und wird deshalb gewöhnlich als *Faradayeffekt* bezeichnet.

Auf dieselbe Weise wie die Gyrotropie läßt sich die in § 3 Kap. III betrachtete *optische Aktivität* behandeln. Die letztere Erscheinung ist aber viel einfacher als die erstere, denn der dem Gyrationsektor  $\mathfrak{G}$  entsprechende Aktivitätsvektor  $I$  [siehe Formeln (31) bis (31b), Kap. III] hat keine raumfeste Richtung, sondern fällt stets mit der Wellennormale zusammen (oder ist ihr entgegengerichtet, je nach dem Vorzeichen des Koeffizienten  $\gamma$ ). Bei Umkehrung der Fortpflanzungsrichtung muß sich folglich in optisch aktiven Körpern auch der Drehsinn der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht umkehren, während z. B. die magnetische Drehung der Polarisationssebene für beide Lichtstrahlrichtungen (parallel zu den magnetischen Kraftlinien) dieselbe bleibt.

#### 4. Allgemeine Theorie durchsichtiger Körper.

Die obigen Resultate können ohne wesentliche Modifikation auf den allgemeinen Fall solcher Körper verallgemeinert werden, die zu gleicher Zeit elektrisch anisotrop, magnetisch anisotrop und gyotrop sind — sofern sie vollkommen durchsichtig bleiben, d. h. sofern keine Dämpfung der elektromagnetischen Schwingungen in ihnen stattfindet.

Für die Bestimmung der ebenen Wellen, die sich in einer gegebenen Richtung  $\mathfrak{n}$  fortpflanzen können, hat man jetzt die allgemein gültigen Gleichungen

$$\mathfrak{n} \times \mathfrak{E} - \frac{u}{c} \mathfrak{S} = 0, \quad \mathfrak{n} \times \mathfrak{B} + \frac{u}{c} \mathfrak{D} = 0 \quad (35)$$

und die linearen Beziehungen

$$D_i = \sum \varepsilon_{ik} E_k, \quad B_i = \sum \mu_{ik}^{-1} H_k \quad (35a)$$

mit konjugiert symmetrischen (hermiteschen) Koeffizienten

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*, \quad \mu_{ik}^{-1} = \mu_{ki}^{-1*}. \quad (35b)$$

Führt man statt  $\mathfrak{n}$  den entsprechenden schiefsymmetrischen Tensor nach

$$n_1 = n_{23} = -n_{32}, \quad n_2 = n_{31} = -n_{13}, \quad n_3 = n_{12} = -n_{21} \quad (36)$$

ein, so lassen sich die Gleichungen (35) in der Form

$$-\frac{u}{c} H_i = \sum n_{ik} E_k, \quad +\frac{u}{c} D_i = \sum n_{ik} B_k \quad (37)$$

darstellen. Daraus bekommt man ferner

$$\frac{u^2}{c^2} D_i = \sum_k \sum_l n_{ik} \mu_{kl}^{-1} H_l \quad \frac{u}{c} = -\sum_k \sum_l \sum_j n_{ik} \mu_{kl}^{-1} n_{lj} E_j,$$

d. h.

$$\sum_j \left( m_{ij} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right) E_j = 0 \quad (37a)$$

mit

$$m_{ij} \equiv \sum_k \sum_l n_{ik} \mu_{kl}^{-1} n_{lj}. \quad (37b)$$

Das Gleichungssystem (37a) ist die Verallgemeinerung von (20) und (30a)<sup>1)</sup>. — Es ist leicht zu sehen, daß die Koeffizienten  $m_{ij}$  ebenfalls hermitisch sind. Man hat nämlich mit Rücksicht auf  $n_{ik} = -n_{ki}$ :

$$m_{ij}^* = \sum_k \sum_l n_{ik} \mu_{kl}^{-1*} n_{lj} = \sum_k \sum_l n_{ik} \mu_{lk}^{-1} n_{lj} = \sum_{j,l} n_{jl} \mu_{lk}^{-1} n_{ki} = m_{ji}.$$

Daraus folgt, daß die Kompatibilitätsbedingung des Systems (37a)

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} m_{11} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{11}, & m_{12} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{12}, & m_{13} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{13} \\ m_{21} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{21}, & m_{22} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{22}, & m_{23} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{23} \\ m_{31} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{31}, & m_{32} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{32}, & m_{33} + \frac{u^2}{c^2} \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (38)$$

durch *reelle Werte des Parameters*  $u^2$  befriedigt wird. Zum Beweis multiplizieren wir (37a) mit  $E_i^*$  und summieren bezüglich  $i$ . Es wird dabei

$$-\frac{u^2}{c^2} = \frac{\sum \sum m_{ij} E_i^* E_j}{\sum \sum \varepsilon_{ij} E_i^* E_j} = \frac{\sum \sum m_{ij} E_i^* E_j}{\mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{D}}. \quad (38a)$$

Nun gilt wegen  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$

$$\mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{D} = \sum \sum \varepsilon_{ij}^* E_i^* E_j = \left( \sum \sum \varepsilon_{ji} E_j^* E_i \right)^* = (\mathfrak{E}^* \cdot \mathfrak{D})^* = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D}^*.$$

Dies bedeutet, daß der Nenner von (38a) einen reellen Wert hat. Da wegen  $m_{ij} = m_{ji}^*$  der Zähler ebenfalls reell ist, muß  $u^2$  auch reell sein. Man kann ferner leicht zeigen, daß eine Wurzel von (38) unendlich ist und deshalb keine physikalische Bedeutung hat, während die andern zwei verschiedene reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeiten  $u'$  und  $u''$  — ebenso wie in den früher betrachteten Spezialfällen — liefern. Diesen Geschwindigkeiten entsprechen zwei bestimmte, im allgemeinen *ellip-*

<sup>1)</sup> Wenn man  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{H}$  durch  $\mathfrak{B}$  ausdrückt, bekommt man statt (37a) das dazu äquivalente Gleichungssystem

$$\sum \left( e_{ij} + \frac{u^2}{c^2} \mu_{ij} \right) B_j = 0 \quad \text{mit} \quad e_{ij} = \sum_k \sum_l n_{ik} \varepsilon_{kl}^{-1} n_{lj}.$$

tische Grundschnvingungen  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{E}''$  (bzw.  $\mathfrak{D}'$  und  $\mathfrak{D}''$ ), die der Orthogonalitätsrelation

$$\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{D}''^* = \mathfrak{E}'^* \cdot \mathfrak{D}'' = 0 \quad (38b)$$

genügen. Die andere Orthogonalitätsrelation  $\mathfrak{D}' \cdot \mathfrak{D}''^* = 0$  ist dagegen im allgemeinen, ebensowie die Relation  $\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{E}''^* = 0$ , nicht erfüllt. Die  $\mathfrak{E}$ - und  $\mathfrak{D}$ -Grundschnvingungen sind folglich sozusagen nur *reziprok* zueinander orthogonal.

### 5. Einfluß der Dämpfung.

Es bleibt unsnoch übrig, die von der *Dämpfung* herrührenden Komplikationen zu berücksichtigen. Dies läßt sich im allgemeinen Falle formal durch Hinzufügung zu den hermiteschen Tensoren  $m_{ij}$  und  $\varepsilon_{ik}$  entsprechender antihermitescher (konjugiert-antisymmetrischer) Tensoren (vgl. Kap. III, § 3) durchführen. Man bekommt dabei für  $u'$  und  $u''$  (oder  $k'$  und  $k''$ ) aus (38) *komplexe* Werte, deren imaginäre Anteile den Absorptionskoeffizienten der entsprechenden Grundschnvingungen in der Fortpflanzungsrichtung bestimmen. Man kann aber das Problem noch allgemeiner formulieren — und zwar, wie wir es im § 1 für den Spezialfall isotroper Körper getan haben, die Fortpflanzungsrichtung  $n^{(1)}$  und die Dämpfungsrichtung  $n^{(2)}$  als *verschieden* voraussetzen. Es ergeben sich dabei für jedes derartige Richtungs paar je zwei Grundschnvingungen vom elliptischen Typus, die miteinander und mit den Vektoren  $n^{(1)}$ ,  $n^{(2)}$  in einer ziemlich komplizierten Beziehung stehen. Aber auch in dem Falle, daß  $n^{(1)}$  und  $n^{(2)}$  zusammenfallen, können Orthogonalitätsrelationen von der oben betrachteten Art bei Anwesenheit von Dämpfung im allgemeinen nicht bestehen.

Die ausführliche Untersuchung dieser Fragen für den allgemeinen Fall bietet kein physikalisches Interesse. Wir wollen deshalb den Einfluß der Dämpfung auf die Lichtfortpflanzung in nicht-isotropen Körpern nur an dem einfachen Beispiel der einachsigen Kristalle illustrieren. Die Grundgleichungen (20) können dabei unverändert bleiben (falls man keine zu allgemeine Annahmen über den Leitfähigkeitstensor macht) und es ist nur nötig, die Hauptgeschwindigkeiten  $u_i$  oder die Hauptdielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_i = \frac{c^2}{u_i^2}$  als komplexe Größen zu behandeln. Die dort auftretenden Komponenten der elektrischen Feldstärke (oder der Erregung) sind dementsprechend ebenfalls als komplexe Größen anzusehen. Dadurch wird die Möglichkeit von linear polarisierten Grundschnvingungen von Anfang an ausgeschlossen. Bei der Bedingung  $u_1 \neq u_2 = u_3$  spaltet sich die *Fresnelsche* Gleichung (20d) oder die ihr entsprechende Gleichung der „Normalenfläche“

$$\sum \frac{x_i^2}{u^2 - u_i^2} = 0 \quad (x_i = u n_i)$$

in zwei Gleichungen auf, nämlich

$$u' = u_2$$

und

$$u''^2 = u_1^2(n_2^2 + n_3^2) + u_2^2 n_1^2 = u_1^2 + (u_2^2 - u_1^2) \cos^2 \Theta$$

[vgl. (27d), (27e) und (27f)];  $\Theta$  ist der Winkel der Wellennormale zur optischen Achse, die wir jetzt als die erste Achse wählen ( $\cos \Theta = n_1$ ). Der Einfachheit halber denken wir die zweite Achse in der Ebene (1,  $n$ ) gezogen, was  $n_2 = \sin \Theta$  und  $n_3 = 0$  entspricht.

Durch Einsetzen des ersten Wertes von  $u$  in die Gleichungen (20) bekommt man

$$\begin{aligned} n_1(E_1 n_1 + E_2 n_2) + \left(\frac{u_3^2}{u_1^2} - 1\right) E_1 &= 0, \\ n_2(E_1 n_1 + E_2 n_2) &= 0, \quad 0 = 0, \end{aligned}$$

und folglich  $E_1 = E_2 = 0$ . Die entsprechende Schwingung ist also linear polarisiert in derselben Weise wie bei Fehlen der Dämpfung (senkrecht zur (1,  $n$ )-Ebene).

Ebenso bekommt man bei  $u = u''$ :

$$\begin{aligned} n_1(E_1 n_1 + E_2 n_2) + \left(\frac{u_3^2}{u_1^2} - 1\right) n_1^2 E_1 &= 0, \\ n_2(E_1 n_1 + E_2 n_2) + \left(\frac{u_3^2}{u_2^2} - 1\right) n_2^2 E_2 &= 0, \\ \left(\frac{u_1^2}{u_3^2} - 1\right) n_2^2 E_3 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $E_3 = 0$ , und ferner

$$\frac{E_1}{E_2} = -\frac{n_2 u_1^2}{n_1 u_3^2}, \quad \text{oder} \quad D_1 : D_2 = -n_2 : n_1.$$

Diese Formeln zeigen, daß obwohl die  $\mathfrak{D}$ -Schwingungen linear bleiben, die entsprechenden  $\mathfrak{E}$ -Schwingungen — sofern das Verhältnis  $\frac{u_1^2}{u_3^2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$  komplex ist, *elliptisch* polarisiert sein müssen, wobei die Ebene dieser Ellipse mit der (1,  $n$ )-Ebene zusammenfällt.

Der Absorptionsindex pro Längeneinheit für die beiden Grundschwingungen läßt sich, wie dies im § 1 ausführlich gezeigt wurde, als der imaginäre Anteil von  $\frac{c^2}{u^2}$  definieren. Wir brauchen deshalb auf seine Berechnung nicht näher einzugehen. Es sei nur bemerkt, daß im Falle der zweiten Grundschwingung dieser Index, ebenso wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die gleich dem reellen Anteil von  $u$  ist, von der Richtung der Wellennormale abhängig ist.

#### § 4. Nicht-harmonische Schwingungsvorgänge in homogenen Körpern; lineare und räumliche Wellengruppen.

1. Darstellung beliebiger elektromagnetischer Vorgänge durch Superposition ebener sinusoidaler Elementarwellen.

Wir haben bisher ausschließlich *harmonische* Schwingungsvorgänge betrachtet. Wie schon manchmal erwähnt wurde, kann man die Ausbreitung jedes anderen elektromagnetischen Vorgangs in materiellen Körpern verfolgen, nur durch Zerlegung der verschiedenen Feldgrößen in ihre harmonisch schwingende Komponenten.

Die weitere Spezialisierung dieser harmonischen Schwingungsvorgänge durch Einführung *ebener* Wellen war nicht unbedingt notwendig, und sollte eher als Vorbereitung für die Behandlung nicht isotroper Körper dienen.

Nun können aber solche harmonisch schwingenden sinusoidalen ebenen Wellen, die wir im folgenden kurz als *Elementarwellen* bezeichnen werden, vom mathematischen Standpunkte aus aufgefaßt werden als die „*harmonischen Komponenten*“ von verschiedenen *Raumzeitfunktionen*  $F(t, \mathbf{r}) = F(t; x_1, x_2, x_3)$ , in demselben Sinne, wie wir bisher von harmonischen Funktionen *der Zeit allein* gesprochen haben. Faßt man z. B. bestimmte Werte von  $t, x_1, x_2$  ins Auge, und betrachtet  $F$  als Funktion der Variablen  $x_3$ , so kann man sie in harmonische Komponenten vom Typus  $f e^{i k_3 x_3}$  zerlegen, genau in derselben Weise, wie dies getan wird, wenn man die *Zeit* als unabhängige Variable und die Koordinaten als Parameter behandelt.

Mit anderen Worten, jede gegebene eindeutige Raumzeitfunktion  $F(t, x_1, x_2, x_3)$ , die bestimmten in der Wirklichkeit immer erfüllten Stetigkeitsbedingungen genügt, läßt sich als eine Summe von Elementarwellen

$$[\psi = \psi^0 e^{i(-\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} = \psi^0 e^{i(-\omega t + \mathbf{r} \cdot \mathbf{k})}] \quad (39)$$

mit passend gewählten Amplituden  $\psi^0$  darstellen. Die Parameter  $\omega, k_1, k_2, k_3$  können sich dabei entweder in einer diskontinuierlichen oder in einer kontinuierlichen Weise ändern. Im letzten Fall bekommt man statt einer gewöhnlichen Summe oder einer unendlichen Reihe ein *Integral*, und zwar ein *vierfaches* Integral, wenn die Parameterwerte unabhängig sind, oder ein *dreifaches*, wenn sie miteinander durch eine bestimmte Relation verknüpft sind. Die Amplituden  $\psi^0$  sind dabei als gewisse Funktionen der unabhängigen Parameter anzusehen.

Wenn irgendwelche Funktionen Lösungen der elektromagnetischen Feldgleichungen darstellen, so ist wegen der Linearität der letzteren auch ihre Summe eine solche Lösung. Umgekehrt ist die allgemeine Lösung dieser Feldgleichungen immer darstellbar als eine Superposition von Elementarwellen (39), welche diesen Gleichungen genügen. Diese Darstellung ist offenbar für den Fall *homogener Körper* geeignet, ins-

besondere für den Fall nicht isotroper Körper, wo der Betrag des Vektors  $\mathfrak{k}$  nicht nur von der Frequenz  $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ , sondern auch von seiner Richtung, d. h. der Richtung der Wellennormale  $\mathfrak{n} = \mathfrak{k} : k$  abhängt.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall vollkommen durchsichtiger Körper, schließen also irgendwelche Dämpfung aus. Man kann dabei die drei Komponenten von  $\mathfrak{k}$  als unabhängige reelle Variablen behandeln und die Frequenz  $\omega$  als eine für den betrachteten Körper charakteristische Funktion der letzteren. Die allgemeine Lösung der Feldgleichungen für diesen Körper  $F(t, \mathfrak{r})$  kann man dementsprechend in der Form

$$F(t, \mathfrak{r}) = \sum \psi_{\mathfrak{n}}^0 e^{i(-\omega_{\mathfrak{n}} t + \mathfrak{k}_{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{r})} + \iiint \psi^0(k_1, k_2, k_3) e^{i(-\omega t + \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r})} dk_1 dk_2 dk_3$$

darstellen. Es ist dabei zu beachten, daß die beiden Anteile dieser Darstellung — der diskrete und der kontinuierliche — aufeinander keineswegs zurückgeführt werden können (s. unten). Wir werden im folgenden den ersten Teil weglassen und hauptsächlich solche Vorgänge betrachten, die sich durch ein Integral, d. h. in der Form:

$$F(t, \mathfrak{r}) = \int \psi^0(\mathfrak{k}) e^{i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r} - \omega t)} d\tau \quad (39a)$$

darstellen lassen; es bedeutet hier  $d\tau$  ein Volumelement des  $\mathfrak{k}$ -Raumes. In dem Spezialfall isotroper Körper hängt  $\omega$  nur von dem Betrage von  $\mathfrak{k}$  ab. Im allgemeinen muß  $\omega$  aber für jeden Wert von  $\mathfrak{k}$  zwei verschiedene Werte annehmen, die den oben betrachteten „Grundschwingungen“ entsprechen. Um dies ausdrücklich zu zeigen, werden wir auch statt (39a)

$$F(t, \mathfrak{r}) = \int [\psi'(\mathfrak{k}) e^{-i\omega' t} + \psi''(\mathfrak{k}) e^{-i\omega'' t}] e^{i\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r}} d\tau \quad (39b)$$

schreiben.

Wenn die Funktion  $F(t, \mathfrak{r})$  für einen bestimmten Zeitpunkt, z. B.  $t = 0$  bekannt ist, kann man die Amplitudenfunktion  $\psi^0(\mathfrak{k})$  nach der Formel

$$\psi^0(\mathfrak{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(0, \mathfrak{r}) e^{-i\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r}} dV \quad (39c)$$

berechnen. [Diese aus der Theorie der Fourierschen Integrale wohl-bekannte Formel bleibt auch dann gültig, wenn  $\mathfrak{k}$  eine Reihe diskreter Werte annimmt, d. h. wenn  $F$  nicht durch ein Integral, sondern durch eine Fouriersche Reihe sich darstellen läßt<sup>1)</sup>. Auf diese Weise ist es möglich, nach einer „momentanen Photographie“ eines beliebigen elektromagnetischen Vorganges alle früheren und späteren Zustände zu bestimmen, d. h. den ganzen Vorgang sozusagen „theoretisch zu kinematographieren“. Dabei ist es selbstverständlich nur notwendig, die Gestalt der „Frequenzfunktion“  $\omega(\mathfrak{k})$  zu kennen.

<sup>1)</sup> Vgl. Bd. I, S. 153—154.

Wegen der Symmetrie der Ausdrücke (39) in bezug auf die räumlichen Koordinaten und die Zeit kann man bei der Konstruktion der allgemeinen Lösung der betrachteten Feldgleichungen die „Zeitkoordinate“  $t$  mit einer der räumlichen Koordinaten, z. B.  $x_1$  vertauschen. Man bekommt dabei statt (39a) eine Darstellung von der Gestalt:

$$F(t, \mathbf{r}) = \iiint \psi^0(\omega, k_2, k_3) e^{i(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\omega dk_2 dk_3. \quad (40)$$

Zur Bestimmung der Amplitudenkoeffizienten  $\psi^0(\omega, k_2, k_3)$  ist es hinreichend, die Funktion  $F$  für einen einzigen  $x_1$ -Punkt, d. h. in einer einzigen Ebene, z. B.  $x_1 = 0$  zu kennen. Die Betrachtung einer Ebene ist aber nicht notwendig, und man kann ebensogut die Werte von  $F$  für eine ganz beliebige Fläche  $x_1 = f(x_2, x_3)$  als gegeben voraussetzen (sie müssen selbstverständlich in den Punkten dieser Fläche für alle Zeiten bekannt sein). Es wird dabei, wenn wir diese Werte mit  $F(t)$  bezeichnen:

$$\psi^0(\omega, k_2, k_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint F(t) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - i\omega t)} dx_1 dx_2 dt \quad (40a)$$

## 2. Lineare (ebene) Wellengruppen.

Wir betrachten zunächst solche elektromagnetischen Vorgänge, die nur von einer räumlichen Koordinate und selbstverständlich auch von der Zeit abhängen. Diese „planaren“ Vorgänge lassen sich als eine Superposition von Elementarwellen mit denselben oder entgegengesetzten Fortpflanzungsrichtungen darstellen nach den Formeln

$$F(t, x) = \sum \psi^0(k) e^{i(kx - \omega t)} \quad (41)$$

oder

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^0(k) e^{i(kx - \omega t)} dk = \int_0^{\infty} [\psi^+(k) e^{i k x} + \psi^-(k) e^{-i k x}] e^{-i\omega t} dk \quad (41a)$$

je nachdem die „Wellenzahl“  $k$  (oder die Frequenz  $\omega$ ) diskrete oder kontinuierlich verteilte Werte annehmen kann. Die Gesamtheit dieser Werte heißt das *Spektrum* des betreffenden Vorgangs.

Wie schon oben bemerkt wurde, lassen sich die Vorgänge mit diskreten und kontinuierlichen Spektren aufeinander keineswegs zurückführen. Denn das eigentliche Element eines Vorganges vom Typus (41a) — sofern die Amplitudenfunktion  $\psi^0(k)$  endlich und wenigstens stückweise stetig bleibt — wird nicht durch eine Elementarwelle wie im Falle von (41), sondern durch eine Gruppe von Elementarwellen, die einem unendlich kleinen *Spektralbereich*  $\Delta k$  (bzw.  $\Delta\omega$ ) entsprechen, dargestellt. Falls das betrachtete Spektralbereich keine Unstetigkeitsstelle der Amplitudenfunktion enthält, und die Frequenz  $\omega$  sich stetig

mit  $k$  ändert, kann man eine solche *Wellengruppe* durch die folgende angenäherte Formel darstellen:

$$\Delta F(t, x) = \Delta \psi^0(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{\Delta k} e^{i\left(x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right)(k - k_0)} dk,$$

wo  $k_0$  einen beliebigen „Punkt“ innerhalb der „Strecke“  $\Delta k$  bedeutet. Wählt man diesen Punkt als den Mittelpunkt von  $\Delta k$ , so wird

$$\begin{aligned} \int_{\Delta k} e^{i\left(x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right)(k - k_0)} dk &= \frac{e^{i\left(x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right) \frac{\Delta k}{2}} - e^{-i\left(x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right) \frac{\Delta k}{2}}}{i\left(x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right)} \\ &= \frac{2 \sin\left(x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t\right) \frac{\Delta k}{2}}{x - \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t} \end{aligned}$$

und folglich (den Index  $_0$  lassen wir jetzt wieder fort):

$$\Delta F(t, x) = \frac{\psi^0(k) \sin \frac{\Delta k}{2} \left(x - \frac{d\omega}{dk} t\right)}{\frac{1}{2} \left(x - \frac{d\omega}{dk} t\right)} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (42)$$

Die Wellengruppe läßt sich also auffassen als eine Elementarwelle mit einer *veränderlichen Amplitude*, die (abgesehen von ihrem Vorzeichen) ein starkes Maximum im Punkte  $x = \frac{d\omega}{dk} t$  aufweist. Dieses Maximum verschiebt sich mit der Geschwindigkeit

$$w = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}, \quad (42a)$$

die man als *Gruppengeschwindigkeit* bezeichnet; sie ist im allgemeinen von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Elementarwellen oder der „Phasengeschwindigkeit“

$$u = \frac{\omega}{k} = v\lambda$$

ganz verschieden. Durch Einsetzen von  $\omega = ku$  in (42a) bekommt man die folgende Beziehung zwischen den beiden Geschwindigkeiten:

$$w = u + k \frac{d\omega}{dk} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}. \quad (42b)$$

In einem Abstand  $\Delta x = y$  von seinem Maximum (für einen beliebigen gegebenen Zeitpunkt  $t$ ) ist das Quadrat der Amplitude oder eher das Quadrat seines absoluten Wertes gleich

$$|\Delta F(y)|^2 = |\psi^0(k)|^2 \frac{\sin^2 \frac{\Delta k}{2} y}{\left(\frac{1}{2} y\right)^2}. \quad (42c)$$

Die Größe des Maximums ist folglich gleich:

$$|\psi^0(k)|^2 (\Delta k)^2.$$

Bei sehr kleinen Werten von  $\Delta k$  und nicht zu großen Werten von  $y$  hat man näherungsweise

$$\sin \Delta k \cdot \frac{y}{2} = \Delta k \cdot \frac{y}{2} \left( 1 - \frac{(\Delta k)^2 y^2}{24} + \dots \right) \cong \frac{1}{2} y \Delta k e^{-\frac{(\Delta k)^2 y^2}{24}}.$$

Die exakte Formel (42c) kann man folglich durch

$$|\Delta F(y)|^2 = |\psi^0(k)|^2 (\Delta k)^2 e^{-\frac{(\Delta k)^2 y^2}{12}} \quad (42d)$$

ersetzen, die die Verteilung der Schwingungsamplitude mit genügender Annäherung darstellt.

Es sei bemerkt, daß diese Amplitudenverteilung sich als Ganzes, ohne irgendwelche Änderung, mit der Geschwindigkeit (42a) verschiebt. In bezug auf dieses sozusagen feste „Amplitudengerüst“ pflanzen sich die einzelnen Elementarwellen (oder deren Phasen) mit der relativen Geschwindigkeit

$$u - w = \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

fort.

Ähnliche Resultate ergeben sich, wenn man statt einer Wellengruppe zwei Elementarwellen mit identischen Amplituden und fast übereinstimmenden Frequenzen  $\omega'$ ,  $\omega''$  oder Wellenzahlen  $k'$  und  $k''$  betrachtet. Setzt man diese Amplituden gleich 1, so bekommt man für die resultierende Schwingung:

$$\psi = e^{i(k'x - \omega't)} + e^{i(k''x - \omega''t)},$$

oder mit

$$k = \frac{k' + k''}{2}, \quad \omega = \frac{\omega' + \omega''}{2}, \quad \Delta k = k'' - k', \quad \Delta \omega = \omega'' - \omega':$$

$$\begin{aligned} \psi &= \left[ e^{i\frac{1}{2}(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)} + e^{-i\frac{1}{2}(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t)} \right] e^{i(kx - \omega t)} \\ &= 2 \cos \left[ \frac{1}{2} \Delta k \left( x - \frac{\Delta \omega}{\Delta k} t \right) \right] e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned}$$

Bei konstant gehaltenem  $x$  stellt diese Formel einen *Schwebungsvorgang* dar, den wir schon in Kap. III, § 4 [Formel (43b)] eingehend diskutiert haben. Ganz analoge „räumliche Schwebungen“ ergeben sich, wenn man  $\psi$  als Funktion von  $x$  für einen bestimmten Zeitpunkt betrachtet (siehe oben Abb. 10). Man bekommt dabei eine Reihe äquidistanter „Knotenpunkte“, wo die Amplitude verschwindet. Diese Knotenpunkte verschieben sich mit der Geschwindigkeit  $\frac{\Delta \omega}{\Delta k}$ , während die Schwingungen mit einer zunächst wachsenden und nachher wieder abnehmenden Amplitude zwischen ihnen mit der relativen Geschwindigkeit

keit  $\frac{\omega}{k} - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$  laufen. — Die oben betrachtete Wellengruppe, welche einem kontinuierlichen Frequenzintervall entspricht, unterscheidet sich von diesem einfachen Bild durch die besonders starke Entwicklung eines Hauptmaximums; man kann sich praktisch den ganzen Schwingungsvorgang in der Nähe dieses Hauptmaximums konzentriert denken.

### 3. Dispersion von ebenen Wellen.

Jeder planare Vorgang mit einem kontinuierlichen Spektrum läßt sich offenbar als eine *Summe* von Wellengruppen darstellen. Man muß dabei die elementaren Spektralbereiche  $\Delta k$  so klein wählen, daß die entsprechende Änderung („Oszillation“) der Amplitudenfunktion  $\Delta\psi^0(k)$  unbedeutend bleibt. Absolut genommen können sie auch sehr groß sein.

Die Fortpflanzung von Elementarwellen derselben Richtung aber verschiedener Frequenz mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten  $u = \frac{\omega}{k}$  bezeichnet man als ihre *Dispersion*. Bei Anwesenheit der Dispersion verliert die Phasengeschwindigkeit für Vorgänge mit kontinuierlichem Spektrum *auch in dem Falle, wenn man sehr enge Spektralbereiche betrachtet*, eine unmittelbare physikalische Bedeutung und wird in dieser Hinsicht durch die Gruppengeschwindigkeit ersetzt (bei Fehlen der Dispersion fallen die beiden Geschwindigkeiten zusammen). Die letztere kann aber ihrerseits einen bestimmten Sinn nur dann behalten, wenn sie in dem betrachteten Spektralbereiche praktisch konstant bleibt. In der Nähe von Resonanzfrequenzen, wo  $u$  sich sehr rasch mit  $\lambda$  (oder  $\omega$ ) ändert, ist diese Forderung nicht erfüllt. Nach den Formeln, die im § 3, Kap. III für die Abhängigkeit der elektrischen Suszeptibilität von der Frequenz abgeleitet worden sind, muß die Dielektrizitätskonstante in der Nähe einer Resonanzstelle (oder wie man gewöhnlich sagt, einer „Absorptionslinie“) die Gestalt

$$\varepsilon = a + \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (43)$$

haben, wo  $a$  und  $b$  zwei für die betreffenden Körper charakteristischen positiven Konstanten bedeuten. Es ergibt sich daraus (wenn man die magnetische Suszeptibilität vernachlässigt):

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \approx \frac{c}{\sqrt{a}} \left[ 1 + \frac{b}{2a(\omega_0^2 - \omega^2)} \right], \quad (43a)$$

falls das zweite Glied in (43) klein gegenüber dem ersten bleibt, oder

$$u \approx \frac{c\sqrt{b}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (43b)$$

im entgegengesetzten Fall, bei der Bedingung  $\omega < \omega_0$ , die der sogenann-

ten „normalen Dispersion“ entspricht (imaginäre Werte von  $u$  für  $\omega > \omega_0$  lassen sich tatsächlich, wegen der Anwesenheit von Dämpfung, nicht realisieren). Nun hat man mit Rücksicht auf  $u = \frac{\omega}{k}$  für das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten:

$$\frac{w}{u} = \frac{d\omega}{dk} : \frac{\omega}{k} = \frac{d \lg \omega}{d \lg k} = \frac{d \lg \omega}{d \lg \omega - d \lg u},$$

d. h.

$$\frac{u-w}{w} = - \frac{d \lg u}{d \lg \omega}.$$

Es wird also im Falle von (43a):

$$\frac{u-w}{w} \cong - \frac{u-w}{u} \cong \frac{b\omega^2}{a(\omega_0^2 - \omega^2)^2} > 0 \tag{43c}$$

und

$$\frac{u-w}{w} \cong - \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} < 0 \tag{43d}$$

im Falle von (43b).

In einem genügend großen Abstände von der Resonanzstelle, d. h. bei  $\omega \ll \omega_0$ , ist die Gruppengeschwindigkeit von der Phasengeschwindigkeit kaum verschieden. Bei Erhöhung der Frequenz muß sie aber immer schneller wachsen und schließlich die Phasengeschwindigkeit übertreffen. In diesem Spektralgebiet, obwohl es gewöhnlich (speziell bei Gasen) verhältnismäßig sehr eng ist, kann die Gruppengeschwindigkeit ebenso wenig einen unmittelbaren Sinn haben, wie die Phasengeschwindigkeit.

Sie verliert diesen Sinn auch bei impulsartigen Vorgängen, oder in dem Anfangs- und Endstadium eines Schwingungsvorgangs mit beschränkter Zeitdauer, denn diese Vorgänge sind durch ein äußerst ausgedehntes Spektrum charakterisiert. Wir betrachten z. B. den Fall, daß die Funktion  $F(t, x)$  im Punkte  $x = 0$ , während eines bestimmten Zeitintervalls  $\tau$  die Form  $F(t, 0) = e^{-i\omega_0 t}$  hat und außerhalb dieses Intervalls, bei  $t < -\frac{\tau}{2}$  und  $t > \frac{\tau}{2}$  verschwindet. Dieser Fall wird näherungsweise verwirklicht, wenn man auf einen durch die Ebene  $x=0$  begrenzten Körper einen harmonischen Wellenzug *äußeren* Ursprungs während der Zeit  $\tau$  einfallen läßt. Um die auf diese Weise verursachte elektromagnetische Störung und seine Fortpflanzung im betrachteten Körper, d. h. die Gestalt der Funktion  $F(t, x)$  (für  $x > 0$ ) bestimmen zu können, muß man die oben definierte Funktion  $F(t, 0)$  durch eine Überlagerung unendlich vieler, zeitlich unbegrenzter harmonischer Schwingungen aller Frequenzen nach der Formel

$$F(t, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

darstellen und dementsprechend den einfallenden harmonischen Wellenzug von *beschränkter* Länge oder Zeitdauer, durch eine Superposition von unendlich vielen *unbeschränkten* Wellenzügen ersetzen mit allen möglichen Frequenzen und mit der Amplitudenfunktion

$$\psi^0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t, 0) e^{i\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt,$$

d. h.

$$\psi^0(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\pi(\omega - \omega_0)}. \quad (44)$$

Es wird also nach (40)

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}}{\pi(\omega - \omega_0)} e^{i(kx - \omega t)} d\omega \quad (44a)$$

oder mit der Abkürzung  $(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2} = \alpha$

$$F(t, x) = \frac{1}{\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i(kx - \frac{2\alpha}{\tau})} d\alpha. \quad (44b)$$

Aus diesen Formeln läßt sich leicht ersehen, daß die Anfangsphase der betrachteten Störung sich im Körper mit praktisch derselben Geschwindigkeit  $c$  wie im leeren Raum fortpflanzt in der Form von Elementarwellen von sehr kurzer Länge (d. h. sehr hoher Frequenz) und mit sehr kleinen Amplituden. Die letzteren sind direkt durch (44) bestimmt. Was die Fortpflanzungsgeschwindigkeit betrifft, so muß sie deshalb mit  $c$  übereinstimmen, daß die Dielektrizitätskonstante aller Körper bei  $\omega = \infty$  gleich 1 wird, wie dies aus den in § 3 Kap. III angegebenen Formeln für die elektrische Suszeptibilität hervorgeht. Nach den erwähnten sehr schwachen kurzwelligigen „Vorläufern“ muß die *Hauptphase* der Störung ankommen, mit einer Geschwindigkeit, die ungefähr der Gruppengeschwindigkeit in der Nähe der Frequenz  $\omega_0$  entspricht, und zwar desto näher je kleiner das Zeitintervall  $\tau$  ist.

Ähnliche Resultate ergeben sich, wenn man die Fortpflanzung einer elektromagnetischen Störung betrachtet, die in einem bestimmten Augenblick  $t = 0$  die Gestalt eines *räumlich* begrenzten harmonischen Wellenzuges von der Länge  $l$  hat. Diesen Wellenzug muß man wieder durch eine Superposition unendlich vieler unbegrenzter Wellenzüge aller Frequenzen ersetzen, nach der Formel

$$F(0, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^0(k) e^{ikx} dk$$

mit der Amplitudenfunktion

$$\psi^0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(0, x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} e^{(k_0 - k)x} dx = \frac{\sin(k_0 - k) \frac{l}{2}}{\pi(k_0 - k)}.$$

Die Gestalt der Störung für einen beliebigen anderen Zeitpunkt  $t \neq 0$  wird dann durch das Integral

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^0(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

bestimmt, und muß offenbar bei Anwesenheit irgendwelcher Dispersion von der ursprünglichen Gestalt mehr oder minder verschieden sein. Die verschiedenen Elementarwellenzüge, die bei  $t = 0$  sich zu einem einzigen Individuum vereinigen lassen, müssen bei  $t \leq 0$  sozusagen „auseinanderlaufen“, und zwar nicht in einer bestimmten Richtung, sondern, wie leicht zu sehen ist, in die beiden Richtungen der  $x$ -Achse.

#### 4. Stehende ebene Wellen.

Zwei unbegrenzte Elementarwellenzüge von *derselben* Frequenz und Amplitude aber mit *entgegengesetzten*, Fortpflanzungsrichtungen setzen sich zusammen zu einer sogenannten *stehenden Welle* von der Gestalt

$$F(t, x) = e^{i(kx - \omega t)} + e^{i(-kx - \omega t)} = 2 \cos kx e^{-i\omega t}. \quad (45)$$

Man bekommt dabei an jeder Stelle eine Schwingung von konstanter Amplitude, die sich längs der  $x$ -Achse sinusoidal ändert. Die Ebenen  $\cos kx = 0$ , d. h.  $x = \frac{\pi}{k} \left( n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right)$  ( $n$ -ganze Zahl), die nacheinander in Abständen  $\frac{\lambda}{2}$  folgen, heißen die *Knotenebenen*; auf den beiden Seiten einer solchen Ebene haben die Schwingungen dieselbe Amplitude, aber entgegengesetzte Phasen.

Im Mittelabstand zwischen den Knotenebenen erreicht die Schwingungsamplitude ihren Maximalwert ( $\cos kx = 1$ ). Solche Stellen werden „Schwingungsbäuche“ genannt.

Während bei den sich in einer Richtung fortpflanzenden Elementarwellen die elektrischen und magnetischen Schwingungen dieselben Phasen haben, erscheinen sie bei stehenden Wellen *zeitlich und räumlich um ein Viertel ihrer Periode* ( $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ , bzw.  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ) *gegen-einander verschoben*.

Wir nehmen z. B. an, daß die Größe  $F$  in (45) die elektrische Feldstärke bezeichnet. Die magnetische Feldstärke läßt sich daraus

nach der für die einzelnen Komponenten gültigen Gleichung

$$\mathfrak{f} \times \mathfrak{E} - \frac{\omega}{c} \mathfrak{S} = 0$$

bestimmen. Sie ist also wie üblich senkrecht zur elektrischen Feldstärke gerichtet und ist ihrem Betrag (und Phase) nach gleich

$$H = \frac{k}{k_0} (e^{i(kx - \omega t)} - e^{i(-kx - \omega t)}) = 2 \frac{k}{k_0} \sin kx \cdot i e^{-i\omega t}. \quad (45a)$$

( $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ). Die reellen Anteile von (45) und (45a) sind

$$\left. \begin{aligned} E &= 2 \cos kx \cos \omega t, \\ H &= \frac{2k}{k_0} \sin kx \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (45b)$$

Es fallen folglich die Knotenebenen von  $E$  mit den Schwingungsbäuchen von  $H$  zusammen und umgekehrt die Knotenebenen von  $H$  mit den Schwingungsbäuchen von  $E$ . Dieser Verschiebung der Schwingungsamplituden um  $\frac{\lambda}{4}$  entspricht eine Verschiebung der Schwingungsphasen (im gewöhnlichen Sinne) um  $\frac{\tau}{4}$ .

Ähnliche Verhältnisse findet man bei stehenden Wellen beliebiger Gestalt.

### 5. Räumliche Wellengruppen; Wellenbündel, Wellenpakete, monochromatische Strahlenbündel.

Solche elektromagnetischen Vorgänge, die sich nur in einer oder in zwei entgegengesetzten Richtungen fortpflanzen, sind im allgemeinen als eine Idealisierung der wirklichen Vorgänge anzusehen, — derselben Art wie streng harmonische sinusoidale unbegrenzte Wellenzüge. Die wirklichen Vorgänge lassen sich strenggenommen nur durch Integrale von der Gestalt (39a) darstellen, wobei nicht nur der Betrag, sondern auch die *Richtung* des Phasenvektors  $\mathfrak{f}$  in einer *stetigen* Weise verändert werden muß. Dem oben definierten Begriff einer Wellengruppe von bestimmter Richtung entspricht dabei der Begriff eines *Wellenbündels*. Ein Wellenbündel läßt sich im allgemeinen definieren als eine Superposition von Elementarwellen, deren Normalen  $\mathfrak{n}$  einen sehr kleinen *Kegel* mit dem Öffnungswinkel  $\Delta\Omega$  bilden, während ihre Längen oder Frequenzen wie früher einen sehr kleinen Spektralbereich ausfüllen. Setzt man in (39a)  $d\tau = k^2 dk d\Omega$ , so ergibt sich für ein Wellenbündel die folgende Definitionsformel:

$$\Delta F(t, \mathfrak{r}) = \int_{\Delta k \Delta \Omega} \psi^0(\mathfrak{f}) e^{i(\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{r} - \omega t)} k^2 dk d\Omega. \quad (46)$$

Wenn das betrachtete Intervall  $(\Delta k, \Delta \Omega)$  so klein ist, daß die entsprechende Änderung der Amplitudenfunktion  $\psi^0(k)$  unbedeutend bleibt, kann man die vorhergehende Formel durch

$$\Delta F(t, r) = \psi^0(\mathfrak{k}_0) \int_{\Delta k} \int_{\Delta \Omega} e^{i(t \cdot r - \omega t)} k^2 dk d\Omega$$

ersetzen. Es bedeutet hier  $\mathfrak{k}_0$  wie üblich einen willkürlich ausgewählten Mittelwert von  $\mathfrak{k}$ . Setzt man nun  $\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_0 = g$  und  $\omega - \omega_0 = g \cdot \nabla \omega$   $\sum_i g_i \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$  (der Gradient von  $\omega$  bezieht sich selbstverständlich nicht auf den gewöhnlichen  $r$ -Raum, sondern auf den  $\mathfrak{k}$ -Raum), so wird:

$$\int \int e^{i(t \cdot r - \omega t)} k^2 dk d\Omega = e^{i(t_0 \cdot r - \omega_0 t)} \int e^{i(t - t \nabla \omega) \cdot g} d\tau.$$

Der Wert des rechtsstehenden Integrals muß offenbar von der *Gestalt* des ausgewählten sehr kleinen Gebietes des  $\mathfrak{k}$ -Raumes wenigstens näherungsweise unabhängig sein und nur von seinem Volum abhängen. Wir können deshalb bei der Ausführung der Integration dieses Gebiet als eine *Kugel* mit dem Mittelpunkt  $\mathfrak{k}_0$  und dem durch die Gleichung  $\frac{4\pi}{3} \varrho^3 = k_0^2 \Delta k \cdot \Delta \Omega$  bestimmten Radius  $\varrho$  behandeln. Es ergibt sich dabei, wenn man durch  $\Theta$  den Winkel zwischen  $g$  und dem Vektor  $r - \nabla \omega \cdot t$  bezeichnet:

$$\int e^{i(t - t \nabla \omega) \cdot g} d\tau = \int_0^\varrho \int_0^\pi e^{i |r - t \nabla \omega| g \cos \Theta} 2\pi g^2 dg \sin \Theta d\Theta = 2\pi \int_{-1}^{\varrho+1} e^{i\alpha g u} g^2 dg du,$$

wo zur Abkürzung  $\alpha = |r - t \nabla \omega|$  und  $u = \cos \Theta$  gesetzt wird. Nun hat man

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\alpha g u} du = \frac{e^{i\alpha g} - e^{-i\alpha g}}{i\alpha g} = \frac{2 \sin \alpha g}{\alpha g}$$

und ferner

$$\int_0^\varrho \frac{\sin \alpha g}{\alpha g} \cdot g^2 dg = \frac{1}{\alpha^3} \int_0^{\alpha \varrho} \sin y \cdot y dy = \frac{\sin \alpha \varrho - \alpha \varrho \cos \alpha \varrho}{(\alpha \varrho)^3} \cdot \varrho^3.$$

Wir bekommen also

$$\Delta F(t, r) = 3 \psi^0(\mathfrak{k}_0) \frac{\sin \alpha \varrho - \alpha \varrho \cos \alpha \varrho}{(\alpha \varrho)^3} e^{i(t_0 \cdot r - \omega_0 t)} k_0^2 \Delta k \Delta \Omega \quad (46a)$$

mit

$$\alpha = \left| r - t \frac{d\omega}{d\mathfrak{k}} \right| \quad (46b)$$

und

$$\varrho = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} k_0^2 \Delta k \Delta \Omega}. \quad (46c)$$

Dieses Resultat ist mit dem oben berechneten, für den Fall einer streng gerichteten Wellengruppe ganz analog. Der Hauptunterschied zwischen

den beiden Fällen besteht in dem Umstand, daß der durch die Formel (46a) bestimmte Vorgang nicht in der Nähe einer (unendlichen) Ebene, sondern in der Nähe eines Punktes  $\mathbf{r} = \frac{d\omega}{d\mathbf{f}} \cdot t$  konzentriert bleibt<sup>1)</sup>. Der Absolutwert von  $\Delta F$  in der Umgebung dieses Punktes läßt sich als Funktion des entsprechenden Abstandes  $|\Delta \mathbf{r}|$  näherungsweise darstellen durch die Formel

$$|\Delta F|^2 \sim e^{-\frac{12}{125} e^2 |\Delta \mathbf{r}|^2}, \quad (47)$$

die sich ergibt, wenn man den Ausdruck  $\frac{3}{y^3} (\sin y - y \cos y)$  nach Potenzen von  $y$  entwickelt und durch die Exponentialfunktion mit derselben Anfangsentwicklung ersetzt.

Dieses „punktförmige“ Maximum oder „Wellenpaket“ verschiebt sich geradlinig-gleichförmig mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{d\omega}{d\mathbf{f}}, \quad (47a)$$

die als die vektorielle Verallgemeinerung der oben definierten Gruppengeschwindigkeit angesehen werden darf.

In dem Fall isotroper Körper ist sie mit der mittleren Normalen des Wellenbündels, d. h. der Achse des Kegels  $d\Omega$  gleich gerichtet. Im allgemeinen Fall hat sie aber eine davon verschiedene Richtung, die auch mit der zugehörigen Strahlenrichtung bei Anwesenheit der Dispersion nicht zusammenfällt.

Neben den Wellenbündeln, die einem sehr kleinen *Volumelement* des  $\mathbf{f}$ -Raumes entsprechen, kann man noch solche Wellenbündel definieren, die einem bestimmten (gekrümmten) *Flächenelement* in diesem Raume zugehören, insbesondere einem Element der Kugelfläche  $k = \text{konst}$  oder der Fläche  $\omega = \text{konst}$ . Bei isotropen Körpern fallen diese Flächen selbstverständlich zusammen. — Solche „monochromatische“ Bündel mit konstanter Wellenlänge oder konstanter Frequenz lassen sich durch die Formeln

$$(\Delta F)_k = \psi^0(\mathbf{n}_0) \int_{d\Omega} e^{i(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ut)k} d\Omega \quad (48)$$

bzw.

$$(\Delta E)_\omega = \psi^0(\mathbf{n}_0) e^{-i\omega t} \int_{d\Omega} e^{i\omega \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{u}} d\Omega \quad (48a)$$

darstellen, wobei  $u$  in beiden Fällen als eine Funktion der Wellennormale  $\mathbf{n}$  anzusehen ist.

Wir werden auf eine nähere Untersuchung dieser Formeln für den allgemeinen Fall anisotroper Körper nicht eingehen. Es sei bemerkt,

<sup>1)</sup> Der Koordinatenursprung und der Augenblick  $t = 0$  kann selbstverständlich auf eine ganz beliebige Weise definiert werden.

daß die Ausführung der Integration in der ersten von ihnen zu einer effektiven Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v^{(k)} = \left( \frac{du}{dn} \right)_{k = \text{konst}}$$

führt, die von der Strahlengeschwindigkeit verschieden ist. Die letztere kann man nämlich durch die Formel

$$\frac{1}{v} = \left( \frac{d}{dn} \left( \frac{1}{u} \right) \right)_{\omega = \text{konst}}$$

definieren, die eine Umkehrung unserer ursprünglichen Definitionsgleichung  $v \cdot n = u$  bildet.

In dem einfachsten Fall isotroper Körper sind die beiden Formeln (48) und (48a) vollkommen äquivalent. Es wird dabei, wenn man die Richtung des Radiusvektors  $r$  zur Polarachse wählt

$$n \cdot r = r \cos \Theta \quad \text{und} \quad d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\varphi,$$

und folglich:

$$\begin{aligned} \int e^{i(n \cdot r - ut)k} d\Omega &= -e^{-i\omega t} \iint e^{ikr \cos \Theta} d \cos \Theta d\varphi \\ &= -\frac{e^{-i\omega t}}{ikr} \oint e^{ikr \cos \Theta_1} d\varphi = -\frac{e^{i(kr - \omega t)}}{ikr} \oint e^{-2kr \sin^2 \frac{\Theta_1}{2}} d\varphi, \end{aligned}$$

wobei  $\Theta_1$  den Randwert von  $\Theta$  bedeutet.

Bei  $\psi^0(n) = \text{konst}$ , erhält man also

$$\Delta F = -\psi^0 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{ikr} \oint e^{-i2kr \sin^2 \frac{\Theta_1}{2}} d\varphi, \tag{48b}$$

d. h. eine Art von *Kugelwelle*, die sich aus dem Nullpunkt  $r = 0$  ausbreitet oder nach diesem Punkt konvergiert, und deren Amplitude in bestimmter Weise von der Richtung abhängt. Bei  $\Delta\Omega = 4\pi$  ergibt sich speziell

$$\Delta F = 2\psi^0 \frac{\sin kr}{kr} e^{-i\omega t}, \tag{48c}$$

d. h. eine „stehende“ Kugelwelle, die als Superposition von divergierenden und konvergierenden Kugelwellen aufgefaßt werden kann.

### 6. Ergänzungen.

Wir haben bisher die Dämpfung der Elementarwellen ausgeschlossen. Die obigen Resultate sind also nur bei vollkommen durchsichtigen Körpern gültig. Sie lassen sich aber sehr einfach auf den Fall absorbierender Körper verallgemeinern. In diesem Fall muß man nämlich statt des komplexen  $\mathfrak{k}$ -Raumes den reellen  $\mathfrak{k}^{(1)}$ -Raum betrachten, d. h. die Formel (39a) durch

$$F(t, \mathbf{r}) = \int \psi^0(\mathfrak{k}^{(1)}) e^{i[(k^{(1)} + ik^{(2)}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t]} d\tau^{(1)}$$

ersetzen. Es bedeuten hier  $\mathfrak{k}^{(1)}$  und  $\mathfrak{k}^{(2)}$ , wie üblich, den reellen und imaginären Anteil von  $\mathfrak{k}$ , die wir der Einfachheit halber als gleich-

gerichtet betrachten. Dabei ist der Absorptionskoeffizient  $k^{(2)}$  ebenso wie die Frequenz als eine im allgemeinen zweideutige Funktion von  $\mathfrak{k}^{(1)}$  zu behandeln.

Wir wollen noch zum Schluß einige Worte hinzufügen über die Darstellung der *quadratischen* Größe, die der angeführten „harmonischen Analyse“ von verschiedenen linearen Größen ( $F$ ) entspricht.

In dem einfachsten Fall eines planaren Vorgangs mit einem diskreten Spektrum

$$F = \sum_n E_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}$$

bekommt man für den quadratischen Mittelwert in bezug auf die Zeit

$$\overline{|F|^2} = \frac{1}{2} \sum_n F_n F_n^* = \frac{1}{2} \sum_n |F_n|^2. \quad (49)$$

Die entsprechende Formel für einen Vorgang mit einem kontinuierlichen Spektrum  $F = \int \psi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$  lautet:

$$\overline{|F|^2} = \frac{1}{2} \int \psi(k) \psi^*(k) dk = \frac{1}{2} \int |\psi(k)|^2 dk \quad (49a)$$

In dem allgemeinsten Fall eines nicht-planaren Vorgangs mit kontinuierlichem Spektrum  $F = \int \psi(\mathfrak{k}) e^{i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{r} - \omega t)} d\tau$  ergibt sich dementsprechend

$$\overline{|F|^2} = \frac{1}{2} \int |\psi(\mathfrak{k})|^2 d\tau. \quad (49b)$$

Wenn die Richtungen von  $\mathfrak{k}$  kontinuierlich verteilt sind, während sein Betrag diskrete Werte annimmt, bekommt man statt (49) eine Formel von der Gestalt

$$\overline{|F|^2} = \frac{1}{2} \sum_m \int |\psi_m(k_m \mathfrak{n})|^2 d\Omega. \quad (49c)$$

Auf genau dieselbe Weise kann man die Mittelwerte des *Produktes* von zwei verschiedenen linearen Größen (z. B. der elektrischen und der magnetischen Feldstärke) bestimmen, falls es sich um denselben Vorgang handelt, oder im allgemeinen, falls die beiden Größen dasselbe Spektrum und irgendwelche konstante Phasenbeziehungen haben. Bei verschiedenen Spektren oder bei unregelmäßig wechselnden Phasenbeziehungen müssen diese Mittelwerte verschwinden. Im ersten Falle nennt man die Schwingungen *kohärent* — oder „interferenzfähig“ — im zweiten *inkohärent*.

## § 5. Elektromagnetische Wellen in quasi-homogenen Körpern.

### 1. Allgemeine Diskussion der Wellengleichung.

Der Begriff der Elementarwellen im oben definierten Sinne ist nur auf *homogene* Körper oder auf *inhomogene* Körper mit einer ganz speziellen *geschichteten* Struktur anwendbar.

Wir wollen hier die Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen in inhomogenen Körpern von beliebiger Struktur untersuchen und nur die *stetige* Änderung ihrer elektromagnetischen Eigenschaften voraussetzen. Wir werden dementsprechend keine Annahmen über den geometrischen Charakter der elektromagnetischen Vorgänge machen. Wir können uns dabei auf rein harmonische Schwingungen beschränken und die Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in der Gestalt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} - \frac{i\omega}{c} \mathfrak{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \quad (50)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} + \frac{i\omega}{c} \mathfrak{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0 \quad (50a)$$

schreiben [vgl. (2a) und (b) § 1].

Wir müssen dabei zwei besonders wichtige und interessante Grenzfälle unterscheiden, je nachdem die elektromagnetischen Eigenschaften des Körpers, d. h. die Dielektrizitätskonstante, Dämpfungskonstante und magnetische Permeabilität, sich *sehr langsam* oder *sehr rasch* ändern, oder genauer ausgesprochen, je nachdem ihre „Oszillation“ in Abständen von der Größenordnung der Wellenlänge der betreffenden Schwingungen sehr klein ist oder nicht. Im ersten Falle werden wir den Körper als *quasi-homogen*, im zweiten als *trüb* bezeichnen.

In diesem Paragraphen werden wir uns ausschließlich mit quasi homogenen Körpern beschäftigen. Der Einfachheit halber wollen wir uns zunächst auf den Fall *isotroper durchsichtiger unmagnetischer* Körper beschränken, die nur durch einen Parameter — nämlich die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  — charakterisiert werden können. Wir betrachten also diese „Konstante“ als eine reelle stetige Ortsfunktion, die der Bedingung  $|\nabla \varepsilon| \cdot \lambda_0 \ll 1$  oder  $|\nabla \varepsilon| \lambda \ll 1$  genügen soll. Es bedeutet hier  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$  die Wellenlänge von Schwingungen derselben Frequenz im leeren Raum und  $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}}$  ihre Wellenlänge in einem vollkommen homogenen Körper, dessen Dielektrizitätskonstante mit dem Wert von  $\varepsilon$  an der betrachteten Stelle übereinstimmt.

Wir müssen hier ausdrücklich betonen, daß der Begriff der Wellenlänge nur im Falle *homogener* Körper einen unmittelbaren physikalischen Sinn hat. Strenggenommen kann man bei inhomogenen Körpern von der Wellenlänge — als dem Abstände zwischen zwei Nachbarflächen gleicher Schwingungsphase — gar nicht reden.

Setzt man in (50a)  $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$  ein, so wird (mit Rücksicht auf  $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ):

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = \varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \cdot \nabla \varepsilon = 0. \quad (51)$$

Durch Elimination von  $\mathfrak{H}$  bekommt man andererseits in der üblichen Weise die Gleichung

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathfrak{D} = 0, \quad (51a)$$

$$\text{d. h.} \quad -\nabla \operatorname{div} \mathfrak{E} + \nabla^2 \mathfrak{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathfrak{E} = 0. \quad (51 \text{ b})$$

Bei homogenen Körpern ist das erste Glied auf der linken Seite gleich Null. In dem betrachteten Fall ist es dagegen von Null verschieden. Man hat nämlich nach (51)

$$-\nabla \operatorname{div} \mathfrak{E} = \nabla \left( \mathfrak{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) = \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \left( \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla \right) \mathfrak{E} + (\mathfrak{E} \cdot \nabla) \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}. \quad (51 \text{ c})$$

Die Gleichung (51 b) hat also eine viel kompliziertere Form als die übliche Wellengleichung für homogene Körper und dementsprechend viel kompliziertere Lösungen, die sich strenggenommen mittels Wellenflächen irgendwelcher Gestalt nicht beschreiben lassen.

Unsere obige Voraussetzung über die langsame Änderung von  $\varepsilon$  erlaubt uns aber die Größe (51 c) zu vernachlässigen. Wir bekommen folglich für quasi-homogene Körper eine angenäherte Gleichung derselben Form wie für homogene, d. h. [vgl. (7)]

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (52)$$

mit dem einzelnen — sehr wesentlichen — Unterschied, daß der Wellenparameter

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon} = k_0 \sqrt{\varepsilon} \quad (52 \text{ a})$$

keine konstante Größe, sondern eine gegebene Ortsfunktion ist.

Wir machen für die Wellenfunktion  $\psi$  (die irgend eine lineare Größe  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  usw. bedeuten mag) den folgenden Ansatz

$$\psi = \psi^0 e^{i(-\omega t + k_0 s)}, \quad (53)$$

wo  $\psi^0$  eine konstante „Amplitude“ und  $s$  eine zunächst unbekannte Ortsfunktion bedeutet. Dieser Ansatz stellt eine Verallgemeinerung unseres früheren Ansatzes (8) für ebene sinusoidale Wellen dar. Die Funktion  $s$ , falls sie reell ist, muß die *Gestalt der Wellen*, d. h. die Gestalt der Flächen konstanter Phasen  $s = \text{konst}$  charakterisieren. Die *Schwingungsphase* ist dabei gleich

$$S = -\omega t + k_0 s. \quad (53 \text{ a})$$

Es ist zu beachten, daß  $s$  im allgemeinen auch bei reellen Werten von  $\varepsilon$  komplex sein kann (siehe unten). Man muß dann

$$s = s^{(1)} + i s^{(2)} \quad (53 \text{ b})$$

setzen und die eigentliche Phase durch

$$S^{(1)} = -\omega t + k_0 S^{(1)} \quad (53 \text{ c})$$

definieren, während  $S^{(2)} = k_0 s^{(2)}$  die eventuell vorhandene Änderung der Amplitude nach der Formel

$$|\psi| = |\psi^0| e^{-k_0 s^{(2)}} \quad (53 \text{ d})$$

bestimmt. Eine solche Änderung der Amplitude kann beim Fehlen wahrer Dämpfung durch die Ausbreitung der Wellen bedingt werden.

Durch Einsetzen von (53) in (52) bekommt man, mit Rücksicht auf die Formeln

$$\nabla e^{ik_0 s} = e^{ik_0 s} i k_0 \nabla s,$$

$$\nabla^2 e^{ik_0 s} = \operatorname{div} \nabla e^{ik_0 s} = e^{ik_0 s} i k_0 \nabla^2 s - e^{ik_0 s} k_0^2 (\nabla s)^2,$$

die folgende Gleichung für die „Phasenfunktion“  $s$ :

$$i k_0 \nabla^2 s - k_0^2 (\nabla s)^2 + k^2 = 0,$$

oder nach (52)

$$\frac{1}{i k_0} \nabla^2 s + (\nabla s)^2 = \varepsilon. \quad (54)$$

Daraus sieht man, daß  $s$  im allgemeinen auch bei reellem  $\varepsilon$  eine komplexe Größe darstellen muß.

## 2. Kurze Wellen; geometrische Optik und ihre Analogie mit der Mechanik.

Wenn man mit elektromagnetischen Schwingungen von sehr hoher Frequenz, d. h. einer sehr kleinen Wellenlänge zu tun hat, kann man bei gewissen Bedingungen das erste Glied in (54) weglassen, d. h. die Phasenfunktion durch die angenäherte Gleichung

$$(\nabla s)^2 = \varepsilon, \quad (54a)$$

in welcher die Wellenlänge gar nicht auftritt, ersetzen. Die erwähnten Bedingungen lassen sich, wie leicht zu sehen ist, auf den Umstand zurückführen, daß die *Krümmung* der sich aus (54a) ergebenden Wellenflächen  $s = \text{konst}$  sehr klein gegen  $k_0$  ist. Mit anderen Worten, der Krümmungsradius der zu diesen Flächen orthogonalen „Strahlen“ muß sehr groß gegen die Wellenlänge  $\lambda_0$  oder auch  $\lambda$  (denn die Dielektrizitätskonstante ist immer von der Größenordnung 1) bleiben.

Die Gleichung (54a) hat genau dieselbe Gestalt wie die in Bd. I (S. 336) abgeleitete *Hamilton-Jakobische* Gleichung (27a), welche die Bewegung eines Elektrons in einem gegebenen elektrostatischen Feld (bei Fehlen magnetischer Kräfte) bestimmt. Und zwar entspricht die Phasenfunktion  $s$  dem von der Zeit unabhängigen Anteil  $\Phi$  der Wirkungsfunktion

$$V^* = -Ht + \Phi$$

und die Dielektrizitätskonstante der Größe

$$2m_0(H - e\varphi),$$

die gleich der mit  $2m_0$  multiplizierten kinetischen Energie des Elektrons oder einfach dem Quadrat seiner mechanischen Bewegungsgröße  $m_0 v$  ist. Die Wirkungsfunktion  $V^*$  entspricht ferner der durch  $k_0$  dividierten Schwingungsphase  $S$  und die vollständige Energie  $H$  dem Ver-

hältnis der Frequenz  $\omega$  zu  $k_0$ , d. h. der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum.

Wir sehen also, daß die Fortpflanzung sehr kurzer elektromagnetischer Wellen in einem quasi-homogenen isotropen durchsichtigen Körper ungefähr nach denselben Gesetzen geschieht wie die Fortpflanzung der Flächen konstanter Wirkung ( $V^* = \text{konst}$ ) in der Hamilton-Jakobischen Form des mechanischen Problems der Bewegung eines materiellen Teilchens in einem statischen Kraftfeld. Diese korrespondenzmäßige Beziehung zwischen den beiden Problemen läßt sich symbolisch durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} m_0 v &= h k_0 V s, & 2 m_0 (H - e \varphi) &= h k_0 \epsilon, \\ V^* &= h S, & H &= h \omega \end{aligned} \right\} \quad (54b)$$

ausdrücken. Wir haben hier eine willkürliche Konstante  $h$  von der Dimension der Wirkung eingeführt, um die Übereinstimmung der Dimension der rechts- und linksstehenden Größen zu sichern. In dem mechanischen Problem spielen die „Wirkungswellen“ die Rolle eines Hilfsbegriffes, während eine unmittelbare physikalische Bedeutung nur ihren Orthogonaltrajektorien, welche die *Bahnen* der einzelnen Teilchen bei verschiedenen Anfangs- oder Endbedingungen darstellen, zukommt. Diesen Bahnen entsprechen in dem elektrodynamischen oder optischen Problem — sofern es sich von der Fortpflanzung kurzer elektromagnetischer Lichtwellen handelt — die Energie- oder *Lichtstrahlen*. In der durch die Gleichung (53a) dargestellten Annäherung haben diese Strahlen dieselbe unmittelbare Realität wie die mechanischen Bahnlinien. Man kann sie einfach definieren als die Bahnlinien einer Schar von Teilchen, die sich nach der Gleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{h k_0}{2 m_0^2} \nabla \epsilon \quad (54c)$$

bewegen. — Diese fiktive Bewegungsgleichung ergibt sich aus der üblichen Gleichung  $m_0 \frac{dv}{dt} = -e \nabla \varphi$  mit Rücksicht auf die Beziehungen (54b).

Es sei bemerkt, daß die Bewegungsgeschwindigkeit  $v = \frac{h k_0}{m} \nabla s$ , die man durch Integration von (54c) bekommt, nur seiner Richtung nach mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen übereinstimmt. Um die Größe dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu finden, betrachten wir die Änderung der Schwingungsphase  $S$  in einem sehr kleinen Raumzeitgebiet:

$$dS = -\omega dt + k_0 dr \cdot \nabla s. \quad (55)$$

Dieser Ausdruck hat genau dieselbe Gestalt wie im Falle ebener Elementarwellen mit dem Phasenvektor

$$\mathfrak{k} = k_0 \nabla s. \quad (55a)$$

Nach (54a) ist der Betrag von  $\mathfrak{k}$  gleich dem früher angeführten Parameter (52a). Wir sehen also, daß in der der Gleichung (54a) entsprechenden Näherung die Wellen sich in jedem genügend kleinen Raumgebiet in genau derselben Weise fortpflanzen, wie die Elementarwellen derselben Länge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  und Richtung  $n = \frac{\mathfrak{k}}{k}$  in einem vollkommen homogenen Körper mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ . Die Wellengeschwindigkeit ist dabei gleich wie üblich

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{k_0 \sqrt{\epsilon}} \tag{55 b}$$

woraus folgt nach (54b)

$$v = \frac{h\omega}{m_0 u} \tag{55 c}$$

Die „Bewegungsgeschwindigkeit“  $v$  ist also umgekehrt proportional der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $u$ .

Wir stellen uns eine beliebige Kurve  $\sigma$  vor, die zwischen zwei festen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  gezogen ist. Das längs dieser Kurve genommene Integral  $\int \mathfrak{k} \cdot d\mathfrak{r} = \int k d\sigma \cos \Theta = 2\pi \int \frac{d\sigma}{\lambda} \cos \Theta$ , wo  $\Theta$  den Winkel zwischen  $d\sigma$  und der Strahlenrichtung in dem entsprechenden Punkt bedeutet, ist nach (55) in jedem Augenblick gleich der Phasendifferenz  $S_2 - S_1$  der Schwingungen in den beiden Endpunkten und hat folglich einen von der Gestalt der Kurve  $\sigma$  unabhängigen Wert. Wenn die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  sich auf demselben Strahl  $\sigma_0$  befinden, muß man offenbar

$$\int \frac{d\sigma}{\lambda} \cos \Theta = \int \frac{d\sigma_0}{\lambda}$$

haben und folglich wegen  $\cos \Theta \leq 1$

$$\int \frac{d\sigma}{\lambda} \geq \int \frac{d\sigma_0}{\lambda}$$

Diese Ungleichung zeigt, daß die Gestalt eines durch zwei gegebene Punkte hindurchgehenden Strahles durch die Bedingung

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{d\sigma}{\lambda} = \int \sqrt{\epsilon} \frac{d\sigma}{\lambda_0} = \text{minimum} \tag{56}$$

bestimmt werden kann (Abb. 18). Diese Bedingung läßt sich noch in der folgenden Form auffassen: die Lichtstrahlen gehen von einem Punkt zum anderen auf demjenigen Weg, welcher der kürzesten Ankunftszeit entspricht (*Fermatsches Prinzip*). Die Geschwindigkeit der Lichtstrahlen wird dabei als die Wellengeschwindigkeit  $u$  definiert,

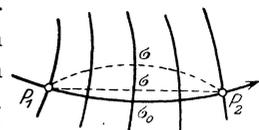


Abb. 18.

so daß  $\frac{d\sigma}{\lambda} = v \frac{d\sigma}{u} = v dt$  ist.

Führt man in (56) statt  $u$  die nach (55c) definierte Bewegungsgeschwindigkeit  $v$  ein, so bekommt man, mit Rücksicht auf  $d\sigma = v dt$ :

$$\int_{P_1}^{P_2} m_0 v d\sigma = \int m_0 v^2 d = \text{minimum}. \quad (56a)$$

Das ist das *Mauvertwische* Prinzip der kleinsten Wirkung, welches die Bahn eines Teilchens mit gegebener totaler Energie  $H$  bestimmt. Der Konstanz der letzteren in (56a) entspricht nach (54b) die Konstanz der Schwingungsfrequenz in (56).

Es muß betont werden, daß diese Übereinstimmung zwischen Optik und Mechanik keine genaue ist, sondern nur dann besteht, wenn man die Fortpflanzungsgesetze der elektromagnetischen Wellen in der angenäherten Gestalt (54a) formuliert<sup>1)</sup>. Diese angenäherte optische Theorie, bei welcher der *Strahlenbegriff* statt des Wellenbegriffes an die Spitze gestellt wird, pflegt man als die *Strahlenoptik* oder die geometrische Optik zu bezeichnen — im Gegensatz zu der exakten oder eher der *exakteren* Theorie, die ihre einfachste mathematische Formulierung in der Gleichung (52) findet und die man gewöhnlich *Wellenoptik* nennt.

### 3. Ergänzungen; Wellenoptik und Huyghenssche Elementarwellen.

In dieser — ebenfalls nicht vollkommen exakten — Theorie muß die Funktion  $s$ , wie schon oben erwähnt wurde, im allgemeinen *komplexe* Werte annehmen. Der durch (55a) definierte Phasenvektor wird folglich auch komplex, und seinem Betrage nach von dem Parameter  $k$  in (52) verschieden. Der reelle Anteil von  $(\mathfrak{k})$  bleibt auch davon verschieden, so daß die effektive Wellenlänge  $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}$  mit der wirklichen  $\frac{2\pi}{\mathfrak{k}^{(1)}}$  nicht zusammenfällt. Diese Unterschiede bei großen Krümmungen der Wellenflächen (oder der Lichtstrahlen) können sehr wesentlich werden. Die dabei auftretenden Komplikationen rühren gar nicht von der Inhomogenität des Körpers her — denn sie bleiben auch dann bestehen, wenn man in der Gleichung (54)  $\epsilon = \text{konst}$  ansetzt. Diese Komplikationen stammen einfach von den geometrischen Bedingungen der Wellenfortpflanzung in Verbindung mit der Tatsache, daß die durch eine bestimmte Wellenfläche übertragene Energie bei ihrer Ausbreitung unverändert bleiben muß. Denkt man sich z. B. die Lichtquelle in einem Punkt  $O$  konzentriert, so bekommt man in der Nähe dieses Punktes fast kugelförmige Wellen — ebenso wie im Falle eines vollkommen homogenen Körpers — deren Amplitude un-

<sup>1)</sup> Die oben dargelegten Resultate rühren zum Teil noch von *Hamilton* selbst her. Sie sind neuerdings der Ausgangspunkt einer wichtigen Entwicklung der Quantentheorie in der Gestalt der von *L. de Broglie* und *E. Schrödinger* begründeten *Wellenmechanik* geworden.

gefähr umgekehrt proportional mit ihrem Radius abnimmt

$$\left( |\psi| \sim \frac{1}{r}, \quad S^{(2)} \sim \lg r \right).$$

Bei ihrer weiteren Ausbreitung in einem quasi-homogenen Körper müssen sich diese Wellenflächen (d. h. die Flächen bestimmter Phase) allmählich deformieren (Abb. 19), was einer komplizierteren Gestalt der Amplitudenfunktion  $|\psi|$  entspricht. Das für solche Körper charakteristische Merkmal besteht in der Tatsache, daß die nacheinander folgenden Wellenflächen trotz dieser Deformation sich *niemals schneiden können*. Dies heißt, analytisch ausgedrückt, daß die Phasenfunktion  $s$  eine eindeutige Funktion der Koordinaten ist (s. unten).

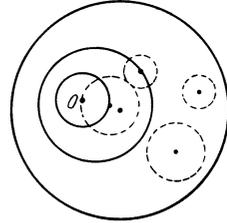


Abb. 19.

Setzt man in der Gleichung (54)  $s = s^{(1)} + i s^{(2)}$  ein, so läßt sich die letztere in die folgenden zwei Gleichungen spalten:

$$\frac{1}{k_0} \nabla^2 s^{(2)} + (\nabla s^{(1)})^2 - (\nabla s^{(2)})^2 = \varepsilon, \tag{57}$$

$$\frac{1}{2k_0} \nabla^2 s^{(1)} - \nabla s^{(1)} \cdot \nabla s^{(2)} = 0. \tag{57a}$$

Dadurch wird aber keine Vereinfachung des betrachteten Problems erreicht. Seine exakte Lösung ist am einfachsten durch Integration der ursprünglichen linearen Gleichung (52) zu suchen. Um die eventuell vorhandene Dämpfung zu berücksichtigen genügt es,  $\varepsilon$  als eine komplexe Größe zu behandeln; dabei sollte man in (57) statt  $\varepsilon$  den reellen Anteil und in (57a) statt Null den imaginären Anteil von  $\varepsilon$  einsetzen.

In dem Fall anisotroper Körper wird die Gleichung (52) auch schon bei vollkommener Homogenität nicht mehr gültig. Man hat nämlich dabei  $D_i = \sum \varepsilon_{ik} E_k$  und folglich statt (51)

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k \varepsilon_{ik} E_k = \sum_i \sum_k \left( \varepsilon_{ik} \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + E_k \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Dementsprechend muß man in diesem Falle zu der allgemeinen Gleichung (51a) zurückkehren. — Wir werden diese Gleichung nicht näher untersuchen und begnügen uns mit der Bemerkung, daß in quasi-homogenen Körpern, wo die Komponenten des Tensors  ${}^2\varepsilon$  sich verhältnismäßig langsam ändern, in kleinen Raumgebieten dieselben Gesetze der Wellenfortpflanzung gelten, die oben für die Fortpflanzung von Elementarwellen in vollkommen homogenen Körpern aufgestellt worden sind.

Statt ebener sinusoidaler Wellen pflegt man in dem Fall isotroper Körper als Elementarwellen *kugelförmige Wellen* zu definieren. Die Fortpflanzung einer Welle irgendwelcher Form in einem homogenen isotropen Körper kann man dann auf die Fortpflanzung solcher kugel-

förmigen Elementarwellen von jedem Punkt der jeweiligen Wellenfront oder genauer einer Fläche konstanter Phase zurückführen und die neue Lage dieser Fläche als die Einhüllende der obigen Elementarwellen definieren. Dieses sogenannte *Huyghenssches* Prinzip haben wir im ersten Bande für die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen im leeren Raum bewiesen. Seine Verallgemeinerung für den Fall homogener Körper liegt auf der Hand. Sofern es sich aber dabei von der Ausbreitung von Wellen in unendlich kleinen Räumen handelt, muß dieses Prinzip auch für quasi-homogene Körper gültig bleiben. Es ist dabei nur nötig, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der kugelförmigen oder eher quasi-kugelförmigen Elementarwellen als eine gegebene Ortsfunktion zu behandeln.

### § 6. Streuung der elektromagnetischen Wellen in trüben Körpern.

Die Vorstellung der elementaren Kugelwellen ist auch in dem Fall solcher Körper anwendbar, die sehr kleine Inhomogenitäten irgendwelcher Art enthalten, so daß ihre Dielektrizitätskonstante schon in solchen Volumelementen, deren lineare Abmessungen von der Größenordnung der Wellenlänge sind, *beträchtliche Schwankungen* erleidet. Den Einfluß dieser Schwankungen auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kann man in erster Annäherung vernachlässigen und die *Huyghensschen* Elementarwellen als kugelförmig behandeln. Sie müssen aber im betrachteten Fall schon in benachbarten Punkten sehr verschiedene *Amplituden* haben und können deshalb bei ihrer Superposition oder Interferenz sich zu einer resultierenden einhüllenden Wellenfläche im allgemeinen nicht vollkommen verschmelzen. Eine solche Verschmelzung ist nur dann möglich, wenn die räumliche Verteilung der Inhomogenitäten einen ganz *regelmäßigen* Charakter hat (wie z. B. die Anordnung der Kristallatome, die ebenfalls als mikroskopische Inhomogenitäten des als ein kontinuierliches Medium betrachteten Körpers angesehen werden können). Sofern diese Regelmäßigkeit fehlt, sofern also die Schwankungen der Dielektrizitätskonstante in Raumgebieten von der Größenordnung der Wellenlänge einen vollkommen ungeordneten Charakter haben, müssen die *Huyghensschen* Elementarwellen sich teilweise ohne Verschmelzung sozusagen *individuell* nach allen Seiten ausbreiten. Solche zusätzlichen „anarchistischen“ Wellen pflegt man als *zerstreute* Wellen zu bezeichnen. Sie müssen den entsprechenden Körper auch beim Fehlen einer echten Absorption nicht vollkommen durchsichtig oder, wie man sagt, optisch *trüb* machen.

Die Erscheinung der Lichtzerstreuung oder „Trübung“ wird hauptsächlich bei solchen Körpern beobachtet, deren Homogenität durch die Anwesenheit sehr kleiner *fremder* Teilchen in sehr großer Anzahl und regelloser Anordnung zerstört wird (Kolloidallösungen), aber auch gewissermaßen bei makroskopisch vollkommen homogenen Körpern,

wegen der sogenannten *Fluktuationen* oder *Schwankungen* des Zustandes und der Zusammensetzung sehr kleiner Volumelemente. Wir denken uns z. B. ein sich bei konstantem Druck und Temperatur befindendes Gas, das  $N$  Moleküle in der Volumeinheit enthält. Ein sehr kleines Volumelement  $v$  dieses Gases muß durchschnittlich  $n_0 = Nv$  Moleküle enthalten. Wegen des unregelmäßigen Charakters der Wärmebewegung der Moleküle kann aber das betrachtete Volumelement in verschiedenen Augenblicken verschiedene Molekülzahlen  $n$  enthalten, die um den obigen Mittelwert schwanken. Diese *Konzentrationsschwankungen* sind relativ desto intensiver, je kleiner  $v$  oder  $n$  ist. Da sie in benachbarten Volumelementen ganz unabhängig voneinander stattfinden, muß das Gas in jedem Augenblick etwas unhomogen erscheinen. — Neben den Konzentrationsschwankungen sind noch in gasförmigen und flüssigen Körpern die *Orientierungsschwankungen* der Moleküle zu berücksichtigen, die durch den unregelmäßigen Charakter ihrer Drehungsbewegung bedingt werden. Sofern die Moleküle keine Kugelsymmetrie besitzen, müssen diese Orientierungsschwankungen eine zeitlich und räumlich rasch wechselnde *Anisotropie* der einzelnen Volumelemente hervorrufen.

1. Bestimmung der Streustrahlung durch angenäherte Lösung der „gestörten“ Wellengleichung.

Der Einfluß solcher sehr kleiner Inhomogenitäten in Kolloidallösungen und makroskopisch homogenen Körpern auf die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen (wir werden im folgenden nur von *Lichtwellen* reden), läßt sich näherungsweise folgendermaßen bestimmen.

Wir machen für die Dielektrizitätskonstante den Ansatz

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon', \tag{58}$$

wo  $\varepsilon^0$  die mittlere Dielektrizitätskonstante des betreffenden Körpers (den wir der Einfachheit halber als isotrop annehmen wollen) bedeutet und  $\varepsilon'$  — die zusätzliche *sehr kleine* Änderung der letzteren, welche von den betrachteten Inhomogenitäten herrührt und unregelmäßig um den Nullwert schwankt.

Dementsprechend schreiben wir die vollständige elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  in der Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}', \tag{58a}$$

wo  $\mathfrak{E}^0$  denjenigen Wert von  $\mathfrak{E}$  bedeutet, der sich in nullter Näherung, d. h. bei  $\varepsilon' = 0$  ergibt. Diese nullte Näherung denken wir uns in der bekannten Weise aus der Differentialgleichung

$$\nabla^2 \mathfrak{E}^0 + k_0^2 \varepsilon^0 \mathfrak{E}^0 = 0 \tag{58b}$$

bestimmt. Um die erste Näherung für  $\mathfrak{E}$  zu erhalten, setzen wir in

der exakten Gleichung

$$\nabla \left( \mathfrak{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) + \nabla^2 \mathfrak{E} + k_0^2 \varepsilon \mathfrak{E} = 0$$

[vgl. (51) und (51 b)]  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}'$  ein und vernachlässigen die Größen zweiter Ordnung in  $\varepsilon'$ , d. h.  $\varepsilon' \mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{E}' \cdot \nabla \varepsilon'$  und  $(\nabla \varepsilon')^2$ . Wir bekommen dabei

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla (\mathfrak{E}^0 \cdot \nabla \varepsilon') + \nabla^2 \mathfrak{E}^0 + \nabla^2 \mathfrak{E}' + k_0^2 \varepsilon^0 \mathfrak{E}^0 + k_0^2 \varepsilon^0 \mathfrak{E}' + k_0^2 \varepsilon' \mathfrak{E}^0 = 0.$$

d. h. wegen (58 b):

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathfrak{E}' + k_0^2 \varepsilon^0 \mathfrak{E}' &= -\mathfrak{f}, \\ \mathfrak{f} &= k_0^2 \varepsilon' \mathfrak{E}^0 + \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla (\mathfrak{E}^0 \cdot \nabla \varepsilon'). \end{aligned} \right\} \quad (58c)$$

Der Vektor  $\mathfrak{f}$  ist hier als eine bekannte Größe anzusehen, von der Gestalt  $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 e^{-i\omega t}$ , wo  $\mathfrak{f}_0$  nur von  $\mathbf{r}$  abhängt. — Die obige (angenäherte) Gleichung für  $\mathfrak{E}'$  stimmt mit der allgemeinen Gleichung der retardierten Potentiale

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -f,$$

die wir im ersten Bande untersucht haben, überein, wenn man  $\psi = \psi_0 e^{-i\omega t}$  setzt und statt  $\frac{1}{c^2}$  die Größe  $\frac{\varepsilon^0}{c^2} = \frac{1}{u^2}$  einführt. Es wird also [vgl. Bd. I, S. 158—159]:

$$\mathfrak{E}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_R \mathfrak{f} \left( \mathbf{r}', t - \frac{R}{u} \right) dV' \quad (\mathfrak{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (59)$$

Der Anteil von  $\mathfrak{E}'$ , welcher von einem nicht nur gegen den Abstand  $R$ , sondern auch gegen die *Wellenlänge* kleinen Volum  $\Delta V$  herrührt, kann man mit genügender Annäherung durch die Formel

$$\Delta \mathfrak{E}' = \frac{\mathfrak{f} e^{i k R}}{4\pi R} \Delta V \quad \left( k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{u} \right) \quad (59a)$$

darstellen.

Diese Formel zeigt in Übereinstimmung mit den qualitativen Betrachtungen, die am Anfang dieses Paragraphen angeführt worden sind, daß bei Fortpflanzung der Lichtschwingungen in trüben Körpern die sich regelmäßig ausbreitenden „primären“  $\mathfrak{E}^0$ -Wellen schwache „sekundäre“ Kugelwellen erzeugen, deren Amplituden den Schwankungen der Dielektrizitätskonstante proportional sind (s. Abb. 19).

Wenn diese Schwankungen, wie wir es im folgenden immer voraussetzen werden, ganz unregelmäßig sind, müssen die elementaren Feldstärken (59a) die von den verschiedenen — auch den benachbarten — Volumelementen herrühren, in jedem beliebig ausgewählten Augenblick, *trotz der gemeinsamen Phase*  $\omega \left( t - \frac{R}{u} \right)$  verschiedene Größen und auch im

allgemeinen *verschiedene Vorzeichen* haben (denn  $\varepsilon'$  kann ebenso gut positiv wie negativ ausfallen). Die Summe  $\sum \Delta \mathcal{E}'$  für ein Volum  $\sum \Delta V = V$ , welches viele Elemente  $\Delta V$  enthält und doch klein gegen die Wellenlänge ist [oder was dasselbe ist, das entsprechende Integral (59)] muß folglich sehr klein bleiben, und der entsprechende räumliche Mittelwert  $\overline{\Delta \mathcal{E}'}$  =  $\frac{\sum \Delta \mathcal{E}'}{\sum \Delta V}$  praktisch verschwinden. (Wir benutzen den Querstrich  $\overline{\quad}$ , um den betrachteten Mittelwert von den üblichen, in bezug auf die Zeit genommenen Mittelwerte  $\Delta \overline{\mathcal{E}'}$  zu unterscheiden).

Wenn man zwei  $\Delta \mathcal{E}'$ -Schwingungen

$$\mathfrak{A} e^{-i\omega(t-\frac{R}{u})} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} e^{-i\omega(t-\frac{R}{u})}$$

betrachtet, so kann man bei  $\mathfrak{A} = -\mathfrak{B}$  ebensogut sagen, daß sie dieselbe Phase aber entgegengesetzte Amplituden haben, oder umgekehrt, dieselbe Amplitude und entgegengesetzte Phasen. Wenn nicht nur die Vorzeichen, sondern auch die Beträge der Amplituden  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  unabhängig voneinander wechseln (wegen der Schwankungen der Dielektrizitätskonstante), verhalten sich die betrachteten  $\Delta \mathcal{E}'$ -Schwingungen bei ihrer Zusammensetzung („Interferenz“) zu der resultierenden Schwingung  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 + \mathcal{E}'$  so als ob sie vollkommen *inkohärent* mit den primären  $\mathcal{E}^0$ -Schwingungen und miteinander wären. Wir müssen also bei der makroskopischen Behandlung der Fortpflanzung elektromagnetischer Schwingungen in trüben Körpern die sekundären oder „anarchistischen“ Wellen außer acht lassen und einfach  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^0$  oder eher  $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^0$  setzen.

Es ist aber dabei notwendig, ihre *Energie* in Betracht zu ziehen, da die letztere auf Kosten der Energie der „regelmäßigen“  $\mathcal{E}^0$ -Wellen erzeugt wird, wodurch eine spezifische von der eigentlichen Dämpfung wesentlich verschiedene, aber hinsichtlich der Effekte ganz ähnliche „Streuungsdämpfung“ der letzteren bedingt wird. Die Energie der Streustrahlung manifestiert sich auch unmittelbar in der „Trübung“, d. h. in der unvollkommenen Durchsichtigkeit der entsprechenden Körper; das bekannteste und eindruckvollste Beispiel dafür liefert die Erdatmosphäre.

Die Energie der resultierenden  $\mathcal{E}$ -Schwingungen (d. h. die Lichtintensität) ist durch den zeitlichen Mittelwert von  $\mathcal{E}^2$  bestimmt. Nun gilt  $\overline{E^2} = \overline{(\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}')^2} = \overline{\mathcal{E}^2} + 2 \overline{\mathcal{E}^0 \cdot \mathcal{E}'} + \overline{\mathcal{E}'^2} = \overline{\mathcal{E}^2} + \overline{\mathcal{E}'^2}$ , wegen der erwähnten Inkohärenz von  $\mathcal{E}'$  und  $\mathcal{E}^0$ . Wir haben ferner, wegen der Inkohärenz der elementaren  $\Delta \mathcal{E}'$ -Schwingungen miteinander:

$$\overline{\mathcal{E}'^2} = S \sum (\overline{\Delta \mathcal{E}'})^2,$$

wo die innere Summe ( $\sum$ ) auf benachbarte Volumelemente  $\Delta V$ , deren Abmessungen klein gegen die Wellenlänge sind, erstreckt wird;  $S$  bedeutet die nachfolgende Summation über das ganze Körpervolum. Da

die einzelnen Summanden in  $\Sigma$  tatsächlich dieselbe Phase und nur verschiedene Amplituden haben, kann man sie durch ihre räumlichen Mittelwerte ersetzen, nach der Formel

$$\Sigma (\Delta \mathcal{E}')^2 = \Sigma \cdot \overline{(\Delta \mathcal{E}')^2} = \frac{1}{2} \Sigma |\Delta \mathcal{E}'|^2,$$

wo durch  $|\cdot|$  der Absolutwert der entsprechenden komplexen Vektorgröße bezeichnet wird. Das betrachtete Problem reduziert sich folglich nach (59a) auf die Berechnung von

$$\overline{|\Delta \mathcal{E}'|^2} = \frac{|f|^2}{16 \pi^2 R^2} (\Delta V)^2. \quad (59b)$$

Wir beschränken uns auf die Untersuchung desjenigen Anteils dieser Größe, welcher dem ersten Gliede in dem Ausdruck (58b) für  $f$  entspricht (vgl. unten). Es ergibt sich dabei:

$$\overline{|\Delta \mathcal{E}'|^2} = \frac{\pi^2 |\mathcal{E}^0|^2}{\lambda_0^4 R^2} \varepsilon'^2 \cdot (\Delta V)^2. \quad (60)$$

In dem einfachsten Fall eines gasförmigen Körpers, dessen Inhomogenität durch die Konzentrationsschwankungen der Moleküle bedingt wird, hat man:

$$\varepsilon^0 - 1 = 4 \pi \alpha N, \quad \varepsilon' = 4 \pi \alpha \cdot \frac{n'}{\Delta V} = \frac{\varepsilon^0 - 1}{N} \frac{n - n_0}{\Delta V}, \quad (60a)$$

wo  $\alpha$  den Polarisationskoeffizienten eines Moleküls<sup>1)</sup> bedeutet, und folglich

$$\varepsilon'^2 (\Delta V)^2 = \frac{(\varepsilon^0 - 1)^2}{N^2} \overline{(n - n_0)^2}. \quad (60b)$$

Der Mittelwert des „Schwankungsquadrates“  $(n - n_0)^2$  läßt sich in der folgenden Weise bestimmen. — Wir denken uns  $N$  Moleküle, die in einem Volum  $V = \Sigma \Delta V$  eingeschlossen sind, wo sie sich unabhängig voneinander bewegen können. Die Wahrscheinlichkeit  $p$  dafür, daß ein bestimmtes Molekül sich in einem ausgewählten Teilvolum  $\Delta V$ , das durchschnittlich  $n_0 = N \frac{\Delta V}{V}$  Moleküle enthält, befindet, ist offenbar gleich  $\frac{\Delta V}{V} = \frac{n_0}{N}$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $n$  bestimmte Moleküle innerhalb  $\Delta V$  und die anderen außerhalb  $\Delta V$  (aber innerhalb  $V$ ) enthalten sind, drückt sich durch das Produkt  $p^n (1 - p)^{N - n}$  aus. Multipliziert man diesen Ausdruck mit  $\frac{N!}{n! (N - n)!}$ , so erhält man die Wahrscheinlichkeit

$$P_N^n = \frac{N!}{n! (N - n)!} p^n (1 - p)^{N - n} \quad (61)$$

einer solchen Verteilung der Moleküle, bei welcher  $n$  und nur  $n$  beliebige Moleküle sich gerade im Volumelement  $\Delta V$  befinden.

<sup>1)</sup> Für die betrachtete Schwingungsfrequenz.

Der Mittelwert irgend einer Funktion von  $n$  ist durch die Formel

$$|\overline{F(n)}| = \sum_{n=0}^N F(n) P_N^n \quad (61a)$$

gegeben.

Es gilt insbesondere  $1 = \sum_0^N P_N^n$ ; ferner

$$|\overline{n}| = \sum_1^N \frac{(N-1)! N p}{(N-1)! [(N-1)-(n-1)]} p^{n-1} (1-p)^{(N-1)-(n-1)} = N p \sum_{n=1}^N P_{N-1}^{n-1} = N p,$$

d. h.  $|\overline{n}| = n_0$  — wie selbstverständlich zu erwarten war.

In derselben Weise ergibt sich

$$|\overline{n(n-1)}| = \sum_{n=2}^N \frac{(N-2)! N(N-1) p^2}{(n-2)! [(N-2)-(n-2)]!} p^{n-2} (1-p)^{(N-2)-(n-2)} = N(N-1) p^2,$$

d. h.

$$|\overline{n^2}| - |\overline{n}| = n_0^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right),$$

und folglich

$$|(n - n_0)^2| = |\overline{n^2}| - 2|\overline{n}| n_0 + n_0^2 = |\overline{n^2}| - n_0^2 = n_0 \left(1 - \frac{n_0}{N}\right),$$

oder näherungsweise bei  $\frac{n_0}{N} \ll 1$ :

$$|(n - n_0)^2| = n_0. \quad (61b)$$

Es wird also nach (60b), wenn wir jetzt  $V = 1$  setzen:

$$|\varepsilon'^2| (\Delta V)^2 = \frac{(\varepsilon^0 - 1)^2}{N^2} n_0 = \frac{(\varepsilon^0 - 1)^2}{N} \Delta V,$$

und schließlich nach (60):

$$|\overline{|\Delta \mathfrak{E}'|^2}| = |\mathfrak{E}^0|^2 \frac{\pi^2 (\varepsilon^0 - 1)^2}{R^2 \lambda_0^4 N} \Delta V. \quad (62)$$

Diese Formel ist nicht ganz richtig; man kann nämlich leicht zeigen, daß das weggelassene Glied in  $\mathfrak{f}$  die longitudinale, d. h. zum Radiusvektor  $\mathfrak{R}$  parallele Komponente von  $\mathfrak{E}'$  genau kompensiert, ohne (in erster Annäherung) die dazu senkrechte Komponente zu beeinflussen. Um die endgültige Formel zu bekommen, muß man folglich  $\mathfrak{E}^0$  durch seine transversale Komponente  $\mathfrak{E}^0 - \mathfrak{R}_0$  ( $\mathfrak{E}^0 \cdot \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_0 \times (\mathfrak{E}^0 \times \mathfrak{R}_0)$ ) ersetzen ( $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R} : R$ ). Dies gibt:

$$|\overline{|\Delta \mathfrak{E}'|^2}| = \frac{\pi^2}{R^2} |\mathfrak{R}_0 \times (\mathfrak{E}^0 \times \mathfrak{R}_0)|^2 \frac{(\varepsilon^0 - 1)^2}{N \lambda_0^4} \Delta V. \quad (62a)$$

## 2. Elementare Bestimmung der von den Dichteschwankungen herrührenden Streustrahlung und ihrer Polarisation.

Die letzte zuerst von *Rayleigh* gegebene Formel läßt sich ganz elementar ableiten, wenn man die im Volumelement  $\Delta V$  befindlichen Moleküle

als einen *elementaren Oszillator* behandelt, der unter der Wirkung der äußeren oder primären elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  erzwungene Schwingungen ausführt.

Das (induzierte) elektrische Moment dieses Oszillators bezeichnen wir mit  $\mathfrak{P} \Delta V$ . Es bedeutet hier wie üblich  $\mathfrak{P}$  die elektrische Polarisation des Körpers an der betreffenden Stelle. Im Gegensatz aber zu unseren früheren Ausführungen, bei welchen die Schwankungserscheinungen oder die permanenten sehr kleinen Inhomogenitäten außer acht gelassen wurden, wollen wir jetzt die den Schwankungen der Konzentration und auch der Orientierung der Moleküle entsprechenden Schwankungen der Polarisation berücksichtigen.

Wir denken uns zunächst, der Einfachheit halber, daß die im Volumelement  $\Delta V$  befindlichen  $n$  Moleküle dieselbe Orientierung und folglich dasselbe (induzierte) Moment  $\mathfrak{p}$  haben; diese Orientierung kann beim Übergang von einem Volumelement zum nächsten ganz beliebig schwanken, ebenso wie die Konzentration  $n : \Delta V$ . Den Mittelwert von  $\mathfrak{p}$  für alle Orientierungen, *bei festgehaltener Feldstärke*  $\mathfrak{E}^0$ , bezeichnen wir mit  $\mathfrak{p}^0$  oder  $|\overline{\mathfrak{p}}|$ , und seine Schwankung  $\mathfrak{p} - \mathfrak{p}^0$  mit  $\mathfrak{p}'$ .

Dementsprechend setzen wir

$$\mathfrak{P} \Delta V = \mathfrak{P}^0 \Delta V + \mathfrak{P}' \Delta V = n^0 \mathfrak{p}^0 + n' \mathfrak{p}^0 + n^0 \mathfrak{p}' + n' \mathfrak{p}',$$

woraus folgt, wenn man das Produkt  $n' \mathfrak{p}'$  vernachlässigt

$$\mathfrak{P}' \Delta V = n' \mathfrak{p}^0 + n^0 \mathfrak{p}'. \quad (63)$$

Die mittlere Polarisation  $\mathfrak{P}^0 = |\overline{\mathfrak{P}}^0|$  bestimmt die Fortpflanzung der „regelmäßigen“ primären Wellen, während ihre Schwankung  $\mathfrak{P}'$  die Energie der zerstreuten Wellen charakterisieren muß.

Nach der Formel (35) auf S. 150 des ersten Bandes ist die durch einen elementaren Oszillator mit dem Moment  $\mathfrak{P}' \Delta V = \mathfrak{P}'_0 \Delta V e^{-i\omega t}$  in einem gegenüber der Wellenlänge sehr großen Abstand  $R$  erzeugte elektrische Feldstärke durch die Formel

$$\Delta \mathfrak{E}' = \mathfrak{R}_0 \times \frac{(\mathfrak{P}' \times \mathfrak{R}_0) \omega^2}{R} e^{ikR} \Delta V \quad \left( \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon} \right)$$

gegeben.

Die Projektion von  $\Delta \mathfrak{E}'$  auf die Richtung eines beliebigen zu  $\mathfrak{R}$  senkrechten Einheitsvektors  $\mathfrak{q}$  ist folglich gleich

$$\Delta E'_q = - \frac{4\pi^2 e^{ikR}}{\lambda_0^3 R} P'_q \Delta V.$$

Man hat also

$$|\overline{\Delta E'_q}|^2 = \frac{16\pi^4}{\lambda_0^4 R^2} |P'_q|^2 (\Delta V)^2. \quad (63a)$$

Nun gilt nach (63), wegen der Unabhängigkeit der Konzentrations- und Orientierungsschwankungen:

$$|\overline{P'_q}|^2 (\Delta V)^2 = n'^2 |\overline{\mathfrak{p}^0}|^2 + (n^0)^2 |\overline{\mathfrak{p}'}|^2. \quad (63b)$$

Wenn man die letzteren außer acht läßt und nach (60a)

$$p^0 = \alpha \mathfrak{E}^0 = \frac{\epsilon^0 - 1}{4\pi N} \mathfrak{E}^0 \tag{63c}$$

setzt, so ergibt sich, mit Rücksicht auf (61b):

$$|\overline{P'_q}|^2 (\Delta V)^2 = \frac{(\epsilon^0 - 1)^2}{16\pi^2 N^2} |E_q^0|^2 n_0 \quad (n_0 = N\Delta V)$$

und dementsprechend:

$$|\overline{\Delta E'_q}|^2 = \frac{\pi^2 |E_q^0|^2 (\epsilon^0 - 1)^2}{R^2 \lambda_0^4 N} \tag{64}$$

Diese Formel ist gleichbedeutend mit (62a). Sie erklärt die Haupttatsachen der Lichtzerstreuung in Gasen und insbesondere die blaue Farbe des Himmels, d. h. des durch die Erdatmosphäre zerstreuten Sonnenlichtes. Die Wellenlänge des blauen Lichtes ist bekanntlich etwa zweimal kleiner als die des roten. Da die Größe  $\epsilon_0 - 1$  für Luft keine beträchtliche Änderung im sichtbaren Spektralgebiet aufweist, muß die Energie der Streustrahlung im Falle des blauen Lichtes etwa 16mal größer sein als im Falle des roten.

Es folgt ferner aus der Formel (64), daß auch bei unpolarisierten primären Strahlen die zerstreuten Strahlen teilweise linear polarisiert sein müssen. — Es sei nämlich  $X_1$  die Richtung der primären Strahlen und  $\Theta$  der „Streuwinkel“ ( $X_1, \mathfrak{R}$ ). Wir denken uns die zweite Achse in der  $(X_1, R)$ -Ebene gezogen und zerlegen den zu  $X$  senkrechten Vektor  $\mathfrak{E}^0$  in seinen Komponenten  $E_2^0$  und  $E_3^0$  (Abb. 20). Die Komponenten des Vektors  $\mathfrak{E}'$ , der senkrecht zu  $R$  gerichtet ist, parallel und senkrecht zur  $(1, 2)$ -Ebene  $E'_{11}$ , und  $E'_3$  stehen zueinander in dem Verhältnis

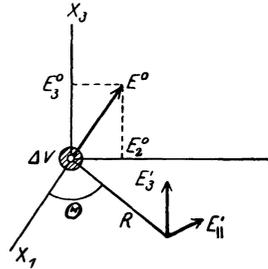


Abb. 20.

$$E_2^0 \cos \Theta : E_3^0$$

und die entsprechenden Energien in dem Verhältnis

$$E_2^{0^2} \cos^2 \Theta : E_3^{0^2}$$

wie es sich sofort aus (64) ergibt, wenn man den Vektor  $q$  parallel der  $(1, 2)$ -Ebene bzw. parallel der 3-Achse ansetzt.

Die unpolarisierten Strahlen sind durch den Umstand gekennzeichnet, daß die Quadrate der Komponenten von  $E^0$  in allen zu  $X_1$  senkrechten Richtungen durchschnittlich denselben Wert haben. Setzt man also  $\overline{E_2^{0^2}} = \overline{E_3^{0^2}} = \frac{1}{2} \overline{E^{0^2}}$ , so bekommt man für das obige Verhältnis einfach  $\cos^2 \Theta : 1$  und dementsprechend für das Verhältnis von  $\overline{(\Delta E')^2}$  zu  $\overline{E^{0^2}}$  („Streuungskoeffizient“) den Wert

$$s = \frac{\pi^2 (\epsilon^0 - 1)^2}{R^2 \lambda_0^4 N} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \tag{64a}$$

Bei  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  muß  $E'_{||}$  verschwinden, unabhängig von dem Charakter der primären Schwingungen: die sekundären Schwingungen sind also in diesem Fall immer linear polarisiert.

3. Die von den Orientierungsschwankungen herrührende Streustrahlung und ihre depolarisierende Wirkung.

Tatsächlich aber (besonders deutlich bei dem Himmelslicht) wird auch in diesem Fall eine unvollständige Polarisation, d. h. eine nicht-verschwindende  $E'_2$ -Komponente beobachtet. Diese Tatsache (die sogenannte „Depolarisation“ des zerstreuten Lichtes) erklärt sich durch die oben erwähnten Orientierungsschwankungen der Moleküle in Verbindung mit ihrer *optischen Asymmetrie*. Denn das elektrische Moment eines nicht kugelsymmetrischen Moleküls muß im allgemeinen eine von der primären Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  verschiedene Richtung haben und speziell eine nicht verschwindende longitudinale Komponente  $p_1$ .

Die Komponenten des Polarisationstensors  ${}^2\alpha$  eines Moleküls, bezogen auf das raumfeste Achsensystem, seien  $\alpha_{ik}$ , und auf die mit dem Molekül festgebundenen Symmetrieachsen ( $X'_1, X'_2, X'_3$ )  $\alpha'_{ii} = \alpha'_i, \alpha'_{ik} = 0$  (bei  $i \neq k$ ).

Es gilt dann in erster Annäherung

$$p_i = \sum_k \alpha_{ik} E_k \cong \sum_k \alpha_{ik} E_k^0.$$

Daraus bekommen wir:

$$p_i^0 = \sum_k \alpha_{ik} E_k^0,$$

d. h. wegen  $|\alpha_{11}| = |\alpha_{22}| = |\alpha_{33}| = \frac{1}{3}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) \equiv \alpha$  und  $|\alpha_{ik}| = 0$  bei  $i \neq k$ :

$$p_i^0 = p_i^0 = \alpha E_i^0 \tag{65}$$

und folglich  $p_i^0 = 0$ .

Wir haben ferner:

$$|p_i^2| = |(p_i - p_i^0)^2| = p_i^2 - p_i^0{}^2 = \sum_k \sum_l |\alpha_{ik} \alpha_{il}| E_k^0 E_l^0 - \alpha^2 E_i^0{}^2, \tag{65a}$$

mit

$$\alpha_{ik} \alpha_{il} = \sum_{i'} \sum_{k'} \sum_{l'} \alpha'_{i'k'} \alpha'_{i'l'} |\gamma_{i'i} \gamma_{k'k} \gamma_{i'j} \gamma_{l'l}|,$$

d. h.

$$\alpha_{ik} \alpha_{il} = \sum_{i'} \sum_{j'} \alpha'_{i'k} \alpha'_{i'j} |\gamma_{i'i} \gamma_{k'k} \gamma_{i'j} \gamma_{l'l}| \tag{65b}$$

wo  $\gamma_{i'i} = \cos(X_i, X'_{i'})$  ist.

Wir setzen nun der Übersichtlichkeit wegen

$$\gamma_{i1} = a_i, \quad \gamma_{i2} = b_i, \quad \gamma_{i3} = c_i,$$

wo a, b, c die Koordinatenvektoren des Systems  $X'$  bezeichnen, und

unterscheiden bei der Bestimmung der obigen Mittelwerte die folgenden zwei Fälle:

1.  $i' = j' = 1$ .

$$|\overline{\gamma_{i'v} \gamma_{kv} \gamma_{i'j'} \gamma_{lj'}}| = |\overline{a_i^2 a_k a_l}|.$$

Mittelwerte dieser Art sind schon im ersten Bande (S. 238) berechnet worden. Es gilt nämlich:

$$|\overline{a_1^4}| = \frac{1}{5}, \quad |\overline{a_1^2 a_2^2}| = \frac{1}{15}, \quad \overline{a_1^2 a_2 a_3} = 0.$$

2.  $i' = 1, j' = 2$ .

$$|\overline{\gamma_{i'v} \gamma_{kv} \gamma_{i'j'} \gamma_{lj'}}| = |\overline{a_i a_k b_i b_l}|.$$

Bei der Berechnung dieser Mittelwerte muß berücksichtigt werden, daß  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_k a_k b_k = 0$  ist. Daraus folgt (durch Quadrierung):

$$\sum_i \sum_k a_i a_k b_i b_k = 0, \text{ und ferner}$$

$$3 |\overline{a_1^2 b_1^2}| + 6 |\overline{a_1 a_2 b_1 b_2}| = 0,$$

d. h.

$$|\overline{a_1^2 b_1^2}| + 2 |\overline{a_1 a_2 b_1 b_2}| = 0$$

Nun ist der Mittelwert von  $a_1^2 b_1^2$  offenbar identisch mit dem Mittelwert des Produktes  $a_a^2 a_b^2$ , wo  $\mathbf{b}$  den mit der  $X_1$ -Achse gleichgerichteten Einheitsvektor bedeutet, wenn wir die Achsen  $X'_1$  und  $X'_2$  festhalten und der  $X_1$ -Achse alle möglichen Orientierungen angeben. Da es sich dabei nur von ihrer relativen Richtung handelt, so wird

$$|\overline{a_1^2 b_1^2}| = |\overline{a_1^2 a_2^2}| = \frac{1}{15}$$

und folglich

$$|\overline{a_1 a_2 b_1 b_2}| = -\frac{1}{30}.$$

Bei  $k \neq l$  muß der betrachtete Mittelwert verschwinden: denn sonst würde er bei Umkehrung einer der Koordinatenrichtungen sein Vorzeichen wechseln.

Es wird also nach (65b)

$$\left. \begin{aligned} |\alpha_{ik} \alpha_{il}| &= 0 \quad \text{bei } k \neq l, \\ |\alpha_{ii}^2| &= \frac{1}{5} (\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2) + \frac{2}{15} (\alpha_2' \alpha_3' + \alpha_3' \alpha_1' + \alpha_1' \alpha_2') \\ |\alpha_{ik}^2| &= \frac{1}{15} (\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2) - \frac{1}{15} (\alpha_2' \alpha_3' + \alpha_3' \alpha_1' + \alpha_1' \alpha_2') \end{aligned} \right\} (k \neq i) \tag{65c}$$

und schließlich nach (65a)

$$|\overline{p_i'^2}| = \sum_k \left( |\overline{\alpha_{ik}^2}| - \delta_{ik} \alpha^2 \right) |E_k^0|^2. \tag{65d}$$

Der von den Richtungsschwankungen der Moleküle bedingte Anteil der gestreuten Lichtenergie ist also bestimmt durch

$$|\overline{\Delta E'_i}|^2 = \frac{16\pi^4}{R^2\lambda_0^4} (n^0)^2 \sum_k (|\overline{\alpha_{ik}^2}| - \delta_{ik} \alpha^2) |E_k^0|^2.$$

Diese Formel bedarf aber noch der folgenden Berichtigung. Wir haben anfangs angenommen, daß die im Volumelement  $\Delta V$  befindlichen Moleküle dieselbe Orientierung haben. Da sie tatsächlich sich ganz unabhängig voneinander drehen können, muß man diese Volumelemente so klein wählen, daß sie nur je ein Molekül enthalten (von den Dichteschwankungen können wir dabei absehen). Mit anderen Worten, es muß in der obigen Formel  $n^0 = 1$  gesetzt werden. Um dann den von einer beliebigen Anzahl  $n^0 = N\Delta V$  Moleküle herrührenden Beitrag zu  $|E'_i|^2$  zu berechnen, muß man den entsprechenden Ausdruck mit  $n^0$  (und nicht  $n^{02}$ ) multiplizieren.

Führt man noch statt des ursprünglichen, sich auf ein Molekül beziehenden Polarisationsensors  ${}^2\alpha$  die entsprechende fiktive Suszeptibilität  ${}^2\kappa = N{}^2\alpha$  (die einer bestimmten Orientierung aller in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle entspricht), so ergibt sich die folgende endgültige Formel für die Energie der „Orientierungsstreuung“:

$$|\overline{\Delta E'_i}|^2 = \frac{16\pi^4}{R^2\lambda_0^4 N} \sum_k (|\overline{\kappa_{ik}^2}| - \delta_{ik} \kappa_0^2) |E_k^0|^2 \cdot \Delta V. \quad (66)$$

Es sei bemerkt, daß die letztere gewöhnlich nur einige Prozente der von der Dichteschwankungen bedingten Streustrahlungsenergie beträgt. In dem Fall nicht polarisierter primärer Strahlen hat man bei  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  (siehe Abb. 20) mit Rücksicht auf  $|\overline{\kappa_{12}^2}| = |\overline{\kappa_{13}^2}|$ ,  $E_1^0 = 0$  und  $|E_2^0|^2 = |E_3^0|^2 = \frac{1}{2} |\mathbb{E}^0|^2$

$$|\overline{\Delta E'_1}|^2 = \frac{16\pi^4}{R^2\lambda_0^4 N} |\overline{\kappa_{12}^2}| |\mathbb{E}^0|^2 \Delta V.$$

Das Verhältnis dieser „longitudinalen“ Schwingungsenergie, die nur von den Richtungsschwankungen abhängen kann, zur „transversalen“  $|\overline{\Delta E'_3}|^2$  die hauptsächlich von den Dichteschwankungen herrührt, bezeichnet man als den „Depolarisationsgrad“ der gestreuten Strahlung. Man erhält also für diesen Depolarisationsgrad  $\delta$  nach (64a), wenn man noch in den letzten Formeln  $\varepsilon^0 - 1$  durch  $\frac{4\pi}{3} N(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3)$  ersetzt und den Orientierungsbeitrag zu  $|\overline{\Delta E'_3}|^2$  vernachlässigt:

$$\delta \leq \frac{|\overline{\kappa_{12}^2}|}{2\kappa_0^2} = \frac{3}{10} \frac{\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 - \alpha_2'\alpha_3' - \alpha_3'\alpha_1' - \alpha_1'\alpha_2'}{(\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3')^2}. \quad (66a)$$

Bei rotationssymmetrischen Molekülen, die durch die Gleichheit von  $\alpha'_2$  und  $\alpha'_3$  charakterisiert werden können, reduziert sich diese Formel auf

$$\delta \cong \frac{3}{10} \frac{(\alpha'_1 - \alpha'_2)^2}{(\alpha'_1 + 2\alpha'_2)^2} \tag{66b}$$

Die experimentelle Bestimmung von  $\delta$  erlaubt es die optischen Eigenschaften solcher Moleküle vollständig festzustellen und dadurch mittels der in § 1 Kap. III skizzierten Theorie der elektrischen oder optischen Anisotropie der Moleküle den Abstand zwischen den sie bildenden (und als kugelsymmetrisch vorausgesetzten) Atomen zu berechnen.

#### 4. Dichteschwankungen in flüssigen und festen Körpern.

Die dargelegte Theorie, die wir für den Fall gasförmiger Körper entwickelt haben, läßt sich ohne Schwierigkeit auf den Fall von Flüssigkeiten verallgemeinern. Sofern es sich um die Richtungsschwankungen handelt, genügt es, in den Formeln (65), (65a) und folg. die mittlere primäre Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  durch die entsprechende effektive Feldstärke  $\mathfrak{E}^0 + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{P}^0 = \left(1 + \frac{4\pi}{3} \kappa_0\right) \mathfrak{E}^0$  zu ersetzen. Bei den Dichteschwankungen muß man noch die Formel (61b) berichtigen, denn die letztere ist nur in dem Falle gültig, daß die Moleküle sich ganz unabhängig voneinander bewegen. Diese Bedingung ist aber in bezug auf die Translationsbewegung der Flüssigkeitsmoleküle nicht erfüllt.

Um die exaktere Formel für  $|n'^2|$  zu gewinnen, betrachten wir zunächst nicht die veränderliche Anzahl Moleküle  $n$  in einem gegebenen Volum, sondern das veränderliche Volum  $V$ , welches von einer gegebenen Anzahl Moleküle  $n^0$  eingenommen wird. Seine mittlere Größe sei  $V^0$  und seine Schwankung  $V - V^0 = V'$ .

Die Arbeit, welche bei einer Vergrößerung des betrachteten Volums von  $V^0$  bis  $V^0 + V'$  durch die äußeren Druckkräfte geleistet wird, ist offenbar gleich  $W = - \int_0^{V'} (p - p^0) dV'$ , wo  $p$  den Druck und  $p^0$  seinen Mittelwert für  $V = V^0$  bedeutet. Entwickelt man nun die Differenz  $p - p^0$  nach Potenzen von  $V'$

$$p - p^0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0 V' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)^0 V'^2 + \dots,$$

so ergibt sich

$$W = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0 V'^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)^0 V'^3 - \dots \tag{67}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Volumschwankung im Intervall  $dV'$  liegt, ist nach dem schon vielfach benutzten Boltzmannschen Prinzip proportional zu  $e^{-\frac{W}{kT}} dV'$ . Wir bekommen also für das mittlere

Schwankungsquadrat die folgende Formel:

$$|\overline{V'^2}| = \int V'^2 e^{-\frac{W}{kT}} dV' : \int e^{-\frac{W}{kT}} dV'.$$

Man kann hier ohne merkliche Fehler die Integrationsgrenzen ins Unendliche ( $V' = \pm \infty$ ) verschieben. Beschränkt man sich auf das erste Glied von (67), so wird mit der Abkürzung  $-\frac{1}{2kT} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0 = \beta > 0$

$$\begin{aligned} |\overline{V'^2}| &= \int_{-\infty}^{+\infty} V'^2 e^{-\beta V'^2} dV' : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta V'^2} dV' = -\frac{\partial}{\partial \beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta V'^2} dV' : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta V'^2} dV' \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \lg \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{1}{2\beta}, \end{aligned}$$

d. h.

$$|\overline{V'^2}| = \frac{kT}{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0}. \quad (67a)$$

Die Anzahl  $n$  Moleküle, die im Volum  $V^0$  eingeschlossen bleiben, ist offenbar gleich  $n = \frac{n^0 V^0}{V}$ . Ihre Schwankung drückt sich folglich durch

$$n' = n - n^0 = -n^0 \frac{V - V^0}{V^0} \cong -n^0 \frac{V'}{V^0} = -NV'$$

und der Mittelwert ihres Quadrats durch

$$|\overline{n'^2}| = N^2 |\overline{V'^2}|,$$

d. h. nach (67a)

$$|\overline{n'^2}| = \frac{N^2 kT}{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0} = \frac{NkT}{V^0 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0} \cdot n^0. \quad (67b)$$

Es bedeutet hier  $-V^0 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0$  den Kompressibilitätsmodul der betrachteten Flüssigkeit. — Diese Formel muß selbstverständlich auch im Falle von Gasen gültig bleiben. Setzt man in der Tat  $pV = n^0 kT$ , so wird  $-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)^0 = \frac{n^0 kT}{V^2} = \frac{NkT}{V^0}$  und folglich  $|\overline{n'^2}| = n^0$  — in Übereinstimmung mit (61b).

In der Nähe der kritischen Temperatur verschwindet die erste und zweite Ableitung von  $p$  nach  $V$  und die Entwicklung (67) beginnt mit dem Gliede vierter Ordnung in  $V'$ . Man bekommt dabei außerordentlich starke Dichteschwankungen und dementsprechend eine außerordentlich intensive Lichtzerstreuung (sogenannte „Opaleszenzerscheinung“).

## 5. Die durch die Streuung der primären Wellen bedingte scheinbare Absorption (Streudämpfung).

Wir müssen noch zum Schluß die schon früher erwähnte Schwächung der primären Strahlen (oder Wellen) betrachten, die infolge ihrer Zer-

streuung stattfindet. Zu diesem Zweck berechnen wir zunächst die Energie, welche in der Form zerstreuter Wellen aus einem gegebenen Volumelement  $\Delta V$  pro Zeiteinheit ausgestrahlt wird. Diese Energiestrahlung drückt sich durch das Integral  $U' \Delta V = \oint \overline{\Delta K'_n} dS$ , wo  $\overline{\Delta \mathfrak{K}} = \frac{c}{4\pi} \overline{\Delta \mathfrak{E}' \times \Delta \mathfrak{H}'}$  ( $= \frac{c}{4\pi} \overline{\Delta \mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{H}^0}$  ist<sup>1)</sup>). Wählt man für  $S$  die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $R$  und dem Mittelpunkt  $O$  in  $\Delta V$ , so bekommt man nach (62a) — die von den Richtungsschwankungen bedingte Streustrahlung können wir außer acht lassen —

$$U' \Delta V = c \pi^2 |\mathfrak{E}^0|^2 \frac{(\epsilon - 1)^2}{N \lambda_0^4} \overline{\sin^2 \Theta} \Delta V,$$

wo  $\Theta$  den Winkel zwischen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{E}^0$  bedeutet (der Einfachheit halber denken wir uns die  $\mathfrak{E}^0$ -Schwingungen als linear polarisiert) und  $\overline{\sin^2 \Theta}$  den Mittelwert von  $\sin^2 \Theta$  für alle Richtungen von  $\mathfrak{R}$ . Nun ist  $\overline{\sin^2 \Theta} = 1 - \overline{\cos^2 \Theta} = \frac{2}{3}$ ; die pro Zeit- und Volumeinheit gestreute Energie ist folglich gleich

$$U' = \frac{2}{3} \pi^2 c |\mathfrak{E}^0|^2 \frac{(\epsilon_0 - 1)^2}{N \lambda_0^4}. \tag{68}$$

Diese Energie wird den primären Wellen entzogen; sie kann aber, wenn die letzteren sich nach allen Richtungen (z. B. in der Form von Kugelwellen) fortpflanzen, sich mit der primären Schwingungsenergie wieder verschmelzen. Sind aber die primären Wellen streng gerichtet, d. h. *eben*, oder bilden sie ein enges divergierendes Strahlenbündel, so muß ihre Energie beim Fortschreiten im betrachteten Körper, um den der Größe  $U'$  entsprechenden Betrag abnehmen. Dieser Betrag läßt sich leicht mittels der Gleichung

$$\oint K'_n dS + \int \overline{K'_n} dS = 0$$

bestimmen, welche die Tatsache ausdrückt, daß die Energie der Schwingungen an jeder Stelle sich durchschnittlich mit der Zeit nicht ändert. Die letzte Gleichung kann man in der Form

$$\operatorname{div} \mathfrak{K}^0 + \operatorname{div} \overline{\mathfrak{K}'^n} = 0 \tag{68a}$$

schreiben. Nun gilt offenbar, nach der Definition der Größe  $U'$ :

$$\operatorname{div} \overline{\mathfrak{K}'^n} = U'$$

und folglich

$$\operatorname{div} \mathfrak{K}^0 = -U'.$$

---

<sup>1)</sup> Es handelt sich hier nicht nur um räumliche, sondern auch um *zeitliche* Mittelwerte; die entsprechenden Querstriche sind aber weggelassen.

Dies gibt im Falle ebener Wellen, die sich in der Richtung der  $X$ -Achse fortpflanzen,

$$\frac{\partial K^0}{\partial x} = -U',$$

d. h. wegen  $K^0 = \frac{c}{4\pi} |E^0|^2$ , nach (68):

$$\frac{\partial K^0}{\partial x} = -s K^0 \quad (68b)$$

mit

$$s = \frac{8\pi^3 (\epsilon_0 - 1)^2}{3 N \lambda_0^4}. \quad (68c)$$

Die Intensität der primären Wellen muß folglich in der  $x$ -Richtung exponentiell abnehmen nach der Formel

$$K^0 \sim e^{-sx},$$

als ob eine wahre Dämpfung vorhanden wäre. Der Koeffizient  $s$  wird gewöhnlich als Streukoeffizient oder Streudämpfungskoeffizient bezeichnet.

## § 7. Behandlung der Wellenfortpflanzung in homogenen Körpern nach der direkten Methode der Fernwirkungstheorie.

### 1. Vorbemerkungen.

Die im letzten Paragraphen benutzte direkte Methode der Bestimmung der gestreuten Strahlung kann auch auf die primären Wellen angewandt werden. Man bekommt dabei selbstverständlich dieselben Resultate, die wir in den vorhergehenden Paragraphen mittels der indirekten Methode, d. h. durch Integration der makroskopischen Feldgleichungen aufgestellt haben; man erhält aber gleichzeitig ein tieferes Einsehen in den physikalischen Sinn dieser Resultate und das *Wesen* der elektromagnetischen Vorgänge, die sie formal wiedergeben (vgl. Kap. I, § 1).

Wir wollen uns auf den einfachsten Fall der Fortpflanzung ebener sinusoidaler Wellen in vollkommen homogenen Körpern beschränken. Dabei werden wir die Moleküle als quasielastische Oszillatoren behandeln, die unter der Wirkung der effektiven elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  erzwungene Schwingungen ausführen. Das durch diese Schwingungen erzeugte „sekundäre“ Feld  $\mathfrak{E}'$  bestimmen wir auf dieselbe Weise, wie dies oben für das Feld der gestreuten Wellen getan wurde. Es soll aber jetzt die Tatsache berücksichtigt werden, daß diese sekundären elektrischen Schwingungen, im Gegensatz zu den zerstreuten, mit den primären  $\mathfrak{E}^0$ -Schwingungen *kohärent* (interferenzfähig) sind. Die „primären“ und die „sekundären“ Schwingungen müssen sich folglich vollkommen verschmelzen, so daß die resultierenden  $\mathfrak{E}$ -Schwingungen nur durch eine sozusagen „geschichtliche“ Analyse in die obigen zwei Anteile zerlegt werden können.

Zwischen dem jetzt betrachteten Fall und dem früher untersuchten Fall der gestreuten Wellen bestehen noch die folgenden Unterschiede.

*Erstens* haben wir die gestreuten Wellen als *sehr schwach* angenommen und dementsprechend die von ihnen erzeugten „tertiären“ Schwingungen, d. h. gestreuten Wellen zweiter (und höherer) Ordnung, außer acht gelassen. Dies ist bei der Kohärenz der sekundären und der primären Schwingungen nicht mehr erlaubt. Wir müssen vielmehr in diesem Fall neben den sekundären  $\mathcal{E}'$ -Schwingungen auch tertiäre  $\mathcal{E}''$ -Schwingungen (die gestreuten Wellen zweiter Ordnung entsprechen) usw. in Betracht ziehen.

*Zweitens* müssen wir uns vorstellen, daß alle diese Schwingungen (oder Wellen) *sich auf dieselbe Weise fortpflanzen wie im leeren Raum*. In der Tat, vom mikroskopischen Standpunkte aus stellt ein materieller Körper nichts anderes dar, als ein Raumbiet, wo eine sehr große Anzahl praktisch punktförmiger Elektronen enthalten ist. Die Wechselwirkung zwischen diesen Elektronen geschieht nach Gesetzen, die von ihrer Konzentration ganz unabhängig sind, und die wir im ersten Bande eingehend untersucht hatten — und zwar in der Form von retardierten Fernwirkungen, die sich im ganzen Raum mit der „kritischen“ Geschwindigkeit  $c$  fortpflanzen. Dabei sind die mechanischen Schwingungen jedes Elektrons oder Atoms zu gleicher Zeit als *Folge* und als *Ursache* der elektrischen (oder elektromagnetischen) Kraftschwingungen anzusehen — nämlich als Folge von Kraftschwingungen  $n$ -ter Ordnung und als Ursache von Kraftschwingungen  $(n + 1)$ ter Ordnung.

Dieses außerordentlich komplizierte mikroskopische Bild der Fortpflanzung eines elektromagnetischen Schwingungsvorgangs in einem materiellen Körper steht in einem auffallenden Gegensatz mit dem außerordentlich einfachen Bild der makroskopischen Theorie, die behauptet, daß ebene harmonische Wellen sich auf dieselbe Weise wie im leeren Raum, aber mit einer von  $c$  verschiedenen Geschwindigkeit (und eventuell einer Dämpfung) fortpflanzen.

Man muß aber nicht vergessen, erstens daß dieses einfache Bild nur im Falle *streng harmonischer* Schwingungen zutreffend ist, und zweitens daß die makroskopische Theorie *nicht dasselbe Feld* wie die mikroskopische betrachtet, sondern ein sich aus dem letzteren durch Ausglattung der mikroskopischen Inhomogenitäten (Mittelwertbildung) ergebendes Feld.

Wir werden sofort zeigen, daß auch die dem Standpunkt der mikroskopischen Theorie entsprechende direkte Methode in dem obigen Spezialfall dieselben Resultate wie die makroskopische Theorie, und zwar in einer kaum mehr komplizierten Weise liefert.

2. Die durch eine den primären Wellen parallele Materieschicht bedingte sekundäre Strahlung.

Wir stellen uns zunächst ebene harmonische Wellen vor, die sich im leeren Raum in der Richtung der  $X$ -Achse fortpflanzen. Ihre Frequenz sei  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  und die Wellenlänge  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ . Die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  soll sich folglich durch die Formel

$$\mathfrak{E}^0 = \mathfrak{E}_0^0 e^{-i\omega(t-\frac{x}{c})} = \mathfrak{E}_0^0 e^{i(k_0 x - \omega t)} \quad \left(k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\right) \quad (69)$$

ausdrücken.

Wir denken uns ferner in der Ebene  $x = 0$  oder genauer zwischen den Ebenen  $x = -\frac{l}{2}$  und  $x = +\frac{l}{2}$  eine unendlich dünne Schicht irgendeiner homogenen Substanz eingebracht. Die Anwesenheit dieser Schicht kann die Fortpflanzung der betrachteten Wellen garnicht beeinflussen; sofern aber die darin eingeschlossenen Elektronen schwingungsfähig sind, müssen sie erzwungene Schwingungen derselben Frequenz ausführen und auf diese Weise kohärente sekundäre elektromagnetische Wellen erzeugen. Da die Schicht unendlich dünn ist, kann man die Rückwirkung dieser Wellen auf die Elektronen und die damit verknüpften tertiären Schwingungen vernachlässigen. Die Bewegung der Elektronen muß folglich ausschließlich durch die primären  $\mathfrak{E}^0$ -Schwingungen bedingt werden und dieselbe Phase in der ganzen  $x = 0$  Ebene haben. Wir wollen sie einfach durch die Größe des pro Flächeneinheit induzierten elektrischen Momentes  $\mathfrak{p}$  charakterisieren, oder durch die elektrische Polarisation der Substanz  $\mathfrak{P}$ , wobei  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot l$  ist<sup>1)</sup>. Die Abhängigkeit dieser Größen von der Zeit muß offenbar durch die Formel

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 e^{-i\omega t}$$

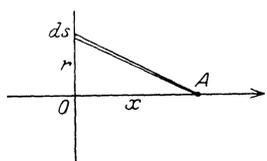


Abb. 21.

dargestellt werden.

Die sekundäre elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}'$  läßt sich am einfachsten bestimmen, wenn man zunächst das entsprechende Polarisationspotential  $\mathfrak{Z}'$  nach der üblichen Formel

$$\mathfrak{Z}' = \int \mathfrak{p} \left( \frac{t-R}{R} \right) dS = \mathfrak{p} \cdot e^{-i\omega t} \int \frac{e^{ik_0 R}}{R} dS$$

berechnet.

Wir wählen den Aufpunkt  $A$  auf der positiven Seite der Schicht und bezeichnen seinen Abstand von der letzteren mit  $x$  (Abb. 21). Das

<sup>1)</sup> Die eventuell vorhandene magnetische Polarisation lassen wir der Einfachheit halber außer acht, d. h. behandeln den betreffenden Körper als vollkommen unmagnetisch. Es wäre nicht schwierig, auch die magnetische Polarisation zu berücksichtigen (s. unten).

Flächenelement  $dS$  sei ein Kreisring mit den Radien  $r$  und  $r + dr$  und dem Mittelpunkt im Schnittpunkte  $O$  der  $X$ -Achse mit der Schichtebene. Es wird also

$$dS = 2\pi r dr = \pi d r^2,$$

oder mit Rücksicht auf  $r^2 = R^2 - x^2$

$$dS = \pi dR^2 = 2\pi R dR.$$

Wir haben folglich

$$\int \frac{e^{ik_0 x}}{R} dS = 2\pi \int_x e^{ik_0 R} dR = -\frac{2\pi}{ik_0} e^{ik_0 R} + \text{konst.}$$

Dieses Integral wird, wenn man die Schicht als unbegrenzt betrachtet, d. h. die obere Grenze von  $R$  gleich  $\infty$  setzt, unbestimmt. Dies ist aber für die Bestimmung von  $\mathcal{E}'$  ganz belanglos, denn sofern die in der vorhergehenden Formel auftretende Konstante von  $x$  (jedenfalls näherungsweise) unabhängig ist, muß sie bei Differentiation von  $\mathfrak{Z}'$  ausfallen. Wir können also

$$\mathfrak{Z}' = -\frac{2\pi}{ik_0} \mathfrak{p}_0 e^{i(k_0 x - \omega t)} \tag{69a}$$

setzen.

Daraus ergibt sich nach der bekannten Formel

$$\mathcal{E}' = \text{rot rot } \mathfrak{Z}'$$

mit Rücksicht auf

$$\text{rot } \mathfrak{p}_0 e^{ikx} = \nabla e^{ik_0 x} \times \mathfrak{p}_0 = ik_0 \mathfrak{n} \times \mathfrak{p}_0 e^{ik_0 x},$$

wo  $\mathfrak{n}$  einen Einheitsvektor in der  $X$ -Richtung bedeutet:

$$\mathcal{E}' = -2\pi i k_0 \cdot \mathfrak{n} \times (\mathfrak{n} \times \mathfrak{p}_0) e^{i(k_0 x - \omega t)}$$

oder wenn wir die zu  $x$  senkrechte Komponente von  $\mathfrak{p}$  mit  $\mathfrak{p}_r$  bezeichnen:

$$\mathcal{E}' = 2\pi i k_0 \mathfrak{p}_0 r e^{i(k_0 x - \omega t)} = 2\pi i k_0 \mathfrak{p}_r \left( t - \frac{x}{c} \right). \tag{69b}$$

Diese Formel läßt sich auch in der Gestalt schreiben

$$\mathcal{E}' = -\frac{2\pi}{c} \dot{\mathfrak{p}}_r \left( t - \frac{x}{c} \right) \quad \left( \dot{\mathfrak{p}} = \frac{d}{dt} \mathfrak{p} \right). \tag{69c}$$

Die sekundäre elektrische Feldstärke ist also proportional der ersten Ableitung der Polarisation nach der Zeit, d. h. der *Geschwindigkeit* der Elektronen, und ist vom Abstände  $x$  des Aufpunktes von der betrachteten Schicht nur insofern abhängig, als die für  $\mathcal{E}'(t, x)$  maßgebende

Polarisation der effektiven Zeit  $t' = t - \frac{x}{c}$  entspricht. Die sekundären elektrischen Schwingungen pflanzen sich also in der positiven  $x$ -Richtung auf dieselbe Weise wie die primären, d. h. in der Gestalt eines ebenen sinusoidalen Wellenzuges. Zu gleicher Zeit müssen sie sich aber auch in der negativen  $x$ -Richtung, und zwar in genau derselben Weise fortpflanzen.

Zum Vergleich wollen wir noch auf den Umstand hinweisen, daß die von einem Element  $dS$  der Schicht in der Nähe des Punktes  $O$  in  $A$  herrührende elementare Feldstärke gleich

$$d\mathfrak{E}' = -\frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{p}}_r \left( t - \frac{x}{c} \right) dS$$

ist [vgl. (31) S. 144, Bd. I]. Sie ist also der zweiten Ableitung der Polarisation nach der Zeit, d. h. der *Beschleunigung* der Elektronen, proportional, und außerdem dem Abstände  $x$  umgekehrt proportional<sup>1)</sup>.

### 3. Angenäherte Form der Gesetze der Wellenfortpflanzung in homogenen Körpern und ihre anschauliche Deutung.

Wenn wir die sich in der negativen Richtung fortpflanzenden  $E'$ -Wellen außer acht lassen und die positiven  $E'$ -Wellen mit den  $E$ -Wellen zusammenfassen, so bekommen wir resultierende Wellen von der Gestalt

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0^0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{für } x < -\frac{l}{2},$$

$$\mathfrak{E} = (\mathfrak{E}_0^0 + 2\pi i k_0 \mathfrak{P}_{0,r} l) e^{i(k_0 x - \omega t)} \quad \text{für } x > \frac{l}{2}.$$

Die durch die Anwesenheit der Schicht bedingte Änderung der komplexen Amplitude  $\mathfrak{E}_0$  der resultierenden elektrischen Schwingungen auf der Strecke  $x = -\frac{1}{2}l \rightarrow x = +\frac{1}{2}l$  drückt sich folglich durch

$$\Delta \mathfrak{E}_0 = 2\pi i k \mathfrak{P}_{0,r} \cdot l$$

aus.

<sup>1)</sup> Es sei bemerkt, daß die sekundäre magnetische Feldstärke sich aus (69a) nach der Formel  $\mathfrak{H}' = \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{Z}' = -\frac{i\omega}{c} \text{rot } \mathfrak{Z}' = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}'$  bestimmen läßt. Bei Berücksichtigung der magnetischen Polarisation  $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cdot l$  würde es notwendig sein, neben dem elektrischen Polarisationspotential  $\mathfrak{Z}'$  noch das entsprechende magnetische Potential  $\mathfrak{Z}'^{(m)}$  einzuführen. Das letztere muß sich offenbar durch  $\mathfrak{m}$  auf dieselbe Weise ausdrücken, wie  $\mathfrak{Z}'$  durch  $\mathfrak{p}$ , so daß man einfach  $\mathfrak{Z}'^{(m)} = -\frac{2\pi m_0}{i k_0} e^{i(k_0 x - \omega t)}$  setzen kann. Daraus bekommt man nach der Formel (21a), S. 135 des I. Bandes die zusätzliche magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{H}'^{(m)} = \text{rot rot } \mathfrak{Z}'^{(m)} = 2\pi i k_0 \mathfrak{m}_r \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

und eine zusätzliche elektrische Feldstärke

$$\mathfrak{E}'^{(m)} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathfrak{Z}'^{(m)} = -\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}'^{(m)}.$$

Führt man zwei in der  $x = 0$  Ebene liegende und zueinander senkrechte Achsen  $y$  und  $z$  ein und bezeichnet die Schichtdicke  $l$  mit  $dx$ , so wird

$$\frac{dE_{0y}}{dx} = 2\pi i k_0 P_{0y}, \quad \frac{dE_{0z}}{dx} = 2\pi i k_0 P_{0z}. \quad (70)$$

Wir setzen nun (mit Rücksicht auf  $E_x = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} P_y &= \kappa_{22} E_y + \kappa_{23} E_z, \\ P_z &= \kappa_{32} E_y + \kappa_{33} E_z, \end{aligned} \right\} \quad (70a)$$

wobei  $\kappa_{ik}$  die Komponenten des elektrischen Suszeptibilitätstensors der betrachteten Substanz bedeuten; wir haben hier statt der primären die vollständige elektrische Feldstärke eingeführt, da ihre Differenz eine unendlich kleine Größe (von derselben Größenordnung wie  $dx$ ) darstellt und für (70) belanglos ist. Es wird also

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_{0y}}{dx} &= 2\pi i k_0 (\kappa_{22} E_{0y} + \kappa_{23} E_{0z}), \\ \frac{dE_{0z}}{dx} &= 2\pi i k_0 (\kappa_{32} E_{0y} + \kappa_{33} E_{0z}). \end{aligned} \right\} \quad (70b)$$

Diese Formeln bleiben auch dann gültig, wenn wir uns nicht nur *eine* Schicht, sondern eine Reihe aneinander liegender Schichten irgend eines homogenen Körpers längs der  $X$ -Achse eingestellt denken, d. h. mit anderen Worten, die Fortpflanzung der Wellen in einem (seitlich unbegrenzten) homogenen Körper betrachten — sofern die rücklaufenden sekundären Wellen und der Unterschied zwischen der totalen und der effektiven Feldstärke immer vernachlässigt werden können.

Diese Vernachlässigung ist nur in dem Fall verdünnter gasförmiger Körper oder sehr schneller Schwingungen als gestattet anzusehen. Setzt man einen solchen Körper als isotrop voraus

$$(\kappa_{22} = \kappa_{33} = \kappa, \quad \kappa_{23} = \kappa_{32} = 0),$$

so bekommt man die folgende angenäherte Gleichung

$$\frac{dE_0}{dx} = 2\pi i k_0 \kappa E_0, \quad (71)$$

deren Lösung lautet

$$E_0 = A e^{2\pi i k_0 \kappa x} \quad (A = \text{konst}). \quad (71a)$$

Es wird folglich

$$E = E_0 e^{i(k_0 x - \omega t)} = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (71b)$$

mit

$$k = k_0 (1 + 2\pi \kappa). \quad (71c)$$

Bei  $\kappa \ll 1$  unterscheidet sich dieses Resultat unbedeutend von dem bekannten Ergebnis der üblichen makroskopischen Theorie

$$k = k_0 \sqrt{\varepsilon} = k_0 \sqrt{1 + 4\pi \kappa}. \quad (71d)$$

Die hier angeführte direkte, obwohl nicht vollkommen exakte Ableitung dieser Formel zeigt, daß die scheinbare Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen in materiellen Körpern, ebenso wie ihre Absorption und andere Effekte derselben Art durch eine Überlagerung (Interferenz) von primären und sekundären Wellen, die sich genau wie im leeren Raum fortpflanzen, bedingt werden. Wenn die Suszeptibilität  $\kappa$  einen reellen Wert hat, d. h. wenn die Elektronenschwingungen dieselbe Phase wie die sie erzeugenden primären Kraftschwingungen haben, so sind die sekundären Kraftschwingungen nach (69c) um  $\frac{\pi}{2}$  gegen den letzteren hinsichtlich ihrer Phase verschoben. Die komplexe Amplitude der resultierenden Kraftschwingungen hat in diesem Fall nach (71a) einen konstanten Betrag und eine sich mit  $x$  stetig ändernde Phase. Dies ist aber nach (71b) vollkommen äquivalent der Fortpflanzung von Schwingungen mit *konstanter* Amplitude, und mit einem von dem wirklichen Phasenparameter  $k_0$  etwas abweichenden Parameter  $k$ , d. h. mit einer von der wirklichen Wellenlänge  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$  etwas abweichenden Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .

Bei komplexen Werten von  $\kappa$  bekommt man außer dieser scheinbaren Wellenlängenänderung noch eine Absorption der Wellen nach der Formel

$$|E|^2 \sim e^{-4\pi \kappa^{(2)} k_0 x} = e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0} \epsilon^{(2)} x}, \quad (72)$$

wo  $\kappa^{(2)}$  den imaginären Anteil von  $\kappa$  bedeutet. Auf dieselbe Weise erklären sich die Erscheinungen, die bei Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen in gyrotropen und anisotropen Körpern stattfinden. Setzt man z. B.  $\kappa_{22} = \kappa_{33}$ ,  $\kappa_{23} = -\kappa_{32} = ig$  (was dem ersten Fall entspricht), so ergibt sich nach (70b), wenn man für einen gegebenen Wert von  $x$   $E_{0z} = 0$  annimmt:

$$dE_{0y} = 2\pi i k_0 \kappa E_{0y} \cdot dx, \quad \text{d. h. } d|E_{0y}| = 0$$

und

$$dE_{0z} = 2\pi k_0 g E_{0y} \cdot dx.$$

Der Betrag des Vektors  $\mathfrak{E}_0$  bleibt also bei dem Fortschreiten um die Strecke  $dx$  in der Fortpflanzungsrichtung unverändert, während die Schwingungs- (oder Polarisations-)ebene um den Winkel

$$d\varphi = \frac{dE_{0z}}{E_{0z}} = 2\pi k_0 g dx$$

gedreht wird. Diese Drehung der Polarisations-ebene oder „Gyration“ pro Längeneinheit beträgt also

$$\varphi = 2\pi k_0 g = \frac{4\pi^2 g}{\lambda_0}. \quad (72a)$$

Man kann dieses Resultat durch Betrachtung der Fortpflanzung von

zwei zirkular polarisierten Schwingungen mit entgegengesetzten Drehungs-  
sinnen ableiten — ebenso wie wir es im § 3 getan hatten. Solche Schwin-  
gungen lassen sich bekanntlich durch die Beziehung  $E_{0y} = \pm i E_{0z}$   
charakterisieren. Multipliziert man die zweite Gleichung (70b) mit  
 $\pm i$  und addiert sie zu der ersten, so wird

$$\frac{d}{dx} (\mathfrak{E}_{0y} \pm i \mathfrak{E}_{0z}) = 2\pi i k_0 (\varkappa \pm g) (\mathfrak{E}_{0y} \pm \mathfrak{E}_{0z})$$

woraus folgt  $|\mathfrak{E}_{0y} \pm i \mathfrak{E}_{0z}| = \text{konst}$  und ferner

$$k = k_0 (\varkappa \pm g) \tag{72b}$$

für diejenige Schwingung, bei welcher die Summe  $E_{0y} \pm i E_{0z}$  nicht  
verschwindet.

Im Falle eines anisotropen Körpers (eine solche Anisotropie kann  
in einem Gas durch ein zusätzliches elektrostatisches Feld bedingt  
werden) kann man schließlich die Richtungen der  $y$ - und  $z$ -Achsen  
so wählen, daß  $\varkappa_{23} = \varkappa_{32} = 0$  ist. Die in diesen ausgezeichneten Rich-  
tungen stattfindenden linearen Schwingungen pflanzen sich nach (72a)  
auf dieselbe Weise fort wie in isotropen Körpern mit verschiedenen  
 $k$ -Parametern:

$$k_1 = k_0 \varkappa_{11} \quad \text{und} \quad k_2 = k_0 \varkappa_{22},$$

Schwingungen aller anderen Richtungen müssen dagegen eine stetige  
Änderung ihrer Polarisationsart erleiden [vgl. § 2].

#### 4. Die exakte Lösung des Problems mittels einer Integralgleichung.

Die oben erwähnten rücklaufenden sekundären Wellen kommen bei der  
Fortpflanzung elektromagnetischer Schwingungen in homogenen Körpern  
unmittelbar nicht zum Vorschein, sondern äußern sich in der Tatsache,  
daß der Phasenparameter  $k$  nicht durch (71c), sondern durch (71d)  
ausgedrückt wird. Die letzte Formel ergibt sich bekanntlich aus der  
makroskopischen Gleichung

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_0^2 \varepsilon E = 0.$$

Wir wollen nun dasselbe Resultat nach der Methode der Fernwirkungs-  
theorie auf Grund der Formel (69b) ableiten.

Die resultierende Feldstärke  $E(x, t)$  muß offenbar nichts anderes  
darstellen als die Summe der unendlich kleinen sekundären Feldstärken  
 $E'$ , die von den verschiedenen Schichten des Körpers — und zwar  
wie auf der negativen, so auch auf der positiven Seite von der betrach-  
teten Stelle — herrühren. Es gilt also

$$E(x, t) = 2\pi i k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} P_r \left( x', t - \frac{x' - x}{c} \right) dx'. \tag{73}$$

Andererseits drückt sich die Polarisierung (im Falle isotroper Körper) durch die resultierende Feldstärke nach der Formel

$$P(x, t) = \varkappa E(x, t)$$

aus. Wir bekommen folglich für die Bestimmung von  $E$  (oder  $P$ ) die *lineare Integralgleichung*

$$E(x, t) = 2\pi i k_0 \varkappa \int_{-\infty}^{+\infty} E(x', t - \frac{x' - x}{c}) dx'. \quad (73a)$$

Diese Gleichung läßt sich, wie leicht zu sehen ist, durch den Ansatz

$$E(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (73b)$$

lösen, mit einem zunächst unbestimmten Parameter  $k$  und einer willkürlichen Amplitude  $A$ . Es wird nämlich, beim Einsetzen dieses Ausdrucks in (73a):

$$1 = 2\pi i k_0 \varkappa \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\{k(x' - x) + \frac{\omega}{c}|x' - x|\}} dx'$$

oder mit der Abkürzung  $x' - x = \xi$ :

$$1 = 2\pi i k_0 \varkappa \int_0^{\infty} e^{ik_0 \xi} (e^{ik\xi} + e^{-ik\xi}) d\xi. \quad (73c)$$

Es bleibt uns folglich, um der Gleichung (73a) zu genügen, den Parameter  $k$  nach (73c) zu bestimmen. Um die Konvergenz des rechtsstehenden Integrals zu sichern, ersetzen wir  $k_0$  durch  $k_0 + i\gamma$ , wo  $\gamma$  eine positive Größe ist, die wir als einen fiktiven Dämpfungsfaktor einführen, und die wir nachträglich gleich Null setzen werden.

Dabei erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-[\gamma - i(k_0 + k)]\xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{-[\gamma - i(k_0 - k)]\xi} d\xi &= \frac{1}{\gamma - i(k_0 + k)} + \frac{1}{\gamma - i(k_0 - k)} = \\ &= \frac{2(\gamma - ik_0)}{(\gamma - ik_0)^2 + k^2}, \end{aligned}$$

d. h. bei  $\gamma = 0$

$$1 = 2\pi i k_0 \varkappa \frac{-2ik_0}{k^2 - k_0^2},$$

oder

$$k^2 = k_0^2 (1 + 4\pi \varkappa).$$

Das ist nichts anderes als die Formel (71d). Bei Vernachlässigung der rücklaufenden Wellen sollte man in (73a) die Integration nach  $x'$  von  $x' = -\infty$  bis  $x' = x$  erstrecken, und folglich das erste Glied in dem Klammerausdruck (73c) weglassen. Auf diese Weise würden wir die Beziehung

$$1 = \frac{2\pi i k_0 \varkappa}{-i(k_0 - k)}$$

d. h.

$$k = k_0 (1 + 2\pi \varkappa)$$

bekommen, im Einklang mit (71c).

Fünftes Kapitel.

**Elektromagnetische Schwingungen in begrenzten Körpern.**

**§ 1. Reflexion und Durchgang ebener Wellen bei senkrechtem Einfallen auf eine ebene Trennungsfläche zweier homogener Körper.**

I. Behandlung des Problems nach der Methode der Fernwirkungstheorie.

Wir stellen uns zwei homogene isotrope Körper vor, die längs einer Ebene  $x = 0$  aneinander grenzen, so daß ein Körper ( $b$ ) den positiven Halbraum ( $x > 0$ ) und der andere ( $a$ ), den negativen Halbraum ( $x < 0$ ) einnimmt. Wir betrachten ferner einen harmonischen Schwingungsvorgang, bei welchem sich im Körper  $b$  in positiver Richtung ebene sinusoidale Wellen fortpflanzen. Ähnliche Wellen müssen offenbar auch im Körper  $a$  stattfinden. Es ist aber leicht zu zeigen, daß neben den „einfallenden“ sich ebenfalls in positiver Richtung fortpflanzenden Wellen man im Körper  $a$  noch *rücklaufende* oder „reflektierte“ Wellen berücksichtigen muß, die desto intensiver sind, je größer die Differenz zwischen den elektromagnetischen Konstanten der beiden Körper ist. Die Notwendigkeit und der Ursprung dieser reflektierten Wellen läßt sich am klarsten erkennen, wenn man die Frage nach der im vorigen Paragraphen dargelegten direkten Methode behandelt.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, daß  $a$  den leeren Raum und  $b$  einen nichtmagnetischen Körper mit der elektrischen Suszeptibilität  $\kappa$  darstellt.

Wir nehmen dabei an, daß im positiven Halbraum die elektromagnetischen Schwingungen sich genau in derselben Weise fortpflanzen, als ob der betreffende Körper ( $b$ ) *unbegrenzt* wäre. Wir machen dementsprechend den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} E(x, t) &= B e^{i(kx - \omega t)}, \\ P &= \kappa E, \quad \kappa = k_0 \sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}, \end{aligned} \right\} (x > 0) \quad (1)$$

wo  $B$  die (konstante) Amplitude von  $E$  bedeutet.

Es wäre aber falsch sich vorzustellen, daß die  $E$ -Schwingungen, die hier als Ursache der  $P$ -Schwingungen behandelt werden, gleichzeitig als *Folge* der letzteren, ebenso wie in dem früher untersuchten Fall eines unbegrenzten Körpers, aufgefaßt werden können. Die durch die  $P$ -Schwingungen erzeugten Kraftschwingungen sind nämlich im betrachteten Fall nicht durch (73), Kap. IV, sondern durch die Formel

$$E'(x, t) = 2\pi i k_0 \int_0^{\infty} P(x', t - \frac{|x' - x|}{c}) dx' \quad (1a)$$

bestimmt. Da andererseits  $E$  der Integralgleichung (73b) und folglich der Beziehung (73) genügt, so müssen wir uns vorstellen, daß die mechanischen  $P$ -Schwingungen nicht *nur* durch die von ihnen erzeugten  $E'$ -Schwingungen beibehalten werden, sondern daß die letzteren durch bestimmte zusätzliche, von außen (d. h. aus dem negativen Halbraum) kommende Kraftschwingungen unterstützt werden. Die Feldstärke dieser „einfallenden“ Schwingungen innerhalb des Körpers müssen wir offenbar durch die Formel  $E^0 = E - E'$ , d. h.

$$E^0(x, t) = 2\pi i k_0 \int_{-\infty}^0 P\left(x', t - \frac{x' - x}{c}\right) dx', \quad (x > 0) \quad (1b)$$

definieren.

Es sei bemerkt, daß diese Formel *nur* für *positive* Werte von  $x$  einen unmittelbaren Sinn hat. Für den negativen Halbraum müssen die einfallenden Schwingungen durch die analytische Fortsetzung von (1b) definiert werden (siehe unten).

Den Parameter  $k$  können wir bei Ausführung der Integrationen als komplex behandeln, was der tatsächlich immer vorhandenen Dämpfung der Schwingungen entspricht.

Bei  $x < 0$  und  $x' > 0$  hat man  $|x' - x| = x' - x$ , und folglich nach (1) und (1a)

$$E'(x, t) = 2\pi i k_0 \kappa B e^{-i(k_0 x + \omega t)} \int_0^{\infty} e^{i(k + k_0)x'} dx',$$

oder wegen

$$\int_0^{\infty} e^{i(k + k_0)x'} dx' = -\frac{1}{i(k + k_0)} \quad (k = k^{(1)} + i k^{(2)}, \quad k^{(2)} > 0):$$

$$E'(x, t) = A^- e^{-i(k_0 x + \omega t)} \quad (2)$$

mit

$$A^- = -\frac{2\pi k_0 \kappa B}{k_0 + k} = -\frac{2\pi \kappa B}{1 + \sqrt{\epsilon}} = -\frac{2\pi \kappa (\sqrt{\epsilon} - 1) B}{\epsilon - 1},$$

d. h.

$$A^- = -\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon} - 1) B. \quad (2a)$$

Bei  $x > 0$  und  $x' < 0$  ergibt sich im Gegenteil  $|x' - x| = x - x'$ . Führt man statt  $x'$  die Variable  $-x' = \xi$  ein, so wird nach (1b)

$$E^0(x, t) = 2\pi i k_0 \kappa B e^{i(k_0 x - \omega t)} \int_0^{\xi} e^{i(k_0 - k)\xi} d\xi = \frac{2\pi i k_0 \kappa B e^{i(k_0 x - \omega t)}}{i(k - k_0)},$$

d. h.

$$E^0(x, t) = A^+ e^{i(k_0 x - \omega t)} \quad (3)$$

mit

$$A^+ = +\frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon} + 1) B. \quad (3a)$$

Die Formel (2) stellt nichts anderes dar als die oben erwähnten reflektierten Wellen; ( $E^0(x, t)$  ist offenbar auch für negative Werte von  $x$  als die einfallende Welle zu interpretieren. Es muß beachtet werden, daß sie nur im letzten Fall eine unmittelbare *physikalische* Bedeutung hat; in dem positiven Halbraum ist der Schwingungsvorgang durch (1) bestimmt und die beiden Anteile der totalen Feldstärke  $E'$  und  $E^0$  spielen einzeln genommen keine Rolle.

2. Behandlung des Problems nach der üblichen Methode; isotrope Körper.

Wir wollen nun die erhaltenen Resultate nach der Methode der Differentialgleichungen ableiten, und zwar für den allgemeinen Fall, daß  $a$  und  $b$  zwei beliebigehomogene und isotrope Körper sind mit den Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_a, \epsilon_b$  und den magnetischen Permeabilitäten  $\mu_a, \mu_b$ .

Dabei bekommt man die folgende, für die Anwendung dieser Methode auf elektromagnetische Schwingungsvorgänge in begrenzten Körpern charakteristische Fragestellung.

Es sollen die Feldgleichungen [vgl. (2a) und 2b) Kap. IV]

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{E} - i k_0 \mathfrak{H} &= 0, \\ \text{rot } \mathfrak{H} + i k_0 \epsilon \mu \mathfrak{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \left( k_0 = \frac{\omega}{c} \right) \quad (4)$$

für jeden Körper allein integriert werden, *als ob es unbegrenzt wäre*, derart, daß an der Grenzfläche die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} E_t^a &= E_t^b, & \epsilon_a E_n^a &= \epsilon_b E_n^b, \\ \frac{1}{\mu_a} H_t^a &= \frac{1}{\mu_b} H_t^b, & H_n^a &= H_n^b \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

erfüllt seien. Zur vollkommenen Bestimmtheit der Aufgabe muß man im allgemeinen noch irgendwelchen Ansatz für das elektromagnetische Feld in einem unendlich entfernten Punkte machen.

Die Gleichungen (4) kann man nach (7) und (7a) Kap. IV durch die Gleichungen

$$\nabla^2 \mathfrak{Z} + k_0^2 \epsilon \mu \mathfrak{Z} = 0, \quad (4b)$$

$$\mathfrak{E} = \text{rot rot } \mathfrak{Z}. \quad \mathfrak{H} = -i k_0 \epsilon \mu \text{rot } \mathfrak{Z} \quad (4c)$$

ersetzen ( $\epsilon_s = \epsilon$ ).

Zur Lösung der oben nach der Methode der Fernwirkungstheorie behandelten Aufgabe nehmen wir zunächst an, daß  $\mathfrak{Z}$  nur von der  $x$ -Koordinate abhängt. Es ergeben sich dabei bekanntlich für alle elektromagnetischen Größen Ausdrücke von der Form

$$\psi = \psi^+ e^{i k x} + \psi^- e^{-i k x} \quad (5)$$

mit

$$k = k_0 \sqrt{\epsilon \mu}$$

(den Zeitfaktor  $e^{-i \omega t}$  werden wir im folgenden immer weglassen). Die

Formel (5) stellt zwei ebene sinusoidale Wellenzüge von derselben Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  dar, die sich in entgegengesetzten Richtungen fortpflanzen. Die Grenzbedingungen (4a) reduzieren sich dabei auf bestimmte Beziehungen zwischen den Amplituden  $\psi^+$  und  $\psi^-$  der elektrischen und der magnetischen Feldstärken in den beiden Körpern.

Die Operation rot auf einen Vektor von der Gestalt (5) angewandt, liefert

$$\text{rot } \psi = ik e^{ikx} (n \times \varphi^+) - ik e^{-ikx} (n \times \varphi^-),$$

wo  $n$  wie früher einen mit der positiven  $x$ -Richtung zusammenfallenden Einheitsvektor bedeutet ( $x = r \cdot n$ ). Es wird also nach (4c):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= +k^2 \{n \times (\mathfrak{Z}^+ \times n) e^{ikx} + n \times (\mathfrak{Z}^- \times n) e^{-ikx}\} = k^2 n \times (\mathfrak{Z} \times n), \\ \mathfrak{H} &= k_0 k \varepsilon \mu \{(n \times \mathfrak{Z}^+) e^{ikx} - (n \times \mathfrak{Z}^-) e^{-ikx}\}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wir können offenbar dem Vektor  $\mathfrak{Z}$  eine zu  $x$  senkrechte Richtung zuschreiben, denn seine zu  $x$  parallele Komponente für  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  ist belanglos. Dann bekommt man einfach  $n \times (\mathfrak{Z} \times n) = \mathfrak{Z}$  und folglich

$$\mathfrak{E} = k^2 \mathfrak{Z}. \quad (6a)$$

Die Grenzbedingungen (4a) für die Ebene  $x = 0$  nehmen dabei mit Rücksicht auf (5a) die folgende Gestalt an

$$\left. \begin{aligned} k_a^2 (\mathfrak{Z}_a^+ + \mathfrak{Z}_a^-) &= k_b^2 (\mathfrak{Z}_b^+ + \mathfrak{Z}_b^-), \\ k_a \varepsilon_a (\mathfrak{Z}_a^+ - \mathfrak{Z}_a^-) &= k_b \varepsilon_b (\mathfrak{Z}_b^+ - \mathfrak{Z}_b^-). \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

Zwei von den vier hier auftretenden Amplituden können ganz willkürlich angegeben werden. Wir setzen, im Einklang mit den früheren Erörterungen,  $\mathfrak{Z}_b^- = 0$  und betrachten  $\mathfrak{Z}_b^+$  — die Amplitude der „durchgehenden“ Wellen — als eine bekannte Größe. Es ergeben sich dabei für die Amplituden der einfallenden und der reflektierten Wellen die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_a^+ &= \frac{1}{2} \frac{k_b^2}{k_a^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_b \mu_a}{\mu_b \varepsilon_a}} \right) \mathfrak{Z}_b^+, \\ \mathfrak{Z}_a^- &= -\frac{1}{2} \frac{k_b^2}{k_a^2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_b \mu_a}{\mu_b \varepsilon_a}} - 1 \right) \mathfrak{Z}_b^+. \end{aligned} \right\} \quad (6c)$$

Die entsprechenden Beziehungen zwischen den Amplituden der elektrischen Feldstärken lauten nach (6a)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_a^+ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_b \mu_a}{\mu_b \varepsilon_a}} + 1 \right) \mathfrak{E}_b^+, \\ \mathfrak{E}_a^- &= -\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_b \mu_a}{\mu_b \varepsilon_a}} - 1 \right) \mathfrak{E}_b^+. \end{aligned} \right\} \quad (6d)$$

In dem Spezialfall, daß  $a$  den leeren Raum darstellt und  $b$  unmagnetisch ist, gehen diese Formeln in die oben abgeleiteten Formeln (2a) und (3a) über.

Die magnetischen Feldstärken der einzelnen Wellenarten sind ihrem Betrage nach gleich den elektrischen Feldstärken, multipliziert mit dem Faktor  $\frac{k_0}{h} \varepsilon \mu = \sqrt{\varepsilon \mu}$  [vgl. Kap. IV, § 1, (13a)].

Die relative Intensität der einfallenden, reflektierten und durchgelassenen Schwingungen bestimmt sich durch das Verhältnis der entsprechenden Energieströmungsvektoren oder eher ihrer zeitlichen Mittelwerte

$$K = \frac{c}{8\pi\mu} \Re E^* \cdot H = \frac{c}{8\pi} \Re \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E E^* .$$

Das Verhältnis  $\frac{\bar{K}_a^-}{\bar{K}_a^+} = r$  bezeichnet man als *Reflexionskoeffizient*, und das Verhältnis  $\frac{\bar{K}_b^+}{\bar{K}_a^+} = d$  als den *Durchlässigkeitskoeffizient* des Körpers *b* relativ zum *a* oder einfach des Körpers *b*, wenn *a* den leeren Raum bedeutet.

Es wird dabei im letzten Fall

$$r = \frac{\left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - 1 \right|^2}{\left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1 \right|^2} \tag{7}$$

und

$$d = \frac{4 \left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right|^2}{\left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1 \right|^2} = 1 - r . \tag{7a}$$

Es sei erinnert, daß in den obigen Formeln  $\varepsilon$  im allgemeinen die *komplexe* Dielektrizitätskonstante bezeichnen muß. Um den Einfluß der elektrischen Dämpfung (Absorption) auf die Koeffizienten  $r$  und  $d$  ausdrücklich zu zeigen, ersetzen wir  $\varepsilon$  durch die Summe  $\varepsilon_s = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$  nach (2) Kap. IV.

Wir beschränken uns dabei auf die zwei extremen Fälle, wenn  $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$  sehr klein oder sehr groß gegen 1 ist.

Im ersten Fall hat man näherungsweise (vgl. § 1, Kap. IV):

und folglich

$$\sqrt{\varepsilon_s} \cong \sqrt{\varepsilon} \left( 1 + i \frac{\sigma}{\nu \varepsilon} \right)$$

$$\left| \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\mu}} \pm 1 \right|^2 = \left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \pm 1 + i \frac{\sigma}{\nu \sqrt{\varepsilon \mu}} \right|^2 = \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \pm 1 \right)^2 + \frac{\sigma^2}{\nu^2 \varepsilon \mu} ,$$

d. h.

$$r \cong \left( \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - 1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1} \right)^2 + \frac{4 \left| \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right|^2}{\left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1 \right)^4} \frac{\sigma^2}{\nu^2 \varepsilon \mu} . \tag{7b}$$

Im zweiten Fall kann man einfach

$$\varepsilon_s \cong i \frac{4\pi\sigma}{\omega} = i \frac{2\sigma}{\nu}$$

setzen. Es wird dabei

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_s} &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\sigma}{\nu}}, & \left| \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\mu}} \pm 1 \right|^2 &= \left| \sqrt{\frac{\sigma}{\nu\mu}} \pm 1 + i \sqrt{\frac{\sigma}{\nu\mu}} \right|^2 \\ &= \left( \sqrt{\frac{\sigma}{\nu\mu}} \pm 1 \right)^2 + \frac{\sigma}{\nu\mu} \cong \frac{2\sigma}{\nu\mu} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}} \right), \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} r &\cong \frac{1 - \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}}{1 + \sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}} \cong 1 - 2\sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}, \\ d &= 2\sqrt{\frac{\mu\nu}{\sigma}}. \end{aligned} \right\} \quad (7c)$$

d. h.

Diese Formeln erlauben es, das Reflexionsvermögen oder den Durchlässigkeitskoeffizienten der Metalle für ultrarotes Licht und noch langsamere Schwingungen, die in der Radiotechnik benutzt werden, mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Der Durchlässigkeitskoeffizient verschiedener Metalle für Schwingungen einer bestimmten Frequenz ergibt sich desto *kleiner*, je *größer* ihr Absorptionskoeffizient  $\zeta \cong \frac{2\pi}{c} \sqrt{\mu\sigma\nu}$  ist [vgl. (10a) § 1, Kap. IV]: je mehr Licht durch die Oberfläche eines Metalls durchgehen kann, desto kräftiger muß innerhalb dieses Metalls absorbiert werden. Bei gegebener Dämpfung (d. h. Leitfähigkeit) sind die beiden Koeffizienten der Quadratwurzel aus der Frequenz proportional.

Die Leitfähigkeit  $\sigma$  der Metalle beträgt (in elektromagnetischen Einheiten) ungefähr  $10^{16} - 10^{17}$ . Für langwelliges ultrarotes Licht ( $\nu \cong 10^{13}$ ) wird also nach (7c) bei  $\mu \cong 1$ ,  $d \cong \frac{1}{100}$  und  $\zeta \cong 10^2 \text{ cm}^{-1}$ . Für Schwingungen der Radiofrequenz ( $\nu \cong 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ) ergibt sich:  $d \cong 10^{-5}$  und  $\zeta \cong 10^2 \text{ cm}^{-1}$ . Aus diesen Beispielen sieht man leicht, daß es für jedes Metall eine sozusagen „optimale“ Frequenz gibt, bei welcher die elektromagnetischen Schwingungen in sein Inneres am schlechtesten eindringen.

Bei Fehlen der Absorption ( $\sigma = 0$ ) müssen die durchgehenden Schwingungen nach (6c) an der Grenzfläche  $x = 0$  dieselbe Phase wie die einfallenden haben und die reflektierten — dieselbe oder die entgegengesetzte Phase — je nachdem  $\frac{\varepsilon_b}{\mu_b} >$  oder  $<$  als  $\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}$  ist. Bei Anwesenheit der Absorption ( $\sigma > 0$ ) bekommt man kompliziertere Phasenbeziehungen, die wir hier nicht näher untersuchen werden. Es

sei nur bemerkt, daß im Falle der Metallreflexion die Phasenverschiebung  $\delta$  der reflektierten Wellen gegenüber den einfallenden sich näherungsweise durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \delta = - \frac{2 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu \nu}}}{2 \frac{\sigma}{\mu \nu} - 1}$$

bestimmen läßt und etwas mehr als  $\pi$  beträgt.

Aber auch in diesem extremen Fall behalten die drei Wellenzüge, wie leicht zu sehen ist, denselben Polarisationscharakter, z. B. dieselbe Schwingungsrichtung, falls es sich um linear polarisierte Wellen handelt. Dieser Umstand ist für *isotrope* Körper bei senkrechtem Einfallen der Wellen charakteristisch.

### 3. Anisotrope und gyrotrope Körper.

Im Falle anisotroper und gyrotroper Körper bekommt man bei denselben Bedingungen bestimmte Änderungen im Schwingungstypus der reflektierten und durchgehenden Wellen bezüglich der einfallenden, die wir noch kurz betrachten werden.

Wir stellen uns also vor, daß  $a$  den leeren Raum und  $b$  irgend einen anisotropen Körper (Kristall) bezeichnet, den wir der Einfachheit halber als vollkommen durchsichtig und unmagnetisch annehmen werden. Es können sich dann parallel zur  $X$ -Achse bekanntlich zwei linear polarisierte Wellen fortpflanzen mit den Geschwindigkeiten  $u'$  und  $u''$ , die sich aus der Fresnelschen Gleichung bestimmen lassen (siehe Kap. IV, § 2). Es ist dabei zweckmäßig, statt der elektrischen Feldstärke die elektrische Erregung  $\mathfrak{D}$  als Grundgröße einzuführen. Diesen Vektor kann man in zwei zur Fortpflanzungsrichtung und zueinander senkrechte Komponenten  $D' = D_y^{(b)}$  und  $D'' = D_z^{(b)}$  zerlegen, welche die entsprechenden Grundschwingungen darstellen; man bekommt dabei statt *einer* Gleichung vom Typus (5) *zwei* Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} D_y^b &= D_b^{'+} e^{i k' x} + D_b^{'-} e^{-i k' x}, \\ D_z^b &= D_b^{''+} e^{i k'' x} + D_b^{''-} e^{-i k'' x} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

mit  $k' = \frac{\omega}{u'} = \frac{2\pi}{\lambda'}$  und  $k'' = \frac{\omega}{u''} = \frac{2\pi}{\lambda''}$ .

Die zugehörigen magnetischen Feldstärken drücken sich nach (18b), Kap. IV, durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} H_z^b &= \frac{u'}{c} (D_b^{'+} e^{i k' x} - D_b^{'-} e^{-i k' x}), \\ H_y^b &= \frac{u''}{c} (-D_b^{''+} e^{i k'' x} + D_b^{''-} e^{-i k'' x}) \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

aus<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Es wird dabei angenommen, daß die Richtungen  $xyz$  ein positives (rechts-schraubiges) Achsenkreuz bilden. Es muß ferner beachtet werden, daß  $H$  zu  $x$  und  $D$  senkrecht ist.

Die Vektoren  $\mathfrak{E}^a = \mathfrak{D}^a$  und  $\mathfrak{H}^a$ , die dem leeren Halbraum entsprechen, können in genau derselben Weise dargestellt werden mit dem einzigen Unterschied, daß man  $k' = k'' = k_0$  setzen muß.

Die Grenzbedingungen (4a) für  $x = 0$  nehmen dabei die folgende Gestalt an:

$$H_y^b = H_y^a, \quad H_z^b = H_z^a,$$

$$E_y^b = \varepsilon_{yy}^{-1} D_y^b + \varepsilon_{yz}^{-1} D_z^b = E_y^a = D_y^a, \quad E_z^b = \varepsilon_{zy}^{-1} D_y^b + \varepsilon_{zz}^{-1} D_z^b = E_z^a = D_z^a,$$

wo  $\varepsilon_{xy}^{-1}$  usw. die Komponenten des reziproken Dielektrizitätstensors bedeuten, d. h. nach (8) und (8a):

$$\frac{u'}{c} (D_b'^+ - D_b'^-) = (D_a'^+ - D_a'^-), \quad \frac{u''}{c} (D_b''^+ - D_b''^-) = -(D_a''^+ - D_a''^-). \quad (8b)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{yy}^{-1} (D_b'^+ + D_b'^-) + \varepsilon_{yz}^{-1} (D_b''^+ + D_b''^-) &= D_a'^+ + D_a'^-, \\ \varepsilon_{zy}^{-1} (D_b'^+ + D_b'^-) + \varepsilon_{zz}^{-1} (D_b''^+ + D_b''^-) &= D_a''^+ + D_a''-. \end{aligned} \right\} \quad (8c)$$

Die sich auf die einfallenden Wellen beziehenden Größen  $D_a'^+$ ,  $D_b''^+$  sind hier als bekannt anzusehen. Es muß ferner für die durchgehenden Wellen  $D_b'^- = D_b''^- = 0$  sein. Die anderen 4 Größen  $D_a'^+$ ,  $D_b''^+$  und  $D_a'^-$ ,  $D_a''-$ , welche die durchgehenden und die reflektierten Wellen charakterisieren, lassen sich dann leicht aus den obigen Gleichungen bestimmen. Wir wollen hier die vollständige Lösung der betrachteten Aufgabe in ausdrücklicher Form nicht angeben. Es ist aber schon aus der allgemeinen Gestalt dieser Gleichungen klar, daß im Falle linear polarisierter einfallender Wellen, deren Schwingungsrichtung von den beiden Grundschwingungsrichtungen  $y$  und  $z$  verschieden ist, nicht nur die durchgehenden, sondern auch die reflektierten Wellen *elliptisch-polarisiert* sein müssen.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß bei Einfallen linear polarisierten Lichtes auf einen *gyrotropen* Körper, dessen Gyrotationsvektor der  $X$ -Achse parallel ist, die reflektierten Schwingungen zwar linear bleiben, aber in bezug auf die einfallenden eine gewisse Richtungsänderung erleiden. Diese Drehung der Polarisationssebene des reflektierten Lichtes wird gewöhnlich bei Einfallen der Lichtstrahlen auf magnetisierte Körper beobachtet und als *magnetischer Kerreffekt* bezeichnet.

Die diesen Effekt bestimmenden Grundgleichungen haben dieselbe Gestalt (8) und (8a) wie für den soeben behandelten Fall der anisotropen Körper. Man muß nur unter  $y$  und  $z$  (bzw. ' und '') nicht zwei zueinander senkrechte Richtungen, sondern zwei entgegengesetzte Drehungssinne der entsprechenden zirkularen (oder elliptischen, wenn der Gyrotationsvektor der  $X$ -Achse nicht parallel ist) Grundschwingungen verstehen.

Es ist dabei nicht nötig, die elektrische Erregung statt der Feldstärke einzuführen. Wir setzen also statt (8)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_y^b &= \mathfrak{E}_y'^+ e^{i k' x} + \mathfrak{E}_y'^- e^{-i k' x}, \\ \mathfrak{E}_z^b &= \mathfrak{E}_z''^+ e^{i k'' x} + \mathfrak{E}_z''^- e^{-i k'' x} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und nach der Formel (29a), Kap. IV:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u'}{c} \mathfrak{S}_y^b &= n \times [\mathfrak{E}_b'^+ e^{ik'x} - \mathfrak{E}_b'^- e^{-ik'x}], \\ \frac{u''}{c} \mathfrak{S}_z^b &= n \times [\mathfrak{E}_b''^+ e^{ik''x} - \mathfrak{E}_b''^- e^{-ik''x}]. \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Auf dieselbe Weise müssen selbstverständlich auch die *a*-Schwingungen dargestellt werden (d. h. man muß sie ebenfalls in rechts- und linkszirkulare Schwingungen zerlegen).

Wir setzen nun  $\mathfrak{E}_b'^- = \mathfrak{E}_b''^- = 0$ , wobei die Grenzbedingungen (4a) die folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_b'^+ &= \mathfrak{E}_a'^+ + \mathfrak{E}_a'^-, & \mathfrak{E}_b''^+ &= \mathfrak{E}_a''^+ + \mathfrak{E}_a''-, \\ \frac{c}{\mu u'} \mathfrak{E}_b'^+ &= \mathfrak{E}_a'^+ - \mathfrak{E}_a'^-, & \frac{c}{\mu u''} \mathfrak{E}_b''^+ &= \mathfrak{E}_a''^+ - \mathfrak{E}_a''-. \end{aligned}$$

Es ergibt sich daraus:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E}_a'^+ &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{\mu u'} + 1 \right) \mathfrak{E}_b', & \mathfrak{E}_a''^+ &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{\mu u''} + 1 \right) \mathfrak{E}_b'', \\ \mathfrak{E}_a'^- &= -\frac{1}{2} \left( \frac{c}{\mu u'} - 1 \right) \mathfrak{E}_b', & \mathfrak{E}_a''^- &= -\frac{1}{2} \left( \frac{c}{\mu u''} - 1 \right) \mathfrak{E}_b''. \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

Man kann hier mit genügender Annäherung nach (31a), Kap. IV

$$\frac{c}{\mu u} = \frac{c}{\mu u_0} \left( 1 \pm \frac{J}{2\varepsilon} \right) \approx \frac{c}{\mu u_0} \left( 1 \mp \frac{J}{2\varepsilon} \right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left( 1 \mp \frac{J}{2\varepsilon} \right) \quad (9c)$$

setzen. Wenn die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  komplex ist, sofern es also eine Dämpfung (Absorption) der Schwingungen in den betreffenden Körpern gibt — wie dies bei der Beobachtung des Kerreffektes an magnetisierten Eisen und anderen ferromagnetischen Metallen tatsächlich der Fall ist — müssen die beiden zirkularen Komponenten der reflektierten Wellen verschiedene Phasenverschiebungen gegenüber den entsprechenden Komponenten der einfallenden Wellen erfahren, wodurch eine gewisse Drehung der Ebene der resultierenden (linear polarisierten) Schwingungen bedingt wird.

Diese Drehung ist offenbar gleich  $\frac{1}{2}(\delta'' - \delta')$ , wo  $\delta'$  und  $\delta''$  die Phasenverschiebungen von  $\mathfrak{E}_a'^-$  in bezug auf  $\mathfrak{E}_a'^+$  bzw.  $\mathfrak{E}_a''^-$  in bezug auf  $\mathfrak{E}_a''^+$  bedeuten. Es gilt dabei nach (9b):

$$\delta', \delta'' = \arg \cdot \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - 1 \pm \frac{J}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} + 1 \pm \frac{J}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}}.$$

Es muß beachtet werden, daß bei Anwendung dieser Formel auf sichtbares Licht ( $\nu \approx 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ ) die Formel  $\varepsilon = i \frac{2\sigma}{\nu}$  nicht immer eine

genügende Annäherung darstellt. Was die magnetische Suszeptibilität  $\mu$  betrifft, so ist sie auch bei den ferromagnetischen Körpern schon für ultrarote Lichtschwingungen praktisch gleich 1.

## § 2. Reflexion und Brechung ebener Wellen beim schiefen Einfall auf eine ebene Grenzfläche.

### 1. Isotrope durchsichtige Körper.

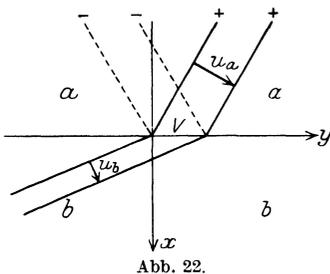
Wir wollen nun die im vorigen Paragraphen aufgestellten Resultate für den Fall verallgemeinern, daß die Grenzfläche der beiden Körper  $a$  und  $b$  mit der Ebene der einfallenden Wellen einen beliebigen Winkel bildet. Man könnte diesen Fall ebenfalls nach der Methode der Fernwirkungstheorie behandeln; dies ist aber jetzt kaum nötig, denn der Mechanismus der Wellenfortpflanzung ist durch die Anwendung dieser Methode an den oben betrachteten einfacheren Fällen genügend klar gemacht. — Die Neigung der einfallenden Wellenflächen zu der Grenzfläche muß, wie leicht zu ersehen ist, mit einer entsprechenden Neigung der reflektierten und der durchgehenden Wellen verknüpft sein; sonst aber wird an unseren früheren Ausführungen gar nichts geändert.

Wir stellen uns also vor, daß im Körper  $b$  sich ebene Wellen in einer bestimmten Richtung  $n_b$  fortpflanzen, in derselben Weise als ob er unbegrenzt wäre, daß aber an der Grenze ( $x = 0$ ) sie durch zwei andere Wellenzüge mit den Fortpflanzungsrichtungen  $n_a^+$  (einfallende Wellen) und  $n_a^-$  (reflektierte Wellen) ersetzt worden sind. Die Winkel zwischen den Fortpflanzungsrichtungen einerseits und der  $X$ -Achse andererseits (die letztere denken wir uns wie früher senkrecht zur Grenzfläche von  $a$  und  $b$  gerichtet) bezeichnen wir mit  $\Theta_b$ ,  $\Theta_a^+$  und  $\Theta_a^-$ . Die Beziehung zwischen diesen Winkeln läßt sich unmittelbar aus dem Umstand bestimmen, daß jede  $b$ -Wellenfläche (d. h. Fläche konstanter Phase in  $b$ ) auf seiner Schnittlinie mit der Grenzfläche in zwei „zugehörige“  $a$ -

Wellenflächen übergeht, die damit eine bestimmte *konstante Phasendifferenz* (z. B.  $0$  und  $\pi$ ) *beibehalten* (Abb. 22). Diese gemeinsame Schnittlinie von drei zugehörigen Wellenflächen verschiebt sich in der dazu senkrechten Richtung  $y$  mit einer Geschwindigkeit  $V$ , deren Projektionen auf die Fortpflanzungsrichtungen der Wellen offenbar mit den entsprechenden Wellengeschwindigkeiten  $u_b$  und  $u_a$  übereinstimmen müssen. Wir bekommen also die folgenden Gleichungen:

$$V \sin \Theta_a^+ = V \sin \Theta_a^- = u_a, \quad V \sin \Theta_b = u_b, \quad (10)$$

d. h. mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die einfallenden und die



reflektierten Wellen sich nach *verschiedenen* Richtungen fortpflanzen:

$$\Theta_a^+ = \pi - \Theta_b^- \equiv \Theta_a \tag{10a}$$

und

$$\frac{\sin \Theta_a}{\sin \Theta_b} = \frac{u_a}{u_b} = \frac{\sqrt{\varepsilon_b \mu_b}}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \equiv n_{ab}. \tag{10b}$$

Die Gleichungen stellen die bekannten Reflexions- und Brechungsgesetze dar. Die Größe  $n_{ab}$  heißt der relative Brechungsindex des Körpers  $b$  in bezug auf  $a$ .

Es sei bemerkt, daß die angeführte anschauliche Ableitung der Relationen (10) die Realität der Größen  $u_a$  und  $u_b$ , d. h. die Durchsichtigkeit der beiden Körper voraussetzt. Ihre Verallgemeinerung für den Fall absorbierender Körper werden wir später auf rein analytischem Wege aufstellen. Zunächst beschränken wir uns auf den einfachsten Fall vollkommen durchsichtiger isotroper Körper.

Da die Konstanz der Phasenbeziehungen der zugehörigen Wellen durch die Relation (10) gesichert ist, brauchen wir die Grenzbedingungen (4a) nur für die *Amplituden* der elektrischen und magnetischen Feldstärke aufzuschreiben. Die letztere läßt sich dabei durch die erstere nach der schon vielfach benutzten Formel [vgl. (11a), Kap. IV]

$$\frac{u}{c} \mathfrak{H} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{H} = \sqrt{\varepsilon \mu} \mathfrak{n} \times \mathfrak{E}$$

ausdrücken. Wir bemerken noch die reziproke Beziehung

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \mathfrak{H} \times \mathfrak{n}$$

und die daraus folgenden Transversalitätsbedingungen

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{E} = 0, \quad \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{H} = 0.$$

Diese Beziehungen erlauben es, jede Welle durch die  $z$ -Komponenten der Amplituden  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  zu charakterisieren ( $z$  ist die zur Einfallsebene senkrechte Richtung, d. h. die Richtung der Schnittlinie der Wellen mit der Grenzebene).

Es gilt nämlich mit Rücksicht auf  $n_x = \cos \Theta$ ,  $n_y = \sin \Theta$ ,  $n_z = 0$ :

$$H_x = \sqrt{\varepsilon \mu} E_z \sin \Theta, \quad H_y = -\sqrt{\varepsilon \mu} E_z \cos \Theta, \tag{11}$$

$$E_x = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} H_z \sin \Theta, \quad E_y = +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} H_z \cos \Theta. \tag{11a}$$

Die Grenzbedingungen (4a) müssen dabei nur für die  $z$ - und  $y$ -Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  berücksichtigt werden; die entsprechenden Grenzbedingungen für die  $x$ -Komponenten ergeben sich dann, wie leicht zu sehen ist, als Folge der Relationen (10). Man kann selbstverständlich umgekehrt die letzteren als Folge der Grenzbedingungen betrachten.

Wir haben also:

$$\left. \begin{aligned} E_z^b &= E_z^{a+} + E_z^{a-} \\ -\frac{1}{\mu_b} H_y^b &= \sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\mu_b}} E_z^b \cos \Theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} (E_z^{a+} - E_z^{a-}) \cos \Theta_a = -\frac{1}{\mu_a} H_y^a \end{aligned} \right\} (11b)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu_b} H_z^b &= \frac{1}{\mu_a} (H_z^{a+} + H_z^{a-}), \\ E_y^b &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_b \mu_b}} H_z^b \cos \Theta_b = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} (H_z^{a+} - H_z^{a-}) \cos \Theta_a = E_y^a. \end{aligned} \right\} (11c)$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} = \varepsilon, \quad \frac{\mu_b}{\mu_a} = \mu \quad (12)$$

(relative Dielektrizitätskonstante bzw. magnetische Permeabilität von  $b$  in bezug auf  $a$ ), ferner nach (10b)

$$\sqrt{\varepsilon \mu} = \frac{\sin \Theta_a}{\sin \Theta_b} \equiv n \quad (12a)$$

(relativer Brechungsindex =  $n_{ab}$ ) und lassen die Indizes  $a$  bei  $E$  und  $H$  fort. Es wird dann nach (11b):

$$\left. \begin{aligned} E_z^+ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{\cos \Theta_b}{\cos \Theta_a}} + 1 \right) E_z^b, \\ E_z^- &= -\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{\cos \Theta_b}{\cos \Theta_a}} - 1 \right) E_z^b \end{aligned} \right\} (12b)$$

und ebenfalls nach (11c):

$$\left. \begin{aligned} H_z^+ &= \frac{1}{2\mu} \left( \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\cos \Theta_b}{\cos \Theta_a}} + 1 \right) H_z^b, \\ H_z^- &= -\frac{1}{2\mu} \left( \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\cos \Theta_b}{\cos \Theta_a}} - 1 \right) H_z^b. \end{aligned} \right\} (12c)$$

Im Falle von genügend schnellen elektromagnetischen Schwingungen, die z. B. dem sichtbaren Licht entsprechen, kann man immer  $\mu_a = \mu_b = 1$  setzen. Man hat dabei nach (12a):

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu} \frac{\cos \Theta_b}{\cos \Theta_a}} \pm 1 = \frac{\sin \Theta_a \cos \Theta_b \pm \cos \Theta_a \sin \Theta_b}{\cos \Theta_a \sin \Theta_b} = \frac{\sin (\Theta_a \pm \Theta_b)}{\cos \Theta_a \sin \Theta_b}$$

und

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\cos \Theta_b}{\cos \Theta_a}} \pm 1 = \frac{\sin \Theta_b \cos \Theta_b \pm \sin \Theta_a \cos \Theta_a}{\sin \Theta_a \cos \Theta_a} = \frac{\sin 2\Theta_b \pm \sin 2\Theta_a}{\sin 2\Theta_a},$$

oder:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\cos \Theta_b}{\cos \Theta_a}} + 1 = \frac{2 \sin (\Theta_b + \Theta_a) \cos (\Theta_b - \Theta_a)}{\sin 2\Theta_a}.$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\cos \Theta_b}{\cos \Theta_a}} - 1 = \frac{2 \cos (\Theta_b + \Theta_a) \sin (\Theta_b - \Theta_a)}{\sin 2\Theta_a}.$$

Die Formeln (12b) und (12c) können also in diesem („optischen“) Fall folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\frac{E_z^b}{E_z^+} = \frac{2 \cos \Theta_a \sin \Theta_b}{\sin(\Theta_a + \Theta_b)}, \quad \frac{E_z^-}{E_z^+} = -\frac{\sin(\Theta_a - \Theta_b)}{\sin(\Theta_a + \Theta_b)}, \quad (13)$$

$$\frac{H_z^b}{H_z^+} = \frac{\sin 2\Theta_a}{\sin(\Theta_a + \Theta_b) \cos(\Theta_a - \Theta_b)}, \quad \frac{H_z^-}{H_z^+} = \frac{\operatorname{tg}(\Theta_a - \Theta_b)}{\operatorname{tg}(\Theta_a + \Theta_b)}. \quad (13a)$$

In dieser (oder eher in einer ähnlichen) Form sind sie zuerst von *Fresnel* angegeben worden<sup>1)</sup>.

## 2. Vollständige Polarisation, Totalreflexion, Absorption.

Die letzte Formel zeigt, daß bei  $\Theta_a + \Theta_b = \frac{\pi}{2}$ , d. h. nach (12a), bei

$$\operatorname{tg} \Theta_a = n \quad (13b)$$

das reflektierte Licht *linear polarisiert* sein muß, und zwar bleiben in diesem Fall nur die  $z$ -Komponente von  $E$  und die zugehörige (zu  $z$  senkrechte) Komponente von  $H$  von Null verschieden. Der durch (13b) bestimmte Einfallswinkel heißt der *Brewstersche Polarisationswinkel* oder der Winkel der vollständigen Polarisation.

Neben diesem Winkel hat bei der Bedingung  $n < 1$  noch der durch die Gleichung

$$\sin \Theta_a = n \quad (13c)$$

bestimmte Einfallswinkel eine besondere Bedeutung, der dem Maximalwert des Refraktionswinkels  $\Theta_b = \frac{\pi}{2}$  entspricht. Bei  $\sin \Theta_a > n$  können die einfallenden Schwingungen sich im Körper  $b$  überhaupt nicht mehr fortpflanzen, sondern es findet dabei die sogenannte *Totalreflexion* statt.

Die obigen Formeln behalten ihre Gültigkeit auch in dem Fall, wenn man den Winkel  $\Theta_b$  als eine *komplexe* Größe nach der Gleichung

$$\sin \Theta_b = \frac{\sin \Theta_a}{n}$$

definiert, wobei er selbstverständlich seine anschauliche Bedeutung verliert. — Es muß aber beachtet werden, daß die am Anfang dieses Paragraphen angeführte anschauliche Ableitung der Beziehungen (10) durch eine rein analytische Ableitung ersetzt werden kann. Definiert man die Komponenten der Wellennormalen in einer ganz formalen Weise durch die Formeln

$$n_x = \cos \Theta, \quad n_y = \sin \Theta, \quad n_z = 0,$$

<sup>1)</sup> Die Tatsache, daß die Winkel  $\Theta_a$  und  $\Theta_b$  in die Ausdrücke für die Reflexionskoeffizienten  $E^- : E^+$  symmetrisch oder schiefsymmetrisch eingehen, zeigt, daß diese Koeffizienten bei der *Umkehrung der Einfallrichtung unverändert bleiben* und nur ihre Vorzeichen wechseln.

so bekommt man für die verschiedenen elektromagnetischen Größen als Funktionen der räumlichen Koordinaten und der Zeit Ausdrücke von der Gestalt:

$$\psi = \psi^0 e^{i(-\omega t + k n \cdot r)} = \psi^0 e^{i[-\omega t + k(x \cos \Theta + y \sin \Theta)]} . \quad (14)$$

Es folgt dann sofort aus der Grenzbedingung (4a), daß die Phasenfaktoren der betrachteten drei Wellen, abgesehen von ihren komplexen Amplituden, für  $x = 0$  identisch sein müssen. Diese Forderung gibt die Relationen

$$k_a \sin \Theta_a^+ = k_a \sin \Theta_a^- = k_b \sin \Theta_b ,$$

die mit (10) identisch sind. Dieselben Relationen ergeben sich, wie schon erwähnt wurde, aus den Beziehungen zwischen den Amplituden der  $z$ - und  $x$ -Komponenten von  $\mathfrak{E}$  oder  $\mathfrak{H}$ . Setzt man also  $n < 1$  und  $\sin \Theta_a > n$ , so wird

$$\cos \Theta_b = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \Theta_a}{n^2}} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \Theta_a}{n^2} - 1}$$

und folglich

$$\psi^b = \psi_b^0 e^{-\zeta} e^{i \left( \frac{k_b}{n} \sin \Theta_a y - \omega t \right)} . \quad (14a)$$

wo

$$k_b = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_b \mu_b} , \quad \frac{k_b}{n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k_a$$

und

$$\zeta = k_a \sqrt{n^2 - \sin^2 \Theta_a} = \sqrt{k_b^2 - k_a^2 \sin^2 \Theta_a} \quad (14b)$$

bedeutet.

Diese Formeln zeigen, daß auch bei Totalreflexion die einfallenden Schwingungen in den Körper  $b$  eindringen; sie werden aber schon in sehr kleinen Abständen von der Oberfläche durch die sekundären  $E'$ -Schwingungen (vgl. § 1) praktisch vollkommen ausgelöscht. Es handelt sich dabei hauptsächlich um sekundäre Schwingungen, die im Körper  $a$  und nicht im Körper  $b$  erzeugt werden; denn die Bedingung  $n < 1$  ist im allgemeinen auch dann erfüllt, wenn  $b$  den leeren Raum darstellt. Die reflektierten Wellen müssen dabei dieselben Amplituden wie die einfallenden haben und können sich von ihnen nur durch ihre Phase unterscheiden. Es wird z. B. nach (12b) (bei  $\mu = 1$ )

$$\frac{E_z^-}{E_z^+} = \frac{\cos \Theta_a - i \sqrt{\sin^2 \Theta_a - n^2}}{\cos \Theta_a + i \sqrt{\sin^2 \Theta_a - n^2}} = e^{-i \delta}$$

mit

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2 \cos \Theta_a \sqrt{\sin^2 \Theta_a - n^2}}{n^2 + \cos^2 \Theta_a} . \quad (14c)$$

Den durch die Formel (14a) dargestellten Schwingungsvorgang kann man als einen Wellenzug ansehen, der sich in der Richtung der  $Y$ -Achse mit der Geschwindigkeit (10) fortpflanzt und gleichzeitig in der dazu senkrechten  $x$ -Richtung gedämpft wird. Solche Wellen mit verschiede-

nen Fortpflanzungs- und Dämpfungsrichtungen haben wir in Kap. IV (§ 1) eingehend untersucht. Sie müssen sich bei allen Einfallswinkeln bilden, wenn der Körper *b* *absorbierend* ist. Die Dämpfungsrichtung  $n_b^{(2)}$  fällt dabei, wie leicht zu sehen ist, stets mit der *X*-Achse zusammen, während die Fortpflanzungsrichtung  $n_b^{(1)}$ , d. h. der Winkel  $(n_b^1, x) = \Theta_b^{(1)} = \Theta_b$  dieselbe Funktion des Einfallswinkels  $\Theta_a$ , wie im Falle vollkommen durchsichtiger Körper bleibt. — Die letzte Behauptung folgt sofort aus den am Anfang dieses Paragraphen angeführten Überlegungen, die von der Anwesenheit der Dämpfung ganz unabhängig bleiben. Sie läßt sich ebenfalls analytisch auf Grund des verallgemeinerten Ansatzes

$$\psi = \psi^0 e^{-k^{(2)} x + i[k^{(1)}(x \cos \Theta + y \sin \Theta) - \omega t]} \tag{15}$$

ableiten, als Folge der Grenzbedingungen für  $x = 0$ . Um die Verhältnisse nicht unnötig zu komplizieren, denken wir uns den Körper *a* als durchsichtig ( $k_a^{(2)} = 0, k_a^{(1)} = k_a$ ). Die Parameter  $k_b^{(1)}$  und  $k_b^{(2)}$  drücken sich als Funktionen des Winkels  $\Theta_b$  durch die Formeln (9b) (Kap. IV, § 1) aus (wobei man selbstverständlich den Konstanten  $\varepsilon, \mu, \sigma$  den Index *b* anfügen muß). Statt der früheren Beziehungen (11) und (11a), die für *a* gültig bleiben, bekommt man für *b* Beziehungen von der Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c} \mathfrak{H} &= (k^{(1)} n^{(1)} + k^{(2)} n^{(2)}) \times \mathfrak{E}, \\ \varepsilon_s \mu \frac{\omega}{c} \mathfrak{E} &= -(k^{(1)} n^{(1)} + k^{(2)} n^{(2)}) \times \mathfrak{H} \end{aligned}$$

[vgl. (11a) und (11b) Kap. IV], d. h. mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} n_b^{(1)} &\equiv \frac{c k_b^{(1)}}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_b \mu_b} \sqrt{\frac{1}{2} \left( +1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma_b^2}{\varepsilon_b^2 \nu^2 \cos^2 \Theta_b}} \right)}, \\ n_b^{(2)} &\equiv \frac{c k_b^{(2)}}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_b \mu_b} \sqrt{\frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma_b^2}{\varepsilon_b^2 \nu^2 \cos^2 \Theta_b}} \right)}. \end{aligned} \right\} \tag{15a}$$

$$\left. \begin{aligned} H_x^b &= n_b^{(1)} E_z^b \sin \Theta_b, & H_y^b &= -(n_b^{(1)} \cos \Theta_b + n_b^{(2)}) E_z^b, \\ E_x^b &= -\frac{n_b^{(1)}}{\varepsilon_b^s \mu_b} H_z^b \sin \Theta_b, & E_y^b &= \frac{n_b^{(1)} \cos \Theta_b + n_b^{(2)}}{\varepsilon_b^s \mu_b} H_z^b. \end{aligned} \right\} \tag{15b}$$

Die Grenzbedingungen für  $E_x$  und  $H_x$  bleiben unverändert, während man für  $H_y$  und  $E_y$  die folgenden Relationen erhält [vgl. (11b) und (11c)]:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_b} H_y^b &= \frac{n_b^{(1)} \cos \Theta_b + n_b^{(2)}}{\mu_b} E_z^b = \frac{n_a}{\mu_a} (E_z^a + + E_z^a -) \cos \Theta_a = -\frac{1}{\mu_a} H_y^a, \\ E_y^b &= \frac{n_b^{(1)} \cos \Theta_b + n_b^{(2)}}{\varepsilon_b^s \mu_b} H_z^b = \frac{1}{n_a} (H_z^a + - H_z^a -) \cos \Theta_a = E_y^a. \end{aligned}$$

Es bedeutet hier  $n_a = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$  und  $\varepsilon_b^s = \varepsilon_b - i \frac{2\sigma_b}{\nu}$ . Wir bekommen also

statt (12b) und (12c):

$$\left. \begin{aligned} E_z^\pm &= \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\mu_a}{\mu_b} \frac{n_b^{(1)} \cos \Theta_b + n_b^{(2)}}{n_a \cos \Theta_a} \right) E_z^b, \\ H_z^\pm &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_a}{\mu_b} \pm \frac{n_a (n_b^{(1)} \cos \Theta_b + n_b^{(2)})}{\varepsilon_b' \mu_b \cos \Theta_a} \right] H_z^b. \end{aligned} \right\} \quad (15c)$$

Wir können hier in die nähere Diskussion dieser Formeln nicht eingehen. Es sei nur bemerkt, daß die Erscheinungen der vollständigen Polarisation ( $H_z^- = 0$ ) und der Totalreflexion auch in dem Fall absorbierender Körper stattfinden, die letztere bei derselben Bedingung ( $\sin \Theta_a = \frac{n_b^{(1)}}{n_a}$ ), wie in dem Fall durchsichtiger Körper, die erstere bei einem Einfallswinkel, der sich in einer komplizierten Weise durch die charakterisierten Konstanten ausdrückt.

### 3. Anisotrope Körper; Doppelbrechung und konische Refraktion; graphische Konstruktion der gebrochenen Wellen und Strahlen.

Die Reflexion und Brechung der Lichtwellen an der Oberfläche durchsichtiger anisotroper (kristallinischer) Körper läßt sich bei schiefer Inzidenz folgendermaßen behandeln. — Zunächst muß man den Umstand berücksichtigen, daß jeder Fortpflanzungsrichtung  $n_b$  der Wellen in einem solchen Körper zwei verschiedene Grundschwingungsrichtungen  $\mathfrak{D}'$ ,  $\mathfrak{D}''$  und Phasengeschwindigkeiten  $u'_b$ ,  $u''_b$  entsprechen. Damit aber diese beiden Schwingungsarten sich in derselben Richtung fortpflanzen könnten, müßten die Beziehungen

$$\frac{u_a}{\sin \Theta_a} = \frac{u'_b}{\sin \Theta_b} = \frac{u''_b}{\sin \Theta_b} \quad [\text{vgl. (10)}]$$

[vgl. (10)] erfüllt werden, was bei  $u'_b \neq u''_b$  unmöglich ist. Daraus folgt, daß einem bestimmten Einfallswinkel  $\Theta_a$  zwei verschiedene gebrochene Wellenzüge entsprechen müssen, deren Fortpflanzungsrichtungen durch die Relationen

$$\frac{u_a}{\sin \Theta_a} = \frac{u'_b}{\sin \Theta'_b} = \frac{u''_b}{\sin \Theta''_b}$$

bestimmt sind. Jeder Wellenzug muß dabei nur eine Schwingungsart enthalten, und zwar diejenige, welche der entsprechenden Geschwindigkeit angehört. — Diese Erscheinung bezeichnet man als *Doppelbrechung*; man kann dabei die beiden gebrochenen Wellen oder die zugehörigen *Strahlen* in Betracht ziehen, deren Richtungen  $l'_b$  und  $l''_b$  von den entsprechenden Wellennormalen  $n'_b$ ,  $n''_b$  im allgemeinen verschieden sind. Nur im Falle einachsiger Kristalle stimmt die Richtung eines — und zwar des gewöhnlichen — Strahles mit der Wellennormale überein.

Der andere „außergewöhnliche“ Strahl liegt dagegen in einer Ebene, welche die  $x$ -Richtung und die optische Achse enthält und von der Einfallsebene im allgemeinen abweicht.

Bei bestimmten Einfallrichtungen, die dem Zusammenfallen der beiden Wellengeschwindigkeiten  $u'_b$  und  $u''_b$  entsprechen, bekommt man in zweiachsigen Kristallen, statt der üblichen zwei Strahlenrichtungen, einen *Strahlenkegel* von der in § 2, Kap. IV beschriebenen Gestalt. Diese Erscheinung heißt *innere konische Refraktion*. Sie ist von der sogenannten *äußeren konischen Refraktion* zu unterscheiden, die beobachtet wird, wenn ein sich im Kristall in der Richtung einer der beiden optischen Achsen fortpflanzender Strahl in den äußeren Raum heraustritt. — Die einem solchen Strahl zugehörigen Normalrichtungen bilden bekanntlich ebenfalls einen Kegel, und man bekommt im äußeren Raum nach einer Brechung dieser Normalrichtungen einen divergierenden Strahlenkegel. Diese Erscheinung kann man umkehren, wenn man (mittels einer Linse) einen konvergierenden Strahlenkegel auf das Kristall einfallen läßt.

Die Doppelbrechungserscheinungen können in einer sehr einfachen und anschaulichen Weise graphisch dargestellt werden, mittels der in § 2, Kap. IV beschriebenen Strahlenfläche, in Verknüpfung mit dem *Huyghensschen* Prinzip. — Wir stellen uns vor, daß eine elektromagnetische Störung aus einem Punkte  $O$  auf der Grenzfläche  $x = 0$  sich nach allen Seiten — d. h. im äußeren leeren Raum ( $a$ ) und in dem Kristallkörper ( $b$ ) — ausbreitet. Wir bekommen dabei in  $a$  eine halbkugelförmige Strahlenfläche mit dem Radius  $u_a t$  ( $t =$  Fortpflanzungszeit)

und in  $b$  eine Hälfte der charakteristischen Strahlenfläche des betrachteten Kristalls. Diese Flächen sind in der Abb. 23 für den Fall eines einachsigen positiven Kristalls aufgezeichnet (vgl. Abb. 16 a, § 2, Kap. IV). Wir haben sie dabei durch punktierte Linien auf der anderen Seite der Grenzebene vervollständigt.

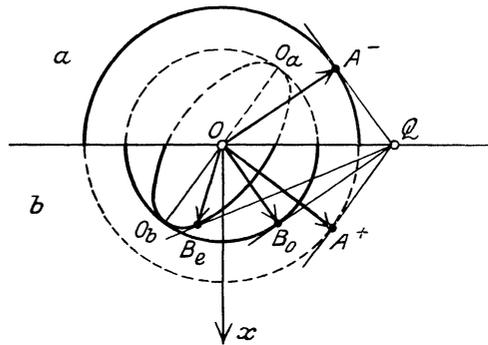


Abb. 23.

Die Richtung der einfallenden Wellen (oder Strahlen) sei  $OA^+$ . Die Tangentenebene  $A^+Q$  zu der inneren (punktierten) Halbkugel  $u_a t$  stellt offenbar die Richtung der einfallenden (ebenen) Wellenflächen dar. Die zugehörigen reflektierten und durchgehenden Wellenflächen ergeben sich dann als die durch  $Q$  gezogenen Tangentenebenen zur äußeren Halbkugel einerseits ( $QA^-$ ) und zu den zwei (inneren) Blättern der

Kristallstrahlenfläche andererseits ( $QB_o, QB_e$ ). Im betrachteten Fall reduziert sich die letztere auf eine Kugel mit dem Radius

$$u_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} (\epsilon_1 = \epsilon_2)$$

und ein Rotationsellipsoid mit den Halbachsen

$$u_1 \text{ und } u_3 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_3}}.$$

Die Vektoren  $OB_o$  und  $OB_e$  stellen die Richtungen resp. der gewöhnlichen und der außergewöhnlichen Strahlen dar. Die Beträge dieser Vektoren sind den entsprechenden Strahlengeschwindigkeiten und die Längen der zugehörigen Normalen (aus  $O$ ) sind den Wellengeschwindigkeiten  $u_o$  bzw.  $u_e$  proportional. Für die gewöhnlichen Strahlen stimmen die Strahlen- und Wellengeschwindigkeit nach Richtung und Größe überein.

Was schließlich die Grundschwingungsrichtungen anbetrifft, so sind sie, sofern es sich um die elektrische Feldstärke oder Erregung handelt, im Falle der gewöhnlichen Strahlen senkrecht zu der Ebene  $O_bOB_o$  ( $O_bO_a$ -optische Achse) und im Falle der außergewöhnlichen Strahlen parallel der Ebene  $O_bOB_e$ . Es muß beachtet werden, daß die beiden Ebenen voneinander im allgemeinen verschieden sind. Die betrachteten Grundschwingungsrichtungen  $\mathfrak{D}_o, \mathfrak{D}_e$  (oder  $\mathfrak{E}_o, \mathfrak{E}_e$ ) brauchen deshalb nicht notwendig zueinander genau senkrecht zu sein.

Diese Resultate und die entsprechenden Resultate für den allgemeinen Fall zweiachsiger Kristalle, können selbstverständlich rein analytisch aufgestellt werden. Zu diesem Zweck muß man die obigen Gleichungen für  $u'_b$  und  $u''_b$  mit der *Fresnelschen* Gleichung kombinieren. Wenn man den Richtungskosinus zwischen den Symmetrieachsen des Kristalls (oder genauer seines Dielektrizitätstensors)  $X_1, X_2, X_3$  mit den Achsen  $XYZ$  durch  $\gamma_{ik}$  bezeichnet [z. B.  $\gamma_{12} = \cos(X_1, Y)$ ], so bekommt man die folgenden Relationen zwischen den Komponenten der Wellennormale  $n_b$  in bezug auf die beiden Achsensysteme

$$n_1 = n_x \gamma_{11} + n_y \gamma_{12} + n_z \gamma_{13}, \text{ usw.}$$

oder mit Rücksicht auf  $n_x = \cos \Theta_b, n_y = \sin \Theta_b, n_z = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \gamma_{11} \cos \Theta_b + \gamma_{12} \sin \Theta_b, \\ n_2 &= \gamma_{21} \cos \Theta_b + \gamma_{22} \sin \Theta_b, \\ n_3 &= \gamma_{31} \cos \Theta_b + \gamma_{32} \sin \Theta_b. \end{aligned} \right\}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die *Fresnelsche* Gleichung

$$\frac{n_1^2}{u_b^2 - u_1^2} + \frac{n_2^2}{u_b^2 - u_2^2} + \frac{n_3^2}{u_b^2 - u_3^2} = 0$$

erhält man, in Verknüpfung mit  $u_b^2 = \frac{u_a^2}{\sin^2 \Theta_a} \sin^2 \Theta_b$ , eine Gleichung

für die Bestimmung der beiden möglichen Werte des Refraktionswinkels  $\theta_b$ .

Nachdem die Fortpflanzungsrichtungen und Geschwindigkeiten und auch die Grundschrägungsrichtungen festgelegt sind, kann man ohne Schwierigkeit die Beziehung zwischen den *Amplituden* der einfallenden, reflektierten und den beiden gebrochenen Wellen bestimmen, und zwar ungefähr auf dieselbe Weise wie für den im § 1 betrachteten Fall der senkrechten Inzidenz.

### § 3. Reflexion und Brechung von Kugelwellen an einer ebenen Grenzfläche; Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie.

#### 1. Vollkommen leitende Ebene.

Die Reflexion der elektromagnetischen Wellen an der Grenzfläche eines isotropen absorbierenden Körpers ( $b$ ) und des leeren Raumes (oder eines vollkommen durchsichtigen Körpers)  $a$  ist, wie schon oben erwähnt wurde, desto stärker, je größer der Absorptionskoeffizient von  $b$ , d. h. seine Dämpfungskonstante oder effektive elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  ist. In dem Grenzfall  $\sigma = \infty$ , welcher den sogenannten *idealen* oder *vollkommenen Leitern* entspricht, muß bei allen Richtungen der einfallenden Wellen eine *Totalreflexion* stattfinden, wobei die durchgehenden Schwingungen (ebenso wie in dem früher betrachteten Fall der inneren Totalreflexion) in einem unendlich kleinen Abstand von der Grenzfläche verschwinden.

Ideale Leiter sind in der Wirklichkeit selbstverständlich nicht vorhanden. Man kann aber leicht zeigen, daß jeder Metallkörper für elektromagnetische Schwingungen, deren Frequenz in bestimmten Grenzen liegt (d. h. nicht zu hoch und nicht zu klein ist) sich näherungsweise als vollkommener Leiter behandeln läßt.

Der Reflexions- und Durchlässigkeitskoeffizient von  $b$  (in bezug auf  $a$ ) hängt in der Tat, wie man aus den Formeln (15c) ersehen kann, von dem *Verhältnis*  $\frac{\sigma}{\nu}$  ( $\sigma = \sigma_b$ ) ab. Eine Verminderung der Frequenz ist folglich in dieser Hinsicht äquivalent einer Vergrößerung der Leitfähigkeit. Bei  $\frac{\sigma}{\nu} = \infty$  reduzieren sich die Formeln (15c) auf die Gestalt:

$$E_z^- = -E_z^+, \quad E_z^b = 0, \quad (16)$$

$$H_z^- = +H_z^+, \quad H_z^b = 2 \frac{\mu_b}{\mu_a} H_z^a \quad (x=0), \quad (16a)$$

ganz unabhängig davon, ob dieser Grenzfall durch  $\sigma \rightarrow \infty$  oder  $\nu \rightarrow 0$  erreicht wird. Man muß aber den Umstand beachten, daß der Absorptionskoeffizient der Metalle, welcher bei großen Werten von  $\sigma$  sich

näherungsweise durch die Formel  $\zeta = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\mu\sigma\nu} (= k^{(2)})$  ausgedrückt, bei  $\nu \rightarrow 0$  gegen Null konvergiert. Die durchgehenden Schwingungen können dabei nach (15) und (15a) in der Form:

$$\psi^b = \psi^{0b} e^{-\zeta x + i[\zeta(x \cos \Theta_b + y \sin \Theta_b) - \omega t]}$$

dargestellt werden, mit dem folgenden Wert von  $\Theta_b$ :

$$\sin \Theta_b = \frac{\sin \Theta_a}{n_b^{(1)}} \underset{\sim}{\propto} \frac{\sin \Theta_a}{\sqrt{\frac{\mu\sigma}{\nu}}} \rightarrow 0,$$

d. h.  $\Theta_b \rightarrow 0$ . Es wird also in der betrachteten Annäherung

$$\varphi^b = \psi^{0b} e^{-\zeta x + i(\zeta x - \omega t)}.$$

Die mit  $E_z^b$  verknüpften Größen ( $H_x^b, H_y^b$ ) müssen folglich jenseits der Grenzfläche verschwinden, während die mit  $H_z$  verknüpften Größen ( $E_x^b, E_y^b$ ) desto tiefer in den Körper  $b$  eindringen, je kleiner die Schwingungsfrequenz ist.

Diesen entgegengesetzten Einfluß der Schwingungsfrequenz auf die Durchlässigkeit der Metalloberfläche und des Metallinneren haben wir schon im § 1 betont. Die „optimale“ Frequenz, bei welcher die  $E_z$ - und gleichzeitig die  $H_z$ -Schwingungen am schlechtesten in das Metall eindringen, bei welcher es also sich am besten einem Idealleiter annähert, ist keine ganz bestimmte Zahl. Sie hängt offenbar von der Eindringungstiefe ab, die in Betracht genommen wird und auch gewissermaßen von dem Einfallswinkel. Sie ist jedenfalls proportional der Leitfähigkeit und gleich einem kleinen Bruchteil davon.

Die Grenzbedingungen für den Fall eines Idealleiters lassen sich leicht direkt aufstellen, und zwar nicht nur für ebene Wellen und ebene Oberflächen, sondern für beliebige elektromagnetische Vorgänge (in  $a$ ) und eine beliebige Gestalt der Grenzfläche ( $ab$ ). Es müssen nämlich in diesem Fall die Feldstärken  $\mathfrak{E}^b$  und  $\mathfrak{H}^b$  sämtlich verschwinden. Denn eine von Null verschiedene elektrische Feldstärke würde einen unendlich starken Strom in  $b$  erzeugen. Und aus dem Verschwinden von  $\mathfrak{E}^b$  muß nach der Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{E}^b + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}^b}{\partial t} = 0$  auch das Verschwinden von  $\mathfrak{H}^b$  (abgesehen von einem unwesentlichen zeitlich konstanten Anteil) folgen. Es können also bei einem idealen Leiter nur *Flächenladungen* und *Flächenströme* stattfinden, die sein Inneres von dem elektromagnetischen Feld vollkommen *abschirmen*. Diese Schirmwirkung besteht offenbar in einer Vernichtung (oder eher einer Kompensation) des von außen eindringenden primären Feldes durch das sekundäre Feld, das von den erwähnten Flächenladungen und Strömen bedingt wird.

Nach den allgemeinen Grenzbedingungen ( $I'$ ) § 3, Kap. I, müssen dabei die tangentielle Komponente von  $\mathfrak{E}^a$  und die normale Komponente

von  $\mathfrak{S}^a$  verschwinden:

$$\mathbf{n} \times \mathfrak{C}^a = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathfrak{S}^a = 0, \tag{17}$$

während nach (III') die Flächendichte der (freien) Ladung und Strömung mit der Normalkomponente von  $\mathfrak{C}^a$  und der Tangentialkomponente von  $\mathfrak{S}^a$  durch die Beziehungen

$$\mathbf{n} \cdot \mathfrak{C}^a = \frac{4\pi}{\epsilon_a} \eta, \quad \mathbf{n} \times \mathfrak{S}^a = 4\pi \mu_a \mathfrak{I} \tag{17a}$$

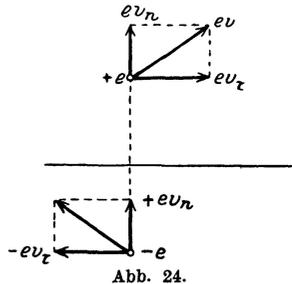
verknüpft sind.

Die Formeln (17) stellen die Verallgemeinerung der Beziehungen (16), d. h. von  $E_z = 0$  und der daraus nach (11) folgenden Formel  $H_x = 0$  dar. Der Vektor  $\mathbf{n}$  bedeutet hier die äußere Normale zum Körper  $b$ .

Wir wollen nun wieder zu dem früher betrachteten Fall einer unendlich ausgedehnten ebenen Grenzfläche  $x = 0$  zurückkehren, aber statt ebener Wellen einen ganz beliebigen elektromagnetischen Vorgang in dem Halbraum  $a$  in Betracht ziehen. Die  $X$ -Achse denken wir uns dabei *in diesem* Halbraum (und nicht in  $b$ , wie früher) gezogen, so daß sie mit der Normalen  $\mathbf{n}$  zusammenfällt. Der Einfachheit halber setzen wir  $\epsilon_a = \mu_a = 1$ , nehmen also  $a$  als leer und lassen den Index  $a$  fort.

Es läßt sich leicht zeigen, daß eine solche ideal leitende Ebene wie *ein vollkommener Spiegel wirkt* — in dem Sinne, daß sein sekundäres (oder reflektiertes) Feld identisch ist mit dem elektromagnetischen Feld eines Systems von (fiktiven) elektrischen Ladungen, die in jedem Augenblick *symmetrisch* zu den in  $a$  vorhandenen Ladungen verteilt sind und die entgegengesetzte Größen haben.

Wir stellen uns zunächst vor, daß das primäre Feld durch eine Punktladung  $e$  erzeugt wird, die sich in einer gegebenen ganz willkürlichen Weise im Halbraum  $x > 0$  bewegt. Seine Koordinaten  $x, y, z$  sind also als gegebene Funktionen der Zeit  $t$  anzusehen. Da dieses Feld im negativen Halbraum durch das sekundäre Feld der Flächenladungen und Ströme vermindert wird, so muß das letztere identisch sein mit dem Feld der zu  $e$  entgegengesetzten Punktladung  $-e$  mit denselben Koordinaten  $x > 0, y, z$ . Andererseits muß dieses sekundäre Feld offenbar *symmetrisch in bezug auf die Fläche  $x = 0$*  sein. Daraus folgt, daß es im positiven Halbraum mit dem Feld einer sich im negativen Halbraum befindlichen Punktladung  $-e$  mit den Koordinaten  $-x, y, z$  übereinstimmen muß (Abb. 24).



Man kann sich leicht überzeugen, daß die Grenzbedingungen (17) für das resultierende Feld immer, d. h. unabhängig von der Bewegung

von  $e$  und seines Spiegelbildes befriedigt werden. Dies folgt sofort aus den allgemeinen Ausdrücken für das elektromagnetische Feld einer bewegten Punktladung [Bd. I, S. 170, (8) und (9)], mit Rücksicht darauf, daß die tangentiellen ( $y, z$ ) Komponenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung von  $e$  und  $-e$  zusammenfallen, während ihre Normalkomponenten entgegengesetzt gleich sind.

Die Komponenten der primären und der sekundären Feldstärken  $\psi^+$  bzw.  $\psi^-$  in symmetrisch liegenden Punkten ( $x, y, z$ ) und speziell auf der Ebene  $x = 0$  sind dabei miteinander durch die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} E_{x_1}^+ &= E_{x_1}^-, & E_{y_1}^+ &= -E_{y_1}^-, & E_z^+ &= -E_z^- \\ H_x^+ &= -H_x^-, & H_y^+ &= H_y^-, & H_z^+ &= H_z^- \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

verknüpft.

Die angeführten Resultate bleiben selbstverständlich für ein beliebiges System von Ladungen gültig. Will man ein solches System durch kontinuierlich verteilte Ladungen und Ströme mit der Raumdichte  $\varrho^+$  bzw.  $j^+$  ersetzen, so bekommt man als Spiegelbild eines Volumenelementes  $V$  ein symmetrisch liegendes Volumelement derselben Größe mit der Ladungsdichte  $\varrho^- = -\varrho^+$  und der Stromdichte  $j_x^- = +j_x^+$ ,  $j_y^- = -j_y^+$ ,  $j_z^- = -j_z^+$ . Es kann sich dabei ebensogut um freie wie um gebundene Ladungen handeln.

Es sei bemerkt, daß die Gestalt und die Beschaffenheit des Körpers  $b$  jenseits der ideal leitenden Ebene für diese Resultate ganz belanglos ist. Sie gelten näherungsweise auch bei einer gekrümmten Fläche, sofern die Krümmungsradien groß gegenüber dem Abstand des elektrischen Systems sind.

## 2. Elektrische und magnetische Antenne bei der Annahme einer ideal leitenden Erde.

Wir wollen nun etwas eingehender den einfachsten Fall eines solchen Systems, nämlich einen *elementaren harmonischen Oszillator* betrachten. Wenn der Abstand  $x_0$  des letzteren von der Spiegelebene sehr groß im Vergleich mit der Wellenlänge  $\lambda$  der ausgestrahlten Schwingungen ist, bekommt man eine schematische Darstellung einer punktförmigen Lichtquelle, die sich in der Ebene  $x = 0$  spiegelt. Bei unendlich großem Abstand kommen wir zurück auf den früher betrachteten Fall der Reflexion ebener Wellen. Der entgegengesetzte Fall eines sehr kleinen Abstandes entspricht näherungsweise den Verhältnissen, die in der drahtlosen Telegraphie verwirklicht werden, wobei der Oszillator die Sendeantenne und die leitende Ebene die Erd- oder Seeoberfläche schematisiert.

Die gewöhnlich gebrauchten Antennen können als *elektrische* Oszillatoren mit einer festen vertikalen oder horizontalen Achse aufgefaßt werden. Es ist aber möglich, statt solcher „geöffneter“ Antennen auch

geschlossene „Rahmenantennen“ zu benutzen, die sich durch elementare magnetische Oszillatoren schematisieren lassen (Bd. I, S. 165).

Im Falle einer elektrischen Antenne mit vertikaler Achse haben die Schwingungen in ihrem Spiegelbild dieselbe Phase. Denn die Spiegelung geschieht in diesem Fall durch Umkehrung der Ladungsgröße und der Bewegungsrichtung ( $e^- = -e^+$ ,  $v^- = -v^+$ ). Der elektrische Impuls ( $e \frac{v}{c}$ ) und das elektrische Moment  $p \left( ev = \frac{dp}{dt} \right)$  müssen dabei unverändert bleiben (vgl. Abb. 25e). Die Spiegelung ist folglich äquivalent — sofern die Sendeantenne sich in unmittelbarer Nähe von der idealleitenden Erde befindet — einer Verdoppelung dieser Antenne, oder genauer seines elektrischen Momentes, und dementsprechend der elektrischen und magnetischen Feldstärke im ganzen oberen Halbraum. Die Energiestrahlung muß also in diesem Halbraum durch die Anwesenheit des „Erdspeiegels“ viermal vergrößert werden oder sich verdoppeln, wenn man seinen Betrag für den ganzen Raum rechnet.

Ähnliche Verhältnisse bekommt man im Falle der magnetischen Antenne mit horizontaler Achse (Abb. 25m).

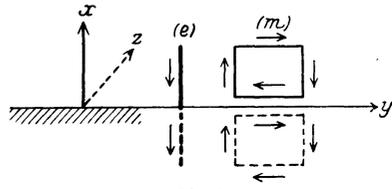


Abb. 25.

Bei einer elektrischen Antenne mit horizontaler Achse oder einer magnetischen mit vertikaler Achse muß die Strahlung und auch das elektromagnetische Feld — abgesehen von den benachbarten Punkten — in erster Annäherung verschwinden (siehe unten).

Das elektromagnetische Feld eines harmonischen elektrischen Oszillators ist für genügend große Abstände (d. h. in der „Wellenzone“) durch die Formel (35) auf S. 150 des ersten Bandes gegeben. Das elektrische Feld einer vertikalen elektrischen Antenne mit dem effektiven (verdoppelten) Moment  $p_x = p_0 e^{-i\omega t}$  ( $p_y = p_z = 0$ ) drückt sich folglich in der Nähe der Erdoberfläche ( $x = 0$ ) durch die Formel

$$E^{(e)} = E_x^{(e)} = \frac{k^2 p_x}{R} e^{ikR} \left( k = \frac{\omega}{c}, \quad R = \sqrt{y^2 + z^2} \right), \quad (18)$$

aus, während das magnetische Feld sich daraus mittels der Relation

$$\mathfrak{H}^{(e)} = \mathfrak{R}_0 \times \mathfrak{E}^{(e)} \quad (\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R} : \mathfrak{R})$$

ergibt.

In dem Falle einer horizontalen magnetischen Antenne mit derselben Schwingungsfrequenz und dem effektiven magnetischen Moment  $m = m_x = m_0 e^{-i\omega t}$  ( $m_y = m_z = 0$ ) haben wir andererseits nach (51a) (Bd. I, S. 166):

$$E^{(m)} = E_x^{(m)} = -k^2 m_x \frac{y}{R^2} e^{ikR}$$

oder wenn wir zu einem polaren Koordinatensystem in der  $x = 0$ -Ebene übergehen und die Polarachse in der  $y$ -Richtung ziehen ( $y = R \cos \varphi$ ,  $z = R \sin \varphi$ ):

$$E^{(m)} = -\frac{k^2 m_z}{R} e^{ikR} \cos \varphi, \quad (18a)$$

wobei die Relation zwischen  $E$  und  $H$  unverändert bleibt.

Diese Formeln zeigen, daß durch Kombination einer elektrischen Vertikalantenne und einer magnetischen Horizontalantenne eine *gerichtete* Ausstrahlung bedingt werden kann. Es müssen dabei die Schwingungsphasen entweder gleich oder entgegengesetzt sein, und die Amplituden  $p_0$  und  $m_0$  numerisch übereinstimmen. Man bekommt z. B. bei  $m_x = -p_x$  das folgende resultierende Feld (in der Nähe der Oberfläche):

$$|E| = E^e + E^m = \frac{k^2}{R} p_0 (1 + \cos \varphi),$$

d. h.

$$|E| = 2 \frac{k^2}{R} p_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (18b)$$

Die Abhängigkeit der Strahlungsintensität  $|E|^2$  von dem Azimutwinkel  $\varphi$  für die soeben betrachteten drei Fälle ist in der Abb. 26 graphisch dargestellt (der Radiusvektor des Diagramms ist der Größe  $|E|^2$  für die betreffende Richtung proportional).

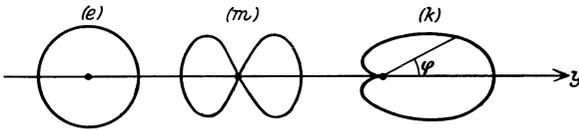


Abb. 26.

Diese Ergebnisse stellen eine nur sehr grobe Annäherung an die Verhältnisse dar, die bei der Ausbreitung der Radiowellen (d. h. der elektromagnetischen Wellen der drahtlosen Telegraphie und Telephonie) tatsächlich beobachtet werden. Die Hauptquelle der dabei auftretenden Komplikationen liegt nicht in der Kugelförmigkeit der Erde, sondern wie zuerst von *Sommerfeld* gezeigt worden ist, in ihrer ziemlich *geringen elektrischen Leitfähigkeit*.

Die Erdoberfläche (und auch die Seeoberfläche) ist nämlich ein sehr unvollkommener Spiegel nicht nur für die schnellen Lichtschwingungen (das können wir ohne weiteres erkennen!), sondern auch für die verhältnismäßig langsamen Schwingungen der Radiotechnik. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, müssen wir zu der genauen Fragestellung der vorhergehenden Paragraphen zurückkehren, d. h. die Erde als einen homogenen Körper mit der komplexen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon = \epsilon_0 + 2i \frac{\sigma}{\nu} \approx \frac{2i\sigma}{\nu}$  behandeln. Im Gegensatz aber zu unseren früheren Ausführungen, bei welchen die Quelle der einfallenden

Wellen als unendlich entfernt angesehen wurde, müssen wir jetzt diese Quelle, in der Gestalt eines elementaren Oszillators, in der unmittelbaren Nähe der Oberfläche, oder eher auf dieser Oberfläche selbst lokalisieren.

Wir wollen hier die *Sommerfeldsche* Lösung dieser Aufgabe für den Fall eines elektrischen Oszillators mit vertikaler Achse angeben.

### 3. Zylindrische Elementarwellen und Darstellung beliebiger Wellenvorgänge durch ihre Superposition.

Wir fassen irgend eine elektromagnetische Größe  $\psi$ , z. B. das Polarisationspotential, ins Auge und zerlegen sie in zwei Anteile: den primären  $\psi^0$ , welcher von dem Oszillator selbst herrührt und den sekundären  $\psi'$ , welcher von den (erzwungenen) Schwingungen im Körper  $b$  (d. h. in der Erde) bedingt wird. Der erste Anteil ist als bekannt anzusehen; der zweite läßt sich auf Grund der Differentialgleichung

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (k = k_b) \quad (19)$$

und der Grenzbedingungen bestimmen.

Es ist dabei zweckmäßig, nicht von der für  $\psi^0$  maßgebenden kugelsymmetrischen Lösung dieser Gleichung

$$\psi = \psi^0 \frac{e^{ikR}}{R} \quad (19a)$$

auszugehen, sondern aus der einfachsten *zylindersymmetrischen* Lösung, die sich ergibt, wenn man

$$\psi = u(x) v(r) \quad (19b)$$

setzt, wo  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  den Abstand von der  $X$ -Achse (parallel zur  $yz$ -Ebene) bedeutet ( $r = R$  bei  $x = 0$ ).

Man hat in diesem Fall:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right)$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{z^2}{r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right).$$

Es wird also

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (\psi \bar{r})}{\partial r^2} + \frac{1}{4r^2} \psi,$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + k^2 \psi = 0, \quad (20)$$

oder

$$\frac{\partial^2 (\psi \bar{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\psi \bar{r})}{\partial r^2} + \left( k^2 + \frac{1}{4r^2} \right) \psi \bar{r} = 0. \quad (20a)$$

Durch Einsetzen von (19b) bekommen wir ferner nach Division mit  $\psi \sqrt{r}$ :

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{v \sqrt{r}} \frac{\partial^2 (v \sqrt{r})}{\partial r^2} + k^2 + \frac{1}{4r^2} = 0.$$

Daraus folgt, da  $u$  nur von  $x$  und  $v$  nur von  $r$  abhängt:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 = - \frac{1}{v \sqrt{r}} \frac{\partial^2 (v \sqrt{r})}{\partial r^2} - \frac{1}{4r^2} = l^2,$$

d. h.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = (l^2 - k^2) u,$$

und

$$\frac{d^2 (v \sqrt{r})}{dr^2} + \left( l^2 + \frac{1}{4r^2} \right) v \sqrt{r} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + l^2 v = 0. \quad (20b)$$

Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen lauten

$$u = C_1 e^{+\sqrt{l^2 - k^2} x} + C_2 e^{-\sqrt{l^2 - k^2} x}$$

und

$$v = C_3 J(lr) + C_4 K(lr)$$

wo  $J(\varrho)$  und  $K(\varrho)$  die Besselschen Funktionen (nullter Ordnung) erster bzw. zweiter Art bedeuten:

$$J(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\varrho \cos \varphi} d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varrho^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \quad (20c)$$

$$K(\varrho) = \frac{1}{i} \int_0^{i\infty} e^{i\varrho \cos \varphi} d\varphi = \lg \frac{2\gamma^i}{\varrho} + O(\varrho^2). \quad (\gamma = 0,5615) \quad (20d)$$

Die einfachste zylindersymmetrische Lösung von (19) hat also die folgende Gestalt:

$$\psi = C e^{\pm \sqrt{l^2 - k^2} x} J(lr). \quad (21)$$

Der Parameter  $l$  kann dabei beliebige — auch komplexe — Werte annehmen. Betrachtet man  $C$  als eine willkürliche Funktion von  $l$ , so kann man die allgemeine im Unendlichen verschwindende Lösung der Gleichung (19) durch das Integral

$$\psi = \int_0^{\infty} C(l) J(lr) e^{\mp \sqrt{l^2 - k^2} x} l dl \quad (x \geq 0) \quad (21a)$$

darstellen wobei das Minuszeichen für  $x > 0$  und das Pluszeichen für

$x > 0$  gilt<sup>1)</sup>. Der Integrationsweg kann in der komplexen  $l$ -Ebene beliebig verlaufen.

Diese Integraldarstellung ist ganz analog zu der (Fourierschen) Integraldarstellung der Lösungen von (19) mittels ebener sinusoidaler Wellen, die im § 4, Kap. IV angeführt worden ist [vgl. insbesondere (39a) und (41a)]. Es spielt dabei die  $x$ -Koordinate die Rolle der Zeit  $t$  und  $r$  die Rolle der räumlichen Koordinaten; die Exponentialfunktion ( $e^{i l r}$ ) ist hier durch die Besselsche Funktion  $J(lr)$  ersetzt. Wenn die Funktion  $\psi(x, r)$  für  $x = 0$  bekannt ist, kann man sie für einen beliebigen Wert von  $x$  nach (21a) berechnen. Dazu ist es nur notwendig, die „Amplitudenfunktion“  $C(l)$  der Besselschen Integraldarstellung

$$\psi(0, r) = \int_0^{\infty} C(l) J(lr) l dl \tag{21b}$$

zu wissen; diese Amplitudenfunktion läßt sich nach der Formel

$$C(l) = \int_0^{\infty} \psi(0, r) J(lr) r dr \tag{21c}$$

bestimmen — in vollkommener Analogie zu der entsprechenden Formel der Fourierschen Integraldarstellung.

Es sei bemerkt, daß die Besselsche Integraldarstellung sich aus der Fourierschen, für den Fall von zwei Variablen ( $y, z$ ) direkt ergibt. Setzt man nämlich

$$\psi(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(m, n) e^{i(m y + n z)} dm dn,$$

so wird

$$C(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y, z) e^{-i(m y + n z)} dy dz.$$

Wir führen nun den Vektor  $l$  mit den Komponenten  $l_y = m, l_z = n$  ein, und bezeichnen den Winkel  $(l, y)$  mit  $\alpha$ . Die obigen Integrale können dabei folgendermaßen dargestellt werden:

$$\left. \begin{aligned} \psi(y, z) &= \psi(r, \varphi) = \int_0^{\infty} l dl \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i l r \cos(\varphi - \alpha)} C(l, \alpha) d\alpha, \\ C(l, \varphi) &= C(m, n) = \int_0^{\infty} r dr \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i l r \cos(\varphi - \alpha)} \psi(r, \varphi) d\varphi. \end{aligned} \right\} \tag{21d}$$

In dem Spezialfall, daß  $\psi$  nur von  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  abhängt, reduzieren sich diese wegen (20c) Formeln auf (21b) und (21c).

<sup>1)</sup> Der reelle Anteil der Quadratwurzel soll *positiv* sein.

#### 4. Anwendung der allgemeinen Formeln auf den Fall einer elektrischen Vertikalantenne; zylindrische Oberflächenwellen.

Wir wenden die letzteren Formeln zunächst auf die kugelsymmetrische Lösung (19a) und (19) an. Es wird dabei  $\psi(0, r) = \psi(r) = \psi_0 \frac{e^{ikr}}{r}$  und folglich

$$C(l) = \psi_0 \int_0^\infty e^{ikr} J(lr) dr = \frac{\psi_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{ikr(1 + \frac{1}{k} \cos \varphi)} dr.$$

Wir setzen nun  $k$  als komplex ( $= k^{(1)} + ik^{(2)}$ ) und seinen imaginären Anteil ( $k^{(2)}$ ) als positiv voraus. Man bekommt dann einfach

$$\int_0^\infty e^{ikr(1 + \frac{1}{k} \cos \varphi)} dr = \frac{1}{ik(1 + \frac{l}{k} \cos \varphi)}$$

und nach einer bekannten Formel der Integralrechnung

$$C(l) = \frac{\psi_0}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + \frac{l}{k} \cos \varphi} = \frac{\psi_0}{ik} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{k^2}}} = \frac{\psi_0}{\sqrt{l^2 - k^2}},$$

oder schließlich:

$$\psi_0 \frac{e^{ikR}}{R} = \psi_0 \int_0^\infty \frac{ldl}{\sqrt{l^2 - k^2}} J(lr) e^{\mp \sqrt{l^2 - k^2} x}. \quad (22)$$

Die Komponenten des primären Polarisationspotentials lassen sich in dieser Form bei  $k = k_a$  und bei passender Wahl der Amplituden  $\psi_0$  darstellen. In dem Fall eines Oszillators mit vertikaler Achse kann man also  $Z_y^0 = Z_z^0 = 0$  und

$$Z_x^0 = \psi^+ = \int_0^\infty \frac{ldl}{\sqrt{l^2 - k_a^2}} J(lr) e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x} \quad (x > 0) \quad (22a)$$

setzen (den Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  lassen wir im folgenden immer weg). Für das sekundäre Polarisationspotential in  $a$  und das totale Polarisationspotential in  $b$  machen wir die analogen Ansätze:

$$Z_y^a = Z_z^a = 0, \quad Z_x^a = \psi^- = \int_0^\infty \frac{f_a(l) l dl}{\sqrt{l^2 - k_a^2}} J(lr) e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x}, \quad (x > 0) \quad (22b)$$

$$Z_y^b = Z_z^b = 0, \quad Z_x^b = \psi_b = \int_0^\infty \frac{f_b(l) l dl}{\sqrt{l^2 - k_b^2}} J(lr) e^{+\sqrt{l^2 - k_b^2} x}, \quad (x < 0) \quad (22c)$$

wobei  $f_a(l)$  und  $f_b(l)$  zwei zu bestimmende Funktionen bedeuten.

Die durch die Potentiale  $\psi^+$ ,  $\psi^-$  und  $\psi_b$  dargestellten Wellen entsprechen den einfallenden, reflektierten und durchgehenden Wellen der in den vorhergehenden Paragraphen dargelegten optischen Theorie.

Die Funktionen  $f_a$  und  $f_b$  lassen sich mittels der Grenzbedingungen (4a) bestimmen. Nach den Formeln (7a) in Kap. IV hat man bei  $Z_y = Z_z = 0$ :

$$H_x = 0, \quad H_y = -i k_0 \varepsilon_s \mu \frac{\partial Z_x}{\partial z}, \quad H_z = i k_0 \varepsilon_s \mu \frac{\partial Z_x}{\partial y},$$

$$E_x = -\left(\frac{\partial^2 Z_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z^2}\right), \quad E_y = \frac{\partial^2 Z_x}{\partial x \partial y}, \quad E_z = \frac{\partial^2 Z_x}{\partial x \partial z},$$

d. h.

$$E_x = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right), \quad E_r = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial r}, \quad E_\varphi = 0, \quad (23)$$

$$H_x = 0, \quad H_r = 0, \quad H_\varphi = \frac{ic}{\omega} k^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (23a)$$

wobei  $E_r$  und  $E_\varphi$  die radiale und die azimutale Komponente von  $\mathfrak{E}$  bedeuten.

Die Grenzbedingungen (4a) lauten in unserem Fall bei  $\varepsilon_{sa} = \mu_a = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s E_x^b &= E_x^+ + E_x^-, & E_r^b &= E_r^+ + E_r^-, \\ \frac{1}{\mu} H_\varphi^b &= H_\varphi^+ + H_\varphi^- \end{aligned} \right\} (x=0). \quad (23b)$$

Wir bekommen also mit Rücksicht auf  $E_r^+ = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_s f_b}{\sqrt{l^2 - k_b^2}} &= \frac{f_a + 1}{\sqrt{l^2 - k_a^2}}, & f_b &= -f_a. \\ \frac{k_b^2}{\mu \sqrt{l^2 - k_a^2}} f_b &= \frac{k_a^2(1 + f_a)}{\sqrt{l^2 - k_a^2}}. \end{aligned}$$

Die erste und dritte Gleichung sind miteinander wegen  $k_b^2 = k_a^2 \varepsilon_s \mu$  äquivalent. Es wird folglich

$$f_b = -f_a = \frac{\sqrt{l^2 - k_b^2}}{\varepsilon_s \sqrt{l^2 - k_a^2} + \sqrt{l^2 - k_b^2}}, \quad (23c)$$

oder wenn wir  $\mu = 1$  setzen

$$f_b = -f_a = \frac{k_a^2 \sqrt{l^2 - k_b^2}}{k_b^2 \sqrt{l^2 - k_a^2} + k_a^2 \sqrt{l^2 - k_b^2}}. \quad (23d)$$

Die vollständigen Potentiale in  $a$  und  $b$  drücken sich also durch die Integrale:

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= k_b^2 \int_0^\infty \frac{J(lr)}{N} e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x} l dl, \\ \psi_b &= k_a^2 \int_0^\infty \frac{J(lr)}{N} e^{+\sqrt{l^2 - k_b^2} x} l dl \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

aus, wo zur Abkürzung

$$N = k_b^2 \sqrt{l^2 - k_a^2} + k_a^2 \sqrt{l^2 - k_b^2} \quad (24a)$$

gesetzt ist.

Durch diese Formeln ist unsere Aufgabe prinzipiell gelöst und auf die Auswertung der obigen Integrale reduziert.

Diese Auswertung läßt sich nach der Methode der komplexen Integration ausführen.

Die Integranden in (24) haben drei singuläre Punkte, nämlich einen Pol  $l = q$  bei  $N = 0$  und zwei Verzweigungspunkte  $l = k_a$  und  $l = k_b$ . Wir betrachten zunächst den ersten Bestandteil der entsprechenden Integrale, welcher dem Umgang in der komplexen  $l$ -Ebene um diesen Pol entspricht. Durch Residuumbildung bekommen wir

$$\oint_q \frac{J(lr)}{N} e^{\mp \sqrt{l^2 - k^2} x} l dl = 2\pi i J(qr) e^{\mp \sqrt{q^2 - k^2} x} \frac{q}{\left(\frac{dN}{dl}\right)_{l=q}}.$$

Nun ist

$$k_b^2 \sqrt{q^2 - k_a^2} + k_a^2 \sqrt{q^2 - k_b^2} = 0,$$

d. h.

$$q^2 (k_b^4 - k_a^4) = k_a^2 k_b^2 (k_b^2 - k_a^2)$$

oder

$$q^2 = \frac{k_a^2 k_b^2}{k_a^2 + k_b^2} \cdot \left( \frac{1}{k_a^2} + \frac{1}{k_b^2} \right) \quad (25)$$

Man hat also:

$$q^2 - k_a^2 = -\frac{k_a^4}{k_a^2 + k_b^2}, \quad q^2 - k_b^2 = -\frac{k_b^4}{k_a^2 + k_b^2},$$

$$\left(\frac{dN}{dl}\right)_{l=q} = q \left( \frac{k_b^2}{\sqrt{q^2 - k_a^2}} + \frac{k_a^2}{\sqrt{q^2 - k_b^2}} \right) = \frac{q}{i} \sqrt{k_a^2 + k_b^2} \left( \frac{k_b^2}{k_a^2} + \frac{k_a^2}{k_b^2} \right),$$

und schließlich:

$$\oint_q \frac{J(lr)}{N} e^{\mp \sqrt{l^2 - k^2} x} l dl = -\frac{2\pi}{\sqrt{k_a^2 + k_b^2} k_a^4 + k_b^4} J(qr) e^{\mp \sqrt{q^2 - k^2} x}. \quad (25a)$$

Bei genügend großen Werten des Arguments gilt bekanntlich die asymptotische Formel

$$J(\varrho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}} \cos\left(\varrho - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varrho}} \left\{ e^{i\left(\varrho - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\varrho - \frac{\pi}{4}\right)} \right\}. \quad (25b)$$

Man sieht daraus, daß der Ausdruck (24c) in großen Entfernungen von der Antenne *stehende Wellen* darstellt, deren Amplitude umgekehrt proportional der *Quadratwurzel* aus dem horizontalen Abstand  $r$  abnimmt. Mit dem Vertikalabstand  $x$  von der Erdoberfläche muß sie exponentiell abklingen.

Wenn man  $k_a^2$  als reell ( $= \frac{\omega^2}{c^2}$ ) und  $k_b^2$  als imaginär ( $= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{2 i \sigma_b}{\nu}$ ) voraussetzt, so wird

$$\sqrt{q^2 - k_a^2} = \pm i \frac{k_a^2}{\alpha + i\beta} = \pm (\beta + i\alpha) \frac{k_a^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\sqrt{q^2 - k_b^2} = \pm \frac{(\alpha - i\beta) 2 \sigma_b \omega^2}{\alpha^2 + \beta^2 \nu c^2},$$

wo

d. h.

$$\alpha + i\beta = \sqrt{k_a^2 + k_b^2}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2 i \alpha \beta = k_a^2 + 2 i \frac{\sigma_b \omega^2}{\nu c^2}$$

gesetzt ist. Wir können dabei  $\alpha$  und  $\beta$  als positiv voraussetzen und in den vorhergehenden Formeln das obere Zeichen wählen.

Bei  $\frac{\sigma_b}{\nu} \gg 1$  hat man näherungsweise  $\alpha = \beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma_b}{\nu}} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\nu \sigma_b} = \zeta$  [vgl. (16b)] und folglich

$$R e^{-\sqrt{q^2 - k_a^2} x} = e^{-\frac{k_a^2}{2\zeta} x} \quad (x > 0), \quad R e^{+\sqrt{q^2 - k_b^2} x} = e^{\zeta x} \quad (x < 0).$$

In dem entgegengesetzten Extremfall ( $\frac{\sigma_b}{\nu} \ll 1$ ) muß man auch die (reelle) Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_b$  des Erdbodens berücksichtigen. Es wird dabei:

$$R(\sqrt{q^2 - k_a^2}) = 2\pi \frac{\sigma_b}{c} \frac{1}{(1 + \epsilon_b)^2}, \quad R(\sqrt{q^2 - k_b^2}) \approx 2\pi \frac{\sigma_b}{c} \frac{\epsilon_b}{(1 + \epsilon_b)^2}.$$

Wellen der betrachteten Art heißen *Oberflächenwellen*, da sie sich tatsächlich nicht im ganzen Raum, sondern entlang der Grenzfläche der beiden Körper fortpflanzen und nur in der Nähe dieser Oberfläche beträchtliche Amplituden haben. In der Formel (25b) sind stehende Oberflächenwellen als Superposition von divergierenden und konvergierenden Wellen dargestellt. Wir müssen offenbar die letzteren weglassen, denn in dem von uns behandelten Problem können nur divergierende Wellen in Betracht kommen. Wir erhalten dabei den folgenden Ausdruck für die Potentiale (24) in großen horizontalen Entfernungen von der Antenne und in der Nähe der Erdoberfläche:

$$\frac{\psi_a}{k_b^2} = \frac{\psi_b}{k_a^2} \approx \frac{C}{\sqrt{q\nu}} e^{i(qr - \omega t)}, \quad |C| \approx \left| \frac{\sqrt{2\pi} \frac{k_a^2 k_b^2}{\sqrt{k_a^2 + k_b^2}}}{k_a^4 + k_b^4} \right|. \quad (25c)$$

Nach (25) hat man näherungsweise:

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{2 i \sigma_b \nu}{1 + 2 i \sigma_b \nu}},$$

d. h. bei großen Werten von  $\frac{\sigma_b}{\nu}$ ,  $q \approx \frac{\omega}{c}$ . In diesem Grenzfall, der einer vollkommen leitenden Erde entspricht, muß aber die Amplitude der

Oberflächenwellen verschwinden. Wir haben in der Tat bei der direkten Behandlung dieses Falles keine Spur solcher Wellen gefunden. Sie bilden also nur dann einen wesentlichen Anteil des durch die Formeln (24) dargestellten Wellenkomplexes, wenn das Verhältnis  $\frac{\sigma}{\nu}$  von der Größenordnung 1 ist. Es sei bemerkt, daß in dem entgegengesetzten Grenzfall  $\frac{\sigma_b}{\nu} \ll 1$  für den Parameter  $q$  sich die folgende Näherungsformel ergibt

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_b - 2i\sigma_b/\nu}{1 + \epsilon_b - 2i\sigma_b/\nu}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_b}{1 + \epsilon_b} \left[ 1 + i \frac{\sigma_b}{\nu} \left( \frac{1}{\epsilon_b} - \frac{1}{1 + \epsilon_b} \right) \right]}.$$

Wir können hier auf die ausführliche Diskussion der Formel (25c) nicht eingehen<sup>1)</sup>. — Wir werden ebenfalls diejenigen Anteile der Integrale (24), welche den Verzweigungspunkten  $l = k_a, k_b$  entsprechen, nicht näher betrachten. Man bekommt dabei in der Luft und im Erdinnern zwei *Raumwellen*, deren Amplituden ungefähr umgekehrt proportional dem *Quadrate* des Abstandes  $R = \sqrt{r^2 + x^2}$  abnehmen. In großen Abständen spielen diese Wellen eine untergeordnete Rolle. In dem Grenzfall einer ideal leitenden Erde verschwindet die innere Raumwelle und die Oberflächenwelle, während die äußere Raumwelle die übliche Gestalt annimmt (wobei die Amplitude umgekehrt proportional zur ersten Potenz des Abstandes abfällt).

### 5. Übersicht der anderen Typen von Sendeantennen.

Ähnliche Resultate ergeben sich in dem Fall einer elektrischen *Horizontalantenne*, den wir hier noch kurz betrachten werden. Wir stellen uns also einen elektrischen Oszillator vor, der parallel zur *Y*-Achse mit der Amplitude 1 schwingt. Es könnte zunächst erscheinen, daß man in diesem Fall nur die *y*-Komponente des Polarisationspotentials zu berücksichtigen braucht, während die zwei anderen verschwinden. Diese Annahme führt aber auf einen Widerspruch mit den Grenzbedingungen. Um die letzteren zu befriedigen, muß man noch die Vertikale (*x*)-Komponente dieses Potentials in Betracht ziehen.

Wir setzen zunächst wie in dem Falle einer Vertikalantenne

$$Z_x^0 = Z_z^0 = 0, \quad Z_y^0 = \psi_y^+ = \frac{e^{i k_a R}}{R} = \int_0^\infty \frac{l dl}{\sqrt{l^2 - k_a^2}} J(lr) e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x}$$

an. Man bekommt dann die folgenden Ausdrücke für die vollständigen Potentiale in *a* und *b*:

$$\psi_y^a = \int_0^\infty \frac{J(lr)}{N'} e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x} l dl, \quad \psi_y^b = \frac{k_a^2}{k^2} \int_0^\infty \frac{J(lr)}{N'} e^{+\sqrt{l^2 - k_a^2} x} l dl, \quad (26)$$

<sup>1)</sup> Siehe die *Sommerfeldschen* Arbeiten: Ann. d. Physik Bd. 28, 1909 und Bd. 81, 1927.

$$\left. \begin{aligned} \psi_x^a &= (k_b^2 - k_a^2) \cos \varphi \int_0^\infty \frac{J'(lr)}{NN'} e^{-\sqrt{l^2 - k_b^2} x} l dl, \\ \psi_x^b &= (k_b^2 - k_a^2) \frac{k_a^2}{k_b^2} \cos \varphi \int_0^\infty \frac{J'(lr)}{NN'} e^{+\sqrt{l^2 - k_b^2} x} l^2 dl, \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

wo

$$N' = \sqrt{l^2 - k_a^2} + \sqrt{l^2 - k_b^2} \quad (26b)$$

und

$$J'(q) = \frac{dJ}{dq} = -J_1$$

bedeutet ( $J_1$  ist die Besselsche Funktion erster Ordnung).

Diese Formeln zeigen, daß die primären horizontalen elektrischen Schwingungen neben den sekundären Horizontalschwingungen auch vertikale erregen, die ihren Maximalwert gerade in derjenigen (longitudinalen) Richtung erreichen, wo bei Fehlen der Erde das elektromagnetische Feld überhaupt verschwinden sollte. Hinsichtlich seiner Abhängigkeit von dem Azimutwinkel  $\varphi$  fällt dieses  $\psi_x$ -Feld zusammen mit dem Feld einer Rahmenantenne mit der Schwingungsebene  $xy$ , das wir oben unter der Voraussetzung vollkommener Spiegelung betrachtet haben. Dementsprechend kann man mittels einer „geknickten“ elektrischen Antenne von der Gestalt  $\sqcap$  eine gerichtete Ausstrahlung des in der Abb. 26 dargestellten Typus hervorbringen.

Der durch (26a) bestimmte Wellenkomplex läßt sich in eine Oberflächenwelle derselben Art, d. h. mit demselben Parameter  $q$ , wie in dem Fall einer Vertikalantenne, zerlegen und in zwei Raumwellen, die noch schneller mit dem Abstand  $R$  abnehmen. Die horizontalen Schwingungen, welche durch die Formeln (26) ausgedrückt werden, pflanzen sich dagegen nur in der Gestalt von Raumwellen fort. Dies folgt vom mathematischen Standpunkt aus dem Fehlen von Polen in den Integranden (26). Physikalisch bedeutet das, daß Oberflächenwellen mit tangentiellen elektrischen und vertikalen magnetischen Feldstärken unmöglich sind (siehe unten § 4).

In großen Horizontalabständen von der Antenne sind die vertikalen elektrischen Schwingungen ( $\psi_x$ ), besonders in der Nähe der Erdoberfläche viel kräftiger als die Horizontalschwingungen ( $\psi_y$ ), durch welche sie ursprünglich erregt werden. Es gelten dabei für genügend große Leitfähigkeit die folgenden Näherungsformeln:

$$\left. \begin{aligned} \psi_x^a &\cong \frac{i}{k} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ik_0 R}}{R} \right) \cong - \frac{k_0 \cos \varphi}{k} \frac{e^{ik_0 R}}{R} \rightarrow - \frac{k_0 \cos \varphi}{k} \frac{e^{ik_0 R}}{R} \\ \psi_y^a &\cong - \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{ik_0 R}}{R} \right) \cong \frac{k_0}{k} \frac{e^{ik_0 R}}{R} \cdot \frac{x}{R} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} x \rightarrow 0 \quad (26c)$$

Das elektromagnetische Feld einer Rahmenantenne, d. h. eines magnetischen Oszillators, läßt sich bei Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit der Erde am einfachsten mittels eines *magnetischen* Polarisationspotentials  $\mathfrak{Z}^{(m)}$  bestimmen. Die Feldstärken ergeben sich daraus nach den Formeln

$$\mathfrak{H} = \text{rot rot } \mathfrak{Z}^{(m)}, \quad \mathfrak{E} = \frac{i\omega}{c} \text{rot } \mathfrak{Z}^{(m)} \quad (27)$$

(vgl. Anmerkung zum § 7, Kap. IV), die zu den entsprechenden Formeln für das elektrische Polarisationspotential [(7a) § 1, Kap. IV] reziprok sind.

Man bekommt dabei im Falle einer Horizontalantenne der früher betrachteten Art ( $m_z = 1$ ,  $m_x = m_y = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \psi_z^a &= \int_0^{k_b^2} \frac{J(lr)}{N} e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x} l dl, \\ \psi_z^b &= \int_0^{k_a^2} \frac{J(lr)}{N} e^{+\sqrt{l^2 - k_b^2} x} l dl, \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_x^a &= (k_b^2 - k_a^2) \sin \varphi \int_0^{\infty} \frac{J'(lr)}{N N'} e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x} l^2 dl, \\ \psi_x^b &= (k_b^2 - k_a^2) \sin \varphi \int_0^{\infty} \frac{J'(lr)}{N N'} e^{+\sqrt{l^2 - k_b^2} x} l^2 dl. \end{aligned} \right\} \quad (27b)$$

In diesen Formeln bedeutet  $\psi$  selbstverständlich das magnetische und nicht das elektrische Polarisationspotential. Diesem Umstand entspricht das Auftreten von  $\sin \varphi$  in (27b) statt des  $\cos \varphi$  wie in den fast identischen Formeln (26a). Die aus (27b) nach (27) berechneten Feldstärken stimmen aber mit denjenigen, welche sich aus (26a) nach den üblichen Formeln (7a), § 1, Kap. IV ergeben, vollkommen überein. Die „vertikalen“ Anteile des Feldes von elektrischen und magnetischen Horizontalantennen sind also identisch. Die „horizontalen Anteile“ (26) und (27a) haben aber eine wesentlich verschiedene Beschaffenheit, wie schon aus dem Umstande einleuchtet, daß der Wellenkomplex (27a) ebenso wie (24) Oberflächenwellen enthält, im Gegensatz zu (26).

Im Falle einer magnetischen Vertikalantenne ( $m_x = m_y = m_z = 0$ ) hat man schließlich:

$$\left. \begin{aligned} (Z_x^m)^a &= \psi^a = \int_0^{\infty} \frac{J'(lr)}{N'} e^{-\sqrt{l^2 - k_a^2} x} l dl, \\ \psi^b &= \int_0^{\infty} \frac{J'(lr)}{N'} e^{+\sqrt{l^2 - k_b^2} x} l dl \end{aligned} \right\} \quad (27c)$$

Hier sind Oberflächenwellen überhaupt nicht zu finden. — Die letzten Formeln ergeben sich in genau derselben Weise wie die entsprechenden (oder „reziproken“) Formeln (24) für die elektrische Vertikalantennen. Und zwar muß man von denselben Ansätzen (22a, b, c) ausgehen und dieselben Grenzbedingungen (23b) berücksichtigen, wobei nur die Formeln (23) und (23a) durch die reziproken Formeln

$$E_x = E_r = 0, \quad E_\varphi = -\frac{i\omega}{c} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad H_x = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right),$$

$$H_r = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial r}, \quad H_\varphi = 0$$

zu ersetzen sind. Man bekommt dabei statt (23d)

$$f_a = -f_b = \frac{\sqrt{l^2 - k_b^2}}{N'}.$$

#### § 4. Drahtwellen und Oberflächenwellen.

##### 1. Vollkommen leitende Drähte.

Nach dieser kurzen Übersicht der Gesetze der drahtlosen Wellenausbreitung wollen wir jetzt die Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen — oder Wellen — längs metallischer Drähte betrachten. Dabei werden wir die letzteren als ein System unendlich ausgedehnter, paralleler Zylinder von beliebigem Querschnitt behandeln und sie zunächst als *vollkommen leitend* voraussetzen<sup>1)</sup>. Die gemeinsame Richtung der Drähte (oder ihrer Erzeugenden) soll mit der Fortpflanzungsrichtung ( $z$ ) der elektromagnetischen Wellen im Außenraum (den wir als leer voraussetzen) übereinstimmen.

Diese Wellen müssen folglich eben und sinusoidal sein. Im Gegensatz aber zu den früher betrachteten Wellen dieser Art müssen sie eine in ihrer Ebene *veränderliche Amplitude* haben, die innerhalb der einzelnen Drähte — sofern es sich um die Feldstärken handelt — verschwindet.

Die Komponenten dieser Feldstärken und aller anderen elektromagnetischen Größen können also als Funktionen der Koordinaten und der Zeit in der Form

$$\psi = \psi_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \tag{28}$$

dargestellt werden. Die Amplitudenfunktion  $\psi_0(x, y)$  soll dabei derart bestimmt werden, daß außerhalb der Drähte die Differentialgleichung  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  oder nach (28)

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} = 0 \tag{28a}$$

<sup>1)</sup> Die sich auf diesen Fall beziehende und unten dargelegte einfache Theorie rührt von *M. Abraham* her.

und auf ihrer Oberfläche die Grenzbedingungen (17) befriedigt seien. Die Flächendichte der Ladung ( $\eta$ ) und des Stromes ( $\mathfrak{f}$ ) lassen sich dann nach den Formeln (17a) bestimmen.

Es sei bemerkt, daß es gerade diese Ladungen und Ströme sind, die den eigentlichen Inhalt der betrachteten Erscheinungen bilden. Den Mechanismus ihrer Entstehung lassen wir hier außer acht. Während in dem früher behandelten Problem der drahtlosen Wellenausbreitung die Wellen durch eine äußere Quelle (in der Gestalt eines harmonischen Oszillators) erzeugt wurden, sind sie jetzt ausschließlich durch die Ladungs- und Stromschwingungen in oder eher *auf* den Drähten selbst erzeugt. Es gibt also in diesem Fall keine primären Schwingungen, sondern *nur* „sekundäre“, die besser als *freie* Schwingungen der Drähte zu bezeichnen sind. Praktisch werden solche Schwingungen immer durch irgendwelche äußere Einwirkung an einem Ende der Drahtleitung erregt. Bei sehr großer Länge dieser Leitung ist aber ihre Fortpflanzung von dem Erregungsmechanismus unabhängig und durch die Gleichungen (28), (28a) in Verknüpfung mit den Beziehungen (17), (17a) bestimmt.

Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich am einfachsten, wenn man neben den Elektrizitätsdichten  $\eta$ ,  $\mathfrak{f}$  noch die entsprechenden Potentiale  $\varphi$ ,  $\mathfrak{A}$  einführt. Wir nehmen dabei an, daß die Stromdichte  $\mathfrak{f}$  der  $z$ -Achse parallel ist; das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  muß sich dementsprechend auf die  $z$ -Komponente  $A_z = A$  reduzieren. Die allgemeine Beziehung zwischen den beiden Potentialen

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$$

reduziert sich dabei auf

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

oder nach (28) auf

$$\varphi = A \tag{29}$$

(wegen  $k = \frac{\omega}{c}$ ).

Daraus folgt nach den allgemeinen Formeln  $\mathfrak{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ ,  
 $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = 0 \tag{29a}$$

und

$$H_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad H_z = 0,$$

d. h. nach (29) und (29a):

$$H_x = -E_y, \quad H_y = E_x, \quad H_z = E_z = 0.$$

Die letzten Formeln zeigen, daß die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  in der üblichen,

für die Wellenzone charakteristischen Weise miteinander und mit der Fortpflanzungsrichtung verknüpft sind ( $E = H, \mathfrak{H} = n \times \mathfrak{E}, \mathfrak{E} = \mathfrak{H} \times n$ ,  $n$ -Wellennormale), ganz unabhängig von der Art, in welcher sie sich in der  $xy$ -Ebene ändern.

Auf Grund der Gleichung (28a) kann man das Vektorpotential  $A$  durch ein skalares magnetisches Potential  $\psi$  ersetzen, d. h. die Komponenten von  $\mathfrak{H}$  nach den Formeln

$$H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{30}$$

ausdrücken. Durch Vergleich dieser Formeln mit den vorhergehenden bekommt man in der Tat die Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{30a}$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

in Übereinstimmung mit (28a).

Die Beziehungen (30a) zeigen, daß  $\varphi$  und  $\psi$  den reellen und den imaginären Anteil einer analytischen Funktion  $f(\zeta)$  der komplexen Variablen  $\zeta = x + iy$  darstellen (von dem Faktor  $e^{i(kz - \omega t)}$  sehen wir im folgenden ab). Die Linien  $\varphi = \text{konst}$  und  $\psi = \text{konst}$  sind orthogonal zueinander und fallen resp. mit den magnetischen und den elektrischen Kraftlinien zusammen. Dabei müssen die *Drahtländer*, d. h. die Kurven  $\sigma$ , welche die Querschnitte der Drähte mit einer Ebene  $z = \text{konst}$  begrenzen, mit gewissen  $\varphi$ -Kurven übereinstimmen (Abb. 27). Es müssen ferner innerhalb jedes Drahtes  $\varphi$  und  $\psi$  konstant bleiben. Außerhalb der Drähte ist  $\varphi$  eine eindeutige und  $\psi$  eine mehrdeutige Funktion von  $x$  und  $y$ : bei jedem Umlauf um einen Draht erfährt die letztere die Zunahme  $-\oint H_r d\sigma = -4\pi J = -4\pi \oint \mathfrak{f} d\sigma$  ( $J$ -Stromstärke).

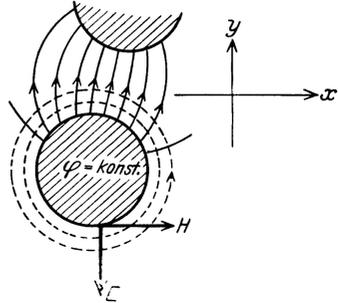


Abb. 27.

Die Formeln (29a) und (30) können am Rande eines Drahtes in die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} E_n &= -\frac{\partial \varphi}{\partial n}, & E_\tau &= 0, \\ H_n &= 0, & H_\tau &= -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

umgeschrieben werden. Die Ladungs- und Stromdichte drücken sich dabei folgendermaßen aus

$$\eta = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \mathfrak{f}. \tag{31a}$$

Ihre numerische Gleichheit entspricht der Gleichheit der Potentiale  $\varphi$  und  $A$ . Es muß selbstverständlich auch die Stromstärke  $J = \int \mathfrak{f} d\sigma$  mit  $\int \eta d\sigma = e$  — der elektrischen Ladung pro Längeneinheit — übereinstimmen.

Wenn  $\sigma$  eine ganz beliebige in der  $xy$ -Ebene liegende Kurve bedeutet, kann man die Formeln (30) durch

$$\left. \begin{aligned} E_n &= -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, & E_\tau &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = +\frac{\partial \varphi}{\partial n}, \\ H_n &= -\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}, & H_\tau &= -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (31b)$$

ersetzen.

Daraus folgt, daß die Differenz  $\varphi_1 - \varphi_2$  für zwei beliebige Punkte  $P_1, P_2$  (in der  $xy$ -Ebene) gleichzeitig die Zirkulation von  $\mathfrak{E}$  längs einer beliebigen durch diese Punkte gezogenen Kurve  $\left(\int_{P_2}^{P_1} E_\tau d\sigma\right)$  und den Fluß von  $\mathfrak{H}$  durch diese Kurve oder vielmehr die damit verknüpfte Zylinderfläche von der Höhe 1  $\left(\int_{P_1}^{P_2} H_n d\sigma\right)$  darstellt. Dementsprechend stellt die Differenz  $\psi_1 - \psi_2$  die magnetische Zirkulation  $\left(\int H_\tau d\sigma\right)$  und den elektrischen Fluß  $\left(\int E_n d\sigma\right)$  durch die Kurve  $P_1 P_2$  dar.

Das am Anfang dieses Paragraphen gestellte Problem reduziert sich also auf die folgende verhältnismäßig einfache zweidimensionale Aufgabe:

*Es soll eine analytische Funktion*

$$f(\zeta) \equiv f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (32)$$

*bestimmt werden, deren reeller Anteil in einer Anzahl vorgegebener Randkurven  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  konstante Werte annimmt.* Diese Kurven müssen im allgemeinen geschlossen sein; sie können sich aber auch im Unendlichen schließen. Der in der Technik gewöhnlich getroffene Fall eines dünnen Drahtes mit kreisförmigem Querschnitt, der parallel der Erdoberfläche aufgespannt ist, läßt sich in die allgemeine Theorie unmittelbar einfügen, wenn man die Erde als einen ideal leitenden Draht mit unendlich großem, durch eine Gerade begrenztem Querschnitt auffaßt. Hinsichtlich des von ihr herrührenden elektromagnetischen Feldes ist die Erde dem Spiegelbild des Drahtes (oder des Drähtesystems, wenn man mehrere parallele Drahtleitungen betrachtet) vollständig äquivalent. — Wir werden die Funktion (32) das *komplexe Potential* nennen. Wie jede komplexe Größe kann sie durch einen Vektor  $\mathfrak{f}$  mit den Komponenten  $\mathfrak{f}_x = \varphi$  und  $\mathfrak{f}_y = \psi$  dargestellt werden. Die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  lassen sich umgekehrt als die komplexen Größen

$$E = E_x + iE_y, \quad H = H_x + iH_y$$

behandeln. Die Formeln (29a) und (29c) können dabei, wie leicht zu sehen ist, durch die komplexen Ausdrücke

$$E = -\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^*, \quad H = iE \quad (32a)$$

ersetzt werden (wo  $A^*$ , wie üblich, die zu  $A$  komplex konjugierte Größe bedeutet).

Im Falle eines einzelnen Drahtes mit kreisförmigem Querschnitt hat man z. B.

$$f(\zeta) = c_1 \lg \frac{1}{\zeta} + c_2,$$

wo  $c_1$  und  $c_2$  zwei *reelle* Konstanten sind.

Setzt man  $\zeta = r e^{i\alpha}$  ( $\alpha$ -Azimutwinkel), so wird

$$f(\zeta) = \left(c_1 \lg \frac{1}{r} + c_2\right) - i c_1 \alpha,$$

d. h.

$$\varphi = c_1 \lg \frac{1}{r} + c_2 \quad \text{und} \quad \psi = -c_1 \alpha. \quad (32b)$$

Bei einem Umlauf um den Draht nimmt  $\psi$  um den Betrag  $2\pi c_1$  ab, der nach dem oben Gesagten gleich  $4\pi J = 4\pi e$  sein muß. Wir haben also  $c_1 = 2e$  und folglich

$$f(\zeta) = 2e \lg \frac{1}{\zeta} + c_2. \quad (33)$$

Wir betrachten noch beispielsweise den Fall eines kreisförmigen Drahtes mit dem Radius  $a$ , welcher die Achse eines kreisförmigen Zylinders mit dem inneren Radius  $b$  ( $> a$ ) bildet. Wir wollen dabei annehmen, daß die Ladungen und Ströme des Drahtes und des Zylinders sich gegenseitig kompensieren (wie dies bei den Kabelleitungen stets der Fall ist).

Das elektromagnetische Feld in dem Zwischenraum ( $a < r < b$ ) läßt sich durch das komplexe Potential (33) bestimmen, wenn man mit  $e$  die Ladung (oder eher die lineare Ladungsdichte) des Drahtes bezeichnet und die Konstante  $c_2$  in passender Weise wählt. Da innerhalb des Zylinders und folglich auch im Außenraum das elektromagnetische Feld verschwindet, können wir bei  $r \geq b$   $\varphi = 0$  setzen. Dies gibt  $2e \lg \frac{1}{b} + c_2 = 0$ , d. h.  $c_2 = 2e \lg b$  und folglich

$$f(\zeta) = 2e \lg \frac{b}{\zeta}. \quad (33a)$$

Das Potential des Drahtes — oder seine Potentialdifferenz gegen den Zylinder — ergibt sich also zu

$$\varphi_{ab} = 2e \lg \frac{b}{a}. \quad (33b)$$

Für die elektrische und magnetische Feldstärke in dem Zwischenraum bekommen wir nach (32a) die folgenden Ausdrücke:

$$E = \frac{2e}{\zeta^*} = \frac{2e}{r} e^{i\alpha} = -iH. \quad (33c)$$

Die elektrischen Kraftlinien sind radial gerichtet, während die magnetischen ein System dazu orthogonaler koaxialer Kreise bilden. Ihre Dichte ist umgekehrt proportional dem Achsenabstand  $r$ .

In diesen Formeln ist die Ladungsdichte keine konstante Größe, sondern eine Funktion der  $z$ -Koordinate und der Zeit, die dem reellen Anteil des Faktors  $e^{i(kz - \omega t)}$  proportional ist, d. h. sich durch die Formel

$$e = e_0 \cos(kz - \omega t) \quad (33d)$$

ausdrückt.

Wenn der Zwischenraum vollkommen leer ist, wie dies oben vorausgesetzt wurde, bleiben die angeführten Resultate nicht nur für harmonische Schwingungen, sondern für beliebige elektromagnetische Vorgänge gültig (sofern es sich um ihre Fortpflanzung längs der Drähte handelt). Diese Resultate lassen sich leicht auf den Fall verallgemeinern, daß der Zwischenraum durch ein homogenes vollkommen isolierendes Medium erfüllt ist. Es genügt nämlich in diesem Fall, wie ein Blick auf die Formeln (17a) zeigt, die Ladungsdichte  $\eta$  (und  $e$ ) durch die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  des Isolators zu dividieren und die Stromdichte  $\mathfrak{I}$  (oder die Stromstärke  $J$ ) mit seiner magnetischen Permeabilität  $\mu$  zu multiplizieren. Es wird dabei  $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$  und ferner nach der Formel (6a) § 1, Kap. IV

$$\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (34)$$

d. h.

$$\sqrt{\epsilon\mu} \varphi = A. \quad (34a)$$

Dementsprechend bekommen wir

$$H = \sqrt{\epsilon\mu} E \quad \text{und} \quad \mathfrak{I} = \frac{\eta}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \left( \text{oder } J = \frac{e}{\sqrt{\epsilon\mu}} \right). \quad (34b)$$

## 2. Unvollkommen leitende Drähte.

Die dargelegte *Abrahamsche* Theorie der Drahtwellen stellt eine ebenso grobe Annäherung an die Wirklichkeit wie die am Anfang des vorigen Paragraphen betrachtete Theorie der drahtlosen Wellenausbreitung auf der vollkommen leitenden Erde. Wir wollen nun die Grundlagen der strengen Theorie (nach *A. Sommerfeld*) entwickeln. Wir betrachten also die Drähte als unvollkommene Leiter mit der endlichen Leitfähigkeit  $\sigma_h$ , Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_h$  und magnetischen Permeabilität  $\mu_h$  ( $h = 1, 2, 3 \dots$ ). Das umgebende Medium sei durch den

Index 0 bezeichnet. Man kann dabei  $\sigma_0 = 0$  und  $\mu_h = \varepsilon_h = 1$  (für  $h > 0$ ) setzen.

Wir machen für die verschiedenen elektromagnetischen Größen den folgenden Ansatz

$$\psi^{(h)} = \psi_0^{(h)}(x, y) e^{i(qz - \omega t)} \quad (h = 0, 1, 2 \dots), \quad (35)$$

der die unmittelbare Verallgemeinerung von (28) darstellt. Der Parameter  $q$ , welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die Dämpfung der Wellen charakterisiert, muß hier *denselben Wert* für alle Körper haben, und muß folglich von den sämtlichen Wellenparametern

$$k_h = \frac{\omega}{c} n_h \left( n_h = \sqrt{\varepsilon'_h \mu_h}, \quad \varepsilon'_h = \varepsilon_h - 2i \frac{\sigma_h}{\nu} \right), \quad (35a)$$

welche die einzelnen Drähte (einschließlich das Medium) charakterisieren, verschieden sein. Wie wir sofort sehen werden, sind die durch (35) bestimmten Wellen im gewissen Sinne als die Verallgemeinerung der im vorigen Paragraphen betrachteten *Oberflächenwellen* anzusehen.

Durch Einsetzen von (34) in die Gleichung

$$\nabla^2 \psi^{(h)} + k_h^2 \psi^{(h)} = 0$$

ergibt sich statt (28a):

$$\frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial y^2} + (k_h^2 - q^2) \psi^{(h)} = 0. \quad (35b)$$

Wir versuchen ferner den früheren Ansatz für das Vektorpotential

$$A_x^{(h)} = A_y^{(h)} = 0, \quad A_z^{(h)} = A \quad (36)$$

zu machen — obwohl er im allgemeinen bei unsymmetrischer Verteilung der elektrischen Strömung senkrecht zur  $z$ -Achse nicht gültig ist (s. unten). Es wird dann nach (34)

$$A^{(h)} = \frac{c k_h^2}{\omega q} \varphi^{(h)} = \frac{n_h^2}{m} \varphi^{(h)} \left( m = \frac{c}{\omega} q \right), \quad (36a)$$

$$E_x^{(h)} = -\frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial x}, \quad E_y^{(h)} = -\frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial y}, \quad E_z^{(h)} = \frac{i}{q} (k_h^2 - q^2) \varphi^{(h)}, \quad (36b)$$

$$H_x^{(h)} = -\frac{n_h^2}{m} E_y^{(h)}, \quad H_y^{(h)} = +\frac{n_h^2}{m} E_x^{(h)}, \quad H_z^{(h)} = 0. \quad (36c)$$

Die longitudinale Komponente der elektrischen Feldstärke ist folglich von Null verschieden. Dies ist ohnehin klar, denn es ist gerade diese Komponente, welche die elektrischen Ströme in den Drähten bedingt.

Die Darstellung der magnetischen Feldstärke mittels eines skalaren magnetischen Potentials erweist sich im allgemeinen als unmöglich, denn aus (36b) und (30) sollten die Beziehungen

$$\frac{k_h^2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{n_h^2}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und daraus die Gleichung (28a) folgen — im Widerspruch mit (35b). Die Darstellung von  $\varphi$  als des reellen Anteils einer analytischen Funktion der komplexen Veränderlichen  $x + iy$  ist selbstverständlich ebenfalls unmöglich — mit Ausschluß des statischen Falles ( $\omega = 0$ ), wenn die Parameter  $k_h$  und  $q$  sämtlich verschwinden.

Die Grenzbedingungen (4a) für die Trennungsfläche des  $h$ -ten und  $l$ -ten Körpers (die Drähte können sich teilweise berühren) lauten, wenn man freie Flächenladungen durch Einführung der komplexen Dielektrizitätskonstante berücksichtigt und freie Flächenströme ausschließt (letztere können bei endlicher Leitfähigkeit nicht auftreten):

$$\varepsilon'_h E_n^{(h)} = \varepsilon'_l E_n^{(l)}, \quad E_\tau^{(h)} = E_\tau^{(l)}, \quad E_z^{(h)} = E_z^{(l)}, \quad (37)$$

$$\frac{1}{\mu_h} H_\tau^{(h)} = \frac{1}{\mu_l} H_\tau^{(l)}, \quad H_n^{(h)} = H_n^{(l)}. \quad (37a)$$

Es bedeuten hier  $n$  und  $\tau$  die Normale und den Tangentialvektor zur Grenzkurve  $\sigma$  im betreffenden Punkt. Der Einfachheit halber denken wir uns für einen Augenblick, daß sie resp. mit der  $x$ - und  $y$ -Richtung zusammenfallen. Es folgt dann aus (37a) nach (36c) mit Rücksicht auf  $n_h^2 = \varepsilon'_h \mu_h$

$$\varepsilon'_h E_x^{(h)} = \varepsilon'_l E_x^{(l)}, \quad \varepsilon'_h \mu_h E_y^{(h)} = \varepsilon'_l \mu_l E_y^{(l)}.$$

Die erste dieser Gleichungen ist mit der ersten Gleichung (37) identisch. Die zweite Gleichung widerspricht aber im allgemeinen der zweiten Gleichung (37). Um diesen Widerspruch zu beseitigen, müssen wir

$$E_\tau = H_n = 0 \quad (37b)$$

setzen. Das ist also die Gültigkeitsbedingung des Ansatzes (36).

Die zwei übrig bleibenden Grenzbedingungen reduzieren sich nach (36a) auf

$$\varepsilon'_h \frac{\partial \varphi^{(h)}}{\partial n} = \varepsilon'_l \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial n}, \quad (k_h^2 - q^2) \varphi^{(h)} = (k_l^2 - q^2) \varphi^{(l)}. \quad (37c)$$

Es müssen dabei wegen (37b) die Potentiale  $\varphi^{(h)}$  und  $\varphi^{(l)}$  konstante Randwerte haben, die aber miteinander nicht zusammenzufallen brauchen. Wir müssen in der Tat diese Potentiale für jeden Draht nach der Gleichung (35b) *einzel*n bestimmen, und ihre Beziehung zueinander gerade auf Grund der Grenzbedingungen (37c) aufstellen. Es ist zu betonen, daß die Potentialsprünge  $\varphi^{(h)} - \varphi^{(l)}$  in dem betrachteten Fall keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben.

Da die Gleichungen (37c) in bezug auf die Randwerte von  $\varphi$  linear und homogen sind, können sie nur bei bestimmten Werten des Parameters  $q$  miteinander kompatibel sein. Wir müssen folglich durch Elimination dieser Randwerte eine Gleichung

$$\Delta(q) = 0 \quad (37d)$$

bekommen, welche zur Bestimmung von  $q$  dient.

Nach diesen allgemeinen Ausführungen wollen wir nun die wichtigsten Spezialfälle untersuchen.

### 3. Draht von unendlich großem Radius (ebene Oberflächenwellen.)

Der einfachste Fall entspricht einem Drahte von unendlich großem Radius, d. h. einer ebenen Grenzfläche zwischen dem Isolator (0) und dem Leiter (1). Der letztere stellt also in diesem Fall keinen eigentlichen „Draht“ dar, sondern den schon manchmal behandelten „Halbraum“. Die betrachteten (zuerst von *J. Zenneck* untersuchten) Wellen unterscheiden sich aber von denjenigen, die wir in den Paragraphen 1 und 2 behandelt haben, durch die Tatsache, daß sie auf den beiden Seiten der Grenzfläche  $x = 0$  sich mit *derselben Geschwindigkeit fortpflanzen*. Solche Wellen haben wir in § 3 aus dem durch eine Antenne der drahtlosen Telegraphie erregten Wellenkomplexe gesondert und als *Oberflächenwellen* bezeichnet. Der einzige Unterschied zwischen den erwähnten Wellen und den Wellen, die wir jetzt nach der soeben dargelegten Methode betrachten wollen, besteht in der Tatsache, daß die ersteren sich nach allen Seiten ausbreiten, während die letzteren entlang der Erdoberfläche in einer bestimmten Richtung ( $z$ ) fortschreiten.

Wir können also den Ansatz (35) durch die Annahme vereinfachen, daß  $\psi$  von  $y$  unabhängig ist. Es wird dann nach (35b):

$$\frac{\partial^2 \psi^{(h)}}{\partial x^2} + (k_h^2 - q^2) \psi^{(h)} = 0, \quad (h = 0, 1)$$

d. h.

$$\varphi^{(h)} = C_1^{(h)} e^{+\sqrt{q^2 - k_h^2} x} + C_2^{(h)} e^{-\sqrt{q^2 - k_h^2} x}.$$

Wir haben hier mit dem Pluszeichen diejenige Quadratwurzel bezeichnet, welche einen positiven reellen Anteil hat. Damit die Potentiale mit der Entfernung von der Grenzfläche  $x = 0$  nicht unendlich werden können, muß man dabei  $C_1^{(0)} = C_2^{(1)} = 0$  setzen.

Die vorhergehende Formel reduziert sich also auf

$$\left. \begin{aligned} \varphi^0 &= C_0 e^{-\sqrt{q^2 - k_0^2} x} & (x > 0), \\ \varphi^1 &= C_1 e^{+\sqrt{q^2 - k_1^2} x} & (x < 0). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die Bedingungen (37b) sind im betrachteten Fall von selbst erfüllt, während die Bedingungen (37c) liefern:

$$\left. \begin{aligned} (q^2 - k_0^2) C_0 &= (q^2 - k_1^2) C_1, \\ -\varepsilon'_0 \sqrt{q^2 - k_0^2} C_0 &= \varepsilon'_1 \sqrt{q^2 - k_1^2} C_1. \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

Wir nehmen ferner die beiden Körper (Luft und Erde) als nicht magne-

tisch an, setzen also  $\epsilon'_0 = k_0^2$ ,  $\epsilon'_1 = k_1^2$  und bekommen durch Elimination der Konstanten die Beziehung

$$k_0^2 \sqrt{q^2 - k^2} + k^2 \sqrt{q^2 - k_0^2} = 0,$$

die wir im vorigen Paragraphen nach einer ganz verschiedenen Methode gefunden haben, und woraus sich für  $q$  der Wert

$$q = \frac{k_0 k_1}{\sqrt{k_0^2 + k_1^2}} \quad (38b)$$

ergibt.

Da dieses Ergebnis im § 3 schon diskutiert worden ist, wollen wir anhangsweise nur die Feldstärken noch bestimmen.

Durch Einsetzen von (38) in (36b) und (36c) erhalten wir

$$E_x^0 = \sqrt{q^2 - k_0^2} \varphi^0, \quad E_z^0 = -\frac{i}{q} (q^2 - k_0^2) \varphi^0, \quad H_y^0 = \frac{c k_0^2}{\omega q} \sqrt{q^2 - k_0^2} \varphi^0$$

oder mit Rücksicht auf (38b) [vgl. § 3]

$$\left. \begin{aligned} E_x^0 &= \frac{i k_0^2}{\sqrt{k_0^2 + k_1^2}} \varphi^0, & E_z^0 &= \frac{i k_0^3}{\sqrt{k_0^2 + k_1^2} k_1} \varphi^0, \\ H_y^0 &= \frac{i c k_0^4}{\omega \sqrt{k_0 k_1}} \varphi^0 \end{aligned} \right\} \quad (38c)$$

und ähnliche Formeln für  $h = 1$ . Das Verhältnis zwischen den vertikalen und den horizontalen Komponenten der elektrischen Feldstärke in der unmittelbaren Nähe der Erdoberfläche drückt sich folglich, wegen  $E_x^0 = E_z^1$ , durch die Gleichungen

$$E_z = \frac{k_0}{k_1} E_x^0 = \frac{k_1}{k_0} E_x^1 \quad (38d)$$

aus.

#### 4. Draht von endlichem Radius; Kabel.

Wir gehen jetzt zu dem etwas komplizierteren Fall der Fortpflanzung elektromagnetischer Schwingungen längs einem Draht mit kreisförmigem Querschnitt vom *endlichen* Radius  $a$  über. Die Achse dieses Drahtes soll zur  $Z$ -Achse gewählt werden und der Abstand davon wie früher durch  $r$  ( $=\sqrt{x^2 + y^2}$ ) bezeichnet.

Da das elektrische Potential außer  $z$  und  $t$  nur von  $r$  abhängen kann, setzen wir

$$\varphi^{(h)} = \varphi^h(r) e^{i(qz - \omega t)} \quad (h = 0, 1) \quad (39)$$

an. Die elektrische und magnetische Feldstärke bestimmen sich daraus nach den Formeln

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, & E_x &= 0, & E_z &= -\frac{i}{q} (q^2 - k^2) \varphi, \\ H_r &= 0, & H_x &= \frac{c k^2}{\omega q} E_r, & H_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39a)$$

Die Bedingungen (37b) sind also erfüllt<sup>1)</sup>, wodurch unserer Ansatz gerechtfertigt wird.

Die Amplitudenfunktion  $\varphi(r)$  muß dabei der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + (k^2 - q^2)\varphi = 0$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} + \varphi = 0, \quad \rho = \sqrt{k^2 - q^2} r = sr \quad (39b)$$

genügen, deren allgemeine Lösung ist:

$$\varphi = AJ(\rho) + BK(\rho), \quad (39c)$$

wo  $J(\rho)$  und  $K(\rho)$  wie üblich die *Besselschen* Funktionen erster und zweiter Art bedeuten [vgl. (20c) und (20d)].

Da  $\varphi^{(1)}$  bei  $r = 0$  endlich bleiben muß, während  $K(\rho)$  dabei logarithmisch unendlich wird, so ist  $B_1 = 0$  zu setzen. Im Außenraum ( $h = 0$ ) muß dagegen das Potential durch die Funktion  $K(\rho)$  bestimmt werden, wie schon aus der Tatsache ersichtlich ist, daß es sich bei unendlicher Leitfähigkeit des Drahtes auf  $c_1 \lg \frac{1}{r}$  reduziert [vgl. (33)]. Wir haben folglich

$$\varphi^{(1)} = AJ(s_1 r), \quad \varphi^{(0)} = BK(s_0 r). \quad (40)$$

Die Grenzbedingungen (37c), für  $r = a$  lauten (wir beschränken uns auf den Fall  $\mu_0 = \mu_1 = 1$ ):

$$\left. \begin{aligned} Ak_1^2 s_1 J'(s_1 a) &= Bk_0^2 s_0 K'(s_0 a), \\ A(k_1^2 - q^2) J(s_1 a) &= B(k_0^2 - q^2) K(s_0 a). \end{aligned} \right\} \quad (40a)$$

Daraus ergibt sich die folgende transzendente Eliminationsgleichung für  $q$ :

$$\left(1 - \frac{q^2}{k_1^2}\right) \frac{J(s_1 a)}{s_1 J'(s_1 a)} = \left(1 - \frac{q^2}{k_0^2}\right) \frac{K(s_0 a)}{s_0 K'(s_0 a)}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{s_1 J(s_1 a)}{k_1^2 J'(s_1 a)} = \frac{s_0 K(s_0 a)}{k_0^2 K'(s_0 a)}. \quad (40b)$$

Im dem Fall eines vollkommen leitenden Drahtes stimmt der Parameter  $q$ , wie wir oben gesehen haben, mit  $k_0$  überein. Dies zeigt, daß auch bei genügend großen *endlichen* Werten von  $|k_1|$ ,  $q$  nicht sehr verschieden von  $k_0$  und folglich seinem Betrage nach sehr klein im Vergleich mit  $|k_1|$  sein muß. Wir können also mit genügender Annäherung

$$s_1 = k_1 \quad (41)$$

setzen.

<sup>1)</sup> Die dort durch  $\tau$  bezeichnete Richtung ist nichts anderes als die Azimutalrichtung  $\alpha$ , während  $n$  mit  $r$  übereinstimmt.



Es ist interessant zu konstatieren, daß das Fortleiten der elektromagnetischen Wellen längs eines Drahtes und ihre „drahtlose“ Fortpflanzung entlang der Erdoberfläche, prinzipiell denselben Vorgang darstellen. Diese drahtlose Fortpflanzung — sofern es sich um *Oberflächenwellen* (im großen Abstand von der Sendeantenne) handelt — ergibt sich einfach als Grenzfall der gewöhnlichen Drahtleitung, wenn der Drahradius sehr groß gegenüber der Wellenlänge  $\lambda_0$  wird.

Wir wollen noch zum Schluß einige Worte über die exakte Theorie der *Kabelleitung* hinzufügen. Man muß in diesem Fall wenigstens *vier* Medien unterscheiden: den Außenraum (0), den äußeren Metallzylinder (1), den inneren isolierenden Zylinder (2) und den Achsendraht (3).

Die Formeln (39) bis (39c) lassen sich auf diesen Fall ohne irgendwelche Änderung anwenden. Statt der Formeln (40) bekommen wir aber kompliziertere Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= B_0 K(s_0 r), & \varphi^{(2)} &= A_2 J(s_2 r) + B_2 K(s_2 r), \\ \varphi^{(1)} &= A_1 J(s_1 r) + B_1 K(s_1 r), & \varphi^{(3)} &= A_3 J(s_3 r) \end{aligned}$$

und dementsprechend statt der Grenzbedingungen (40a) das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} B_0 s_0^2 K(s_0 a_0) &= s_1^2 [A_1 J(s_1 a_0) + B_1 K(s_1 a_0)], \\ B_0 k_0^2 s_0 K'(s_0 a_0) &= k_1^2 s_1 [A_1 J'(s_1 a_0) + B_1 K'(s_1 a_0)], \\ \left\{ \begin{aligned} s_1^2 [A_1 J(s_1 a_1) + B_1 K(s_1 a_1)] &= s_2^2 [A_2 J(s_2 a_1) + B_2 K(s_2 a_1)], \\ k_1^2 s_1 [A_1 J'(s_1 a_1) + B_1 K'(s_1 a_1)] &= k_2^2 s_2 [A_2 J'(s_2 a_1) + B_2 K'(s_2 a_1)], \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} s_2^2 [A_2 J(s_2 a_2) + B_2 K(s_2 a_2)] &= s_3^2 A_3 J(s_3 a_2), \\ k_2^2 s_2 [A_2 J'(s_2 a_2) + B_2 K'(s_2 a_2)] &= k_3^2 s_3 A_3 J'(s_3 a_2), \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

wo  $a_0, a_1, a_2$  die drei in Betracht kommenden Grenzradien sind. Durch Elimination der Konstanten  $B_0, \dots, A_3$  bekommt man eine sehr komplizierte Gleichung für  $q$ , die man aber unter den Voraussetzungen

$$s_1 \ll k_1, \quad s_3 \ll k_3 \quad \text{und} \quad |s_0 a_0| \ll 1, \quad |s_2 a_1| \ll 1$$

näherungsweise ohne Schwierigkeit lösen kann.

## § 5. Elektromagnetische Schwingungen in allseitig begrenzten Körpern; allgemeine Theorie der Eigenschwingungen.

Wir haben bisher elektromagnetische Schwingungen in solchen Körpern betrachtet, die in allen drei oder zwei oder schließlich in einer Dimension unbegrenzt sind. Es gibt aber eine Reihe von wichtigen elektromagnetischen Schwingungsvorgängen, bei welchen eine solche Idealisierung der wirklichen — allseitig begrenzten — Körper unzulässig ist, bei welchen also ihre *endlichen geometrischen Abmessungen eine wesentliche Rolle spielen*. Es sind dabei drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem diese Abmessungen groß, von derselben Größenordnung

oder klein gegen die Wellenlänge der betrachteten Schwingungen (im leeren Raum) sind. Wir möchten die Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen um die Erde, bei Berücksichtigung ihrer kugelförmigen Gestalt als Beispiel des ersten Falles, die Erregung der elektromagnetischen Schwingungen in den Sendeantennen der drahtlosen Telegraphie als Beispiel des zweiten und ihren Empfang mittels kleiner Rahmenantennen als Beispiel des dritten Falles erwähnen. Zum dritten Fall gehören auch die im Kap. IV behandelten optischen Erscheinungen der Lichtzerstreuung in Kolloidallösungen. Ihnen entsprechen im zweiten Fall die sogenannten *Beugungs-* oder *Diffraktionserscheinungen*, die wir unten betrachten werden.

Neben diesen drei Fällen sind noch drei ihnen gewissermaßen *komplementäre* Fälle zu unterscheiden, wenn es in einem (praktisch) unbegrenzten Körper oder Hülle irgendwelche „Löcher“, d. h. Hohlräume oder Öffnungen gibt, deren Abmessungen groß, von derselben Größenordnung oder klein gegenüber der Wellenlänge sind.

Die erwähnten sehr verwickelten Erscheinungen stellen sich verhältnismäßig einfach dar, wenn man die betreffenden Körper als *vollkommen leitend*, d. h. vollkommen absorbierend oder reflektierend behandelt. Der entgegengesetzte Extremfall vollkommener Isolatoren bietet kein besonderes Interesse dar.

### 1. Mechanismus der elektrischen Eigenschwingungen in Metallkörpern.

Die einfachsten Schwingungsvorgänge, die gerade nur in allseitig begrenzten leitenden Körpern (Metallen oder auch in den durch Metallhüllen geschlossenen Hohlräumen) stattfinden können, sind die sogenannten *elektrischen* (oder elektromagnetischen) *Eigenschwingungen*. Sie sind zu den mechanischen Eigenschwingungen in elastischen festen Körpern sehr analog und lassen sich durch die Schwingungen von elektrischen Oszillatoren erster und höherer Ordnung schematisieren.

Die Frage nach ihrer Entstehung oder *Erregung* wollen wir außer acht lassen und nur den Mechanismus untersuchen, durch welchen sie beibehalten und gedämpft werden. — Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf Körper von rotationssymmetrischer Gestalt und auf elektromagnetische Schwingungsvorgänge, welche dieselbe Symmetrie aufweisen.

Wir stellen uns also vor, daß in einem rotationssymmetrischen Metallkörper eine elektrische Strömung stattfindet, derart, daß die Stromlinien in den Meridionalebenen enthalten bleiben und daß die Stromdichte von dem Azymutwinkel  $\alpha$  dieser Ebenen in bezug auf eine von ihnen unabhängig ist. Wir denken uns ferner, daß in allen zu der Rotationsachse (die wir zur *Z*-Achse wählen) senkrechten Quer-

schnitten ( $xy$ -Ebenen) des Körpers die elektrische Strömung in demselben Augenblick *denselben Sinn* hat, d. h. im Sinne der positiven oder negativen  $Z$ -Achse gerichtet ist. Es müssen sich dann in der Nähe der beiden Pole — oder eher in den entsprechenden „oberen“ (positiven) und „unteren“ (negativen) Hälften der *Körperoberfläche* — entgegengesetzte elektrische Ladungen bilden, wie dies in der Abb. 28 angedeutet ist. Diese Ladungen erzeugen ihrerseits ein zur Stromrichtung entgegengesetztes *elektrostatisches* Feld, welches die Stromstärke vermindern und schließlich vernichten muß. Das Verschwinden der elektrischen Strömung kann aber nur für einen Augenblick stattfinden, denn die von dem erwähnten Feld herrührenden elektrostatischen Kräfte werden sofort eine Strömung der entgegengesetzten Richtung hervorrufen. Andererseits sind mit der zeitlichen Änderung der Stromstärke elektrische *Induktionskräfte* verbunden, infolge deren die Stromstärke nur allmählich zunehmen wird, und zwar in der zur ursprünglichen entgegengesetzten Richtung (von oben nach unten). Dieses Anwachsen der Stromstärke kann nur so lange dauern, bis die aufgespeicherten elektrischen Ladungen der beiden Körperhälften nicht verschwinden. Gleichzeitig verschwindet das dadurch bedingte elektrostatische Feld. Die elektrische Strömung muß trotzdem unter der Wirkung der Induktionskräfte in derselben Richtung fort dauern, wobei jetzt die untere Hälfte des Körpers positiv und die obere negativ geladen werden. Das sich auf diese Weise wieder bildende, nach oben gerichtete elektrostatische Feld wirkt dabei zunächst wie eine Bremse; die Stromstärke fällt also wieder ab, bis die durch ihre Abnahme hervorgerufenen elektrischen Induktionskräfte diese elektrischen Bremskräfte und auch die immer vorhandenen Reibungskräfte nicht mehr überwinden können. Dann kehrt sich die Stromrichtung wieder um, und der oben beschriebene Vorgang wiederholt sich nochmals mit einer infolge der Reibungsverluste etwas verminderten Stärke.

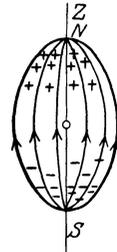


Abb. 28.

Wir haben also in dem betrachteten Fall genau denselben Schwingungsmechanismus wie bei den freien Schwingungen eines Pendels oder eines quasielastischen elektrischen Oszillators, den wir im Kap. III, § 4 ausführlich untersucht hatten. Es entsprechen dabei den elektrostatischen Kräften die quasielastische Kraft  $-kx$  und den Induktionskräften die Inertialkraft  $-m \frac{d^2 x}{dt^2}$ . Die Ladung einer bestimmten Hälfte des Metallkörpers entspricht der Verschiebung  $x$ , und die Stromstärke der Geschwindigkeit  $v = \frac{dx}{dt}$ . Man kann in der Tat das betrachtete Problem auf dieselbe Gleichung

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} + \vartheta \frac{dv}{dt} + k v = 0 \quad (42)$$

zurückführen, welche die Eigenschwingungen eines isotropen quasi-elastischen Oszillators bestimmt [vgl. (35) § 4, Kap. III], wenn man  $\mathfrak{p}$  als das elektrische Moment des Metallkörpers (oder eines Teiles des letzteren) definiert und die Konstanten  $m$ ,  $\vartheta$ ,  $k$  oder eher die Verhältnisse  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  und  $\frac{\vartheta}{m} = 2\omega''$  in passender Weise wählt. Man kann vielmehr sagen, daß das ganze Problem der elektrischen Eigenschwingungen eines Metallkörpers in der Bestimmung dieser Konstanten besteht, wobei selbstverständlich der Schwingungstypus gleichzeitig festgestellt werden muß. Die Schwingungsfrequenz  $\omega'$  läßt sich dann mittels dieser Konstanten nach der Formel (35b), Kap. III berechnen.

Was den Schwingungstypus anbelangt, so sind bei jedem Metallkörper *unendlich viele verschiedene Schwingungstypen möglich*, die den mechanischen *Partial- oder Normalschwingungen* einer gespannten Seite und im allgemeinen irgendwelcher elastischer Körper entsprechen. Die oben betrachteten elektrischen Schwingungen eines rotationssymmetrischen Metallkörpers sind nur als die einfachsten in dem charakteristischen System von Normalschwingungen anzusehen (sie entsprechen den *Grundschnwingungen* einer gespannten Seite). Man kann sich leicht kompliziertere Schwingungstypen vorstellen, bei welchen die Stromdichte auf der Körperoberfläche nicht nur in den beiden Polen, sondern gleichzeitig in einer Anzahl von sogenannten *Knotenlinien* verschwindet. Die Schwingungsphasen müssen dabei auf den beiden Seiten einer jeden solchen Linie entgegengesetzt bleiben, ebenso wie dies bei den elastischen *Oberschwingungen* der Fall ist.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die Knotenstellen der Stromdichte mit den *Bauchstellen* (d. h. Stellen maximaler Amplitude) der *Flächendichte der elektrischen Ladung* (Volumladungen in einem homogenen Körper sind nicht vorhanden) zusammenfallen, und umgekehrt, die Bauchstellen der Stromdichte auf der Körperoberfläche sind die Knotenlinien der Ladungsdichte. Wir werden noch zu dieser Frage bei der Betrachtung einiger Spezialfälle zurückkehren. — Im folgenden werden wir unter den Knotenstellen immer solche Stellen wo die

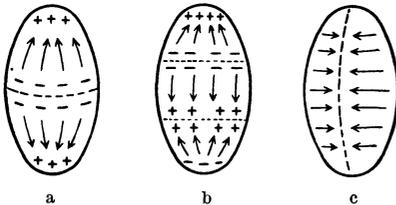


Abb. 29.

Stromdichte verschwindet, verstehen. In der Abb. 29 a, b sind die erste und zweite Oberschwingung des betrachteten Metallkörpers schematisch dargestellt; die punktierten Linien sind die *Knotenlinien*. Die Pole können dabei als Knotenlinien von verschwindender Größe aufgefaßt werden.

Neben diesen *meridionalen* Schwingungen können in einem Rotationskörper auch *laterale* elektrische Schwingungen stattfinden, bei

welchen die Stromlinien koaxiale Kreise oder eher *Kreisbogen* bilden, die durch eine Anzahl äquidistanter meridionaler Knotenebenen aus den Parallelkreisen ausgeschnitten werden. In diesem lateralen Schwingungssystem gibt es keine Grundschiwingung; man kann auch sagen, daß die Frequenz dieser Grundschiwingung, die dem Fehlen irgendwelcher Knotenflächen entspricht, gleich Null ist.

Die Gesamtheit der Frequenzen der verschiedenen elektrischen Eigenschwingungen eines metallischen Körpers heißt sein *elektrisches Spektrum*. Bei Anwesenheit der Dämpfung ist es zweckmäßig, dieses Spektrum durch die komplexen Zahlen  $\omega' + i\omega''$  zu charakterisieren, die nicht nur die Schwingungsfrequenz, sondern gleichzeitig die zugehörigen Dämpfungskoeffizienten bestimmen.

Jeder elektrische Schwingungsvorgang, der in einem solchen Körper bei Fehlen äußerer Kräfte stattfindet, läßt sich als eine Superposition von verschiedenen Eigenschwingungen mit bestimmten (relativen) Amplituden und Phasen auffassen. Die Tatsache, daß bei dieser Superposition die Eigenschwingungen ganz ungestört bleiben müssen, folgt aus der Linearität der Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes. Wir haben also im elektrischen Fall genau dieselben Verhältnisse wie bei den mechanischen (elastischen) Schwingungen.

## 2. Feld- und Substanztheorie der Eigenschwingungen.

Die betrachteten elektrischen Schwingungen in metallischen Körpern können von einem äußerlich ganz verschiedenen Standpunkte aus behandelt werden, bei welchem ihre Analogie mit den mechanischen Schwingungen scheinbar verloren geht. Und zwar kann man statt der elektrischen *Substanzgrößen*, wie es die Ladungs- und Stromdichte sind, die damit verknüpften elektromagnetischen *Feldgrößen* in Betracht ziehen. Der Schwerpunkt des beschriebenen Erscheinungskomplexes verschiebt sich dabei aus dem Metallinnern in den umgebenden Raum. Das Metallinnere bedeutet hier nur denjenigen Raumteil, wo der Vektor  $\text{rot } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$  (oder  $\text{rot } \mathfrak{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ ) von Null verschieden ist. In dem Grenzfall eines vollkommen leitenden Metallkörpers muß das elektromagnetische Feld innerhalb des letzteren überhaupt verschwinden. Die Flächenladungen und Ströme lassen sich dabei durch die Grenzwerte der elektrischen und magnetischen Feldstärke ausdrücken nach den Formeln:

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{k} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{n} \times \mathfrak{H}. \quad (43)$$

Diese Formeln sind dann gültig, wenn das Metall sich im leeren Raum befindet. Wenn es in ein isolierendes Medium mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und der magnetischen Permeabilität  $\mu$  eingebettet ist, muß man sie durch

$$\eta = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{k} = \frac{1}{4\pi\mu} \mathfrak{n} \times \mathfrak{H} \quad (43a)$$

ersetzen. Man bekommt dabei den Eindruck, daß der ganze elektromagnetische Vorgang sich in diesem Medium in der Form von stehenden oder sich nach außen fortpflanzenden Wellen abspielt, während das Metall einfach ein „Loch“ bildet, das nur wegen der Grenzbedingungen

$$\mathfrak{E} \times \mathfrak{n} = 0, \quad \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{n} = 0 \quad (43b)$$

in Betracht kommt.

Die elektrischen Eigenschwingungen des Metalls erscheinen in diesem „Feldbild“ als bestimmte, sich aus der allgemeinen Feldgleichung für harmonische Schwingungsvorgänge

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \left( k = \frac{\omega}{c} \right) \quad (43c)$$

ergebende Wellentypen, die dadurch ausgezeichnet sind, daß die Feldstärken eindeutige, stetige und endliche Funktionen der räumlichen Koordinaten darstellen, die auf der Oberfläche des Metalls den Bedingungen (43b) genügen und im Unendlichen verschwinden. In dem Fall eines wirklichen „Metalloches“ („Kastens“ oder „Hülle“) fällt die letzte Bedingung weg; man bekommt dabei *innerhalb* des „Loches“ *stehende* elektromagnetische Wellen, so daß in diesem Fall keine Ausstrahlung und folglich keine Dämpfung stattfindet.

Will man die endliche Leitfähigkeit der betreffenden Metalle berücksichtigen, so findet man vom Standpunkte des „Feldbildes“, daß das elektromagnetische Feld in das Metallinnere von außen oder von innen (im Falle eines wirklichen Loches) eindringt, und daß neben der gewöhnlichen Energieausstrahlung eine stetige Zuführung der elektromagnetischen Energie in das Metallinnere stattfindet. Die Energie der elektromagnetischen Wellen (auch im Falle des Loches) muß infolgedessen mit der Zeit exponentiell abklingen. Wenn man diese „Entsaugung“ der elektromagnetischen Energie durch das Metall außer acht läßt, kann man den Schwingungsvorgang auffassen als eine alternierende Verwandlung der elektrischen Energie in magnetische und *vice versa*; beim Fehlen einer äußeren Metallhülle ist diese Energie allmählich in die Wellenzone ausgestrahlt.

Dieses Feldbild der elektrischen Eigenschwingungen eines Metalls und das oben skizzierte quasimechanische oder „Substanzbild“ sind selbstverständlich in physikalischer und mathematischer Hinsicht einander vollkommen äquivalent. Vom physikalischen Standpunkt ist aber das „Substanzbild“ viel einfacher und einleuchtender. Wie wir schon bei anderen Gelegenheiten, besonders im ersten Bande, manchmal hingewiesen haben, kann man den Begriff des Feldes vollkommen ausschließen und die elektromagnetischen Vorgänge auf die retardierte Fernwirkung der einzelnen Elektronen und die damit verknüpfte Bewegung der letzteren zurückführen. Nach dieser „direkten“ Methode haben wir im letzten Paragraphen des vorigen und im ersten Paragraphen

dieses Kapitels die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen behandelt. Die Behandlung der hier betrachteten Frage nach derselben Methode führt aber auf ziemlich komplizierte Integralgleichungen. Wir wollen hier nur die allgemeine Gestalt dieser Integralgleichungen andeuten.

Die in den letzteren auftretende zu bestimmende Grundfunktion ist die Stromdichte  $\mathbf{j}$ . Da sie als harmonische Funktion der Zeit ( $\mathbf{j} \sim e^{-i\omega t}$ ) angesetzt wird, genügt es, nur ihre Abhängigkeit von den räumlichen Koordinaten, d. h. vom Radiusvektor  $\mathbf{r}$  zu bestimmen. Zu diesem Zweck müssen wir in die „mechanische“ Beziehung

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E} \tag{44}$$

den allgemeinen Ausdruck der elektrischen Feldstärke *als Funktion der Stromdichte* einsetzen.

Um das Problem nicht zu komplizieren, wollen wir den Effekt der gebundenen Elektronen außer acht lassen ( $\epsilon = \mu = 1$ ).

Es wird dabei

$$\mathfrak{E} = \text{rot rot } \mathfrak{B} = -\frac{1}{ik} \text{rot rot } \mathfrak{A} \quad \left(k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right), \tag{44a}$$

wo  $\mathfrak{B}$  wie üblich das Polarisationspotential und  $\mathfrak{A}$  das Vektorpotential bedeuten ( $\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} \mathfrak{B}$ ) und ferner

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{i(\mathbf{r}', t')}{R} e^{ikR} dV' \quad (\mathfrak{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{44b}$$

Bei der Differentiation von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathbf{r}$  ist  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  als konstant zu behandeln.

Wir haben also mit der Abkürzung  $\psi = \frac{e^{ikR}}{R}$ :

$$\text{rot } \mathbf{j} \psi = \nabla \psi \times \mathbf{j}, \quad \text{rot rot } \mathbf{j} \psi = (\mathbf{j} \nabla) \nabla \psi - \mathbf{j} \nabla^2 \psi,$$

d. h. wegen  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  und (44a, b):

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{ik} \int \left\{ (\mathbf{j} \nabla) \nabla \frac{e^{ikR}}{R} + k^2 \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{j} \right\} dV' = \frac{c}{\sigma} \mathbf{j}. \tag{44c}$$

Dies ist die gesuchte Integralgleichung. In dem Grenzfall eines vollkommen leitenden Körpers ( $\sigma = \infty$ ) nimmt sie die folgende etwas einfachere Gestalt an:

$$\int [(\mathbf{k} \nabla) \nabla \psi + k^2 \psi \mathbf{k}] dS = 0, \tag{44d}$$

wo  $\mathbf{k}$  die Flächendichte des Stromes ist und der Radiusvektor  $\mathbf{r}$  sich auf die im *Metallinneren* liegenden Punkte bezieht.

Wie in der Theorie der Integralgleichungen gezeigt wird, sind die linearen homogenen Gleichungen vom Typus (44c) und (44d) nur bei gewissen Werten des Parameters  $k$  lösbar. Es sind gerade diese ausgezeichneten „Eigenwerte“ von  $k$ , welche die Frequenz der verschie-

denen für den betreffenden Körper charakteristischen Eigenschwingungen bestimmen. Die zugehörigen Lösungen  $\mathfrak{j}(\mathfrak{r})$  oder  $\mathfrak{k}(\mathfrak{r})$  stellen die entsprechenden Schwingungstypen dar. Man bezeichnet sie gewöhnlich als die *Eigenfunktionen* des betreffenden Problems. Den verschiedenen Substanz- oder Feldgrößen entsprechen selbstverständlich verschiedene Eigenfunktionen.

### 3. Einige allgemeine Eigenschaften der Eigenschwingungen; Orthogonalität der Eigenfunktionen beim inneren Problem.

Wir wollen zum Schluß einige allgemeine Eigenschaften dieser Eigenfunktionen betrachten. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall vollkommen leitender Körper. Wir stellen uns dabei auf den Standpunkt der „Feldtheorie“, denn die ihr entsprechende „indirekte“ Methode erweist sich in mathematischer Hinsicht viel bequemer als die direkte Methode der „Substanztheorie“.

Man muß zunächst die zwei schon erwähnten Grundtypen von Eigenschwingungsproblemen unterscheiden, je nachdem es sich um ein nach außen begrenztes oder unbegrenztes Raumgebiet handelt. Im ersten Fall („inneres Problem“) sind die Schwingungen *stehende ungedämpfte Wellen* mit einem reellen Spektrum, d. h. mit *reellen Eigenwerten*  $k_1, k_2, k_3, \dots$ . Im zweiten Fall („äußeres Problem“) sind diese Eigenwerte *komplex*, was *zeitlich gedämpften und räumlich divergierenden* Wellen entspricht.

Wir wollen zuerst den ersten Fall betrachten. Es seien also  $k_1$  und  $k_2$  zwei verschiedene reelle Eigenwerte und  $\psi_1, \psi_2$  die zugehörigen Eigenfunktionen, welche den Identitäten

$$\nabla^2 \psi_1 + k_1^2 \psi_1 = 0, \quad \nabla^2 \psi_2 + k_2^2 \psi_2 = 0$$

genügen.

Multipliziert man die erste Identität mit  $\psi_2^*$  (die zu  $\psi_2$  komplex konjugierte Größe) und die zur zweiten konjugierte Identität

$$\nabla^2 \psi_2^* + k_2^2 \psi_2^* = 0$$

mit  $\psi_1$ , subtrahiert diese Produkte voneinander und integriert das Resultat über das ganze betrachtete Volumen, so wird:

$$J = \int (\psi_2^* \cdot \nabla^2 \psi_1 - \psi_1 \cdot \nabla^2 \psi_2^*) dV = (k_2^2 - k_1^2) \int \psi_1 \cdot \psi_2^* dV. \quad (45)$$

Wenn  $\psi$  eine skalare Größe bedeutet, läßt sich das linksstehende Integral in das Integral

$$J = \oint (\psi_2^* \cdot \nabla_n \psi_1 - \psi_1 \cdot \nabla_n \psi_2^*) dS \quad (45a)$$

über die Grenzfläche transformieren (oder eine Summe ähnlicher Integrale, falls es innerhalb  $V$  noch andere Körper gibt). Stellt aber  $\psi$  eine vektorielle Größe, z. B. die elektrische oder die magnetische Feldstärke dar, so hat man, wie leicht zu sehen ist:

$$J = \oint [\psi_2^* \times \text{rot } \psi_1 - \psi_1 \times \text{rot } \psi_2^*] \cdot \mathfrak{n} dS. \quad (45b)$$

Diese Formel ergibt sich mittels der Beziehung  $\nabla^2 \psi = -\text{rot rot } \psi$  (wegen  $\text{div } \psi = 0$ ) und der Identität  $\text{div}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \cdot \text{rot } \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \cdot \text{rot } \mathfrak{B}$ , wenn man  $\mathfrak{A} = \psi_1$ ,  $\mathfrak{B} = \psi_2^*$  oder  $\mathfrak{A} = \psi_2^*$ ,  $\mathfrak{B} = \psi_1$  setzt.

Nach den Feldgleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} - \frac{i\omega}{c} \mathfrak{H} = 0, \quad \text{rot } \mathfrak{H} + \frac{i\omega}{c} \mathfrak{E} = 0$$

muß  $\text{rot } \psi$  gleich  $ik\mathfrak{H}$  oder  $-ik\mathfrak{E}$  sein, je nachdem  $\psi = \mathfrak{E}$  oder  $\mathfrak{H}$  ist. In beiden Fällen sind die Vektoren  $\psi_1 \times \text{rot } \psi_2^*$  und  $\psi_2^* \times \text{rot } \psi_1$  wegen der Grenzbedingungen (43b) senkrecht zur Flächennormale gerichtet, so daß  $J$  identisch verschwindet. Daraus folgt nach (45) die Beziehung

$$\int \psi_1 \cdot \psi_2^* dV = 0, \tag{45c}$$

welche die sogenannte *Orthogonalität* der verschiedenen Eigenfunktionen zueinander ausdrückt. Diese Orthogonalitätseigenschaft bezieht sich offenbar nur auf die Eigenfunktionen, welche die elektrische und magnetische Feldstärke charakterisieren.

Da die Eigenfunktionen bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor (der die Schwingungsamplitude charakterisiert) bestimmt sind, kann man sie immer der Bedingung

$$\int \psi_n \cdot \psi_n^* dV = 1 \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \tag{45d}$$

unterwerfen; sie heißen in diesem Fall *normiert*.

Es sei bemerkt, daß wegen der Realität der Eigenwerte und folglich auch der Frequenzen  $\omega_n = ck_n$  die Zeit aus dem Produkte  $\psi_n \cdot \psi_n^*$  wegfällt. Setzt man nämlich  $\psi_n = \psi_n^0 e^{-i\omega_n t}$ , wo die Amplitudenfunktion  $\psi_n^0$  nur von den räumlichen Koordinaten abhängt, so wird  $\psi_n^* = \psi_n^{0*} e^{+i\omega_n t}$  und  $\psi_n \psi_n^* = \psi_n^0 \psi_n^{0*}$ .

Wenn die Eigenwerte in einer Reihe  $k_1, k_2, k_3 \dots$  nach zunehmender Größe eingeordnet sind, so bezieht sich der erste von ihnen auf die Grundschwingung und die anderen auf die Oberschwingungen.

Jede Lösung der allgemeinen Wellengleichung

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \tag{46}$$

welche den Grenzbedingungen (43b) Genüge leistet, läßt sich durch eine Reihe von der Form

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n \tag{46a}$$

darstellen mit passend gewählten Amplitudenkoeffizienten  $c_n$ . Ist  $\psi$  bekannt, so kann man diese Koeffizienten nach der Formel

$$c_n = \int \psi \cdot \psi_n^* dV \tag{46b}$$

bestimmen, die unmittelbar aus (45c) und (45d) folgt. Der zeitliche

Mittelwert der elektrischen oder magnetischen Energiedichte drückt sich offenbar durch die Formel

$$\frac{1}{8\pi} \overline{\psi \cdot \psi^*} = \frac{1}{16\pi} \sum' \sum' c_n c_m^* \psi_n \psi_m^*$$

aus. Nun gilt, wegen der Orthogonalität und Normalitätsbedingungen

$$\int \psi \cdot \psi^* dV = \sum' c_n \cdot c_n^* = \sum' |c_n|^2. \quad (46c)$$

Die vollständige, im ganzen Volum  $V$  enthaltene Energie ist folglich (im Mittel) gleich der Summe der entsprechenden Energien, die den einzelnen Eigenschwingungen angehören.

Die angeführten Resultate sind nicht nur für die Schwingungen eines Hohlraumes gültig, sondern für die freien Schwingungen eines beliebigen Systems von vollkommen leitenden Körpern, die durch eine beliebige entfernte, vollkommen leitende Hülle umschlossen sind.

Sie lassen sich aber für den Fall, wenn eine solche Hülle fehlt („äußeres Problem“ siehe oben) *nicht* — oder nur näherungsweise — übertragen. Um dies einzusehen, führen wir zunächst statt der vollkommen spiegelnden Hülle eine sehr entfernte Fläche  $\Sigma$ , die den betrachteten Körper (oder Körpersystem) einschließt und erstrecken die Integration in (45) über das innerhalb  $\Sigma$  und außerhalb des Körpers (oder der Körper) enthaltene Volum. Während nun das Integral (45b) für die Körperoberfläche wegen der Grenzbedingungen verschwindet, bleibt das entsprechende Integral für die äußere Fläche von Null verschieden. Die Orthogonalitätsbedingung (45c) ist folglich in diesem Fall nicht erfüllt. Was die Normalitätsbedingung (45d) anbetrifft, so kann sie überhaupt nur dann formuliert werden, wenn man statt der Eigenfunktionen  $\psi_n$  ihre Amplituden  $\psi_n^0$  betrachtet und die Zeitfaktoren  $e^{-i\omega_n t} = e^{-\omega'' t - i\omega_n' t}$  wegläßt.

Man bekommt dabei mit Rücksicht darauf, daß die Eigenwerte komplex sind:

$$(k_2^{*2} - k_1^2) \int \psi_1 \psi_2^* dV = \oint [\psi_2^* \times \text{rot } \psi_1 - \psi_1 \times \text{rot } \psi_2^*] \cdot \nu d\Sigma$$

( $\nu$  — äußere Normale zu  $\Sigma$ ), oder für  $\psi = \mathfrak{E}$ :

$$(k_2^{*2} - k_1^2) \int \mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{E}_2^* dV = \oint [k_1 \mathfrak{E}_2^* \times \mathfrak{H}_1 - k_2^* \mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{H}_2^*] \cdot \nu d\Sigma$$

und eine ähnliche Formel für  $\psi = \mathfrak{H}$ . Nun müssen in der Wellenzone die Produkte  $\mathfrak{E}_2^* \times \mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{H}_2^*$  durchschnittlich parallel der Normalen  $\nu$  gerichtet sein, so daß das rechtsstehende Integral niemals verschwinden kann (gleichzeitig für *alle* Eigenfunktionenpaare). Bei geringer Ausstrahlung ist es aber vielfach möglich, die Wellenzone außer acht zu lassen und die Schwingungen als ungedämpft zu behandeln.

Es sei noch bemerkt, daß gedämpfte Schwingungen, im Gegensatz zu den ungedämpften, in einem bestimmten Augenblick beginnen müssen

(sonst müßte ihre Stärke bei Vertiefung in die Vergangenheit unbegrenzt anwachsen). Sie können deshalb hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von der Zeit durch den Faktor  $e^{-i\omega t}$  nur von diesem Augenblick ab dargestellt werden. Der Fall, daß sie unbegrenzt von  $t = -\infty$  bis  $t = +\infty$  dauern, ist in der Wirklichkeit auch näherungsweise nicht realisierbar.

## § 6. Einfachste Spezialfälle von Eigenschwingungen.

### 1. Kugel.

Im Falle von Eigenschwingungen vom meridionalen Typus in rotationssymmetrischen Körpern müssen, wie schon aus Symmetriegründen ersichtlich wird, die magnetischen Kraftlinien mit den Parallelkreisen zusammenfallen, und die elektrischen in Meridianebenen verlaufen. Die Bedingungen (37b) und folglich der Ansatz (36), den wir im vorigen Paragraphen auf Wellen in unendlichen Drähten oder Kabeln mit kreisförmigem Querschnitt angewandt haben, bleiben also in dem Fall eines Rotationskörpers von endlicher Länge auch gültig. Wir müssen aber die Formel (39) für  $\varphi$  und  $A = A_z$  durch den allgemeineren Ansatz:

$$\psi^{(h)} = \psi^{(h)}(r, z) e^{-i\omega t} \quad (h = 0, 1) \quad (47)$$

ersetzen. Dementsprechend bekommen wir statt (39a) die Formeln

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, & E_\alpha &= 0, & E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{i\omega A}{c}, \\ H_r &= 0, & H_\alpha &= -\frac{\partial A}{\partial r}, & H_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (47a)$$

wobei  $\varphi$  und  $A$  miteinander nach (34) durch die Beziehung

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i\omega}{c} \varepsilon \mu \varphi \quad (47b)$$

verknüpft sind.

Die Formel  $H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}$  ergibt sich aus den Ausdrücken

$$H_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial r} \sin \alpha, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial r} \cos \alpha$$

mit Rücksicht auf  $H_\alpha = H_x \sin \alpha - H_y \cos \alpha$ .

Führt man statt der zylindrischen Koordinaten  $(z, r, \alpha)$  polare Koordinaten  $(R, \Theta, \alpha)$  mit dem Ursprung  $R=0$  in irgend einem Punkte  $O$  der  $Z$ -Achse, so wird  $z = R \cos \Theta$ ,  $r = R \sin \Theta$  und dementsprechend

$$\begin{aligned} E_r &= R_R \sin \Theta + E_\Theta \cos \Theta, \\ E_z &= E_R \cos \Theta - E_\Theta \sin \Theta \end{aligned}$$

oder umgekehrt

$$E_R = E_r \sin \Theta + E_z \cos \Theta, \quad E_\Theta = E_r \cos \Theta - E_z \sin \Theta,$$

wie man aus der Abb. 30 sofort ersehen kann.

Diese Transformationsformeln sind nicht nur für  $\mathfrak{E}$ , sondern für beliebige Vektoren, die in den Meridianebenen liegen, gültig. Man hat also mit Rücksicht darauf, daß die Komponenten des Vektors  $\nabla \psi$  in bezug auf  $R$  und  $\Theta$  gleich  $\frac{\partial \psi}{\partial R}$  und  $\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}$  sind:

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{i\omega}{c} A \cos \Theta, & E_\alpha &= 0, & E_\Theta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} - \frac{i\omega}{c} A \sin \Theta, \\ H_R &= 0, & H_\Theta &= 0, & H_\alpha &= -\frac{\partial A}{\partial R} \sin \Theta - \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \Theta} \cos \Theta \end{aligned} \right\} (47c)$$

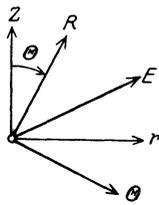


Abb. 30.

und

$$\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mu \varphi = \frac{\partial A}{\partial R} \cos \Theta - \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial \Theta} \sin \Theta. \quad (47d)$$

Die Lösung der Gleichung  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ , unter Berücksichtigung der üblichen Grenzbedingungen, bietet auch für den Fall rotationssymmetrischer Metallkörper erhebliche mathematische Schwierigkeiten, und nur bei Voraussetzung einer unendlich großen Leitfähigkeit läßt sie sich verhältnismäßig einfach behandeln.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten (zuerst von *J. J. Thomson* betrachteten) Fall einer vollkommen leitenden Kugel. Man kann dabei die im ersten Bande Kap. V, § 10 gegebene Entwicklung der Potentiale  $\varphi$  und  $A$  benutzen, welche die allgemeine Lösung der Gleichung  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  außerhalb einer Kugel darstellen und besonders geeignet sind, sich der Befriedigung der Grenzbedingungen für die Kugeloberfläche anzupassen.

Mit anderen Worten — man kann in diesem Fall die Flächenladungen und Ströme, die das zu bestimmende elektromagnetische Feld erzeugen, durch *eine Anzahl Multipole im Kugelmittelpunkt ersetzen*.

Da  $A_x$  und  $A_y$  gleich Null sind und  $Z$  eine Symmetrieachse ist, so ergibt sich für  $A_z = A$  die folgende allgemeine Darstellung:

$$A = J_0 \psi + J_1 \frac{\partial}{\partial z} \psi + J_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \cdots + \frac{J_n}{n!} \frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} + \cdots, \quad (48)$$

wo

$$\psi = \frac{e^{ikR}}{R} \quad \left( k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} \right) \quad (48a)$$

ist und  $J_0, J_1 \dots$  unbestimmte Konstanten bedeuten. Wir setzen zunächst alle diese Konstanten außer  $J_0$  gleich Null und versuchen durch geeignete Wahl des Parameters  $k$  die erhaltene Lösung den Grenzbedingungen anzupassen. Im betrachteten Fall reduzieren sich diese

Bedingungen einfach auf

$$E_{\theta} = 0 \quad \text{für} \quad R = a, \quad (48b)$$

wo  $a$  den Kugelradius bedeutet.

Nun haben wir nach (47d), da  $A = J_0 \psi$  von  $\Theta$  unabhängig ist,

$$\varphi = \frac{c}{i \omega \varepsilon \mu} \frac{\partial A}{\partial R} \cos \Theta$$

und folglich nach (47c)

$$E_{\theta} = \frac{c}{i \omega \varepsilon \mu R} \frac{\partial A}{\partial R} \sin \Theta - \frac{i \omega}{c} A \sin \Theta.$$

Die Bedingung (48b) läßt sich also tatsächlich befriedigen, wenn man für  $R = a$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R} + k^2 A = 0$$

setzt.

Dies gibt mit  $A = J_0 \psi$

$$J_0 \psi \left( -\frac{1}{a^2} + \frac{ik}{a} + k^2 \right) = 0$$

d. h.

$$k^2 + \frac{ik}{a} - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Das ist die gesuchte Gleichung für den Parameter  $k$  (oder für die entsprechende Eigenfrequenz  $\omega = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ). Ihre Lösung lautet:

$$k = -\frac{i}{2a} + \frac{\sqrt{3}}{2a} \quad (49)$$

oder

$$\omega = \omega' - i\omega'' \quad (49a)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \omega' = 2\pi\nu' = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{\sqrt{3}c}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} \\ \omega'' = \frac{c}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (49b)$$

Die erhaltene Lösung, welche offenbar dem elektrischen „Grundton“ der Kugel entspricht, stimmt also vollkommen überein hinsichtlich der Schwingungsfrequenz, der Dämpfung und der Beschaffenheit des elektromagnetischen Feldes (außerhalb der Kugel), mit den Schwingungen eines sich im Kugelmittelpunkt befindlichen elementaren Oszillators. Die natürliche Frequenz dieses Ersatzoszillators ist nach (35a, b) Kap. III gleich:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega'^2 + \omega''^2} = \frac{c}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (49c)$$

Da bei einem vollkommenen Leiter die Dämpfung der Eigenschwingungen nur durch die Ausstrahlung bedingt wird, so können wir die effektive Ladung und Masse des Ersatzoszillators oder eher das Verhältnis  $\frac{e^2}{m}$  durch die Formel

$$\omega'' = \frac{e^2 \omega'^2}{3 m c^3},$$

[vgl. (40c) Kap. III], d. h.

$$\frac{e^2}{2 m c^2} = a \sqrt{\varepsilon \mu}$$

definieren. Bei  $\varepsilon = \mu = 1$  läßt sich  $m$  als die elektromagnetische Masse der auf der Kugeloberfläche verteilten Ladung  $e$  ansehen.

Wir betrachten nun das zweite Glied der Reihe (48) und versuchen der Grenzbedingung (48b) mit dem Ansatz

$$A = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial R} \cos \Theta$$

zu genügen.

Es wird dabei wie früher:

$$i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mu \varphi = J_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} \cos^2 \Theta + \frac{J_1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \sin^2 \Theta$$

und

$$E_\Theta = \frac{J_1}{i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mu} \left\{ \frac{2}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial R} + k^2 \frac{\partial \psi}{\partial R} \right\} \cos \Theta \sin \Theta.$$

Die Bedingung (48b) ist also wieder erfüllt, wenn man  $k$  aus der Gleichung

$$\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + \left( k^2 - \frac{2}{R^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial R} = 0, \quad \text{für } R = a$$

d. h.

$$\left( k^2 - \frac{2}{a^2} \right) \left( i k - \frac{1}{a} \right) + \frac{2k^2}{a} + \frac{4ik}{a^2} - \frac{6}{a^3} = 0$$

bestimmt.

Auf diese Weise erhält man die erste elektrische „Oberschwingung“ oder „Oberton“ der Kugel. Dieses Verfahren läßt sich aber nicht ohne weiteres fortsetzen; z. B. liefert das dritte Glied von (48) einzeln genommen einen Ausdruck für  $E_\Theta$ , der nicht gleichzeitig für die ganze Kugeloberfläche verschwindet. Um die dritte Eigenschwingung der Kugel, d. h. den zweiten Oberton zu erhalten, muß man

$$A = J_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + J_0 \psi$$

setzen; die Bedingung (48b) läßt sich dann bei einem bestimmten Verhältnis  $J_0 : J_2$  tatsächlich befriedigen. Im allgemeinen drückt sich das Vektorpotential des  $n$ -ten Obertons durch eine Summe von der Gestalt

$$A^{(n)} = J_n \frac{\partial^n \psi}{\partial z^n} + J_{n-2} \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial z^{n-2}} + \dots$$

bei bestimmten Verhältnissen zwischen den Amplitudenkoeffizienten  $J_n: J_{n-2}: \dots$  aus. Dieser Ausdruck kann in einer kompakteren Form geschrieben werden, wenn man die Kugelfunktionen der entsprechenden Ordnungen einführt. Doch wollen wir auf diese Frage, die ein rein mathematisches Interesse bietet, nicht eingehen (s. Anhang, § 3).

Es ist leicht sich zu überzeugen, daß die erste Oberschwingung eine Knotenlinie  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  besitzt. Dies folgt am einfachsten aus der Formel  $H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}$  [siehe (45a)] mit Rücksicht auf  $A = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial R} \cos \Theta$ . Hinsichtlich dieser Schwingung ist die Kugel äquivalent einem *Quadrupoloszillator* im Kugelmittelpunkt. Hinsichtlich aber der zweiten Oberschwingung ist sie äquivalent einem System, das aus einem Oszillator dritter Ordnung und einem einfachen Oszillator besteht. Es ergeben sich in diesem Fall zwei Knoten — deren Lage durch eine ziemlich komplizierte Gleichung, welche das Verhältnis  $\frac{J_0}{J_2}$  enthält, bestimmt wird.

Es sei daran erinnert, daß wir unter den Knotenlinien die Nullstellen der *elektrischen Stromdichte* und folglich der damit verknüpften *magnetischen Feldstärke* verstehen (im Einklang mit der ursprünglichen Definition). Wir haben aber schon die Tatsache erwähnt, daß die Knotenstellen der Stromdichte mit den Bauchstellen der elektrischen *Ladungsdichte* (und folglich der damit verknüpften *elektrischen Feldstärke*) zusammenfallen. Dies läßt sich an dem betrachteten Beispiel leicht einsehen. Man hat z. B. in dem Fall der Grundschwingung nach (40b) und (46c):

$$E_R = \frac{J_0}{i \frac{\omega}{c} \varepsilon \mu} \left( k^2 \psi - \frac{d^2 \psi}{dR^2} \right) \cos \Theta = \frac{4\pi}{\varepsilon} \eta$$

und

$$H_\alpha = -J_0 \frac{\partial \psi}{\partial R} \sin \Theta = 4\pi \mu | \mathfrak{f} | .$$

Während also  $H$  an den beiden Polen verschwindet und am Äquator der Kugel ( $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ) ihre „Bauchstelle“ hat, verschwindet die elektrische Feldstärke (und Ladungsdichte) am Äquator und hat ihre Bauchstelle an den Polen. Dabei sind  $E$  und  $H$  hinsichtlich ihrer Phase gegeneinander um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben. Genau dieselben Verhältnisse findet man bei allen Oberschwingungen. Es sei bemerkt, daß sie für *stehende* elektromagnetische Wellen irgendwelcher Art typisch sind (Kap. III, § 4).

## 2. Geradliniger Draht von endlicher Länge.

Diese Verhältnisse kommen noch klarer zutage in dem Extremfall eines sehr erstreckten „stabförmigen“ Rotationskörpers, den man als

einen *Draht von endlicher Länge* auffassen kann. Die genaue Gestalt der beiden Enden ist dabei praktisch belanglos. Die Knotenstellen (für Obertöne nicht zu hoher Ordnung) teilen den Draht in eine Anzahl gleicher Strecken, d. h. auf genau dieselbe Weise wie in dem Fall der elastischen Schwingungen einer gespannten Seite. Die elektrischen Eigenschwingungen jeder Strecke sind dabei mit den Grundschwingungen eines einzelnen Drahtes derselben Länge identisch.

Was nun die Grundschwingungen betrifft, so kann man leicht zeigen, daß die zugehörige Wellenlänge  $\lambda$  mit der doppelten Länge des Drahtes  $l$  übereinstimmt (ebenso wie für die elastischen Schwingungen dieses Drahtes, wenn seine beiden Enden befestigt sind). Das elektromagnetische Feld des Drahtes, in solchen Abständen, die klein gegenüber seiner Länge sind — mit Ausschluß der Umgebung der beiden Enden — muß näherungsweise mit dem Feld eines *unendlich langen* Drahtes derselben Dicke übereinstimmen. Wir können also unseren früheren Ansatz für das Potential  $A$  benutzen, mit dem wesentlichen Unterschied, daß wir jetzt stehende und nicht in einer bestimmten Richtung fortschreitende Wellen haben.

Es wird also nach (39) in der Nähe des Drahtes

$$A = [A_1(r)^{iqz} + A_2(r)e^{-iqz}]e^{-i\omega t} = A(r) \cos(qz + \delta)e^{-i\omega t}. \quad (50)$$

Da wir den Draht als vollkommen leitend annehmen, ist

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$$

und

$$A = c_1 \lg \frac{1}{r} + c_2 \quad (50a)$$

zu setzen [vgl. (32b)]. Es gilt ferner ebenso wie in dem Fall fortschreitender Wellen  $c_1 = 2j$  und  $\left[ \text{nach } H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r} \right]$

$$H = \frac{2j}{r},$$

wo  $j$  die *Stromstärke* im entsprechenden Querschnitt des Drahtes bedeutet. Man hat also nach (50)

$$j = j_0 \cos(qz + \delta)e^{-i\omega t}. \quad (50b)$$

Wir denken uns den Koordinatenursprung im Mittelpunkt des Drahtes gelegen, so daß für seine Enden  $z = \pm \frac{l}{2}$  ist. Da diese Punkte Knotenstellen von  $j$  sein müssen, so hat man

$$\cos\left(\frac{ql}{2} + \delta\right) = \cos\left(-\frac{ql}{2} + \delta\right) = 0,$$

d. h. entweder

$$\delta = 0 \quad \text{und} \quad ql = \pi n \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$

oder

$$\delta = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad ql = \pi n \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

und folglich, wenn wir zur reellen Größe übergehen:

$$j = j_0 \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right) \cos \omega_n t & \text{für ungerades } n \\ \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) \cos \omega_n t & \text{für gerades } n. \end{cases} \quad (50c)$$

Bei reellen Werten des Parameters  $q$  ist er mit der Wellenlänge durch die Beziehung  $q = \frac{2\pi}{\lambda}$  verknüpft. Es ergibt sich also:

$$\lambda = 2l, \quad \frac{2l}{2}, \quad \frac{2l}{3}, \dots, \quad \frac{2l}{n}, \dots \quad (50d)$$

Die Frequenzen der entsprechenden Eigenschwingungen sind gegeben durch  $\nu = \frac{c}{\lambda \sqrt{\epsilon \mu}}$ , oder durch

$$\omega_n = \frac{\pi c}{l \sqrt{\epsilon \mu}} \cdot n. \quad (50e)$$

Diese Resultate lassen sich in der üblichen Weise, d. h. aus der Grenzbedingung  $E_z = 0$  nicht ableiten, da im Ansatz (50) die endliche Länge des Drahtes nicht enthalten ist. Man kann sich aber leicht überzeugen, daß diese Bedingung außerhalb der Drahtenden tatsächlich erfüllt ist.

Die für fortschreitende Wellen geltenden Beziehungen zwischen den magnetischen und elektrischen Größen bleiben auch für stehende Wellen bestehen, abgesehen von der schon vielfach erwähnten raum-zeitlichen Verschiebung der Amplituden und Phasen um ein Viertel der entsprechenden Perioden ( $\lambda$ , bzw.  $\tau = \frac{1}{\nu}$ ). So hat man z. B. nach der Gleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0. \quad (51)$$

wo  $e$  die lineare Ladungsdichte (pro Längeneinheit) bezeichnet, in Verknüpfung mit (50c):

$$e = e_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right)}{\cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right)} \sin \omega_n t \quad (51a)$$

mit

$$\frac{\omega_n}{c} e_0 = \frac{\pi n}{l} j_0,$$

d. h. nach (50e)

$$e_0 = j_0 \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (51b)$$

Die elektrische Feldstärke drückt sich durch  $e$  in genau derselben Weise wie die magnetische durch  $j$ , d. h. nach der Formel

$$E = \frac{2e}{r}$$

und entspricht einem skalaren Potential

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r} + c_2. \quad (51c)$$

Die vorhergehenden Formeln sind selbstverständlich nur in der Nähe des Drahtes gültig, d. h. in solchen Abständen  $r$ , die klein gegen seine Länge  $l$  sind. In großen Abständen muß man das elektromagnetische Feld mittels der allgemeinen Formeln für retardierte Potentiale auf Grund der durch (50c), (57a) und (57b) gegebenen Verteilung der Ladung und des Stromes berechnen. Die Berücksichtigung dieses *Fernfeldes* erlaubt es, die *Dämpfung* der Eigenschwingungen zu berechnen und auf diese Weise die obigen Formeln, bei welchen die Schwingungen als ungedämpft erschienen, zu berichtigen.

Das Fernfeld läßt sich in der Gestalt (48) darstellen und seine Bestimmung erfordert nur die Ausrechnung der Koeffizienten  $J_0, J_1, \dots$ .

Für die Grundschiwingung hat man *näherungsweise* ebenso wie in dem Fall einer Kugel:

$$A_z = A = J_0 \psi \left( \psi = \frac{e^{iqR}}{R}, \quad q = \frac{\pi}{l} \right).$$

Es bedeutet hier  $J = J_0 e^{-i\omega t}$  den *elektrischen Impuls* des Drahtes. Führt man das entsprechende elektrische Moment  $p$  ein, so wird

$$\text{wegen } J = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad J_0 = - \frac{i\omega}{c} p_0.$$

Die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie drückt sich durch  $p_0$  nach der bekannten Formel

$$Q = \frac{2}{3} \frac{\omega^4}{c^3} \frac{p_0^2}{2}$$

aus [vgl. (23a), Bd. I, S. 208]. Dies gibt, wenn wir statt  $p_0$  die Größe  $J_0$  einsetzen:

$$\bar{Q} = \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{c} J_0^2. \quad (52)$$

Nun gilt nach der Definition von  $J_0$  (Bd. I, S. 162):

$$J_0 = j_0 \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) dz = \frac{2j_0 l}{\pi}. \quad (52a)$$

Die mittlere Energie in der Umgebung des Drahtes läßt sich durch  $j_0$  folgendermaßen ausdrücken (wenn wir uns auf den Fall  $\varepsilon = \mu = 1$  beschränken):

$$\bar{W} = 2 \int \frac{\bar{H}^2}{8\pi} dV = \frac{1}{2\pi} j_0^2 \int \cos^2 \frac{\pi z}{l} dV.$$

Wir setzen hier  $dV = 2\pi r dr \cdot dz$  und integrieren nach  $z$  über die Drahtlänge und nach  $r$  von  $r = a$  (Drahtradius) bis  $r = \alpha l$ , wo  $\alpha$  einen Zahlenkoeffizienten von der Größenordnung 1 bedeutet. Die exakte Bestimmung dieses Koeffizienten spielt keine wesentliche Rolle, denn die

Energie  $W$  ist hauptsächlich in der unmittelbaren Nähe des Drahtes aufgespeichert.

Wir bekommen also:

$$\bar{W} = j_0^2 \int_a^{\alpha l + \frac{1}{2}l} \int_r^{\frac{1}{2}l} \cos^2 \frac{\pi z}{l} \cdot dz = \frac{1}{2} l j_0^2 \lg \frac{\alpha l}{a}. \quad (52b)$$

Der Dämpfungsdekrement  $\omega''$  ist bestimmt durch die Formeln:

$$-\frac{d\bar{W}}{dt} = \omega'' \bar{W} = \bar{Q} \quad (52c)$$

woraus folgt, nach (52) und (52a):

$$\omega'' = \frac{8}{3} \frac{l}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c \lg \frac{\alpha l}{a}},$$

oder schließlich nach (50e)

$$\omega'' = \frac{8}{3} \frac{c}{l \cdot \lg \frac{\alpha l}{a}}. \quad (52d)$$

Wir wollen noch eine andere, etwas einfachere Ableitung dieser Formel angeben, welche die Betrachtung des Fernfeldes gar nicht braucht. Und zwar kann man statt der Ausstrahlung die damit verknüpfte *Plancksche* Reibungskraft pro Ladungseinheit

$$\frac{2e}{3c^3} \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{2}{3c^2} \frac{d^2 e v}{dt^2}$$

in Betracht ziehen, die von den Schwingungen einer Ladung  $e$  oder eines Impulses  $\frac{ev}{c}$  bedingt wird. Da diese zusätzliche Kraft von der Lage des Aufpunktes unabhängig ist, drückt sich die resultierende Kraft, welche von den Eigenschwingungen des ganzen Drahtes herührt, durch

$$\frac{2}{3c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathfrak{J} = -\frac{2}{3} \frac{\omega^2}{c^2} \mathfrak{J} \quad \left( \mathfrak{J} = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} j dz \right) \quad (53)$$

aus. Diesen Ausdruck kann man als die Feldstärke eines zusätzlichen homogenen elektrischen Feldes — des „Reibungsfeldes“ — auffassen. Die durch das letztere pro Zeiteinheit geleistete Arbeit ist gleich dem Produkt von (53) mit  $c \int j dz = c \mathfrak{J}$ ; für den Mittelwert dieser Arbeit bekommen wir also den früheren Ausdruck (52).

Die Energie  $\bar{W}$  kann man als die „mechanische“ Energie der Schwingungen, d. h. die Summe der potentiellen (elektrischen) und kinetischen (magnetischen) Energie auffassen und in der Form

$$W = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} (A j + \varphi e) dz = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \overline{A j} dz \quad (53a)$$

darstellen.

Nun ist in der Nähe des Drahtes  $A = 2 j \lg \frac{1}{r} + c_2$ . Die Konstante  $c_2$  läßt sich näherungsweise aus dem Umstand bestimmen, daß in Abständen von der Größenordnung der Drahtlänge  $A \approx 0$  wird. Dies gibt  $c_2 = 2 j \lg \alpha l$  ( $\alpha \approx 1$ ) und

$$A = 2 j \lg \frac{\alpha l}{r}. \quad (53b)$$

Im Integral (53a) ist  $A$  auf die Drahtoberfläche  $r = a$  bezogen. Wir haben also:

$$W = 2 \lg \frac{\alpha l}{a} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} j^2 dz = \frac{1}{2} l j_0^2 \lg \frac{\alpha l}{a}$$

in Einklang mit (52b).

Will man auf dieselbe Weise die Dämpfung der Oberschwingungen bestimmen, so ergibt sich sofort, daß die nach (53) berechnete Reibungskraft für Schwingungen gerader Ordnung ( $n = 2, 4, \dots$ ) verschwindet. Dies bedeutet, daß diese Schwingungen keine Ausstrahlung geben. Das ist aber *nicht exakt* der Fall. Denn die *Plancksche* Reibungskraft stellt strenggenommen nur die Strahlungsreaktion von *Dipolschwingungen* dar. Wie wir aber im ersten Bande gesehen haben, geben auch die *Quadrupolschwingungen* und im allgemeinen Schwingungen beliebiger Ordnung zu einer gewissen Ausstrahlung Anlaß. Wir betrachten z. B. die erste Oberschwingung des Drahtes ( $n = 2$ ). Ihr Fernfeld stimmt in erster Annäherung mit dem elektromagnetischen Feld eines Quadrupoloszillators überein und ergibt sich aus dem Vektorpotential

$$A = A_z = J_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} = J_1 \frac{d\psi}{dR} \cos \Theta$$

mit

$$J_1 = j_0 \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \sin \frac{2\pi z}{l} \cdot z dz = j_0 \frac{l^2}{2\pi}$$

Für sehr große Abstände  $R$  hat man (bei  $\varepsilon = \mu = 1$ )

$$\frac{d\psi}{dR} \approx i q \psi$$

und

$$E = H = -\frac{\partial A}{\partial r} = J_1 q^2 \psi \cos \Theta \sin \Theta.$$

Der mittlere Energiefluß durch die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $R$  ist folglich gleich

$$\bar{Q} = \frac{c}{4\pi} \int \frac{|H|^2}{2} dS = \frac{1}{2} c q^4 J_1^2 \overline{\cos^2 \Theta \sin^2 \Theta},$$

worin der Querstrich über  $\cos^2 \Theta \sin^2 \Theta$  den Mittelwert dieses Ausdrucks für die Kugeloberfläche bedeutet.

Nun ist

$$\overline{\cos^2 \Theta \sin^2 \Theta} = \overline{\cos^2 \Theta} - \overline{\cos^4 \Theta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15},$$

und folglich

$$\bar{Q} = \frac{1}{15} c q^4 J_1^2,$$

oder wegen

$$q = \frac{2\pi}{l} \quad \text{und} \quad J_1 = j_0 \frac{l^2}{2\pi},$$

$$\bar{Q} = \frac{4}{15} \pi^2 c j_0^2.$$

Andererseits haben wir nach (53a) und (53b)

$$W = 2 \operatorname{lg} \frac{\alpha^l}{a} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} j^2 dz = \frac{1}{2} l j_0^2 \operatorname{lg} \frac{\alpha^l}{a},$$

wie früher.

Es wird also nach (52c)

$$\omega'' = \frac{Q}{W} = \frac{8}{15} \pi^2 l \cdot \frac{c}{\operatorname{lg} \frac{\alpha^l}{a}}.$$

Die angeführten Resultate sind nicht genau, denn das Fernfeld des Drahtes läßt sich für *jede* Eigenschwingung des Drahtes nur durch eine *unendliche* Reihe von der Gestalt (48) darstellen. Man hat z. B. im Falle der Grundschwingung:

$$J_k = \frac{1}{k!} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos \frac{\pi z}{l} \cdot z^k dz.$$

Das rechtsstehende Integral verschwindet für ungerade Werte von  $k$ ; für gerade Werte bleibt es dagegen von Null verschieden. Ebenso bekommen wir im Falle des ersten Obertons nichtverschwindende Koeffizienten  $J_k$  für ungerade Werte von  $k$ . Dasselbe gilt für höhere Obertöne. Man hat nämlich bei ungeradem  $n$

$$J_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \cos \frac{n\pi z}{l} \cdot z^k dz = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2 \left( \frac{l}{n\pi} \right)^{k+1}, \quad (k \text{ gerade})$$

und bei geradem  $n$

$$J_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \sin \frac{n\pi z}{l} \cdot z^k dz = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \cdot l \left( \frac{l}{n\pi} \right)^k. \quad (k \text{ ungerade})$$

Mittels dieser Ausdrücke ist es leicht die gesamte Ausstrahlung für jede Schwingungsart zu berechnen. Wir werden uns aber bei dieser Frage nicht aufhalten.

Es sei bemerkt, daß geradlinige Drähte von endlicher Länge, die sehr groß gegenüber ihren Querdimensionen ist, in der Radiotechnik als Sendeantennen (vom elektrischen Typus) benutzt werden. Ihre Eigenschwingungen sind durch spezielle Generatoren erregt und unterhalten — etwa in derselben Weise wie die elastischen Eigenschwingungen einer gespannten Seite durch den Bogen.

Dabei spielt die Strahlungsdämpfung gar keine Rolle. Die Ausbreitung des durch solche ungedämpften Schwingungen erzeugten elektromagnetischen Feldes haben wir im § 3 eingehend betrachtet. Es handelte sich aber dort nur um Dipolschwingungen. Um die vollständige Lösung dieser Aufgabe zu erhalten, muß man die *Sommerfeldsche* Theorie auf den Fall von Multipolen höherer Ordnung verallgemeinern, was bisher noch nicht geschehen ist.

Bei der Voraussetzung einer vollkommen leitenden Erde bietet diese Verallgemeinerung keine Schwierigkeit, aber auch kein praktisches Interesse.

### 3. Hohlraum (rechtwinkliger Kasten).

Wir wollen noch zum Schluß dieses Paragraphen die theoretisch wichtige Frage nach den Eigenschwingungen eines „Metalloches“, d. h. eines durch vollkommen leitende (oder „spiegelnde“) Wände begrenzten Hohlraumes untersuchen. Man muß dabei, wie schon erwähnt wurde, lauter stehende ungedämpfte Wellen bekommen, deren Länge und Gestalt von der Größe und der Gestalt der Metallhülle abhängen. Wenn die letztere eine Polyederfläche bildet, sind die Wellen *eben*. In dem Spezialfall eines „Quaders“, d. h. eines rechtwinkligen Kastens, lassen sich diese Wellen besonders einfach und anschaulich bestimmen.

Wir stellen uns vor, daß die Wände des Kastens mit den Koordinatenebenen bzw. den Ebenen  $x_l = a_l$  ( $l = 1, 2, 3$ ) zusammenfallen und versuchen die Grenzbedingungen

$$\mathcal{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \mathcal{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (54)$$

durch einen Ansatz von der Form

$$\psi = \psi^0 \frac{\cos(k_1 x_1)}{\sin(k_1 x_1)} \frac{\cos(k_2 x_2)}{\sin(k_2 x_2)} \frac{\cos(k_3 x_3)}{\sin(k_3 x_3)} e^{-i\omega t} \quad (54a)$$

zu befriedigen. Dieser Ansatz (wobei  $\psi$  eine beliebige elektromagnetische Feldgröße bedeutet) entspricht einem System von 6 Elementarwellen (im Sinne des § 4, Kap. III) von der Gestalt

$$e^{i(\pm k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm k_3 x_3 - \omega t)},$$

die sich durch Spiegelung einer von ihnen z. B.

$$e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)} \quad (54b)$$

an den Kastenwänden ergeben;  $\psi^0$  bedeutet die Amplitude der resultierenden „stehenden“ Schwingungen.

Die Bedingungen (54) können tatsächlich erfüllt werden, wenn man die Komponenten von  $\mathfrak{E}$  folgendermaßen definiert

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E'_1 \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \sin k_3 x_3 e^{-i\omega t}, \\ E_2 &= E'_2 \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \sin k_3 x_3 e^{-i\omega t}, \\ E_3 &= E'_3 \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos k_3 x_3 e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

mit

$$k_l = \frac{\pi}{a_l} n_l, \quad n_l = \text{ganze Zahl.} \quad (55a)$$

Was die Bedingung  $\mathfrak{E} \times \mathfrak{n} = 0$  anbetrifft, so ist dies unmittelbar ersichtlich. Die magnetische Feldstärke läßt sich andererseits aus (55) nach der Gleichung

$$\frac{i\omega}{c} \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{E}$$

bestimmen, welche ergibt:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H'_1 \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \cos k_3 x_3 \cdot i e^{-i\omega t}, \\ H_2 &= H'_2 \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos k_3 x_3 \cdot i e^{-i\omega t}, \\ H_3 &= H'_3 \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \sin k_3 x_3 \cdot i e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (55b)$$

mit

$$H'_1 = \frac{c}{\omega} (k_2 E'_3 - k_3 E'_2) \text{ usw.} \quad (55c)$$

Die Bedingung  $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{n} = 0$  ist also ebenfalls erfüllt, wie selbstverständlich zu erwarten war (denn sie ist als eine Folge der Bedingung  $\mathfrak{E} \times \mathfrak{n} = 0$  und der Feldgleichungen anzusehen).

Die vorhergehenden Formeln stellen folglich eine bestimmte Eigenschwingung des betrachteten Hohlraumes (oder Metallhülle) dar. Die gemeinsame Länge der 6 fortschreitenden Wellen, aus welchen diese Eigenschwingung sich zusammensetzt, ist gleich

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}},$$

d. h. nach (55a)

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}}} \quad (56)$$

und die Schwingungsfrequenz

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}}. \quad (56a)$$

Die Richtung dieser Wellen, ebenso wie ihre Länge lassen sich sehr anschaulich interpretieren. Und zwar faßt man die zwei fortschreitenden Wellen  $+k_1$ ,  $+k_2$ ,  $+k_3$  und  $-k_1$ ,  $-k_2$ ,  $-k_3$  zu einer stehenden

Welle zusammen, so bilden die Knotenstellen der elektrischen Feldstärke ein System von  $n_1 + n_2 + n_3$  äquidistanter Ebenen, welche die Kanten des Kastens  $a_1, a_2, a_3$  resp. in  $n_1, n_2, n_3$  gleiche Strecken schneiden. Dieser Zusammenhang ist in der Abb. 31 für den Fall  $n_1 = 2, n_2 = 3$  und  $n_3 = 4$  dargestellt.

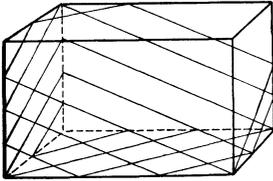


Abb. 31.

Wir haben hier die Zahlen  $n_1, n_2, n_3$  als positiv vorausgesetzt. Sie können aber ebensogut negative Werte annehmen oder auch (nicht gleichzeitig!) verschwinden. Die Winkelkosinus der Normalen zu der betrachteten Ebenenschar stehen dabei zueinander im

Verhältnis  $n_1 : n_2 : n_3$ .

Wegen der Gleichungen  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$  und  $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$  müssen die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  in diesen Ebenen liegen; in der Tat nehmen die obigen Gleichungen mit Rücksicht auf (55) und (55b) die Gestalt  $E'_1 k_1 + E'_2 k_2 + E'_3 k_3 = 0$  bzw.  $H'_1 k_1 + H'_2 k_2 + H'_3 k_3 = 0$  an.

Man kann in (55)  $E'_1 \cos k_1 x_1, E'_2 \cos k_2 x_2, E'_3 \cos k_3 x_3$  durch  $E''_1 \sin k_1 x_1, E''_2 \sin k_2 x_2, E''_3 \sin k_3 x_3$  ersetzen, wodurch die Grenzbedingung  $\mathfrak{E} \times \mathbf{n} = 0$  unverletzt bleibt. Dementsprechend muß man in (55b)  $H'_1 \sin k_1 x_1, H'_2 \sin k_2 x_2, H'_3 \sin k_3 x_3$  durch  $H''_1 \cos k_1 x_1, H''_2 \cos k_2 x_2, H''_3 \cos k_3 x_3$  ersetzen. Man bekommt also für jeden Schwingungstypus zwei verschiedene Schwingungsamplituden, die man derart definieren kann, daß sie senkrecht zueinander stehen ( $\mathfrak{E}' \cdot \mathfrak{E}'' = 0$ ).

Es ist für manche Zwecke wichtig, die Anzahl von Schwingungstypen (Eigenschwingungen) abzuschätzen, deren Frequenz in einem gegebenen Intervall zwischen  $\nu$  und  $\nu + \Delta \nu$  liegt. Diese Abschätzung läßt sich näherungsweise folgendermaßen ausführen. — Jedem Schwingungstypus entspricht (wenn man von der „Polarisationsrichtung“ absieht) ein bestimmtes System der Zahlen  $n_1, n_2, n_3$ , die man als die Koordinaten eines „ganzen“ Punktes in dem „ $n$ -Raum“ auffassen kann. Für solche Schwingungen, deren Frequenz kleiner als  $\nu$  ist, liegen diese Punkte nach (56a) innerhalb oder auf der Oberfläche des Ellipsoids

$$\left(\frac{n_1}{2a_1\nu}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{2a_2\nu}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{2a_3\nu}\right)^2 = 1.$$

Ihre Anzahl muß näherungsweise für genügend große Werte von  $\nu$  (d. h. genügend kleine Wellenlänge) mit dem *Volum* des Ellipsoids, d. h. mit

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{2a_1\nu}{c}\right) \left(\frac{2a_2\nu}{c}\right) \left(\frac{2a_3\nu}{c}\right) = \frac{4\pi}{3} \frac{8a_1 a_2 a_3}{c^3} \nu^3$$

übereinstimmen. Betrachtet man die Schwingungen, welche denselben Absolutwerten von  $n_1, n_2, n_3$  angehören als gleichwertig, und unter-

scheidet die zwei Schwingungen mit den zueinander senkrechten Polarisationsrichtungen, so muß man den Faktor 8 auf der rechten Seite durch 2 ersetzen. Die Anzahl der Eigenschwingungen, deren Frequenz kleiner als  $\nu$  oder deren Wellenlänge größer als  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  ist, drückt sich folglich durch die Formel

$$N_\nu = \frac{8\pi V}{3 c^3} \nu^3 = \frac{8\pi V}{3 \lambda^3} \quad (V = a_1 a_2 a_3) \quad (56b)$$

aus. Daraus erhält man durch Differentiation (bei  $\frac{\Delta \nu}{\nu} \ll 1$ )

$$\Delta N_\nu = 8\pi \frac{V}{c^3} \nu^2 \Delta \nu. \quad (56c)$$

Man kann zeigen, daß diese Formel nicht nur für den Fall eines rechtwinkligen Kastens, sondern für einen Hohlraum von beliebiger Gestalt mit dem Volumen  $V$  gültig ist.

## § 7. Erzwungene Schwingungen und Beugungserscheinungen.

### 1. Allgemeine Behandlungsweise.

Die erzwungenen elektrischen Schwingungen, welche in einem begrenzten Körper (oder in einem unbegrenzten Körper mit einem Loch von endlicher Größe) durch ein gegebenes primäres Feld erzeugt werden, lassen sich im allgemeinen folgendermaßen bestimmen.

Das äußere oder primäre elektromagnetische Feld sei mit  $\psi^0$  ( $\mathfrak{E}^0$ ,  $\mathfrak{H}^0$ ,  $\varphi^0$ ,  $\mathfrak{A}^0$  usw.) bezeichnet. Es ist auch bei Fehlen des Körpers an der betreffenden Stelle vorhanden und genügt in dem von diesem Körper eingenommenen Volum  $V$  (zum Teil auch außerhalb des letzteren) der Gleichung

$$\nabla^2 \psi^0 + k_0^2 \psi^0 = 0 \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c}\right).$$

Bei Anwesenheit des Körpers bekommt man ein resultierendes Feld ( $\psi$ ), welches im Volum  $V$  der Gleichung

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad \left(k^2 = k_0^2 \varepsilon_s \mu, \quad \varepsilon_s = \varepsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega}\right)$$

und auf der Oberfläche  $S$  den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{E} \times \mathbf{n} &= 0, & \Delta \mathfrak{H} \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \Delta \varepsilon_s \mathfrak{E} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \Delta \frac{\mathfrak{H}}{\mu} \times \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}$$

genügt. Dieses resultierende Feld betrachten wir nun als Summe des primären und des sekundären Feldes

$$\psi' = \psi - \psi^0.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen für  $\psi$  und  $\psi^0$  ergibt sich für  $\psi'$  innerhalb  $V$  die Differentialgleichung

$$\nabla^2 \psi' + k^2 \psi' = -(k^2 - k_0^2) \psi^0, \quad (57)$$

während außerhalb  $V$

$$\nabla^2 \psi' + k_0^2 \psi' = 0 \quad (57a)$$

gelten muß. Die Grenzbedingungen lassen sich wegen  $\Delta \psi^0 = 0$  in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathfrak{E}' \times \mathbf{n} &= 0, & \Delta \mathfrak{H}' \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ \Delta \varepsilon_s \mathfrak{E}' \cdot \mathbf{n} &= -\Delta \varepsilon_s \mathfrak{E}^0 \cdot \mathbf{n}, & \Delta \frac{\mathfrak{H}'}{\mu} \times \mathbf{n} &= -\Delta \frac{\mathfrak{H}^0}{\mu} \times \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad (57b)$$

darstellen, wobei die rechten Seiten von (57) und (57b) als bekannt anzusehen sind.

Diese Gleichungen mit der Zusatzbedingung, daß  $\psi'$  im Unendlichen verschwinden soll, bilden die vollständige Formulierung des Problems der erzwungenen Schwingungen und lassen eine eindeutige Lösung zu (s. Anhang, § 3). In dem Extremfall eines vollkommenen Leiters ( $|k| = \infty$ ) reduzieren sich die Gleichungen (57) und (57b) auf

$$\left. \begin{aligned} \psi' &= -\psi^0 + \text{konst.}, \\ \mathfrak{E}' \times \mathbf{n} &= -\mathfrak{E}^0 \times \mathbf{n}, \quad \mathfrak{H}' \cdot \mathbf{n} = -\mathfrak{H}^0 \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \right\} \quad (57c)$$

wobei in die Grenzbedingungen die  $\psi$ -Werte *außerhalb*  $V$  eintreten. Die zweite Gruppe der Grenzbedingungen (57b) verwandelt sich in die Gleichungen  $\mathfrak{E} \cdot \mathbf{n} = 4\pi\eta$ ,  $\mathfrak{H} \times \mathbf{n} = 4\pi\mathfrak{f}$  für die Oberflächendichte der freien Ladung und des Stromes.

## 2. Qualitative Betrachtung zweier Grenzfälle.

Die exakte Bestimmung der erzwungenen Schwingungen in einem Körper von endlicher Größe bietet im allgemeinen eine noch schwierigere Aufgabe als die Bestimmung der Eigenschwingungen. Diese Aufgabe läßt sich verhältnismäßig einfach in dem Grenzfall lösen, daß die äußeren Kräfte von einem sehr entfernten Oszillator bedingt werden, dessen Schwingungsfrequenz klein gegenüber den Eigenfrequenzen des Körpers ist. Es muß dabei die Länge der einfallenden Wellen groß gegenüber den Lineardimensionen des Körpers sein, so daß das äußere elektromagnetische Feld, in welchem das letztere eingebettet ist, als homogen behandelt werden darf. Sind die Eigenschwingungen bekannt, so kann man den Körper durch eine Anzahl harmonischer Oszillatoren ersetzen mit bestimmten Eigenfrequenzen  $\omega'$ , Dämpfungsdekrementen  $\omega''$  und „Empfindlichkeiten“  $\frac{e^2}{m}$ . Das erzwungene elektrische

Moment des Körpers oder eher der mit der primären elektrischen Feldstärke synchron schwingende Anteil dieses Momentes läßt sich dann mit genügender Annäherung durch eine Reihe von der Form

$$p = \mathcal{E} \cdot \sum \frac{e^2}{m \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega''}$$

darstellen. Es bedeutet hier  $\omega_0$  nicht die Eigenfrequenz  $\omega'$  des entsprechenden Ersatzoszillators, sondern seine *Resonanzfrequenz*

$$\omega_0 = \sqrt{\omega'^2 + \omega''^2}$$

[vgl. die Formeln (36) und (35b), Kap. III]. Man hat z. B. für die Grundschrwingungen eines kugelförmigen vollkommen leitenden Körpers nach (49c) und (49d) (bei  $\varepsilon = \mu = 1$ ):

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{1}{a} \quad \text{und} \quad \frac{c^2}{m} = 2c^2 a.$$

Der entsprechende Anteil des erzwungenen Momentes ist folglich gleich

$$p = \frac{2c^2 a \mathcal{E}}{c^2 - \omega^2 + i \frac{\omega c}{a}}$$

oder, wenn man statt  $\omega$  die Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi i}{\omega}$  einführt,

$$p = \frac{2a \mathcal{E}}{a^2 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{2\pi i}{\lambda a}}$$

Diese Formel ist selbstverständlich nur bei der Voraussetzung  $\lambda \gg a$  gültig (sonst könnte man der primären Feldstärke  $\mathcal{E}$  nicht denselben Wert für die ganze Kugel zuschreiben). In dem Grenzfall  $\lambda = \infty$  (statisches Feld) reduziert sie sich auf

$$p = 2a^3 \mathcal{E}.$$

Das vollständige Moment der Kugel ist in diesem Fall tatsächlich gleich

$$p = a^3 \mathcal{E}.$$

Diese Formel folgt aus dem Umstand, daß das primäre Feld innerhalb der Kugel durch sein eigenes Feld, dessen Feldstärke gleich  $-\frac{p}{a^3}$  ist, kompensiert werden muß [vgl. die Ableitung der Formel (15), Kap. II]. Der Unterschied zwischen dieser „statischen“ Formel und der vorhergehenden erklärt sich dadurch, daß neben der Grundschrwingung auch die Oberschrwingungen der Kugel zu seinem resultierenden Dipolmoment beitragen.

Die obige Formel kann strenggenommen, *nur* für den Fall einer Kugel gültig sein. Bei nicht kugelförmigen Körpern müssen die Vektoren  $\mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{G}$  im allgemeinen verschiedene Richtungen haben und miteinander durch eine Formel von der Gestalt

$$p_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \mathfrak{G}_k$$

verknüpft sein.

Der entgegengesetzte Grenzfall eines gegenüber der Wellenlänge sehr großen und „glatten“ Körpers ist zwar vielfach in Angriff genommen worden — im Anschluß an die Fortpflanzung der Radiowellen um den Erdball — doch ist es bisher nicht gelungen, diese Aufgabe in befriedigender Weise zu lösen. Auch wenn man die Erde als einen vollkommenen Leiter behandelt und die Rotationssymmetrie, die sich bei einer Vertikalantenne ergibt, ausnutzt, kommt man zu äußerst verwickelten Reihen, die keine bestimmte Aussage über das Verhalten der Schwingungen in großen Abständen von ihrer Quelle zulassen<sup>1)</sup>.

Erfahrungsgemäß übt die Krümmung der Erde auf die Stärke der Radiosignale in sehr großen Entfernungen einen ziemlich geringen Einfluß aus. Während die Sonnenstrahlen durch die beleuchtete Hälfte der Erdoberfläche vollkommen abgeschirmt werden, dringen die „Radiostrahlen“ fast ungehindert bis zum Antipod. Wir haben hier ein eindrucksvolles — aber wie wir sofort sehen werden, *falsches* — Beispiel der sogenannten *Beugungserscheinungen*, die man gewöhnlich als eine *Krümmung der Lichtstrahlen in einem vollkommen homogenen Medium* zu definieren pflegt.

Wodurch kommt dieser Unterschied zwischen den Sonnenstrahlen oder den Strahlen einer irdischen Lichtquelle und den Radiostrahlen?

---

<sup>1)</sup> Eine einfache angenäherte Lösung dieser Aufgabe ist neulich von *Kiebitz* vorgeschlagen. Diese Lösung ergibt sich aus der Annahme, daß die elektrische und magnetische Feldstärke nicht nur in der Wellenzone, sondern überall — einschließlich der Erdoberfläche — denselben Betrag haben. Bei dieser Voraussetzung lassen sich die Gleichungen (45, a, b) nicht nur für die Kugel, sondern für einen beliebigen Rotationskörper leicht integrieren. Man erhält dabei das merkwürdige Resultat, daß die aus dem Oszillator ausgehenden Strahlen Kreisbogen sind, die im Antipodenpunkt konvergieren. Dies ist aber sicher falsch, da die elektromagnetische Energie in einem Brennpunkt nicht akkumuliert werden kann. Falls ein solcher Punkt tatsächlich vorhanden wäre, müßten die Lichtstrahlen daraus in derselben Weise wie aus dem Oszillator selbst rückwärts divergieren. Man würde dann *stehende* Wellen bekommen, bei welchen die *Kiebitz'sche* Annahme  $E = H$  sicher unhaltbar wird. Tatsächlich sind weder rein fortschreitende noch rein stehende Wellen möglich, denn es muß eine stetige Ausstrahlung der elektromagnetischen Energie nach außen stattfinden. Bei der Integration der Feldgleichungen ist die Gestalt des primären Feldes nicht nur in der Nähe des Oszillators, sondern auch im Unendlichen, d. h. in der Wellenzone, zu berücksichtigen.

Nach einer mündlichen Mitteilung von Prof. *A. Sommerfeld* ist es ihm inzwischen gelungen, das betrachtete Problem einwandfrei zu lösen.

Die nächstliegende Ursache davon kann man offenbar in den *Oberflächenwellen* erblicken. Die letzteren bilden sich nur in dem Fall, wenn der Abstand des Oszillators von der Oberfläche dieselbe Größenordnung wie die Wellenlänge hat oder noch kleiner ist. Diese Bedingung ist bei den Sendeantennen der drahtlosen Telegraphie tatsächlich erfüllt, bei den gewöhnlichen Lichtquellen aber nicht. Es sei betont, daß eine zweite Voraussetzung für die Möglichkeit der Oberflächenwellen die *endliche Leitfähigkeit* der Erde ist. Bei einem vollkommen leitenden Erdball sollte man also keine Beugung der Radiostrahlen erwarten.

Es kann aber noch eine andere Ursache der betrachteten Erscheinung vorhanden sein — und zwar die *Inhomogenität* der Atmosphäre. Diese Ursache ist zuerst von *Heaviside* angedeutet worden. Wir stellen uns z. B. vor, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Radiowellen mit der Höhe zunimmt. Dann können die Radiostrahlen, die ursprünglich, d. h. in der Nähe der Sendeantenne nach oben gerichtet sind, in einem bestimmten Abstand davon nach der Erdoberfläche abgelenkt werden (Abb. 32). Statt einer solchen „Refraktion“ (die auch in der Atmosphärenoptik stattfindet) kann man eine *Reflexion* der Radiostrahlen (oder Wellen) an den oberen Atmosphärenschichten einführen, die übrigens einen Extremfall der Refraktion darstellt und eine diskontinuierliche Änderung der Eigenschaften der Atmosphäre in einer bestimmten Höhe voraussetzt.

Eine kontinuierliche aber vielleicht sehr rasche Änderung der betrachteten Art läßt sich tatsächlich experimentell wie theoretisch nachweisen. Die höheren Atmosphärenschichten sind nämlich durch die ultravioletten Sonnenstrahlen stark *ionisiert*. Sie haben also im Gegensatz zu den niedrigen eine beträchtliche *elektrische Leitfähigkeit*. Infolgedessen müssen sie die von unten einfallenden Wellen stark absorbieren, aber gleichzeitig stark reflektieren (vgl. Kap. IV, § 2). Man bekommt (nach *J. Larmor*) besonders günstige Verhältnisse für kurze Wellen (etwa 30 bis 40 m), deren Schwingungsperiode von derselben Größenordnung oder noch kleiner als die Stoßzeiten der Ionen in der betreffenden Höhe sind. Gegenüber solchen Schwingungen verhalten sich die Ionen nicht nur als frei beweglich im gewöhnlichen Sinne, sondern auch als *reibungsfrei*. Man bekommt in diesem Fall nach den allgemeinen Formeln des § 3, Kap. III ( $\omega_0 = 0$ ) reelle negative Werte für die elektrische Suszeptibilität und dementsprechend (wegen  $\epsilon < 1$ ) Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die größer als  $c$  sind. Unter solchen Umständen kann eine kräftige Refraktion der Radiostrahlen stattfinden (vgl. Abb. 32).

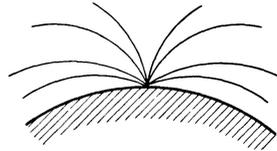


Abb. 32.

Es ist schließlich möglich, statt von Refraktion oder Reflexion zu reden, die Fortpflanzung der Radiowellen um die Erde in derselben Weise wie die Fortpflanzung von zusammengesetzten Oberflächenwellen in Kabeln zu behandeln, wobei die Erde die innere und die höheren Atmosphärenschichten die äußere Belegung dieses „Kabels“ bilden.

Falls die angeführte Erklärung zutreffend ist — und sie scheint experimentell sehr gut bestätigt zu sein — so hat die Fortpflanzung der Radiowellen um die Erde mit den eigentlichen Beugungserscheinungen gar nichts zu tun.

### 3. Die einfachsten Diffraktionsprobleme; Beugung des Lichtes an Schirmen und Öffnungen.

Diese eigentlichen Beugungserscheinungen lassen sich dann beobachten, wenn die „Lichtquelle“ (wir fassen dabei elektromagnetische Schwingungen von beliebiger Frequenz als „Licht“ auf) sich in einem gegenüber der Wellenlänge großen Abstand von dem betreffenden undurchsichtigen Körper befindet (so daß keine Oberflächenwellen sich bilden können). Sie bestehen, wie schon oben erwähnt wurde, in einer Krümmung der Lichtstrahlen an der Körpergrenze, d. h. in deren Eindringen in das geometrische Schattengebiet. Es sei bemerkt, daß diese Definition und Fragestellung von der *geometrischen* Optik herrührt, welche die Lichtstrahlen als die Bahnen von materiellen Teilchen behandelt, d. h. die Gesetze der Lichtfortpflanzung durch die genäherte Gleichung (54a), Kap. IV, beschreibt. Vom Standpunkt der Wellenoptik bietet gerade das Auftreten des Schattens bei Einfallen von elektromagnetischen Wellen auf einen undurchsichtigen Körper — oder mit anderen Worten die „geradlinige Lichtfortpflanzung“ — die zu erklärende Tatsache. Von einer scharfen Begrenzung dieses Schattens kann dabei keine Rede sein. — Dasselbe bezieht sich auf die komplementäre Erscheinung der Ausblendung eines Strahlenbündels. Ein Strahlenbündel von bestimmtem Querschnitt oder Öffnung (in dem Fall von divergierenden oder konvergierenden Wellen) ist vom Standpunkt der Wellenoptik eine Abstraktion oder Idealisierung derselben Art, wie ein scharf begrenztes Schattenbündel oder Schattenkegel. Es erhebt sich also die Frage nach dem Entstehen solcher Bündel und nach der Struktur des Wellenfeldes in der Nähe ihrer geometrischen Grenze.

Wir bemerken zunächst, daß es sich hier wie überall um eine Superposition der primären elektromagnetischen Wellen und der sekundären Wellen, welche von den erzwungenen Schwingungen im betreffenden Körper erzeugt werden, handelt. Die Fortpflanzung der primären Wellen im Raume wird durch die Anwesenheit irgend eines Körpers unmittelbar gar nicht beeinflusst; es ist aber praktisch sinnlos, diese

Wellen einzeln zu betrachten, denn nur das resultierende Wellenfeld ist der Beobachtung zugänglich.

Ein gegenüber der Wellenlänge kleiner, auch vollkommen leitender Körper wirft überhaupt gar keinen Schatten. Das sekundäre Feld reduziert sich dabei in der Tat auf das kugelsymmetrische (oder axialsymmetrische) Feld eines elementaren Oszillators und schon in verhältnismäßig kleinen Abständen gegen das primäre Feld verschwindet es praktisch.

Wir denken uns nun die Lichtquelle von einer vollkommen absorbierenden (oder reflektierenden) Metallhülle umgeben mit einem zum obigen Körper komplementären Loch. Wenn das Loch durch diesen Körper („Schirm“) geschlossen ist, tritt aus der Hülle gar kein Licht, d. h. die primären Wellen werden außerhalb der Hülle durch die sekundären vollkommen aufgehoben. Öffnet man nun das Loch, d. h. nimmt man den betrachteten Körper weg, so muß man im Außenraum ein resultierendes Feld bekommen, das zum sekundären Feld des Körpers komplementär ist, d. h. dieselbe Beschaffenheit und nur die entgegengesetzte Phase hat. Daraus sieht man, daß man beim Durchlassen von Licht durch eine gegen die Wellenlänge kleine Öffnung in einem ausgedehnten absorbierenden Körper gar keine Lichtbündel erhält, sondern kugelförmige Wellen derselben Art, die von einer sich in dieser Öffnung befindlichen elementaren Lichtquelle ausgestrahlt würden.

Die hier benutzte *Komplementarität* zwischen Öffnungen und Schirmen derselben Gestalt<sup>1)</sup> läßt sich auf Öffnungen und Schirme von beliebiger Größe anwenden. Man muß aber darauf achten, daß diese Komplementarität nicht in dem Sinne aufzufassen ist, daß das sekundäre Feld des Schirmes bei Fehlen der Hülle ( $\psi_s$ ) und das sekundäre Feld der durchlochten Hülle bei Fehlen des Schirmes ( $\psi_h$ ) in Summa dem primären Feld der Lichtquelle ( $\psi_a$ ) genau entgegengesetzt gleich sind. Die Gleichung

$$\psi_a + \psi_s + \psi_h = 0 \quad (58)$$

ist nur dann streng erfüllt, wenn man die Hülle und den Schirm *zusammen* betrachtet. Das primäre Feld für die erstere ist dann  $\psi_a + \psi_s$  und für den zweiten  $\psi_a + \psi_h$ , während es bei Fehlen eines von ihnen sich auf  $\psi_a$  reduziert. Wenn der Schirm genügend klein ist (er braucht dabei nicht klein gegenüber der Wellenlänge zu sein), kann man den Unterschied zwischen  $\psi_a + \psi_s$  und  $\psi_a$  vernachlässigen und die Gleichung (58) im „naiven“ Sinne als gültig ansehen.

Die an kleinen Öffnungen oder „Blenden“ stattfindenden Beugungserscheinungen werden gewöhnlich in einer formalen Weise auf Grund des *Huyghensschen* Prinzips (Bd. I, S. 154) behandelt. Statt die von der geschlossenen oder unendlich ausgedehnten Hülle (mit der betrachteten Öffnung) herrührenden sekundären Wellen ( $\psi_h$ ) zu berechnen, nimmt

<sup>1)</sup> Sogenanntes „*Babinet*sches Prinzip“.

man an, daß das äußere Feld von demjenigen Anteil der primären Wellen ( $\psi_a$ ) bedingt wird, welcher aus der Blende heraustritt. Man stellt sich also irgend eine (ungeschlossene) Fläche  $S$  vor, die durch die betrachtete Blende begrenzt ist, und definiert den Schwingungszustand in einem äußeren Punkt  $P$  durch die Formel

$$\psi = \int \frac{\nabla'_n \psi'}{4\pi R} dS - \int \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\psi'}{4\pi R} \right) \nabla'_n R dS \tag{58a}$$

[vgl. (41) Bd. I, S. 157]. Es bedeutet hier  $\psi'$  den Wert von  $\psi_a$  in einem Punkt  $P'$  von  $S$  für den Augenblick  $t' = t - \frac{R}{c}$  ( $R = PP'$ ). Wenn

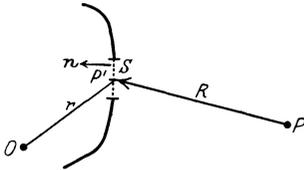


Abb. 33.

die Lichtquelle  $O$  sich in endlicher Entfernung befindet, und zwar in einem Abstand  $r$  von  $P'$  (Abb. 33), so kann man

$$\psi' = \psi_0 \frac{e^{ik(r+R)}}{r} \quad (\psi_0 = \text{konst})$$

setzen (den Zeitfaktor  $e^{-i\omega t}$  lassen wir weg). Nun gilt nach der Definition der Operation  $\nabla'$  (Gradient bei festgehaltenem  $t'$ , d. h.  $R$ )

$$\nabla'_n \psi' = \psi' \left( ik - \frac{1}{r} \right) \cos(n, r).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\psi'}{R} \right) = \frac{\psi'}{R} \left( ik - \frac{1}{R} \right) \cos(n, \mathfrak{R}).$$

Man hat also

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \psi_0 \int \frac{e^{ik(r+R)}}{rR} \left\{ ik [\cos(n, r) - \cos(n, \mathfrak{R})] - \left[ \frac{\cos(n, r)}{r} - \frac{\cos(n, \mathfrak{R})}{R} \right] \right\} dS$$

oder wenn man  $\frac{1}{r}$  und  $\frac{1}{R}$  gegen  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  vernachlässigt (d. h. sich auf die Wellenzone beschränkt)

$$\psi = \frac{ik}{4\pi} \psi_0 \int \frac{e^{ik(r+R)}}{rR} [\cos(n, r) - \cos(n, \mathfrak{R})] dS \tag{58b}$$

Das durch diese Formel bestimmte Feld muß jedenfalls näherungsweise mit  $\psi_a + \psi_h$  oder mit  $-\psi_s$  übereinstimmen. Wir wollen uns davon überzeugen für den Grenzfall einer unendlich entfernten Lichtquelle.

Man kann dabei  $\psi_0 \frac{e^{ikr}}{r}$  durch  $\psi_0 e^{ikz}$  ersetzen, wo  $z$  eine in der Fortpflanzungsrichtung der primären Wellen gezogene Koordinate bedeutet. Der Einfachheit wegen nehmen wir ferner an, daß die Blende (oder der Schirm)  $S$  der Wellenebenen parallel ist und zwar in der Ebene  $z = 0$  liegt (in den Anwendungen hat man es fast ausschließlich mit diesem Fall zu tun). Es wird also  $\cos(n, r) = \cos(n, \mathfrak{R}) = -1$  und folglich, wenn wir uns auf kleine Beugungswinkel (zwischen den primären und gebeugten Strahlen) beschränken, d. h.  $\cos(n, \mathfrak{R}) \cong 1$  setzen

$$\psi = -\frac{ik}{2\pi} \psi_0 \int \frac{e^{ikR}}{R} dS \tag{58c}$$

Wir denken uns den Schirm  $S$  als eine unendlich dünne *vollkommen leitende* Metallplatte. Es möge ferner  $\psi_0$  die primäre elektrische Feldstärke bedeuten. Dann kann man leicht zeigen, daß  $-\psi$  die sekundäre elektrische Feldstärke im Punkte  $P$  bedeuten soll.

Es muß in der Tat auf der Oberfläche des Schirmes die sekundäre elektrische Feldstärke die primäre genau kompensieren, d. h. gleich  $-\psi_0$  sein [nach (57c)]. Die primären und sekundären magnetischen Feldstärken sind dagegen beide gleichgerichtet und gleich  $\psi_0$  (die Schirmoberfläche ist eine Knotenstelle der elektrischen und eine Bauchstelle der magnetischen Feldstärke). Die Flächendichte des elektrischen Stromes ist folglich gleich  $\frac{2\psi_0}{4\pi} = \frac{\psi_0}{2\pi}$ . Die von der Beschleunigung  $w$  einer Ladung  $de$  bedingte Feldstärke in großen Abständen  $R$  bei  $\mathfrak{R} \perp w$  drückt sich bekanntlich durch die Formel

$$d\mathfrak{E}(t) = -\frac{de}{c^2 R} w \left( t - \frac{R}{c} \right) = i\omega \frac{de \cdot v(t) e^{ikR}}{c^2 R}$$

aus. In dem betrachteten Fall ist der elektrische Impuls  $\frac{de \cdot v}{c}$  eines Flächenelementes  $dS$  gleich  $\frac{\psi_0}{2\pi} dS$ . Man hat folglich

$$\frac{de w}{c^2} = -\frac{i\omega \psi_0}{c} \frac{dS}{2\pi} = -\frac{ik}{2\pi} \psi_0 dS$$

und

$$\mathfrak{E} = \frac{ik}{2\pi} \psi_0 \int \frac{e^{ikR}}{R} dS = -\psi.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich für unvollkommen leitende Schirme, wenn man sie genügend dick voraussetzt und die Integration auf ihr ganzes Volum erstreckt.

Bei den praktischen Anwendungen der Formel (58b) sind die Abmessungen der Schirme oder Öffnungen sehr klein im Vergleich mit ihren Abständen vom Aufpunkt; sie können aber groß gegenüber der Wellenlänge sein. Man kann demgemäß die Größe  $R$  im Nenner von (58b) als konstant ( $= R_0$ ) ansetzen und im Exponent nach Potenzen der Koordinaten  $x' y'$  des Flächenelementes  $dS$  und des Aufpunktes  $x y$  entwickeln.

Es wird dabei bis auf Größen dritter Ordnung in  $\frac{x'}{R}$  und  $\frac{y'}{R}$ :

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = R_0 - \frac{xx' + yy'}{R_0} + \frac{x'^2 + y'^2}{2R_0} - \frac{(xx' + yy')^2}{2R_0^3} \quad (59)$$

mit

$$R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{x}{R} = \alpha, \quad \frac{y}{R} = \beta, \quad R - R_0 \equiv f(x', y') \quad (59a)$$

setzen:

$$\psi = -\frac{ik}{2\pi} \frac{\psi_0 e^{ikR_0}}{R_0} \int e^{ikf(x',y')} dS \tag{59b}$$

Wir wollen zunächst nur die in  $x'$  und  $y'$  linearen Glieder in  $f$  beibehalten (*Fraunhofersche* Beugungserscheinungen). Man bekommt dabei im Falle eines rechteckigen Schirmes (oder Öffnung) mit den Seiten  $a$  und  $b$

$$\int e^{ikf} dS = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-ik\alpha x'} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} e^{-ik\beta y'} dy' = ab \frac{\sin \frac{k\alpha a}{2}}{\frac{k\alpha a}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{k\beta b}{2}}{\frac{k\beta b}{2}} \tag{60}$$

Bei  $\alpha = \beta = 0$  ergibt sich ein Maximum von  $|\psi|^2$ , d. h. des Schattens oder der Beleuchtung — je nachdem es sich um einen Schirm oder um eine Öffnung handelt. Dazu treten aber noch seitliche Nebenmaxima, und zwar in den durch die Formeln

$$\frac{k\alpha a}{2} = \pi \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad \frac{k\beta b}{2} = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad m, n \text{ ganze Zahlen,}$$

d. h.

$$\alpha = \frac{\lambda}{a} \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad \beta = \frac{\lambda}{b} \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{60a}$$

bestimmten Richtungen ( $\alpha$  und  $\beta$  sind die Winkelkosinus der gebeugten Strahlen in bezug auf die entsprechenden Achsen). Zwischen diesen Maxima liegen die Minima, d. h. die Nullstellen:

$$\alpha = \frac{\lambda}{a} m, \quad \beta = \frac{\lambda}{b} n.$$

In dem Fall eines *kreisförmigen* Schirmes (Blende) kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $y = 0$  und folglich

$$\frac{x x' + y y'}{R_0} = \alpha \varrho \cos \varphi$$

setzen, wo  $\varrho = \sqrt{x'^2 + y'^2}$  und  $\varphi$  den Winkel zwischen  $\varrho$  und der  $X$ -Achse bedeutet.

Es wird dabei

$$\int e^{ikf} dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik\alpha \varrho \cos \varphi} \varrho d\varrho d\varphi \quad (a \text{ Radius des Schirmes),}$$

d. h. nach den bekannten Formeln

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\xi \cos \varphi} d\varphi = J(\xi) \quad \text{und} \quad \int_0^{\xi} J(\xi) \xi d\xi = \xi J_1(\xi)$$

( $J$  Besselsche Funktion nullter,  $J_1$  erster Ordnung):

$$\int e^{ikf} dS = 2\pi a^2 \frac{J_1(k\alpha a)}{k\alpha a} \tag{60b}$$

Die Funktion  $\frac{J_1(\xi)}{\xi}$  hat ihr absolutes Maximum  $\frac{1}{2}$  für  $\xi = 0$ . Die nachfolgenden Maxima sind verhältnismäßig sehr schwach. Die Kurven  $\frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$  und  $\frac{J_1^2(\xi)}{\xi^2}$ , welche die Abhängigkeit des Schattens oder der Beleuchtung von dem Beugungswinkel charakterisieren, haben eine sehr ähnliche Gestalt, die schematisch in der Abb. 34 dargestellt ist. Es sei daran erinnert, daß man unter dem Beugungswinkel den Winkel zwischen den primären und den gebeugten Strahlen versteht,

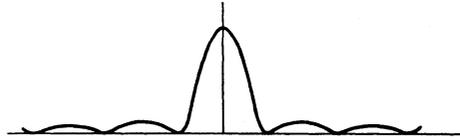


Abb. 34.

d. h. im betrachteten Fall den Winkel zwischen der  $Z$ -Achse und dem Vektor  $R = P'P$ . Die Größe  $\alpha$  ist gleich dem Sinus dieses Winkels; da wir uns von vornherein auf kleine Beugungswinkel beschränkt haben, stimmt sie näherungsweise mit dem Winkel selbst überein.

Je größer der Radius  $a$  oder je kleiner die Wellenlänge  $\lambda$  ist, desto steiler fällt die Beleuchtung (oder die Schwärzung) von ihrem Maximalwert bis Null ab. Jenseits dieser Nullstelle liegen aber Nebenmaxima, die von der geometrischen Optik aus ganz unverständlich erscheinen müßten. Die übliche Vorstellung eines scharf begrenzten homogenen zylindrischen Lichtbündels oder Schattengebietes stellt also eine grobe Vereinfachung der wirklichen Verhältnisse dar. In der Wirklichkeit löst sich die Grenze zwischen Licht und Schatten in eine eigenartige periodische Feinstruktur. Diese Feinstruktur für den Fall eines „parallelen Lichtbündels“ mit kreisförmigem Querschnitt ist in der Abb. 35 gezeichnet. Die Winkelabstände zwischen den nachfolgenden Maxima und Minima sind desto kleiner, je größer  $ka$ , d. h. je kleiner die Wellenlänge und je größer der geometrische Querschnitt ( $\pi a^2$ ) ist.

Man erhält etwas kompliziertere Resultate, wenn man eine im endlichen Abstand befindliche Lichtquelle — also divergierende primäre Strahlenbündel — in Betracht zieht und besonders wenn man in der Reihenentwicklung (59) und in der entsprechenden Entwicklung für  $r$  Glieder zweiter Ordnung in  $\frac{x', y'}{R}$  bzw.  $\frac{x', y'}{r}$

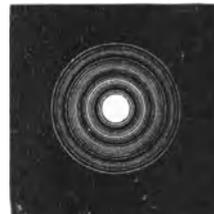


Abb. 35.

berücksichtigt („Fresnelsche Beugungserscheinungen“). Wir können aber auf diese Frage hier nicht näher eingehen.

In der dargelegten vereinfachten Beugungstheorie, wie es aus der oben angeführten Analyse der Gleichung (58) (d. h. des Komplementaritätsprinzips) hervorgeht, wird die Rückwirkung der sekundären Wellen außer acht gelassen. Man bestimmt also die erzwungenen elek-

trischen Schwingungen in der Weise, als ob sie nur durch die primären (gegebenen) Kraftschwingungen erzeugt würden, und dann addiert man die letzteren mit den durch diese erzwungenen Elektronenschwingungen bedingten sekundären Kraftschwingungen. Dieses vereinfachte Verfahren ist vollkommen identisch mit demjenigen, das wir in der Theorie der *Streuung* der elektromagnetischen Wellen (Kap. IV, § 6) benutzt hatten. Der Unterschied zwischen Streuung und Beugung besteht ausschließlich in dem Umstand, daß es man im ersten Fall mit *inkohärenten* und im zweiten mit *kohärenten Sekundärstrahlern* („Resonatoren“) zu tun hat. Es müssen in der Tat zwischen den elementaren Kraftschwingungen, die von den verschiedenen Elementen eines räumlich ausgedehnten Sekundärstrahlers (Schirmes, durchlochtem Hülle usw.) herrühren, bestimmte konstante *Phasendifferenzen* bestehen, die bei der Berechnung der resultierenden Schwingungsenergie berücksichtigt werden müssen (während bei der gewöhnlichen Streuung die elementaren Energien sich einfach arithmetisch addieren).

4. Elementare Diffraktionstheorie für den Fall paralleler primärer bzw. sekundärer Strahlenbündel.

Wir wollen nun einige allgemeine Gesetze der Beugungs- und Streuungserscheinungen für den Fall betrachten, daß die Lichtquelle (*O*) und der Aufpunkt (*P*) sich in einem sehr großen Abstand von dem betreffenden Körper (*P'*) befinden. Man kann dabei nicht nur die primären, sondern auch die sekundären Wellen als eben und die entsprechenden Strahlen als geradlinig behandeln. Es seien  $P'_1$  und  $P'_2$  zwei Punkte oder eher zwei sehr kleine Teilchen (z. B. Moleküle) des Körpers. Die Phasendifferenz  $\varphi$  der von ihnen herrührenden sekundären Schwingungen im Punkte *P* ist offenbar gleich

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [(OP'_2 + P'_2P) - (OP'_1 + P'_1P)] = \frac{2\pi}{\lambda} [(r_2 + R_2) - (r_1 + R_1)]$$

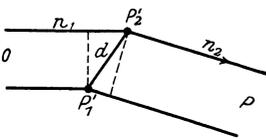


Abb. 36.

(siehe Abb. 36).

Wir denken uns die Vektoren  $r$  im Sinne  $OP'$  und die Vektoren  $R$  im Sinne  $P'P$  gezogen und bezeichnen ihre Richtungen mit den Einheitsvektoren  $n_1$  bzw.  $n_2$ . Es wird dann näherungsweise, wenn wir die Strecke

$P'_1 P'_2$  mit  $d$  bezeichnen:

$$r_2 - r_1 = d \cdot n_1 = d \cos(\delta, n_1),$$

$$R_2 - R_1 = -d \cdot n_2 = -d \cos(\delta, n_2)$$

und folglich

$$\varphi = q \cdot d \tag{61}$$

mit

$$q = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - n_2). \tag{61a}$$

Wir werden den durch diese Formel definierten Vektor  $q$  den *Phasen-* oder den *Diffraktionsvektor* nennen. Seine Richtung und Größe läßt sich leicht aus der Abb. 37 erkennen; man hat dabei offenbar

$$|n_2 - n_1| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

( $\theta = \sphericalangle n_1, n_2 =$  Diffraktionswinkel) und folglich

$$q = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (61b)$$

Wenn die beiden Teilchen sich in einer zu  $q$  senkrechten Ebene befinden, ist  $\varphi$  nach (61) gleich Null unabhängig von ihrer Lage in dieser Ebene. Die sekundären Schwingungen, die von einer zu  $q$  senkrechten Schicht herrühren, haben also dieselbe Phase und müssen sich gegenseitig verstärken. Die resultierende Schwingungsamplitude ist der Anzahl der Teilchen in der Schicht proportional und die Schwingungsenergie dem *Quadrat* dieser Anzahl. Es sei daran erinnert, daß bei inkohärenten Sekundärschwingungen die mittlere Amplitude verschwindet, während die Energie der Anzahl der „Resonatoren“ proportional ist.

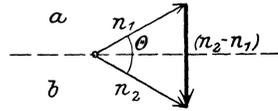


Abb. 37.

Das soeben erhaltene Resultat liefert eine neue sehr anschauliche Erklärung der am Anfang dieses Kapitels betrachteten *Reflexion* ebener Wellen an der (ebenen) Oberfläche eines Körpers. Die Vektoren  $n_1$  und  $n_2$  bestimmen nämlich die Richtung der einfallenden und der reflektierten Strahlen, während der Vektor  $n_2 - n_1$  die Flächennormale darstellt (vgl. Abb. 37; die Oberfläche ist dort durch die schraffierte Linie angedeutet). Man kann aber aus der angeführten Ableitung klar ersehen, daß auch in solchen Richtungen  $n_2$ , die von der Reflexionsrichtung verschieden sind, eine gewisse Energie in der Form von Sekundärwellen ausgestrahlt werden muß. Die Energie dieser „gebeugten“ Strahlen ist im Vergleich mit der Energie des reflektierten Hauptstrahlenbündels desto kleiner, je größer die Anzahl der Sekundärstrahlen, d. h. je größer der Flächeninhalt der reflektierenden Ebene oder der Querschnitt des einfallenden Strahlenbündels ist.

Die Amplitude der resultierenden sekundären Schwingungen läßt sich leicht berechnen, wenn man die Amplituden der durch die einzelnen Teilchen ausgestrahlten Elementarwellen kennt. Diese elementaren Amplituden seien durch die *reellen* positiven oder negativen Zahlen  $a_1, a_2, a_3 \dots$  charakterisiert, wo die Indizes sich auf die verschiedenen Teilchen beziehen. Die Radiusvektoren der letzteren in bezug auf eine von ihnen oder irgend einen anderen festen Punkt seien  $r'_1, r'_2, \dots$ . Dann bekommt man für die resultierende Schwingung im betrachteten

Aufpunkt die folgende Formel

$$\psi = \psi_0 e^{-i\omega t} = \sum a_n e^{-i(\omega t + \gamma_n)},$$

d. h. nach (61)

$$\psi_0 = \sum_n a_n e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'_n}. \quad (62)$$

Es bedeutet hier  $\psi_0$  die komplexe Amplitude von  $\psi$ ; wir werden sie im folgenden einfach durch  $\psi$  bezeichnen. Es kann dabei  $\psi$  eine beliebige lineare Feldgröße bedeuten (z. B. die elektrische Feldstärke usw.).

Wenn man den beugenden oder diffragierenden Körper nicht als Aggregat von einzelnen Teilchen, sondern im Sinne der makroskopischen Theorie als Kontinuum behandelt, so erhält man statt (62) ein Integral von der Gestalt

$$\psi = \int a(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} dV', \quad (62a)$$

wobei  $a(\mathbf{r}') dV'$  der Amplitudenkoeffizient des entsprechenden Volumenelementes ist. Bei vollkommen reflektierenden plattenförmigen Körpern kann man  $\psi$  durch ein Flächenintegral darstellen. Die Größe  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'$  ist offenbar nichts anderes als die durch (59) und (59a) definierte Funktion  $-k \cdot f(x', y')$ , wenn man darin nur Glieder erster Ordnung beibehält. Bei  $z' = 0$  geht  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'$  in den uns schon bekannten Ausdruck  $\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha k' + \beta y')$  über. Man hat also in diesem Fall für die relative Amplitude der sekundären Schwingungen [vgl. (58b)]:

$$\psi = \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \cdot \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} dS'. \quad (62b)$$

Es fehlt noch auf der rechten Seite ein vom Beugungswinkel  $\Theta$  abhängiger, sich verhältnismäßig sehr langsam ändernder Koeffizient, welcher für verschiedene Feldgrößen verschieden sein kann. Wenn  $\psi$  das Polarisationspotential bedeutet, ist dieser Koeffizient gleich 1.

## 5. Die Beugungsgitter als physikalische und mathematische Instrumente.

Man bekommt besonders einfache und interessante Resultate, wenn die Koeffizienten  $a(\mathbf{r}')$  *periodische Funktionen der Koordinaten  $x', y', z'$  sind*. Einen derart beschaffenen Körper bezeichnet man im allgemeinen als ein *Beugungsgitter*. Das mathematisch einfachste, obwohl physikalisch nicht realisierbare Gitter ergibt sich, wenn  $a$  eine *harmonische* (sinusoidale) Funktion von  $\mathbf{r}'$  darstellt (sogenannte *Rayleighsches Gitter*). Die Beschaffenheit des beugenden Körpers läßt sich in diesem Fall durch sinusoidale stehende oder gelegentlich auch durch fortschreitende „Strukturwellen“ darstellen.

Im allgemeinen kann man die Funktion  $a(\mathbf{r}')$  durch eine *Fouriersche* Reihe, oder falls keine Periodizität vorhanden ist — durch ein *Fourier-*

sches Integral darstellen, wobei das Beugungsbild, d. h. die Verteilung der sekundären Schwingungen nach verschiedenen Richtungen, als eine Überlagerung der entsprechenden „harmonischen“ Beugungsbilder erscheint.

Wir betrachten z. B. das harmonische Beugungsbild, welches sich nach (62a) bei

$$a = a_0 \cos p \cdot r' \quad (63)$$

ergibt. Setzt man  $\cos p \cdot r' = \frac{1}{2} (e^{i p \cdot r'} + e^{-i p \cdot r'})$ , so ist es unmittelbar ersichtlich, daß sekundäre Schwingungen (oder gebeugte Wellen) von beträchtlicher Amplitude sich nur in den zwei durch die Bedingungen

$$q = \pm p \quad (63a)$$

bestimmten Richtungen fortpflanzen können. Führt man statt  $p$  die entsprechende „Gitterkonstante“  $d = \frac{2\pi}{p}$  ein, d. h. den Abstand zwischen zwei Nachbarebenen, die demselben Wert von  $a$  entsprechen, so bekommt man nach (61b) die folgende Formel für den Beugungswinkel

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{\lambda}{2d} \cdot \quad (63b)$$

Der Fall eines periodischen aber nicht sinusoidalen Gitters läßt sich als eine Überlagerung einer Reihe von sinusoidalen Gittern mit den Konstanten  $d, \frac{1}{2}d, \frac{1}{3}d$  usw. behandeln. Man kann nämlich die Funktion  $a$  in diesem Fall in eine Fouriersche Reihe von der Gestalt

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n p \cdot r' + b_n \sin n p \cdot r')$$

entwickeln, wobei für die gebeugten (sekundären) Strahlen sich die Formeln

$$q = \pm n p, \quad \text{d. h.} \quad \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{n\lambda}{2d} \cdot \quad (63c)$$

ergeben. Diese Beugungsmaxima bezeichnet man als „Spektra“; die Zahl  $n$  heißt die *Ordnung* des betreffenden Diffraktionsspektrums. Die Maxima sind desto schärfer je größer das Beugungsgitter ist, d. h. je größer die Anzahl Perioden ist, die sie enthält. Da diese Anzahl immer endlich bleibt, muß man das Gitter nicht als streng periodisches Gebilde behandeln und es nicht durch eine Reihe, sondern durch ein Fourierintegral darstellen. Man erhält dabei neben dem etwas unscharfen diskreten „Linienspektrum“ (63c) noch ein *kontinuierliches* Spektrum, dessen Stärke bei abnehmender Gittergröße auf Kosten des diskreten Spektrums zunimmt.

Gitter der soeben betrachteten Art heißen *eindimensionale Raumgitter*. Bei den zwei- und dreidimensionalen Raumgittern hat man zwei bzw. drei sich schneidende äquidistante Ebenenscharen statt einer einzigen Schar wie oben. In dem Fall eines orthogonalen dreidimensionalen harmonischen Gitters hat man z. B. statt (63):

$$a = a_0 \frac{\cos(\phi_1 x_1)}{\sin(\phi_1 x_1)} \frac{\cos(\phi_2 x_2)}{\sin(\phi_2 x_2)} \frac{\cos(\phi_3 x_3)}{\sin(\phi_3 x_3)}. \quad (64)$$

Dieses Gitter ist also hinsichtlich seiner Struktur analog einem System von drei zueinander senkrechten stehenden sinusoidalen Wellenzügen. Man bekommt dabei nicht 2, sondern  $2^3 = 8$  Beugungsmaxima in den Richtungen, deren Winkelkosinus mit den Koordinatenachsen durch die Gleichungen

$$q_i = \pm \phi_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

bestimmt sind. Bei zusammengesetzten Gittern von diesem Typus ergeben sich neben den vorhergehenden 8 Grundspektren noch eine Reihe von Spektren höherer Ordnung, und zwar in den Richtungen

$$q_i = \pm n_i \phi_i \quad (n_1, n_2, n_3 \text{ ganze Zahlen}) \quad (64a)$$

oder nach (61b)

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{d_1^2} + \frac{n_2^2}{d_2^2} + \frac{n_3^2}{d_3^2}}. \quad \left(d_i = \frac{2\pi}{\phi_i}\right) \quad (64b)$$

Solche und noch kompliziertere (schiefe) dreidimensionale Raumgitter stehen bekanntlich für kurzwellige Röntgenstrahlen in der Gestalt von verschiedenen natürlichen Kristallkörpern zur Verfügung. Wir werden diese Frage eingehend im dritten Bande betrachten.

In der Optik sind ausschließlich eindimensionale *ebene* Gitter (oder allgemeiner *Flächengitter*) gebraucht, die bekanntlich zur Spektralzerlegung des zusammengesetzten Lichtes und zur Messung der Wellenlänge dienen (Wellen verschiedener Länge sind hier ebenso wie im Falle von Raumgittern nach verschiedenen Richtungen gebeugt). Man bekommt dabei Beziehungen derselben Art wie in dem Fall von Raumgittern.

Die Beugung des Lichtes an Schirmen und Öffnungen läßt sich ebenfalls nach der Methode der harmonischen Flächengitter behandeln, wobei man die Amplitudenfunktion  $a$  in der üblichen Weise durch ein *Fouriersches* (oder bei gekrümmten Flächen etwas komplizierteres) *Integral* darstellen muß. So hat man z. B. in dem oben betrachteten Fall eines ebenen rechteckigen vollkommen leitenden Schirmes mit den Seiten  $l_1, l_2$

$$a = a_0 = \text{konst für } -\frac{1}{2} l_1 < x'_1 < +\frac{1}{2} l_1, \quad -\frac{1}{2} l_2 < x'_2 < +\frac{1}{2} l_2$$

und  $a = 0$ , wenn  $x'_1$  und  $x'_2$  außerhalb dieser Grenzen liegen. Setzt man

$$a = \iint A(p_1, p_2) \cdot e^{i(p_1 x'_1 + p_2 x'_2)} d p_1 d p_2, \quad (-\infty < x'_1, x'_2 < +\infty)$$

so wird

$$A(p_1, p_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} a e^{-i(p_1 x'_1 + p_2 x'_2)} d x'_1 d x'_2 = \frac{a_0}{4\pi^2} \int_{+\frac{1}{2}l_1}^{-\frac{1}{2}l_1} e^{-i p_1 x'_1} d x'_1 \int_{-\frac{1}{2}l_2}^{+\frac{1}{2}l_2} e^{-i p_2 x'_2} d x'_2,$$

d. h.

$$A(p_1, p_2) = \frac{a_0}{\pi^2 p_1 p_2} \sin \frac{p_1 l_1}{2} \sin \frac{p_2 l_2}{2}.$$

Das Beugungsbild des Schirmes läßt sich folglich nach der Formel

$$\psi = \frac{a_0}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_1} \sin \frac{p_1 l_1}{2} e^{-i(p_1 + q_1)x'_1} d x'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_2} \sin \frac{p_2 l_2}{2} e^{-i(p_2 + q_2)x'_2} d x'_2$$

bestimmen.

## Sechstes Kapitel.

### Theorie der strahlungslosen (quasistationären und quasistatischen) Erscheinungen in begrenzten Körpern.

#### § 1. Grundlagen der angenäherten Theorie der quasistationären (strahlungslosen) Vorgänge.

Im vorhergehenden Kapitel haben wir hauptsächlich solche Schwingungsvorgänge behandelt, die mit einer *Energieausstrahlung* verbunden sind.

Wie wir gesehen haben, fehlt diese Ausstrahlung nur in den folgenden drei Fällen:

1. wenn die elektromagnetischen Schwingungen innerhalb einer vollkommen leitenden geschlossenen Hülle stattfinden;
2. wenn sie sich längs der Trennungsfläche von zwei (oder mehreren) unvollkommen leitenden Körpern fortpflanzen (Oberflächenwellen);
3. wenn ihre Frequenz gleich Null ist.

Der erste Fall bietet kein praktisches Interesse und wir werden ihn im folgenden gar nicht betrachten.

Den zweiten Fall haben wir schon ziemlich ausführlich untersucht.

Was nun den dritten Fall anbetrifft, so läßt er sich in die allgemeine Theorie der Schwingungsvorgänge nur rein formal einfügen. Er entspricht tatsächlich den von der Zeit unabhängigen — *statischen und stationären* — Erscheinungen, die gewisse eigentümliche Besonderheiten darbieten und einer speziellen Untersuchung bedürfen.

Neben diesen Erscheinungen werden wir aber auch die sich daran anschließenden *langsamen* Schwingungsvorgänge behandeln — nicht in derselben Weise wie wir es im vorigen Kapitel getan haben, sondern nach einer vereinfachten Methode, die für praktische Zwecke vollkommen ausreichend ist, und sich auf eine Reihe wichtiger Spezialfälle anwenden läßt, wo die exakte Theorie machtlos bleibt.

### 1. Angenäherte Feldgleichungen.

Der Sinn dieser Methode besteht, kurz ausgesprochen, *in der Vernachlässigung der Retardierung der elektromagnetischen Fernwirkungen*<sup>1)</sup>. Die letzteren werden also nicht durch die retardierten, sondern durch die „momentanen“ Potentiale

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R} dV', \quad \mathfrak{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{R} dV' \quad (R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (1)$$

beschrieben, die den Differentialgleichungen

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho, \quad \nabla^2 \mathfrak{A} = -4\pi \mathbf{j} \quad (1a)$$

genügen. Die elektrischen und magnetischen Feldstärken werden durch diese Potentiale in der üblichen Weise, d. h. nach den Formeln

$$\mathfrak{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} \quad (1b)$$

ausgedrückt.

Man pflegt deshalb solche Vorgänge, die nach den angeführten Gleichungen mit genügender Annäherung behandelt werden können, als *quasistatisch* oder *quasistationär* zu bezeichnen. Wir werden sie einfach *strahlungslos* nennen, da ihr allgemeinstes Merkmal gerade in dem Fehlen der üblichen, aus den exakten Gleichungen folgenden Energieausstrahlung besteht.

Aus (1b) ergibt sich unmittelbar

$$\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0 \quad (2)$$

d. h. die erste Gruppe der *Maxwellschen* Feldgleichungen *in exakter Form*. Da ferner, wegen des Erhaltungsgesetzes der Elektrizität die Beziehung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$$

und folglich nach (1a) die Beziehung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{A} = 0$$

<sup>1)</sup> Da die Anerkennung dieser Retardierung vor *Maxwell* fehlte, ist die erwähnte Methode historisch früher entwickelt worden als die exakte.

bestehen müssen, so bekommt man nach den Gleichungen (1) und (1a)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A} = -\frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla^2 \mathfrak{A},$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{A} = -\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

d. h.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = 4\pi \mathfrak{j}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \varrho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2a)$$

statt der exakten Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{E} = 4\pi \mathfrak{j}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \varrho.$$

Wir sehen also, daß der durch den Ansatz (1) eingeführte Fehler sich desto kleiner ergibt, je kleiner die zeitliche Änderung der elektrischen Feldstärke ist. Für genügend langsame Schwingungen kann man die Größe  $\frac{1}{c} \frac{\partial \varrho}{\partial t}$  immer vernachlässigen. Dementsprechend wird auch  $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  und ferner  $\operatorname{div} \mathfrak{j} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{j}$  und  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi \varrho$ . Die sich dabei ergebenden Beziehungen bleiben aber von denjenigen, die für streng statische und stationäre Erscheinungen charakteristisch sind, in der Hinsicht verschieden, daß die elektrische Feldstärke nach (1b) oder (2), neben dem gewöhnlichen statischen Anteil noch einen *Induktionsanteil* enthält.

Es sei bemerkt, daß die Größe  $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$ , bei Fehlen des Faktors  $\frac{1}{c}$ , *nicht* vernachlässigt werden darf. Sonst sollte man das elektrostatische Feld als streng konstant betrachten. Hier wie bei den anderen elektrischen Größen ( $\mathfrak{E}$ ,  $\varphi$ ), ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  als unendlich groß anzusetzen — *nicht aber bei den magnetischen Größen* ( $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{A}$ ).

Man muß ferner darauf achten, daß in den vorhergehenden Formeln  $\varrho$  und  $\mathfrak{j}$  die totalen (freien + gebundenen) Ladungs- und Stromdichten bedeuten. In dem Fall eines homogenen isotropen Körpers kann man folglich in der betrachteten Näherung

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \mu \sigma \mathfrak{E}, \quad \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0 \quad (2b)$$

setzen. Die freie Ladungsdichte tritt in die letzte Gleichung deshalb nicht ein, weil freie Ladungen nur auf der Oberfläche des Körpers (oder der Trennungsfläche zwischen zwei verschiedenen Körpern) vorhanden sein können.

Was die räumliche Verteilung des Stromes anbetrifft, so ist sie durch die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} = 0 \quad (3)$$

näherungsweise bestimmt. Diese Gleichung ist nur bei den streng stationären Strömen, die durch zeitlich konstante elektrostatische

Kräfte bedingt werden, exakt gültig. Man hat in diesem Fall wegen  $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}$  und

$$\mathfrak{E} = -\nabla \varphi, \quad (3a)$$

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (3b)$$

Das elektrostatische Potential muß also innerhalb jedes homogenen Leiters derselben (*Laplaceschen*) Gleichung genügen, wie bei Fehlen des Stromes.

Die *quasistationären* Ströme können entweder durch zeitlich wechselnde elektrostatische Felder oder durch zeitlich wechselnde *magnetische* Felder, d. h. die zugehörigen elektrischen Induktionskräfte, erzeugt werden. Es ist im letzten Fall manchmal möglich, das elektrostatische Feld zu vernachlässigen (es kann auch exakt verschwinden) und einfach

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \quad (4)$$

zu setzen.

Bei Berücksichtigung der magnetischen Permeabilität ist die Gleichung  $\nabla^2 \mathfrak{A} = -4\pi \mathbf{j}$  durch die allgemeinere

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = -4\pi \mu \mathbf{j} \quad (4a)$$

zu ersetzen, wie dies unmittelbar aus der ersten Gleichung (2b) folgt.

Daraus ergibt sich wegen  $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E} = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ :

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = \frac{4\pi \mu \sigma}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \quad (4b)$$

oder nach (4a):

$$\nabla^2 \mathbf{j} = \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (4c)$$

Wie schon im § 1 des Kap. IV erläutert worden ist, ist diese Gleichung mit der Grundgleichung der Theorie der Wärmeleitung vollkommen analog; sie drückt also die Tatsache aus, daß der elektrische Strom und die elektromagnetischen Felder in das Körperinnere desto schlechter eindringen, je größer die Schwingungsfrequenz ist („Skin-effekt“).

Im Grenzfall sehr langsamer Schwingungen kann man einfach  $\nabla^2 \mathbf{j} = 0$  setzen [was mit der Gleichung (3) nicht gleichbedeutend ist!].

Es sei bemerkt, daß die Dielektrizitätskonstante aus den Grundgleichungen (2b) wegfällt, und zwar aus der ersten (oder eher der entsprechenden exakten Gleichung  $\operatorname{rot} \frac{\mathfrak{H}}{\mu} - \frac{1}{c} \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{4\pi \sigma}{c} \mathfrak{E}$ ) wegen der Kleinheit von  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$  und aus der zweiten wegen der vorausgesetzten Homogenität des Körpers. Sie kann also nur in den Grenz-

bedingungen erscheinen, welche die elektrischen Feldstärken an der Berührungsfläche zweier solcher Körper verknüpfen.

## 2. Grenzbedingungen.

Diese Grenzbedingungen sind mit den entsprechenden Bedingungen der exakten Theorie identisch. Sie lauten also (vgl. § 7, Kap. I):

$$\Delta \varepsilon \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n} = 4\pi \eta, \quad \Delta \mathfrak{E} \times \mathfrak{n} = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{n} = 0, \quad \Delta \frac{\mathfrak{H}}{\mu} \times \mathfrak{n} = 4\pi \mathfrak{k} \quad (5a)$$

wobei die Flächendichte des freien Stromes ( $\mathfrak{k}$ ) im allgemeinen gleich Null zu setzen ist.

Wir müssen aber jetzt bei dem Übergang zu stationären Strömen noch die Bedingung

$$\Delta \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{n} = \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

berücksichtigen, die sich aus der Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{j} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

auf dieselbe Weise ergibt wie die erste Formel (5) aus der Gleichung  $\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 4\pi \rho$ .

Bei Einsetzen von  $\mathfrak{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}$  nimmt die obige Beziehung die Gestalt

$$\Delta \sigma \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (6)$$

an. In dem Fall von harmonischen Schwingungen, bei welchen alle elektromagnetischen Größen den Faktor  $e^{-i\omega t}$  enthalten, reduziert sich (6) auf

$$\Delta \sigma \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n} = i\omega \eta. \quad (6a)$$

Im vorhergehenden Kapitel haben wir statt der Beziehungen (5) und (6a) die daraus durch Multiplikation der letzteren mit  $\frac{4\pi i}{\omega}$  und Addition mit der ersteren sich ergebende Beziehung

$$\Delta \left( \varepsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \right) \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n} = 0$$

benutzt, in welcher die Ladungsdichte  $\eta$  gar nicht vorkommt. In dem Fall von quasistationären Strömen in metallischen Körpern kann man  $\varepsilon$  gegen  $\frac{\sigma}{\omega}$  vernachlässigen und einfach

$$\Delta \sigma \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n} = 0 \quad (6b)$$

setzen (was offenbar einer Vernachlässigung von  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$  gegen  $\eta$  entspricht).

Diese Bedingung, die bei stationären Strömen streng erfüllt wird, spielt dieselbe Rolle wie die Bedingung  $\Delta \varepsilon \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{n} = 0$  für vollkommene Isolatoren. In Verknüpfung mit der zweiten Gleichung (5) bestimmt sie die „Brechung“ der elektrischen Kraft- oder Stromlinien an der Grenze zwischen den betreffenden Körpern. Es gilt nämlich, wenn wir den Neigungswinkel dieser Linien zur Flächennormale mit  $\Theta_a$  bzw.  $\Theta_b$  bezeichnen:

$$\frac{\operatorname{tg} \Theta_a}{\operatorname{tg} \Theta_b} = \frac{\sigma_a}{\sigma_b}. \quad (6c)$$

Wenn  $b$  ein Metall oder Elektrolyt und  $a$  ein Isolator ist, so folgt daraus wegen  $\sigma_a = 0$

$$\Theta_b = \frac{\pi}{2}.$$

Die Stromlinien müssen also dabei im Leiter parallel zur Grenzfläche verlaufen. Im Dielektrikum können sie aber eine beliebige von Null verschiedene Neigung zu dieser Fläche besitzen — je nach der Größe der Flächenladung, die durch die erste Gleichung (5) bestimmt wird. Der Betrag der Feldstärke im Metall muß folglich immer kleiner als im umgebenden Dielektrikum sein, und zwar desto kleiner, je größer die Leitfähigkeit ist.

### 3. Energie.

Die im II. Kapitel gegebenen Ausdrücke für die elektromagnetische Energie, Kräfte, Strahlung und Bewegungsgröße, können ebenfalls in der betrachteten Näherung bestehen bleiben. Die sich nach den Formeln (1) und (1b) ergebenden Feldstärken geben aber keine Ausstrahlung ins Unendliche, wie man schon aus der Tatsache ersehen kann, daß die magnetische Feldstärke nicht mit der ersten, sondern mindestens mit der zweiten Potenz des Abstandes abnehmen muß. Die elektrische Feldstärke, welche durch die magnetische Induktion bedingt wird ( $-\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ ) behält dagegen ein der ersten Potenz des Abstandes proportionales Glied. Es ist zweckmäßig, dieses Glied bei der Bestimmung der Energie wegzulassen. Die letztere zerfällt dabei in zwei Anteile, die der potentiellen und der kinetischen Energie der gewöhnlichen Mechanik entsprechen, genau in derselben Weise, wie dies bei den statischen und stationären Erscheinungen der Fall ist (vgl. Bd. I, Kap. VII, §§ 1 und 2). Man muß aber nicht vergessen, daß die magnetische Energie gerade durch die Arbeit der elektrischen Induktionskräfte zustande kommt.

Diese unvollständige „mechanische“ Energie läßt sich in dem einfachsten Fall eines Systems von Leitern bei Fehlen irgendwelcher gebundener Ladungen und Ströme in der Form

$$W = \sum \left( \frac{1}{2} \int \varphi \eta dS + \frac{1}{2} \int \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{j} dV \right) \quad (7)$$

darstellen, oder auch in der äquivalenten Form

$$W = \frac{1}{8\pi} \int [(V \varphi)^2 + (\text{rot } \mathfrak{A})^2] dV = \frac{1}{8\pi} \int (E_{\text{stat.}}^2 + H^2) dV, \quad (7a)$$

wobei im letzten Fall die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist.

Wenn die betrachteten Leiter in ein nicht leitendes Medium eingebettet sind, bleibt der Ausdruck (7a) für die vollständige Energie unverändert (sofern man den Unterschied zwischen den mittleren totalen und den effektiven Feldstärken außer acht läßt). Ihre Größe aber ändert sich in einer bestimmten Weise, die von den Eigenschaften ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ) der dieses Medium bildenden Körper und deren Gestalt abhängt.

Wir betrachten z. B. die elektrostatische Energie eines Systems von geladenen Leitern, die sich in ein homogenes, unendlich ausgedehntes Medium mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  befinden. Die Größe und Verteilung der freien Ladungen ist dabei, wie leicht zu sehen ist, von  $\epsilon$  unabhängig (siehe unten § 6). Dazu kommen aber noch gebundene Ladungen, welche die resultierende Ladungsdichte auf der Oberfläche der Leiter und folglich auch die elektrische Feldstärke und das Potential im ganzen Raum in dem Verhältnis  $\epsilon : 1$  herabsetzen (denn es gilt für jedes Oberflächenelement  $E = \frac{4\pi \eta r}{\epsilon}$ ). Wir sehen also, daß die vollständige elektrische Energie in dem Verhältnis  $\epsilon^2 : 1$  verkleinert wird. Dagegen ist die den freien Ladungen zugehörige Energie nur in dem Verhältnis  $\epsilon : 1$  verkleinert. Wir haben folglich:

$$U' = \frac{U}{\epsilon^2}, \quad U'_f = \frac{U}{\epsilon}, \quad U'_g = -\frac{1}{\epsilon^2} (\epsilon - 1) U = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) U_f, \quad (7b)$$

wo  $U$  sich auf den Fall  $\epsilon = 1$  bezieht. In derselben Weise ergeben sich für die magnetische Energie eines Systems von stationären Strömen, bei Berücksichtigung der gebundenen Oberflächenströmung in dem umgebenden homogenen Medium mit der Permeabilität  $\mu$  die Formeln

$$T' = \frac{T}{\mu^2}, \quad T'_f = \frac{T}{\mu}, \quad T'_g = -\frac{1}{\mu^2} (\mu - 1) T. \quad (7c)$$

## § 2. Elektrische Schwingungen in einem linearen Leiter.

### 1. Kräfte und Strom in einem nicht vollkommen geschlossenen Leiter.

Die skizzierte angenäherte Methode liefert besonders einfache und wichtige Resultate für den Fall von langsamen Schwingungen in *linearen* Leitern. Die letzteren *brauchen dabei nicht vollkommen geschlossen zu sein*, wie die linearen Leiter, welche wir im ersten Bande behandelt haben. Sie können vielmehr in einer oder mehreren Stellen *unterbrochen* sein, wobei wir nur annehmen müssen, daß die Unterbrechungsstellen sehr kurz gegenüber der Totallänge der betreffenden Leiter

sind. Für diese Stellen, die wir als *Kondensatoren* bezeichnen werden, sind die angenäherten Gleichungen nicht mehr gültig. Man hat nämlich hier *sehr starke elektrostatische Felder*, die von den an den beiden Endpunkten (Kondensatorbelegungen) aufgespeicherten entgegengesetzten Ladungen herrühren und deren zeitliche Änderung nach der Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{E} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} + 4\pi \mathfrak{j}$  die Rolle der Stromstärke spielt.

Als „langsam“ sind solche Schwingungen anzusehen, deren Wellenlänge sehr groß gegenüber den Abmessungen des betreffenden Leiters („Drahtes“) sind. In diesem Fall muß die Schwingungsphase im ganzen Stromkreis praktisch dieselbe sein. Das ist gerade der Grund dafür, warum man hier die Retardierung der elektrischen Fernwirkungen vernachlässigen kann.

Die Frage nach der Stromverteilung in einem beliebigen Querschnitt des Leiters lassen wir zunächst ganz offen. Wir müssen nur annehmen, daß die Stromdichte der *Stationaritätsbedingung*  $\text{div } \mathfrak{j} = 0$  (näherungsweise) Genüge leistet. Daraus folgt, daß die Stromstärke

$$J = \int \mathfrak{j}_n ds$$

für alle Querschnitte (s) denselben Wert hat, der nur von der Zeit abhängig ist. Für solche Querschnitte (S), die durch eine Unterbrechungsstelle gehen, ist die Stromstärke selbstverständlich gleich Null. Hier kann man aber nach dem oben Gesagten

$$J = \int \frac{\epsilon}{4\pi c} \frac{\partial E_n}{\partial t} dS = \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int \epsilon E_n dS, \tag{8}$$

setzen, und andererseits, nach der Gleichung  $\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{j} = 0$ ,

$$J = \frac{1}{c} \frac{de}{dt}, \tag{8a}$$

wo  $\pm e$  die (freien) elektrischen Ladungen der betreffenden Kondensatorbelegungen bedeuten (Abb. 38). Die Formeln (8) und (8a) sind tatsächlich einander äquivalent: denn es folgt nach  $\text{div } \epsilon \mathfrak{C} = 4\pi \rho$ :

$$\oint \epsilon E_n dS = \pm 4\pi e$$

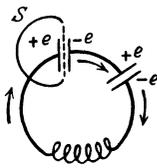


Abb. 38.

für jede sich im Endlichen oder Unendlichen schließende Fläche S.

Die Bestimmung der Stromstärke  $J$  ist auf Grund

der Formel

$$\mathfrak{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{C}$$

zu vollziehen. Hier bedeutet  $\mathfrak{C}$  die elektrische Feldstärke *innerhalb* des Leiters. Wenn der letzte homogen ist ( $\sigma = \text{konst}$ ), muß sie wegen  $\text{div } \mathfrak{j} = 0$  der Gleichung  $\text{div } \mathfrak{C} = 0$  genügen, die einfach das Fehlen von freien Ladungen innerhalb des Leiters ausdrückt [vgl. (2b)]. Die

obige Gleichung drückt aber gleichzeitig die Tatsache aus, daß die elektrischen Kraftlinien im Leiter longitudinal verlaufen und daß der elektrische Fluß  $\int E_n dS$  durch irgendwelchen Querschnitt ( $s$ ) denselben Wert

$$\int E_n d s = \frac{c}{\sigma} J \quad (8b)$$

hat. Je größer die Leitfähigkeit ist, desto kleiner muß die innere elektrische Feldstärke oder eher der *innere Fluß*  $F^i$  im Verhältnis zum äußeren  $F^a = \int E_n dS$  sein. Dieses Verhältnis beträgt nämlich für harmonische Schwingungen von der Frequenz  $\frac{\omega}{2\pi}$  ( $J = J_0 e^{\pm i\omega t}$ ), nach (8) und (8b)

$$\left| \frac{F^i}{F^a} \right| = \frac{\omega \varepsilon}{4\pi\sigma} = 2\pi \frac{\tau_0 \varepsilon}{\tau},$$

wo  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  die Schwingungsperiode und  $\tau_0 = \frac{1}{4\pi\sigma}$  die Relaxationszeit des Leiters (wenn die Dielektrizitätskonstante des letzteren gleich 1 gesetzt wird) bedeutet. Für metallische Leiter ist  $\tau_0$  von der Größenordnung  $10^{-15}$ , also außerordentlich klein gegenüber der Periode von „langsamen“ technischen Schwingungen.

Wir wollen nun die später zu rechtfertigende Annahme machen, daß der Strom *gleichförmig*, mit konstanter Dichte, über die verschiedenen zur Längsrichtung senkrechten Querschnitte verteilt ist (daß also kein „Skineffekt“ vorkommt). Dann muß nach (5a) auch die elektrische Feldstärke in jedem Querschnitt dieselbe longitudinal gerichtete Größe

$$E = \frac{c}{s\sigma} J$$

haben. Wir multiplizieren diesen Ausdruck mit dem Linienelement  $dl$  des Leiters und integrieren über seine ganze Länge  $l$ , mit Ausschluß der eventuell vorhandenen Unterbrechungsstellen. Dies gibt:

$$\oint E dl = J \oint \frac{c}{\sigma s} dl$$

oder

$$J = \frac{V}{R} \quad (9)$$

mit den Abkürzungen

$$V = \oint E dl \quad (9a)$$

und

$$R = \oint \frac{c}{\sigma s} dl \quad (9b)$$

Die Beziehung (9) ist die übliche (elementare) Form des *Ohmschen* Gesetzes. Man bezeichnet dabei  $V$  als die *elektromotorische Kraft* und  $R$  als den (*Ohmschen*) *Widerstand* des betrachteten Leiters.

Die innere elektrische Feldstärke setzt sich nach (1b) aus zwei Anteilen zusammen: des elektrostatischen Anteiles  $\mathfrak{E}^e = -\nabla \varphi$  und des elektromagnetischen  $\mathfrak{E}^m = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ . Dementsprechend bekommen wir

$$V = V^e + V^m, \quad (10)$$

wo  $V^e$  die *Summe der Potentialgefälle* in den einzelnen Strecken des Leiters (oder, was dasselbe ist, in den Unterbrechungsstellen) und  $V^m$  die *induzierte elektromotorische Kraft* bedeuten. Bei Fehlen äußerer (oder „eingepprägter“) Kräfte kann man offenbar

$$V^e = -\frac{e}{K} \quad \text{und} \quad V^m = -\frac{L}{c} \frac{dJ}{dt} \quad (10a)$$

setzen. Hier ist  $L$  nichts anderes als der schon im ersten Bande eingeführte *Selbstinduktionskoeffizient* des Leiters (S. 199);  $K$  heißt sein *Kapazitätskoeffizient*. Der letztere hängt ausschließlich von den Unterbrechungsstellen ab und wird deshalb auch als Kapazität der im Stromkreis geschalteten Kondensatoren bezeichnet. Der Selbstinduktionskoeffizient ist dagegen von diesen Unterbrechungen (sofern sie genügend kurz sind) praktisch unabhängig.

## 2. Die Eigenschwingungen und die erzwungenen Schwingungen eines fast geschlossenen Leiters.

Wir haben also bei der Anwesenheit einer äußeren elektromotorischen Kraft  $V^a$

$$J = -\frac{1}{R} \left( \frac{e}{K} + \frac{L}{c} \frac{dJ}{dt} - V^a \right), \quad (10b)$$

oder nach (8a)

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{R}{c} \frac{de}{dt} + \frac{e}{K} = V^a. \quad (11)$$

Durch diese Gleichung werden die erzwungenen Schwingungen oder bei  $V^a = 0$  die *Eigenschwingungen* des betrachteten Leiters oder Stromkreises bestimmt, und zwar desto genauer, je kleiner die Frequenz dieser Schwingungen ist.

Die Gleichung (11) hat dieselbe Gestalt wie die schon manchmal diskutierte Gleichung (35), Kap. III, für die gedämpften Schwingungen eines quasielastisch gebundenen Elektrons. Es entspricht dabei seiner Masse ( $m$ ) der Selbstinduktionskoeffizient  $\left(\frac{L}{c^2}\right)$ , dem Reibungskoeffizienten ( $\vartheta$ ) der Ohmsche Widerstand  $\left(\frac{R}{c}\right)$ , und schließlich dem Bindungskoeffizienten  $k$  die zur Kapazität reziproke Größe  $\frac{1}{K}$ .

Wir bekommen also ohne weitere Rechnung nach den Formeln (35a) und (35b) die folgenden Ausdrücke für die Resonanzfrequenz  $\frac{\omega_0}{2\pi}$ , die

Eigenfrequenz  $\frac{\omega'}{2\pi}$  und das Dämpfungsdekrement  $\omega''$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{c}{KL}}, \\ \omega' &= \sqrt{\frac{c^2}{KL} - \frac{R^2}{4L}}, \\ \omega'' &= \frac{Rc}{2L}. \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

Es ergibt sich ferner für die erzwungenen Schwingungen, die durch eine harmonisch schwingende äußere Kraft  $V^a = V_0 e^{i\omega t}$  erzeugt werden (Kap. III):

$$e = \frac{c^2 V^a}{L(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega'')},$$

und folglich

$$J = \frac{ci\omega V^a}{L(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega'')} = \frac{V^a}{R + i\left(\frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K}\right)}, \quad (11b)$$

d. h.

$$J = \frac{V_0^a e^{i(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K}\right)^2}} \quad (11c)$$

mit

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K} \cdot \frac{1}{R}.$$

Die durch die äußeren Kräfte pro Zeiteinheit durchschnittlich geleistete Arbeit  $\bar{Q}$  drückt sich durch den reellen Anteil des Produktes  $\frac{1}{2} c J^* V^a$  aus [vgl. (38a) Kap. III]. Diese Arbeit

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} J_0 \cdot V_0^a \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{V_0^a{}^2 \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K}\right)^2}} \quad (12)$$

muß gleichzeitig die pro Zeiteinheit entwickelte Joulesche Wärme bestimmen. Dasselbe Resultat kann man mittels der allgemeinen Formel

$$Q = \int \sigma \bar{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int \sigma E_0^2 dv = \frac{1}{2} J_0 \cdot V_0 \quad (12a)$$

bekommen, wo  $E$  die totale (äußere + innere) elektrische Feldstärke ist. Man hat nämlich nach (10a)

$$V = V^a - \frac{e}{K} - \frac{L}{c} \frac{dJ}{dt} = V^a - i\left(\frac{L\omega}{c} - \frac{c}{\omega K}\right) J. \quad (12b)$$

Die innere elektromotorische Kraft, die durch das zweite Glied dargestellt wird, ist also bei reellem  $\omega$  um  $\frac{\pi}{2}$  gegenüber der Stromstärke

(hinsichtlich der Phase) verschoben und leistet deshalb durchschnittlich keine Arbeit. Im Falle der Eigenschwingungen ist ihre Arbeit proportional dem imaginären Anteil von  $\omega$ , d. h. dem Dämpfungskoeffizienten  $\omega''$ .

Die in der Zeit  $dt$  geleistete Arbeit drückt sich nach (12b) folgendermaßen aus:

$$cJVdt = cJV^a dt - \frac{e}{K} cJdt - LJ \frac{dJ}{dt}.$$

Daraus folgt wegen  $cJdt = de$  und  $V = RJ$ :

$$cJV^a = \frac{dW}{dt} + cRJ^2 \quad (12c)$$

mit

$$W = \frac{e^2}{2K} + \frac{1}{2} LJ^2. \quad (12d)$$

Die letzte Formel stellt die „mechanische“ Energie des Leiters im oben definierten Sinne dar. Und zwar ist  $\frac{1}{2} LJ^2$  die magnetische (kinetische) und  $\frac{e^2}{2K}$  die *elektrostatische* (potentielle) Energie. Die Formel (12c) spricht die Tatsache aus, daß die Arbeit der äußeren Kraft teilweise in diese Energie, teilweise in Joulesche Wärme übergeht.

Wir brauchen die vorhergehenden Formeln nicht näher zu diskutieren, denn dies ist für die ganz analogen Formeln des § 4, Kap. III getan worden.

Zur vollständigen Lösung des Problems der Eigenschwingungen oder der erzwungenen Schwingungen eines linearen Stromkreises muß man also in der betrachteten Näherung nur die Koeffizienten  $R$ ,  $L$  und  $K$  kennen. Dabei ist der Widerstand  $R$  durch das Integral (6b) gegeben. Der Selbstinduktionskoeffizient läßt sich nach den Formeln (12) und (14a), S. 197 und 199 des I. Bandes durch das über das Volumen des Leiters erstreckte Doppelintegral

$$L = \frac{1}{j^2} \iint \frac{i \cdot i'}{r} dv dv' \quad (13)$$

darstellen ( $r$  = Abstand zwischen  $dv$  und  $dv'$ ). Bei konstantem Querschnitt ( $s$  = konst) und gleichförmiger Stromverteilung reduziert sich diese Formel auf die Gestalt

$$L = \frac{1}{s^2} \iiint \frac{\cos \Theta}{r} ds ds' dl dl', \quad (13a)$$

wo  $\Theta$  den Winkel zwischen den Linienelementen  $dl$  und  $dl'$  bedeutet.

Was schließlich den Kapazitätskoeffizienten anbetrifft, so ist er ausschließlich von der Beschaffenheit der Unterbrechungsstellen abhängig.

Zur Erläuterung dieser Begriffe denken wir uns eine solche Unterbrechungsstelle in der Gestalt von zwei parallelen Platten mit demselben

Flächeninhalt  $S$ , die sich voneinander in einem verhältnismäßig sehr kleinen Abstand  $d$  befinden. Wir können uns dann vorstellen, daß die Ladungen  $\pm e$  gleichförmig mit der Flächendichte  $\pm \eta = \pm \frac{e}{S}$  über die beiden Platten verteilt sind, so daß zwischen den letzteren ein homogenes elektrisches Feld  $E = 4\pi\eta = \frac{4\pi e}{S}$  herrscht. Die entsprechende Potentialdifferenz  $\varphi$  ist gleich dem Produkte  $E \cdot d$ . Wir haben also nach der Definition von  $K$  ( $= \frac{e}{\varphi}$ ):

$$K = \frac{S}{4\pi d}. \quad (13b)$$

Einen approximativen Wert für den Selbstinduktionskoeffizienten erhält man leicht in dem (in der Praxis wichtigen) Fall, daß der Leiter die Gestalt einer „Spule“ oder eines *Solenoids* hat. Es herrscht innerhalb dieses Solenoids ein (nahezu) homogenes magnetisches Feld  $H = 4\pi Jn$ , wo  $n$  die Anzahl Windungen pro Längeneinheit bedeutet [vgl. Formel (13) auf S. 72 des I. Bandes]. Durch Multiplikation von  $H$  mit der totalen Anzahl der Windungen  $N = n \cdot l_s$  ( $l_s$ -Länge des Solenoids) und dem Flächeninhalt  $S$  einer Windung (Querschnitt des Solenoids) bekommen wir den vollständigen magnetischen Fluß durch den betrachteten Leiter. Da aber dieser Fluß definitionsgemäß sich als Produkt der Stromstärke mit dem Selbstinduktionskoeffizienten darstellen läßt, so wird

$$L = 4\pi S n N = 4\pi S l_s n^2 = \frac{4\pi S N^2}{l_s}, \quad (13c)$$

Dieser Ausdruck ist desto genauer, je kleiner die Querdimensionen des Solenoids im Vergleich mit seiner Länge und je kleiner die Dicke der Stromschicht im Vergleich mit diesen Querdimensionen ist.

Wenn der betrachtete Kondensator mit einem Dielektrikum erfüllt ist, und der Solenoid mit einem magnetisierbaren Körper, so muß man die obigen Werte von  $K$  und  $L$  mit der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  bzw. der magnetischen Permeabilität  $\mu$  multiplizieren. Es sei bemerkt, daß dabei die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  nach (18a) in dem Verhältnis  $\sqrt{\varepsilon\mu}:1$  verkleinert wird. Diese Abhängigkeit der Eigenfrequenzen eines vollkommen leitenden Körpers von den Eigenschaften des umgebenden nicht leitenden Mediums haben wir im vorigen Kapitel (§ 6) in exakter Form nachgewiesen.

Einen vollkommen geschlossenen Leiter kann man formal durch das Unendlichwerden des Kapazitätskoeffizienten charakterisieren [es wird z. B. nach (13b)  $K = \infty$  bei  $d = 0$ ]. In einem solchen Leiter sind elektrische Eigenschwingungen nicht möglich. Die Formeln (11b, c) und (12) für die erzwungenen Schwingungen bleiben aber auch in diesem Fall gültig, wenn man dort  $\frac{1}{K} = 0$  setzt.

Man kann dabei zum Grenzfall einer zeitlich konstanten äußeren Kraft übergehen, wobei man einen zeitlich konstanten Strom erhält — was bei nicht vollkommen geschlossenen Stromkreisen unmöglich ist.

Wenn die äußere Kraft *plötzlich*, sagen wir im Augenblick  $t = 0$  eingeführt wird, muß die Stromstärke nach der Differentialgleichung

$$RJ + \frac{L}{c} \frac{dJ}{dt} = V^a (= \text{konst})$$

anwachsen. Die Integration dieser Gleichung ergibt bei der Bedingung  $J = 0$  für  $t = 0$ :

$$J = \frac{V^a}{R} \left( 1 - e^{-\frac{Rc}{L}t} \right).$$

Bei plötzlichem Verschwinden von  $V^a$  fällt sie wieder von ihrem Maximalwert  $J_0 = \frac{V^a}{R}$  nach der Formel  $J = J_0 e^{-\frac{Rc}{L}t}$  ab.

### 3. Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen in Draht- und Kabelleitungen.

Die dargelegte Methode läßt sich, wenn man die Größen erster Ordnung in  $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$  beibehält, auf den Fall der Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen längs unendlich ausgedehnten linearen Leitern (Drähten oder Kabeln) und auf ähnliche nicht quasistationäre aber strahlungslose Vorgänge anwenden. Dabei ist es selbstverständlich notwendig, die Stromstärke als Funktion nicht nur der Zeit, sondern *auch einer Lagerkoordinate*, nämlich des Abstandes  $z$  des betreffenden Querschnittes von einem beliebig ausgewählten Anfangspunkt zu behandeln (der Draht braucht aber nicht notwendig geradlinig zu sein). Man muß ferner bei Fehlen irgendwelcher Unterbrechungsstellen, wo sich große elektrische Ladungen akkumulieren können, die zeitliche Änderung der Ladungsdichte in (oder auf) jedem Linienelement des Drahtes berücksichtigen. Bezeichnet man die lineare Ladungsdichte (Ladung pro Längeneinheit) mit  $e$ , so hat man nach dem Erhaltungsgesetz der Elektrizität, die Beziehung:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Wir setzen ferner an

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{K} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{L}{c} \frac{\partial J}{\partial t}, \quad (14a)$$

wo  $K$  und  $L$  die auf die Längeneinheit bezogene Kapazität und Induktionskoeffizient sind (die elektrische Feldstärke  $E$  kann man ebenfalls als die elektromotorische Kraft pro Längeneinheit auffassen). Der Ansatz (14a) hat dieselbe Form wie (10a) aber einen etwas verschiedenen Sinn, denn es bedeuten hier  $e$  und  $J$  die Ladung und den Strom an *derjenigen Stelle*, für welche  $E$  bestimmt wird.

Wir haben schließlich nach (9)

$$J = \frac{E}{R},$$

wo  $R = \frac{c}{\sigma s}$  den Widerstand pro Längeneinheit bedeutet. Es wird also nach (14a):

$$J = -\frac{1}{R} \left( \frac{1}{K} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{L}{c} \frac{\partial J}{\partial t} \right),$$

oder, wenn man diese Gleichung nach  $t$  differenziert und  $\frac{\partial e}{\partial t}$  nach (14) durch  $-c \frac{\partial J}{\partial z}$  ersetzt:

$$\frac{L}{c} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} - \frac{c}{K} \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} + R \frac{\partial J}{\partial t} = 0. \tag{14b}$$

Setzt man hier

$$J = J_0 e^{-i(\omega t - q)} \tag{14c}$$

ein, so wird

$$-\frac{L}{c} \omega^2 + \frac{c}{K} q^2 - i \omega R = 0,$$

d. h.

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{KL} \sqrt{1 + i \frac{Rc}{L\omega}}. \tag{14d}$$

Die Gleichung (14b), die man als „Telegraphengleichung“ zu bezeichnen pflegt, und ihre Lösung (14c, d) für harmonische Schwingungen, haben dieselbe Gestalt, wie die entsprechenden exakten Formeln, die wir im vorhergehenden Kapitel abgeleitet haben. Sie könnten also bei passender Wahl der Koeffizienten  $K, L, R$  vollkommen exakte Resultate liefern. Aber gerade an dieser Stelle macht man die für die hier betrachtete Methode charakteristische Vernachlässigung. Und zwar bestimmt man  $K, L$  und  $R$  für den Fall  $q = 0$  (bei gegebenem  $\omega$ ), was einer unendlich großen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Fernwirkungen entspricht. Man bekommt eine noch gröbere Annäherung, wenn man gleichzeitig  $q = 0$  und  $\omega = 0$  setzt, d. h. eine statische Ladungsverteilung und einen stationären Strom betrachtet.

Wir wollen hier beispielsweise den schon im vorigen Kapitel behandelten Fall eines Kabels betrachten, der aus einem inneren Draht mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius  $a$  und einem äußeren sehr dünnen Zylinder mit dem inneren Radius  $b_1$  und dem äußeren  $b_2$  besteht (Abb. 39)<sup>1)</sup>. Wir stellen uns dabei vor, daß die innere und äußere Belegung dieses Kabels sich stets in entgegengesetzten Phasen befinden, und daß die Ladung  $+e$  auf der Oberfläche des Drahtes und die entgegengesetzte Ladung  $-e$  auf der inneren Oberfläche des Zylinders gleichförmig verteilt sind. Dann ist das elektrische Potential des Zylinders gleich

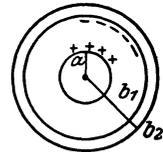


Abb. 39.

<sup>1)</sup> Der Kabel braucht nicht geradlinig zu sein. Der Krümmungsradius muß aber groß gegen die Querdimensionen bleiben.

Null (denn das elektrische Feld außerhalb des letzteren verschwindet) und des Drahtes

$$\varphi = 2e \lg \frac{b_1}{a}$$

[vgl. (33b) Kap. IV]. Daraus folgt definitionsgemäß

$$K = \frac{1}{2 \lg \frac{b_1}{a}}. \quad (15)$$

Was die Stromverteilung anbetrifft, so wollen wir zwei Grenzfälle betrachten. Erstens, wenn die Schwingungen so schnell sind, daß der Strom in einer sehr dünnen hautförmigen Schicht auf dem Drahte und dem Zylinder fließt. Dann bekommt man für das Vektorpotential des Drahtes

$$A = 2 J \lg \frac{b_1}{a}$$

und folglich, nach der Definition von  $L$  [siehe Formel (14a)]

$$L = 2 \lg \frac{b_1}{a} = \frac{1}{K}. \quad (15a)$$

Den Widerstand kann man vernachlässigen, so daß die Formel (14d) für diesen Fall

$$q = \frac{\omega}{c}$$

gibt. Dies bedeutet, daß die Schwingungen sich mit der Geschwindigkeit  $\frac{\omega}{q} = c$  ohne Dämpfung fortpflanzen.

In dem entgegengesetzten Grenzfall (sehr langsame Schwingungen) müssen wir uns vorstellen, daß der Strom gleichförmig über den Querschnitt des Drahtes und des Zylinders verteilt ist. Den Zylinder behandeln wir übrigens als unendlich dünn ( $b_1 \cong b_2 = b$ ), so daß die Änderung des Potentials nur für den Draht berücksichtigt werden muß. Außerhalb des Drahtes bleibt der frühere Ausdruck

$$A = 2 J \lg \frac{b}{r} \quad (r > a)$$

bestehen. Innerhalb des letzteren hat man nach (1a)

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA}{dr} = -4\pi j = -\frac{4J}{a^2},$$

d. h.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA}{dr} \right) = -\frac{4J}{a^2},$$

woraus folgt, mit Rücksicht darauf, daß  $A$  bei  $r = 0$  endlich bleibt und bei  $r = a$  in das äußere Potential übergeht,

$$A = J \left[ \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + 2 \lg \frac{b}{a} \right].$$

Die magnetische Energie pro Längeneinheit läßt sich in den folgenden zwei Formen darstellen

$$\frac{1}{2} L J^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \int_0^a A j \, dS.$$

Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf  $j \, dS = J^2 \frac{r \, dr}{a^2}$  der folgende Ausdruck für  $L$ :

$$L = 2 \lg \frac{b}{a} + \frac{1}{2}. \quad (15b)$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen im Kabel wird also in diesem Fall etwas kleiner als  $c$ , und zwar, wenn man die Dämpfung vernachlässigt, gleich

$$\frac{\omega}{q} = c \left( 1 + \frac{1}{4 \lg \frac{b}{a}} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Bei kleinen Widerständen ( $R = \frac{c}{\pi \sigma a^2}$ ) kann man (14d) durch den genäherten Ausdruck

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{KL} + i \frac{R}{2} \sqrt{\frac{K}{L}}$$

ersetzen. Die longitudinale Dämpfung der Schwingungen, d. h. die Abnahme ihrer Amplitude beim Fortschreiten längs dem Kabel, drückt sich folglich durch die Formel aus:

$$|J| = |J_0| e^{-q''z}, \quad \text{mit} \quad q'' = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{k}{L}}. \quad (15c)$$

In Wirklichkeit hat die Stromverteilung im Drahtquerschnitt einen zwischen den beiden soeben betrachteten Extremfällen intermediären Charakter. Die Abhängigkeit dieser Verteilung, d. h. des „Skin-effektes“ von der Frequenz ist in der betrachteten Annäherung durch die Gleichung

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj}{dr} + i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} j = 0$$

gegeben. Diese Gleichung ergibt sich aus (4b) oder aus der exakten Gleichung (39b), Kap. V, wenn man dort  $k^2 = i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$  setzt.

Die oben für Stromkreise von endlicher Länge gegebene Definition der elektromotorischen Kraft und des Ohmschen Widerstandes ist nur bei gleichförmiger Stromverteilung gültig. Bei Anwesenheit des Skin-effektes muß man diese Größen derart definieren, daß die Formeln

$$J = \frac{V}{R} \quad \text{und} \quad Q = c R J^2 = c J \cdot V$$

für die Stromstärke und die Joulesche Wärme unverletzt bleiben.

Es wird also, mit Rücksicht auf die allgemeinen Formeln

$$J = \frac{\sigma}{c} \int E ds \quad \text{und} \quad Q = \sigma \int E^2 dv = \sigma \iint E^2 ds dl:$$

$$V = \frac{Q}{cJ} = \frac{\iint E^2 ds dl}{\int E ds}$$

und

$$R = \frac{V}{J} = \frac{c \iint E^2 ds dl}{(\int E ds)^2}.$$

Die dargelegte Theorie kann auf die Fortpflanzung von Schwingungen oder eher auf *stehende Schwingungen* in Drähten und Kabeln von *endlicher* Länge ausgedehnt werden. Man bekommt dabei gleichzeitig die Verallgemeinerung der ursprünglich entwickelten Theorie der Schwingungen in „fast geschlossenen“ Stromkreisen. Man muß nämlich die Enden der Leitung als Unterbrechungsstellen mit einer verhältnismäßig kleinen Kapazität behandeln, und gleichzeitig als Knotenstellen der elektrischen Stromstärke. Die im § 6 des vorigen Kapitels angeführte Untersuchung der Eigenschwingungen eines geradlinigen Drahtes, bei welcher die Ausstrahlung ursprünglich vernachlässigt worden ist (und nur nachträglich berücksichtigt wurde), schließt sich unmittelbar an die obige elementare Theorie der linearen Leiter. Das eigentliche Gebiet dieser Theorie bilden aber solche geschlossene oder fast geschlossene Leiter, *deren Abmessungen klein gegen die Wellenlänge sind*, d. h. mit anderen Worten, solche Schwingungen, bei welchen die *Phase* im ganzen Leiter praktisch denselben, nur von der Zeit abhängigen, Wert hat. In diesem Fall kann man nicht nur von der Strahlungslosigkeit, sondern auch von dem *quasistationären* Charakter der betreffenden Vorgänge reden. Wir werden uns im folgenden ausschließlich auf solche quasistationäre oder quasistatische Vorgänge beschränken.

### § 3. Elektrische Schwingungen in einem System von linearen Leitern (quasistationäre lineare Ströme).

#### 1. Induktiv gekoppelte Leiter.

Wir stellen uns jetzt ein *System* geschlossener oder fast geschlossener Stromkreise vor, die miteinander durch ihre gegenseitigen elektrischen Induktionskräfte gekoppelt sind. Diese „induktive“ oder „elektromagnetische“ Koppelung zweier beliebiger Stromkreise ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) läßt sich quantitativ durch Angabe ihrer gegenseitigen Induktionskoeffizienten  $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$  charakterisieren (Bd. I, S. 194 ff.). Die zusätzliche elektrische Induktionskraft  $V_{\alpha\beta}^{(m)}$ , die in ( $\alpha$ ) durch eine Änderung der Stromstärke  $J_\beta$  in ( $\beta$ ) bedingt wird, drückt sich dabei bekanntlich

durch die Formel

$$V_{\alpha\beta}^{(m)} = -\frac{1}{c} L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} \quad (16)$$

aus. Bezeichnet man noch mit  $V_\alpha^a$  die in  $\alpha$  eventuell wirkende äußere elektromotorische Kraft, so bekommt man für die Stromstärke  $J_\alpha$  die folgende Gleichung [vgl. (10b)]:

$$J_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \left( V_\alpha^a - \frac{e_\alpha}{K_\alpha} - \frac{1}{c} \sum_{\beta=1}^n L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} \right), \quad (n = \text{Anzahl der Stromkreise})$$

d. h.

$$\frac{e_\alpha}{K_\alpha} + \frac{1}{c} \sum_{\beta=1}^n L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} + R_\alpha J_\alpha = V_\alpha^a \quad (16a)$$

oder

$$\frac{1}{c^2} \sum_{\beta=1}^n L_{\alpha\beta} \frac{d^2 e_\beta}{dt^2} + \frac{R_\alpha}{c} \frac{de_\alpha}{dt} + \frac{e_\alpha}{K_\alpha} = V_\alpha^a. \quad (\alpha = 1, 2 \dots n) \quad (16b)$$

Diese Gleichungen beziehen sich auf den Fall, daß die betrachteten Stromkreise in (relativer) Ruhe bleiben. Sonst sollte man

$$V_{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (L_{\alpha\beta} J_\beta) = -\frac{L_{\alpha\beta}}{c} \frac{dJ_\beta}{dt} - \frac{J_\beta}{c} \frac{dL_{\alpha\beta}}{dt}$$

setzen, wo die Änderung des Induktionskoeffizienten  $L_{\alpha\beta}$  durch die fortschreitende Bewegung, Drehung und eventuell auch durch die Deformation der betreffenden Stromleiter bedingt wird.

Wir werden aber zunächst die Stromkreise als ruhend betrachten. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall  $n = 2$ , den man bei den Transformatoren und Induktionsspulen findet.

Wir nehmen ferner an, daß im ersten Stromkreis eine harmonische äußere Kraft  $V_1^a = V_0^a e^{i\omega t}$  wirkt, während  $V_2^a = 0$  ist und ziehen die mit dieser Kraft synchronen erzwungenen Schwingungen der beiden Kreise in Betracht. Es wird dabei

$$\frac{dJ_\alpha}{dt} = i\omega J_\alpha, \quad e_\alpha = \frac{cJ_\alpha}{i\omega_\alpha}$$

und folglich nach (15):

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{i\omega}{c} L_{11} + \frac{c}{i\omega K_1} + R_1 \right) J_1 + \frac{i\omega}{c} L_{12} J_2 &= V_1^a, \\ \frac{i\omega}{c} L_{12} J_1 + \left( \frac{i\omega}{c} L_{22} + \frac{c}{i\omega K_2} + R_2 \right) J_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Diese Gleichungen lassen sich sofort auflösen und ergeben mit den

Abkürzungen

$$\varrho_1 = R_1 + i\left(\frac{\omega}{c} L_{11} - \frac{c}{\omega K_1}\right), \quad \varrho_2 = R_2 + i\left(\frac{\omega}{c} L_{22} - \frac{c}{\omega K_2}\right): \quad (17a)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{V_1^a}{\varrho_1 \left(1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{c^2 \varrho_1 \varrho_2}\right)}, \\ J_2 &= -\frac{\frac{i\omega}{c} L_{12} V_1^a}{\varrho_1 \varrho_2 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{c^2}} = -\frac{\frac{i\omega}{c} L_{12}}{\varrho_2} J_1. \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

Die Wirkung des ersten Stromkreises auf den zweiten ist also äquivalent einer äußeren elektromotorischen Kraft

$$-\frac{\frac{i\omega}{c} L_{12} V_1^a}{\varrho_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{c^2 \varrho_2}}$$

und die Rückwirkung von (2) auf (1) drückt sich in einer Herabsetzung der tatsächlich vorhandenen Kraft  $V_1^a$  im Verhältnis  $1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{c^2 \varrho_1 \varrho_2} : 1$  aus. Diese gegenseitige Störung der beiden Systeme ist desto größer je größer der „Koppelungskoeffizient“

$$k^2 = \frac{\omega^2 L_{12}^2}{\varrho_1 \varrho_2}$$

ist. Bei vollkommen geschlossenen Stromkreisen ( $K_1 = K_2 = \infty$ ) mit kleinen Widerständen hat man näherungsweise

$$k_0^2 = \frac{L_{11}^2}{L_{11} L_{22}} \quad (17c)$$

Ist der erste Stromkreis nicht geschlossen und der zweite geschlossen, so wird bei Vernachlässigung von  $R_2$ :

$$J_1 = \frac{V_1^a}{R_1 + i\left\{\left(\frac{\omega}{c} L_{11} - \frac{c}{\omega K_1}\right) - \frac{\omega L_{12}^2}{c L_{22}}\right\}}.$$

Durch Nullsetzen des imaginären Anteiles des Nenners erhalten wir den folgenden Ausdruck für die *Resonanzfrequenz*, die dem Maximalwert  $\frac{V_1}{R_1}$  von  $J_1$  entspricht:

$$\omega_0^{(1)} = \frac{c}{\sqrt{L_{11} K_1 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}}\right)}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - k_0^2}}, \quad (17d)$$

wo  $\omega_1$  die „ungestörte“ Resonanzfrequenz des ersten Stromkreises bedeutet.

Will man den Einfluß der Koppelung auf die *freien* Schwingungen des betrachteten Systems bestimmen, so muß man in (17)  $V_1^a = 0$  setzen und die Kompatibilitätsbedingung

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 & i \frac{\omega}{c} L_{12} \\ i \frac{\omega}{c} L_{12} & \varrho_2 \end{vmatrix} \equiv \varrho_1 \varrho_2 + \frac{\omega^2}{c^2} L_{12} = 0 \quad (18)$$

berücksichtigen. In dem einfachsten Fall, daß  $R_1 = R_2 = 0$  ist, nimmt (18) die folgende Form an:

$$\left( \omega^2 - \frac{c^2}{L_{11} K_1} \right) \left( \omega^2 - \frac{c^2}{L_{22} K_2} \right) = \omega^4 \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}},$$

d. h.

$$(\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) - \omega^4 k_0^2 = 0,$$

wo  $\omega_1$  und  $\omega_2$  die ungestörten Eigen- (oder Resonanz-)frequenzen der betreffenden Stromkreise bedeuten. Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4 \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - k_0^2)}}{2(1 - k_0^2)}$$

oder

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4 k_0^2 \omega_1^2 \omega_2^2}}{2(1 - k_0^2)}. \quad (18a)$$

Man erhält also immer *zwei verschiedene Eigenfrequenzen* (denn der Radikand in (18b) ist eine wesentlich positive Größe). Es ergibt sich insbesondere bei  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k_0}}. \quad (18b)$$

Wir wollen noch diese Verhältnisse für den Extremfall *sehr schwacher Koppelung* mittels einer Näherungsmethode betrachten. Dabei werden wir die Gleichheit von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ausschließen und die Differenzen  $\omega_0^{(1)} - \omega_1 = \Delta\omega_1$  und  $\omega_0^{(2)} - \omega_2 = \Delta\omega_2$  als unendlich kleine Größen behandeln. Wir können dann in der Gleichung (18)

$$\varrho_\alpha(\omega_0^{(\alpha)}) = \left( \frac{\partial \varrho_\alpha}{\partial \omega} \right)_{\omega = \omega_\alpha} \Delta\omega_\alpha, \quad \varrho_\alpha(\omega_0^{(\beta)}) = \varrho_\alpha(\omega_\beta) \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

und ferner im zweiten Glied  $\omega^2 = \omega_\alpha^2$  (wegen der vorausgesetzten Kleinheit von  $L_{12}$  setzen). Dies gibt

$$\Delta\omega_1 = \frac{\omega_1^2 L_{12}^2}{c^2 \varrho_2(\omega_1) \left( \frac{\partial \varrho_1}{\partial \omega} \right)_{\omega = \omega_1}}$$

und eine ähnliche Formel für  $\Delta\omega_2$ . Bei Vernachlässigung der Wider-

stände hat man

$$\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_1} = i \left( \frac{L_{11}}{c} + \frac{c}{\omega_1^2 K_1} \right) = 2i \frac{L_{11}}{c} \quad \left( \text{wegen } \omega_1^2 = \frac{c}{K_1 L_{11}} \right)$$

und

$$\varrho_2(\omega_1) = i \left( \frac{L_{22} \omega_1}{c} - \frac{c}{\omega_1 K_2} \right) = i L_{22} \frac{\omega_1}{c} \left( 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \right).$$

Es wird folglich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \omega_1}{\omega_1} &= \frac{k_0^2}{2 \left( \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1 \right)} \\ \frac{\Delta \omega_2}{\omega_2} &= \frac{k_0^2}{2 \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right)}. \end{aligned} \right\}$$

und ebenso

Bei  $\omega_2 > \omega_1$  hat man also  $\Delta \omega_1 > 0$  und  $\Delta \omega < 0$ , d. h. eine *Verschiebung der Eigenfrequenzen gegeneinander*. Diese Verschiebungen stehen zueinander im Verhältnis  $\omega_1^3 : -\omega_2^3$ . Das Verhältnis  $J_2 : J_1$  für die erste Eigenschwingung beträgt nach (16):

$$\frac{J_2}{J_1} = - \frac{i \omega_1 L_{12}}{c \varrho_2(\omega_1)} = - \frac{L_{12}}{L_{22} \left( \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1 \right)}$$

$J_2$  ist also sehr klein gegen  $J_1$ . In ähnlicher Weise hat man für  $\omega = \omega_0^{(2)}$ :

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{L_{12}}{L_{11} \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1 \right)} \ll 1.$$

Diese Formeln sind selbstverständlich nur in demjenigen Fall gültig, daß die beiden Stromkreise schwingungsfähig sind ( $\omega_1 \neq 0$  und  $\omega_2 \neq 0$ ). Bei  $\omega_2 = 0$  hat man nach (18a)

$$\omega_0^{(1)} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - k_0^2}}, \quad \text{d. h. } \frac{\Delta \omega_1}{\omega_1} \leq \frac{1}{2} k_0^{(2)}$$

in Übereinstimmung mit (17d), und  $\omega_0^{(2)} = \Delta \omega_2 = 0$ .

Der zum oben betrachteten entgegengesetzte Extremfall von zwei *geschlossenen* und sehr *stark gekoppelten* Stromkreisen ist in der Wechselstromtechnik, d. h. der Technik von langsamen elektrischen Schwingungen, in der Form von *Transformatoren* verwirklicht. Die letzteren werden bekanntlich gebraucht, um einen starken Wechselstrom von kleiner Spannung (d. h. elektromotorischer Kraft) in einen schwachen Strom hoher Spannung — oder umgekehrt — zu transformieren. Dies wird durch ein passendes Verhältnis der Selbstinduktionskoeffizienten (und teilweise auch der Widerstände) bei möglichst großem gegenseitigen Induktionskoeffizienten erreicht. Zu diesem Zweck benutzt man zwei solenoidale Stromkreise oder Spulen *mit einem gemeinsamen geschlossenen Eisenkern*, in welchem die Kraftlinien des resultierenden

magnetischen Feldes verlaufen (Abb. 40)<sup>1)</sup>. Die äußere elektromotorische Kraft in der ersten Spule verhält sich dann zur induzierten Kraft in der zweiten ungefähr wie die Anzahl ihrer Windungen  $N_1$  bzw.  $N_2$ . Bezeichnet man nämlich den magnetischen Fluß durch irgendeinen Querschnitt des Eisenkernes, d. h. durch *eine* Windung der „primären“ oder der „sekundären“ Spule mit  $\Phi$ , so sind die entsprechenden totalen Flüsse gleich  $N_1 \Phi$  bzw.  $N_2 \Phi$  und die induzierten elektromagnetischen Kräfte

$$-\frac{1}{c} N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{1}{c} N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (19)$$

Die im primären Stromkreis induzierte Kraft ist aber bei kleinem Widerstand der äußeren Spannung  $V_1$  näherungsweise entgegengesetzt gleich.

Die innerhalb eines Stromsolenoids erzeugte magnetische Feldstärke ist bei Fehlen des Eisenkernes gleich  $4\pi Jn$ , wo  $n$  die Anzahl Windungen pro Längeneinheit des Solenoids bedeutet. Bei Anwesenheit des Kernes ist sie  $\mu$  mal größer. Man hat also für die resultierende von den beiden Spulen herrührende Feldstärke  $H = 4\pi\mu (J_1 n_1 + J_2 n_2)$  und dementsprechend

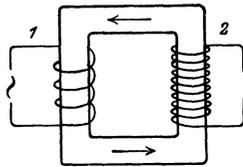


Abb. 40.

$$\Phi = 4\pi\mu S (J_1 n_1 + J_2 n_2) \quad (19a)$$

( $S$  = Querschnitt der Spulen oder des Eisenkernes). Vergleicht man die oben angeführten Ausdrücke für die induzierten Spannungen mit den üblichen Ausdrücken

$$-\frac{1}{c} \left( L_{11} \frac{dJ_1}{dt} + L_{12} \frac{dJ_2}{dt} \right), \quad -\frac{1}{c} \left( L_{12} \frac{dJ_1}{dt} + L_{22} \frac{dJ_2}{dt} \right),$$

so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= 4\pi\mu S N_1 n_1, & L_{22} &= 4\pi\mu S N_2 n_2, \\ L_{12} &= 4\pi\mu S N_1 n_2, & L_{21} &= 4\pi\mu S N_2 n_1. \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

Damit die Gleichheit der letzteren Koeffizienten genau bestehen könnte, müssen die beiden Spulen dieselbe Länge haben. Die vorhergehenden Formeln sind in der Tat nur dann mit genügender Annäherung gültig, wenn die Solenoide *geschlossen* sind, d. h. den ganzen Kern umwickeln. Der Koppelungskoeffizient (17c) beträgt in diesem Fall

$$k_0^2 = 1$$

und das ist offenbar der Maximalwert, den er überhaupt erreichen kann.

<sup>1)</sup> Siehe unten § 7.

## 2. Elektrostatische und galvanische Koppelung (Stromnetze).

Wir haben bisher nur elektromagnetisch gekoppelte Systeme betrachtet. Ungeschlossene (oder fast geschlossene) Stromkreise können aber miteinander *elektrostatisch* gekoppelt sein, z. B. durch gemeinsame oder aneinander liegende Unterbrechungsstellen (Kondensatoren). Die in einem Stromkreis ( $\alpha$ ) wirkende elektrostatische Spannung (Potentialgefälle) muß in diesem Fall nicht nur von  $e_\alpha$ , sondern auch von den an den Unterbrechungsstellen der anderen Stromkreise akkumulierten Ladungen ( $e_\beta$ ) abhängen. Da diese Abhängigkeit einen linearen Charakter haben muß (denn die Potentiale sind den sie erzeugenden Ladungen proportional), so können wir den von  $e_\beta$  herrührenden Beitrag zur elektrostatischen Spannung in ( $\alpha$ ) in der zu (15) analogen Form

$$V_{\alpha\beta}^{(e)} = - q_{\alpha\beta} e_\beta \quad (20)$$

darstellen. Die Koeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  heißen die *elektrostatischen Induktionskoeffizienten* des betrachteten Systems; die elektrostatischen Selbstinduktionskoeffizienten  $q_{\alpha\alpha}$  sind dabei einfach die zu den entsprechenden Kapazitäten  $K_\alpha$  reziproke Größen ( $q_{\alpha\alpha} = \frac{1}{K_\alpha}$ ).

Bei der Berücksichtigung der elektrostatischen und der elektromagnetischen Induktion bekommt man also statt (15a) und (15b) die folgenden allgemeineren Gleichungen

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \sum_{\beta=1}^n \left( q_{\alpha\beta} e_\beta + \frac{1}{c} L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} \right) + R_\alpha J_\alpha &= V_\alpha^a \\ \sum_{\beta=1}^n \left( \frac{L_{\alpha\beta}}{c^2} \frac{d^2 e_\beta}{dt^2} + q_{\alpha\beta} e_\beta \right) + \frac{R_\alpha}{c} \frac{d e_\alpha}{dt} &= V_\alpha^a, \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

die in dem Fall von zwei Stromkreisen, deren Schwingungen durch die in einem von ihnen wirkende harmonische Kraft erzeugt werden, sich auf die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{i\omega}{c} L_{11} + \frac{c}{i\omega} K_{11} + R_1 \right) J_1 + \left( \frac{i\omega}{c} L_{12} + \frac{c}{i\omega} q_{12} \right) J_2 &= 0, \\ \left( \frac{i\omega}{c} L_{21} + \frac{c}{i\omega} q_{21} \right) J_1 + \left( \frac{i\omega}{c} L_{22} + \frac{c}{i\omega} K_2 + R_2 \right) J_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20b)$$

reduzieren.

Wir werden diese Gleichungen nicht näher untersuchen und wollen uns mit der Bemerkung begnügen, daß bei harmonischen Schwingungen die elektrostatische Koppelung mit der elektromagnetischen vollkommen äquivalent ist: man kann nämlich statt einer durch  $q_{12}$  bestimmten elektrostatischen Koppelung eine elektromagnetische Koppelung mit dem Induktionskoeffizienten

$$L_{12} = - \frac{c^2}{\omega^2} q_{12} \quad (20c)$$

eingeführen, ohne daß dadurch irgend etwas verändert wird. Bei

$$L_{12} = + \frac{c^2}{\omega^2} q_{12} \tag{20d}$$

bekommt man im Gegenteil eine gegenseitige *Kompensation* der beiden Koppelungstypen, so daß in diesem Fall die Stromkreise in derselben Weise schwingen, als ob sie ganz ungekoppelt wären<sup>1)</sup>.

Die Koeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  und  $q_{\beta\alpha}$  müssen dabei ebenso wie die entsprechenden elektromagnetischen Induktionskoeffizienten, einander gleich sein. Die Produkte  $q_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta$  und  $q_{\beta\alpha} e_\beta e_\alpha$  stellen in der Tat eine und dieselbe Größe dar — und zwar die gegenseitige elektrostatische Energie der Stromkreise  $\alpha$  und  $\beta$  (siehe unten).

Neben den oben betrachteten induktiven oder *dynamischen* Koppelungen zwischen verschiedenen Stromkreisen kann es noch eine dritte *geometrische* oder „galvanische“ Koppelung geben, die darin besteht, daß die betreffenden Stromkreise *einen gemeinsamen Teil* haben (Abb. 41). Dadurch wird die zusätzliche Bedingung eingeführt, daß der im letzteren fließende Strom der algebraischen Summe der Einzelströme gleich sein muß — oder, mit anderen Worten, die algebraische Summe der an jedem Verzweigungspunkt zufließenden Ströme verschwindet (*Kirchhoffsche Regel*).

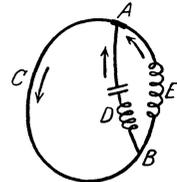


Abb. 41.

Die Einteilung des ganzen *Stromnetzes* in einzelne Kreise ist nicht eindeutig, d. h. kann auf verschiedene Weisen durchgeführt werden. Z. B. kann man sich vorstellen, daß das in der Abb. 41 gezeichnete System aus zwei Stromkreisen *ACBDA* und *BEACB* besteht mit dem gemeinsamen Anteil *ACB* oder aus den Stromkreisen *ACBDA* und *ADBEA* mit dem gemeinsamen Anteil *ADB* oder schließlich aus *ACBEA* und *ADBEA* mit dem gemeinsamen Anteil *AEB*. — Infolgedessen ist es zweckmäßig gar keine Einteilung des Stromnetzes in geschlossene oder fast geschlossene Stromkreise zu unternehmen, sondern jedes unverzweigte Stück einzeln zu betrachten unter Berücksichtigung der Bedingung

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{(s)} J_\alpha = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m) \tag{21}$$

für die verschiedenen Verzweigungspunkte. Es bedeuten hier die Koeffizienten  $\lambda_\alpha^{(s)} + 1$ , wenn der Strom ( $\alpha$ ) zum betrachteten Verzweigungspunkt ( $s$ ) fließt,  $-1$  wenn er die entgegengesetzte Richtung hat und Null, wenn er diesen Punkt überhaupt nicht trifft.

Es könnte zunächst scheinen, daß die Bestimmung der Stromstärken  $J_\alpha$  oder der Ladungen  $e_\alpha$  für die Einzelstücke des Stromnetzes nach den früheren Gleichungen geschehen soll. Das ist aber nicht der

<sup>1)</sup> Eine solche Kompensation ist offenbar nicht immer möglich.

Fall, wie man schon aus dem Umstand einsehen kann, daß die Anzahl  $n + m$  der Gleichungen [(20a) und (21)] dabei größer als die Anzahl der Unbekannten ( $n$ ) sein würde.

Dies erklärt sich dadurch, daß die in (20a) auftretenden äußeren und elektrostatischen Kräfte (Spannungen) nur für geschlossene oder fast geschlossene Stromkreise einen bestimmten Sinn haben. Es bedeutet z. B.  $q_{11}e_1$  die vollständige elektrostatische Spannung, die von dem in dem ersten Stromstück eingeschalteten Kondensator (oder Kondensatoren) herrührt. Welcher Teil dieser Spannung auf dem betreffenden Stück ( $\alpha$ ) selbst zukommt, bleibt dabei vollkommen unbestimmt.

Die in ( $\alpha$ ) tatsächlich wirkende Spannung  $V'_\alpha$  ist also im allgemeinen von dem Ausdruck

$$V_\alpha = V_\alpha^a + V_\alpha^i = V_\alpha^a - \sum_{\beta=1}^n \left( q_{\alpha\beta} e_\beta + \frac{1}{c} L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} \right)$$

verschieden. Man kann zeigen, daß die Differenz  $V'_\alpha - V_\alpha$  die Gestalt

$$V'_\alpha - V_\alpha = \sum_{s=1}^m \lambda_\alpha^{(s)} M_s$$

haben muß, wo  $M_s$  zunächst unbestimmte Multiplikatoren bedeuten. Es gilt also, wegen  $V'_\alpha = R_\alpha J_\alpha$ :

$$\sum_{\beta=1}^n \left( q_{\alpha\beta} e_\beta - \frac{1}{c} L_{\alpha\beta} \frac{dJ_\beta}{dt} \right) + R_\alpha J_\alpha = V_\alpha^a + \sum_{s=1}^m \lambda_\alpha^{(s)} M_s. \quad (21a)$$

Aus diesen Gleichungen, welche die Verallgemeinerung von (20a) darstellen, können in Verknüpfung mit den Bedingungen (21) oder den äquivalenten Bedingungen

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{(s)} e_\alpha = 0 \quad (21b)$$

die  $n + m$  Unbekannten  $J_1, \dots, J_n, M_1, \dots, M_m$  eindeutig bestimmt werden.

### 3. Anwendung auf Stromnetze des allgemeinen Hamiltonschen Variationsprinzips.

Der Beweis von (21a) läßt sich am einfachsten erbringen, wenn man das Problem der Strom- und Ladungsverteilung im betrachteten System in der Gestalt eines *Variationsprinzips* formuliert. Dieses Variationsprinzip haben wir schon im ersten Bande eingeführt, und zwar in zwei verschiedenen Formen, je nachdem es sich von der Bestimmung des elektromagnetischen Feldes bei gegebener Ladungs- und Stromverteilung oder von der Bewegung der Elektronen in einem gegebenen äußeren Feld handelte. Das hier betrachtete Problem entspricht der letzteren

mechanischen Form des Variationsprinzips. Wir haben nämlich gesehen, daß die Bewegungsgleichungen eines Elektrons sich aus der Variationsgleichung

$$\delta \int L dt = 0 \tag{22}$$

ergeben, wenn man die *Lagrangesche* Funktion  $L$  nach der Formel

$$L = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathfrak{A} - e \varphi$$

definiert (Bd. I, S. 328 und 330)<sup>1)</sup>.

Sofern die elektromagnetischen Wechselwirkungen *als momentan* behandelt werden, läßt sich die Bewegung eines beliebigen *Systems von Elektronen* auf Grund derselben Variationsgleichung (22) bestimmen mit dem folgenden Ansatz für die Lagrangesche Funktion

$$L = Q + T - U, \tag{22a}$$

$$\left. \begin{aligned} Q &= \sum \frac{1}{2} m_0 v^2, \\ T &= \frac{1}{2} \sum \frac{e \mathbf{v}}{c} \cdot \mathfrak{A} = \sum \frac{e \mathbf{v} \cdot e' \mathbf{v}'}{c^2 r}, \\ U &= \frac{1}{2} \sum e \varphi = \sum \frac{e e'}{r}. \end{aligned} \right\} \tag{22b}$$

Es bedeuten hier  $Q$  die kinetische Energie der Elektronen im gewöhnlichen, rein mechanischen Sinne,  $T$  — ihre gegenseitige kinetische Energie und  $U$  die gegenseitige potentielle Energie. Vom Standpunkte der makroskopischen elektromagnetischen Theorie ist  $Q$  im Falle ruhender Körper als die Quelle der Wärmeenergie anzusehen,  $T$  als die magnetische und  $U$  als die elektrische oder eher elektrostatische Energie des betreffenden Systems (dies bezieht sich selbstverständlich nur auf die von uns hier betrachtete Näherung).

In dem Fall eines Systems von linearen gekoppelten elektrischen Strömen läßt sich  $T$  bei Fehlen äußerer Kräfte nach den Formeln (10) und (14a) des VII. Kapitels des I. Bandes (S. 195 und 199) in der Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} L_{\alpha\beta} J_{\alpha} J_{\beta} \tag{23}$$

darstellen. In ähnlicher Weise ergibt sich für  $U$  der Ausdruck

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} q_{\alpha\beta} e_{\alpha} e_{\beta} \tag{23a}$$

[vgl. (10a) § 1]. Was die Wärmeenergie anbetrifft, so brauchen wir nicht ihren vollständigen Wert zu kennen, sondern nur die pro Zeiteinheit entwickelte Wärme

$$-\frac{dQ}{dt} = c \sum_{\alpha} R_{\alpha} J_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} R_{\alpha} J_{\alpha} \frac{d e_{\alpha}}{dt}. \tag{23b}$$

<sup>1)</sup> Wir beschränken uns auf den Fall kleiner Geschwindigkeiten.

Die *Langrangesche* Funktion hat also die Gestalt:

$$L = L(e_1, e_2, \dots, e_n; \dot{e}_1, \dot{e}_2, \dots, \dot{e}_n) \quad \left( \dot{e}_\alpha = \frac{de_\alpha}{dt} = c J_\alpha \right),$$

d. h. sie ist eine Funktion der Ladungen  $e_\alpha$ , welche die Rolle von Lagekoordinaten eines gewöhnlichen mechanischen Systems spielen, und der entsprechenden „Geschwindigkeiten“  $\frac{de_\alpha}{dt}$ . Sie muß außerdem vermöge der Koeffizienten  $L_{\alpha\beta}$  und  $q_{\alpha\beta}$  auch die gewöhnlichen Lagekoordinaten der verschiedenen Stromkreise oder ihrer Elemente enthalten. Diese Lagekoordinaten ( $x_1, x_2 \dots$ ) kommen aber nur dann in Betracht, wenn diese Stromkreise beweglich sind — was wir zunächst nicht voraussetzen wollen.

Die Ableitung der „elektrischen Bewegungsgleichungen“ für die Ladungen  $e_\alpha$  aus dem *Hamiltonschen* Variationsprinzip (20) geschieht in derselben Weise wie in dem im ersten Band betrachteten Falle eines einzigen Elektrons. Der Hauptwert dieser Ableitung liegt aber gerade in dem Umstand, daß die Nebenbedingungen (21) oder (21 b) die Lösung des Problems gar nicht erschweren.

Diese Bedingungen lassen sich in zwei verschiedenen Weisen berücksichtigen. *Erstens* kann man zunächst bei Ausführung der Variation die Ladungen  $e_\alpha$  als voneinander unabhängige Größen behandeln. Man bekommt dabei:

$$\delta L = \delta Q + \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} \delta \dot{e}_\alpha - \frac{\partial U}{\partial e_\alpha} \delta e_\alpha \right) \tag{24}$$

mit

$$\delta Q = - \sum R_\alpha J_\alpha \delta e_\alpha, \tag{24a}$$

und ferner wegen  $\delta \dot{e}_\alpha = \frac{d}{dt} \delta e_\alpha$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} \delta \dot{e}_\alpha = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} \delta e_\alpha \right) - \delta e_\alpha \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha}.$$

Es wird also:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \left[ \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} \delta e_\alpha \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial e_\alpha} + R_\alpha J_\alpha \right) \delta e_\alpha dt = 0.$$

Die Variationen  $\delta e_\alpha$  sind miteinander nach (21 b) durch die Beziehungen

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{(s)} \delta e_\alpha = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, m) \tag{24b}$$

verknüpft und müssen an den Grenzen des Integrals, d. h. für  $t = t_0$  und  $t = t_1$  verschwinden; abgesehen von diesen Bedingungen sind sie ganz willkürliche infinitesimale Größen. Daraus folgt nach der be-

kannten Multiplikatormethode von *Lagrange* [vgl. die Ableitung von (15) auf S. 329, Bd. I]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{e}_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial e_\alpha} + R_\alpha J_\alpha = \sum_{s=1}^m \lambda_s^i M_s. \quad (24c)$$

Das sind aber gerade die Gleichungen (21a) bei Fehlen irgendwelcher äußerer Kräfte. Die letzteren können in der angeführten Ableitung einfach dadurch berücksichtigt werden, daß man neben  $\delta T$  und  $-\delta U$  ihre Arbeit

$$\delta L_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n V_\alpha^a \delta e_\alpha \quad (24d)$$

im Ausdruck (24) für  $\delta L$  hinzufügt.

*Zweitens* kann man die Bedingungen (21b) vor der Ausführung der Variation berücksichtigen durch Einführung von  $n - m$  unabhängigen Variablen  $e'_1, \dots, e'_{n-m}$  und die  $n$  Ladungen  $e_1, \dots, e_n$  als Funktionen dieser verallgemeinerten („Lagrangeschen“) Koordinaten darstellen. Wir setzen also

$$e_\alpha = f_\alpha(e'_1 \dots e'_{n-m}) \quad (\alpha = 1, 2 \dots n) \quad (25)$$

derart, daß die Bedingungen (21b) identisch erfüllt seien (sonst können die Funktionen  $f_s$  ganz beliebig sein), drücken die Größe

$$L_i = T - U$$

(eigentliche Lagrangesche Funktion) als Funktion dieser neuen elektrischen Koordinaten und der entsprechenden Geschwindigkeiten

$$\dot{e}'_\beta = \frac{d e'_\beta}{dt} \text{ aus, und setzen schließlich mit Rücksicht auf die Formeln}$$

$$\frac{d e_\alpha}{dt} = \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\beta} \frac{d e'_\beta}{dt} \text{ und } \delta e_\alpha = \sum \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\beta} \delta e'_\beta :$$

$$-\delta Q = \sum_\beta \sum_\gamma R_{\beta\gamma} J'_\gamma \delta e'_\beta \left( J'_\gamma = \frac{1}{c} \dot{e}'_\gamma, \quad R_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha=1}^n R_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\beta} \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\gamma} \right), \quad (25a)$$

$$\delta L_\alpha = \sum V_\beta^{(a)} d e'_\beta \quad \left( V_\beta^{(a)} = \sum_{\alpha=1}^n V_\alpha^a \frac{\partial f_\alpha}{\partial e'_\beta} \right). \quad (25b)$$

Die Ausführung der Variation ergibt in diesem Fall

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_i}{\partial \dot{e}'_\beta} - \frac{\partial L_i}{\partial e'_\beta} + \sum_{\gamma=1}^{n-m} R_{\beta\gamma} J'_\gamma = V_\beta^{(a)}. \quad (25c)$$

Wenn die Funktionen (25) linear sind, so sind es die letzten Gleichungen ebenfalls. Durch solche Gleichungen kann man insbesondere die elektrischen Schwingungen bestimmen, die in den verschiedenen Systemen von geschlossenen (oder fast geschlossenen) Stromkreisen, in welche das betrachtete Stromnetz zerlegt werden kann, stattfinden; die Anzahl

solcher Stromkreise ist offenbar gerade gleich  $n - m$ , d. h. der Anzahl der Gleichungen (25c).

Die ursprünglichen Gleichungen (21a) lassen eine Reihe interessanter Interpretationen zu, betreffs der Verteilung des elektrischen Stromes zwischen den Einzelstücken des betrachteten Stromnetzes. In dem einfachsten Fall von stationärer Strömung nehmen sie die Gestalt

$$R_\alpha J_\alpha = V_\alpha^a + \sum \lambda_\alpha^{(s)} M_s$$

an und drücken die Tatsache aus, daß die Stromverteilung einem *Minimum der Wärmeerzeugung* im Netze ( $\sum R_\alpha J_\alpha^2$ ) bei gegebener Arbeit der äußeren Kräfte pro Zeiteinheit ( $\sum V_\alpha^a J_\alpha$ ) entspricht. Sucht man in der Tat das Minimum der Funktion  $\sum R_\alpha J_\alpha^2$  bei den Bedingungen (21) und der zusätzlichen Bedingung  $\sum V_\alpha^a J_\alpha = \text{konst.}$ , so erhält man das vorhergehende Gleichungssystem.

Bei sehr schnellen Eigenschwingungen des Netzes reduziert sich (24c) näherungsweise auf

$$\frac{i\omega}{c} \frac{\partial T}{\partial J_\alpha} \cong \sum \lambda_\alpha^s M_s.$$

Es entspricht also in diesem Fall die Verteilung des Stromes einem *Minimum der kinetischen (magnetischen) Energie*.

Zur Erläuterung der obigen Resultate wollen wir sie auf dem in der Abb. 41 dargestellten einfachsten Stromnetz anwenden. Die Stromstärken in  $ACB$ ,  $ADB$  und  $AEB$  seien  $J$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ; die positive Richtung der zwei letzteren sei von  $B$  nach  $A$ , so daß man einfach von einer Verzweigung des Stromes  $J$  in  $J_1$  und  $J_2$  reden kann. Die Bedingungen (21) für die Punkte  $A$  und  $B$  reduzieren sich dabei auf

$$J = J_1 + J_2. \quad (26)$$

Der Einfachheit wegen setzen wir den Strom  $J$  als bekannt voraus, schließen irgendwelche Kondensatoren aus und vernachlässigen die elektromagnetische Koppelung von (1) und (2) mit  $ACD$ . Dann lauten die Gleichungen (21a) mit  $J = J_0 e^{i\omega t}$  und  $V_1^a = V_2^a = 0$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{i\omega}{c} L_{11} + R_1\right) J_1 + \frac{i\omega}{c} L_{12} J_2 &= M, \\ \frac{i\omega}{c} L_{12} J_1 + \left(\frac{i\omega}{c} L_{22} + R_2\right) J_2 &= M. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen voneinander erhält man mit Rücksicht auf (26):

$$J_1 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} J, \quad J_2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2} J, \quad (26a)$$

wo zur Abkürzung

$$\varrho_1 = R_1 + \frac{i\omega}{c} (L_{11} - L_{12}), \quad \varrho_2 = R_2 + \frac{i\omega}{c} (L_{22} - L_{12}) \quad (26b)$$

gesetzt ist. Bei  $\omega = 0$  verteilt sich der Strom  $J$  in (1) und (2) umgekehrt proportional zu den entsprechenden Widerständen, und dies ist gerade die Bedingung des Minimums von  $R_1 J_1^2 + R_2 J_2^2$  bei  $J_1 + J_2 = J$  und festgehaltenem  $J$ . Bei sehr hohen Schwingungsfrequenzen und schwachen Koppelungen sind die Stromstärken umgekehrt proportional zu den Selbstinduktionskoeffizienten. Ist aber die Differenz  $L_{22} - L_{12}$  klein, so kann  $|J_2|$  viel größer nicht nur als  $|J_1|$ , sondern auch als  $|J|$  ausfallen.

#### 4. Mechanische Kräfte zwischen Wechselströmen; bewegte Stromleiter; Dynamomaschinen.

Wenn wir in dem allgemeinen Ausdruck der Lagrangeschen Funktion  $L$  (oder  $L_i$ ) neben den „elektrischen“ Koordinaten und Geschwindigkeiten auch die gewöhnlichen „mechanischen“ Koordinaten  $x_1, x_2 \dots$  und Geschwindigkeiten  $y_1 = \dot{x}_1, y_2 = \dot{x}_2, \dots$  berücksichtigen, so bekommen wir neben den elektrischen Bewegungsgleichungen (25c) die vollkommen analogen mechanischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = F_\alpha^a, \quad (27)$$

wo  $F_\alpha^a$  die der Koordinate  $x_\alpha$  entsprechende verallgemeinerte äußere Kraft bedeutet. Die letztere ist durch die Bedingung definiert, daß das Produkt  $F_\alpha^a \cdot \delta x_\alpha$  gleich der bei der infinitesimalen Änderung von  $x_\alpha$  durch die gewöhnlichen äußeren Kräfte geleistete Arbeit ist (wobei die eventuell vorhandenen Reibungskräfte ebenfalls als äußere gerechnet werden). Die Koordinaten  $x$  treten im Ausdruck von  $L$  nicht explizite auf, sondern vermöge der gegenseitigen Induktionskoeffizienten  $L_{\alpha\beta}$  und  $q_{\alpha\beta}$ ; den Geschwindigkeiten  $\dot{x}$  entspricht ein zusätzliches rein mechanisches Glied in  $L$ , das einfach die gewöhnliche kinetische Energie des betrachteten Systems ausdrückt.

Wir haben bisher angenommen, daß das letztere in Ruhe bleibt. Dann reduziert sich (27) auf

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha} (T - U) + F_\alpha^{(a)} = 0, \quad (27a)$$

wobei das erste Glied die der Koordinaten  $x_\alpha$  entsprechende *innere Kraft*  $F_\alpha^{(i)}$  ausdrückt. Bei der Differentiation nach  $x_\alpha$  müssen alle übrigen mechanischen und elektrischen Koordinaten festgehalten werden.

Will man nicht die augenblickliche, sondern die *mittlere* Kraft berechnen, die zwischen zwei harmonisch schwingenden induktiv gekoppelten Stromkreisen wirkt, so muß man den zeitlichen Mittelwert von  $T - U$  differenzieren. Wir betrachten z. B. den Fall von elektromagnetischer Koppelung, setzen also  $U = 0$  und  $T = L_{\alpha\beta} J_\alpha J_\beta$ . Die mittlere Kraft,

die ( $\alpha$ ) seitens ( $\beta$ ) erfährt, ist gleich (wenn man  $J_\alpha$  und  $J_\beta$  als komplexe Größen behandelt)

$$F_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} R(J_\alpha J_\beta^*) \cdot \frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = -\bar{F}_{\beta\alpha}^i. \quad (27b)$$

Es ist interessant, an dieser Stelle den folgenden Umstand zu beachten. Wir haben ursprünglich die magnetische Energie als *potentielle* Energie eingeführt und für die gegenseitige Energie von zwei linearen Strömen den Ausdruck  $U_m = -J_\alpha \int H_{\beta n_\alpha} dS_\alpha = -L_{\alpha\beta} J_\alpha J_\beta$  gefunden. Später haben wir gezeigt, daß, wenn man neben den transversalen (pondermotorischen) Kräften auch die longitudinalen (elektromotorischen) in Betracht zieht, die magnetische Energie als *kinetische* behandelt werden muß und sich von derselben Größe und dem entgegengesetzten Vorzeichen, als die „potentielle“ erweist. Die Formel (27a) zeigt, daß sofern es die pondermotorischen Kräfte anbetrifft, die beiden Deutungen der magnetischen Energie vollkommen äquivalent sind: man bekommt für diese Kräfte denselben Ausdruck mit dem Ansatz  $T = L_{\alpha\beta} J_\alpha J_\beta$ ,  $U = 0$  wie mit  $T = 0$ ,  $U = -L_{\alpha\beta} J_\alpha J_\beta$ .

Bei der Bestimmung der elektromotorischen Kräfte ist es aber sinnlos, die magnetische Energie als potentielle anzusehen, denn sie hängt von den elektrischen Koordinaten ( $e_\alpha$ ) gar nicht ab und als eine quadratische Funktion der zugehörigen Geschwindigkeiten ( $\dot{e}_\alpha$ ) erscheint.

Wir haben im I. Band die Formel (27b) ausschließlich auf *stationäre* Ströme angewandt. Wir wollen sie jetzt auf den oben betrachteten Fall anwenden, daß der Strom in  $\alpha$  durch die erzwungenen Schwingungen in  $\beta$  induziert wird ( $\beta = 1$  entspricht also dem primären und  $\alpha = 2$  dem sekundären Stromkreis). Es wird dabei nach der zweiten Formel (16b), wenn wir den Widerstand  $R_2$  vernachlässigen (um den maximalen Effekt zu bekommen):

$$J_2 = -\frac{L_{12}}{L_{22}} J_1,$$

und folglich nach (27b)

$$F_{21}^i = -\frac{1}{2} |J_1|^2 \frac{1}{L_{22}} \frac{\partial(L_{12}^2)}{\partial x_2},$$

oder

$$\bar{F}_{21}^i = -T_{11} \frac{\partial(k^2)}{\partial x_2}, \quad (27c)$$

wo  $T_{11} = \frac{1}{2} L_{11} |J_1|^2$  die eigene kinetische Energie des primären Stromkreises und  $k^2$  der Koppelungskoeffizient ist. Die Selbstinduktionskoeffizienten  $L_{11}$  und  $L_{22}$  sind gegenüber der Koordinate  $x_2$ , welche die *relative* Lage von 1 und 2 charakterisiert, als konstant anzusehen.

Wir nehmen z. B. an, daß  $x_2$  den Abstand zwischen 1 und 2 bedeutet. Dann muß der Koppelungskoeffizient unabhängig von ihrer relativen

Orientierung mit Vergrößerung von  $x_2$  stets abnehmen. Es wird also  $\overline{F_{21}^{(4)}} > 0$  — was einer gegenseitigen *Abstoßung* der beiden Stromkreise entspricht. Die Formel (27c) ist in der Tat ihrem Wesen nach ganz analog den in Kap. III, § 2 betrachteten Formeln für die *diamagnetischen* Wirkungen.

Wir stellen uns nun vor, daß der zweite Stromkreis oder die „sekundäre Spule“ sich unter der Wirkung einer gegebenen äußeren Kraft irgendwie *bewegt*, z. B. sich um eine bestimmte festgehaltene Achse dreht — wie dies in den Dynamomaschinen (und Elektromotoren) tatsächlich der Fall ist. Der induzierte Strom  $J_2$  ist in diesem Fall nach der Gleichung

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} (L_{12} J_1) + \frac{L_{22}}{c} \frac{dJ_2}{dt} + R_2 J_2 = 0$$

oder

$$\frac{1}{c} L_{12} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{c} L_{22} \frac{dJ_2}{dt} + R_2 J_2 = -\frac{1}{c} J_1 \frac{dL_{12}}{dt} \quad (28)$$

zu bestimmen. Diese Gleichung läßt sich in das allgemeine Schema der „elektrischen Bewegungsgleichungen“ (21a) oder (25c) einfügen, wenn man die Größe

$$V = -\frac{1}{c} J_1 \frac{dL_{12}}{dt},$$

d. h. die durch die Bewegung bedingte induzierte Spannung als äußere elektromotorische Kraft behandelt. In dem betrachteten Fall kann man setzen

$$V = -\frac{1}{c} J_1 \frac{\partial L_{12}}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{dt}, \quad (28a)$$

wo  $\Theta = x_2$  den Umdrehungswinkel der sekundären Spule bedeutet. Führt man noch ihre gewöhnliche mechanische Energie  $T_{\text{mech}} = \frac{1}{2} A \left( \frac{d\Theta}{dt} \right)^2$  ( $A$  = Trägheitsmoment um die Achse) ein und bezeichnet mit  $F$  das Moment der äußeren Drehkräfte, so findet man nach (27) mit  $L = T + T_{\text{mech}} = \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 + \frac{1}{2} A \Theta^2$ :

$$A \frac{d^2 \Theta}{dt^2} - J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \Theta} = F. \quad (28b)$$

Wenn man den Widerstand der sekundären Spule vernachlässigen kann, so ergibt sich wie früher:

$$J_2 = -\frac{L_{12}}{L_{11}} J_1,$$

und folglich nach (28b)

$$A \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + T_{11} \frac{\partial(\dot{\Theta}^2)}{\partial \Theta} = F. \quad \left( T_{11} = \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 \right)$$

Dieser Fall bietet aber kein praktisches Interesse, denn die Dynamo-

maschinen sind immer „belastet“, d. h. sie besitzen einen Widerstand im sekundären Stromkreise. Vernachlässigt man das zweite Glied auf der linken Seite von (28) gegen das dritte, so ergibt sich einfach

$$J_2 = - \frac{J_1}{c R_2} \frac{\partial L_{12}}{\partial \Theta} \dot{\Theta} \quad (28c)$$

Man hat ferner nach (28b)

$$A \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{J_1^2}{c R_2} \left( \frac{\partial L_{12}}{\partial \Theta} \right)^2 \cdot \dot{\Theta} = F.$$

Im quasistationären Zustand bekommt man eine fast gleichförmige Drehung des „Rotors“ (d. h. der sekundären Spule) mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\Theta} \cong \frac{c R_2 F}{J_1^2 \left( \frac{\partial L_{12}}{\partial \Theta} \right)^2}. \quad (28d)$$

Gewöhnlich wird der primäre Strom tatsächlich durch den sekundären erzeugt (Dynamomaschinen mit Selbsterregung), und zwar in der Weise, daß er immer *dieselbe Richtung* und eine zum Absolutwert des sekundären Stromes proportionale Größe hat (dies wird durch automatische Kommutierung des letzteren erreicht). Setzt man z. B.  $J_1 = |J_2|$  und  $L_{12} = L_0 \cos n\Theta$  ein, so wird nach (28c):

$$J_2 = |J_2| \frac{L_0}{c R_2} \sin n\Theta \cdot n\dot{\Theta}, \quad \text{d. h.} \quad |J_2^2| = \frac{L_0^2}{c^2 R_2^2} |J_2|^2 \sin^2 n\Theta \cdot (n\dot{\Theta})^2,$$

und ferner nach (28d):

$$\dot{\Theta} \cdot |J_2|^2 \sin^2 n\Theta \frac{n^2 L_0^2}{c R_2} \cong F.$$

Man bekommt also in diesem Fall wegen  $|J_2^2| = |J_2|^2$  und  $\overline{\sin^2 n\Theta} = \frac{1}{2}$  einen Wechselstrom von der (mittleren) Frequenz

$$\omega \cong n\dot{\Theta} \cong \frac{\sqrt{2} c R_2}{L_0},$$

die von der äußeren Drehkraft unabhängig ist, und mit der Stärke

$$|J_2| \cong \sqrt{\frac{F}{n L_0}}.$$

#### § 4. Theorie der Induktionsströme in körperlichen (dreidimensionalen) und plattenförmigen Leitern.

##### 1. Angenäherte Methode der Bestimmung der Induktionsströme.

Eine angenäherte Theorie der Eigenschwingungen von drei- oder zweidimensionalen Leitern läßt sich konsequent nicht aufbauen, denn in diesem Fall sollte die zeitliche Änderung der elektrostatischen

Größen nicht nur in gewissen Ausnahmestellen, wie den Unterbrechungsstellen von fast geschlossenen linearen Leitern, sondern *im ganzen Körper* berücksichtigt werden. Wir müssen uns deshalb bei räumlich ausgedehnten Körpern auf *erzwungene* Schwingungen oder Ströme beschränken. Den allgemeinen Fall eines primären elektromagnetischen Feldes mit einem schnell schwingenden elektrostatischen Anteil ( $\varphi^0$ ) wollen wir dabei außer acht lassen und nur die folgenden zwei Extremfälle betrachten: eines *quasistatischen* elektrischen Feldes  $\mathfrak{E}^0 = -\nabla \varphi^0$ , oder des durch die zeitliche Änderung eines gegebenen primären magnetischen Feldes  $\mathfrak{H}^0 = \text{rot } \mathfrak{A}^0$  *induzierten* elektrischen Feldes  $\mathfrak{E}^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}^0}{\partial t}$ .

Im ersten Fall muß das sekundäre elektrische Feld  $\mathfrak{E}'$  ebenfalls statisch oder quasistatisch sein ( $\frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t} \approx 0$ ). Im zweiten Fall muß es im allgemeinen neben einem „kinetischen“ Anteil  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t}$  noch einen statischen  $-\nabla \varphi'$  enthalten. Es gibt aber eine Reihe von Erscheinungen, wo das letztere verschwindet. In diesem Paragraphen werden wir hauptsächlich einige dieser Erscheinungen betrachten.

Wir stellen uns einen isolierten Metalleiter vor, der sich in einem gegebenen primären Feld  $\mathfrak{A}^0$  befindet. Zur Bestimmung des sekundären Feldes  $\mathfrak{A}'$  und der resultierenden Stromverteilung kann man die folgende Näherungsmethode benutzen<sup>1)</sup>. Man vernachlässigt in erster Näherung den Einfluß des sekundären Feldes auf die gesuchte Stromverteilung (d. h. die Selbstinduktion des Körpers) und berechnet die Stromdichte nach der Formel

$$\mathbf{j}^{(1)} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E}^0 = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{A}^0}{\partial t}. \quad (29)$$

Da innerhalb des Körpers  $\nabla^2 \mathfrak{A}^0 = 0$  sein muß, so hat man ferner

$$\nabla^2 \mathfrak{A}^{(1)} = -4\pi \mathbf{j}^{(1)},$$

d. h.

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \int \frac{\mathbf{j}^{(1)} dV}{R} = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathfrak{A}^0}{R} dV. \quad (29a)$$

Wenn die Körperoberfläche ungeladen bleibt, ist das sekundäre Feld durch die letzte Formel in erster Annäherung bestimmt. Im allgemeinen muß man aber noch die sich auf dieser Oberfläche bildende Ladung berücksichtigen. Die letzte wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = c j_n$$

<sup>1)</sup> Vgl. die Methode, welche in Kap. V, § 7 bei der Behandlung der Beugungsprobleme angewandt worden ist.

bestimmt, also in der betrachteten Näherung durch

$$\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{A}_n^0}{\partial t},$$

d. h.

$$\eta^{(1)} = -\frac{\sigma}{c} \mathfrak{A}_n^0, \quad (29b)$$

wenn man für  $t = 0$   $\mathfrak{A}^0 = 0$  setzt. Daraus bekommen wir nach der Formel

$$\varphi^{(1)} = \int \frac{\eta^{(1)}}{R} dS = -\frac{\sigma}{c} \int \frac{\mathfrak{A}_n^0}{R} dS \quad (29c)$$

das zugehörige skalare Potential des sekundären Feldes. Ist das letzte in erster Näherung bestimmt, so kann man mittels der Formel

$$\mathfrak{j}^{(2)} = \frac{\sigma}{c} (\mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}^{(1)}) \quad (29d)$$

die Stromverteilung in zweiter Näherung ermitteln usw. In dem Fall eines harmonisch schwingenden äußeren Feldes ( $\mathfrak{A}^0 \sim e^{i\omega t}$ ) läßt sich  $\varphi'$  sofort aus  $\mathfrak{A}'$  nach der schon vielfach benutzten Beziehung

$$\frac{i\varepsilon\mu\omega\varphi'}{c} + \operatorname{div} \mathfrak{A}' = 0$$

bestimmen.

## 2. Axiales (meridionales) magnetisches Wechselfeld.

Wir wollen uns im folgenden auf den Fall beschränken, daß  $\varphi' = 0$  ist, d. h. daß die *Körperoberfläche ungeladen bleibt*. Diese Bedingung ist z. B. immer dann erfüllt, wenn der betrachtete Leiter und das primäre Feld eine Rotationssymmetrie um dieselbe Achse besitzen, wobei die  $A^0$ -Linien parallele Kreise sind. Dann müssen auch die elektrischen Kraftlinien des primären und des sekundären Feldes dieselbe Gestalt haben, während die magnetischen Kraftlinien in Meridianebenen verlaufen. Es sei bemerkt, daß bei der Betrachtung der Eigenschwingungen in rotationssymmetrischen Leitern (Kap. V) das elektrische Feld als meridional und das magnetische als lateral vorausgesetzt wurden. Bei der jetzt betrachteten Symmetrie vom komplementären Typus sind irgendwelche Eigenschwingungen unmöglich, denn die elektrischen Kraftlinien verlaufen parallel zur Körperoberfläche und können keine Flächenladungen erzeugen.

Wir stellen uns z. B. vor, daß das primäre Feld durch einen praktisch unendlich langen geradlinigen Solenoid erzeugt wird, der einen zylindrischen ebenfalls unendlichen Metallkern mit kreisförmigem Querschnitt enthält. Dann ist das primäre magnetische Feld homogen und das sekundäre Feld muß außerhalb des Zylinders verschwinden. Die im letzteren induzierten Kreisströme erzeugen nämlich ein Feld

derselben Art, wie eine Anzahl coaxialer Solenoide, die bekanntlich kein Feld im Außenraum geben.

Das resultierende Feld läßt sich in diesem Fall am einfachsten durch Integration der sich aus (4b) ergebenden Differentialgleichung

$$\nabla^2 H = \frac{4\pi\sigma\mu i\omega}{c^2} H \quad (H = H_z, H_\alpha = H_r = 0) \quad (30)$$

ermitteln mit der Bedingung  $H = H^0$  für  $r \geq a$  ( $a$  Radius des Metallzylinders,  $r$  Abstand von seiner Achse). Wir bekommen also wegen der axialen Symmetrie des betrachteten Feldes

$$\frac{d^2 H}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dH}{d\rho} + H = 0, \quad \left(\rho = kr, \quad k^2 = -\frac{4\pi\sigma i\mu\omega}{c^2}\right). \quad (30a)$$

Diese Gleichung ist äußerlich identisch mit der Gleichung (39b), Kap. V, welche die Verteilung des Vektorpotentials bei Fortschreiten von elektrischen Schwingungen in einem kreisförmigen Draht bestimmt. Dort waren die  $A$ -Linien parallel der Drahtachse und die  $H$ -Linien kreisförmig. Hier ist es gerade umgekehrt. Die Lösung von (30a) mit den oben erwähnten Grenzbedingungen lautet

$$H = H^0 \frac{J(kr)}{J(ka)}. \quad (30b)$$

Für kleine Werte von  $(ka)$  hat man näherungsweise wegen  $J(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \dots$

$$H = H^0 \left[ 1 - i \frac{\mu\sigma\omega}{4c^2} (a^2 - r^2) \right] \quad (30c)$$

und für  $|ka| \gg 1$

$$H = H^0 \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2c^2}} (1+i)(a-r)}. \quad (30d)$$

Die Stromdichte läßt sich daraus nach der Formel  $j = \frac{1}{4\pi\mu} \text{rot } \mathfrak{H}$ , d. h.

$$j = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial r} \quad (j = j_\alpha, H = H_z) \quad (31)$$

berechnen [vgl. die Formel  $H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}$  (47a), Kap. V]. Da die radiale und longitudinale Komponente des Vektorpotentials verschwinden, so hat man ferner nach  $\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}$ , d. h.  $\oint A_r d\sigma = 2\pi r A = \int_0^r H 2\pi r dr$ :

$$H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A) = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r} A \quad (H = H_z, A = A_\alpha). \quad (31a)$$

Es wird also nach (30b) mit Rücksicht auf  $\int \xi J(\xi) d\xi = \xi J_1(\xi)$ :

$$A = \frac{H^0}{k} \frac{J_1(kr)}{J(ka)}. \quad (31b)$$

Diese Formel, ebenso wie (30b), ist nur bei  $r \leq a$  gültig. Außerhalb des Zylinders ( $r > a$ ) ist das Potential  $A$  durch die Gleichung  $\nabla^2 A = 0$  bestimmt in Verknüpfung mit der Bedingung, daß es bei  $r = a$  den Wert  $A_a = \frac{H^0}{k} \frac{J_1(ka)}{J(ka)}$  annimmt und im Unendlichen ( $r = \infty$ ) mit  $A^0$  zusammenfällt. Sein Wert läßt sich wie oben mittels der Formel

$$\oint A_r d\sigma = \int H 2\pi r dr,$$

angewandt auf einen Kreis mit dem Radius  $r > a$  bestimmen. Man bekommt nämlich auf diese Weise

$$rA = \int_0^a H r dr + \int_a^r H^0 r dr,$$

d. h.

$$A = \frac{a}{r} A_a + \frac{1}{2r} H^0 (r^2 - a^2). \tag{31 c}$$

Hier ist

$$\frac{1}{2} H^0 r = A^0 \tag{31 d}$$

nichts anderes als das primäre Potential des homogenen Feldes ( $\mathfrak{A}^0 = \frac{1}{2} \mathfrak{H}^0 \times r$ ,  $\text{rot } \mathfrak{A}^0 = \mathfrak{H}^0$ ). Das sekundäre Potential ist folglich gleich

$$A' = \frac{a}{r} (A_a - A_a^0) \tag{31 e}$$

und das entsprechende induzierte elektrische Feld

$$E' = -\frac{i\omega}{c} A' \quad (E' = E'_a).$$

Es ist bemerkenswert, daß während  $H'$  außerhalb des Zylinders verschwindet,  $E'$  dort von Null verschieden bleibt (man hat also  $\text{rot } \mathfrak{E}' = 0$  für  $r > a$ ). Diese induzierten elektrischen Kräfte bedingen eine scheinbare Vergrößerung des Widerstandes und eine Verringerung des Selbstinduktionskoeffizienten der umgebenden Spule.

Wenn der betrachtete Körper keine zylindrische Gestalt besitzt, so daß die magnetischen Kraftlinien des primären Feldes seine Oberfläche schneiden, muß man zur exakten Bestimmung des sekundären Feldes das am Anfang des § 7, Kap. V skizzierte Verfahren anwenden. Man hat also für das Körperinnere

$$\frac{\partial^2 H'_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H'_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 H'_z}{\partial z^2} + k^2 H'_z = -k^2 H_z^0 \tag{32}$$

mit dem angenäherten Wert (30a) für  $k^2$ ; außerhalb des Körpers wird wegen  $k_0^2 \ll 0$ :

$$\nabla^2 H'_z \equiv \frac{\partial^2 H'_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H'_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 H'_z}{\partial z^2} = 0, \tag{32 a}$$

und schließlich auf seiner Oberfläche:

$$\Delta E_\alpha = 0, \quad \Delta \mathfrak{S}' \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \Delta \frac{\mathfrak{S}'}{\mu} \times \mathbf{n} = -\Delta \frac{\mathfrak{S}^0}{\mu} \times \mathbf{n}. \quad (32b)$$

Bei  $\mu = 1$  (unmagnetischer Körper) fällt das primäre Feld aus den Grenzbedingungen vollkommen weg.

Statt des Vektorpotentials  $A = A_\alpha$  kann man auch ein skalares magnetisches Potential einführen, d. h.  $\mathfrak{S}$  in der Form

$$\mathfrak{S} = -\nabla \varphi_m \quad (33)$$

suchen. Dieses Potential muß offenbar denselben Gleichungen genügen, wie die axiale Komponente der magnetischen Feldstärke  $H_z = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}$ . Es sei bemerkt, daß die letztere mit der elektrischen Feldstärke ( $E = E_\alpha$ ) durch die Gleichung

$$H_z = -\frac{i \omega 1}{c} \frac{\partial}{\partial r} (r E) \quad (33a)$$

verknüpft ist, die sich aus der Gleichung (31a) mit Rücksicht auf die Beziehung  $\mathfrak{E} = -\frac{i \omega}{c} \mathfrak{A}$  ergibt. Für ein homogenes primäres Feld  $H^0 = H_z^0$  hat man offenbar

$$\varphi_m^0 = -H^0 z \quad (33b)$$

statt der Formel (31c) für das Vektorpotential.

Diese Formeln sind nicht zu verwechseln mit denjenigen, welche sich auf die „komplementäre“ Aufgabe eines rotationssymmetrischen Feldes mit meridionalen elektrischen und kreisförmigen magnetischen Kraftlinien beziehen. Im letzteren Fall hat man nämlich  $\mathfrak{E} = -\nabla \varphi - \frac{i \omega}{c} \mathfrak{A}$  und

$$E_z = \frac{c}{4 \pi \sigma \mu} \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\alpha)}{\partial r},$$

nach der Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{S} = \frac{4 \pi \mu \sigma}{c} \mathfrak{E}$ ; die Grenzbedingungen erhalten ebenfalls eine ganz verschiedene Bedeutung.

In dem Grenzfall eines vollkommen leitenden Körpers sind die Grenzbedingungen (32b) durch

$$E' = -E^0, \quad H'_n = -H_n^0$$

zu ersetzen, während die dritte Bedingung in die bekannte Formel

$$\Delta \frac{H}{\mu} \times \mathbf{n} = 4 \pi \mathfrak{k}$$

für die Flächendichte des Stromes übergeht. Innerhalb des Körpers wird selbstverständlich  $\psi' = -\psi^0$  ( $\psi = \mathfrak{E}, \mathfrak{S}$ ). Für eine vollkommen leitende Kugel mit dem Radius  $a$ , die sich in einem homogenen primären Feld  $H^0$  ( $\sim e^{i \omega t}$ ) befindet, bekommt man dabei eine Lösung derselben

Form wie für ein homogenes konstantes elektrisches Feld mit dem sekundären Potential  $\varphi'_m = +H^0 z$  innerhalb und

$$\varphi'_m = -m' \cdot \nabla \frac{1}{R}$$

außerhalb der Kugel. Hier bedeutet  $m'$  das induzierte magnetische Moment der Kugel  $= -\frac{1}{2} \mathfrak{H}^0 \cdot a^3$ .

Diese Lösung verliert jeden Sinn für  $\omega=0$ . Den Fall eines statischen Magnetfeldes bei  $\mu \neq 1$  werden wir unten im § 7 betrachten.

### 3. Transversales magnetisches Wechselfeld; Drehfelder und Drehstrommotoren.

Neben dem axialen magnetischen Wechselfeld ist theoretisch interessant (wegen seiner Einfachheit) und praktisch wichtig (wegen der Anwendung auf Drehstrommotoren), der Fall eines *transversalen*, d. h. zur  $Z$ -Achse senkrechten primären magnetischen Feldes, dessen Stärke von der  $z$ -Koordinate unabhängig ist. Ein solches Feld entspricht, wie leicht zu sehen ist, einem longitudinalen Vektorpotential, welches der Bedingung  $\frac{\partial A_z^0}{\partial z} = 0$  genügt ( $A_x^0 = A_y^0 = 0$ ).

Es gelten dabei die Beziehungen

$$\begin{aligned} H_x^0 &= \frac{\partial A_z^0}{\partial y}, & H_y^0 &= -\frac{\partial A_z^0}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 A_z^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z^0}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

die zeigen, daß man  $A_z^0$  als den *imaginären* Teil einer im betreffenden Raumgebiet analytischen Funktion  $A^0$  der komplexen Variablen  $\zeta = x + iy$  (oder  $x - iy$ ) definieren kann, wobei sich die Komponenten  $H_x^0$  und  $H_y^0$  als der reelle und imaginäre Anteil der komplexen Größe

$$H^0 = \left( \frac{\partial A^0}{\partial \zeta} \right)^* \quad (34a)$$

ergeben.

Das komplexe Vektorpotential  $A^0$  ist analog dem komplexen skalaren Potential  $f = \varphi + i\varphi_m$ , das wir im § 4, Kap. V bei der Betrachtung der Wellenfortpflanzung längs vollkommen leitenden Drähten eingeführt hatten. Wir haben aber jetzt statt eines mit  $H$  verknüpften transversalen elektrischen Feldes ein rein longitudinales Feld  $E_z^0$ , das dem imaginären Anteil von

$$E^0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c} A^0$$

gleich ist.

Denkt man sich in ein solches Feld einen unendlich langen, der  $Z$ -Achse parallelen Zylinder mit beliebigem Querschnitt eingebracht, so müssen im letzteren longitudinale („axiale“) elektrische Ströme induziert werden, die seine Oberfläche offenbar ungeladen lassen. Das

sekundäre elektromagnetische Feld kann folglich in diesem Fall durch ein komplexes Vektorpotential  $A'$  dargestellt werden (den Index  $z$  lassen wir vorbeigehen), das außerhalb des Zylinders der Gleichung (34) genügen muß, d. h. eine im Unendlichen verschwindende analytische Funktion von  $\zeta$  ist.

Innerhalb des Zylinders muß es die Gleichung

$$\frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} + k^2 A' = -k^2 A^0 \quad (34b)$$

befriedigen, wobei die beiden Lösungen nach der ersten Bedingung (32b) ineinander stetig übergehen sollen [die zwei anderen Bedingungen (32b) werden bei  $\Delta A' = 0$  von selbst erfüllt].

Man bekommt besonders einfache Verhältnisse in dem Extremfall eines vollkommen leitenden Zylinders. In diesem Fall ist die Funktion  $A'$  innerhalb und auf der Oberfläche des letzteren gleich  $-A^0$ , während ihre Gestalt für den Außenraum durch die Bedingung  $A' = -A^0$  für die Grenzfläche des Zylinders, d. h. die Grenzlinie seines Querschnittes eindeutig bestimmt ist (in Verbindung mit der Bedingung des Verschwindens im Unendlichen).

Ist z. B. das primäre magnetische Feld homogen, so hat man nach (34 a) mit  $\zeta = r e^{i\alpha}$ :

$$A^0 = H^0 \zeta = r H^0 e^{i\alpha}. \quad (35)$$

Da der reelle und der imaginäre Teil von  $H^0$  die  $x$ - bzw.  $y$ -Komponente der magnetischen Feldstärke bedeuten sollen, kann die Abhängigkeit der letzteren von der Zeit durch den komplexen Faktor  $e^{i\omega t}$  im allgemeinen nicht dargestellt werden. Setzt man nämlich

$$H^0 = B e^{i\omega t} = B \cos \omega t + i B \sin \omega t, \quad (35a)$$

wo  $B$  eine reelle Zahl ist, so bedeutet dies, daß man

$$H_x^0 = B \cos \omega t, \quad H_y^0 = B \sin \omega t$$

hat. Durch die obige Formel ist folglich ein „zirkular schwingendes“, d. h. sich gleichförmig um die  $Z$ -Achse drehendes magnetisches Feld gegeben. Solche *Drehfelder* sind in der Technik für manche Zwecke gebraucht, insbesondere bei den Drehstrommotoren. Das komplexe Vektorpotential eines Drehfeldes mit der Amplitude  $B$  ist folglich gleich

$$A^0 = B \cdot r e^{i(\alpha - \omega t)}$$

oder wenn wir zu den reellen Größen übergehen

$$A_z^0 = B r \sin(\alpha - \omega t). \quad (35b)$$

Dies entspricht einem elektrischen Feld  $E_z^0 = \frac{\omega}{c} B r \cos(\alpha - \omega t)$ , die der Projektion von  $\mathbf{r}$  auf eine sich gleichförmig drehende Gerade proportional ist. In dem Falle eines kreisförmigen Zylinders mit dem Querschnittsradius  $a$  ist das sekundäre Potential bei  $r > a$  eindeutig durch den

imaginären Anteil der Funktion

$$A' = \frac{C}{\zeta} e^{+i\omega t} = \frac{C}{r} e^{i(\omega t - \alpha)},$$

d. h. durch

$$A'_z = -\frac{C}{r} \sin(\alpha - \omega t)$$

bestimmt. Denn diese Funktion verschwindet bei  $r = \infty$  und für  $r = a$  wird mit  $-A_z^0$  identisch, falls man

$$C = a^2 B$$

setzt. Es ist also

$$A'_z = -\frac{a^2 B}{r} \sin(\alpha - \omega t) = -\frac{a^2}{r^2} A_z^0. \quad (35c)$$

Die azimuthalen Komponenten der magnetischen Feldstärke auf der äußeren Seite der Zylinderoberfläche sind

$$H_\alpha^0 = -\frac{\partial A_z^0}{\partial r} = -B \sin(\alpha - \omega t),$$

$$H'_\alpha = -\frac{\partial A'_z}{\partial r} = -\frac{a^2}{r^2} B \sin(\alpha - \omega t) = H_\alpha^0,$$

während die normalen Komponenten ebenso wie die elektrischen Feldstärken sich gegenseitig zerstören.

Daraus ergibt sich für die Flächendichte des Stromes der Ausdruck

$$\mathfrak{k}_z = \frac{1}{4\pi} 2H_\alpha^0 = -\frac{1}{2\pi} B \sin(\alpha - \omega t),$$

was einem radial gerichteten Druck von der Größe  $\frac{1}{2} \mathfrak{k}_z H = \frac{H^2}{8\pi}$  entspricht.

Bei Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit des Zylinders bekommt man neben diesem Druck, der keine resultierende Kraft oder Drehkraft liefert, noch azimuthal gerichtete mechanische Kräfte, welche ein mit dem Drehungssinn des Magnetfeldes übereinstimmendes Drehmoment bedingen.

Um dies zu zeigen, wollen wir zunächst das vollständige Feld für diesen Fall bestimmen. Für den Außenraum müssen wir offenbar eine Lösung der früheren Form beibehalten, d. h.

$$A = \left( B r - \frac{C}{r} \right) e^{i(\alpha - \omega t)} \quad (r > a) \quad (36)$$

setzen, wobei  $C$  einen zunächst unbestimmten Koeffizienten bedeutet. Für das *totale* (komplexe) Potential innerhalb des Zylinders haben wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 A = 0 \quad (r < a)$$

oder in zylindrischen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + k^2 A = 0.$$

Um der Stetigkeitsbedingung ( $\Delta A = 0$  bei  $r = a$ ) zu genügen, muß  $A$  als Funktion von  $\alpha$  den Faktor  $e^{i\alpha}$  enthalten. Dies gibt  $\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} = -A$  und folglich

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial A}{\partial \xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) A = 0, \quad (\xi = kr)$$

d. h.

$$A = D J_1(kr) e^{i(\alpha - \omega t)}. \quad (r < a) \quad (36a)$$

Die Grenzbedingungen  $\Delta E_z = 0$  und  $\Delta H_\alpha = 0$  ( $\mu = 1$ ) liefern die folgenden zwei Bestimmungsgleichungen für die Konstanten  $C$  und  $D$ :

$$Ba - \frac{C}{a} = D J_1(ka)$$

$$B + \frac{C}{a^2} = k D J_1'(ka).$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} C &= B a^2 \frac{a k J_1'(ka) - J_1(ka)}{a k J_1'(ka) + J_1(ka)} \\ D &= \frac{2Ba}{k a J_1'(ka) + J_1(ka)}. \end{aligned} \right\} \quad (36b)$$

Durch diese Formeln ist das Problem vollständig gelöst.

Für kleine Werte von  $ka$  ( $\ll 1$ ) erhalten wir in erster Näherung [mit Rücksicht auf  $J_1(\xi) \approx \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{8}\right)$ ]:

$$\left. \begin{aligned} A &= B \left( r - \frac{i\sigma\omega a^4}{8c^2} \frac{1}{r} \right) e^{i(\alpha - \omega t)} \quad (r > a), \\ A &= Br \left[ 1 - \frac{i\sigma\omega}{8c^2} (r^2 - 2a^2) \right] e^{i(\alpha - \omega t)} \quad (r < a). \end{aligned} \right\} \quad (36c)$$

Die Stromdichte innerhalb des Zylinders läßt sich aus der zweiten dieser Formeln nach der Gleichung

$$j_z = -\frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} = +\frac{i\omega\sigma}{c^2} A$$

berechnen. Durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit der radialen Komponente der magnetischen Feldstärke

$$H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{i}{r} A,$$

oder eher mit  $H_r^* = -\frac{i}{r} A^*$  erhalten wir die oben erwähnte mittlere azymutale Kraft pro Volumeinheit. Das entsprechende Drehmoment ist folglich gleich:

$$\bar{m}_z = \frac{1}{2} \frac{\omega\sigma}{c^2} |A|^2. \quad (36d)$$

Das vollständige Drehungsmoment pro Höheneinheit des Zylinders ist

$$M_z = \int_0^a \bar{m}_z 2\pi r dr,$$

oder mit genügender Annäherung, wenn man  $|A| = Br$  setzt,

$$M_z = \frac{\pi\omega\sigma}{4c^2} B^2 a^4. \quad (36e)$$

Es sei daran erinnert, daß  $B$  die Stärke des magnetischen Drehfeldes ist.

#### 4. Relativität der Drehbewegung; dünne Scheiben im transversalen und longitudinalen Magnetfeld.

Dieselben Resultate ergeben sich in dem Fall, daß der Zylinder sich in einem konstanten homogenen Magnetfeld mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z = \omega$  (oder eher  $-\omega$ ) dreht, sofern selbstverständlich die lineare Geschwindigkeit ( $\omega a$ ) klein gegen die Lichtgeschwindigkeit bleibt. Diese *Relativität der Drehbewegung des Körpers und des Feldes* scheint eine unmittelbare Folge der Relativität der fortschreitenden Bewegung zu sein, schon in derjenigen ganz speziellen Form, die wir im § 2, Kap. V des I. Bandes als „Relativität der Geschwindigkeit“ bezeichnet haben (siehe unten). Die elektromagnetische Kraft  $\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathfrak{H}^0$ , welche auf eine sich im zeitlich konstanten Feld  $\mathfrak{H}^0$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegende Einheitsladung wirkt, nimmt nämlich in dem betrachteten Fall ( $v = \omega_z r$ ) die Gestalt  $E_z = \frac{\omega}{c} r H^0 \cos \alpha$  an, wo  $\alpha = \omega_z t$  den Winkel zwischen  $\mathbf{r}$  und  $\mathfrak{H}$  bedeutet. Dieser Ausdruck stimmt tatsächlich mit der durch die Drehung des Feldes in einem ruhenden Punkt induzierten elektrischen Feldstärke  $E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z^0}{\partial t}$  überein.

Die Formel (36e) läßt sich also auf einen sich mitdrehenden Zylinder ausdehnen, wenn man unter  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Feldes *relativ zum Zylinder* versteht.

Diese Resultate sind nur bei solchen Zylindern gültig, deren Länge sehr groß gegen ihre Querdimensionen ist. Und zwar müssen sich auf den Grundflächen des Zylinders elektrische Ladungen bilden, die ein zu berücksichtigendes elektrostatisches Feld erzeugen. In dem Grenzfall einer zylindrischen Scheibe, d. h. einer *dünnen Platte*, kann man dieses elektrostatische Feld ebenfalls als longitudinal behandeln und seine Stärke nach der Formel

$$\begin{aligned} -\varepsilon E_z'' &= 4\pi\eta = 4\pi c \int j dt = 4\pi\sigma \int (E_z^0 + E_z' + E_z'') dt \\ &= -\frac{4\pi\sigma}{c} A_z + 4\pi\sigma \int E_z' dt \end{aligned}$$

bestimmen. Geht man wieder zu den komplexen Größen über, so wird

$$\left(\varepsilon + 4\pi \frac{\sigma}{i\omega}\right) E'' = \frac{4\pi\sigma}{c} A,$$

oder bei  $\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon$

$$E'' = \frac{i\omega}{c} A = -(E^0 + E').$$

In dieser („nullten“) Näherung wird also das elektromagnetisch induzierte Feld durch das statische aufgehoben. In erster Näherung erhalten wir

$$E'' = -(E^0 + E') (1 + i\beta) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\omega\varepsilon}{4\pi\sigma} = 2\pi \frac{\tau_0}{\tau}$$

( $\tau_0$  = Relaxationszeit,  $\tau$  = Drehungsperiode), d. h.

$$E = -i\beta (E^0 + E').$$

Das resultierende elektrische Feld und folglich die Stromstärke sind also im Verhältnis  $\beta : 1$  herabgesetzt. Der mechanische Effekt (mittlere Drehkraft) muß aber vollkommen verschwinden, da jetzt die Stromdichte gegen die radiale Komponente des magnetischen Feldes eine Phasenverschiebung um  $\frac{\pi}{2}$  aufweist.

Interessant ist noch, den Fall zu erwähnen, wenn eine metallische Platte sich in einem „longitudinalen“, d. h. zu ihren Grundflächen senkrechten magnetischen Feld  $H$  dreht. Man bekommt dabei an jeder Stelle eine radial gerichtete elektromagnetische Feldstärke

$$E_r^0 = \frac{v}{c} H = \frac{\omega}{c} r H, \quad (37)$$

die einem primären durch das skalare Potential

$$\varphi^0 = \pm \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} H r^2 \quad (37a)$$

( $\pm$  je nach der Feldrichtung) bestimmten elektrostatischen Feld äquivalent ist. Wenn man zwei verschiedene Stellen der Platte mittels gleitender Kontakte durch einen Draht verbindet, so bekommt man im letzteren einen Strom, dessen Stärke einer eingepprägten (äußeren) elektromotorischen Kraft  $\varphi_1^0 - \varphi_2^0$  entspricht („unipolare Induktion“). In diesem Fall kann man offenbar von einer relativen Drehung der Platte und des Feldes nicht mehr reden. Denkt man sich z. B. das Feld  $H$  innerhalb einer Spule erzeugt, also vollkommen homogen, so wird durch die Drehung der Spule um ihre Achse gar kein zusätzliches Feld hervorgerufen. An diesem Beispiel kann man klar sehen, daß die im I. Band formulierte Relativitätstheorie nur für *fortschreitende* (geradlinig gleichförmige) Bewegungen unbedingt gültig ist. Für kompliziertere Bewegungen bleibt sie nur ausnahmsweise gültig, und zwar in allen den Fällen, wenn man mit einer solchen zeitlichen Änderung des magne-

tischen Feldes zu tun hat, die durch eine Bewegung dieses Feldes als eines festen Ganzen beschrieben werden kann (wie dies z. B. bei dem oben betrachteten Drehfeld der Fall ist).

Von einer eigentlichen „Bewegung“ des magnetischen oder auch des elektrischen Feldes im üblichen mechanischen Sinne kann strenggenommen keine Rede sein. Dieser Begriff tritt in der allgemeinen elektromagnetischen Theorie gar nicht auf und muß deshalb mit großem Vorbehalt benutzt werden.

### 5. Unbegrenzte ebene Platte in einem beliebigen magnetischen Wechselfeld.

Die Theorie der induzierten Ströme in dünnen ruhenden Platten („zweidimensionale Leiter“), läßt sich ganz allgemein in einer verhältnismäßig sehr einfachen Form entwickeln, besonders für den Fall, daß man die Platte als eben und unendlich ausgedehnt betrachtet.

Wir stellen uns also eine solche durch die Ebenen  $z = +\frac{\delta}{2}$  und  $z = -\frac{\delta}{2}$  begrenzte Platte vor, die sich in einem gegebenen durch das Vektorpotential  $\mathfrak{A}^0$  charakterisierten Wechselfeld befindet. Wie es an dem Beispiel des Drehfeldes erläutert wurde, muß die  $z$ -Komponente dieses Potentials oder eher des entsprechenden elektromagnetischen Feldes  $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_z^0}{\partial t}$  ein elektrostatisches Feld hervorrufen, welches es praktisch vollkommen zerstört, also eine ganz unbedeutende Strömung in der  $z$ -Richtung zuläßt. Wir können uns deshalb auf die Betrachtung der  $x$ - und  $y$ -Komponenten der Stromdichte beschränken. Bei nicht zu schnellen Schwingungen und für genügend dünne Platten ist die letztere von der  $z$ -Koordinate praktisch unabhängig. Wir führen deshalb statt der gewöhnlichen Stromdichte die Größe

$$\mathfrak{S} = \delta \cdot \mathfrak{j} \quad (38)$$

ein, die offenbar mit der „Flächendichte“ gleichbedeutend ist und die wir einfach als Stromstärke bezeichnen werden.

Sie muß der Gleichung

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad (38a)$$

genügen und mit den Komponenten der elektrischen Feldstärke durch die Beziehungen

$$J_x = \frac{\sigma \delta}{c} E_x, \quad J_y = \frac{\sigma \delta}{c} E_y \quad (38b)$$

verknüpft sein. Hier bedeutet  $\mathfrak{E}$  die vollständige elektrische Feldstärke, d. h. die Summe

$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathfrak{A}^0}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t} \right). \quad (39)$$

Es muß dabei die  $z$ -Komponente von  $\mathfrak{A}'$  offenbar verschwinden, so daß man das sekundäre magnetische Feld nach den Formeln

$$H'_x = -\frac{\partial A'_y}{\partial z}, \quad H'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z} \quad (39a)$$

bestimmen kann.

Die Differenz von  $\mathfrak{S}'$  auf den beiden Seiten der Platte ist mit der Stromstärke  $\mathfrak{J}$  durch die Beziehung

$$\Delta \mathfrak{S}' \times n = 4\pi \mathfrak{J}$$

verknüpft (wo  $n$  in die  $z$ -Richtung weist). Die entsprechenden Grenzwerte der sekundären magnetischen Feldstärke müssen offenbar entgegengesetzt gleich sein, so daß man

$$H'_x = \pm 2\pi J_y, \quad H'_y = \mp 2\pi J_x \quad \left(z = \pm \frac{\delta}{2}\right) \quad (39b)$$

setzen kann, während die Änderung von  $H^0$  und anderen primären Größen für  $\Delta z = \delta$  zu vernachlässigen ist. Die letzten Gleichungen lassen sich mit Rücksicht auf (39a), (39) und (38b) in der folgenden Form zusammenfassen:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial z} \mp \frac{2\pi\sigma\delta}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t} = \pm \frac{2\pi\sigma\delta}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{A}^0}{\partial t}, \quad \text{für } z = \pm \delta \quad (40)$$

wo  $\mathfrak{A}^0$  die Projektion des primären Vektorpotentials auf die  $xy$ -Ebene bedeutet.

Durch diese „Grenzbedingung“ und die außerhalb der Platte geltende Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'}{\partial z^2} = 0 \quad (40a)$$

ist das sekundäre Feld im ganzen Raum und für alle Zeiten eindeutig bestimmt.

Wir denken uns, daß das primäre Feld nach einer ganz beliebigen Vorgeschichte im Augenblick  $t = 0$  konstant wird, so daß  $\frac{\partial A^0}{\partial t}$  für  $t > 0$  gleich Null ist. Man bekommt dann nach (40)

$$\frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial z} \mp \frac{1}{u} \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t} = 0 \quad \text{mit} \quad u = \frac{c^2}{2\pi\sigma\delta}. \quad (40b)$$

Diese Gleichung bezieht sich zunächst nur auf die Platte, d. h. die Ebene  $z = 0$ . Da aber das Potential  $\mathfrak{A}'$  im ganzen Raum die Gleichung (40a), in welcher die Zeit explizite nicht vorkommt, befriedigen muß, so ergibt sich für dieses Potential die folgende allgemeine Formel

$$\mathfrak{A}' = A'(x, y, z \pm ut), \quad (40c)$$

wobei das obere Vorzeichen für  $z > 0$  und das untere für  $z < 0$  gilt.

Diese Formel zeigt, daß das Abklingen des sekundären Feldes an jeder Stelle ( $z = \text{konst}$ ) und speziell in der Platte, in der Weise erfolgt, als ob das im Augenblick  $t = 0$  stattfindende Feld gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $u$  parallel zur  $Z$ -Achse verschoben würde, so daß in der Ebene  $z = 0$  zur Zeit  $t$  dasselbe sekundäre Feld herrscht, das im Augenblick  $0$  im Abstand  $z = ut$  davon herrschte. Das Feld muß selbstverständlich vollkommen symmetrisch bezüglich der Platte sein. Für  $\sigma = \infty$  wird  $u = 0$ : dies bedeutet, daß die induzierten Ströme und das dadurch erzeugte sekundäre Feld nach dem Verschwinden des primären elektrischen Feldes sozusagen „erstarren“, d. h. den in diesem Augenblick erreichten Wert unverändert beibehalten. — Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß die Platte sich in diesem Fall als ein vollkommener Schirm verhält; das primäre Feld  $\mathfrak{A}^0$  der Ströme, die sich auf einer Seite einer solchen Platte (sagen wir im oberen Halbraum) befinden, induziert in der letzteren solche Flächenströme, welche dieses Feld im ganzen auf der anderen Seite liegenden Halbraum vernichten. Das auf der anderen (oberen) Seite erzeugte sekundäre Feld ist folglich mit dem Feld des Spiegelbildes der primären Ströme identisch. Dies bezieht sich eigentlich auf solche Ströme, die parallel zur Platte fließen (und deren Richtungen bei Spiegelung umgekehrt werden müssen). Was die  $z$ -Komponente der primären Feldstärke anbetrifft, so wird sie nicht kinetisch, sondern statisch, d. h. durch das elektrostatische Feld der induzierten Flächenladungen von der anderen Seite der Platte abgeschirmt (vgl. Kap. V, § 3).

Wegen der zwischen den Stromkomponenten geltenden Beziehung (38a), kann man

$$J_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad J_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (41)$$

setzen, wo  $\psi$  die sogenannte *Stromfunktion* ist. Die Differenz  $\psi_2 - \psi_1$  für zwei beliebige Punkte der Platte ist gleich der Totalstärke  $\int J_n ds$  des Stromes, welcher durch irgendeine diese Punkte verbindende Linie (oder eher Zylinderfläche)  $s$  fließt. Man hat in der Tat  $\int J_n ds = \int \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \psi_2 - \psi_1$ . — Die Stromlinien können folglich als die Linien  $\psi = \text{konst}$  definiert werden.

Die Stromfunktion ist mit den Oberflächenwerten von  $\mathfrak{S}'$  nach (39b) durch die Beziehung

$$\mathfrak{S}' = \mp \nabla (2\pi\psi) \quad (z = \pm 0) \quad (41a)$$

verknüpft, läßt sich also als das mit  $2\pi$  dividierte skalare magnetische Potential auf der Platte auffassen. Man kann sie in diesem Sinn auch außerhalb der Platte nach einer oder, mit entgegengesetztem Vorzeichen, nach der anderen Seite der Platte analytisch fortgesetzt denken.

## § 5. Stationäre (galvanische) Ströme und Übergang zur Elektrostatik.

1. Stromverteilung in Elektrolyten (unvollkommen leitenden Körpern) bei Anwesenheit von metallischen (vollkommen leitenden) Elektroden.

Streng stationäre Ströme können, wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt wurde, nur durch *elektrostatische* Kräfte erzeugt werden. In dreidimensionalen Körpern werden solche Ströme hauptsächlich bei verhältnismäßig kleinen elektrischen Leitfähigkeiten beobachtet (Elektrolyte; Erde bei einer Reihe geophysikalischer Untersuchungen usw.). Als Stromquellen (oder Senken) dienen dabei *metallische Elektroden* von einer viel höheren Leitfähigkeit, die durch sehr dünne Metalldrähte mit irgendwelchen sich außerhalb des betrachteten Raumgebietes befindlichen galvanischen Zellen, Akkumulatorbatterien usw. verbunden sind. Den Einfluß dieser Drahtleitungen auf die Potential- und Stromverteilung kann man in solchen Fällen vernachlässigen und die Elektroden als *vollkommen leitend* ( $\sigma = \infty$ ) behandeln. Das elektrische Feld innerhalb der letzteren muß bei dieser Bedingung offenbar verschwinden (denn eine endliche Feldstärke würde einen unendlich großen Strom erzeugen), so daß jede Elektrode ein *bestimmtes elektrostatisches Potential*  $\varphi_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2 \dots$ ) haben muß. Neben diesem Potential läßt sich jede Elektrode durch den von ihr zu- (oder ab-)geführten Strom  $J_\alpha$  charakterisieren, den wir als positiv oder negativ rechnen werden, je nachdem er nach außen oder nach innen fließt.

Die Größen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  und  $J_1, \dots, J_n$  ( $n$ -Anzahl der Elektroden) sind nicht unabhängig voneinander. Da nämlich  $J_\alpha = \oint j_n dS_\alpha$  ist, müssen die Stromstärken  $J_\alpha$  wegen der Beziehungen  $\mathbf{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{C} = -\nabla \varphi$  *lineare Funktionen der Elektrodenpotentiale sein* und umgekehrt. Man kann folglich setzen:

$$\left. \begin{aligned} J_\alpha &= \sum_\beta s_{\alpha\beta} \varphi_\beta, \\ \varphi_\alpha &= \sum_\beta R_{\alpha\beta} J_\beta, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

wo die Koeffizienten  $s_{\alpha\beta}$  und  $R_{\alpha\beta}$  sich bei der vollständigen Lösung des Problems der Strom- oder Potentialverteilung außerhalb der Elektroden, — sagen wir im umgebenden oder eingeschlossenen *Elektrolyt* — bestimmen lassen.

Wir werden im folgenden immer voraussetzen, daß dieser Elektrolyt entweder vollkommen homogen ist oder aus einigen homogenen Stücken besteht. Zunächst wollen wir aber nur den ersten Fall betrachten.

Wir stellen uns also vor, daß eine Anzahl Elektroden von gegebener Gestalt und Größe in einen homogenen Elektrolyten eingetaucht sind.

Die Potentiale der Elektroden *oder* die zugehörigen Stromstärken seien als bekannt angesetzt. Zu bestimmen ist die Verteilung des elektrischen Potentials  $\varphi$  im Elektrolyten. Die Stromverteilung läßt sich daraus nach der Formel

$$\mathfrak{j} = \frac{\sigma}{c} \mathfrak{E} = -\frac{\sigma}{c} \nabla \varphi$$

ermitteln. Dabei muß  $\varphi$  innerhalb des Elektrolyten *stetig* bleiben, der *Laplaceschen* Gleichung

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (43)$$

genügen, und auf den Elektroden die Grenzbedingungen

$$\varphi = \varphi_\alpha \text{ (bekannte Größe)} \quad (43a)$$

*oder*

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \text{konst (unbekannte Größe)} \\ \text{und} \\ -\oint \frac{\sigma}{c} \nabla_n \varphi dS_\alpha = J_\alpha \text{ (bekannte Größen)} \end{array} \right\} \quad (43b)$$

befriedigen.

Die Konstanz des Potentials auf jeder Elektrode ist nämlich auch in dem Fall zu verlangen, wenn sein Wert unbekannt ist. Daraus folgt aber, daß der Gradient von  $\varphi$  auf der Oberfläche der Elektrode senkrecht dazu gerichtet ist. Wir können deshalb in (43b)  $\nabla_n \varphi = \pm |\nabla \varphi| = \pm E$  setzen mit dem  $+$  oder  $-$  Zeichen je nach der Richtung des Feldes.

Wenn nicht ein, sondern *mehrere* Elektrolyten vorhanden sind, die aneinander längs bestimmter Flächen  $\Sigma$  grenzen, so muß man zu den Grenzbedingungen (43a) oder (43b) noch die Grenzbedingungen

$$\Delta E_\tau = 0, \quad \Delta \sigma E_\nu = 0 \quad (\mathfrak{E} = -\nabla \varphi) \quad (43c)$$

für diese Flächen berücksichtigen, wobei  $E_\nu$  die normale und  $E_\tau$  die tangentielle Projektion von  $\mathfrak{E}$  bedeuten. Die erste Bedingung ist dabei von selbst erfüllt, solange  $\varphi$  eine stetige Ortsfunktion darstellt, was wir immer voraussetzen werden ( $\Delta \varphi = 0$ ). Die Dielektrizitätskonstanten der Elektrolyten kommen in diesen Grenzbedingungen gar nicht vor. Sie gestatten es, nur die Dichte der sich auf den Flächen  $\Sigma$  ansammelnden freien Ladungen nach der Formel

$$\Delta \varepsilon E_\nu = 4\pi\eta \quad (43d)$$

zu berechnen, wobei aber diese Beziehung für die Lösung der oben formulierten Aufgabe belanglos ist. Die angeführte Fragestellung wird aber teilweise oder vollkommen sinnlos, wenn die Leitfähigkeit einiger oder aller Körper, die wir als Elektrolyten bezeichnet haben, *gleich Null ist*, wenn man also von schlecht leitenden Körpern zu vollkommenen Isolatoren übergeht. Die Bedingungen  $\Delta \sigma E_\nu = 0$  verwandeln sich dann in Identitäten, während die „belanglosen“ Beziehungen (43d)

wegen  $\eta = 0$  ihre Rolle übernehmen, so daß man jetzt statt (43c) die Grenzbedingungen

$$(\Delta E_\tau = 0), \quad \Delta \varepsilon E_\nu = 0 \quad (44)$$

erhält. Wenn nur ein der längs  $\sum$  aneinander grenzenden Körper ein vollkommener Isolator ist, während der andere eine endliche — sonst aber beliebig kleine — Leitfähigkeit besitzt, so müssen wir noch von der Bedingung  $\Delta \sigma_h E_\nu = 0$  ausgehen; sie reduziert sich aber in diesem Fall auf die Bedingung

$$E_\nu = 0 \quad (44a)$$

für den zweiten (leitenden) Körper, während für den ersten die Beziehung

$$\varepsilon E_\nu = 4\pi\eta \quad (44b)$$

besteht.

## 2. Elektrostatische Potentialverteilung und ihre Beziehung zur galvanischen.

Sind alle „Elektrolyte“ vollkommene Isolatoren, so verliert die Frage nach der Stromverteilung jeden Sinn, da dabei gar keine Elektrizitätsströmung stattfinden kann. Will man aber die Elektrodenpotentiale noch als bekannte Größen ansehen, so bekommt man auf Grund der Gleichungen (43), (43a) und (44) eine bestimmte Potentialverteilung, die offenbar genau mit derjenigen Potentialverteilung übereinstimmt, welche sich ergeben würde, wenn man statt Isolatoren mit den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  Elektrolyten mit den Leitfähigkeiten  $\sigma = \varepsilon$  hätte. Dabei bekommt man aber statt der Stromstärken  $J_\alpha$  aus den Grenzbedingungen (44a, b) eine bestimmte freie Ladungsdichte auf der Oberfläche jeder Elektrode, d. h. folglich eine bestimmte (freie) Ladung der letzteren

$$e_\alpha = \oint \eta dS_\alpha,$$

welche die Rolle der Stromstärke  $J_\alpha$  spielt. Das ursprüngliche „galvanische“ Problem verwandelt sich also sprunghaft bei  $\sigma = 0$  in ein formal identisches aber wesentlich verschiedenes *elektrostatiches* Problem. — Das letztere läßt noch eine zweite Formulierung zu, die dem Fall entspricht, wenn nicht die Potentiale, sondern die Ladungen der Elektroden gegeben sind. In diesem Fall sind die Grenzbedingungen (43a) durch die zu (43b) analogen Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\alpha &= \text{konst (unbekannt)}, \\ -\int \frac{\varepsilon}{4\pi} \nabla_n \varphi dS_\alpha &= e_\alpha \text{ (bekannte Größen)} \end{aligned} \right\} \quad (44c)$$

zu ersetzen.

Es brauchen dabei die Elektroden nicht vollkommen leitend zu sein; auch wenn sie eine geringe Leitfähigkeit besitzen, muß die Bedingung

(44a), d. h.  $\varphi = \text{konst}$  auf ihrer Oberfläche und im Innern erfüllt sein. Die Drahtleitungen sind in diesem Fall offenbar unnötig, da die Elektroden voneinander isoliert sind; man pflegt sie deshalb einfach als „Leiter“ zu bezeichnen.

Bei den elektrostatischen Problemen können die Leiter sich im leeren Raum befinden; letzterer wird als ein Isolator mit der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon = 1$  behandelt. Dabei, ebenso wie bei  $\varepsilon > 1$ , wird der Schwerpunkt der Aufgabe gewöhnlich nicht in die Verteilung des Potentials im Raume oder im Dielektrikum gelegt, sondern in die Verteilung der Ladungen  $e_\alpha$  auf der Oberfläche der Leiter, d. h. in die Bestimmung der Ladungsdichte  $\eta$ . Wenn das elektrische Feld bekannt ist, läßt sich die letztere nach der Formel (44b) bestimmen. Wäre  $\eta$  direkt bekannt, so könnte man umgekehrt das elektrische Feld nach der Formel  $\varphi = \sum \int \frac{\eta dS_\alpha}{R}$  berechnen.

Im galvanischen Problem entspricht der Ladungsdichte die Größe  $j_n = -\frac{\sigma}{c} \nabla_n \varphi = \pm j$ , d. h. die Volumdichte des elektrischen Stromes an der Oberfläche der betreffenden Elektrode; die Rolle der Dielektrizitätskonstante spielt in diesem Fall die Größe  $\frac{4\pi\sigma}{c}$ . Wir wollen dies symbolisch durch die Formel

$$\varepsilon = \frac{4\pi\sigma}{c}$$

ausdrücken.

Die Ladungen  $e_\alpha$  müssen nach (44b) mit den Potentialen  $\varphi_\alpha$  durch lineare Beziehungen derselben Gestalt verknüpft sein wie die Stromstärken  $J_\alpha$  im galvanischen Problem. Wir können folglich

$$\left. \begin{aligned} e_\alpha &= \sum_\beta p_{\alpha\beta} \varphi_\beta, \\ \varphi_\alpha &= \sum_\beta q_{\alpha\beta} e_\beta \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

setzen. Die letztere Formel ist schon in einem etwas verschiedenen Sinn von uns gebraucht worden [vgl. (20) §3], und zwar für die elektrostatischen Spannungen in einem System statisch gekoppelter Stromkreise. Wir haben dabei die Koeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  (mit entgegengesetzten Vorzeichen) als die *Induktionskoeffizienten* bezeichnet. Diese Bezeichnung wollen wir auch hier beibehalten. Die dazu reziproken Koeffizienten  $p_{\alpha\beta}$  heißen die *Kapazitätskoeffizienten* des betreffenden Leitersystems. Ihnen entsprechen im galvanischen Problem die „Leitfähigkeitskoeffizienten“  $s_{\alpha\beta}$  und den Induktionskoeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  die „Widerstandskoeffizienten“  $R_{\alpha\beta}$ .

Wir wollen im folgenden die Stromstärken in elektrostatischen Einheiten messen und dementsprechend den Faktor  $c = 1$  setzen. Die

vorhergehende symbolische Beziehung zwischen  $\varepsilon$  und  $\sigma$  reduziert sich dabei auf

$$\varepsilon = 4\pi\sigma. \quad (45a)$$

Ist das elektrostatische Problem für ein gegebenes System von Leitern und Dielektrika gelöst, so erhält man daraus sofort die Lösung des zugehörigen galvanischen Problems, wenn man die Ladungen  $e_\alpha$  durch die Ströme  $J_\alpha$  und die Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  durch  $4\pi\sigma$  ersetzt. Daraus folgt, daß in dem einfachsten Fall *eines einzigen* isolierenden bzw. elektrolytischen Mediums die statischen und galvanischen Koeffizienten  $p$ ,  $q$  bzw.  $s$ ,  $R$  miteinander durch die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} s''_{\alpha\beta} &= \frac{4\pi\sigma'}{\varepsilon'} \cdot p'_{\alpha\beta}, \\ R''_{\alpha\beta} &= \frac{\varepsilon'}{4\pi\sigma''} \cdot q' \end{aligned} \right\} \quad (45b)$$

verknüpft sein müssen. Die Striche sind hier angefügt, um zu zeigen, daß die Konstanten  $\varepsilon$  und  $\sigma$  sich auf *verschiedene* Körper beziehen.

### 3. Der Fall eines homogenen Elektrolyten.

Sofern man sich auf diesen Fall beschränkt, ist die eigentümliche Unstetigkeit, welche den Übergang vom galvanischen Problem zum elektrostatischen bei  $\sigma = 0$  charakterisiert, nicht störend. Sind z. B. die Potentiale  $\varphi_\alpha$  gegeben, so ist nach der Gleichung (43) das elektrische Feld im ganzen Raum eindeutig bestimmt, gleichgültig ob dieser Raum mit einem Isolator oder einem Elektrolyt erfüllt ist. Im ersten Fall bekommt man nach (44b) eine bestimmte Ladungsverteilung auf der Oberfläche der Elektroden und gar keinen Strom; im zweiten Fall — dieselbe Ladungsverteilung und dazu noch eine damit proportionale Stromverteilung ( $j = \sigma E_v$ ). Die Ladungen  $e_\alpha$  und die Ströme  $J_\alpha$  sind dabei miteinander durch die Beziehung

$$J_\alpha = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} e_\alpha = \frac{e_\alpha}{\tau}, \quad (46)$$

verknüpft, wo  $\tau$  die schon manchmal betrachtete Relaxationszeit des betreffenden Körpers bedeutet.

Fast ebenso einfach gestaltet sich das Problem, wenn man nicht die Potentiale, sondern die Ladungen  $e_\alpha$  für einen bestimmten Augenblick  $t = 0$  angibt und irgendwelche Drahtverbindungen der Elektroden mit äußerlichen Stromquellen ausschließt. Bei  $\sigma = 0$  ist dieser Ausschluß unwesentlich und wir haben vor uns das gewöhnliche elektrostatische Problem (in zweiter Fassung). Ist aber  $\sigma > 0$  (wie dies bei allen wirklichen unvollkommenen Isolatoren der Fall ist), so müssen sich die Metalleiter *entladen*, wobei die Stromstärken mit den entsprechenden Ladungen durch die Beziehung

$$J_\alpha = - \frac{d e_\alpha}{d t} \quad (46a)$$

verknüpft werden. Zu gleicher Zeit muß aber auch die vorhergehende Beziehung (46) bestehen bleiben, denn sie folgt aus den auf der Elektrodenoberfläche immer gültigen Formeln

$$\frac{\varepsilon E_n}{4\pi} = \eta, \quad j_n = \sigma E_n.$$

Wir bekommen also

$$-\frac{d e_\alpha}{dt} = \frac{e_\alpha}{\tau},$$

d. h.

$$e_\alpha = e_\alpha^0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (46b)$$

Die Entladung der Elektroden geschieht folglich genau nach demselben Gesetze wie das Abklingen einer ursprünglich vorhandenen freien Volumladung

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

#### 4. Der Fall zweier verschiedener Elektrolyten.

Die Sachlage wird viel komplizierter, wenn man nicht einen, sondern mehrere Elektrolyten (oder unvollkommene Isolatoren) hat. Es kommen nämlich an ihren Trennungsflächen die Grenzbedingungen  $\Delta \varepsilon E_\nu = 0$  und  $\Delta \sigma E_\nu = 0$  in Konkurrenz, die sich nach der angeführten unvollständigen („zeitlosen“) Theorie bei  $\sigma = 0$  zugunsten der ersten und bei  $\sigma > 0$  zugunsten der zweiten löst. Die Berücksichtigung des Zeitfaktors erlaubt es, die diese Lösung charakterisierende Unstetigkeit in sehr einfacher und natürlicher Weise auszugleichen. Und zwar kann man folgendes behaupten: Wenn ein System von Elektroden plötzlich zu den Potentialen  $\varphi_\alpha$  gebracht wird, so stellt sich eine der Gleichung  $\nabla^2 \varphi = 0$  und den Grenzbedingungen (44) genügende „statische“ Potentialverteilung ein, die sich allmählich in die galvanische Potentialverteilung verwandelt, welche durch dieselbe Gleichung und die Grenzbedingungen (43c) bestimmt wird. Die Einstellungs- oder „Übergangszeit“ von der statischen Verteilung zur galvanischen ist von derselben Größenordnung wie die Relaxationszeiten der verschiedenen „Elektrolyten“ oder „Isolatoren“. Für vollkommene Isolatoren ist sie unendlich groß<sup>1)</sup>.

Die genaue Abhängigkeit des Potentials  $\varphi$  von der Zeit läßt sich auf Grund der allgemeinen Grenzbedingungen

$$\Delta E_\tau = 0, \quad \Delta \left( \sigma + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_\nu = 0 \quad (47)$$

<sup>1)</sup> Strenggenommen ist sie auch für unvollkommene Isolatoren unendlich groß, denn die stationäre Stromverteilung, welche durch die Grenzbedingungen (43c) bestimmt ist, wird nur asymptotisch erreicht.

ermitteln, die man aus den Gleichungen (5b) und (6), d. h.

$$\Delta \frac{\epsilon}{4\pi} E_v = \eta \quad \text{und} \quad \Delta \sigma E_v = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

durch Differentiation des ersten nach  $t$  und Addition mit der zweiten erhält. Dazu ist aber noch die zusätzliche Bedingung hinzuzufügen, daß man ursprünglich die rein elektrostatische Potentialverteilung hat, d. h. daß im Augenblick  $t = 0$ , wenn die Elektroden plötzlich geladen werden,  $\varphi = \varphi^0$  ist, wo  $\varphi^0$  dem Fall  $\sigma = 0$  entspricht. Bei genügend kleinen Werten von  $\sigma$  muß dieser Vorgang so langsam vor sich gehen, daß man irgendwelche Induktionseffekte, welche durch die zeitliche Änderung des Vektorpotentials der elektrischen Ströme bedingt werden, außer acht lassen kann. Solche Vorgänge werden wir als *quasistatische* bezeichnen.

Wir wollen beispielsweise den folgenden Fall betrachten. Die Elektroden seien zwei unendlich ausgedehnte parallele Platten, die mit den Ebenen  $x = 0$  und  $x = l$  zusammenfallen. An der ersten Elektrode befindet sich ein Elektrolyt (oder unvollkommener Isolator)  $a$  in der Gestalt einer Schicht von der Dicke  $l_a = x_1$ ; daran grenzt eine zweite elektrolytische Schicht von der Dicke  $l_b = l - l_a$  (Abb. 42). Die Potentiale der Elektroden  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  setzen wir als konstant voraus.

Das Potential  $\varphi$  muß innerhalb  $a$  und innerhalb  $b$  der Gleichung  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$  genügen, deren Lösung lautet

$$\varphi = c_1 x + c_2,$$

wo die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  für  $a$  und  $b$  verschiedene Werte haben und von der Zeit abhängig sind.

Diese Formel stellt ein homogenes elektrisches Feld dar.

Bezeichnet man seine Stärke in  $a$  und  $b$  mit  $E_a$  bzw.  $E_b$ , so wird nach (47)

$$\left(\sigma_a + \frac{\epsilon_a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_a = \left(\sigma_b + \frac{\epsilon_b}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\right) E_b. \quad (47a)$$

Andererseits muß zwischen den beiden Feldstärken die Beziehung

$$l_a E_a + l_b E_b = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{konst} \quad (47b)$$

bestehen. Durch Elimination von  $E_b$  aus (47a) und (47b) erhalten wir die folgende Differentialgleichung für  $E_a$ :

$$\frac{1}{4\pi} (\epsilon_a l_b + \epsilon_b l_a) \frac{dE_a}{dt} + (\sigma_a l_b + \sigma_b l_a) E_a = \sigma_b (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Ihre Integration liefert:

$$E_a = \frac{\gamma}{\beta} + A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \quad (48)$$

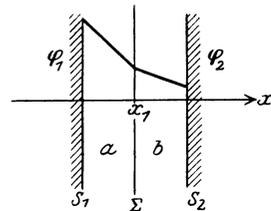


Abb. 42.

mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{\varepsilon_a l_b + \varepsilon_b l_a}{4\pi}, \quad \beta = \sigma_a l_b + \sigma_b l_a, \quad \gamma = \sigma_b (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (48a)$$

$A$  bedeutet eine zunächst unbekannte Integrationskonstante.

Bei  $t = \infty$  bekommen wir nach (48)

$$E_a^\infty = \frac{\sigma_b (\varphi_1 - \varphi_2)}{\sigma_a l_b + \sigma_b l_a}.$$

Dies entspricht der endgültigen galvanischen Potentialverteilung. Um im ursprünglichen Augenblick  $t=0$  die entsprechende statische Potentialverteilung

$$E_a^0 = \frac{\varepsilon_b (\varphi_1 - \varphi_2)}{\varepsilon_a l_b + \varepsilon_b l_a} \quad (48b)$$

zu erhalten, müssen wir die Konstante  $A$  gleich

$$A = E_a^0 - E_a^\infty \quad (48c)$$

setzen. Durch diese Formeln ist unsere Aufgabe vollständig gelöst.

Es ist interessant zu bemerken, daß der betrachtete Vorgang hinsichtlich seiner Abhängigkeit von der Zeit denselben Exponentialcharakter hat wie die Entladung eines Systems von Metalleitern, die sich in einem homogenen schlecht leitenden Medium befinden. Die Einstellungszeit

$$\tau = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon_a l_a + \varepsilon_b l_b}{4\pi(\sigma_a l_a + \sigma_b l_b)}$$

spielt dabei dieselbe Rolle wie dort die Abklingungszeit und nähert sich der letzteren an, wenn man die Dicke einer der beiden Schichten vermindert. Merkwürdigerweise nähert sie sich aber der Relaxationszeit der *verschwindenden* Schicht und nicht der übrig bleibenden an.

Dieses Paradoxon erklärt sich durch den Umstand, daß die dargelegte Theorie die *Diffusionskräfte* außer acht läßt, welche bei den betrachteten Erscheinungen immer auftreten, sowie die durch die räumliche Separation von verschiedenen Ionengattungen bedingten freien Volumladungen. Die letzteren müssen sich hauptsächlich an den Elektroden und den Trennungsf lächen zwischen den verschiedenen Elektrolyten ansammeln in der Gestalt von sehr dünnen „Polarisationsschichten“.

In erster Annäherung kann man diese Schichten als elektrische Doppelschichten behandeln, die durch bestimmte Potentialsprünge charakterisiert werden. Die Bestimmung dieser Potentialsprünge läßt sich tatsächlich nach der im Kap. III, § 8 entwickelten allgemeinen Theorie der elektrolytischen Polarisation durchführen, wobei aber diese Theorie gewisse Berichtigungen und Vervollständigungen braucht. Denn sie führt zu dem Ergebnis, daß im Gleichgewichtszustand das elektrische Feld praktisch vollkommen in den an den Elektroden befindlichen Polarisationsschichten konzentriert wird, wo sie außerordent-

lich große Werte erreichen kann, während außerhalb der Schichten die elektrische Feldstärke praktisch verschwindet. In Wirklichkeit aber erreichen die Potentialsprünge in den Elektrodenschichten bald nach dem Beginn des Stromdurchgangs bestimmte praktisch konstante Werte  $\Delta\varphi_\alpha$ , und die resultierende Potential- und Stromverteilung — jedenfalls für sehr lange Zeitdauern — läßt sich auf Grund der „effektiven“ Elektrodenpotentiale  $\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha - \Delta\varphi_\alpha$  nach der oben geschilderten Methode ermitteln, mit der Zusatzbedingung, daß bei dem Durchgang durch die Trennungsfläche zweier verschiedener Elektrolyte das Potential einen ebenfalls konstanten Sprung erfährt.

### 5. Thermoelektrische Erscheinungen und Einfluß der freien Volumladung auf die elektrostatische Potentialverteilung.

Wir müssen schließlich noch auf eine Komplikation hinweisen, die eintreten kann, wenn die Elektroden sich in einem vollkommenen Isolator, z. B. im Vakuum befinden, und wenn folglich eine rein statische Potentialverteilung zu erwarten ist. Bei sehr hohen Temperaturen findet nämlich bei allen Metalleitern eine *Verdämpfung der freien Elektronen* statt. Die letzteren treten aus dem Metall in desto größerer Menge und mit desto größeren Geschwindigkeiten heraus, je höher die Temperatur ist. Eine vollständige Theorie dieses *Richardsonschen* oder *thermoelektronischen* Effektes werden wir erst im III. Bande angeben. Hier wollen wir einfach kurz den Einfluß derjenigen *Raumladung* betrachten, die sich in der Nähe der Metalloberfläche wegen des Heraustretens der „Thermoelektronen“ bildet<sup>1)</sup>. Wir werden uns dabei vorstellen, daß die Elektroden auf konstanten Potentialen gehalten werden, und daß die ausgesandten Elektronen sich im umgebenden Dielektrikum frei bewegen können. Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Elektroden sich in einem echten materiellen Dielektrikum, z. B. in einem nicht zu stark verdünnten Gas, oder im Vakuum befinden. Im ersten Fall muß die *Geschwindigkeit v*, im zweiten die *Beschleunigung w* der Elektronen der elektrischen Feldstärke proportional sein. Man bekommt dementsprechend für die resultierende Stromdichte *j* im ersten Fall den Ausdruck

$$j = \sigma \mathfrak{E} = \frac{e^2 n}{\vartheta} \mathfrak{E}, \quad (49)$$

wo *n* die Konzentration der freien Elektronen und  $\vartheta$  ihr Reibungskoeffizient ist ( $\sigma = \frac{n}{\vartheta}$  effektive Leitfähigkeit des Isolators) und im zweiten Fall

$$j = e n v \quad \text{mit} \quad \frac{1}{2} m v^2 = e \varphi + \text{konst.} \quad (49a)$$

<sup>1)</sup> Wir haben bisher angenommen, daß die Volumdichte der freien Ladung gleich Null ist.

Die letzte Formel ist für die Bestimmung der Stromstärke im allgemeinen ungenügend, denn die Bewegungsrichtung der Elektronen ist darin nicht enthalten. Diese Unbestimmtheit verschwindet aber in allen den Fällen, wo die elektrischen Kraftlinien aus Symmetriegründen geradlinig sind<sup>1)</sup>.

Wir betrachten z. B. den einfachsten Fall von zwei planparallelen Elektroden, unter der Voraussetzung, daß nur die erste von ihnen geheizt wird und Thermoelektronen emittiert. Die Anzahl der pro Flächen- und Zeiteinheit emittierten (oder „sich verdampfenden“) Elektronen sei  $N$ . Ihre Austrittsgeschwindigkeit kann außer acht bleiben, denn sie wird entweder sofort vernichtet (bei Anwesenheit eines materiellen Isolators) oder ist sehr klein gegenüber der durch das elektrische Feld erteilten Geschwindigkeit (bei Fehlen eines solchen Isolators, d. h. in vacuo).

Die Stromstärke (oder eher Dichte)  $J = env$  darf dabei nicht größer sein als die gesamte aus der ersten Elektrode pro Zeiteinheit heraus-tretende elektrische Ladung  $Ne$ . Ist die Bedingung

$$env < Ne$$

erfüllt, so muß ein Teil der Thermoelektronen in die erste Elektrode zurückkehren. Dagegen bei  $nv = N$  gehen sie alle zur zweiten Elektrode über. Der entsprechende Maximalwert oder *Sättigungswert* des Stromes drückt sich folglich durch

$$J_{\max} = eNv \quad (49b)$$

aus. Wir nehmen zunächst an, daß  $J < J_{\max}$  ist und beschränken uns auf die stationäre Stromverteilung, bei welcher  $J$  von  $x$  unabhängig ist.

Das Potential  $\varphi$  wird jetzt nicht durch die *Laplacesche*, sondern durch die *Poissonsche* Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi ne \quad (50)$$

bestimmt, wobei man in der rechten Seite entweder

$$ne = \frac{J\vartheta}{eE} = -\frac{J\vartheta}{e\frac{d\varphi}{dx}} \quad (50a)$$

nach (49), oder

$$ne = \frac{J}{\sqrt{\frac{2e\varphi}{m} + \text{konst}}} \quad (50b)$$

nach (49a) setzen muß. Dies gibt im ersten Fall

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{4\pi J\vartheta}{e} \cdot x + \text{konst} \equiv \alpha x + c_1 \quad (51)$$

und folglich

$$\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3\alpha} (\alpha x + c_1)^{3/2} + c_2, \quad (51a)$$

<sup>1)</sup> Sonst muß man statt der Energiegleichung die üblichen Bewegungsgleichungen betrachten.

wo  $c_1$  und  $c_2$  zwei Konstanten bedeuten, die durch die Potentiale  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der beiden Elektroden ausgedrückt werden können.

Im zweiten Fall ergibt sich, wenn man die in (50b) auftretende Konstante gleich Null setzt (dies entspricht bei  $\varphi_1 = 0$  einer verschwindenden Austrittsgeschwindigkeit der Thermoelktronen)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d\varphi'}{dx} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} \varphi' = -\frac{\beta}{\sqrt{\varphi}}$$

mit den Abkürzungen

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{4\pi J}{\sqrt{\frac{2e}{m}}}$$

Daraus folgt  $\frac{1}{2} \frac{d(\varphi'^2)}{d\varphi} = -\frac{\beta}{\sqrt{\varphi}}$ , d. h.

$$\varphi'^2 = E^2 = c_1 - 4\beta\sqrt{\varphi}.$$

Da bei  $x = 0$   $\varphi = 0$  ist, so bedeutet  $c_1$  das Quadrat der elektrischen Feldstärke  $E_0$  in der unmittelbaren Nähe der ersten Elektrode. Man hat also

$$E_0^2 - E^2 = 4\beta\sqrt{\varphi}. \quad (52)$$

Diese Gleichung läßt sich ohne Schwierigkeit weiter integrieren. Man erhält nämlich mit  $\sqrt{\varphi} = y$

$$x = \int_0^y \frac{2y dy}{\sqrt{E_0^2 - 4\beta y}} = -\left[ y \sqrt{E_0^2 - 4\beta y} \right]_0^y + \frac{1}{\beta} \int_0^y \sqrt{E_0^2 - 4\beta y} dy,$$

d. h.

$$x = \frac{3}{8\beta^2} E_0^3 - \frac{3}{8\beta^2} (E_0^2 - 4\beta y)^{3/2} - y (E_0^2 - 4\beta y)^{1/2}, \quad (52a)$$

oder nach (52)

$$x = \frac{3}{8\beta^2} (E_0^3 - E^3) - \frac{(E_0^2 - E^2)}{4\beta} E. \quad (52b)$$

Wir werden diese Formeln nicht näher diskutieren und wollen uns mit der folgenden Bemerkung begnügen. Der maximale Strom, den man bei einer gegebenen Potentialdifferenz  $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2$  erhalten kann, entspricht dem Verschwinden der elektrischen Feldstärke an der zweiten Elektrode  $E_2 = 0$ . Dies gibt nach (52) und (52b) die Beziehungen

$$E_0^2 = 4\beta\sqrt{\varphi_2}, \quad l = \frac{3}{8\beta^2} E_0^3.$$

Durch Elimination von  $E_0$  bekommen wir

$$J = \frac{9\sqrt{\frac{2e}{m}}}{4\pi l^2} (\varphi_2 - \varphi_1)^{3/2}. \quad (52c)$$

Setzt man hier  $J = Ne$  ein, so erhält man die kleinste Potentialdifferenz, die notwendig ist, um alle aus der geheizten Elektrode heraustretenden Thermoelektronen zur kalten Elektrode wegzutreiben.

Diese (von *Langumir* herrührenden) Resultate lassen sich auf den Fall von Elektroden beliebiger Gestalt verallgemeinern. Doch können wir hier auf diese Frage nicht eingehen.

## § 6. Allgemeine Prinzipien der Elektro- und Galvanostatik.

### 1. Eindeutigkeit der Lösung des elektrostatischen Problems und Minimalsätze.

Wir werden im folgenden die von der elektrolytischen Polarisierung und von dem thermoelektronischen Effekt herrührenden Komplikationen außer acht lassen und die statische oder galvanische Potentialverteilung nach den am Anfang des vorigen Paragraphen dargelegten Prinzipien ausführlich untersuchen. Da diese beiden Verteilungen formal identisch sind, wobei die erste in die zweite übergeht, wenn man die Elektrodenladungen  $e_\alpha$  durch die Stromstärken  $J_\alpha$  und die Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_i$  durch die mit  $4\pi$  multiplizierten Leitfähigkeiten  $\sigma_i$  ersetzt, so können wir uns auf die Untersuchung des elektrostatischen Problems beschränken.

Wir wollen zunächst zeigen, daß dieses Problem in den beiden oben angeführten Formulierungen sich *eindeutig* lösen läßt.

Für den einfachsten Fall, daß alle Elektroden oder „Metalleiter“ sich im leeren Raum befinden, ist der gesuchte Eindeutigkeitsbeweis tatsächlich schon im I. Bande, Kap. IV, § 5 (S. 111) durchgeführt worden, und zwar bei der Behandlung der Frage nach der äquivalenten Flächenverteilung der Ladungen, die außerhalb oder innerhalb der gegebenen Oberflächen ein bekanntes der Laplaceschen Gleichung genügendes elektrisches Feld erzeugen.

Diesen Beweis kann man leicht auf den Fall verallgemeinern, daß es neben den Leitern eine beliebige Anzahl von Isolatoren oder Dielektrika gibt, die zwischen ihnen liegen oder sie umgeben.

Wir denken uns dabei das ganze System durch eine zusätzliche Fläche  $S_0$  eingeschlossen, und teilen das zwischen dieser Fläche und den Oberflächen der betreffenden Leiter  $S_\alpha$  enthaltene Volumen  $V$  auf einzelne Volumina  $V_i$ , die durch homogene Dielektrika erfüllt und durch ihre Trennungsoberflächen oder die Oberflächen  $S_\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots, n$ ) begrenzt sind. Auf jedes dieser Teilvolumina wenden wir die Transformationsformel

$$\oint \psi \nabla_n \varphi \, dS_i = \int \psi \nabla^2 \varphi \, dV_i + \int \nabla \psi \cdot \nabla \varphi \, dV_i \quad (53)$$

an [vgl. (20) S. 111, Bd. I], setzen hier

$$\psi = \epsilon_i \varphi$$

und summieren nach  $i$ .

Falls  $\varphi$  der Gleichung  $\nabla^2 \varphi = 0$  und den Grenzbedingungen (44) genügt, so zerstören sich die über die Trennungsflächen der verschiedenen Dielektrika genommenen Integrale gegenseitig und man bekommt einfach:

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \int \varepsilon \nabla_n \varphi d S_\alpha = \int \varepsilon (V\varphi)^2 d V. \quad (53a)$$

Die hier auftretenden Normalrichtungen bedeuten die in bezug auf das Volum  $V$  äußeren und folglich in bezug auf die Oberflächen  $S_1, S_2 \dots$  der Leiter inneren Normale. Man hat folglich  $(\varepsilon \nabla_n \varphi)_\alpha = +4\pi \eta_\alpha$  und wegen  $(\varphi)_\alpha = \varphi_\alpha = \text{konst}$ :

$$\sum_{\alpha>0} \int \varepsilon \nabla_n \varphi d S_\alpha = 4\pi \sum_{\alpha>0} \varphi_\alpha e_\alpha. \quad (53b)$$

Was nun den Wert des über  $S_0$  erstreckten Integrals betrifft, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem das betrachtete Leitersystem nach außen durch eine leitende Hülle tatsächlich abgeschlossen ist oder nicht. Im ersten Fall werden wir für  $S_0$  die innere Oberfläche dieser Hülle annehmen, wobei wir für das entsprechende Integral den Wert  $4\pi\varphi_0 e_0$  erhalten. Im zweiten Fall lassen wir die Oberfläche  $S_0$  ins unendliche rücken, wobei das betreffende Integral verschwindet. Wir bekommen also in den beiden Fällen nach (53a)

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{2} \varphi_\alpha e_\alpha = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 d V. \quad (54)$$

Es sei bemerkt, daß für eine innerhalb der äußeren Metallhülle liegende Fläche  $S_0$  die folgende sich aus der Gleichung  $\text{div } \varepsilon E = 4\pi\rho$  ergebende Relation besteht:

$$\oint \varepsilon E_n d S_0 = 4\pi \sum_0^n e_\alpha = 0,$$

denn  $E$  ist offenbar gleich Null. Dies bedeutet, daß die auf der inneren Oberfläche der Metallhülle (falls eine solche vorhanden ist) befindliche Ladung entgegengesetzt gleich ist der algebraischen Summe der Ladungen der inneren Leiter.

Die rechte Seite der Formel (54) stellt [vgl. II. Kap., § 1] die den freien Elektronen zugehörige Energie  $W_f$  dar. Die linke Seite hat folglich dieselbe Bedeutung, wobei sie der „Substanzvorstellung“ oder der „Fernwirkungstheorie“ entspricht.

Wir werden diese Frage noch später diskutieren. Für den Augenblick brauchen wir die Formel (54) nur um den oben erwähnten Eindeutigkeitsbeweis zu erbringen. Zu diesem Zweck stellen wir uns vor, daß  $\varphi'$  und  $\varphi''$  zwei verschiedene stetige und denselben Grenzbedingungen genügende Lösungen der Laplaceschen Gleichung sind. Dann muß auch ihre Differenz  $\varphi = \varphi' - \varphi''$  eine Lösung der letzteren Gleichung darstellen, die den Grenzbedingungen (44) Genüge leistet und auf der

Oberfläche der Leiter entweder gleich Null wird oder jedenfalls konstante Werte annimmt, wobei im letzten Fall die Ladungen  $e_\alpha = e'_\alpha - e''_\alpha$  gleich Null sein müssen. Nach der Formel (54) muß in beiden Fällen das Integral  $\int \varepsilon (\nabla \varphi)^2 dV$  verschwinden. Da aber die Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  positive Zahlen sind, so ist dies nur dann möglich, wenn  $\nabla \varphi$  und folglich auch  $\varphi$  im ganzen Volum  $V$  verschwindet, d. h. wenn  $\varphi' \equiv \varphi''$  ist.

Wir nehmen nun an, daß  $\varphi (= \varphi' = \varphi'')$  die einzige Lösung des betrachteten Problems ist und vergleichen den Wert des „Energieintegrals“

$$W_f = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 dV \quad (54a)$$

mit demjenigen Wert  $W'_f = W_f + \Delta W_f$ , welcher einem anderen variierten Feld  $\mathcal{E}' = -\nabla \varphi'$ ,  $\varphi' = \varphi + \delta \varphi$  entspricht. Dieses variierte Feld soll dabei den Grenzbedingungen (44) für die Trennungsf lächen der verschiedenen Dielektrika genügen. Von der Gleichung  $\nabla^2 \varphi = 0$  und den Bedingungen (43a) oder (43b) sehen wir aber vorläufig ab.

Wir betrachten zunächst denjenigen Teil von  $\Delta W_f$ , welcher einem homogenen Teilvolum  $V_i$  entspricht. Es ergibt sich dabei (vgl. Bd. I, S. 111)

$$8\pi (\Delta W_f)_i = 2 \int \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \delta \varphi dV_i + \int \varepsilon (\nabla \delta \varphi)^2 dV.$$

Nun kann man nach (53) das erste Integral auf der rechten Seite in der Gestalt

$$\oint \varepsilon \delta \varphi \nabla_n \varphi dS_i - \int \varepsilon \delta \varphi \nabla^2 \varphi dV_i$$

oder

$$\oint \varepsilon \varphi \nabla_n \delta \varphi dS_i - \int \varepsilon \varphi \nabla^2 \delta \varphi dV_i$$

darstellen.

Setzt man diese Ausdrücke in die vorhergehende Formel ein und summiert über  $i$ , so erhält man mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen für die „dielektrischen Unstetigkeiten“:

$$\Delta W_f = \frac{1}{4\pi} \sum_\alpha \oint \varepsilon \delta \varphi \nabla_n \varphi dS_\alpha - \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon \delta \varphi \nabla^2 \varphi dV + \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (\nabla \delta \varphi)^2 dV \quad (54b)$$

bzw.

$$\Delta W_f = \frac{1}{4\pi} \sum_\alpha \oint \varepsilon \varphi \nabla_n \delta \varphi dS_\alpha - \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon \varphi \nabla^2 \delta \varphi dV + \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (\nabla \delta \varphi)^2 dV. \quad (54c)$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite von (54b) verschwindet wegen  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Wählt man nun das variierte Potential  $\varphi'$  in der Weise, daß es auf den Oberflächen der Leiter dieselben Werte  $\varphi_\alpha$  wie  $\varphi$  annimmt, so muß auch das erste Integral verschwinden. Es sei bemerkt, daß bei diesen Bedingungen  $\varphi'$  der Laplaceschen Gleichung im ganzen Volum  $V$  *nicht* genügen kann, denn man würde sonst einfach  $\varphi' \equiv \varphi$  haben. Da das dritte Integral einen wesentlich positiven Wert hat.

so muß  $W'_f$  immer größer als  $W_f$  sein. Dieses Resultat läßt sich folgendermaßen auffassen:

Sind die Potentiale der Leiter (Elektroden) festgehalten, so erhält die den freien elektrischen Ladungen zugehörige Energie dann einen minimalen Wert, wenn diese Ladungen sich ausschließlich auf den Leiteroberflächen verteilen.

Ein ähnlicher Minimalsatz ergibt sich auf Grund der Formel (54c). Wir stellen uns jetzt vor, daß die variierte Potentialfunktion, ebenso wie die ursprüngliche der Laplaceschen Gleichung genügt (so daß die freien Ladungen auf den Leiteroberflächen verteilt bleiben). Es muß folglich in diesem Fall das erste Volumintegral in (54c) verschwinden. Da ferner das Potential  $\varphi$  auf den Leiteroberflächen konstante Werte annimmt — die übrigens unbekannt sein können — reduzieren sich diese Integrale auf die Produkte dieser Werte mit

$$\int \frac{1}{4\pi} \varepsilon \nabla_n \delta \varphi d S_\alpha = \delta \int \frac{\varepsilon}{4\pi} \nabla_n \varphi d S_\alpha = \delta e_\alpha,$$

d. h. auf Null, falls die Ladungen  $e_\alpha$  unverändert bleiben.

Sind also die Ladungen der Leiter festgehalten, so erhält die zugehörige Energie  $W_f$  einen minimalen Wert bei derjenigen Verteilung dieser Ladungen, bei welchen die Potentiale der Leiter konstante Werte annehmen. Mit anderen Worten: *die Gleichgewichtsverteilung der Ladungen auf der Leiteroberfläche entspricht einem Minimum ihrer potentiellen Energie.*

Dieses in der obigen mathematischen Form zuerst von *W. Thomson* gegebene Resultat ist von vornherein klar und vollkommen analog zu der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung der gewöhnlichen Statik. Es kann als der einfachste Spezialfall des im I. Bande angeführten *Schwarzschild'schen* Variationsprinzips angesehen werden, aus welchem bekanntlich die allgemeinen Feld- und Bewegungsgleichungen eines beliebigen Systems von Elektronen unmittelbar folgen.

Die beiden durch die Bedingungen (43a) oder (44c) charakterisierten Formulierungen des elektrostatischen Problems lassen sich folglich durch die vorhergehenden zwei Variationsformulierungen ersetzen, d. h. durch das allgemeine Prinzip

$$W_f = \text{minimum}$$

mit der Nebenbedingung  $\varphi_\alpha = \text{gegeben}$  ( $\delta \varphi_\alpha = 0$ ) oder  $e_\alpha = \text{gegeben}$  ( $\delta e_\alpha = 0$ ). Es müssen außerdem in beiden Fällen die Grenzbedingungen (44) erfüllt sein.

## 2. Galvanostatisches Problem und seine Verknüpfung mit dem elektrostatischen im Falle von zwei Elektroden.

Wegen der formalen Identität des elektrostatischen und des galvanischen Problems können diese Ergebnisse sofort auf das letztere über-

tragen werden. Führt man insbesondere statt der Energie  $W_f$  die Funktion

$$Q = \int \sigma E^2 dV, \quad (55)$$

welche die im ganzen betrachteten Volum pro Zeiteinheit entwickelte *Joulesche* Wärme bedeutet, so kann man behaupten, daß die stationäre Verteilung der elektrischen Strömung in diesem Volum einem Minimum von  $Q$  bei festgehaltenen Elektrodenpotentialen  $\varphi_\alpha$  oder Stromstärken  $J_\alpha$  entspricht. Dieses Resultat haben wir für den Fall eines linearen Stromnetzes in einer etwas verschiedenen Form schon im § 3 gefunden.

Wir können ferner [vgl. (54)] die *Joulesche* Wärme in der Gestalt

$$Q = \sum \varphi_\alpha J_\alpha \quad (55a)$$

darstellen; durch diese Formel ist sie als die durch die elektrischen Kräfte pro Zeiteinheit geleistete Arbeit bestimmt.

Die algebraische Summe der von allen Elektroden zugeführten Ströme ist für alle in Betracht kommenden Fälle einer stationären Stromverteilung gleich Null. Dieser Bedingung

$$\sum J_\alpha = 0$$

entspricht im elektrostatischen Problem die *Neutralität* des ganzen Leitersystems. In dem einfachsten Fall von *zwei* Elektroden ergibt sich dabei

$$Q = (\varphi_1 - \varphi_2) J \quad (J = J_1 = -J_2). \quad (55b)$$

In dem entsprechenden elektrostatischen Problem ergibt sich nach (54):

$$W_f = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) e \quad (e = e_1 = -e_2). \quad (55c)$$

Setzt man in diese Ausdrücke die Werte von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  nach den Formeln (42) oder (45) ein, so erhält man:

$$Q = R J^2 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{R} \quad (56)$$

mit

$$R = R_{11} + R_{22} - R_{12} - R_{21}$$

und

$$W_f = \frac{1}{2} \frac{e^2}{K} = \frac{1}{2} K (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (56a)$$

mit

$$\frac{1}{K} = q_{11} + q_{22} - q_{12} - q_{21}.$$

Die Koeffizienten  $R$  und  $K$  heißen der *Widerstand* bzw. die *Kapazität* des betreffenden Systems. Im galvanischen Fall spricht man gewöhnlich von dem Widerstand des die Elektroden umgebenden Mediums und im elektrostatischen — von der Kapazität des durch die

beiden Leiter gebildeten „Kondensators“, wobei dem dielektrischen Zwischenmedium eine untergeordnete Rolle zugeschrieben wird. In dem Falle eines einzigen homogenen Mediums mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  bzw. der Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  sind die Koeffizienten  $R$  und  $K$  (bei derselben Gestalt und relativer Lage der Elektroden) miteinander nach (45b) durch die Beziehung

$$RK = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad (56b)$$

verknüpft.

Diese Beziehung läßt sich direkt ableiten, wenn wir uns vorstellen, daß es sich um *ein und dasselbe* Medium handelt, und daß unser Kondensator sich durch dieses Medium entladet. Es muß dabei die elektrische Energie  $W_f$  in Joulesche Wärme übergehen, gemäß der Gleichung

$$Q = - \frac{dW_f}{dt}, \quad (57)$$

woraus nach (56) und (56a) folgt

$$\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R} = -K \frac{d}{dt} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (57a)$$

oder

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{konst } e^{-\frac{t}{RK}}. \quad (57b)$$

Aus dem Vergleich dieser Formel mit (46b) ergibt sich

$$KR = \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}.$$

Der Zusammenhang zwischen  $Q$  und  $W_f$  für den allgemeinen Fall einer beliebigen Anzahl Elektroden, die sich durch irgendein schlecht leitendes Medium entladen, muß offenbar durch dieselbe Gleichung (57) ausgedrückt werden.

### 3. Nähere Betrachtung der elektrostatischen Energie und der Induktions- bzw. der Kapazitätskoeffizienten.

Aus der Gleichung (57) in Verknüpfung mit (55a) und  $J_\alpha = -\frac{de_\alpha}{dt}$  ergibt sich die Formel:

$$dW_f = \sum \varphi_\alpha de_\alpha \quad (58)$$

Es ist aber leicht zu sehen, daß diese Formel nicht nur für den obigen Entladungsvorgang, sondern für *beliebige quasistatische Prozesse gültig ist*. Dies folgt direkt aus der Definition des Potentials  $\varphi$  in Verknüpfung mit dem Umstand, daß bei solchen Prozessen das Potential jedes Leiters (Elektrode) in allen Punkten des letzteren stets denselben Wert behält.

Der Vergleich von (58) mit der Formel

$$W_f = \frac{1}{2} \sum \varphi_\alpha e_\alpha \quad (58a)$$

zeigt<sup>1)</sup>, daß  $W_f$  eine homogene quadratische Funktion der Ladungen ist, und daß folglich die Potentiale mit den letzteren durch homogene lineare Beziehungen verknüpft sein müssen — wie wir es von Anfang an angenommen haben.

Die soeben angeführte energetische Ableitung dieses Resultats erlaubt es aber, die erwähnten Beziehungen in einer wichtigen Hinsicht zu präzisieren. — Man hat nämlich nach (58), wenn man die Energie  $W_f$  als Funktion der Ladungen behandelt:

$$\varphi_\alpha = \left( \frac{\partial W_f}{\partial e_\alpha} \right)_{e_\beta},$$

und folglich

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial e_\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial e_\alpha},$$

d. h. nach (45)

$$q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}.$$

Die elektrostatischen Induktionskoeffizienten sind also symmetrisch bezüglich der beiden Indizes [ebenso wie die elektromagnetischen  $L_{\alpha\beta}$  vgl. §3]. Dieselbe Symmetrieeigenschaft müssen offenbar auch die Kapazitätskoeffizienten  $p_{\alpha\beta}$  und die Koeffizienten  $R_{\alpha\beta}$ ,  $s_{\alpha\beta}$  besitzen. Was die ersteren anbetrifft, so kann man dies unmittelbar beweisen, und zwar in derselben Weise wie für die Koeffizienten  $q_{\alpha\beta}$ .

Wir schreiben nämlich die Gleichung (58) folgendermaßen um:

$$dW_f = d(\sum \varphi_\alpha e_\alpha) - \sum e_\alpha d\varphi_\alpha,$$

woraus folgt gemäß (58a)

$$dW_f = \sum e_\alpha d\varphi_\alpha, \quad (58b)$$

d. h.

$$e_\alpha = \left( \frac{\partial W_f}{\partial \varphi_\alpha} \right)_{\varphi_\beta}$$

und

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial \varphi_\beta} = \frac{\partial e_\beta}{\partial \varphi_\alpha},$$

oder

$$p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}.$$

Mittels der Koeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  oder  $p_{\alpha\beta}$  ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die Energie  $W_f$  als Funktion der Ladungen allein, oder der Potentiale allein:

$$\left. \begin{aligned} W_f &= \frac{1}{2} \sum \sum q_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta, \\ W_f &= \frac{1}{2} \sum \sum p_{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (58c)$$

<sup>1)</sup> Mit Rücksicht auf den bekannten *Eulerschen* Satz über homogene Funktionen.

Die einzelnen Glieder  $q_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta$  bzw.  $p_{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta$  stellen denjenigen Anteil dieser Energie, welcher von der Wechselwirkung der entsprechenden Elektrodenpaare herrührt. Es könnte schon daraus geschlossen werden, daß  $q_{\alpha\beta}$  und  $p_{\alpha\beta}$  symmetrische Größen sind.

Wir möchten noch den Umstand betonen, daß diese Größen nur von der Gestalt und Lage der Elektroden und selbstverständlich von der Beschaffenheit des dielektrischen Mediums abhängen, nicht aber von den Verhältnissen  $e_\alpha : e_\beta$  oder  $\varphi_\alpha : \varphi_\beta$ . Wären z. B. die Koeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  homogene Funktionen „nullten Grades“ von  $e_1, e_2, \dots$ , so würde man nach (58c)

$$\begin{aligned} dW_f &= \sum_\alpha \left( \sum_\beta q_{\alpha\beta} e_\beta \right) d e_\alpha + \frac{1}{2} \sum \sum e_\alpha e_\beta d q_{\alpha\beta} \\ &= \sum \varphi_\alpha d e_\alpha + \frac{1}{2} \sum \sum e_\alpha e_\beta d q_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

haben, was bei  $d q_{\alpha\beta} \neq 0$  mit (58) unverträglich ist.

Die angeführten Resultate könnte man freilich aufstellen, ohne den Energiebegriff einzuführen. Die Konstanz der Koeffizienten  $q$  (im obigen Sinne) läßt sich z. B. leicht ableiten aus der *Additivität* von verschiedenen Lösungen desselben elektrostatischen Problems, die verschiedenen Werten der Potentiale  $\varphi_\alpha$  oder der Ladungen  $e_\alpha$  entsprechen. Sind nämlich  $\varphi = \varphi'$  und  $\varphi = \varphi''$  die Potentiale, welche sich bei den Grenzbedingungen  $\varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$  (oder  $e_\alpha = e'_\alpha$ ) bzw.  $\varphi_\alpha = \varphi''_\alpha$  ( $e_\alpha = e''_\alpha$ ) ergeben, so stellt ihre Summe  $\varphi' + \varphi''$  das Potential desjenigen Feldes dar, welches man bei den Grenzbedingungen  $\varphi_\alpha = \varphi'_\alpha + \varphi''_\alpha$  (oder  $e_\alpha = e'_\alpha + e''_\alpha$ ) bekommen würde. Wir stellen uns nun vor, daß zunächst nur die erste Elektrode eine Ladung  $e_1$  erhält, während die anderen ungeladen bleiben. Sie müssen aber dabei gewisse, dieser Ladung proportionale Potentiale  $\varphi_1 = q_{11} e_1, \varphi_2 = q_{21} e_1, \dots$  bekommen. Dann superponieren wir über dieses Feld dasjenige Feld, welches einer Ladung  $e_2$  der zweiten Elektrode bei Neutralität aller anderen entspricht usw. Wir erhalten auf diese Weise für die Potentiale  $\varphi_\alpha$  Summen von der Gestalt  $q_{\alpha 1} e_1 + q_{\alpha 2} e_2 + \dots$ , wobei die Unabhängigkeit der Koeffizienten  $q_{\alpha 1}, q_{\alpha 2}, \dots$  von den Verhältnissen  $e_1 : e_2 : \dots$  ganz einleuchtend wird. In ähnlicher Weise läßt sich auch ihre Symmetrie beweisen.

Aus der Tatsache, daß die Energie  $W_f$  eine wesentlich positive Größe darstellen muß, unabhängig von den Vorzeichen der Ladungen  $e_1, e_2, \dots, e_n$  (oder der Potentiale), kann man sofort eine Reihe von Ungleichungen für die Induktionskoeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  und die Kapazitätskoeffizienten  $p_{\alpha\beta}$  aufstellen.

*Erstens* müssen die Koeffizienten  $q_{\alpha\alpha}, p_{\alpha\alpha}$  ebenso wie die verschiedenen Determinanten von der Gestalt:

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} q_{\alpha_1 \alpha_1} & q_{\alpha_1 \alpha_2} & \dots & q_{\alpha_1 \alpha_m} \\ q_{\alpha_2 \alpha_1} & q_{\alpha_2 \alpha_2} & \dots & q_{\alpha_2 \alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{\alpha_m \alpha_1} & q_{\alpha_m \alpha_2} & \dots & q_{\alpha_m \alpha_m} \end{array} \right| \quad \text{bzw.} \quad \left| \begin{array}{cccc} p_{\alpha_1 \alpha_1} & p_{\alpha_1 \alpha_2} & \dots & p_{\alpha_1 \alpha_m} \\ p_{\alpha_2 \alpha_1} & p_{\alpha_2 \alpha_2} & \dots & p_{\alpha_2 \alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{\alpha_m \alpha_1} & p_{\alpha_m \alpha_2} & \dots & p_{\alpha_m \alpha_m} \end{array} \right| \quad (59) \end{array}$$

( $m < n$ ) positiv sein, wie dies aus der allgemeinen Theorie der quadratischen Formen bekannt ist.

Wegen der speziellen Bedingungen des betrachteten Problems, die mit der Gleichung  $\nabla^2 \varphi = 0$  verknüpft sind, kann man aber eine Reihe anderer die Werte der Koeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  und  $p_{\alpha\beta}$  enger beschränkender Ungleichungen aufstellen. Die obige Gleichung zeigt nämlich, daß das Potential  $\varphi$  außerhalb der Elektroden keine Maxima oder Minima besitzen kann. Denn in einem solchen Punkt sollte man neben der Gleichung  $\nabla \varphi = 0$  noch die Ungleichungen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} < 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} > 0,$$

d. h.  $\nabla^2 \varphi < 0$  oder  $\nabla^2 \varphi > 0$  haben. Die größten und kleinsten Werte des Potentials  $\varphi$  müssen folglich auf den Elektroden erreicht werden. Dabei ist noch der Umstand zu berücksichtigen, daß im Unendlichen  $\varphi = 0$  ist.

Wir stellen uns nun vor, daß  $e_1 = 1$ , während  $e_2 = \dots = e_n = 0$  ist. Dann muß offenbar der maximale (positive) Wert des Potentials der ersten Elektrode zugehören, während die anderen Elektroden positive aber kleinere Potentiale haben. Dies gibt die Ungleichungen

$$q_{\alpha\alpha} - q_{\alpha\beta} > 0, \quad q_{\alpha\beta} > 0. \quad (\alpha \neq \beta) \quad (59a)$$

Wir nehmen jetzt an, daß das Potential der ersten Elektrode = 1 und der anderen = 0 ist. Dann sind ihre Ladungen gleich  $e_1 = p_{11}$ ,  $e_2 = p_{21}$ ,  $\dots$   $e_n = p_{n1}$ . Nun muß offenbar  $e_1$  positiv und die anderen „induzierten“ Ladungen negativ sein, wobei ihre Summe nach dem absoluten Betrag nicht größer als  $e_1$  sein kann. Dies folgt aus dem Umstand, daß die elektrischen Kraftlinien im betrachteten Falle auf der ersten Elektrode beginnen und teilweise auf den anderen enden, teilweise ins Unendliche laufen. Wir haben also

$$p_{\alpha\beta} < 0, \quad p_{\alpha 1} + p_{\alpha 2} + \dots + p_{\alpha n} > 0. \quad (\alpha \neq \beta) \quad (59b)$$

Ähnliche Resultate gelten für die galvanischen Widerstands- bzw. Leitfähigkeitskoeffizienten  $R_{\alpha\beta}$  und  $s_{\alpha\beta}$ . Wegen der formalen Äquivalenz des elektrostatischen und des galvanischen Problems brauchen wir auf diese Frage nicht näher einzugehen.

#### 4. Die elektrostatischen Kräfte.

Sind die Koeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  oder  $p_{\alpha\beta}$  als Funktionen der Koordinaten  $x_1, x_2, \dots$ , welche die relative Lage der Leiter bestimmen, bekannt, so ist es leicht, die auf den letzteren im Sinne dieser Koordinaten wirkenden mechanischen Kräfte  $F_1^{(m)}, F_2^{(m)}, \dots$  mittels der Energieausdrücke (58c) zu berechnen. Wenn die Ladungen der Leiter festgehalten sind, so hat man einfach

$$F_i^{(m)} = - \left( \frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_e = - \frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial q_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \cdot e_\alpha e_\beta. \quad (60)$$

Dieser Ausdruck für die mechanische Kraft bleibt offenbar auch in demjenigen Fall gültig, wenn nicht die Ladungen, sondern die Potentiale der Leiter festgehalten werden. Dabei ist das betrachtete System nicht isoliert, sondern mit äußeren Stromquellen verbunden. Die durch  $d\mathbf{x}_i$  dargestellte Verschiebung der Leiter ist im allgemeinen mit einem gewissen Zu- oder Abfluß der Elektrizität von diesen Quellen verknüpft, wobei durch die äußeren elektromotorischen Kräfte eine gewisse Arbeit  $F_i^e d\mathbf{x}_i$  geleistet wird. Wir müssen folglich in diesem Fall statt (60) die Beziehung

$$F_i^{(m)} + F_i^{(e)} = - \left( \frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_\varphi = - \frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \varphi_\alpha \varphi_\beta \quad (60a)$$

haben.

Nun gilt *identisch* in den Variablen  $e_\alpha$ ,  $\varphi_\beta$ ,  $x_i$ :

$$\frac{1}{2} \sum \sum q_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta + \frac{1}{2} \sum \sum p_{\alpha\beta} \varphi_\alpha \varphi_\beta = \sum e_\alpha \varphi_\alpha .$$

Betrachtet man also diese Variablen als *unabhängig* voneinander, so ergibt sich durch Differentiation nach  $x_i$

$$\frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial q_{\alpha\beta}}{\partial x_i} e_\alpha e_\beta + \frac{1}{2} \sum \sum \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \varphi_\alpha \varphi_\beta = 0 ,$$

d. h.

$$\left( \frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_e + \left( \frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_\varphi = 0 . \quad (60b)$$

Daraus folgt nach (60a)

$$F_i^{(e)} = + \left( \frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_e - F_i^{(m)} = - 2 F_i^{(m)} .$$

Die Arbeit der elektromotorischen Kräfte bei festgehaltenen Potentialen ist folglich doppelt so groß als die mechanische Arbeit und hat das entgegengesetzte Vorzeichen. Die mechanische Kraft läßt sich nach (60) und (60b) auch in der Gestalt

$$F_i^{(m)} = + \left( \frac{\partial W_f}{\partial x_i} \right)_\varphi = + \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial x_i} \varphi_\alpha \varphi_\beta$$

darstellen, die besonders bequem ist, wenn die Potentiale gegeben sind. — Es ist nicht schwierig, auch den allgemeinen Fall zu behandeln, wenn bei einigen Leitern die Ladungen, bei den anderen die Potentiale als gegebene festgehaltene Größen anzusehen sind.

Die mechanischen Kräfte, welche auf die einzelnen Leiter seitens der anderen ausgeübt werden, können für jede gegebene Lage ohne Kenntnis der Koeffizienten  $q$  und  $p$  bestimmt werden, sofern das elektrische Feld an ihrer Oberfläche ( $E$ ) oder — was auf dasselbe herauskommt — die Verteilung der Ladung ( $\eta$ ) bekannt ist. Zu diesem Zweck können wir den im II. Kapitel gegebenen allgemeinen Ausdruck für den den freien Elektronen zugehörigen Spannungstensor  ${}^2\mathfrak{F}_f$  benutzen. Da die

elektrischen Kraftlinien senkrecht zur Oberfläche gerichtet sind, bekommen wir eine nach der äußeren Normale gerichtete Zugkraft, deren Betrag pro Flächeneinheit mit der Volumdichte der Energie  $W_f$ , d. h. mit

$$\xi_f = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \quad (61)$$

übereinstimmt. Die vollständige auf einen beliebigen Leiter wirkende Kraft ist folglich gleich

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{8\pi} \oint n \varepsilon E^2 dS. \quad (61a)$$

Die Kräfte, mit welchen die verschiedenen Elemente seiner eigenen Oberflächenladung aufeinander wirken, müssen sich selbstverständlich bei der Integration gegenseitig aufheben.

Der Ausdruck (61a) läßt sich ganz elementar ableiten, wenn man die Gleichgewichtsbedingung der auf die Leiteroberfläche verteilten Ladung etwas näher betrachtet. Denken wir uns nämlich die in der unmittelbaren Nähe eines Flächenelementes  $s$  wirkende elektrische Feldstärke in zwei Bestandteile zerlegt — denjenigen  $\mathfrak{E}'$ , welcher von der auf diesem Flächenelement befindlichen Ladung  $\eta s$  herrührt und einen zweiten  $\mathfrak{E}''$ , welcher durch die Gesamtheit aller anderen Ladungen bedingt wird. In solchen Abständen, die sehr klein gegen die Linearabmessungen von  $s$  sind, kann man  $s$  als unendlich ausgedehnt behandeln und  $\mathfrak{E}'$  gleich  $\pm n \cdot 2\pi\eta$  setzen. Da innerhalb des Leiters die resultierende Feldstärke gleich Null ist, und da ferner bei dem Übergang von innen nach außen  $\mathfrak{E}''$  keine merkliche Änderung erfährt, so muß diese „äußere“ Feldstärke auf der äußeren Seite von  $s$  gleich einer Hälfte der resultierenden Feldstärke  $E$  sein. Wir bekommen also<sup>1)</sup>

$$E'' = E' = \frac{1}{2} E = 2\pi\eta. \quad (61b)$$

Es muß in dieser Formel  $\eta$  die totale von den freien und von den gebundenen Elektronen des umgebenden Dielektrikums herrührende Flächen-dichte der elektrischen Ladung bedeuten. Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\eta = \frac{\eta_f}{\varepsilon} \quad (61c)$$

erhalten wir also die übliche Formel

$$\varepsilon E = 4\pi\eta_f.$$

Die auf *den Leiter allein* (nicht aber auf das Dielektrikum) pro Flächeneinheit wirkende Kraft ist folglich gleich

$$\mathfrak{E}'' \cdot \eta_f = n \cdot \frac{1}{2} E \cdot \frac{\varepsilon E}{4\pi} = n \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$$

<sup>1)</sup> Vgl. Kap. II, § 2, Formel (13a).

in Übereinstimmung mit (61). Die entsprechende *totale*, d. h. auf den Leiter *und* das Dielektrikum ausgeübte Flächenkraft ist  $\varepsilon$ mal kleiner, also gleich  $\frac{E^2}{8\pi}$ , wie in dem Fall des leeren Raumes.

Die auf ein Dielektrikum *allein* pro Volumeinheit wirkende Kraft ist bekanntlich gleich

$$(\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla (E^2),$$

d. h. nach (61)

$$\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \nabla \xi_g,$$

wo  $\xi_g$  die den gebundenen Elektronen zugehörige Energiedichte bedeutet (von der Lorentzschen Korrektur sehen wir ab). Die vollständige Kraft  $\mathfrak{F}_g$ , die auf einen dielektrischen Körper  $a$  von endlicher Größe wirkt, drückt sich nach den Formeln (23b, c) und (24b), Kap. II, durch die Summe des Integrals  $\int (\mathfrak{P} \nabla) \mathfrak{E} dV_a$  und des

Flächenintegrals  $\frac{1}{2} \oint P_n \Delta \mathfrak{E} dS_a$  aus ( $\Delta \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^b - \mathfrak{E}^a$ ;  $b$  bedeutet das umgebende Medium, z. B. den leeren Raum). Man hat folglich mit Rücksicht darauf, daß  $\mathfrak{P}$  nicht nur im Inneren, sondern auch auf der Oberfläche gleich  $\varkappa_a \mathfrak{E}_a$  ist ( $\varkappa_a = \frac{\varepsilon_a - 1}{4\pi}$ ):

$$\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint [n E^{a2} + E_n^a \cdot (\mathfrak{E}^b - \mathfrak{E}^a)] dS_a. \quad (62)$$

Da die tangentielle Komponente von  $\mathfrak{E}$  auf der Grenzfläche stetig bleibt, reduziert sich die Differenz  $\mathfrak{E}^b - \mathfrak{E}^a$  auf die Differenz der Normalkomponenten  $n(E_n^b - E_n^a)$ . Nun haben wir wegen  $\varepsilon_b E_n^b = \varepsilon_a E_n^a$ :

$$E_n^b - E_n^a = E_n^a \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} - 1\right)$$

und folglich

$$\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint n \left[ E^{a2} + E_n^{a2} \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} - 1\right) \right] dS_a.$$

oder schließlich

$$\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint \left[ E_r^{a2} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b} E_n^{a2} \right] n dS_a. \quad (62a)$$

In einem homogenen isotropen Dielektrikum muß  $\text{div} \mathfrak{E}$  und folglich  $\text{div} \mathfrak{P}$  verschwinden. Es gibt also in diesem Fall tatsächlich keine „eigentliche“ Volumkraft ( $-\text{div} \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{E}$ ), so daß man nach (24c), Kap. II, die betrachtete Kraft auch in der Gestalt

$$\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint E_n^a (\mathfrak{E}^a + \mathfrak{E}^b) dS_a \quad (62b)$$

darstellen kann. Für das resultierende Drehmoment erhält man dementsprechend

$$\frac{\varepsilon_a - 1}{8\pi} \oint E_n^a \mathbf{r} \times (\mathfrak{E}^a + \mathfrak{E}^b) dS_a.$$

Die „inneren“ Kräfte, d. h. die Wechselwirkungskräfte zwischen den verschiedenen Teilen desselben Körpers geben keinen Beitrag zur resultierenden Kraft  $\mathfrak{F}$ . Man kann deshalb die mittlere (oder effektive) Feldstärke  $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^a + \mathfrak{E}^b)$  durch die äußere oder „primäre“, d. h. von den anderen Körpern herrührende Feldstärke  $\mathfrak{E}^0$  ersetzen. Da die letztere auf der Oberfläche des Körpers stetig bleibt, so ist es ebenfalls möglich,  $\mathfrak{F}$  als Resultierende der Volumkräfte  $(\mathfrak{F} \nabla) \mathfrak{E}^0$  darzustellen. Es wird also

$$\mathfrak{F} = \frac{\varepsilon_a - 1}{4\pi} \int (\mathfrak{E} \nabla) \mathfrak{E}^0 dV_a = \frac{\varepsilon_a - 1}{4\pi} \oint E_n^a \mathfrak{E}^0 dS_a. \quad (62c)$$

### § 7. Grundprobleme und allgemeine Methoden der Elektro-, Galvano- und Magnetostatik.

Die Bestimmung der resultierenden Feldstärke unter Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Leitern und Isolatoren (sofern die letzteren kein unbegrenztes homogenes Medium bilden) bietet im allgemeinen eine sehr schwierige Aufgabe. Man kann ihre Lösung durch sukzessive Approximationen ermitteln, indem man zunächst die obige Wechselwirkung außer acht läßt; aus der entsprechenden „ungestörten“ Ladungsverteilung auf den einzelnen Leitern ( $\eta_a^0$ ) das Feld in „nullter Näherung“ bestimmt ( $\mathfrak{E}^0$ ); dann dieses Feld als äußeres (primäres) behandelt und die dadurch bedingte Änderung der Ladungsverteilung auf den Leitern und die Polarisierung der Dielektrika bestimmt; aus der verbesserten Ladungsverteilung und Polarisierung das Feld in erster Näherung berechnet usw.

Mittels dieses Approximationsverfahrens wird das allgemeine elektrostatische Problem auf die folgenden zwei Grundprobleme reduziert:

1. Die Bestimmung der Ladungsverteilung auf einem Leiter, der sich *allein* im leeren Raum (oder in einem homogenen Dielektrikum) befindet.

2. Die Bestimmung der Ladungsverteilung—oder der Polarisierung—, die auf einem Leiter oder in einem Isolator von endlicher Größe durch ein gegebenes primäres Feld erzeugt („induziert“) wird. Der Fall des Leiters läßt sich dabei als Grenzfall des Isolators für  $\varepsilon = \infty$  behandeln. Dieser zweiten elektrostatischen Aufgabe entspricht neben der galvanischen noch ein drittes formal identisches *magnetisches* Problem der Bestimmung der „induzierten“ Magnetisierung. Ein gewisser Unterschied zwischen diesen drei Problemen besteht nur insofern, als die zugehö-

rigen Parameter  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  verschiedene Grenzwerte annehmen können; man hat nämlich  $\epsilon \geq 1$ ,  $\mu > 0$ ,  $\sigma \geq 0$ <sup>1)</sup>.

Die soeben formulierten zwei elektrostatischen Grundprobleme entsprechen offenbar den oben betrachteten Problemen der freien und der erzwungenen elektrischen Schwingungen, und können als Spezial- oder genauer *Grenzfälle* jener Schwingungsprobleme für verschwindende Frequenz aufgefaßt werden. Das allgemeine elektrostatische Problem entspricht dem Problem der Eigenschwingungen eines Systems gekoppelter Leiter (und Isolatoren); das oben geschilderte Approximationsverfahren zu seiner Lösung kann offenbar nur in dem Fall schwacher Koppelung mit Erfolg angewandt werden. Sonst ist die Gesamtheit der Leiter und der Dielektrika als ein Ganzes zu behandeln.

### 1. Leitende Körper von beliebiger Gestalt (räumliche Probleme).

Allgemeine Methoden zur Lösung dieser Aufgabe oder der beiden Grundaufgaben, auf welche sie gewöhnlich reduziert werden kann, gibt es nicht. In dem Falle eines isolierten Leiters kommt man gewöhnlich am einfachsten zum Ziele (Bestimmung der freien oder der induzierten Ladungsverteilung) durch Einführung spezieller der Gestalt dieses Körpers angepaßten Koordinaten  $(\xi, \eta, \zeta)$  derart, daß die Leiteroberfläche mit einer der „Koordinatenflächen“, z. B.  $\xi(x, y, z) = \xi_0 = \text{konst}$  zusammenfällt. Wenn es gelingt, diese Koordinaten so zu wählen, daß die ganze Flächenschar  $\xi = \text{konst}$  mit Äquipotentialflächen (die der freien Ladungsverteilung entsprechen) zusammenfallen, so ist die Aufgabe praktisch gelöst: es bleibt dann nur den Ausdruck von  $\varphi$  als Funktion von  $\xi$  zu finden. Es sei bemerkt, daß solche Funktionen  $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ , der Variablen  $\xi, \eta, \zeta$ , die der *Laplaceschen* Gleichung genügen, in bezug auf diese Variablen *harmonisch* heißen. Mittels dieser Funktionen kann man auch die durch ein beliebiges primäres Feld induzierte Ladungsverteilung und das entsprechende sekundäre Feld ohne besondere Schwierigkeit bestimmen.

Diese Methode der „krümmungslinigen Koordinaten“ werden wir später betrachten, da sie nicht nur auf statische, sondern ebensogut auf Schwingungsprobleme anwendbar ist. Statt der harmonischen Funktionen treten im letzteren Fall allgemeinere Funktionen auf, die der Gleichung  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  genügen. Die Hauptschwierigkeit besteht aber in den beiden Fällen in der Auffindung des angepaßten Koordinatensystems.

<sup>1)</sup> Es sei daran erinnert, daß die durch diese Koeffizienten verknüpften und einander entsprechenden Größen sind: die elektrische Feldstärke ( $E$ ) bzw. die magnetische Erregung ( $B$ ) einerseits, und die elektrische Erregung ( $D$ ), Stromdichte ( $j$ ) und magnetische Feldstärke ( $H$ ) andererseits [ $D = \epsilon E$ ,  $j = \sigma E$ ,  $H = \mu B$ ].

Wenn man von vornherein keine bestimmte Voraussetzung über die Gestalt der Leiter macht, kann man eine Reihe von elektrostatischen Problemen in der folgenden Weise lösen. Man wählt irgendwelche bekannte Funktion  $\varphi(\mathbf{r})$ , die in bestimmten endlichen oder unendlichen Raumgebieten stetig und „harmonisch“ ist, d. h. der Gleichung  $\nabla^2 \varphi = 0$

genügt (z. B.  $\varphi = \sum \frac{e_\alpha}{R_\alpha}$ , oder  $\varphi = \sum_\alpha \sum_n e_\alpha (n_1 n_2 n_3) \frac{\partial^n \left( \frac{1}{R_\alpha} \right)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}$ , usw.)

Diese Funktion betrachtet man als das Potential eines Leiters oder Systems von Leitern, deren Oberflächen mit einigen der Flächen  $\varphi = \text{konst}$  zusammenfallen. — Wir denken uns z. B., daß die Flächen  $\varphi = \text{konst}$  geschlossen sind und ineinander liegen (sie können sich nicht schneiden, denn  $\varphi$  muß eine eindeutige Funktion der Koordinaten  $x, y, z$  sein). Führt man statt der „geometrischen“ Fläche  $\varphi = \varphi_0$  eine physikalische leitende Fläche  $S_{\varphi_0}$  ein, die mit der Ladung

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \nabla_n \varphi$$

(pro Flächeneinheit) belegt ist, so muß diese Ladung *auf* und *außerhalb* der betrachteten Fläche genau dasjenige Feld erzeugen, welches dort tatsächlich herrscht, während innerhalb  $S_{\varphi_0}$  das Potential den konstanten Wert  $\varphi_0$  behalten wird. Dieses Resultat ist eine direkte Folge des im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Eindeutigkeitsatzes, gemäß welchem die Werte der harmonischen Funktion  $\varphi$  außerhalb  $S_{\varphi_0}$  durch ihren Randwert eindeutig bestimmt sind (bei der Voraussetzung, daß  $\varphi$  und  $\nabla \varphi$  stetig bleiben). Es sei daran erinnert, daß die sich innerhalb irgend einer Fläche  $S$  befindlichen Ladungen hinsichtlich des außerhalb der letzteren erzeugten Feldes immer einer bestimmten Flächenladung auf  $S$  äquivalent sind (vgl. Bd. I, S. 108ff.). Um eine für leitende Körper charakteristische Ladungsverteilung zu erhalten, müssen wir uns auf Äquipotentialflächen beschränken. — Es sei ferner bemerkt, daß die mit den verschiedenen Flächen der Schar  $\varphi = \text{konst}$  zusammenfallenden leitenden Flächen bei derselben Gesamtladung außerhalb der größten von ihnen dasselbe Feld erzeugen, d. h. hinsichtlich dieses äußeren Feldes einander äquivalent sind. Als Beispiel sei der einfachste Fall  $\varphi = \frac{e}{R}$  erwähnt: die Flächen  $S_{\varphi_0}$  sind hier konzentrische Kugeln.

Denkt man sich zwei verschiedene Flächen  $\varphi = \text{konst}$  „materialisiert“, so erhält man einen geschlossenen „Kondensator“; zwischen seinen „Belegungen“ (die entgegengesetzt gleiche Ladungen tragen) herrscht das gegebene Feld  $\varphi$ , während außerhalb der letzteren, d. h. innerhalb der inneren und außerhalb der äußeren, das Potential die entsprechenden konstanten Grenzwerte  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  annimmt.

Wenn die Flächen  $\varphi = \text{konst}$  teilweise geschlossen, teilweise unendlich sind, kann man durch „Materialisierung“ einer der geschlossenen Flächen (Abb. 43) die Lösung der allgemeineren Aufgabe erhalten — nämlich der Superposition einer auf dieser Fläche  $S$  eventuell vorhandenen freien Ladung und der durch ein gegebenes primäres Feld induzierten Ladung. Es stellt  $\varphi$  in diesem Fall das Potential des *resultierenden* Feldes dar. Um das letztere in das „primäre“  $\varphi^{(0)}$  und das sekundäre  $\varphi'$  zu zerlegen, müssen wir zunächst  $\varphi'$  nach der Formel

$$\varphi' = \oint_R \frac{\eta}{R} dS$$

berechnen, mit dem oben bestimmten Wert für  $\eta$ , wobei sich das primäre Feld durch einfache Subtraktion ergibt ( $\varphi^0 = \varphi - \varphi'$ ).

Wenn die Totalladung  $e = \oint \eta dS$  von Null verschieden ist, muß man  $\varphi'$  strenggenommen nicht als sekundäres (d. h. durch  $\varphi^0$  bedingtes) Feld betrachten, sondern als Summe des letzteren und des Eigenfeldes, welches der Gleichgewichtsverteilung der Ladung  $e$  auf der Oberfläche  $S$  entspricht und von der Anwesenheit irgendwelcher primären Felder unabhängig ist.

Als Beispiel dieser komplizierteren Sachlage mag das durch die Funktion

$$\varphi = -E^0 x + \frac{e}{R} - p \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} = \frac{e}{R} + \left( \frac{p}{R^3} - E^0 \right) x \quad (63)$$

bestimmte Feld erwähnt werden. Sie läßt sich offenbar auffassen als die Superposition eines homogenen Feldes  $E^0$  in der Richtung der  $X$ -Achse, des Feldes einer Punktladung  $e$  und eines damit zusammenfallenden Dipols mit dem Moment  $p$  (ebenfalls in der  $X$ -Richtung). Die vorhergehende Formel zeigt, daß bei

$$R = \sqrt[3]{\frac{p}{E^0}} \equiv a \quad (63a)$$

$\varphi = \frac{e}{a} = \text{konst}$  wird. Eine der Flächen  $\varphi = \text{konst}$  stellt folglich eine Kugel mit dem Radius  $a$  dar. Durch „Materialisierung“ dieser Fläche erhalten wir die Lösung der Aufgabe nach der Ladungsverteilung auf einem kugelförmigen Leiter, der sich in einem homogenen „äußeren“ oder genauer primären Feld  $E^0$  befindet. Die resultierende Ladungsdichte läßt sich in diesem Fall nach der Formel

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right)_{R=a}$$

bestimmen. Mit Rücksicht auf die Beziehung  $\frac{p}{a^3} = E^0$  erhalten wir

$$\eta = \frac{e}{4\pi a^2} + \frac{3px}{4\pi a^4} = \frac{e}{4\pi a^2} + \frac{3p}{4\pi a^3} \cos \Theta = \frac{e}{S} + \frac{p}{V} \cos \Theta, \quad (63b)$$

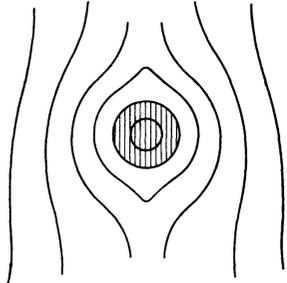


Abb. 43.

wo  $S$  die Oberfläche der Kugel,  $V$  ihr Volumen und  $\Theta$  den Winkel zwischen dem Radiusvektor zum betrachteten Punkt und der  $X$ -Achse bedeutet. Das Verhältnis  $\frac{e}{S}$  ist die Dichte der freien Ladung; das Verhältnis  $\frac{p}{V}$  entspricht der *Polarisation* (elektrisches Moment pro Volumeinheit) und sein Produkt mit  $\cos \Theta$  ist die induzierte Ladungsdichte. Das dadurch erzeugte Feld innerhalb der Kugel muß dem primären Feld entgegengesetzt gleich sein; wir bekommen auf diese Weise das uns schon bekannte Resultat

$$\mathcal{G}' = -\frac{p}{a^3} = -\frac{4\pi}{3} \frac{p}{V}$$

( $R < a$ ; vgl. Kap. II, § 2).

In dem angeführten Beispiel könnte man selbstverständlich statt der Kugel  $R = a$  irgendwelche andere geschlossene Fläche  $\varphi = \text{konst.}$  materialisieren und eine Reihe neuer elektrostatischer Probleme lösen. — Der Mangel der beschriebenen Lösungsmethode liegt in dem Umstand, daß sie uns im allgemeinen eine Fülle von Lösungen liefert, die wir gar nicht brauchen und nur zufällig die gesuchte Lösung für einen Leiter von gegebener Gestalt liefern kann.

## 2. Zylindrische Leiter (ebene Probleme).

Die Aufsuchung der zu materialisierenden Potentialflächen wird außerordentlich erleichtert in dem Falle eines *zylindrischen* Leiters (mit beliebigem Querschnitt) oder einer Anzahl solcher Leiter mit parallelen Erzeugenden (z. B. eine Anzahl parallelen Drähten), falls man ihre Länge als unendlich groß behandeln kann. In diesem Fall reduziert sich das Potential  $\varphi$  auf eine Funktion von zwei Koordinaten  $x, y$ , so daß die dritte (in der Längsrichtung gerechnete) außer acht gelassen werden kann. Wir bekommen dabei ein *zweidimensionales* oder *ebenes* Problem: eine harmonische Funktion  $\varphi(x, y)$  zu finden, die auf bestimmte Randkurven  $s_1, s_2 \dots$  konstante Werte  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  annimmt.

Wie schon im Kap. V, § 4 bei der Betrachtung der Drahtwellen gezeigt worden ist, kann man diese Funktion als den reellen Teil einer Funktion  $f(\zeta)$  der komplexen Variable  $\zeta = x + iy$  definieren, wobei die elektrische Feldstärke sich aus diesem komplexen Potential nach der Formel

$$E^* = -\frac{df}{d\zeta}$$

ergibt ( $E = E_x + iE_y$ ). Der imaginäre Anteil von  $f$ , der im Falle von Drahtwellen das skalare magnetische Potential bedeutet, wird für die statischen Probleme belanglos.

Jede analytische Funktion  $f(\xi)$  liefert mittels der „Materialisierungsmethode“ eine Fülle von mehr oder minder interessanten Resultaten, die bei ihrer systematischen Untersuchung sehr nützlich für die Lösung bestimmter ebener Aufgaben sein können. Die Lösung solcher Aufgaben läßt sich aber in jedem gegebenen Spezialfall durch diese Methode nicht ermitteln. Hier ist die oben skizzierte Methode der krümmungslinigen Koordinaten anzuwenden, mit derjenigen sehr wesentlichen Vereinfachung, daß mit dem Auffinden der passenden Koordinaten die Aufgabe ohne irgendwelche Integrationen gelöst wird. Dazu ist es nur notwendig, die neuen Koordinaten in der Form

$$\xi + i\eta = \zeta(x + iy)$$

zu suchen. Sie müssen dann harmonische Funktionen von  $x$  und  $y$  darstellen, und falls es gelingt, sie in der Weise zu bestimmen, daß die Randlinie des gegebenen Leiters (oder eher seines Querschnittes) einem konstanten Wert der neuen Koordinate  $\xi$  entspricht, so stellt die letztere multipliziert mit einem konstanten Proportionalitätsfaktor das gesuchte Potential  $\varphi$  dar.

Die angeführten Betrachtungen lassen sich ohne irgendwelche Änderung auf galvanische Probleme übertragen, bei welchen es sich um die Stromverteilung in einem homogenen Körper handelt. Wir müssen nur auf den Umstand hinweisen, daß den ebenen elektrostatischen Problemen zwei mathematisch-identische, physikalisch aber etwas verschiedene galvanische Probleme entsprechen.

Dies sind *erstens* das Problem der Stromverteilung in einem homogenen schlecht leitenden „Elektrolyt“ mit zylindrischen, praktisch unendlich langen Elektroden, und *zweitens* das Problem der Stromverteilung in praktisch unendlich dünnen ebenen Metallplatten. Im letzteren Falle wird der Strom aus der dritten (fehlenden) Dimension durch bestimmte Stellen der Oberfläche der betreffenden Platte zu- oder abgeführt — und es sind gerade diese Stellen, welche die Rolle der Elektroden spielen. In der unmittelbaren Nähe solcher „Flächenelektroden“ ist die Stromverteilung ziemlich kompliziert und jedenfalls nicht eben; aber je dünner die Platte ist, desto kleiner weichen sich die Stromlinien an jeder Elektrode von einer zur Randlinie des letzteren senkrechten Richtung (was einer Konstanz des Potentials längs dieser Linie entspricht).

Die Theorie der *induzierten* Ströme in ebenen Metallplatten haben wir schon im § 4 skizziert. Die *galvanischen* Ströme dieser Art müssen *außerhalb* der Elektroden derselben Gleichung wie die induzierten genügen, d. h. der Gleichung

$$\frac{\partial J_y}{\partial x} + \frac{\partial J_x}{\partial y} = 0,$$

woraus sich, wegen  $J_x = \sigma \delta E_x$  und  $J_y = \sigma \delta E_y$  eine ähnliche Gleichung

für die elektrische Feldstärke ergibt und schließlich infolge der Beziehung  $\mathfrak{E} = -\nabla \varphi$  (welche die frühere Beziehung  $\mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$  ersetzt) die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

für das elektrostatische Potential.

Wir bekommen also in diesem Fall dieselben Verhältnisse wie bei den galvanischen Problemen mit unendlich langen zylindrischen Elektroden im unbegrenzten Elektrolyt, und können deshalb auf ihre Diskussion nicht näher eingehen.

Es scheint nicht überflüssig, zu erwähnen, daß jedem gewöhnlichen ebenen galvanischen Problem ein zweites Problem zugeordnet werden kann, bei welchem die elektrischen Ströme *längs* den zylindrischen Elektroden fließen, während im umgebenden Medium keine Strömung stattfindet. Der imaginäre Teil des komplexen Potentials  $f = \varphi + i\psi$  läßt sich dabei ebenso wie in der Theorie der Drahtwellen als das skalare magnetische Potential verwerthen.

Es sei bemerkt, daß bei den ebenen Problemen die Rolle des gewöhnlichen *Coulombschen* Potentials einer ruhenden Punktladung  $\varphi = \frac{e}{R}$  ( $R$  = räumlicher Abstand) das schon manchmal benutzte logarithmische Potential

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r} \quad (r = \text{ebener Abstand}) \quad (64)$$

spielt. Dieses Potential (welches den reellen Teil von  $f = 2e \lg \frac{1}{\zeta}$  darstellt) rührt von einer unendlich langen geradlinigen Elektrode her, die mit der Ladung  $e$  pro Längeneinheit belegt ist, oder — im Falle von galvanischen Strömen in ebenen Platten — von einer praktisch *punktförmigen Flächenelektrode*. Im letzteren Fall hat aber die Größe  $e$  mit der wirklichen Ladung der Elektrode nichts zu tun und ist mit dem dadurch zugeführten (oder abgeführten) Strom  $J$  durch die Beziehung

$$e = \frac{J}{\sigma \delta} \quad (64a)$$

verknüpft.

Das Potential einer beliebigen Anzahl von Linienelektroden oder punktförmigen Flächenelektroden läßt sich folglich durch eine Summe von Ausdrücken (64) oder durch das entsprechende Integral darstellen. Man hat z. B. im Falle von zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen  $e_1 = -e$  und  $e_2 = +e$ :

$$\varphi = 2e \lg \frac{r_2}{r_1}. \quad (64b)$$

Wenn die algebraische Summe der Ladungen, aus welchen das betrachtete System besteht, verschwindet, kann man  $\varphi$  immer in die Gestalt (64b) bringen, bei welcher unter dem Logarithmuszeichen eine dimensionslose Zahl erscheint; sonst bleibt das Potential nur bis auf eine willkürliche, von der Wahl der Ladungseinheit abhängige Konstante bestimmt. Diese Konstante ist für die Bestimmung des elektrischen Feldes belanglos, nicht aber für die *Energie*, welche einen bestimmten Wert nur für neutrale Systeme erhält.

Die im IV. Kapitel des I. Bandes entwickelte Potentialtheorie und die sich daran anschließende Theorie der Multipole könnte bei Ersetzen von  $\frac{1}{R}$  durch  $2\lg \frac{1}{r}$  fast unverändert auf ebene elektrostatische und galvanische Probleme übertragen werden. Dies ist aber kaum nötig, denn die Theorie der analytischen Funktionen stellt ein viel bequemerer und mächtigeres Werkzeug zur Lösung solcher Probleme dar, als jene sich eigentlich nur auf kreisförmige Randkurven beziehende Potentialtheorie.

### 3. Dielektrische und magnetisierbare Körper im gegebenen primären Feld.

In den vorhergehenden Ausführungen handelte es sich um Leiter (Elektroden), die sich im leeren Raum oder in einem homogenen Dielektrikum (Elektrolyt oder Metallplatte) befinden. Bei der Anwesenheit mehrerer aneinandergrenzenden Dielektrika (bzw. in dem Fall mehrerer aneinanderliegenden Elektrolyte oder Metallplatten aus verschiedenem Material), wird das Problem der Bestimmung des resultierenden Feldes im allgemeinen außerordentlich kompliziert. Man muß nämlich in diesem Fall das Potential  $\varphi$  aus einzelnen Stücken konstruieren, die den einzelnen homogenen Raumgebieten entsprechen, und die ineinander stetig übergehen, während ihre Normalableitungen auf den Trennungsf lächen (oder Trennungslinien, bei den ebenen Problemen) solcher Gebiete einen durch die Bedingung  $\Delta \left( \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = 0$  bestimmten Sprung erleiden. Da ferner das Potential sich längs jeder dieser Trennungsf lächen in einer von vornherein unbekanntem Weise ändern kann, so ist es nicht möglich, seine Gestalt für die *einzelnen* Raumgebiete (unabhängig voneinander) zu ermitteln. Bei dieser Sachlage scheint die oben erwähnte Approximationsmethode, die auf der Bestimmung der durch ein gegebenes primäres Feld bedingten Polarisation beruht, den einzigen allgemeinen Weg zur Lösung derartiger Probleme darzubieten.

Der Einfachheit wegen wollen wir uns vorstellen, daß der betrachtete dielektrische Körper sich im leeren Raum befindet. Das Potential  $\varphi$ , ebenso wie seine Bestandteile  $\varphi^0$  (Potential des gegebenen primären Feldes) und  $\varphi'$  (gesuchtes sekundäres Feld) müssen außerhalb wie

innerhalb des Körpers der *Laplaceschen* Gleichung genügen. Es bleiben noch zur Bestimmung des sekundären Feldes die Grenzbedingungen  $\Delta \varphi = 0$  und  $\Delta (\varepsilon \nabla_n \varphi) = 0$ , d. h. mit Rücksicht auf  $\Delta \varphi^0 = 0$  und  $\Delta \mathfrak{E}^0 = 0$

$$\Delta \varphi' = 0, \quad \Delta (\varepsilon E'_n) = -E_n^0 \Delta \varepsilon + (\varepsilon - 1) E_n^0 \quad (65)$$

und die zusätzliche sehr wesentliche Bedingung, daß *das sekundäre Feld im Unendlichen verschwindet* (oder daß das resultierende Feld im Unendlichen mit dem primären identisch wird, falls letzteres für den ganzen Raum definiert werden kann).

Das Zeichen  $\Delta$  in (65) bedeutet die im Sinne der äußeren Normalen genommene Differenz der entsprechenden Grenzwerte

$$(\Delta \psi = \psi_{\text{äuss}} - \psi_{\text{inn}}).$$

Bei  $\varepsilon \rightarrow \infty$  reduziert sich die zweite Bedingung (65) auf

$$(E'_n + E_n^0)_{\text{inn}} = 0.$$

Daraus folgt nach der Identität (53) mit  $\psi = \varphi$  und  $E = -\nabla \varphi$ , daß die elektrische Feldstärke innerhalb des betrachteten Körpers verschwindet. Letzterer verhält sich also in diesem Fall wie ein Metallleiter.

Wir haben oben gezeigt, daß das sekundäre Feld einer in einem homogenen primären Feld  $E^0 (= E_x^0)$  befindlichen Metallkugel durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{\text{äuss}} &= \frac{p x}{R^3}, \\ \varphi'_{\text{inn}} &= -E'_{\text{inn}} x \end{aligned} \right\} \quad (65a)$$

dargestellt wird mit  $p = E^0 a^3$  und  $E'_{\text{inn}} = -E^0$ .

Durch diese Formeln ist folglich auch die Lösung des Problems der Polarisation einer dielektrischen Kugel für den Grenzfall  $\varepsilon = \infty$  gegeben. Es ist leicht zu zeigen, daß sie auch bei endlichen Werten von  $\varepsilon$  gültig bleibt, wenn man das induzierte Moment  $p$  und die innere Feldstärke  $E'_{\text{inn}}$  in einem bestimmten von  $\varepsilon$  abhängigen Verhältnis vermindert. — Führt man nämlich die Ausdrücke (65a) in die Grenzbedingungen (65) ein, so erhält man mit Rücksicht auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial R} &= \frac{x}{R} = \cos \Theta, \\ E'_{\text{inn}} &= -\frac{p}{a^3} \end{aligned}$$

und

$$\frac{2p}{a^3} - \varepsilon E'_{\text{inn}} = (\varepsilon - 1) E^0.$$

Diese Grenzbedingungen lassen sich folglich tatsächlich befriedigen mit

$$\left. \begin{aligned} E'_{\text{inn}} &= -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E^0, & E_{\text{inn}} &= \frac{3}{\varepsilon + 2} E^0, \\ \dot{p} &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E^0, & P &= \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E^0. \end{aligned} \right\} \quad (65b)$$

Wenn der betrachtete begrenzte dielektrische Körper ( $a$ ) sich nicht im leeren Raum, sondern in einem unbegrenzten homogenen dielektrischen Medium mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_b$  befindet, so müssen wir in (65, a, b)

$$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} \tag{65c}$$

setzen. Die Einführung des Mediums ist folglich äquivalent einer Herabsetzung der Dielektrizitätskonstante des Körpers in dem Verhältnis  $\epsilon_b : 1$ . Diese „effektive“ oder *relative* Dielektrizitätskonstante (von  $a$  in bezug auf  $b$ ) kann kleiner als 1 ausfallen; in diesem Fall verhält sich  $a$  als ein *diamagnetischer* Körper (mit negativer Suszeptibilität).

Ersetzt man in den vorhergehenden Formeln  $\mathfrak{E}$  durch  $\mathfrak{H}$  (magnetische Erregung) und  $\epsilon$  durch  $\mu$  („relative“ magnetische Permeabilität), so bestimmen sie die „induzierte Magnetisierung“, d. h. die magnetische Polarisation eines magnetisierbaren Körpers in einem gegebenen primären magnetischen Feld  $\mathfrak{H}^0$ , falls das letztere in dem betrachteten Raumgebiet aus einem eindeutigen skalaren Potential abgeleitet werden kann. Man hat z. B. in dem Fall einer Kugel in einem homogenen Magnetfeld

$$\left. \begin{aligned} H_{\text{inn}} = \mu_a B_{\text{inn}} = \frac{3\mu_a}{\mu + 2} B^0, \\ m = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 B^0, \quad M = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} B^0, \end{aligned} \right\} \tag{66}$$

wo  $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_b}$  und  $B^0 = \frac{H^0}{\mu_b}$  ist.

Dieselben Formeln bestimmen die zur elektrischen und magnetischen Polarisation analoge galvanische Erscheinung — nämlich die Änderung einer gegebenen primären Stromverteilung in einem homogenen leitenden Medium ( $b$ ), wenn in das letztere ein Leiter  $a$  von endlicher Größe und mit einer verschiedenen Leitfähigkeit eingebracht wird. Es bleiben insbesondere die Formeln (65b) vollkommen unverändert, falls man darin  $\epsilon$  durch die „relative Leitfähigkeit“ von  $a$

$$\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_b} \tag{66a}$$

ersetzt. Die Größen  $\rho$  und  $P$  behalten dabei dieselbe Bedeutung wie in dem entsprechenden elektrostatischen Problem; es soll nur beachtet werden, daß sie nicht von der Verschiebung der gebundenen Ladungen, sondern durch eine bestimmte Verteilung der freien Ladungen (Elektronen, Ionen) auf der Kugeloberfläche abhängen. Die Flächendichte dieser Ladungen ist mit der „effektiven Polarisation“  $P$  durch die bekannte Beziehung

$$\eta = P_n = P \cos \theta$$

verknüpft. Ausführlich geschrieben drückt sie sich folglich durch die Formel

$$\eta = \frac{3}{4\pi} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{\sigma_a + 2\sigma_b} E^0 \cos \Theta \quad (66b)$$

aus.

#### 4. Magnetische Kreise.

In der Theorie der induzierten Magnetisierung ist noch der Fall zu berücksichtigen, daß die primäre magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}^0$  (oder die Erregung  $\mathfrak{B}^0$ ) in dem betrachteten Raumgebiet sich durch ein eindeutiges skalares Potential nicht darstellen läßt. Diesen Fall hat man z. B. vor sich, wenn die magnetischen Kraftlinien geschlossene Kurven sind, die innerhalb eines ringförmigen Körpers oder einer Reihe von verschiedenen magnetisierbaren Körpern verlaufen. Ein solches System wird als „magnetischer Kreis“ bezeichnet.

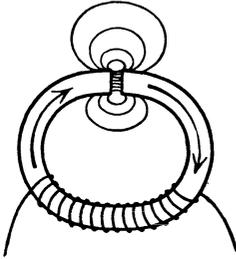


Abb. 44.

Besonders wichtig in technischer Hinsicht sind magnetische Kreise, die aus einer Spule (Stromsolenoid) mit einem geschlossenen oder fast geschlossenen („geschlitzten“) Eisenkern bestehen. Die magnetischen Kraftlinien verlaufen in diesem Fall fast vollkommen innerhalb des Eisenkernes auch dann, wenn die magnetisierende Spule nur einen Teil des letzteren umfaßt (Abb. 44). Dies läßt sich vielleicht am besten einsehen auf Grund der schon erwähnten „galvanomagnetischen Analogie“,

die hier besonders deutlich zutage kommt. Ersetzt man nämlich die magnetischen Größen  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mu$  ( $\mathfrak{H} = \mu\mathfrak{B}$ ) durch die galvanischen  $\mathfrak{j}$ ,  $\mathfrak{E}$ ,  $\sigma$  ( $\mathfrak{j} = \sigma\mathfrak{E}$ ), so erhält man die folgende Aufgabe. In einem unbegrenzten homogenen Medium mit der sehr kleinen Leitfähigkeit  $\sigma = 1$  (magnetische Permeabilität des leeren Raumes) wird ein primäres elektrisches Feld  $\mathfrak{E}^0$  (primäre magnetische Erregung  $\mathfrak{B}^0$ ) erzeugt, dessen Linien innerhalb der Spule einen kräftigen und näherungsweise homogenen Fluß bilden, während das äußere Feld sehr schwach ist. In dieses Feld wird ein ringförmiger Metallkern mit sehr hoher Leitfähigkeit  $\sigma \approx 1000$  (magnetische Permeabilität des Eisens) eingebracht, derart, daß der Hauptfluß des Feldes durch sein Inneres hindurchgeht. Die dabei erzeugte elektrische Strömung muß offenbar hauptsächlich innerhalb des Metalleiters stattfinden, so daß nur ein sehr kleiner Bruchteil der Stromlinien durch seine Oberfläche in das umgebende schlecht leitende Medium eindringen wird. Dies folgt unmittelbar aus den Grundbedingungen  $\Delta E_r = 0$ ,  $\Delta \sigma E_n = 0$ , die den magnetischen Grenzbedingungen  $\Delta B_r = 0$ ,  $\Delta \mu B_n = 0$  entsprechen.

Die primäre Erregung  $\mathfrak{B}^0$  genügt der Gleichung  $\text{rot } \mathfrak{B}^0 = 4\pi \mathfrak{j}^0$ , wo  $\mathfrak{j}^0$  die Dichte des primären Stromes in der magnetisierenden Spule

bedeutet. Insofern bei der Magnetisierung keine neuen *freien* Ströme induziert werden, muß die resultierende Erregung derselben Gleichung  $\text{rot}\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{j}^0$  genügen, woraus sich für die sekundäre Erregung die *identische* Gleichung  $\text{rot}\mathfrak{B}' = 0$  ergibt. Wir können also

$$\mathfrak{B}' = -\nabla\varphi'_m \tag{67}$$

setzen, obwohl  $\mathfrak{B}^0$  in dem betrachteten Fall sich nicht aus einem skalaren, sondern aus einem Vektorpotential nach der Formel  $\mathfrak{B}^0 = \text{rot}\mathfrak{A}^0$  berechnen läßt. In den einzelnen homogenen Raumgebieten müssen wir ferner die Gleichungen  $\text{div}\mathfrak{B}^0 = \text{div}\mathfrak{B} = \text{div}\mathfrak{B}' = 0$  haben und folglich nach (67)

$$\nabla^2\varphi'_m = 0. \tag{67a}$$

Die Grenzbedingungen für  $\mathfrak{B}'$  nehmen dabei eine mit den elektrostatischen Bedingungen (65) identische Gestalt

$$\Delta\varphi'_m = 0, \quad \Delta\mu B'_n = (\mu - 1)B_n^0. \tag{67b}$$

Die Bestimmung von  $\mathfrak{B}'$  ist folglich in derselben Weise durchzuführen, wenn  $\mathfrak{S}^0 = -\nabla\varphi^0$  oder  $\mathfrak{S}^0 = \text{rot}\mathfrak{A}^0$  ist.

Wenn die Querdimensionen des Eisenkernes klein im Vergleich zu seiner Länge sind, kann man ihn als einen linearen Leiter behandeln. Man kann ferner mit einer für praktische Zwecke vollkommen genügenden Annäherung die magnetische Permeabilität des leeren Raumes außerhalb der eventuell vorhandenen Schlitzstellen gleich Null setzen (was einer Vernachlässigung der Leitfähigkeit des obigen schlecht leitenden Mediums gegenüber der Leitfähigkeit des Metalleiters entspricht). Die magnetischen  $H$ -Linien müssen dabei innerhalb dieses Leiters in longitudinaler Richtung verlaufen, ebenso wie die Stromlinien im entsprechenden galvanischen Problem. Der Stromstärke ( $J = \int j_n dS$ ) entspricht in dem magnetischen Problem der durch einen Querschnitt des Kernes (oder durch einen Schlitz des letzteren) hindurchgehende magnetische Fluß  $\Phi = \int H_n dS = HS$ . Dieser Fluß muß für alle Querschnitte denselben Wert haben. Wir können dabei in Analogie zu den Formeln (9a, b)

$$\Phi = \frac{V_m}{R_m} \tag{68}$$

setzen, mit

$$R_m = \oint \frac{dl}{\mu S} \tag{68a}$$

(magnetischer Widerstand) und

$$V_m = \oint B_t dl \tag{68b}$$

(magnetomotorische Kraft). Da das Linienintegral von  $\mathfrak{B}'$  wegen der Gleichung (67) identisch verschwindet, so erhält man für die „magnetomotorische Kraft“ oder „magnetische Spannung“ den Ausdruck

$$V_m = \int B'_i dl, \quad (68c)$$

welcher auch für nicht geschlossene Spulen gültig bleibt.

Wenn die Länge der Spule ( $l_s$ ) nicht zu klein ist, kann man für die innerhalb der letzteren erzeugten Erregung (oder Feldstärke bei Fehlen des Kernes) die Formel

$$B^0 = 4\pi in$$

benutzen, wo  $i$  die Stärke des primären Stromes und  $n$  die Anzahl Windungen pro Längeneinheit der Spule bedeutet. Dies gibt

$$V_m = 4\pi in l_s = 4\pi i N \quad (N = \text{gesamte Windungszahl})$$

In dem einfachsten Fall eines geschlossenen homogenen Kernes mit konstantem Querschnitt  $S$  hat man ferner

$$R_m = \frac{l_k}{\mu S}$$

( $l_k$  Länge des Kernes) und folglich

$$\Phi = 4\pi in \mu S \frac{l_s}{l_k}$$

[vgl. (19a) § 3]. Wenn der Kern einen Schlitz von der Dicke  $\delta$  und mit der magnetischen Permeabilität 1 enthält, wird sein magnetischer Widerstand schon bei sehr kleinen Werten von  $\delta$  erheblich vergrößert. Man hat nämlich in diesem Fall nach (68a)

$$R_m = \frac{l_k}{S} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\delta}{l_k} \right).$$

Der entsprechende magnetische Fluß  $\Phi$ , multipliziert mit der Anzahl der Windungen  $N = n l_s$  und dividiert durch die Stromstärke  $i$  gibt bekanntlich den Selbstinduktionskoeffizient  $L$  der (primären) Spule. Wir haben also

$$L = \frac{4\pi \mu N^2 S}{l_k \left( 1 + \mu \frac{\delta}{l_k} \right)}.$$

Diese Formel läßt sich leicht für den Fall eines aus mehreren ferromagnetischen Körpern bestehenden und mehrere Schlitze enthaltenden magnetischen Kreises verallgemeinern.

## § 8. Elementar lösbare elektrostatische Aufgaben.

Es gibt eine sehr beschränkte Anzahl elektrostatischer Aufgaben, die in geschlossener Form gelöst werden können. Wir wollen in diesem Paragraphen die einfachsten sich hauptsächlich auf kugelförmige und

ellipsoidale Körper beziehenden Aufgaben dieser Art betrachten, die sich nach ganz elementaren, leider aber nur auf solche Aufgaben anwendbaren Methoden lösen lassen.

1. Ladungsverteilung auf einem leitenden Ellipsoid.

Die einfachste Aufgabe der Elektrostatik ist freilich die Verteilung der elektrischen Ladung auf der Oberfläche einer leitenden *Kugel*. Wenn die letztere vollkommen isoliert ist, verteilt sich ihre Ladung  $e$  gleichförmig mit der Dichte  $\eta = \frac{e}{4\pi a^2}$  ( $a$  = Radius der Kugel) und wirkt nach außen in derselben Weise, als ob sie im Kugelmittelpunkt konzentriert wäre, während innerhalb der Kugel das elektrische Feld verschwindet. Die entsprechenden Werte des Potentials sind  $\varphi = \frac{e}{R}$  ( $R \geq a$ ) und  $\varphi = \frac{e}{a}$  ( $R \leq a$ ). Daraus folgt unter anderem, daß die Kapazität einer isolierten Kugel gleich ihrem Radius ist.

Die Tatsache, daß die gleichförmige Ladungsverteilung auf der Kugeloberfläche dem Verschwinden des Feldes innerhalb der Kugel entspricht, läßt sich ganz elementar beweisen. Wir wollen diesen — noch von *Newton* herrührenden — Beweis anführen, denn er kann ohne Schwierigkeit auf *Ellipsoide* übertragen werden.

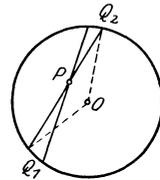


Abb. 45.

Wir denken uns durch einen beliebigen Punkt  $P$  innerhalb der Kugel einen Kegel  $Q_1 P Q_2$  mit einer beliebigen Achsenrichtung und mit einer sehr kleinen Öffnung gezogen (Abb. 45). Die Strahlen, welche diesen Kegel bilden, schneiden die Kugeloberfläche in  $Q_1$  und  $Q_2$  unter demselben Winkel. Daraus folgt, daß die darauf ausgeschnittenen Flächenelemente  $S_1$  und  $S_2$  zueinander in dem Verhältnis der Quadrate der entsprechenden Abstände  $PQ_1 = R_1$  und  $PQ_2 = R_2$  stehen müssen. Multipliziert man die beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2}$$

mit der (konstanten) Flächendichte der Ladung  $\eta$ , so erhält man den mathematischen Ausdruck der Tatsache, daß die von den auf  $Q_1$  und  $Q_2$  befindlichen Ladungen herrührenden Feldstärken in  $P$  einander gleich und entgegengerichtet sind, und folglich sich gegenseitig zerstören. Da dies für alle Richtungen des Kegels richtig bleibt, so muß die resultierende Feldstärke in  $P$  gleich Null sein.

Man erhält dasselbe Resultat, wenn man die Ladung  $e$  nicht auf der Kugeloberfläche, sondern in einer dünnen, durch zwei konzentrische Kugeln mit den Radien  $a$  und  $a + \delta a$  begrenzten Schale mit *gleichförmiger Volumendichte*

$$\rho = \frac{e}{4\pi a^2 \delta a} = \frac{\eta}{\delta a}$$

verteilt.

Wir stellen uns nun vor, daß diese Schale einer *linearen Deformation* unterworfen wird, d. h. einer solchen Deformation, bei welcher die Verschiebungskomponenten jedes Punktes lineare Funktionen seiner Koordinaten sind. Die Kugelflächen verwandeln sich dabei in Ellipsoide und die sphärische Schale — in eine ellipsoidale Schale, die zwischen zwei ähnlichen und gleichorientierten Ellipsoiden eingeschlossen ist. Da bekanntlich die geraden Linien bei der betrachteten Transformation gerade bleiben und die parallelen Geraden einander parallel bleiben, so müssen die ursprünglich gleichen Winkel zwischen den Geraden  $Q_1 P Q_2$  und den Normalen in  $Q_1$  und  $Q_2$  auch nach der Deformation einander gleich sein (Abb. 46). Wir haben folglich wie früher

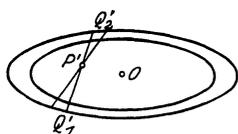


Abb. 46.

$$\frac{S'_1}{R_1'^2} = \frac{S'_2}{R_2'^2}.$$

Bezeichnet man die Dicke der deformierten Schale bei  $Q'_1$  und  $Q'_2$  mit  $\delta a'_1$  bzw.  $\delta a'_2$ , so hat man ferner die Beziehungen

$$\frac{\delta a'_1}{R_1'} = \frac{\delta a_1}{R_1}, \quad \frac{\delta a'_2}{R_2'} = \frac{\delta a_2}{R_2}$$

und folglich wegen

$$\frac{R_1'}{R_2'} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{und} \quad \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a :$$

$$\delta a'_1 = \delta a'_2.$$

(Es sei daran erinnert, daß die Verhältnisse  $\frac{\delta a}{R}$  und die Öffnung des Kegels als unendlich kleine Größen zu behandeln sind). Da schließlich die ursprünglich mit der konstanten Volumdichte  $\rho$  verteilte Ladung auch nach der Transformation gleichförmig verteilt bleibt mit einer im allgemeinen verschiedenen Volumdichte  $\rho'$ , so erhalten wir:

$$\rho' \frac{S'_1 \delta a'_1}{R_1'^2} = \rho' \frac{S'_2 \delta a'_2}{R_2'^2}$$

d. h. innerhalb der betrachteten ellipsoidalen Schale bleibt die elektrische Feldstärke immer, d. h. bei beliebiger Gestalt der beiden Ellipsoide (sofern sie einander ähnlich und konzentrisch bleiben), gleich Null.

Wir gehen jetzt wieder zum Grenzfall  $\delta a \rightarrow 0$  über und bekommen statt der ursprünglich gleichförmig verteilten Flächenladung eine ungleichförmige Ladungsverteilung mit der Flächendichte

$$\eta' = \text{Lim } \rho' \cdot \delta a'.$$

Das ist offenbar gerade diejenige Ladungsverteilung auf der Oberfläche des zugehörigen Ellipsoids, bei welcher das Potential innerhalb des

letzteren einen konstanten Wert annimmt. Wegen des im vorhergehenden Paragraphen angeführten Eindeutigkeitsbeweises können wir behaupten, daß die gefundene Ladungsverteilung auch die *einzigste* ist, die der Gleichgewichtsbedingung  $\varphi = \text{konst}$  genügt.

Die Gleichung des betrachteten Ellipsoids sei

$$f \equiv Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = \text{konst} = D. \quad (69)$$

Hält man die Koeffizienten  $A, B, C$  fest, so ergibt sich bei der Änderung des Parameters  $D$  die ganze Schar der dazu ähnlichen Ellipsoide. Der Abstand  $\delta a'$  zwischen dem betrachteten Ellipsoid und dem Ellipsoid  $D + \delta D$  ist mit dem Betrag des Vektors  $\nabla f$  an der betreffenden Stelle durch die Formel  $|\nabla f| = \frac{\delta D}{\delta a'}$  verknüpft. Wir haben also

$$\eta' \sim \delta a' \sim \frac{1}{|\nabla f|},$$

d. h.

$$\eta' = \frac{\alpha}{\sqrt{A^2 x'^2 + B^2 y'^2 + C^2 z'^2}}, \quad (69a)$$

wobei  $\alpha$  einen Proportionalitätskoeffizienten bedeutet.

Durch diese Formel ist die Frage nach der Ladungsverteilung auf einem leitenden Ellipsoid erledigt. Es sei bemerkt, daß die Ladungsdichte desto größer ist, je größer die Krümmung des Ellipsoids im betreffenden Punkt ist. Es gibt aber zwischen der Ladungsdichte und der Krümmung keinen einfachen Zusammenhang.

In dem allgemeinen Fall eines dreiaxigen Ellipsoids führt die Ausrechnung des Potentials

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\eta'}{R} dS' \quad (\mathfrak{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (69b)$$

gemäß der Formel (69a) auf elliptische Integrale, die wir hier nicht betrachten werden (siehe unten).

## 2. Das Potential eines Rotationsellipsoids.

In dem Falle eines Rotationsellipsoids läßt sich die Integration verhältnismäßig einfach ausführen. Setzt man nämlich  $A = B \neq C$  ( $z$ -Rotationsachse),  $x' = r' \cos \Theta$ ,  $y' = r' \sin \Theta$  ( $r'$  Abstand von der Achse), so wird mit  $D = 1$ :

$$Ar'^2 + Cz'^2 = 1,$$

$$Ar' dr' + Cz' dz' = 0, \quad \frac{dr'}{dz'} = -\frac{Cz'}{Ar'},$$

$$ds' = \sqrt{dr'^2 + dz'^2} = \frac{1}{Ar'} \sqrt{A^2 r'^2 + C^2 z'^2} dz',$$

wobei  $ds'$  die Bogenlänge einer „Meridionalellipse“ bedeutet. Daraus folgt für das Flächenelement des Ellipsoids die Formel:

$$dS' = r' ds' d\Theta = \sqrt{A^2 r'^2 + C^2 z'^2} \frac{dz'}{A} d\Theta. \quad (70)$$

Wir müssen zunächst die in (69a) auftretende Konstante  $\alpha$  durch die Ladung des Ellipsoids  $e$  ausdrücken. Nun gilt nach (64)

$$e = \int \eta' dS' = \alpha \iint \frac{dz' d\Theta}{A} = \frac{2\pi\alpha}{A} \cdot \frac{2}{\sqrt{C}},$$

wo  $\frac{1}{\sqrt{C}} = c$  die Rotationshalbachse bedeutet. Man hat also

$$\alpha = \frac{A\sqrt{C}}{4\pi} e = \frac{e}{4\pi a^2 c} = \frac{e}{3V} \tag{70a}$$

( $a = b = \frac{1}{\sqrt{A}}$  äquatoriale Halbachse,  $V = \frac{4\pi}{3} abc$ —Volum des Ellipsoids).

Für das Potential in irgend einem (äußeren) Punkt  $P(r, 0, z)$  erhalten wir nach (69b) und (70):

$$\varphi = \frac{e}{3VA} \iint \frac{de' d\Theta}{R} = \frac{ea^2}{3V} \int_{-c}^{+c} \int_0^{2\pi} \frac{dz' d\Theta}{\sqrt{(z-z')^2 + r'^2 - 2rr' \cos\Theta + r^2}}. \tag{70b}$$

Wir wollen dieses Integral nur für den Fall  $r = 0$  ausrechnen (dies entspricht einem auf der Rotationsachse liegenden Aufpunkt). Es wird dabei mit Rücksicht auf  $r'^2 = \frac{1-Cz'^2}{A} = a^2 - \frac{a^2}{c^2} z'^2$

$$\varphi(z) = \frac{2\pi ea^2}{3V} \int_{-c}^{+c} \frac{dz'}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)z'^2 - 2zz' + z^2 + a^2}},$$

d. h. bei  $c > a$  (gestrecktes Rotationsellipsoid):

$$\varphi(z) = \frac{e}{2c\gamma} \lg \frac{z+\gamma c}{z-\gamma c} \quad \left(\gamma = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} = \text{Exzentrizität}\right). \tag{71}$$

Diese Formel bleibt auch bei  $c < a$  (abgeplattetes Rotationsellipsoid) gültig. Man kann aber in diesem Fall den Logarithmus durch die Funktion  $\arctg$  ersetzen. Es gilt nämlich bei reellem  $\xi$ :

$$\arctg \xi = \frac{1}{2i} \lg \frac{1+i\xi}{1-i\xi}$$

und folglich mit  $\gamma = i\xi$ :

$$\varphi(z) = \frac{e}{c\xi} \arctg \frac{\xi c}{z} \quad \left(\xi = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}\right). \tag{71a}$$

Setzt man in (71) und (71a)  $z = c$  ein, so bekommt man den Wert des Potentials auf der Oberfläche (und im Inneren) des betreffenden Ellipsoids selbst. Daraus ergibt sich nach der Definition der Kapazität

$$\left(K = \frac{e}{\varphi}\right) \quad \left. \begin{aligned} K &= \frac{2c\gamma}{\lg \frac{1+\gamma}{1-\gamma}}, \quad (c < a) \\ K &= \frac{c\xi}{\arctg \xi}. \quad (c > a) \end{aligned} \right\} \tag{71b}$$

Das äußere Feld eines gestreckten Rotationsellipsoids ist identisch, wie leicht zu zeigen ist, mit demjenigen Feld, welches seine Ladung erzeugen würde, falls sie *längs der Brennpunktlinie gleichförmig verteilt wäre*. Setzt man nämlich

$$\varphi(r) = \frac{e}{2\zeta} \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{dz'}{R} \quad (\zeta = c\gamma = \sqrt{c^2 - a^2}, R^2 = (z - z')^2 + r^2), \quad (72)$$

so erhält man 
$$\varphi = \frac{e}{2\zeta} \lg \frac{z + \zeta + R_1}{z - \zeta + R_2}, \quad (72a)$$

wo  $R_1$  und  $R_2$  die Abstände des Aufpunktes von den Brennpunkten  $z = \pm \zeta$  bedeuten. Nun stellt die Gleichung  $\varphi = \text{konst}$ , d. h.

$$\frac{z + \zeta + R_1}{z - \zeta + R_2} = \alpha = \text{konst} \quad (72b)$$

eine Schar von konfokalen gestreckten Rotationsellipsoiden dar (wobei die belegte Brennpunktlinie als Grenzfall dieser Schar erscheint). Dies folgt aus der bekannten Tatsache, daß die Radiusvektoren  $R_1, R_2$  der verschiedenen Punkte eines solchen Ellipsoids mit der großen Halbachse  $c$  und der Exzentrizität  $\gamma$  sich durch ihre Abszissen linear ausdrücken nach den Formeln

$$R_1 = c + \gamma z, \quad R_2 = c - \gamma z.$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (72b) bekommen wir

$$z[(1 + \gamma) - \alpha(1 - \gamma)] + \zeta + c + \alpha(\zeta - c) = 0$$

oder mit Rücksicht auf die Relation  $\zeta = c\gamma$ :

$$(z + c) \left( \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} - \alpha \right) = 0,$$

d. h. tatsächlich einen konstanten Wert für  $\alpha$ , nämlich

$$\alpha = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}.$$

Als Funktion der Exzentrizität der betreffenden Fläche  $\varphi = \text{konst}$  läßt sich also  $\varphi$  nach (72a) und (72b) in der Gestalt

$$\varphi = \frac{e}{2\zeta} \lg \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \quad (72c)$$

darstellen.

Diese Formel ist äquivalent der ersten Formel (71b) für die Kapazität des gestreckten Rotationsellipsoids. Sie ist aber allgemeiner als jene, denn sie bestimmt das Potential nicht nur auf der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids, sondern auch im umgebenden Raum. — Es sei bemerkt, daß die Formel (72a) bei  $r = 0$  in (71) übergeht. Die Tatsache, daß sie die Verallgemeinerung der letzteren darstellt, könnte man selbstverständlich durch Ausrechnung des Integrals (70b) beweisen. Dies wäre aber mühsam und unnötig, denn aus dem Zusammenfallen

der beiden Potentiale auf der Oberfläche des betrachteten Leiters folgt, daß sie im ganzen Außenraum zusammenfallen müssen.

Ähnliche Verhältnisse ergeben sich in dem Fall des abgeplatteten Rotationsellipsoids. Als Grenzform des letzteren ist eine kreisförmige Scheibe anzusehen; sie muß aber *nicht gleichförmig* geladen sein, wie die geradlinige Strecke, welche die Grenzform des gestreckten Ellipsoids darstellt, sondern mit einer dem Ausdruck  $\frac{1}{\sqrt{1-r^2/a_0^2}}$  proportionalen Flächen-dichte ( $a_0 =$  Radius der Scheibe).

Dies folgt aus der allgemeinen Formel (69a), wenn man zur Grenze  $c \rightarrow 0$ , d. h.  $C \rightarrow \infty$  übergeht. Es wird dabei  $\eta \sim \frac{1}{z'}$  oder gemäß der Gleichung  $\frac{z'^2}{c^2} + \frac{r^2}{a_0^2} = 1$

$$\eta \sim \frac{1}{\sqrt{1-r^2/a_0^2}}. \quad (73)$$

(Bei dem entgegengesetzten Grenzübergang  $c = \text{konst}$ ,  $a, b \rightarrow 0$  erhält man in derselben Weise  $\eta = \text{konst}$ .)

Die Äquipotentialflächen einer solchen Scheibe sind abgeplattete Rotationsellipsoide

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 - c^2 = a_0^2 = \text{konst} \quad (73a)$$

mit einem gemeinsamen „Brennfleck“ und verschiedenen „Exzentrizitäten“  $\xi = \frac{a_0}{c}$ ; die zugehörigen Potentialwerte drücken sich durch  $\xi$

nach der Formel 
$$\varphi = \frac{e}{a_0} \arctg \xi \quad (73b)$$

aus, die prinzipiell mit der zweiten Formel (71b) identisch ist. Das Potential bleibt auf der Scheibe endlich und erreicht hier ( $\xi = +\infty$ ) den Grenzwert  $\frac{\pi e}{2a_0}$ . Daraus folgt, daß die betrachtete Scheibe die Kapazität

$$K = \frac{2a_0}{\pi} \quad (73c)$$

besitzt.

Es sei bemerkt, daß die Kapazität eines Stabes oder Drahtes mit kreisförmigem Querschnitt sich durch die Kapazität eines sehr erstreckten Rotationsellipsoids mit derselben Länge ( $2c$ ) und einer dem Querschnittsradius  $a$  gleichen kleinen Halbachse approximieren läßt. Man kann in diesem Fall ( $\frac{a}{c} \ll 1$ )  $\gamma = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} = 1 - \frac{a^2}{2c^2}$  setzen, und folglich nach (71b)

$$K = \frac{c}{\lg \frac{2c}{a}}. \quad (73d)$$

Die Größe

$$K_1 = \frac{1}{2 \lg \frac{2c}{a}}$$

könnte man definieren als die Kapazität des Drahtes pro Längeneinheit; sie stimmt mit der Kapazität (pro Längeneinheit) eines Kabels mit dem inneren Radius  $a$  und dem äußeren  $2c$  [(vgl. (33b) Kap. V, § 4; dieser Wert von  $K_1$  ist in die Formel (52b) zur Bestimmung des Dämpfungskoeffizienten einer geradlinigen Antenne einzusetzen].

### 3. Elliptischer Zylinder.

Die dargelegte Methode der Bestimmung der Ladungsverteilung auf einem Ellipsoid kann auf das entsprechende ebene Problem — nämlich die Bestimmung der Ladungsverteilung auf einem unendlich langen Zylinder mit elliptischem Querschnitt angewandt werden. In diesem Fall ist die elektrische Feldstärke nicht der zweiten, sondern der ersten Potenz des Abstandes proportional ( $E = \frac{2e}{r}$ ); gleichzeitig aber ist die durch einen sehr kleinen ebenen Winkel ausgeschnittene zylindrische Fläche (oder die entsprechende Randlinie) proportional der ersten und nicht der zweiten Potenz des Abstandes. Wir bekommen also für die Flächendichte der auf einem elliptischen Zylinder verteilten Ladung dieselbe Formel

$$\eta' = \text{Lim } \varrho' \delta a'$$

wie in dem Fall des Ellipsoids, mit dem Unterschied, daß  $\delta a'$  hier die Dicke einer ebenen von zwei ähnlichen konzentrischen *Ellipsen* begrenzten Schicht bedeutet. Durch die Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  der Querschnittellipse des betreffenden Zylinders

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

drückt sich  $\eta'$  nach der folgenden zu (69a) analogen Formel aus:

$$\eta' = \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}$$

Das Bogenelement der Ellipse ist gleich

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2} = dx' \sqrt{1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2} = b^2 \frac{dx'}{y'} \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}$$

Es wird folglich für die Ladung des Zylinders pro Längeneinheit

$$e = \oint \eta' ds' = b^2 \alpha \int \frac{dx'}{y'} = \alpha a b \int_{-a}^{+a} \frac{dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} = \alpha \pi a b = \alpha S,$$

wonach  $S$  den Flächeninhalt seines Querschnittes bedeutet. Man hat also schließlich

$$\eta' = \frac{e}{\pi a b \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4}}}.$$

Das Potential des Zylinders in einem äußeren Aufpunkt  $(x, y)$  drückt sich durch das Integral

$$\varphi = 2 \oint \eta' \lg \frac{1}{r} ds' = \frac{2b}{\pi a} e \int_{-a}^{+a} \frac{1}{y'} \lg \frac{1}{r} dx'$$

aus, mit

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Mit der Ausrechnung dieses Integrals werden wir uns aber nicht aufhalten, da  $\varphi$  mittels der Theorie der analytischen Funktion sich ohne irgendwelche Integration bestimmen läßt (siehe Anhang, § 3).

#### 4. Zwei leitende Kugeln; die Methode der elektrischen Bilder.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung einiger Spezialfälle von Systemen, die aus mehreren Leitern bestehen, über und im Anschluß daran einiger einfachsten Fälle der elektrostatischen Induktion.

Das einfachste System dieser Art ist der sogenannte *Kugelkondensator*, welcher aus zwei konzentrischen Kugeln besteht. Bezeichnet man die Ladungen der beiden Kugeln mit  $e_1 = e$ ,  $e_2 = -e$  und ihre Radien mit  $a_1, a_2$  ( $a_1 < a_2$ ), so erhält man die folgenden Werte für das Potential als Funktion des Abstandes von ihrem gemeinsamen Mittelpunkt:

$$\begin{aligned} r \leq a_1, \quad \varphi_1 &= \frac{e_1}{a_1} + \frac{e_2}{a_2} = e \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right), \\ a_1 \leq r \leq a_2, \quad \varphi &= \frac{e_1}{r} + \frac{e_2}{a_2} = e \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a_2} \right), \\ r \geq a_2, \quad \varphi_2 &= \frac{e_1}{a_2} + \frac{e_2}{a_2} = 0. \end{aligned}$$

Die Induktionskoeffizienten  $q_{\alpha\beta}$  dieses Systems sind:

$$q_{11} = \frac{1}{a_1}, \quad q_{12} = \frac{1}{a_2} = q_{21}, \quad q_{22} = \frac{1}{a_2}.$$

Die Kapazität des Kondensators  $\left( \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} \right)$

$$K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}} = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \tag{74}$$

ist desto größer, je kleiner der Abstand  $a_2 - a_1 = d$  zwischen den beiden Kugeln ist. In dem Grenzfall  $d \ll a_1, a_2$  kann man

$$K = \frac{a^2}{d} = \frac{S}{4\pi d} \tag{74a}$$

setzen, wo  $S$  die Kugeloberfläche bedeutet. Durch dieselbe Formel wird offenbar die Kapazität eines aus dem Kugelkondensator ausgeschnittenen „fast ebenen“ Kondensators mit der Oberfläche  $S$  dargestellt.

Ähnliche Resultate ergeben sich für ellipsoidale Kondensatoren, die durch zwei zu derselben Schar von Äquipotentialflächen gehörenden Ellipsoiden gebildet sind. So hat man z. B. in dem Fall von zwei konfokalen gestreckten Ellipsoiden mit den Exzentrizitäten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ( $< \gamma_1$ ) nach (72c):

$$\varphi_1 = \frac{e}{2\zeta} \left\{ \lg \left( \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1} \right) - \lg \left( \frac{1+\gamma_2}{1-\gamma_2} \right) \right\}, \quad \varphi_2 = 0,$$

was einer Kapazität 
$$K = \frac{2\zeta}{\lg \frac{(1+\gamma_1)(1-\gamma_2)}{(1-\gamma_1)(1+\gamma_2)}} \quad (74b)$$

entspricht.

Wir kehren nun wieder zu dem Fall von zwei Kugeln zurück, die aber jetzt gegeneinander eine beliebige relative Lage haben mögen. Dabei stellen wir uns zunächst vor, daß eine Kugel so klein im Vergleich mit der anderen ist, daß sie als eine Punktladung behandelt werden kann.

Wir haben im ersten Bande (S. 104 und 105) gezeigt, daß zwei in bezug auf eine Kugel  $S$  mit dem Radius  $a$  harmonisch konjugierte Punktladungen

$$\frac{e}{e'} = \frac{\varrho}{a} = \frac{a}{\varrho'} \quad (75)$$

( $a$  Kugelradius;  $\varrho$ ,  $\varrho'$  Abstände der beiden Punkte vom Kugelmittelpunkt  $O$ ;  $e$ ,  $e'$  ihre Ladungen) auf der Oberfläche der Kugel dieselben Potentiale erzeugen. Kehrt man nun das Vorzeichen einer dieser Ladungen um — sie wird dabei als „elektrisches Bild“ der anderen bezeichnet — und addiert ihre Potentiale, so erhält man ein resultierendes Potential  $\varphi$ , welches auf der betreffenden Kugeloberfläche den konstanten Wert *Null* annimmt. Durch Materialisierung dieser Oberfläche bekommen wir die Lösung der folgenden Aufgabe:

Außerhalb (oder innerhalb) einer „zur Erde abgeleiteten“ Kugel mit dem Potential 0 befindet sich eine Punktladung  $e$ . Welches ist die Größe und die Verteilung der auf der Oberfläche dieser Kugel durch das primäre Feld  $\varphi^0 = \frac{e}{R}$  induzierten elektrischen Ladung? — Die Antwort lautet: das sekundäre Feld der letzteren außerhalb (bzw. innerhalb) der Kugel ist gegeben durch das Potential  $\varphi' = -\frac{e'}{R'}$  des elektrischen Bildes von  $e$ ; innerhalb (bzw. außerhalb) durch  $-\varphi = -\frac{e}{R}$ .

Die Ladungsdichte läßt sich daraus in der üblichen Weise, d. h. nach der Formel

$$\eta' = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (\varphi = \varphi^0 + \varphi'),$$

oder

$$\eta' = \frac{1}{4\pi} (E_n^0 + E_n'),$$

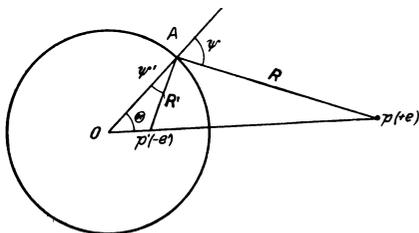


Abb. 47.

berechnen, wobei in dem Fall einer äußeren Ladung die Feldstärken auf der äußeren Seite der Kugeloberfläche und im entgegengesetzten Fall auf der inneren Seite bestimmt werden müssen.

Aus der Abb. 47 folgt, falls  $A$  einen Punkt auf der äußeren Seite der Kugel bedeutet:

$$E_n^0 = -\frac{e}{R^2} \cos \psi, \quad E_n' = -\frac{e'}{R'^2} \cos \psi'$$

( $R = PA$ ,  $R' = P'A$ ,  $\psi$  und  $\psi'$  die Winkel zwischen  $OA$  einerseits und  $AP$  bzw.  $AP'$  andererseits), d. h. wegen

$$\frac{e}{R} = \frac{e'}{R'}$$

$$E_n = E_n^0 + E_n' = -\frac{e}{R} \left( \frac{\cos \psi}{R} + \frac{\cos \psi'}{R'} \right).$$

Nun ist

$$\varrho^2 = a^2 + R^2 + 2Ra \cos \psi, \quad \varrho'^2 = a^2 + R'^2 - 2aR' \cos \psi',$$

$$\frac{\cos \psi}{R} + \frac{\cos \psi'}{R'} = \frac{\varrho^2 - a^2 - R^2}{2aR^2} + \frac{a^2 + R'^2 - \varrho'^2}{2aR'^2} = \frac{\varrho^2 - a^2}{2aR^2} + \frac{a^2 - \varrho'^2}{2aR'^2} = \frac{\varrho^2 - a^2}{aR^2}$$

(mit Rücksicht auf  $\frac{R}{R'} = \frac{\varrho}{a} = \frac{a}{\varrho'}$ ). Man hat also

$$E_n = -\frac{e}{R^2} \frac{\varrho^2 - a^2}{aR},$$

und folglich

$$\eta = -\frac{e}{4\pi R^2} \frac{\varrho^2 - a^2}{Ra}, \quad (75a)$$

oder wegen  $\varrho^2 - a^2 = \varrho \left( \varrho - \frac{a^2}{\varrho} \right) = \varrho (\varrho - \varrho') = 2h\varrho$ ,

wo mit  $2h$  der Abstand  $PP'$  bezeichnet wird:

$$\eta = -\frac{eh}{2\pi R^3} \cdot \frac{\varrho}{a}. \quad (75b)$$

Läßt man den Kugelradius  $a$  bei festgehaltenem  $h$  unbegrenzt wachsen, so erhält man die Flächendichte der Ladung, die durch  $e$  auf einer sich im Abstand  $h$  befindlichen leitenden Ebene induziert wird  $\left( \eta = -\frac{eh}{2\pi R^3} \right)$ .

Das Bild von  $e$  nimmt dabei die zu  $e$  entgegengesetzt gleiche Größe ( $e' = -e$ ) und eine in bezug auf die Ebene symmetrische Lage an. Dieses Resultat, welches hier als Grenzfall der allgemeinen Theorie der „Kugelbilder“ erscheint, läßt sich bekanntlich auf den Fall beliebiger bewegter Punktladungen verallgemeinern, wenn man die spiegelnde Ebene als einen vollkommenen Leiter behandelt (Kap. V, § 4). In dem Fall aber einer auch vollkommen leitenden Kugel ist der Gültigkeitsbereich der Bildertheorie nur auf elektrostatische (oder galvanostatische) Erscheinungen beschränkt.

Wenn die betrachtete Kugel isoliert ist und keine resultierende Ladung trägt, muß man aus den oben angeführten Ausdrücken für die Ladungsdichte die Größe  $-\frac{e'}{4\pi a^2}$ , welche die Dichte der gleichförmig verteilten induzierten Ladung darstellt, subtrahieren. Dies gibt

$$\eta' = -\frac{e\rho}{4\pi a} \left( \frac{2h}{R^3} - \frac{1}{\rho^2} \right),$$

wobei die Kugel das Potential  $\frac{e'}{a} = \frac{e}{\rho}$  erhält. Hinsichtlich ihrem äußeren Feld ist sie offenbar in diesem Fall äquivalent einem *Dipol*, welcher aus der Ladung  $+e'$  im Mittelpunkt  $O$  und der entgegengesetzten Ladung  $-e'$  im Punkte  $P'$  besteht. Läßt man den Abstand  $\rho$  unbegrenzt wachsen, bei festgehaltener Größe der primären Feldstärke  $E^0 = \frac{e}{\rho^2}$  im Kugelmittelpunkt, so kann man das primäre Feld als praktisch homogen behandeln und den induzierten Dipol als einen *elementaren* Dipol mit dem Moment

$$p = e'\rho' = \frac{ea}{\rho} \cdot \frac{a^2}{\rho} = \frac{e}{\rho^2} a^3 = E^0 a^3.$$

Wir haben auf diese Weise das uns schon bekannte Resultat [vgl. (63a)] als Spezialfall des allgemeineren Problems wiedergefunden.

Die Kugel und die induzierende Ladung müssen sich gegenseitig anziehen. Für große Abstände ( $\frac{R}{a} \gg 1$ ) läßt sich ihre Anziehungskraft in der Form

$$F \propto \frac{ee'}{\rho^2} = \frac{e^2 a}{\rho^3} \quad (75c)$$

darstellen, falls die Kugel „geerdet“ ist, oder

$$F \propto \frac{2pe}{\rho^3} = \frac{2e^2 a^3}{\rho^5}, \quad (75d)$$

falls sie neutral bleibt. Die gegenseitige Energie der Punktladung und der Kugel ist im ersten Fall gleich  $-\frac{1}{2} \frac{e^2 a}{\rho^2} = \frac{ee'}{2\rho}$  und im zweiten  $-\frac{e^2 a^3}{2\rho^4} = -\frac{ee'}{2\rho} \left( \frac{a}{\rho} \right)^3$ . Denkt man sich statt der Punktladung eine sehr

kleine Kugel vom Radius  $a_0$  und vernachlässigt die durch die Rückwirkung der größeren Kugel bedingte Änderung der Ladungsverteilung auf der letzteren, so bekommt man für ihre vollständige Energie  $W$  im ersten Fall  $\frac{e^2}{2a_0} - \frac{e^2 a}{2\varrho^2}$ . Dies entspricht nach der allgemeinen Formel  $W = \frac{e^2}{2K}$  einer effektiven Kapazität

$$K = \frac{1}{\frac{1}{a_0} - \frac{a}{\varrho^2}} \cong a_0 \left( 1 + \frac{a a_0}{\varrho^2} \right).$$

Die Methode der elektrischen Bilder erlaubt es auch, den Fall von zwei oder mehreren beliebig großen und in einer beliebigen relativen Lage befindlichen Kugeln zu behandeln. Man muß dabei das am Anfang des vorhergehenden Paragraphen skizzierte Approximationsverfahren benutzen, welches hier als die Methode „der sukzessiven Bilder“ bezeichnet wird. Hat man zwei Kugeln  $S_1, S_2$  mit den gegebenen (festgehaltenen) Ladungen  $e_1, e_2$ , so kann man die Gleichgewichtsverteilung dieser Ladungen folgendermaßen bestimmen. Wir stellen uns zunächst vor, daß die Ladungen  $e_1$  und  $e_2$  gleichförmig auf den entsprechenden Kugeln verteilt sind (nullte Näherung). Sie sind dabei hinsichtlich ihrer äußeren Wirkungen den in den Mittelpunkten  $O_1, O_2$  konzentrierten Ladungen äquivalent. Nun bestimmen wir das Bild von  $e_1$  in  $S_2$  ( $-e_2^{(1)}$ ) und das Bild von  $e_2$  in  $S_1$  ( $-e_1^{(1)}$ ). Falls die Potentiale der Kugeln festgehalten würden, könnte man ihre äußeren Felder in erster Näherung durch die Punktladungen ( $e_1, -e_1^{(1)}$ ) bzw. ( $e_2, -e_2^{(1)}$ ) charakterisieren. Sind dagegen die beiden Kugeln isoliert, d. h. ihre Ladungen konstant gehalten, so muß man außerdem noch die zentralen Ladungen durch die zu den induzierten entgegengesetzt gleichen vervollständigen. Dieses Verfahren läßt sich beliebig weit fortsetzen, so daß die exakte Lösung des Problems der gegenseitigen Influenz von zwei Kugeln in der Form einer unendlichen Reihe dargestellt werden kann. — Es ist dabei vorteilhaft, zunächst nicht die Ladungen, sondern die Potentiale der Kugeln als konstant zu behandeln und die zusätzlichen (induzierten) Ladungen nur nachträglich durch entgegengesetzt gleiche Zentralladungen zu kompensieren.

In dem einfachsten Fall von zwei gleichen Kugeln ( $a_1 = a_2 = a$ ) mit den entgegengesetzten Ladungen  $e_1 = -e_2 = e$  bekommt man auf diese Weise für die Ladungen der sukzessiven Bilder und ihren Abständen vom Mittelpunkt der betreffenden Kugel die rekurrenten Beziehungen

$$e^{(n)} = e^{(n-1)} \frac{\varrho^{(n)}}{a}, \quad \varrho^{(n)} = \frac{a^2}{\varrho - \varrho^{(n-1)}},$$

wo  $\varrho = \varrho^0$  den Mittelpunktabstand bedeutet. Es sei bemerkt, daß dieses Problem<sup>1)</sup> vollkommen äquivalent ist dem Problem der

<sup>1)</sup> Wenn die beiden Kugeln sich nicht einschließen oder schneiden.

gegenseitigen Influenz einer Kugel und einer Ebene. — Die Kapazität des betrachteten Systems ist in nullter Näherung durch die Gleichung  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2e \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{e}{K}$  bestimmt, also gleich

$$K = \frac{a \varrho}{2(\varrho - a)}.$$

### 5. Anwendung der Bildermethode auf zylindrische Leiter.

Die Methode der elektrischen Bilder läßt sich auch auf ebene Probleme, und zwar in einer außerordentlich einfachen Form, anwenden. Man hat nämlich in diesem Fall für das Potential zweier Linienladungen  $e$  und  $-e'$  den Ausdruck

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r} - 2e' \lg \frac{1}{r'},$$

der bei  $e \neq e'$  keine kreisförmigen Äquipotentiallinien liefert. Bei  $e = e'$  sind dagegen die Linien  $\varphi = \text{konst}$  *ausschließlich* Kreise, wie man leicht daraus sieht, daß ihre Gleichung in der Gestalt  $\frac{r}{r'} = \text{konst}$  geschrieben werden kann. Das elektrische Bild einer geladenen Gerade  $P$  in einem parallelen Kreiszyylinder ist folglich dargestellt durch die in bezug auf diesen Zylinder harmonisch konjugierte Gerade, *die mit der entgegengesetzt gleichen Ladung* (pro Längeneinheit) *belegt ist*. Das (konstante) Potential des Zylinders drückt sich dabei wegen der Beziehung

$$\frac{r}{r'} = \frac{\varrho}{a} = \frac{a}{\varrho'} \quad (76)$$

durch die Formel  $\varphi = 2e \lg \frac{\varrho}{a}$  (76a)

aus. Die resultierende Feldstärke an seiner Oberfläche ist

$$E = E_n^0 + E_n' = -2e \left( \frac{\cos \psi}{r} + \frac{\cos \psi'}{r'} \right),$$

d. h. (vgl. den entsprechenden Ausdruck für die Kugel):

$$E = -\frac{2e \varrho^2 - a^2}{r ar},$$

und die Ladungsdichte

$$\eta = -\frac{e}{2\pi r} \frac{\varrho^2 - a^2}{ar} = -\frac{eh}{\pi r^2} \frac{\varrho}{a}. \quad (76b)$$

Dies gibt für den Grenzfall einer leitenden („spiegelnden“) Ebene

$$\eta = -\frac{eh}{\pi r^2}.$$

Wenn der Zylinder keine resultierende Ladung hat, muß man zu (76b) die Größe  $\frac{e}{2\pi a}$  hinzufügen. Der Zylinder erzeugt dabei im Außenraum

dasselbe Feld wie ein durch zwei entgegengesetzt geladene Geraden gebildeter „Dipol“ mit dem Moment

$$p = e \varrho' = \frac{e a^2}{\varrho} = \frac{1}{2} a^2 E^0$$

pro Längeneinheit, wo  $E^0$  die primäre Feldstärke in den Punkten der Zylinderachse bedeutet.

Die Methode der sukzessiven Bilder gestaltet sich in dem Fall von zylindrischen Leitern besonders einfach, denn man hat dabei immer mit denselben Ladungen zu tun. Aber gerade aus diesem Grunde sind die entsprechenden Reihen im allgemeinen schlecht (nur bedingt) konvergent. Diese Schwierigkeit verschwindet, wenn die Gesamtladung der betrachteten Leiter gleich Null ist. In dem Fall von zwei isolierten parallelen Drähten mit den entgegengesetzten Ladungen erhält man z. B. in erster Näherung nur zwei gegeneinander um die Strecken  $\varrho^{(1)} = \frac{a^2}{\varrho}$  verschobene Bildlinien, während die ursprünglichen axialen Ladungen kompensiert werden. In zweiter Näherung verschieben sich diese effektiven Linienladungen noch weiter und in der endgültigen Lösung erscheinen sie in einem Abstand

$$\varrho^{(\infty)} = \frac{a^2}{\varrho - \frac{a^2}{\varrho - \frac{a^2}{\varrho - \dots}}}$$

von den entsprechenden Drahtachsen. Diesen Abstand kann man leicht berechnen. Man hat nämlich

$$\varrho^{(\infty)} = \frac{a^2}{\varrho - \varrho^{(\infty)}},$$

woraus folgt

$$\varrho^{(\infty)} = \frac{1}{2} \varrho - \sqrt{\frac{\varrho^2}{4} - a^2} = \frac{a^2}{\frac{1}{2} \varrho + \sqrt{\frac{\varrho^2}{4} - a^2}}. \quad (77)$$

Wenn der Radius der Drähte klein gegenüber ihrem Abstand ist, kann man  $\sqrt{\frac{\varrho^2}{4} - a^2} \cong \frac{\varrho}{2} \left(1 - \frac{2a^2}{\varrho^2}\right)$  setzen, was für  $\varrho^\infty$  den ersten Näherungswert ( $\varrho^{(1)}$ ) liefert.

Dieses Resultat könnte man noch einfacher erhalten und zwar durch Betrachtung des von zwei entgegengesetzt geladenen Linien bedingten Potentials

$$\varphi = 2e \lg \frac{r'}{r}$$

und durch Materialisierung zweier Flächen  $\varphi = \text{konst.}$

In der vorhergehenden Formel bedeuten  $r$  und  $r'$  die Abstände des Aufpunktes nicht von den Drahtachsen, sondern von den effek-

tiven Linienladungen. Für solche Aufpunkte, die in einer durch die beiden Achsen hindurchgehenden Ebene liegen, hat man offenbar, bei der üblichen Bedeutung von  $r$  und  $r'$

$$\varphi = 2e \lg \frac{r' - \varrho^{(\infty)}}{r - \varrho^{(\infty)}}, \quad r + r' = \varrho \equiv 2h.$$

Für die Potentiale der beiden Drähte ( $r = a$  bzw.  $r' = a$ ) ergeben sich daraus nach (77) die folgenden Werte

$$\varphi = \pm 2e \lg \frac{\varrho - a - \varrho^{(\infty)}}{a - \varrho^{(\infty)}} = \pm 2e \lg \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + h - a}{\sqrt{h^2 - a^2} - h + a},$$

was einer Kapazität

$$K = \frac{1}{4 \lg \frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{h - a}{h + a}} \tag{77a}$$

pro Längeneinheit entspricht. In dem Grenzfall  $a \ll h$ ,  $\beta \cong 1 - \frac{a}{h}$  verwandelt sich diese Formel in

$$K = \frac{1}{4 \lg \frac{2h}{a}} = \frac{1}{4 \lg \frac{\varrho}{a}}. \tag{77b}$$

Es sei bemerkt, daß die Kapazität eines Telegraphendrahtes, der über der Erde ( $\varphi = 0$ ) in der Höhe  $h$  aufgespannt ist, gleich dem zweifachen von (77a) ist.

### 6. Dielektrische Körper; unvollkommene Spiegelung in einer Ebene; Ellipsoid im homogenen Felde.

Die Bildermethode kann gewissermaßen auch auf dielektrische Körper ausgedehnt werden, aber nur auf solche, die durch ebene Flächen begrenzt sind. Wir stellen uns ein durch die Ebene  $z = 0$  nach oben (im Sinne der positiven  $Z$ -Achse) begrenztes homogenes dielektrisches Medium vor, welches durch eine sich im leeren Raum in einem Abstand  $z = h > 0$  befindliche Punktladung polarisiert ist (Abb. 48). Bei einer unendlich großen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  dieses Mediums würde man dieselben Verhältnisse wie in dem Falle eines Leiters bekommen, d. h. eine induzierte gebundene Flächenladung, die außerhalb des Dielektrikums dem elektrischen Bild von  $e$  äquivalent ist und innerhalb — der mit  $e$  entgegengesetzten Ladung.

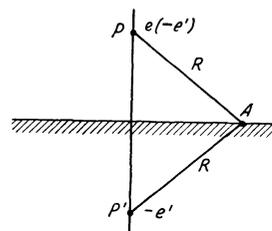


Abb. 48.

Es ist leicht zu sehen, daß eine ähnliche Verteilung der gebundenen Flächenladung auch bei endlichen Werten von  $\epsilon$  stattfindet, mit dem Unterschied, daß die Größe dieser Ladung  $-e'$  ihrem Absolutwert nach kleiner als  $|e|$  ist. Diese Ladung wirkt nach innen in derselben

Weise als ob sie (bei Fehlen des Dielektrikums) im Punkte  $P$  konzentriert wäre, und nach außen — wie in dem Bildpunkt  $P'$ .

Um dies zu zeigen, betrachten wir die Grenzbedingungen

$$\Delta \varphi = 0, \quad \Delta (\varepsilon E_z) = 0.$$

Die erste von ihnen ist offenbar erfüllt. Die zweite gibt, wenn wir den Abstand von  $P$  und  $P'$  von irgend einem Punkt  $A$  der Oberfläche mit  $R$  bezeichnen:

$$(e + e') \frac{h}{R^3} = \varepsilon (e - e') \frac{h}{R^3}.$$

Sie läßt sich folglich identisch befriedigen, wenn man

$$\varepsilon (e - e') = e + e',$$

d. h.

$$e' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} e \quad (78)$$

setzt.

Dieses Resultat kann aber auf irgendwelche andere und speziell auf kugelförmige Oberflächen nicht ausgedehnt werden, und zwar schon aus dem Grunde, weil man dabei die Spiegelung der primären Ladung nicht nur auf der vorderen, sondern, wegen der unvollkommenen Abschirmung ihres Feldes, auch auf der hinteren Seite dieser Oberfläche zu berücksichtigen sollte. — Wäre z. B. das Dielektrikum nicht nur nach oben, sondern auch nach unten begrenzt, so hätte man statt einer einzigen Spiegelung eine unendliche Reihe von sukzessiven unvollkommenen Spiegelungen durchzuführen, um die Ladungsverteilung auf den beiden Seiten der dielektrischen Schicht und das entsprechende sekundäre Feld zu ermitteln.

Die Wirkung eines *homogenen primären Feldes* auf eine dielektrische Kugel läßt sich, wie wir im vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, sehr einfach bestimmen. Wir wollen nun das dort gefundene Resultat für den Fall eines *Ellipsoids* verallgemeinern. Dabei legen wir die (später zu rechtfertigende) Annahme zugrunde, daß die *in einem homogenen dielektrischen Körper von ellipsoidaler Gestalt durch ein homogenes primäres Feld erzeugte Polarisation auch homogen ist* — ebenso wie wir dies für den Spezialfall der Kugel gefunden haben.

Da die Polarisation mit der resultierenden inneren Feldstärke durch die Beziehung

$$\mathfrak{P} = \varkappa \mathfrak{E}, \quad \varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$$

verknüpft ist, und da ferner die primäre Feldstärke konstant ist, so folgt aus unserer Voraussetzung, daß auch die sekundäre Feldstärke *innerhalb des Körpers* einen konstanten Wert  $\mathfrak{E}'$  haben muß. Diesen Wert, ebenso wie den entsprechenden Wert für den Außenraum ( $\mathfrak{E}^a$ )

kann man als Funktion von  $\mathfrak{P}$  mittels des bekannten Ausdruckes

$$\varphi' = \int \frac{\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{R}}{R^3} dV' = - \int \mathfrak{P} \cdot \nabla \frac{1}{R} dV'$$

für das Potential des sekundären Feldes berechnen. Wegen der vorausgesetzten Konstanz von  $\mathfrak{P}$  erhalten wir

$$\varphi' = - \mathfrak{P} \cdot \nabla \psi', \quad \psi' = \int \frac{dV'}{R}. \quad (79)$$

Hier bedeutet  $\psi'$  das Potential eines über sein Volum gleichförmig — und zwar mit der Dichte  $\varrho = 1$  — geladenen Ellipsoids der betrachteten Gestalt.

In dem allgemeinen Fall eines Ellipsoids mit den (verschiedenen) Halbachsen  $a, b, c$  gilt für dieses Potential die folgende Parameterdarstellung

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(i)} &= \pi a b c \int_0^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t} \right) \frac{dt}{T(t)}, \\ \psi^{(a)} &= \pi a b c \int_s^\infty \left( 1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t} \right) \frac{dt}{T(t)}, \end{aligned} \right\} \quad (79a)$$

wobei in beiden Fällen

$$T = \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}$$

ist, und  $s$  die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1 \quad (79b)$$

bedeutet, d. h. den Parameter desjenigen Ellipsoids der durch (79b) definierten Schar, welches durch den gegebenen *äußeren* Punkt  $(x, y, z)$  hindurchgeht.

Die Ausdrücke (79a) ergeben sich in der einfachsten und natürlichsten Weise, wenn man die Gleichung  $\nabla^2 \psi' = -4\pi\varrho$  mit  $\varrho = 1$  innerhalb und  $= 0$  außerhalb des gegebenen Ellipsoids ( $s = 0$ ) in den entsprechenden „ellipsoidalen“ Koordinaten aufschreibt und integriert (siehe Anhang). Wir begnügen uns hier mit ihrer Verifikation, die darin besteht, daß  $\psi^{(i)}$  und  $\psi^{(a)}$  ebenso wie ihre ersten Ableitungen nach den Koordinaten bei  $s = 0$  stetig ineinander übergehen, während ihre zweiten Ableitungen den Gleichungen

$$\nabla^2 \psi^{(i)} = -4\pi, \quad \nabla^2 \psi^{(a)} = 0 \quad (79c)$$

genügen sollen.

Der Stetigkeitsbeweis bietet keine Schwierigkeit und wir werden uns nicht dabei aufhalten. Durch zweimalige Differentiation der Ausdrücke (79a) — wobei die untere Grenze in dem Ausdruck für  $\varphi^a$  als Funktion

der Koordinaten  $xyz$  zu behandeln ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi^{(t)} &= -2\pi abc \int_0^\infty \left( \frac{1}{a^2+t} + \frac{1}{b^2+t} + \frac{1}{c^2+t} \right) \frac{dt}{T} = -4\pi abc \int_0^\infty \frac{dT}{T^2} \\ &= -\frac{4\pi abc}{T(0)} = -4\pi \end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise

$$\nabla^2 \psi^{(s)} = \left\{ -4\pi \frac{abc}{T(s)} + 2\pi \frac{abc}{T(s)} \left( \frac{x}{a^2+s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{y}{b^2+s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{z}{c^2+s} \frac{\partial s}{\partial z} \right) \right\}_{s=0}.$$

Andererseits gilt nach (79b)

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2x}{a^2+s} : \left[ \frac{x^2}{(a^2+s)^2} + \frac{y^2}{(b^2+s)^2} + \frac{z^2}{(c^2+s)^2} \right].$$

Daraus ergibt sich für den Klammerausdruck in der vorhergehenden Formel der Wert 2, so daß  $\nabla^2 \psi^a$  tatsächlich verschwindet.

Der Ausdruck (79a) für  $\psi^i$  läßt sich als Funktion der Koordinaten in der Form

$$\psi^i = -\frac{1}{2} (A x^2 + B y^2 + C z^2) + \text{konst}$$

darstellen, mit den Koeffizienten

$$A = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t)T} \text{ usw.} \quad (80)$$

Daraus folgt nach (79)

$$\varphi^{(i)} = A P_x x + B P_y y + C P_z z$$

und ferner für die sekundäre Feldstärke innerhalb des gleichförmig polarisierten Ellipsoids

$$E_{x_i}^{(i)} = -A P_x, \quad E_{y_i}^{(i)} = -B P_y, \quad E_{z_i}^{(i)} = -C P_z. \quad (80a)$$

Dadurch wird die Rechtfertigung unserer Grundannahme erbracht. Durch Elimination von  $\mathfrak{E}^i$  aus diesen Gleichungen und der Gleichung  $\mathfrak{P} = \varkappa(\mathfrak{E}^0 + \mathfrak{E}^i)$  erhalten wir die folgenden Ausdrücke für die Hauptkomponenten der Polarisation als Funktion der primären Feldstärke:

$$P_x = \frac{\varkappa E_x^0}{1 + \varkappa A}, \quad \text{usw.} \quad (80b)$$

Die Polarisation des Ellipsoids läßt sich also durch einen symmetrischen Polarisationstensor  $\alpha_{ik}$  charakterisieren mit den Hauptkomponenten  $\frac{\varkappa V}{1 + \varkappa A}$ ,  $\frac{\varkappa V}{1 + \varkappa B}$ ,  $\frac{\varkappa V}{1 + \varkappa C}$  ( $V = \frac{4\pi}{3} abc$  — Volum des Ellipsoids); das vollständige Moment  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} V$  des letzteren in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem ist durch die Formel

$$p_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} E_k^0$$

gegeben.

Es sei bemerkt, daß in der Theorie der Magnetisierung die Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  als die „Entmagnetisierungskoeffizienten“ bezeichnet werden.

Wenn alle drei Achsen des betrachteten Ellipsoids zusammenfallen, d. h. in dem Falle einer Kugel, erhalten wir nach (80)

$$A = B = C = 2\pi a^3 \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t)^{3/2}} = \frac{4\pi}{3}$$

und folglich nach (80b)

$$P = \frac{\kappa E^0}{1 + \frac{4\pi}{3}\kappa} = \frac{3}{4\pi\kappa + 2} \varepsilon - 1 E^0$$

d. h. die schon früher abgeleitete Formel (65b).

Bei  $a = b < c$  (gestreckter Rotationsellipsoid) ergibt sich

$$A = B = 2\pi a^2 c \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t)^2 \sqrt{c^2+t}}$$

Das letzte Integral nimmt mittels der Substitution  $c^2 + t = u^2$  die folgende Gestalt an:

$$\int_c^\infty \frac{2du}{(u^2 - \zeta^2)^2} = \frac{c}{\zeta^2(c^2 - \zeta^2)} - \frac{1}{2\zeta^3} \lg \frac{c+\zeta}{c-\zeta} \quad (\zeta^2 = c^2 - a^2).$$

Es wird also mit  $\zeta : c = \gamma$  (Exzentrizität)

$$A = B = 2\pi \left[ \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1-\gamma^2}{2\gamma^3} \lg \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right] \quad (80c)$$

und in ähnlicher Weise

$$C = 4\pi(1-\gamma^2) \left[ \frac{1}{2\gamma^3} \lg \frac{1+\gamma}{1-\gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

Bei sehr großen Exzentrizitäten hat man näherungsweise

$$C = 4\pi \frac{a^2}{c^2} \left( \lg \frac{2c}{a} - 1 \right). \quad (80d)$$

Die entsprechenden Formeln für das abgeplattete Rotationsellipsoid werden wir nicht aufschreiben, denn sie bieten kein praktisches Interesse dar.

Die in Nr. 2 angeführten Formeln für das Potential und die Kapazität eines geladenen leitenden Rotationsellipsoid können mittels der Ausdrücke (79a) auf den Fall eines dreiaxigen Ellipsoids verallgemeinert werden. Die Verteilung der Flächenladung entspricht einer durch zwei ähnliche koaxiale Ellipsoide begrenzten gleichförmig geladenen Schale. Das Potential der letzteren  $\varphi$  ist gleich der Differenz der Potentiale  $\psi$  von zwei volumgeladenen Ellipsoiden mit den Halbachsen  $a, b, c$  und  $a(1+\delta), b(1+\delta), c(1+\delta)$ . Bei unendlich kleinem  $\delta$  kann man folglich setzen

$$\varphi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial a} a + \frac{\partial \psi}{\partial b} b + \frac{\partial \psi}{\partial c} c \right) \rho \delta. \quad (81)$$

Dabei ist die Volumdichte  $\rho$  der Ladung durch die Totalladung  $e$  der Schale nach der Formel

$$e = \left( \frac{\partial V}{\partial a} a + \frac{\partial V}{\partial b} b + \frac{\partial V}{\partial c} c \right) \rho \delta = 4 \pi a b c \rho \delta \quad (81 a)$$

bestimmt.

Setzt man in (81) die Ausdrücke (79a) ein, so erhält man nach einer einfachen Rechnung die folgenden Formeln:

$$\varphi^{(s)} = \frac{e}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{T(t)}, \quad \varphi^{(a)} = \frac{e}{2} \int_s^\infty \frac{dt}{T(t)}. \quad (81 b)$$

Die Kapazität des Ellipsoids drückt sich folglich im allgemeinen Fall folgendermaßen aus:

$$K = 2 : \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)}}. \quad (81 c)$$

Bei  $a = b \neq c$  erhalten wir daraus die schon bekannten Formeln (71b) für die Kapazität eines gestreckten oder abgeplatteten Rotationsellipsoids.

Die Induktionswirkung, welche auf einem leitenden Ellipsoid durch ein homogenes primäres Feld ausgeübt wird, ergibt sich aus den entsprechenden Formeln für das dielektrische Ellipsoid bei  $\kappa = \infty$ . Wir haben insbesondere für die Komponenten des induzierten Momentes  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} V$  nach (80 b)

$$p_x = \frac{V E_x^0}{A} = \frac{2}{3 \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2 + t) T(t)}} E_x^0 \quad \text{usw.}$$

Da die Richtung dieses Momentes bei dem leitenden wie bei dem dielektrischen Ellipsoid von der Richtung des primären Feldes im allgemeinen verschieden ist, muß das Ellipsoid eine Drehkraft erfahren mit dem Moment

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{E}^0, \quad (82)$$

die seine größte Achse in der Feldrichtung einzustellen sucht. Diesem Drehmoment entspricht die potentielle Energie

$$U = -\frac{1}{2} \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{E}^0,$$

d. h. nach (80 b)

$$U = -\frac{\kappa}{2} V \left( \frac{E_x^{02}}{1 + \kappa A} + \frac{E_y^{02}}{1 + \kappa B} + \frac{E_z^{02}}{1 + \kappa C} \right), \quad (82 a)$$

die bei der oben erwähnten Orientierung ihr Minimum erreicht. Die letzte Formel bleibt näherungsweise auch in dem Fall eines nicht vollkommen homogenen Feldes gültig und bestimmt dabei die auf das

Ellipsoid wirkende treibende Kraft. Die Komponenten der letzteren sind folglich gleich

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \kappa V \left[ \frac{E_x^0}{1 + \kappa A} \frac{\partial E_x^0}{\partial x} + \frac{E_y^0}{1 + \kappa B} \frac{\partial E_y^0}{\partial x} + \frac{E_z^0}{1 + \kappa C} \frac{\partial E_z^0}{\partial x} \right] \text{ usw.}$$

In dem Spezialfall einer Kugel ergibt sich:

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 \nabla (E^0{}^2) \quad (82b)$$

[vgl. (65b) § 7]. Setzt man hier  $E^0 = \frac{e}{R^2}$  ein, so bekommt man den angenäherten Ausdruck für die Anziehungskraft zwischen einer Punktladung und der dadurch polarisierten dielektrischen (bzw. bei  $\varepsilon = \infty$  leitenden) Kugel. Die Formel (82b) gilt nur für den Fall, daß  $a$  klein gegen den Abstand  $R$  ist. Wenn die Ladung sich in unmittelbarer Nähe der Kugeloberfläche befindet, wirkt die letztere als eine unbegrenzte Ebene, d. h. als das elektrische Bild der betrachteten Punktladung  $e' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} e$ . Man bekommt folglich in diesem Fall eine Anziehungskraft

$$F = \frac{e e'}{(2h)^2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{e^2}{4h^2}, \quad (82c)$$

was einer gegenseitigen Energie

$$U = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{e^2}{4h},$$

entspricht ( $h$  = Abstand der Ladung  $e$  von der Spiegelebene).

## Anhang. Mathematische Ergänzungen.

### § 1. Krümmungslinige orthogonale Koordinaten.

Es seien  $x, y, z$  die Koordinaten der verschiedenen Raumpunkte in bezug auf ein gegebenes rechtwinkliges und geradliniges Koordinatensystem. Wir führen nun statt dieser Koordinaten drei neue unabhängige Variable  $\xi, \eta, \zeta$  ein, die mit ihnen stetig und eindeutig verknüpft sind. Dies bedeutet in geometrischer Sprache, daß jedem Raumpunkt  $P$  ein ganz bestimmter Wertetripel  $\xi, \eta, \zeta$  entspricht, oder noch anschaulicher, daß die verschiedenen Flächen

$$\xi(x, y, z) = \text{konst}$$

(oder  $\eta = \text{konst}$  bzw.  $\zeta = \text{konst}$ ) sich nicht schneiden, während jede Fläche  $\xi = \text{konst}$  durch jede der Flächen  $\eta = \text{konst}$  oder  $\zeta = \text{konst}$  usw. geschnitten wird. In diesem geometrischen Sinne werden die Variablen  $\xi, \eta, \zeta$  als neue räumliche *Koordinaten* bezeichnet. Die Flächen  $\xi = \text{konst}$  heißen die Koordinatenflächen ( $\eta, \zeta$ ); die Schnittlinien der Flächen  $\eta = \text{konst}$   $\zeta = \text{konst}$  stellen die zugehörigen  $\xi$ -Koordinatenlinien dar. Die Koordinatenlinien sind also die Linien

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta),$$

die einer Änderung der entsprechenden Koordinate ( $\xi$ ) bei festgehaltenen Werten der zwei anderen entsprechen. Da diese Linien im allgemeinen gekrümmt sind, bezeichnet man die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  als „krümmungslinig“.

Wir werden uns im folgenden nur auf *orthogonale* krümmungslinige Koordinaten beschränken, d. h. solche, bei welchen die verschiedenen Flächenscharen  $\xi, \eta, \zeta = \text{konst}$  zueinander senkrecht sind. Als einfachste und wichtigste Beispiele solcher Koordinaten können die schon vielfach benutzten zylindrischen Koordinaten  $(r, \alpha, z)$  oder polare Koordinaten  $(R, \Theta, \alpha)$  dienen.

Einer unendlich kleinen Änderung irgend einer Koordinate — sagen wir  $\xi$  — bei festgehaltenen Werten der zwei anderen entspricht eine unendlich kleine Verschiebung des entsprechenden Punktes längs der zugehörigen Koordinatenlinie um die Strecke  $h_\xi \cdot d\xi$ , wo  $h_\xi$  eine von dem Charakter der Koordinatenlinien abhängige Funktion der Variablen  $\xi, \eta, \zeta$  ist. Wenn die Gestalt der Funktionen  $x(\xi, \eta, \zeta)$  usw. bekannt ist, kann man diesen Koeffizienten nach der Formel

$$h_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \quad (1)$$

berechnen.

Die Projektionen einer infinitesimalen Verschiebung  $ds$ , die einer Änderung von  $\xi, \eta, \zeta$  um  $d\xi, d\eta, d\zeta$  entspricht, auf die zugehörigen Koordinatenrichtungen, d. h. die Tangenten zu den Koordinatenlinien, welche sich im Punkte  $(\xi, \eta, \zeta)$  schneiden, sind gleich  $h_\xi d\xi, h_\eta d\eta, h_\zeta d\zeta$ . Da diese Richtungen, gemäß unserer Voraussetzung, zueinander senkrecht sind so hat man die folgende Formel für das Linienelement  $ds$ :

$$ds^2 = h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 + h_\zeta^2 d\zeta^2. \quad (1a)$$

Die den paarweise genommenen Differentialen  $d\xi, d\eta, d\zeta$  entsprechenden Flächenelemente sind

$$dS_\xi^1 = h_\eta h_\zeta d\eta d\zeta, \quad dS_\eta = h_\zeta h_\xi d\zeta d\xi, \quad dS_\zeta = h_\xi h_\eta d\xi d\eta \quad (1b)$$

und das Volum des durch sie aufgespannten elementaren Parallelepipeds (Quaders)

$$dV = h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta. \quad (1c)$$

Wir denken uns irgend ein Vektorfeld  $\mathfrak{A}(\tau)$  und bezeichnen die Projektionen des Vektors  $\mathfrak{A}$  in einem gegebenen Punkt  $\tau(\xi, \eta, \zeta)$  auf die entsprechenden Koordinatenrichtungen (im Sinne der Zunahme der Variablen  $\xi, \eta, \zeta$  gerechnet) mit  $A_\xi, A_\eta, A_\zeta$ . Sofern wir uns auf diesen Punkt beschränken, spielt die Krümmung der hindurchgehenden Koordinatenlinien keine Rolle. Für die Summen, Differenzen und Produkte von zwei verschiedenen *sich auf denselben Punkt beziehenden* Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  bleiben folglich dieselben Formeln gültig, wie bei den gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten, nämlich

$$(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B})_\xi = A_\xi \pm B_\xi \quad \text{usw.} \quad (2)$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = A_\xi B_\xi + A_\eta B_\eta + A_\zeta B_\zeta \quad (2a)$$

(insbesondere  $A^2 = A_\xi^2 + A_\eta^2 + A_\zeta^2$ ) und

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})_\xi = A_\eta B_\zeta - A_\zeta B_\eta \quad \text{usw.} \quad (2b)$$

Die letzteren Formeln gelten nur in demjenigen Falle, wenn die drei Koordinatenrichtungen in jedem Punkt ein positives oder rechtsschraubiges System bilden.

Wenn die Vektoren  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  sich auf zwei *verschiedene* Punkte  $P$  und  $P'$  beziehen, sind die üblichen Formeln im allgemeinen nicht mehr gültig, da die Koordinatenrichtungen in  $P$  und  $Q$  verschieden sind. Will man z. B. die Zunahme  $d\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}$  bestimmen, welche die betrachtete Vektorgröße bei einem Übergang von dem gegebenen Punkt  $P$  zum nächsten  $P'$  erfährt, so muß man den Umstand berücksichtigen, daß einem tatsächlich konstanten Vektor  $\mathfrak{A}$  in  $P$  und  $P'$  verschiedene Komponenten  $A_\xi$  bzw.  $A'_\xi$  usw. entsprechen, und umgekehrt konstanten Werten der Komponenten  $A_\xi = A'_\xi$  usw. verschiedene Werte des Vektors  $\mathfrak{A}$ .

Aus diesem Grunde ist die Koordinatendarstellung der *Differentialoperationen*  $\nabla \cdot \mathfrak{A} = \text{div} \mathfrak{A}$  und  $\nabla \times \mathfrak{A} = \text{rot} \mathfrak{A}$  in einer zu (2a) und

(2b) ähnlichen Form — wie dies bei gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten der Fall ist — bei krümmungslinigen Koordinaten unmöglich. Diese Darstellung läßt sich am einfachsten in derselben Weise ableiten wie für geradlinige Koordinaten, und zwar durch Anwendung der allgemeinen Definitionsformeln

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \operatorname{Lim} \frac{1}{V} \oint A_n dS$$

und 
$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{Lim} \frac{1}{V} \oint \mathfrak{n} \times \mathfrak{A} dS,$$

oder 
$$\operatorname{rot}_{\mathfrak{n}} \mathfrak{A} = \operatorname{Lim} \frac{1}{S} \oint A_\tau d\sigma$$

[vgl. Bd. I, S. 18] auf unendlich kleine gekrümmte Quader oder Rechtecke, die um den betrachteten Punkt durch drei Paare von Koordinatenflächen ( $\xi = \xi', \xi''$ ;  $\eta = \eta', \eta''$ ;  $\zeta = \zeta', \zeta''$ ) oder durch zwei Paare von Koordinatenlinien (d. h. durch eine Fläche eines Koordinatenquaders) gebildet sind (Abb. 49).

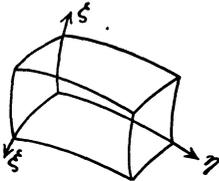


Abb. 49.

Man bekommt dabei nach (1 b)

$$\oint A_n dS = \sum (A_{\xi''} h_{\eta''} h_{\zeta''} - A_{\xi'} h_{\eta'} h_{\zeta'}) \Delta \eta \cdot \Delta \zeta,$$

wo das Summenzeichen sich auf die verschiedenen Flächenpaare bezieht und  $\Delta \xi = \xi'' - \xi'$ ,  $\Delta \eta = \eta'' - \eta'$ ,  $\Delta \zeta = \zeta'' - \zeta'$  bedeuten, d. h. nach (1 c)

$$\oint A_n dS = \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi h_\eta h_\zeta) \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot \Delta \zeta = \sum \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi h_\eta h_\zeta) \cdot \frac{\Delta V}{h_\xi h_\eta h_\zeta},$$

oder folglich

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\zeta A_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta h_\xi A_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi h_\eta A_\zeta) \right]. \quad (3)$$

Für die Komponenten des Vektors  $\operatorname{rot} \mathfrak{A}$  ergeben sich in genau derselben Weise die folgenden Formeln

$$\operatorname{rot}_\xi \mathfrak{A} = \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta A_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\eta A_\eta) \right] \quad \text{usw.} \quad (3a)$$

Was schließlich die Komponenten des Vektors  $\nabla \varphi$  anbetrifft, so sind sie offenbar durch

$$(\nabla \varphi)_\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\xi}, \quad \dots, \quad \dots$$

gegeben, wo  $\partial s_\xi$  usw. die Elemente der einzelnen Koordinatenlinien bedeuten oder nach (1 a)

$$\nabla_\xi \varphi = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \dots \quad (3b)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke für die Komponenten des Vektors  $\mathfrak{A} = \nabla \varphi$  in (3) bekommen wir den *Laplaceschen* Operator in krümmungslinigen Koordinaten:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) \right]. \quad (3c)$$

Wir wollen nun die vorhergehenden Formeln für die gebräuchlichsten krümmungslinigen Koordinatensysteme spezialisieren.

### 1. Zylindrische Koordinaten $(r, \alpha, z)$ .

Die Koordinatenflächen sind hier eine Schar von koaxialen Zylindern ( $r = \text{konst}$ ), eine Schar von Ebenen  $\alpha = \text{konst}$ , die durch die gemeinsame Achse dieser Zylinder durchgehen ( $\alpha$  ist der Azimutwinkel zwischen diesen Meridionalebenen und einer von ihnen) und schließlich eine Schar von Ebenen  $z = \text{konst}$ , die zu dieser Achse senkrecht stehen. Die Koordinatenlinien sind eine doppelte Schar von radialen Geraden, eine doppelte Schar von koaxialen Kreisen und eine doppelte Schar von axialen Geraden, die der Zylinderachse parallel sind.

Der Ausdruck eines Linienelementes in zylindrischen Koordinaten lautet:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2. \quad (4)$$

Es wird also  $h_r = 1$ ,  $h_\alpha = r$ ,  $h_z = 1$  und folglich

$$\text{div } \mathfrak{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (4a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \\ \text{rot}_\alpha \mathfrak{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\ \text{rot}_z \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

$$\nabla_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \nabla_\alpha \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \nabla_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (4c)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4d)$$

### 2. Räumliche Polarkoordinaten oder Kugelkoordinaten

$(R, \Theta, \alpha)$ .

Die Koordinatenflächen sind: eine Schar von konzentrischen Kugeln  $R = \text{konst}$ , eine Schar von Kegeln  $\Theta = \text{konst}$ , mit der gemeinsamen Spitze (Kugelmittelpunkt) und Achse (polare Achse); eine Schar von Meridionalebenen  $\alpha = \text{konst}$ .

Die Koordinatenlinien sind:  $(R) =$  radiale Geraden,  $(\Theta) =$  Meri-

dionalkreise,  $(\alpha)$  = parallele Kreise. Das Linienelement drückt sich durch die Formel

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\Theta^2 + R^2 \sin^2 \Theta d\alpha^2 \quad (5)$$

aus, was den folgenden Werten der Koeffizienten  $h$  entspricht:

$$h_R = 1, \quad h_\Theta = R, \quad h_\alpha = R \sin \Theta.$$

Daraus folgt ferner

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta A_\Theta) + \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_R \mathfrak{A} &= \frac{1}{R \sin \Theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta A_\alpha) - \frac{\partial A_\Theta}{\partial \alpha} \right], \\ \operatorname{rot}_\Theta \mathfrak{A} &= \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial A_R}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial R} (R A_\alpha) \right], \\ \operatorname{rot}_\alpha \mathfrak{A} &= \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial (R A_\Theta)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial \Theta} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

$$\nabla_R \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial R}, \quad \nabla_\Theta \varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta}, \quad \nabla_\alpha \varphi = \frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad (5c)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R \varphi)}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5d)$$

Diese Formeln haben wir in den Kapiteln V und VI schon teilweise benutzt, insbesondere die Formeln (4b) und (5b) für  $\operatorname{rot}_\alpha \mathfrak{A}$  in zylindrischen und Kugelkoordinaten und die Formel (4d).

### 3. Konform abbildende Koordinaten $(\xi, \eta, z)$ .

Diese Koordinaten ergeben sich aus den gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  durch eine Transformation von der Gestalt

$$\xi + i\eta = F(x + iy) \quad \text{oder} \quad x + iy = f(\xi + i\eta), \quad (6)$$

wo  $F$  bzw.  $f$  beliebige analytische Funktionen bedeuten. Setzt man z. B.

$$x + iy = r e^{i\alpha} = e^{\lg r + i\alpha},$$

so bekommt man Koordinaten  $\xi = \lg r, \eta = \alpha$ , die sich von den zylindrischen nur dadurch unterscheiden, daß der Radiusvektor  $r$  durch seinen Logarithmus ersetzt wird. Durch Differentiation von (6) und Multiplikation mit dem komplex konjugierten Ausdruck erhalten wir

$$(d\xi + id\eta)(d\xi - id\eta) = F' F'^* (dx + idy)(dx - idy)$$

d. h.

$$d\xi^2 + d\eta^2 = |F'|^2 (dx^2 + dy^2)$$

oder durch Anwendung derselben Operationen auf die zweite Gleichung (6)

$$dx^2 + dy^2 = |f'|^2 (d\xi^2 + d\eta^2), \quad (6a)$$

wo  $f'$  und  $F'$  die Ableitungen von  $f$  und  $F$  nach den entsprechenden komplexen Argumenten

$$x + iy = w \quad \text{bzw.} \quad \xi + i\eta = \omega$$

bedeuten. Das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

drückt sich folglich in den neuen Koordinaten durch die Formel

$$ds^2 = |f'|^2 (d\xi^2 + d\eta^2) + dz^2 \tag{6b}$$

aus. Daraus sieht man *erstens*, daß die neuen Koordinaten immer, d. h. bei beliebiger Gestalt der Funktion  $F$  (oder  $f$ ) orthogonal sind, und *zweitens* daß sie jede unendlich kleine Figur auf der  $xy$ -Ebene in eine vollkommen ähnliche Figur auf der  $\xi, \eta$ -Ebene transformieren oder wie man sagt „abbilden“, wobei die Größe

$$|f'| = \frac{1}{|F'|} \equiv h \tag{6c}$$

die Rolle des *Eichfaktors* spielt. Eine solche Abbildung wird *konform* genannt. Ihr spezieller Charakter ist dadurch bedingt, daß die Koordinatenkoeffizienten  $h_\xi$  und  $h_\eta$  einander gleich sind; man hat nämlich nach (6b)

$$h_\xi = h_\eta = |f'|, \quad h_z = 1.$$

Die Formeln (3a, b, c, d) nehmen dabei die folgende Gestalt an:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h A_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h A_\eta) \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_\xi \mathfrak{A} &= \frac{1}{h} \frac{\partial A_z}{\partial \eta} - \frac{\partial A_\eta}{\partial z}, & \operatorname{rot}_\eta \mathfrak{A} &= \frac{\partial A_\xi}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial A_z}{\partial \xi}, \\ \operatorname{rot}_z \mathfrak{A} &= \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial (h A_\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial (h A_\xi)}{\partial \eta} \right], \end{aligned} \right\} \tag{7a}$$

$$\nabla_\xi \varphi = \frac{\partial \varphi}{h \partial \xi}, \quad \nabla_\eta \varphi = \frac{\partial \varphi}{h \partial \eta}, \quad \nabla_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{7b}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{7c}$$

Setzt man hier  $\xi = \lg r$ ,  $\eta = \alpha$ ,  $h = r$  ein, so bekommt man die schon oben angeführten Formeln für zylindrische Koordinaten.

Ein anderes für die Anwendungen wichtiges Koordinatensystem wird durch die Transformation

$$w = a_0 \cos i\omega, \quad \text{d. h.} \quad x + iy = a_0 \cos(i\xi - \eta) \tag{8}$$

definiert mit dem reellen Koeffizienten  $a_0$ , der eine bestimmte Länge darstellt ( $\xi$  und  $\eta$  sind dimensionslose Zahlen).

Geht man zu den reellen Größen über, so erhält man mit Rücksicht auf die Formeln

$$\begin{aligned} \cos i\xi &= \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} \Rightarrow \cosh \xi, & \sin i\xi &= i \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2} = i \sinh \xi, \\ x &= a_0 \cosh \xi \cos \eta, & y &= a_0 \sinh \xi \sin \eta, \end{aligned} \tag{8a}$$

oder wegen der Beziehungen  $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$ ,  $\cos^2 \xi + \sin^2 \xi = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a_0^2 \cosh^2 \eta} + \frac{y^2}{a_0^2 \sinh^2 \xi} &= 1, \\ \frac{x^2}{a_0^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{a_0^2 \sin^2 \eta} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Die letzten Gleichungen zeigen, daß die Koordinatenflächen  $\xi = \text{konst}$  und  $\eta = \text{konst}$  konfokale elliptische bzw. hyperbolische Zylinder darstellen mit dem Brennpunktabstand  $2a_0$ . Die  $\xi$ -Linien sind Hyperbel und die  $\eta$ -Linien — Ellipse, welche den radialen Geraden und den Kreisen des „zylindrischen“ Koordinatensystems  $(r, \alpha, z)$  entsprechen (Abb. 50).

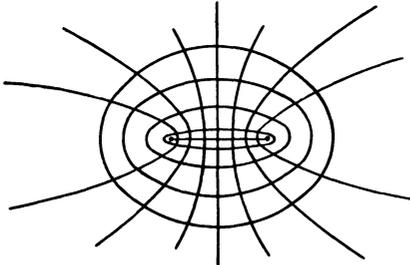


Abb. 50.

Der Eichfaktor des betrachteten „elliptischen“ oder „konfokalen“ Koordinatensystems ist

$$h = a_0 |\sin(i\xi - \eta)| = a_0 \sqrt{\sinh^2 \xi \cos^2 \eta + \cosh^2 \xi \sin^2 \eta} \quad (8c)$$

Statt der Koordinaten  $(\xi, \eta)$  führt man gewöhnlich als „elliptische Koordinaten“ die Größen

$$u = \cosh \xi, \quad v = \cos \eta. \quad (9)$$

ein. Multipliziert mit  $a_0$  sind sie gleich der  $x$ -Halbachse der sich im Punkte  $(\xi, \eta)$  schneidenden Ellipse und Hyperbel (8b). Bezeichnet man die Abstände des Schnittpunktes von den beiden Brennpunkten mit  $r_1$  und  $r_2$ , so hat man die Relationen:

$$u = \frac{r_1 + r_2}{2a_0}, \quad v = \frac{r_1 - r_2}{2a_0}. \quad (9a)$$

Da  $u$  nur von  $\xi$  und  $v$  nur von  $\eta$  abhängt, sind die Koordinatenflächen und -linien für die beiden Systeme  $(\xi, \eta)$  und  $(u, v)$  dieselben. Es gilt ferner nach (9) und (8c)

$$\begin{aligned} du &= \sinh \xi d\xi = \sqrt{u^2 - 1} d\xi, & dv &= -\sin \eta d\eta = -\sqrt{1 - v^2} d\eta, \\ h^2 &= a_0^2 [(u^2 - 1)v^2 + u^2(1 - v^2)] = a_0^2 (u^2 - v^2), \end{aligned}$$

woraus folgt gemäß (6b):

$$ds^2 = a_0^2 (u^2 - v^2) \left( \frac{du^2}{u^2 - 1} + \frac{dv^2}{1 - v^2} \right) + dz^2, \quad (9b)$$

d. h.

$$h_u = a_0 \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1}}, \quad h_v = a_0 \sqrt{\frac{u^2 - v^2}{1 - v^2}}, \quad h_z = 1.$$

Wir wollen die Formeln (3a—d) für dieses Koordinatensystem nicht aufschreiben — desto mehr, da sie sich unmittelbar aus (7a, b, c)

ergeben — und begnügen uns damit den Ausdruck für  $\nabla^2 \varphi$  anzugeben. Der letzte lautet

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi = & \frac{1}{a_0^2 (u^2 - v^2)} \left[ \sqrt{u^2 - 1} \frac{\partial}{\partial u} \left( \sqrt{u^2 - 1} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \right. \\ & \left. + \sqrt{1 - v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \sqrt{1 - v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (9c)$$

#### 4. Rotationssymmetrische Koordinaten $(\xi, \eta, \alpha)$ .

Durch Rotation eines ebenen Koordinatensystems, das eine Symmetrieachse besitzt (wie z. B. die  $x$ - oder  $y$ -Achse in dem soeben betrachteten elliptischen Koordinatensystem), um diese Symmetrieachse und Hinzufügung des Azimutwinkels  $\alpha$  als dritter Koordinate ergibt sich ein rotationssymmetrisches Koordinatensystem. Wir wollen die Rotationsachse als  $z$ -Achse bezeichnen und werden das entsprechende zylindrische Koordinatensystem  $(z, r, \alpha)$  als Grundsystem dieser Art betrachten. Es spielen dabei für jede Meridionalebene  $\alpha = \text{konst}$  die Größen  $(z, r)$  genau dieselbe Rolle wie die rechtwinkligen Koordinaten  $(x, y)$ ; die verschiedenen Koordinatentransformationen, bei welchen die Rotationssymmetrie um die  $z$ -Achse beibehalten wird, reduzieren sich auf ebene Transformationen

$$(z, r) \rightarrow (\xi, \eta)$$

ebenso wie in der vorigen Nummer. Der Unterschied besteht in dem Umstand, daß die Ausgangsform für das Linienelement in dem jetzt betrachteten Fall

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\alpha^2,$$

ist, statt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

wie früher.

Handelt es sich insbesondere um eine konforme Transformation von der Gestalt

$$z + ir = f(\xi + i\eta) = f_1(\xi, \eta) + if_2(\xi, \eta), \quad (10)$$

so wird statt (6b)

$$ds^2 = h^2 (d\xi^2 + d\eta^2) + f_3^2 d\alpha^2, \quad (10a)$$

wobei  $h$  wie früher gleich dem Absolutwert der Ableitung von  $f(\xi + i\eta)$  nach  $\xi + i\eta$  ist.

Dies hat zur Folge, daß die Formeln für  $\text{div} \mathfrak{A}$ ,  $\text{rot} \mathfrak{A}$  usw. eine von (7, a, b, c) wesentlich verschiedene Gestalt erhalten. Und zwar ergibt sich nach (3a—d):

$$\text{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (r h A_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (r h A_\eta) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \quad (10b)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_\xi \mathfrak{A} &= \frac{1}{h r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r A_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_\eta}{\partial \alpha}, \\ \operatorname{rot}_\eta \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_\xi}{\partial \alpha} - \frac{1}{h r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial \xi}, \\ \operatorname{rot}_\alpha \mathfrak{A} &= \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h A_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h A_\xi) \right], \end{aligned} \right\} \quad (10c)$$

$$\nabla_\xi \varphi = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \nabla_\eta \varphi = \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \nabla_\alpha \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad (10d)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (10e)$$

In dem Fall der „rotationselliptischen“ oder *spheroidalen* Koordinaten  $(u, v, \alpha)$ , welche durch die Formeln:

$$z + i r = a_0 \cos i(\xi + i \eta) = a_0 [u v + i \sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)}], \quad (11)$$

$$(u = \cosh \xi, \quad v = \cos \eta),$$

d. h. 
$$z = a_0 u v, \quad r = a_0 \sqrt{u^2 - 1} \sqrt{1 - v^2} \quad (11a)$$

definiert werden, bekommt man z. B. den folgenden Ausdruck für  $\nabla^2 \varphi$ :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{a_0^2 (u^2 - v^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ (u^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ (1 - v^2) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right] \right\} + \frac{1}{a_0^2 (u^2 - 1)(1 - v^2)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \quad (11b)$$

Das eingeklammerte Glied unterscheidet sich von dem entsprechenden Glied in (9c) durch  $u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ .

Es sei bemerkt, daß die Flächen  $u = \text{konst}$  *gestreckte* konfokale Rotationsellipsoide mit dem Brennpunktabstand  $2a_0$  darstellen; die Flächen  $v = \text{konst}$  sind dazu orthogonale zweischalige Rotationshyperboloide. Durch Vertauschung der Ausdrücke (11a) für  $z$  und  $r$ , d. h. durch die Transformation

$$i(z + ir) = iz - r = a_0 \cos i(\xi + i \eta) = a_0 \cos (i\xi - \eta),$$

$$\cosh \xi = u, \quad \cos \eta = v$$

würden wir statt der gestreckten *abgeblattete* Rotationsellipsoide erhalten mit dem gemeinsamen „Brennfleck“ in der Gestalt eines zur Rotationsachse senkrechten Kreises vom Radius  $a_0$ .

### 5. Ellipsoidales (konfokales) Koordinatensystem.

Wir fassen nun ein dreiaxsiges Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (12)$$

ins Auge und betrachten die Schar von Flächen, die sich daraus durch Vermehrung von  $a^2, b^2, c^2$  um dieselbe Größe  $s$  ergeben, d. h. die zugehörigen „konfokalen“ Flächen:

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1, \quad (12a)$$

Wir nehmen dabei an, daß  $a$  die größte,  $b$  die mittlere und  $c$  die kleinste Achse des Ellipsoids (12) bedeutet, d. h., daß

$$a > b > c$$

ist.

Solange der Parameter  $s$  sich im Intervall  $(-c^2, +\infty)$  ändert, stellen die Flächen (12a) Ellipsoide; bei den Extremwerten dieses Intervalls bekommen wir eine unendlich große Kugel ( $s = \infty$ ) bzw. eine in der  $xy$ -Ebene liegende *Ellipse* mit den Halbachsen  $a^2 - c^2$ ,  $b^2 - c^2$ . Der Änderung von  $s$  in dem Intervall  $(-b^2, -c^2)$  entspricht eine Schar von *einschaligen* Hyperboloiden

$$\frac{x^2}{|a^2 + s|} + \frac{y^2}{|b^2 + s|} - \frac{z^2}{|c^2 + s|} = 1,$$

deren Grenzformen die obige Ellipse und (bei  $s = -b^2$ ) die in der  $y$ -Ebene liegende Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$$

ist.

Bei der weiteren Verminderung von  $s$  bekommen wir *zweischalige* Hyperboloide, die sich bei  $s = -a^2$  ins Unendliche verschieben. Negativen Werten von  $s$ , die kleiner als  $-a^2$  sind, entsprechen nur imaginäre Punkte.

Wir sehen also, daß die durch (12a) bestimmte Flächenschar tatsächlich aus drei verschiedenen Flächenscharen besteht. Es gehen dabei durch jeden Raumpunkt  $P$  je eine Fläche jeder Schar, d. h. ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid. Die drei Werte von  $s$ , welche diese sich in  $P$  schneidenden Flächen charakterisieren, können folglich als die *Koordinaten* dieses Punktes aufgefaßt werden. Wir wollen sie mit  $u$ ,  $v$ ,  $w$  bezeichnen. Dies sind die drei Wurzeln der Gleichung (12a) bei festgehaltenen Werten von  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Es bedeutet dabei  $u$  die im Intervall  $(-c^2, +\infty)$  liegende Wurzel,  $v$  entspricht dem Intervall  $(-b^2, -c^2)$  und  $w$  — dem Intervall  $(-a^2, -b^2)$ .

Es ist leicht zu zeigen, daß das so definierte Koordinatensystem *orthogonal* ist. Wir drücken zunächst  $x, y, z$  durch  $u, v, w$  aus. Dies geschieht am einfachsten auf Grund der folgenden Überlegung. Die Funktion

$$(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s) \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right]$$

ist ein ganzes Polynom dritten Grades in  $s$  mit dem Hauptglied  $s^3$  und mit den drei Wurzeln  $u, v, w$ . Es muß folglich gleich dem Produkt

$$(s - u)(s - v)(s - w)$$

sein. Wir haben also die Identität

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} = \frac{(s - u)(s - v)(s - w)}{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}. \quad (12b)$$

Multipliziert man diese Identität mit  $a^2 + s$  und setzt dann  $s = -a^2$  ein, so erhält man

$$x^2 = \frac{(a^2 + u)(a^2 + v)(a^2 + w)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}. \quad (13)$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für  $y^2$  und  $z^2$ .

Daraus folgt durch partielle Differentiation nach  $u, v, w$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} = x_u = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + u}, \quad x_v = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + v}, \quad x_w = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + w}, \\ y_u = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + u}, \quad y_v = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + v}, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Diese Größen bestimmen offenbar die Richtungskosinus der Koordinatenlinien in dem betrachteten Punkt  $(x, y, z)$ . Nun hat man

$$\begin{aligned} x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ = \frac{1}{4} \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + u)(a^2 + v)} + \frac{y^2}{(b^2 + u)(b^2 + v)} + \frac{z^2}{(c^2 + u)(c^2 + v)} \right\}, \end{aligned}$$

d. h. nach (13)

$$\begin{aligned} x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ = \frac{1}{4} \left[ \frac{a^2 + w}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{b^2 + w}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{c^2 + w}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Dadurch wird die Orthogonalität des neuen Koordinatensystems bewiesen. — In derselben Weise ergibt sich

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right\},$$

d. h.

$$h_u^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(a^2 + v)(a^2 + w)}{(a^2 + u)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{(b^2 + v)(b^2 + w)}{(b^2 + u)(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{(c^2 + v)(c^2 + w)}{(c^2 + u)(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \right\}$$

oder schließlich

$$\left. \begin{aligned} h_u^2 &= \frac{(u-v)(u-w)}{4(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}, \\ h_v^2 &= \frac{(v-u)(v-w)}{4(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}, \\ h_w^2 &= \frac{(w-u)(w-v)}{4(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}. \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$T_s = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)},$$

so erhält man nach (3d) den folgenden Ausdruck für den *Laplaceschen* Operator

$$\nabla^2 \varphi = 4 \left\{ \frac{T_u}{(u-v)(u-w)} \frac{\partial}{\partial u} \left( T_u \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + \frac{T_v}{(v-u)(v-w)} \frac{\partial}{\partial v} \left( T_v \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \frac{T_w}{(w-u)(w-v)} \frac{\partial}{\partial w} \left( T_w \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right\} \quad (13b)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für  $\text{div } \mathfrak{A}$  und  $\text{rot } \mathfrak{A}$  werden wir nicht aufschreiben.

Da die Größen  $T_u, T_v, T_w$  nur von den betreffenden Koordinaten  $u, v, w$  abhängen, so liegt es nahe, statt der letzteren die Variablen

$$\xi = \int_u^{\infty} \frac{du}{T_u}, \quad \eta = \int_v^{\infty} \frac{dv}{T_v}, \quad \zeta = \int_w^{\infty} \frac{dw}{T_w} \quad (13c)$$

einzuführen. Dabei nimmt  $\nabla^2 \varphi$  die folgende einfache Gestalt an:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{4}{(u-v)(v-w)(w-u)} \left\{ (w-v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + (u-w) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (v-u) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right\}. \quad (13d)$$

## § 2. Statische Probleme; Entwicklung nach den harmonischen Grundfunktionen.

### 1. Fragestellung und einfachste Lösungsmethode.

Die elektrostatischen (ebenso wie die magnetostatischen und die galvanischen) Probleme reduzieren sich vom mathematischen Standpunkte aus auf die Integration der Gleichung

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (14)$$

unter gewissen Bedingungen, die folgendermaßen zusammengefaßt werden können.

1.  $\varphi$  soll in dem betrachteten (endlichen oder unendlichen) Raumgebiet *eindeutig, stetig und endlich bleiben*.

2. An den Grenzen dieses Gebietes oder auf gegebene Flächen  $S_\alpha$ , wo verschiedene homogene Körper aneinander grenzen, muß die Normalkomponente des Gradienten von  $\varphi$  einen Sprung erleiden. Die Randwerte des Potentials oder der Betrag des Sprunges sind dabei im allgemeinen nicht gegeben, sondern durch die Gleichungen

$$\varphi = \varphi_\alpha + c \quad (14a)$$

oder

$$\Delta(\varepsilon \nabla_n \varphi) = f_\alpha \quad (14b)$$

in einer indirekten Weise bestimmt. Die Grenzbedingung (14a) entspricht dem Falle einer leitenden Oberfläche; es bedeuten dabei  $\varphi_\alpha$  eine gegebene Funktion (bei Anwesenheit eines primären Feldes) und  $c$  eine unbestimmte Konstante (oder Null falls  $\varphi_\alpha$  eine gegebene Konstante ist). Die Bedingung (14b) bezieht sich auf die Trennungsfäche zweier Dielektrika, wobei  $f_\alpha$  eine gegebene Funktion [z. B.  $(\varepsilon - 1) E_n^0$ ] ist.

3. Im *Unendlichen* soll  $\varphi$  entweder verschwinden (sekundäres Feld) oder einen bekannten Wert annehmen (primäres Potential).

Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich am einfachsten ermitteln, wenn es gelingt, ein den Unstetigkeitsflächen angepaßtes Koordinatensystem aufzufinden. Um dies zu illustrieren, betrachten wir den Fall eines geladenen isolierten Leiters von ellipsoidaler Gestalt (Halbachsen

$a, b, c$ ). Führt man die durch (13c) definierten Koordinaten ein, so erhält man für die Bestimmung seines Feldes die Gleichung

$$(w - v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + (u - w) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (v - u) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Die einfachsten partikularen Integrale der letzteren sind  $\varphi = \text{konst}$  und  $\varphi = \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta$ , wo  $\alpha, \beta, \gamma$  konstante Koeffizienten bedeuten. Dabei liefert die mit einer Konstante multiplizierte Koordinate  $\xi$  sofort die gesuchte Lösung, da sie auf der Oberfläche des betrachteten Ellipsoids den konstanten Wert

$$\xi = \int_0^{\infty} \frac{du}{T_u}$$

annimmt und in Unendlichkeit verschwindet. Wir können folglich

$$\varphi = \alpha \int_u^{\infty} \frac{du}{T_u}$$

setzen, wobei die Konstante  $\alpha$  durch die Gesamtladung des Ellipsoids  $e$  bestimmt wird. Es muß nämlich für sehr entfernte Punkte  $\varphi$  die Gestalt  $\frac{e}{R}$  haben. Da solche Punkte sehr großen Werten von  $u$  entsprechen, so haben wir

$$\varphi \cong \alpha \int_u^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{u}}.$$

Es bedeutet  $u$  in diesem Fall offenbar nichts anderes als das Quadrat der Entfernung [gemäß der Definitionsgleichung (12a)]. Wir erhalten folglich  $2\alpha = e$  im Einklang mit der Formel (81b) des letzten Kapitels.

## 2. Allgemeine Eigenschaften der harmonischen Grundfunktionen; Kugelfunktionen.

Ein sehr wesentliches Hilfsmittel zur Lösung komplizierterer statischer Aufgaben bei festgelegten (orthogonalen) Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  bilden die zu diesen Koordinaten gehörenden *harmonischen Grundfunktionen*. Damit werden wir die einfachsten Funktionen  $\psi(\xi, \eta, \zeta)$  bezeichnen, welche samt ihren Gradienten *im ganzen Raum* eindeutig, endlich und stetig bleiben und der Gleichung  $\nabla^2 \psi = 0$  genügen, *mit Ausschluß von einzelnen Punkten, Linien oder Flächen* (ohne Volumeninhalt), deren Lage durch den Charakter des betreffenden Koordinatensystems bestimmt ist. Diese „außergewöhnlichen Stellen“ oder „Pole“ können ebensogut im Endlichen wie im Unendlichen liegen. Dementsprechend muß man zwei verschiedene Arten von Grundfunktionen unterscheiden. Die Funktionen zweiter Art  $\psi^{(2)}(\xi, \eta, \zeta)$  haben einen Pol (oder mehrere Pole) im Endlichen, während sie im Unendlichen

verschwinden. Die Funktionen erster Art  $\psi^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)$  verhalten sich dagegen im Endlichen regulär und haben einen Pol im Unendlichen (wo sie unendlich große Werte erreichen).

Wir nehmen an, daß die Flächen  $\xi = \text{konst}$  geschlossen sind und folglich ineinanderliegen. Die innerste von ihnen muß sich offenbar auf einen Punkt zusammenziehen (der Kugelmittelpunkt bei dem polaren Koordinatensystem mit  $\xi = R$ ), oder auf eine Linie (z. B. die Zylinderachse  $r = 0$  bei den zylindrischen Koordinaten oder die Brennpunktlinie bei den gestreckten Ellipsoiden), oder schließlich auf eine volumlose Fläche (z. B. die Ellipse  $u = -c^2$  in dem ellipsoidalen Koordinatensystem  $u, v, w$ ). Der Wert von  $\xi$  für irgendwelche Fläche  $\xi = \text{konst}$  stellt also das Maß ihrer Entfernung von dieser innersten entarteten „Nullfläche“ dar. Die zwei anderen Koordinaten  $\eta, \zeta$  definieren dann die Lage des betreffenden Raumpunktes auf der Fläche  $\xi = \text{konst}$ , d. h. sie spielen die Rolle der *Winkelkoordinaten*; in dem Falle des polaren Koordinatensystems sind sie nichts anderes als diese Winkelkoordinaten  $\theta, \alpha$ .

Die harmonischen Grundfunktionen beider Art lassen sich in den meisten Fällen als Produkte einer Funktion  $U(\xi)$  der „Abstandskordinate“  $\xi$  mit einer Funktion  $T(\eta, \zeta)$  der beiden „Winkelkoordinaten“  $\eta, \zeta$  darstellen. Man kann dabei leicht zeigen, daß jeder Funktion  $T(\eta, \zeta)$  zwei verschiedene Funktionen  $U^{(1)}(\xi)$  und  $U^{(2)}(\xi)$  entsprechen, mit einer außergewöhnlichen Stelle entweder auf der „Nullfläche“ oder im Unendlichen. Dies folgt aus dem Umstand, daß die Abstandsfunktion  $U(\xi)$  nach (3c) einer homogenen linearen Differentialgleichung von der Gestalt

$$\frac{d}{d\xi} \left( p(\xi) \frac{dU}{d\xi} \right) + q(\xi) U = 0. \tag{15}$$

genügen muß (s. unten).

Ist nun  $U^{(1)}$  eine Lösung dieser Gleichung, so kann man eine zweite davon unabhängige Lösung in der Form  $U^{(2)} = U^{(1)}A$  suchen, wobei für die unbekannte Funktion  $A(\xi)$  sich die Gleichung

$$U^{(1)} \frac{d}{d\xi} \left( p \frac{dA}{d\xi} \right) + 2p \frac{dU^{(1)}}{d\xi} \frac{dA}{d\xi} = 0$$

ergibt.

Daraus folgt mit  $p \frac{dA}{d\xi} = B$ :

$$\frac{dB}{B} + \frac{2 dU^{(1)}}{U^{(1)}} = 0,$$

d. h.

$$B = \frac{1}{U^{(1)2}}$$

und ferner

$$A = \int \frac{d\xi}{p U^{(1)2}}$$

oder schließlich

$$U^{(2)} = U^{(1)} \int \frac{d\xi}{p U^{(1)2}}. \tag{15a}$$

Wenn die Funktion  $U^{(1)}$  derart gewählt ist, daß sie im Unendlichen unendlich groß wird, so ist hier die Integration von dem betreffenden Punkt  $\xi$  bis ins Unendliche zu vollziehen. Dabei muß die Funktion  $U^{(2)}$  auf der „Nullfläche“ unendlich werden und im Unendlichen verschwinden.

Die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) &= U^{(1)}(\xi) \cdot T(\eta, \zeta) \\ \psi^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) &= U^{(2)}(\xi) \cdot T(\eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

stellen also tatsächlich die beiden der „Winkelfunktion“  $T$  zugehörigen harmonischen Grundfunktionen dar.

Wir betrachten z. B. den Fall des polaren Koordinatensystems ( $\xi = R, \eta = \Theta, \zeta = \alpha$ ). Es wird dabei nach (5d) bei  $\varphi = U(R) T(\Theta, \alpha)$ :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{T}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dU}{dR} \right) + \frac{U}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) + \frac{U}{R^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} = 0,$$

d. h.

$$- \frac{1}{U} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dU}{dR} \right) = \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} \right\} = -C, \quad (16)$$

wobei  $C$  eine von  $R, \Theta$  und  $\alpha$  unabhängige Konstante bedeutet.

Wir versuchen nun für  $U$  den Ansatz

$$U^{(1)} = R^n \quad (n \text{ positive Zahl oder Null}) \quad (16a)$$

zu machen. Dies gibt

$$\frac{1}{U^{(1)}} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dU^{(1)}}{dR} \right) = n(n+1) = C,$$

d. h. tatsächlich eine Lösung der betrachteten Gleichung. Die zweite Lösung, welche derselben Winkelfunktion  $T$  angehört, drückt sich nach (15a), von einem konstanten (belanglosen) Faktor abgesehen, durch

$$U^{(2)} = \frac{1}{R^{n+1}}. \quad (16b)$$

aus. Was diese Winkelfunktion betrifft, so ist sie durch die Gleichung

$$\frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + n(n+1) T = 0. \quad (17)$$

bestimmt.

Wir haben im I. Bande (Kap. IV, §§ 3 und 4) gezeigt, daß das Potential eines beliebigen Systems von elektrischen Ladungen, die sich außerhalb (bzw. innerhalb) einer Kugel befinden, d. h. jede Funktion  $\varphi$ , die innerhalb (bzw. außerhalb) dieser Kugel regulär bleibt und der Gleichung  $\nabla^2 \varphi = 0$  genügt, in eine Reihe der folgenden Gestalt

$$\varphi = \frac{H_0}{a} + H_1 \frac{R}{a^3} + H_2 \frac{R^2}{a^5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{R^n}{a^{2n+1}}$$

bzw. 
$$\varphi = \frac{H_0}{R} + \frac{H_1}{R^2} + \frac{H_2}{R^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{R^{n+1}}$$

entwickelt werden kann, deren Koeffizienten bestimmte Funktionen der Richtungskosinus von  $\mathfrak{R}$  oder der Winkelvariablen  $\Theta$ ,  $\alpha$  darstellen, die wir als *Kugelfunktionen* verschiedener Ordnung definiert hatten. Jedes Glied dieser Reihe ( $\varphi_n$ ) muß dabei definitionsgemäß [vgl. die Formeln (7) und (8) Bd. I., S. 99] der Gleichung  $\nabla^2 \varphi_n = 0$  genügen. Daraus folgt, daß die Kugelfunktionen  $n$ ter Ordnung  $H_n$  der Differentialgleichung (17) genügen müssen — oder, mit anderen Worten, daß diese Gleichung bei *ganzzahligem*  $n$  die Differentialgleichung der Kugelfunktionen darstellt.

Man kann leicht zeigen, daß obwohl sie einen Sinn auch bei nicht ganzzahligen Werten von  $n$  behält, daß aber die entsprechenden „verallgemeinerten Kugelfunktionen“ *mehrdeutig* sind. Solche nicht ganzzahligen  $n$ -Werte sind folglich durch die Eindeutigkeitsbedingung, welcher das Potential  $\varphi$  genügen muß, ausgeschlossen. In diesem Sinne kann man sagen, daß die Werte des Parameters  $C$  in (16)

$$C = n(n + 1) \quad n = \text{ganzzahlig}$$

die „Eigenwerte“ der zweiten Gleichung (16) darstellen und die Kugelfunktionen — die zugehörigen „Eigenfunktionen“ (vgl. Kap. V, § 5).

Führt man statt  $\Theta$  die Variable  $v = \cos \Theta$  ein, so nimmt (17) die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial v} (1 - v^2) \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{1}{1 - v^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + n(n + 1) T = 0 \quad (17a)$$

an. Bei  $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0$  reduziert sich diese Gleichung auf die Gleichung

$$\frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dT}{dv} + n(n + 1) T = 0. \quad (17b)$$

deren Lösung durch die im I. Bande definierten *Legendreschen Polynome* [S. 98 (5b)] gegeben ist — wie man sich mittels des Ansatzes

$$T = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$$

direkt überzeugen kann.

Die Legendreschen Polynome, die wir im folgenden mit  $P_n(v)$  bezeichnen werden, sind die einfachsten Partikularlösungen der Gleichung (17a). Allgemeinere Partikularlösungen erhält man durch den Ansatz

$$T = V(v) W(\alpha),$$

welcher gibt:

$$\frac{1}{V} \frac{d}{dv} ((1 - v^2) V) + \frac{1}{1 - v^2} \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} + n(n + 1) = 0, \quad (18)$$

$$\text{d. h.} \quad \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = C = \text{konst} \quad (18a)$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{V} \frac{d}{dv} ((1 - v^2) V) + \frac{C}{1 - v^2} + n(n + 1) = 0. \quad (18b)$$

Damit  $W$  eindeutig und endlich würde, muß man offenbar  $C = -m^2$  setzen, wo  $m$  eine *ganze Zahl* (positive, negative oder Null) bedeutet.

Es wird dabei

$$W = \cos m\alpha, \quad W = \sin m\alpha \quad \text{oder} \quad W = e^{im\alpha} \quad (18c)$$

(irgendwelche konstante Faktoren lassen wir zunächst weg). Die zugehörigen Lösungen der Gleichung (18b) sind, wie man leicht zeigen kann:

$$V = (1 - v^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dv^m} P_n(v) \equiv P_n^{(m)}(v). \quad (18d)$$

wobei selbstverständlich  $m$  als *positive* ganze Zahl (oder Null) gerechnet wird.

Mit dem Beweis dieser Formel werden wir uns nicht aufhalten<sup>1)</sup> und wollen nur die daraus folgende Tatsache beachten, daß jedem Wert von  $n$  ( $2n + 1$ ) verschiedene unabhängige (endliche und eindeutige) Partikularlösungen der Gleichung (17a) entsprechen, nämlich  $P_n(v)$ ,  $P_n^{(1)}(v) \cos \alpha$ ,  $P_n^{(1)}(v) \sin \alpha$ , . . .  $P_n^{(2)}(v) \cos n\alpha$ ,  $P_n^{(2)}(v) \sin n\alpha$  ( $P_n$  ist ein Polynom  $n$ ten Grades, so daß  $P_n^{(n+1)}(v) = 0$  ist). Wir haben andererseits im I. Bande gesehen, daß jede Kugelfunktion  $n$ ter Ordnung durch  $2n + 1$  unabhängige Konstanten, nämlich die  $2n$  Winkel  $\Theta_k$ ,  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), welche die Richtung ihrer  $n$  Achsen charakterisieren und den Absolutwert ihres Momentes ( $p^{(n)}$ ) bestimmt wird. Man kann folglich eine beliebige Kugelfunktion  $n$ ter Ordnung als eine Summe der oben angeführten speziellen Kugelfunktionen derselben Ordnung darstellen:

$$T_n = A_0 P_n + \sum_1^m (A_m \cos m\alpha + B_m \sin m\alpha) P_n^{(m)}(v) \quad (19)$$

mit passend gewählten Koeffizienten  $A_m$ ,  $B_m$ .

Diese speziellen Kugelfunktionen sind dadurch ausgezeichnet, daß sie alle zueinander „orthogonal“ sind — in demselben Sinne wie dies für Kugelfunktionen verschiedener Ordnung gilt [Bd. I, S. 110, (18b)]. Bezeichnet man sie also mit  $T_n^{(m)}$ , so hat man die allgemeinen Orthogonalitätsbedingungen

$$\oint T_n^{(m)} T_{n'}^{(m')} dS = 0. \quad (19a)$$

die immer dann erfüllt sind, wenn  $n \neq n'$  oder  $m \neq m'$  ist. Es bedeutet hier  $dS = \sin \Theta d\Theta d\alpha$  das Flächenelement der Einheitskugel.

Die angeführten Resultate lassen sich leicht auf den Fall beliebiger Winkelfunktionen  $T(\eta, \xi)$  verallgemeinern. Es seien nämlich

$$\psi_1 = U_1(\xi) T_1(\eta, \xi)$$

und

$$\psi_2 = U_2(\xi) T_2(\eta, \xi)$$

zwei harmonische Grundfunktionen des betrachteten Koordinaten-

<sup>1)</sup> Er läßt sich z. B. durch Entwicklung von  $V$  in eine Potenzreihe erbringen und durch Vergleich solcher Reihen für zwei nachfolgende Werte von  $m$  (bei festgehaltenem  $n$ ).

systems, die zwei verschiedenen Abstandsfunktionen  $U(\xi)$  erster Art entsprechen.

Dann gilt für ein beliebiges im Endlichen liegendes Raumgebiet die Transformationsformel:

$$\int (\psi_1 \nabla^2 \psi_2 - \psi_2 \nabla^2 \psi_1) dV = \oint (\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n}) dS$$

oder wegen  $\nabla^2 \psi_1 = \nabla^2 \psi_2 = 0$

$$\oint (\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n}) dS = 0.$$

Wir stellen uns nun vor, daß die Fläche  $S$  mit einer Fläche  $\xi = \text{konst}$  ( $= \xi_0$ ) übereinstimmt. Es wird dann

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{T}{h_\xi} \frac{dU}{d\xi}$$

und folglich

$$\oint (\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} - \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n}) dS = (U_1 \frac{dU_2}{d\xi} - U_2 \frac{dU_1}{d\xi}) \oint T_1 T_2 \frac{dS}{h_\xi},$$

oder schließlich

$$\oint T_1 T_2 \frac{dS}{h_\xi} = \iint T_1 T_2 \frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} d\eta d\zeta = 0 \tag{19b}$$

Man kann ferner zeigen, daß jeder Abstandsfunktion  $U_n(\xi)$ , bei passender Indizierung,  $2n + 1$  linear unabhängige Winkelfunktionen  $T_n^{(m)}$  entsprechen, die ebenfalls im Sinne der Gleichung (19b) orthogonalisiert werden können. Da sie nur bis zu gewissen konstanten Faktoren bestimmt sind, so können wir zur Festlegung dieser Konstanten die „Normalitätsbedingungen“ einführen, d. h. die in (19b) auftretenden Integrale bei  $T_1 = T_2$  gleich 1 setzen.

### 3. Lösung der elektrostatischen Probleme durch Entwicklung des Potentials nach harmonischen Grundfunktionen.

Mittels der „normierten“ Winkelfunktionen und der durch die Bedingung  $U = 1$  für  $\xi = \xi_0$  normierten Abstandsfunktionen kann man jede harmonische Funktion, die sich innerhalb oder außerhalb der Fläche  $\xi = \xi_0$  regulär verhält, durch eine Reihe von der Gestalt

$$\varphi = \sum_n \sum_m C_n^m U_n T_n^m \tag{20}$$

darstellen, mit  $U = U^{(1)}$  im ersten und  $U = U^{(2)}$  im zweiten Fall und mit bestimmten Koeffizienten  $C_n^m$ , welche die Beschaffenheit der Funktion  $\varphi$  charakterisieren. Wenn die Randwerte dieser Funktion ( $\varphi_\xi$ ) bekannt sind, kann man diese Koeffizienten nach der Formel

$$C_n^m = \oint \varphi_\xi T_n^m \frac{dS}{h_\xi}, \tag{20a}$$

die eine unmittelbare Folge der Orthogonalitätseigenschaft der Funktionen  $T_n^m$  und ihrer Normierung darstellt, bestimmen.

Auf diese Weise läßt sich z. B. die Aufgabe lösen nach der Wirkung eines gegebenen primären Feldes  $\varphi^0$  auf einen Leiter, dessen Potential festgehalten wird, d. h. einen bestimmten konstanten Wert  $\varphi_\xi$  hat.

Wenn die elektrischen Ladungen, welche das primäre Feld erzeugen, sich außerhalb der betrachteten leitenden Fläche  $\xi = \text{konst}$  befinden, ist ihr Potential innerhalb und teilweise auch außerhalb dieser Fläche durch die Reihe

$$\varphi^0 = \sum_n \sum_m C_n^m U_n^{(1)} T_n^m \quad (20b)$$

darstellbar, deren Koeffizienten durch die Randwerte  $\varphi_\xi^0$  von  $\varphi^0$  gemäß der Formel (20a) bestimmt werden können.

Die Werte des sekundären Potentials innerhalb des Leiters müssen offenbar gleich

$$\varphi'_{\text{inn}} = \varphi_\xi - \varphi^0 = \varphi_\xi U_0^{(1)} - \sum_n \sum_m C_n^m U_n^{(1)} T_n^m \quad (20c)$$

sein (mit der Bedingung  $U_0^{(1)} = 1$  und  $T_0 = 1$ ). Die Randwerte ergeben sich aus dieser Formel, wenn man  $U_n^{(1)} = 1$  setzt; um das äußere Feld des Leiters zu bestimmen, müssen wir einfach die Abstandsfunktionen erster Art durch die Abstandsfunktionen zweiter Art ersetzen (falls auf der Oberfläche  $\xi = \text{konst}$   $U^{(2)} = 1$  ist). Wir haben also<sup>1)</sup>:

$$\varphi'_{\text{auss}} = \varphi_\xi U_0^{(2)} - \sum_n \sum_m C_n^m U_n^{(2)} T_n^m. \quad (20d)$$

Die Ladungsdichte berechnet sich daraus in der üblichen Weise, d. h. gemäß der Formel

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\text{auss}} (\varphi = \varphi^0 + \varphi'),$$

oder nach (20b) und (20d):

$$\eta = -\frac{1}{4\pi h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{4\pi h_\xi} \left\{ -\varphi_\xi \frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} + \sum_n \sum_m C_n^m \left( \frac{dU_n^{(2)}}{d\xi} - \frac{dU_n^{(1)}}{d\xi} \right) T_n^m \right\}_\xi.$$

Es sei bemerkt, daß die Funktion  $U_0^{(2)}(\xi)$  das äußere Potential des Leiters darstellt, wenn seine Oberfläche das Potential 1 hat, bei  $\varphi^0 = \text{konst}$ , d. h. bei Fehlen eines primären Feldes. Die entsprechende Ladung ist offenbar gleich der Kapazität des Leiters  $K$ . Wir erhalten folglich für die letztere die Formel

$$K = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right) \int \frac{dS}{h_\xi} = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right) \iint \frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi} d\eta d\zeta.$$

Wir betrachten jetzt das etwas allgemeinere Problem eines homogenen Dielektrikums mit der Oberfläche  $\xi = \text{konst} = \xi_0$  in einem gegebenen primären Felde.

<sup>1)</sup> Vgl. Bd. I, S. 105 und 109.

Die Formel (20b) bleibt dabei unverändert. Für das sekundäre Potential müssen wir aber neue Koeffizienten  $D_n^m$  einführen, d. h.

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{\text{inn}} &= \sum \sum D_n^m U_n^{(1)} T_n^m \\ \varphi'_{\text{auss}} &= \sum \sum D_n^m U_n^{(2)} T_n^m \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

setzen. Diese Koeffizienten bestimmen wir aus der Grenzbedingung

$$\nabla_n \varphi'_{\text{auss}} - \varepsilon \nabla_n \varphi'_{\text{inn}} = (\varepsilon - 1) \nabla_n \varphi^0, \quad (\xi = \xi_0)$$

die in dem betrachteten Fall die Gestalt

$$D_n^m \left( \frac{d U_n^{(2)}}{d \xi} - \varepsilon \frac{d U_n^{(1)}}{d \xi} \right)_0 = (\varepsilon - 1) C_n^m \left( \frac{d U_n^{(1)}}{d \xi} \right)_0 \quad (21a)$$

annimmt.

Diese Aufgabe läßt sich leicht noch weiter verallgemeinern, und zwar auf den Fall einer dielektrischen *Schale*, die von innen durch die Fläche  $\xi = \xi_1$  und von außen durch  $\xi = \xi_2 > \xi_1$  begrenzt ist (z. B. eine Kugelschale oder ellipsoidale Schale usw.). Wir müssen dabei für das sekundäre Potential den folgenden Ansatz machen:

$$\left. \begin{aligned} (\xi \leq \xi_1): \quad \varphi' &= \sum \sum A_n^m U_n^{(1)} T_n^m \\ (\xi_2 \geq \xi \geq \xi_1): \quad \varphi' &= \sum \sum (A_n^m U_n^{(1)} + B_n^m U_n^{(2)}) T_n^m \\ (\xi \geq \xi_2): \quad \varphi' &= \sum \sum B_n^m U_n^{(2)} T_n^m \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

mit den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} A_n^m U_n^{(1)} &= A_n^m U_n^{(1)} + B_n^m U_n^{(2)} \\ \varepsilon \left( A_n^m \frac{d U_n^{(1)}}{d \xi} + B_n^m \frac{d U_n^{(2)}}{d \xi} \right) - A_n^m \frac{d U_n^{(1)}}{d \xi} &= -(\varepsilon - 1) C_n^m \frac{d U_n^{(1)}}{d \xi} \end{aligned} \right\} \text{für } \xi = \xi_1 \quad (21c)$$

und

$$\left. \begin{aligned} A_n^m U_n^{(1)} + B_n^m U_n^{(2)} &= B_n^m U_n^{(2)} \\ -\varepsilon \left( A_n^m \frac{d U_n^{(1)}}{d \xi} + B_n^m \frac{d U_n^{(2)}}{d \xi} \right) + B_n^m \frac{d U_n^{(2)}}{d \xi} &= (\varepsilon - 1) C_n^m \frac{d U_n^{(1)}}{d \xi} \end{aligned} \right\} \text{für } \xi = \xi_2. \quad (21d)$$

In dem Fall einer Kugelschale mit den Radien  $a_1$  und  $a_2$ , die sich in einem homogenen primären Feld befindet, haben wir z. B., wenn wir die Polarachse ( $\Theta = 0$ ) in der Feldrichtung ziehen:

$$\varphi^0 = C_1^0 U_1^{(1)} T_1^0 = -E^0 R \cos \Theta$$

und dementsprechend:

$$(R \leq a_1): \quad \varphi' = A R \cos \Theta,$$

$$a_2 \geq R \geq a_1: \quad \varphi' = \left( A' R + \frac{B'}{R^2} \right) \cos \Theta,$$

$$R \geq a_2: \quad \varphi' = \frac{B}{R^2} \cos \Theta$$

mit

$$A a_1 = A' a_1 + \frac{B'}{a_1^2}, \quad \varepsilon \left( A' - \frac{2B'}{a_1^3} \right) - A = +(\varepsilon - 1) E^0,$$

$$A' a_2 + \frac{B'}{a_2^3} = \frac{B}{a_2^2}, \quad -\varepsilon \left( A' - \frac{2B'}{a_2^3} \right) - \frac{2B}{a_2^2} = -(\varepsilon - 1) E^0.$$

Daraus ergibt sich nach leichter Rechnung der folgende Ausdruck für die totale Feldstärke  $E^0 + E'$  in dem inneren Hohlraum ( $R < a_1$ ):

$$E = \frac{E^0}{1 + \frac{2}{9} \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon} \left[ 1 - \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \right]}.$$

Ist  $\varepsilon$  sehr groß (oder auch klein gegen 1), so wird  $E$  sehr klein, und zwar desto kleiner, je kleiner  $\frac{a_1}{a_2}$ , d. h. je dicker die Schale ist.

Obwohl die dargelegte Methode besonders geeignet ist, solche Körper zu behandeln, deren Oberfläche  $S$  mit einer (oder zwei) der Koordinatenflächen  $\xi = \text{konst}$  zusammenfällt, kann sie auch dann angewandt werden, wenn  $S$  von diesen Flächen mehr oder minder abweicht. Wir bekommen dabei eine Art von Störungsproblem, das sich durch sukzessive Annäherungen beliebig genau lösen läßt.

Wir nehmen zunächst an, daß die erwähnte Abweichung sehr klein ist und entwickeln die Differenz  $\xi' - \xi_0$ , wo  $\xi'$  die Abstandskordinate der verschiedenen Punkte von  $S$  und  $\xi_0$  der nächstliegenden Fläche  $\xi = \text{konst}$  bedeuten, in eine Reihe

$$\xi' - \xi_0 = \sum \sum E_n^m T_n^m(\eta, \zeta), \quad (22)$$

deren Koeffizienten als unendlich kleine Größen erster Ordnung anzusehen sind.

Wir denken uns dabei, daß  $S$  eine leitende Fläche mit dem festgehaltenen Potential 1 ist, und daß es sich von der Bestimmung der Ladungsverteilung und des dadurch erzeugten äußeren Feldes handelt.

Wir machen für das Potential dieses Feldes den Ansatz

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \sum \sum C_n^m U_n^{(2)}(\xi) T_n^m(\eta, \zeta),$$

und bestimmen die Koeffizienten  $C_n^m$  in der Weise, daß

$$\varphi(\xi', \eta, \zeta) = 1$$

wird. Zu diesem Zweck entwickeln wir  $U_n^{(2)}(\xi')$  nach Potenzen der Differenz  $\xi' - \xi_0$  und behalten nur die Größen erster Ordnung in  $E_n^m$  bei.

Dabei erhalten wir

$$U_n^{(2)}(\xi') = U_n^{(2)}(\xi_0) + \left( \frac{d U_n^{(2)}}{d \xi} \right)_0 \sum_{n'} \sum_{m'} E_{n'}^{m'} T_{n'}^{m'}$$

und folglich mit  $U_n^{(2)}(\xi_0) = 1$ :

$$1 = \sum_n \sum_m C_n^m \left[ 1 + \left( \frac{d U_n^{(2)}}{d \xi} \right)_0 \sum_{n'} \sum_{m'} E_{n'}^{m'} T_{n'}^{m'} \right] T_n^m. \quad (22a)$$

Die Produkte  $T_n^m T_{n'}^{m'}$  lassen sich durch lineare Aggregate der Winkel-funktionen verschiedener Ordnung (bis  $n + n'$ ) darstellen, so daß die rechte Seite der obigen Gleichung in eine *einfache* Reihe von der Gestalt

$$\sum_n \sum_m D_n^m T_n^m$$

umgeformt werden kann, mit Koeffizienten  $D$ , die sich linear durch die unbekanntenen Koeffizienten  $C_n^m$  ausdrücken. Es muß dabei  $D_n^m = 0$  für alle Werte von  $n$  und  $m$  sein, mit Ausschluß des Falles  $n = m = 0$ , für welchen  $D = 1$  ist ( $T_0^0 = 1$ ). Aus diesen Gleichungen können die Koeffizienten  $C_n^m$  bestimmt werden.

Die letzteren, mit Ausschluß von  $C_0^0$  müssen, wie leicht zu ersehen ist, von derselben Größenordnung wie die Koeffizienten  $E_n^m$  sein. Es sollte in der Tat die oben angeführte Reihe für  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  bei  $E_n^m = 0$ , d. h. bei  $\xi' = \xi_0$ , sich auf das einzige Glied  $U_0^{(2)} T_0^0 = U_0^{(2)}$  reduzieren. Wir können deshalb in erster Näherung die Formel (22a) durch

$$1 = C_0^0 + C_0^0 \left( \frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right)_0 \sum_n \sum'_m E_n^m T_n^m + \sum_n \sum'_m C_n^m T_n^m \tag{22 b}$$

ersetzen, wo der Strich an den Summenzeichen das Fehlen des Gliedes  $n = m = 0$  bedeutet. Dabei erhalten wir

$$\text{und } \left. \begin{aligned} C_0^0 \left[ 1 + \left( \frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right)_0 E_0^0 \right] &= 1 \\ C_n^m &= - C_0^0 \left( \frac{dU_0^{(2)}}{d\xi} \right)_0 E_n^m \end{aligned} \right\} \tag{22 c}$$

Diese Methode läßt sich leicht auf den Fall der Anwesenheit eines beliebigen primären Feldes verallgemeinern. Man muß nämlich in diesem Fall die linke Seite von (22a) durch  $\varphi_\xi - \varphi^0$  ersetzen ( $\varphi_\xi =$  resultierendes Potential des Leiters) und das primäre Potential  $\varphi^0$  in eine Reihe der üblichen Gestalt (20b), aber mit *bekannt*en Koeffizienten anstatt der Koeffizienten  $C_n^m$  entwickeln.

In ähnlicher Weise kann man kompliziertere Probleme mit dielektrischen Körpern oder Schalen lösen.

Wir betrachten beispielsweise den Fall eines kugelförmigen Kondensators, wenn die äußere Kugel (Radius  $b$ ) nicht ganz konzentrisch mit dem inneren (Radius  $a$ ) ist. Ist die Verschiebung der äußeren Kugel gleich  $\delta$ , so kann man in erster Näherung ihre Oberfläche durch die Gleichung

$$R' = b + \delta \cdot P_1 = b + \delta \cos \Theta$$

darstellen ( $P_1$ —Legendresches Polynom erster Ordnung). Für das Potential in dem Zwischenraum machen wir den Ansatz

$$\varphi = \frac{A}{R} + \frac{B}{R^2} \cos \Theta + C + DR \cos \Theta,$$

wo  $B$  und  $D$  kleine Größen sind, mit den Grenzbedingungen  $\varphi = 1$  auf der inneren und  $\varphi = 0$  auf der äußeren Kugel. Dies gibt

$$1 = \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} \cos \Theta + C + Da \cos \Theta$$

und (in erster Näherung)

$$0 = \frac{A}{b} \left( 1 - \frac{\delta}{b} \cos \Theta \right) + \frac{B \cos \Theta}{b^2} + C + Db \cos \Theta,$$

woraus folgt durch Nullsetzen der Koeffizienten bei  $\cos \Theta$ :

$$\frac{A}{a} + C - 1 = 0, \quad \frac{B}{a^2} + D a = 0; \quad \frac{A}{b} + C = 0, \quad -\frac{\delta A}{b^2} + \frac{B}{b^2} + D b = 0.$$

Für den Koeffizient  $A$  ergibt sich dabei der „ungestörte“ Wert  $\frac{b-a}{ab}$ , woraus folgt, daß die Kapazität des Kugelkondensators in erster Näherung bei einer kleinen relativen Verschiebung der beiden Kugeln unverändert bleibt. Man kann leicht zeigen, daß dieses Resultat für Kondensatoren beliebiger Gestalt gültig ist.

#### 4. Die harmonischen Grundfunktionen für spheroidale und zylindrische Koordinaten.

Wir sehen also, daß die Grundprobleme der Elektrostatik (vgl. Kap. VI, § 7) ohne Schwierigkeit gelöst werden können, sobald 1. ein passendes orthogonales Koordinatensystem gefunden ist derart, daß die Flächen  $\xi = \text{konst}$  wenigstens näherungsweise mit den Grenzflächen der betreffenden Körper übereinstimmen, und 2. die harmonischen Grundfunktionen dieses Koordinatensystems, d. h. *alle voneinander unabhängigen Partikularlösungen der Gleichung  $\nabla^2 \psi = 0$  von der Gestalt*

$$\psi U(\xi) T(\eta, \zeta) = U(\xi) V(\eta) W(\zeta)$$

*gefunden sind.*

Es sei bemerkt, daß nicht alle Koordinatensysteme derartige Lösungen „mit separierten Variablen“ zulassen. Solche Koordinaten (Variablen), für welche dies der Fall ist, nennt man *separierbar*. Die dargelegte Methode der Entwicklung nach den harmonischen Grundfunktionen ist selbstverständlich nur auf den Fall vollkommen oder nur in bezug auf die Abstandscoordinate  $\xi$  separierbaren Koordinaten anwendbar. Es ist leicht zu sehen, daß die im § 1 betrachteten gebräuchlichsten Koordinatensysteme dieser Forderung tatsächlich Genüge leisten.

Man muß dabei diejenigen Systeme, welche *geschlossene* Koordinatenflächen, d. h. ausgeartete „Nullflächen“ endlicher oder verschwindender Größe, haben, von denjenigen, wie das zylindrische Koordinatensystem, welche solche Flächen nicht haben, scharf unterscheiden.

Neben dem polaren Koordinatensystem, das wir schon als das Muster von Systemen des ersten Typus ausführlich behandelt haben, wollen wir hier noch das spheroidale Koordinatensystem kurz betrachten. Die Gleichung  $\nabla^2 \psi$  lautet in diesem Fall nach (11 b):

$$\frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}(1 - v^2) \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{u^2 - v^2}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (23)$$

Setzt man hier  $\psi = U(u) V(v) W(\alpha)$  (23 a)

ein, so erhält man, nach Division mit  $\psi$ :

$$\frac{(u^2 - 1)(1 - v^2)}{u^2 - v^2} \left[ \frac{1}{U} \frac{d}{du}(u^2 - 1) \frac{dU}{du} + \frac{1}{V} \frac{d}{dv}(1 - v^2) \frac{dV}{dv} \right] + \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = 0.$$

Die einzige, mit der Eindeutigkeitsbedingung verträgliche Lösung dieser Gleichung ergibt sich, ebenso wie in dem Fall von polaren Koordinaten, bei

$$\frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = \text{konst} = -m^2, \quad (m \text{ ganze Zahl})$$

d. h. bei  $W = W_m = \cos m\alpha, \sin m\alpha \text{ oder } e^{\pm im\alpha}. \quad (23 \text{ b})$

Es wird ferner mit Rücksicht auf

$$\frac{u^2 - v^2}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} = \frac{(u^2 - 1) + (1 - v^2)}{(u^2 - 1)(1 - v^2)} = \frac{1}{1 - v^2} + \frac{1}{u^2 - 1}:$$

$$\frac{1}{U} \frac{d}{du} (u^2 - 1) \frac{dU}{du} - \frac{m^2}{u^2 - 1} = -\frac{1}{V} \frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dV}{dv} + \frac{m^2}{1 - v^2} = C',$$

d. h.  $\frac{d}{du} (1 - u^2) \frac{dU}{du} - \frac{m^2 U}{1 - u^2} + C' U = 0,$

$$\frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dV}{dv} - \frac{m^2 V}{1 - v^2} + C' V = 0.$$

Diese Gleichungen sind identisch mit der Gleichung (18b) für die Funktionen  $P_n^m$ , wenn man dort  $C = m$  und hier  $C' = n(n + 1)$  setzt (beide Ansätze sind als Folgerungen aus der Eindeutigkeitsbedingung anzusehen). Man hat also wie früher

$$U = P_n^m(u), \quad V = P_n^m(v). \quad (23 \text{ c})$$

Da hier  $u$  die Rolle der Abstandskoordinate spielt ( $v = \arccos \eta$  hat die Bedeutung einer Winkelkoordinate, und zwar entspricht sie dem polaren Winkel  $\Theta$ ), so müssen wir neben der Funktion  $U = P_n^m(u)$ , die offenbar eine Abstandsfunktion erster Art darstellt, noch die entsprechende Funktion zweiter Art einführen. Gemäß der allgemeinen Formel (15a) erhalten wir (unter Umkehrung des Vorzeichens von  $\rho$ )

$$U^{(2)}(u) = P_n^m(u) \int_u^\infty \frac{du}{(u^2 - 1) [P_n^m(u)]^2} = Q_n^m(u). \quad (23 \text{ d})$$

Man kann zeigen, daß  $Q_n^m(u)$ , ebenso wie  $P_n^m(u)$ , die mit  $(1 - u^2)^{\frac{m}{2}}$  multiplizierte  $m$ te Ableitung einer Funktion  $Q_n(u)$  darstellt, welche derselben Gleichung

$$\frac{d}{du} (1 - u^2) \frac{dU}{du} + n(n + 1) U = 0 \quad (24)$$

wie  $P_n(u)$  genügt und sich daraus durch die Quadratur

$$Q_n(u) = P_n(u) \int_u^\infty \frac{du}{(u^2 - 1) [P_n(u)]^2} \quad (24 \text{ a})$$

ausrechnen läßt („zugeordnete“ Legendresche Funktion  $n$ ter Ordnung).

Diese Quadratur kann man bei  $n = 0$  und  $n = 1$  ohne Schwierigkeit ausführen mit dem Ergebnis:

$$Q_0(u) = \frac{1}{2} \lg \frac{u+1}{u-1}, \quad Q_1(u) = \frac{1}{2} u \lg \frac{u+1}{u-1} - 1. \quad (24 \text{ b})$$

Die Bestimmung der Funktionen höherer Ordnung geschieht am einfachsten mittels der folgenden Rekursionsformel, die aus (24) folgt und ebensogut für  $U_n = P_n$  wie für  $U_n = Q_n$  gilt:

$$(n+1)U_{n+1} = (2n+1)U_n u - nU_{n-1}. \quad (24c)$$

Wir gehen jetzt zu denjenigen Koordinatensystemen über, welche keine geschlossene Koordinatenflächen haben. Das einfachste Beispiel solcher Systeme bietet, wie schon erwähnt wurde, das zylindrische Koordinatensystem  $(r, \alpha, z)$ . Die entsprechende Gestalt der Laplace'schen Gleichung ist

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (25)$$

Der Ansatz

$$\psi = U(r)V(z)W(\alpha)$$

liefert

$$\frac{1}{rU} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) + \frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\alpha^2} = 0.$$

d. h. wie früher

$$W = W_m = \cos m\alpha, \sin m\alpha \text{ oder } e^{\pm im\alpha}$$

und ferner

$$\frac{1}{rU} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} = -\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dz^2} = -c. \quad (25a)$$

Im Gegensatz zu den früher betrachteten Fällen bleibt hier die „Separationskonstante“  $c$  durch die Eindeutigkeitsbedingung nicht bestimmt. Es wird dabei

$$V = e^{\pm \sqrt{c}z} \quad (25b)$$

und

$$U = J_m(\sqrt{c}r) \quad \text{bzw.} \quad K_m(\sqrt{c}r), \quad (25c)$$

wo  $J_m(u)$  die erste und  $K_m(u)$  die zweite Besselsche Funktion  $m$ ter Ordnung bedeuten<sup>1)</sup>. Sie drücken sich durch einander nach den Formeln

$$K_m(\sqrt{c}r) = J_m(\sqrt{c}r) \int_r^\infty \frac{dr}{r J_m^2}$$

bzw.

$$J_m(\sqrt{c}r) = K_m(\sqrt{c}r) \int_0^\infty \frac{dr}{r K_m^2}$$

aus.

Will man solche Lösungen der Gleichung (25) bekommen, die im Unendlichen, und speziell bei  $z = \pm \infty$  verschwinden, so muß man  $c = k^2$  (positive Zahl) setzen und in (25a) das untere Vorzeichen für  $z > 0$  und das obere für  $z < 0$  wählen.

<sup>1)</sup> Im Anschluß an unsere allgemeinen Bezeichnungen sollten wir statt  $J_m(\sqrt{c}r)$   $J_m^c(r)$  schreiben. Es sei bemerkt, daß die Besselschen Funktionen sich als Grenzfall der entsprechenden Legendreschen Kugelfunktionen auffassen lassen, gemäß der Formel  $J_m(\varphi) = (-1)^m \text{Lim } P_n^m(\cos \varphi/n)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Bei  $c = 0$  erhält man insbesondere

$$V = \text{konst.}, \quad \psi = UW_m$$

mit  $U^{(1)} = r^m$  und  $U^{(2)} = \frac{1}{r^m}$  oder  $\lg r$  für  $m = 0$ .

Dies entspricht der folgenden Entwicklung der Lösung der *zweidimensionalen* Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (26)$$

die innerhalb oder außerhalb eines Kreiszyinders vom gegebenen Radius  $r = a$  regulär bleibt:

$$\left. \begin{aligned} \text{bzw.} \quad \varphi &= \sum r^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi), & r < a \\ \varphi &= A_0 \lg \frac{1}{r} + \sum \frac{1}{r^m} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi). & r > a \end{aligned} \right\} (26a)$$

Diese Formeln stellen das zweidimensionale Analogon zur Entwicklung des dreidimensionalen Potentials nach Kugelfunktionen (oder, genauer, nach den harmonischen Funktionen des polaren räumlichen Koordinatensystems) dar.

Betrachtet man  $A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi$  als den reellen Teil des komplexen Ausdrucks  $C_m e^{im\varphi}$ , so erhält man nach der ersten Formel (26a)

$$\varphi = Rf, \quad f = \sum_0^\infty C_m w^m, \quad w = r e^{i\varphi} = x + iy \quad (26b)$$

und nach der zweiten

$$\varphi = R \left( \sum_1^\infty \frac{C_m}{w^m} + C_0 \lg \frac{1}{w} \right). \quad (26c)$$

Das „komplexe Potential“  $f$  für ein zwischen zwei Kreiszyinder geschlossenes Raumgebiet läßt sich durch die Reihe

$$f = \sum_0^\infty (C'_m w^m + C''_m w^{-m}) + C'_0 \lg \frac{1}{w} \quad (26d)$$

darstellen. Die Winkelkoordinaten und die Abstandskoordinaten sind hier zu einer einzigen vektoriellen oder komplexen Koordinate zusammenschmolzen.

### 5. Ebene Probleme und analytische Funktionen.

Die Formeln (26c) und (26d) sind die bekannte *Taylor*sche bzw. *Laurent*sche Reihe für eine beliebige analytische Funktion der komplexen Veränderlichen  $w$ . Wir haben in der Tat schon gesehen, daß der reelle (oder der imaginäre) Teil einer jeden solchen Funktion eine Lösung der Gleichung (26) darstellt. Es ist deshalb in zweidimensionalen statischen Aufgaben nicht nötig und sogar unzweckmäßig, die

gesuchte harmonische Funktion in eine Reihe nach den harmonischen Grundfunktionen des entsprechenden Koordinatensystems zu entwickeln. Wenn es gelungen ist, dieses Koordinatensystem aufzufinden, so ist die Aufgabe praktisch als gelöst anzusehen.

Wir betrachten z. B. den Fall eines leitenden elliptischen Zylinders mit den Halbachsen  $a$ ,  $b$ . Die entsprechenden konformen Koordinaten  $(\xi, \eta)$  sind bekanntlich durch die Transformation

$$x + iy = a_0 \cos i(\xi + i\eta), \quad (a_0^2 = a^2 - b^2)$$

gegeben [vgl. (8) §1]. Diejenige von ihnen, die eine eindeutige Funktion von  $x$  und  $y$  ist, stellt offenbar bis auf einen konstanten Faktor das Potential des isolierten geladenen Zylinders im äußeren Raum dar. Das ist in dem betrachteten Fall die Koordinate  $\xi$ , denn die Randkurve des Zylinders wird nach der ersten Gleichung (8b) durch die Formel

$$\cosh \xi = \frac{a}{a_0} \quad (\text{oder } \sinh \xi_0 = \frac{b}{a_0})$$

bestimmt.

Führt man statt der konformen Koordinaten  $(\xi, \eta)$  die elliptischen  $u, v$  gemäß (9) ein, so erhält man durch Umkehrung der Formel

$$\cosh \xi = \frac{1}{2} (e^\xi + e^{-\xi}) = u,$$

$$\xi = \lg(u + \sqrt{u^2 - 1}),$$

oder mit Rücksicht auf (9a)

$$\xi = \lg \frac{1}{2a_0} (r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4a_0^2}).$$

Für sehr große Abstände reduziert sich diese Formel auf

$$\xi \cong \lg \frac{2r}{a_0}. \quad (r \cong r_1 \cong r_2)$$

Vergleicht man dies mit dem Potential einer geladenen Linie

$$\varphi = 2e \lg \frac{1}{r} + \text{konst},$$

wo  $e$  die Ladung pro Längeneinheit bedeutet, so sieht man, daß das gesuchte Potential (des elliptischen Zylinders) gleich  $-2e\xi$  ist.

Befindet sich der betrachtete Zylinder in einem primären Feld mit dem komplexen Potential  $f^0(w)$ , welches für sein Inneres und seine Umgebung definiert ist, so muß das sekundäre komplexe Potential der induzierten Ladung innerhalb und auf der Oberfläche des Zylinders gleich

$$f'(w) = c - f^0(w) \quad (27)$$

sein, wo  $c$  eine komplexe Konstante bedeutet. Die Werte von  $f'(w)$  außerhalb des Zylinders ergeben sich einfach durch analytische Fortsetzung dieser Funktion in den äußeren Raum, unter der Bedingung, daß sie im Unendlichen die Gestalt  $2e \lg \frac{1}{w} + \text{konst}$  annimmt. Diese

analytische Fortsetzung geschieht am einfachsten durch Entwicklung von  $f'$  in eine Reihe vom Typus (26 d) nach den negativen Potenzen der komplexen Variablen  $\varrho = \xi + i\eta$ :

$$f' = C_0 \lg \frac{1}{\varrho} + \sum_0^{\infty} \frac{C_m}{\varrho^m}, \quad (27a)$$

wobei die Koeffizienten  $C_0, C_1, \dots$  in bekannter Weise bestimmt werden können. Und zwar hat man

$$C_m = \frac{1}{2\pi i} \oint f'(\varrho) \varrho^m d\varrho,$$

wo das Integral längs der Randlinie in negativer Richtung genommen werden muß. Durch die Substitution  $\varrho = \frac{1}{\sigma}$  wird diese „äußere Aufgabe“ auf eine „innere“ reduziert, wobei die Koeffizienten  $C_m$  sich unmittelbar durch Residuumbildung berechnen lassen.

### 6. Räumliche Probleme und Greensche Funktionen.

Ein ähnliches Verfahren läßt sich (wenigstens prinzipiell) auf die Lösung von räumlichen elektrostatischen Problemen derselben Art anwenden. Wir betrachten nämlich einen leitenden Körper von beliebiger Gestalt, der sich in einem gegebenen primären Feld befindet. Die Quellen dieses Feldes seien *außerhalb* der Körperoberfläche  $S$ ; dann muß das primäre Potential  $\varphi^0$  innerhalb  $S$  eine harmonische Funktion darstellen ( $\nabla^2 \varphi^0 = 0$ ). Ist das resultierende Potential von  $S$  gleich Null („geerdeter“ Leiter), so kann man das sekundäre Potential *innerhalb* und *auf*  $S$  sofort nach der Formel

$$\varphi' = -\varphi^0$$

bestimmen. Die „analytische Fortsetzung“ dieses inneren sekundären Potentials in das äußere Raumgebiet läßt sich nun nach der Methode vollziehen, die wir im I. Band, Kap. IV, § 6 bei der Bestimmung der „äquivalenten Flächenladung“ entwickelt haben. Es handelte sich dort um die Bestimmung der Flächendichte  $\eta^0$  derjenigen über  $S$  verteilten Ladung, welche innerhalb (oder außerhalb)  $S$  das gegebene von einem äußeren (bzw. inneren) Ladungssystem herrührende Feld  $\varphi^0$  erzeugen würde. Bedeutet nun  $S$  eine geerdete leitende Fläche, so muß die Dichte  $\eta'$  der auf sie induzierten Ladung offenbar entgegengesetzt gleich der erwähnten äquivalenten Flächenladung sein:

$$\eta' = -\eta^0.$$

Ist das äußere sekundäre Potential bekannt, so kann man  $\eta'$  auf die übliche Weise, d. h. durch Differentiation berechnen. — Diese Aufgabe reduziert sich, wie im I. Band (loc. cit.) gezeigt worden ist, auf die Bestimmung der Greenschen Funktion der betrachteten Fläche. Falls es gelungen ist, diese Funktion  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$  zu bestimmen ( $\mathbf{r}^*$  bedeutet

den Radiusvektor des betreffenden äußeren Aufpunktes), so bekommt man für  $\varphi'_{\text{auss}}$  die folgende allgemeine Darstellung:

$$\varphi'(\mathbf{r}^*) = -\frac{1}{4\pi} \oint \varphi^0 V_n \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) dS$$

(vgl. (21c), S. 114, Bd. I.; das dort auftretende Oberflächenpotential  $\bar{\varphi}$  haben wir durch  $\varphi' = -\varphi^0$  und die in bezug auf das äußere Raumgebiet „äußere“ Normale durch die entgegengerichtete äußere Normale im üblichen Sinne ersetzt).

Die Greensche Funktion hat einen sehr einfachen und anschaulichen physikalischen Sinn; und zwar bedeutet sie, nach der im I. Bande angegebenen Definition, das resultierende Potential, welches von einer Punktladung von der Größe 1 bei Anwesenheit der betrachteten erdeten Fläche außerhalb (bzw. innerhalb) der letzteren erzeugt wird.

Da die tatsächliche Bestimmung der Greenschen Funktion in geschlossener Form im allgemeinen (außerhalb des einfachsten Falles der Kugelfläche) unmöglich ist, hat das geschilderte Verfahren nur eine prinzipielle Bedeutung. In Praxi ist die Methode der krümmungslinigen Koordinaten und der Entwicklung nach den harmonischen Grundfunktionen als die vorteilhafteste anzusehen. Dies bezieht sich insbesondere auf das allgemeine Problem der Wirkung eines gegebenen primären Feldes auf einen *dielektrischen* Körper; leitende Körper können bekanntlich als Dielektrika mit einer unendlich großen Dielektrizitätskonstante betrachtet werden.

### § 3. Schwingungsprobleme; Entwicklung nach den Eigenfunktionen.

Das Problem der Bestimmung der freien elektrischen Schwingungen eines metallischen Leiters (oder eines gekoppelten Systems solcher Leiter) reduziert sich, wie im Kap. V, § 6 gezeigt wurde, auf die Integration einer Differentialgleichung von der Gestalt

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s \mu = k_0^2 \varepsilon_s \mu = k_0^2 p^2, \quad (28)$$

wobei die Konstante  $p$  (komplexer Brechungsindex) für verschiedene Raumgebiete (z. B. innerhalb und außerhalb des Leiters oder der eventuell vorhandenen Dielektrika) verschiedene Werte annimmt, während  $\omega$  einen unbekanntem Parameter (Schwingungsfrequenz), welcher für das ganze System denselben Wert hat, darstellt. Die Integration von (28) soll mit Rücksicht auf die bekannten Grenzbedingungen betreffs der Oberflächenwerte der elektrischen und magnetischen Feldstärken geschehen, wobei die übliche Forderung über die Eindeutigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit der Potentiale ( $\varphi$ ,  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ) in Verknüpfung mit diesen Grenzbedingungen auf bestimmte diskrete „Eigenwerte“ des Parameters  $\omega$  und die zugehörigen ausgezeichneten „Eigenlösungen“

gen“ von (28) („Eigenfunktionen“) führt. Die statische Verteilung einer Ladung (falls solche vorhanden ist) auf den betrachteten Leitern und das entsprechende statische Feld können als die einfachste Eigenlösung der Gleichung (28) angesehen werden, und zwar diejenige, welche der Eigenfrequenz  $\omega=0$  entspricht. Diese Lösung, die wir in dem vorhergehenden Paragraphen ausführlich behandelt haben, lassen wir jetzt beiseite.

Neben den freien Schwingungen müssen wir noch die erzwungenen Schwingungen betrachten, die durch ein gegebenes primäres harmonisch schwingendes Feld bedingt werden. In diesem Fall kann man die Gleichung (28) auch in der Gestalt

$$\nabla^2 \psi' + k^2 \psi' = - (k^2 - k_0^2) \psi^0 \quad \left( k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \right) \quad (28a)$$

schreiben (vgl. Kap. V, § 7). Man bekommt also für das sekundäre Feld bei  $\omega > 0$  ( $\omega$ -Frequenz der erzwungenen Schwingungen) eine *inhomogene* Gleichung, im Gegensatz zu dem entsprechenden statischen Fall.

Wir stellen uns dabei vor, daß die betrachteten Körper eine endliche Ausdehnung im Raume besitzen, und daß das primäre Feld nur für das von ihnen eingenommene endliche Raumgebiet  $V$  gegeben ist. Die Integration der Gleichung (28a) ist also für dieses endliche Raumgebiet durchzuführen, wobei die Randwerte von  $\psi'$  und deren Ableitungen, ebenso wie die Grenzbedingungen an den Trennungsoberflächen zwischen den verschiedenen Körpern (bzw. an ihren Oberflächen) berücksichtigt werden müssen.

Ein zweiter wesentlicher Unterschied zwischen dem statischen und dem Schwingungsproblem besteht in dem Umstand, daß das letztere nicht durch das skalare Potential  $\varphi$ , wie das erstere, sondern durch das *Vektorpotential*  $\mathfrak{A}$  (oder das *Polarisationspotential*  $\mathfrak{B}$ ) charakterisiert werden kann. Es muß folglich  $\psi$  in (28) und (28a) im allgemeinen eine *vektorielle Größe* bedeuten, was bei der Einführung von krümmungslinigen Koordinaten und teilweise auch bei der Integration von (28a) sehr wesentlich ist.

## 1. Die Gestalt der Eigenfunktionen für rotationssymmetrische (sphärische und sphäroidale) Koordinaten.

Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall eines einzigen Körpers, der sich im leeren Raum befindet (äußeres Problem) und führen, ebenso wie bei dem statischen Problem, ein Koordinatensystem ein, bei welchem eine der Flächen  $\xi = \text{konst}$  mit der Körperoberfläche zusammenfällt. Dabei betrachten wir zunächst den einfachsten Fall der freien Schwingungen eines vollkommen leitenden Körpers von rotationssymmetrischer Gestalt, und nehmen an, daß die zur Rotationsachse ( $z$ )

senkrechten Komponenten des Vektorpotentials verschwinden. Dann kann man  $\psi$  als eine *skalare* Größe behandeln, und zwar  $\psi = A_z = A$  oder  $\psi = \varphi$  setzen wobei  $A$  und  $\varphi$  miteinander durch die bekannte Beziehung

$$i k \varphi = \frac{\partial A}{\partial z} \quad \left( k = \frac{\omega}{c}, \quad \varphi \sim e^{-i\omega t} \right)$$

verknüpft sind.

Wir versuchen die Eigenfunktionen im Anschluß an die harmonischen Grundfunktionen, deren Verallgemeinerung sie bilden, in der Gestalt

$$\psi_k(\xi, \eta, \alpha) = U(\xi) \cdot T(\eta, \alpha) = U(\xi) V(\eta) W(\alpha) \quad (29)$$

zu bestimmen.

Dies ist im allgemeinen möglich für alle solche Koordinaten die hinsichtlich der Gleichung  $\nabla^2 \psi = 0$  ( $k = 0$ ) separierbar sind.

Wir haben z. B. in dem Fall des polaren Koordinatensystems:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi + k^2 \psi &= \frac{T}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dU}{dR} \right) + \frac{U}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} \\ &\quad + \frac{U}{R^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + k^2 U T = 0 \end{aligned}$$

und folglich [vgl. (16)]:

$$\frac{1}{U} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dU}{dR} \right) + k^2 R^2 = - \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin \Theta \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} \right\} = + C.$$

Dies gibt bei  $C = n(n+1)$  (wegen der Eindeutigkeitsbedingung) die frühere Gleichung (17) für  $T$  und die Gleichung

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dU}{dR} \right) + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{R^2} \right] U = 0 \quad (29a)$$

für  $U$ . Die letzte Gleichung läßt sich mittels des Ansatzes  $U = \frac{Z}{\sqrt{R}}$  auf die schon bekannte *Besselsche* Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 Z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dZ}{dR} + \left[ k^2 - \frac{n(n+1) + \frac{1}{4}}{R^2} \right] Z = 0$$

oder

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dZ}{dR} \right) + \left[ k^2 - \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{R^2} \right] Z = 0$$

zurückführen.

Wir erhalten folglich [vgl. (25a) und (25b)]

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)} &= U_n^{(1)} T_n = \frac{1}{\sqrt{R}} Z_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR) T_n(\Theta, \alpha), \\ \psi^{(2)} &= U_n^{(2)} T_n = \frac{1}{\sqrt{R}} Z_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kR) T_n(\Theta, \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (29b)$$

Es bedeuten hier  $T_n$  eine Kugelfunktion  $n$ ter Ordnung und  $Z_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$ ,  $Z_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$  zwei zylindrische Funktionen von halbzahlgiger Ordnung, deren erste bei  $R = 0$  regulär bleibt, während die zweite im Nullpunkt unendlich

wird und im Unendlichen nach außen hin forteilende Wellen darstellt, d. h. sich wie die *Hankelsche* Funktion erster Art  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}$  verhält. Es gilt nämlich

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\varrho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}} e^{i\varrho} i^{-(n+1)} \quad (\varrho \rightarrow \infty)$$

und folglich bei  $R \rightarrow \infty$

$$U_n^{(2)} \simeq \frac{C}{R} e^{ikR}. \quad (29c)$$

Die zylindrischen Funktionen von halbzahlicher Ordnung lassen sich für beliebige (endliche) Werte des Argumentes durch exponentielle oder trigonometrische Funktionen ausdrücken. Man kann dies am einfachsten beweisen indem man die Gleichung (29a) in der Gestalt

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RU) + \left[ k^2 - \frac{n(n+1)}{R^2} \right] U = 0$$

schreibt. Es wird dabei mit

$$RU_n = \sqrt{R} Z_{n+\frac{1}{2}} = S_n \quad \text{und} \quad kR = \varrho: \\ \frac{d^2 S_n}{d\varrho^2} + \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{\varrho^2} \right] S_n = 0. \quad (30)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung für den Fall  $n = 0$  lautet  $S_0 = C_1 e^{i\varrho} + C_2 e^{-i\varrho}$ . Ist  $S_n$  bekannt so kann man eine Lösung  $S_{n+1}$  nach der folgenden sich aus (30) leicht ergebenden Rekursionsformel berechnen:

$$S_{n+1} = i \left[ (n+1) \frac{S_n}{\varrho} - \frac{dS_n}{d\varrho} \right].$$

Diese Formel liefert, wenn man  $S_0^{(2)}(\varrho) = e^{+i\varrho}$  wählt:

$$S_n^{(2)}(\varrho) = e^{i\varrho} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m! n!} \frac{i^m}{2^m \varrho^m} \quad (30a)$$

oder anders geschrieben:

$$S_n^{(2)}(\varrho) = i^n \varrho^{n+1} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \right)^n \left[ \frac{e^{i\varrho}}{\varrho} \right].$$

Die entsprechenden Funktionen erster Art lassen sich, wie leicht zu sehen ist, folgendermaßen definieren

$$S_n^{(1)}(\varrho) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{S_n(\varrho)}{i^n} - \frac{S_n(-\varrho)}{(-i)^n} \right] = \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)! m!} \frac{\sin \left[ \varrho - (n-m) \frac{\pi}{2} \right]}{(2\varrho)^m}. \quad (30b)$$

Entwickelt man nämlich die Exponentialfunktionen  $e^{i\varrho}$  und  $e^{-i\varrho}$  in Potenzreihen nach  $\varrho$ , so heben sich die negativen Potenzen von  $\varrho$  weg, und man bekommt die folgende Potenzreihe

$$S_n^{(1)}(\varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \varrho^{n+2m+1}}{(2m+1)!(2m+3)!(2m+5)\dots(2m+2n+1)} \quad (30c)$$

mit lauter reellen Koeffizienten<sup>1)</sup>. Man kann also setzen

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{\varrho} S_n^{(1)}(\varrho) T_n(\Theta, \alpha), \quad \psi^{(2)} = \frac{1}{\varrho} S_n^{(2)}(\varrho) T_n(\Theta, \alpha) \quad (\varrho = kR), \quad (30d)$$

wobei der betrachtete der Ordnung  $n$  entsprechende Eigenwert von  $k$  ( $= k_n$ ) nachträglich aus den Grenzbedingungen des Problems zu bestimmen ist.

Als zweites Beispiel der Bestimmung der Eigenfunktionen möge der Fall eines *ellipsoidalen* Körpers dienen. In dem Fall des gestreckten Rotationsellipsoids haben wir nach (11b)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi + k^2 \psi &= \frac{1}{a_0(u^2 - v^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (u^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} (1 - v^2) \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] \\ &+ \frac{1}{a_0^2 (u^2 - 1)(1 - v^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + k^2 \psi = 0. \end{aligned}$$

Der Ansatz 
$$\psi_k = U(u) V(v) \frac{\cos m \alpha}{\sin m \alpha} \quad (31)$$

liefert [vgl. oben die Gleichung (23) u. ff.]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} \frac{d}{du} \left( (u^2 - 1) \frac{d}{du} U \right) - \frac{m^2}{u^2 - 1} + a_0^2 k^2 (u^2 - 1) &= - \frac{1}{V} \frac{d}{dv} (1 - v^2) \frac{dV}{dv} \\ &+ \frac{m^2}{1 - v^2} - a_0^2 k^2 (1 - v^2) = C, \end{aligned}$$

d. h.

$$\frac{d}{du} \left[ (u^2 - 1) \frac{d}{du} U \right] + \left( a_0^2 k^2 (u^2 - 1) - \frac{m^2}{u^2 - 1} - C \right) U = 0 \quad (31a)$$

und dieselbe Gleichung für  $V(v)$  — mit demjenigen Unterschied, daß  $u$  im Intervall  $(1, +\infty)$  und  $v$  im Intervall  $(-1, +1)$  liegt. Es sei bemerkt, daß, wenn der Abstandsfaktor der Eigenfunktion erster Art  $U^{(1)}$  gefunden ist, der entsprechende Faktor der Eigenfunktion zweiter Art nach derselben Formel

$$U^{(2)} = U^{(1)} \int \frac{du}{(u^2 - 1)[U^{(1)}]^2} \quad (31b)$$

bestimmt werden kann, wie im Falle der harmonischen Grundfunktionen. Dies bezieht sich selbstverständlich auch auf den Fall des polaren Koordinatensystems. Man könnte z. B. die Funktion  $S_n^{(1)}$  aus der Funktion  $S_n^{(2)}$  nach der Formel

$$S_n^{(1)} = S_n^{(2)} \int \frac{dR}{(S_n^{(2)})^2}$$

berechnen, die sich aus der allgemeinen Formel (15a) bei  $p = R^2$  und  $U = \frac{S}{R}$  ergibt. Die Frage nach den Integrationsgrenzen muß in jedem Spezialfall besonders erledigt werden. In der vorhergehenden Formel muß man z. B. von  $-R$  bis  $+R$  integrieren.

<sup>1)</sup> Vgl. G. Mie: Ann. d. Physik Bd. 25, 1908.

Die in (31a) auftretende „Separationskonstante“  $C$  muß gleichzeitig mit  $k$  aus den Endlichkeits- bzw. Eindeutigkeitsbedingungen, in Verknüpfung mit den Grenzbedingungen bestimmt werden, wozu man zuerst die entsprechenden Ausdrücke für die Feldstärken kennen muß.

## 2. Rotationssymmetrische Eigenschwingungen.

Zur vollkommenen Bestimmung der rotationssymmetrischen Eigenschwingungen ist es notwendig, neben der Gestalt der Eigenfunktionen die *Eigenwerte*, d. h. die Werte der entsprechenden Schwingungsfrequenzen festzulegen. Dies geschieht bekanntlich durch Einsetzen der allgemeinen Ausdrücke für die Feldstärken in die Grenzbedingungen. Im Falle des zylindrischen Koordinatensystems drücken sich die letzteren wegen (4b, c) und (28b) nach den folgenden Formeln aus:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= -\frac{\partial A}{\partial r} & (H_\xi = H_\eta = 0), \\ E_r &= -\frac{1}{ik} \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial r}, & E_z = -\frac{1}{ik} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + ikA, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

[vgl. (47a) Kap. V]. Der Übergang von diesen Formeln zu den entsprechenden Formeln für ein anderes rotationssymmetrisches Koordinatensystem bietet selbstverständlich keine prinzipiellen Schwierigkeiten, erweist sich aber als ziemlich umständlich, wenn dabei die Richtungskosinus der Koordinatenlinien  $(\xi, \eta)$  mit der  $Z$ -Achse einzuführen sind. Wir haben im Kap. V, § 7 diesen Weg bei dem Übergang von zylindrischen Koordinaten zu polaren benutzt.

Die allgemeinste und einfachste Methode der Behandlung rotationssymmetrischer Felder ergibt sich in der folgenden Weise<sup>1)</sup>. Wir gehen von den Feldgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = -ik\mathfrak{E}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = +ik\mathfrak{H}$$

aus, welche für ein rotationssymmetrisches Koordinatensystem  $(\xi, \eta, \alpha)$  nach (3a) die Gestalt

$$\begin{aligned} -ikE_\xi &= \frac{1}{h_\eta r} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (rH_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\eta H_\eta) \right], \\ -ikE_\eta &= \frac{1}{h_\xi r} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\xi H_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (rH_\alpha) \right], \\ -ikE_\alpha &= \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta H_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi H_\xi) \right] \end{aligned}$$

usw. annehmen. Wenn das Feld dieselbe Rotationssymmetrie wie das betreffende Koordinatensystem hat, zerfallen diese Gleichungen in zwei voneinander unabhängige Gruppen, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} ikE_\xi &= -\frac{1}{h_\xi r} \frac{\partial}{\partial \eta} (rH_\alpha), & ikE_\eta &= +\frac{1}{h_\xi r} \frac{\partial}{\partial \xi} (rH_\alpha) \\ ikH_\alpha &= \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta E_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi E_\xi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

<sup>1)</sup> Vgl. M. Abraham: Enz. d. math. Wiss. Bd. V, 2, S. 498 ff.

und

$$\left. \begin{aligned} ikH_\xi &= \frac{1}{h_\eta r} \frac{\partial}{\partial \eta} (rE_\alpha), & ikH_\eta &= -\frac{1}{h_\xi r} \frac{\partial}{\partial \xi} (rE_\alpha) \\ -ikE_\alpha &= \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta H_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} h_\xi H_\xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33a)$$

Die erste Gruppe, welche nur die Komponenten  $H_\alpha$ ,  $E_\xi$ ,  $E_\eta$  enthält (die anderen können gleich Null gesetzt werden), bestimmt die elektrischen Schwingungen vom meridionalen Typus, während die zweite ein System von stationären zirkularen Strömen entspricht.

Wir können uns folglich auf die Betrachtung der Gleichungen (33) beschränken. Wir führen dabei statt der Potentiale  $A$  oder  $\varphi$  die Größe

$$Q = rH_\alpha = -r \frac{\partial A}{\partial r} \quad (33b)$$

ein, welche in bezug auf die elektrische Feldstärke die Rolle des Potentials spielt. Durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke für die Komponenten von  $\mathfrak{E}$ :

$$E_\xi = -\frac{1}{ikr h_\eta} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad E_\eta = +\frac{1}{ih_r h_\xi} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad (33c)$$

in die dritte Gleichung (33) erhalten wir die folgende Differentialgleichung für das neue Potential:

$$\frac{r}{h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta}{r h_\xi} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi}{r h_\xi} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) \right] + k^2 Q = 0. \quad (34)$$

Es sei bemerkt, daß diese Gleichung von der entsprechenden Gleichung  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  für  $A$  oder  $\varphi$  wesentlich verschieden ist; die letzte Gleichung hat nämlich bei der Unabhängigkeit dieser Größen ( $\psi$ ) von  $\alpha$  die Gestalt:

$$\frac{1}{r h_\xi h_\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\eta r}{h_\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_\xi r}{h_\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] + k^2 \psi = 0. \quad (34a)$$

Die Größe  $Q$  hat eine sehr anschauliche Bedeutung; und zwar stellen die Linien  $Q = \text{konst}$  nichts anderes als die elektrischen Kraftlinien dar. Sie entspricht also der Stromfunktion oder dem skalaren magnetischen Potential für den Fall ebener Probleme.

Die der Gleichung (34) entsprechenden Eigenfunktionen sind selbstverständlich etwas verschieden von denjenigen, welche sich aus der Gleichung (34a) bei denselben Werten von  $k$  ergeben.

Man hat z. B. im Falle des polaren Koordinatensystems ( $h_\xi = 1$ ,  $h_\eta = R$ ,  $h_\alpha = r = R \sin \Theta$ ) nach (34):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial R^2} + \frac{\sin \Theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial Q}{\partial \Theta} \right) + k^2 Q = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung, welche der früher gefundenen Eigenfunktion  $\psi_{k,n} = Z_{n+\frac{1}{2}}(kR) P_n(\cos \Theta) = S_n(kR) P_n(\cos \Theta)$  entspricht, ist:

$$Q_{k,n} = S_n^{(2)}(kR) \sin^2 \Theta P_n'(\cos \Theta).$$

Mittels dieses Ausdrucks lassen sich sofort die zugehörigen Eigenwerte des Parameters  $k$  ( $= k_n$ ), d. h. die Frequenzen und die Dämpfungen der entsprechenden Eigenschwingungen berechnen. Die allgemeine Grenzbedingung für die Oberfläche  $\xi = \xi_0$  ( $= \text{konst}$ ) eines vollkommen leitenden Körpers lautet nämlich  $E_\eta = 0$ , d. h. nach (33c)

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right)_0 = 0. \quad (34b)$$

Dies gibt in dem betrachteten Fall die Gleichung

$$\frac{d}{dR} S_n^{(2)}(kR) = 0 \quad (\text{für } R = a),$$

woraus sich bei  $n = 1$  der schon berechnete erste Eigenwert von  $k$ , welcher der Grundschwingung der Kugel entspricht und bei  $n > 1$  die Eigenwerte der Oberschwingungen direkt ergeben.

In dem Falle des gestreckten Rotationsellipsoids nimmt (34) in den Koordinaten  $(u, v, \alpha)$  die folgende Gestalt an:

$$(u^2 - 1) \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2} + (1 - v^2) \frac{\partial^2 Q}{\partial v^2} - (u^2 - v^2)(a_0 k)^2 Q = 0. \quad (35)$$

Daraus erhält man mit dem Ansatz

$$\left. \begin{aligned} Q &= U(u)V(v): \\ \frac{d^2 U}{du^2} + \left(a_0^2 k^2 + \frac{C}{u^2 - 1}\right) U &= 0, \\ \frac{d^2 V}{dv^2} + \left(a_0^2 k^2 - \frac{C}{1 - v^2}\right) V &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35a)$$

und ferner nach (33c):

$$\left. \begin{aligned} E_u &= \frac{U(u)V'(v)}{\sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - v^2)}}, & E_v &= -\frac{U'(u)V(v)}{\sqrt{(u^2 - v^2)(1 - v^2)}} \\ H_\alpha &= -\frac{k U(u)V(v)}{\sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (35b)$$

Damit  $E_v$  und  $H_\alpha$  auf der Symmetrieachse endlich würden, muß  $V(v)$  bei  $v = \pm 1$  verschwinden. Aus dieser Endlichkeitsbedingung (die mit der Eindeutigkeitsbedingung zusammenfällt) und der Grenzbedingung  $E_r = 0$ , d. h.

$$U'(u) = 0 \quad \text{für } u = u_0 \quad (\text{Oberfläche des Ellipsoids}),$$

lassen sich die verschiedenen erlaubten Werte von  $C$  ( $= C_1, C_2, \dots$ ) und die entsprechenden Eigenwerte von  $k$  ( $= k_1, k_2, \dots$ ) bestimmen.

Man bekommt dabei für ein sehr gestrecktes „stabförmiges“ Ellipsoid in erster Näherung

$$C = 0, \quad k = \frac{\pi n}{2a} = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

wo  $a$  die große Halbachse des Ellipsoids und  $l$  seine Länge bedeutet. Dieses Resultat stimmt mit demjenigen überein, welches wir im Kap. V, §6 für die Eigenschwingungen eines geradlinigen Drahtes bei Vernach-

lässigung der Dämpfung gefunden haben. Der Einfluß der Dämpfung kann hier ohne irgendwelche zusätzliche Betrachtungen (wie dort) bestimmt werden, einfach durch Weiterreibung der Approximation.

Und zwar ergibt sich in zweiter Näherung

$$k_n = \frac{\pi^n}{l} + i\gamma_n K,$$

wo

$$K = \frac{1}{4 \lg \frac{2l}{b}},$$

(d. h. ungefähr eine Hälfte der auf die Längeneinheit bezogenen Kapazität) und

$$\gamma_n = \int_0^{2\pi n} \frac{1 - \cos x}{x} dx = \lg 2\pi n + 0,577 + \frac{1}{(2\pi n)^2} - \dots$$

ist.

### 3. Allgemeine Theorie der freien elektrischen

Schwingungen einer nicht vollkommen leitenden Kugel.

Der allgemeine Fall von elektromagnetischen Feldern, die keine Rotationsymmetrie besitzen, läßt sich verhältnismäßig einfach nur für das polare Koordinatensystem, d. h. für kugelförmige Körper, behandeln. Wir wollen dabei eine nicht vollkommen leitende Kugel in Betracht ziehen und dementsprechend die Feldgleichungen in der Form

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon_s \mu \mathfrak{E}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = +i \frac{\omega}{c} \mathfrak{H}$$

schreiben. Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\omega}{c} = k, \quad \epsilon_s \mu = \rho^2, \quad Rk\rho = \varrho \quad (36)$$

und schreiben die obigen Gleichungen in polaren Koordinaten folgendermaßen um [vgl. (5b)]:

$$\left. \begin{aligned} -ik H_R R \sin \Theta &= \frac{\partial E_\Theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta E_\alpha), \\ -ik H_\Theta R \sin \Theta &= \sin \Theta \frac{\partial (R E_\alpha)}{\partial R} - \frac{\partial E_R}{\partial \alpha}, \\ -ik H_\alpha R &= \frac{\partial E_R}{\partial \Theta} - \frac{\partial (R E_\Theta)}{\partial R} \end{aligned} \right\} \quad (36a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} ik \rho^2 E_R R \sin \Theta &= \frac{\partial H_\Theta}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta H_\alpha), \\ ik \rho^2 E_\Theta R \sin \Theta &= \sin \Theta \frac{\partial (R H_\alpha)}{\partial R} - \frac{\partial H_R}{\partial \alpha}, \\ ik \rho^2 E_\alpha R &= \frac{\partial H_R}{\partial \Theta} - \frac{\partial (R H_\Theta)}{\partial R}. \end{aligned} \right\} \quad (36b)$$

Wir fügen dazu noch die Gleichungen  $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ , d. h.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R) + \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta E_\Theta) + \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 H_R) + \frac{\partial}{\partial \Theta} (\sin \Theta H_\Theta) + \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

welche eine Folge der vorhergehenden bilden und mittels deren man aus (36a, b) ohne Schwierigkeit die folgenden Eliminationsgleichungen für die radialen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke erhält:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} (\varrho^2 E_R) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial E_R}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 E_R}{\partial \alpha^2} + \varrho^2 E_R &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} (\varrho^2 H_R) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial H_R}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 H_R}{\partial \alpha^2} + \varrho^2 H_R &= 0. \end{aligned} \right\} (36c)$$

Daraus sieht man, daß das elektromagnetische Feld in zwei voneinander unabhängige Teile zerlegt werden kann, nämlich den „*elektrischen*“, bei welchem

$$E_R \neq 0, \quad H_R = 0$$

und den „*magnetischen*“

$$H_R \neq 0, \quad E_R = 0,$$

Wir können deshalb diese zwei Teile einzeln betrachten. Es sei bemerkt, daß der elektrische Teil die Verallgemeinerung der oben betrachteten elektrischen Schwingungen vom meridionalen Typus darstellt. Die Größe  $E_R$  spielt dabei die Rolle des Potentials, denn die anderen Größen lassen sich durch  $E_R$  nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 (\varrho E_\Theta)}{\partial \varrho^2} + \varrho E_\Theta &= \frac{\partial^2 E_R}{\partial \Theta \partial \varrho}, \\ \frac{\partial^2 (\varrho \sin \Theta E_\alpha)}{\partial \varrho^2} + \varrho \sin \Theta E_\alpha &= \frac{\partial^2 E_R}{\partial \alpha \partial \varrho}, \\ \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho H_\Theta) &= -i \not\! p \varrho E_\alpha, \quad \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho H_\alpha) = i \not\! p \varrho E_\Theta \end{aligned} \right\} H_R = 0 \quad (37)$$

bestimmen. Ähnliche Formeln gelten für den magnetischen Teil.

Die Gleichung (36c) für  $E_R$  stimmt mit der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 \rho^2} \nabla^2 \psi + \psi &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} (\varrho \psi) + \frac{1}{\varrho^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \right) \\ &+ \frac{1}{\varrho^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \psi = 0 \end{aligned}$$

vollkommen überein bei

$$\psi = \varrho E_R.$$

Den früher gefundenen Eigenfunktionen entsprechen also die folgenden „Eigenlösungen“ dieser Gleichung:

$$E_R^{(n)} = \frac{E_0 S_n(\varrho)}{\varrho^2} T_n(\Theta, \alpha) \quad (H_R = 0). \quad (37a)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Formeln (37) ein, so erhält man für  $E_\Theta$  und  $E_\alpha$  Gleichungen von der Gestalt

$$\frac{d^2 \psi}{d \varrho^2} + \psi = C \frac{d}{d \varrho} \left( \frac{S_n}{\varrho^2} \right),$$

wo  $C$  nur von den Winkelkoordinaten abhängt. Nun ist nach (30)

$$\frac{d^2 S_n}{d \varrho^2} + S_n = n(n+1) \frac{S_n}{\varrho^2}$$

und folglich

$$\frac{d^2}{d \varrho^2} S'_n + S'_n = n(n+1) \frac{d}{d \varrho} \left( \frac{S_n}{\varrho^2} \right). \quad \left( S'_n = \frac{d S_n}{d \varrho} \right).$$

Aus dem Vergleich dieser Gleichung mit der vorhergehenden ergibt sich  $\psi = \frac{C}{n(n+1)} S'_n$ . Wir bekommen also nach (37):

$$\left. \begin{aligned} E_\Theta^{(n)} &= \frac{E_0}{n(n+1)} \frac{S'_n}{\varrho} \frac{\partial T_n}{\partial \Theta}, & E_\alpha^{(n)} &= \frac{E_0}{n(n+1)} \frac{S'_n}{\varrho \sin \Theta} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha}, \\ H_\Theta^{(n)} &= -\frac{i \rho E_0}{n(n+1)} \frac{S_n}{\varrho \sin \Theta} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha}, & H_\alpha^{(n)} &= \frac{i \rho E_0}{n(n+1)} \frac{S_n}{\varrho} \frac{\partial T_n}{\partial \Theta} \end{aligned} \right\} (H_R = 0). \quad (37b)$$

Wegen der Symmetrie der Gleichungen (30a, b), die nur durch den Faktor  $-\rho^2 = (i\rho)^2$  zerstört wird, können wir sofort die entsprechenden Formeln für die „magnetischen“ Schwingungen aufschreiben. Es wird nämlich mit

$$\left. \begin{aligned} H_R^{(n)} &= H_0 \frac{S_n}{\varrho^2} T_n(\Theta, \alpha), \\ H_\Theta^{(n)} &= \frac{H_0}{n(n+1)} \frac{S'_n}{\varrho} \frac{\partial T_n}{\partial \Theta}, & H_\alpha^{(n)} &= \frac{H_0}{n(n+1)} \frac{S'_n}{\varrho \sin \Theta} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha}, \\ E_\Theta^{(n)} &= -\frac{H_0}{i \rho n(n+1)} \frac{S_n}{\varrho} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha}, & E_\alpha^{(n)} &= \frac{H_0}{i \rho n(n+1)} \frac{S_n}{\varrho} \frac{\partial T_n}{\partial \Theta} \end{aligned} \right\} (E_R = 0). \quad (37c)$$

Es brauchen die Kugelfunktionen  $T_n$  in (37b) und (37c) selbstverständlich nicht dieselben zu sein.

Es sei bemerkt, daß die Gleichungen (37b) einem Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  von der folgenden Form:

$$\mathfrak{A} = E_0 L_{n+1} \nabla \varphi_n \quad (38)$$

entsprechen mit

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= T_n \varrho^n & \text{bzw.} & \frac{T_n}{\varrho^{n+1}} \\ L_n &= \frac{S_n^{(1)}}{\varrho^{n+1}} & \text{bzw.} & S_n^{(2)} \varrho^n \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

$\varphi_n$  stellt also die der betrachteten Eigenfunktion zugehörige harmonische Grundfunktion (skalares Potential) für das Innere der Kugel bzw. für den Außenraum dar. Mit dem Beweise dieser Formeln werden wir uns nicht aufhalten. Er ergibt sich ohne Schwierigkeit mittels der Gleichung  $\nabla^2 \varphi_n = 0$  und der Rekursionsformel  $S_{n+1} = i \left[ (n+1) \frac{S_n}{\varrho} - S'_n \right]$ .

Die Formeln (37a, b, c) erlauben es, die freien Schwingungen eines homogenen kugelförmigen Leiters zu bestimmen, ohne irgendwelche Beschränkungen über ihren Charakter oder die Größe der Leitfähigkeit zu machen. Die elektrischen Eigenschwingungen  $n$ ter Ordnung lassen sich durch den Ansatz (37a) beschreiben mit

$$S_n = E_1 S_n^{(1)}(\varrho), \quad p = \sqrt{\varepsilon_s \mu} \simeq \sqrt{4\pi i \frac{\sigma \mu}{\omega}} \simeq (1+i) \sqrt{\frac{\sigma \mu}{c k}}, \quad \varrho = k p R$$

für das Innere ( $R < a$ ) und

$$S_n = E_2 S_n^{(2)}(\varrho), \quad p = 1, \quad \varrho = k R$$

für den Außenraum ( $R > a$ ). Es müssen dabei die Grenzbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \Delta E_\vartheta = 0, & \quad \Delta E_\alpha = 0 \\ \Delta \frac{H_\vartheta}{\mu} = 0, & \quad \Delta \frac{H_\alpha}{\mu} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

erfüllt werden. Dies gibt nach (37b) für  $R = a$

$$E_1 \left( \frac{1}{\varrho} \frac{d S_n^{(1)}}{d \varrho} \right)_{\text{inn}} = E_2 \left( \frac{1}{\varrho} \frac{d S_n^{(2)}}{d \varrho} \right)_{\text{auss}},$$

und

$$E_1 \left( \frac{p S_n^{(1)}}{\mu \varrho} \right)_{\text{inn}} = E_2 \left( \frac{S_n^{(2)}}{\varrho} \right)_{\text{auss}}$$

oder bei  $\mu = 1$

$$\left. \begin{aligned} E_1 \frac{1}{p} \frac{d S_n^{(1)}}{d \varrho} &= E_2 \frac{d S_n^{(2)}}{d \varrho} \\ E_1 S_n^{(1)} &= E_2 S_n^{(2)}. \end{aligned} \right\} (R = a) \quad (39a)$$

Durch Division dieser Gleichungen durcheinander ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{p S_n^{(1)}} \frac{d S_n^{(1)}}{d \varrho} = \frac{1}{S_n^{(2)}} \frac{d S_n^{(2)}}{d \varrho}, \quad (39b)$$

aus welcher die Eigenwerte von  $k$ , d. h. die Schwingungsfrequenzen und die Dämpfungskoeffizienten bestimmt werden können. In dem Grenzfall einer vollkommen leitenden Kugel hat man  $|p| = \infty$  und folglich

$$\left( \frac{d S_n^{(2)}}{d \varrho} \right)_{R=a} = 0,$$

wie schon früher gefunden wurde.

Mittels der Formeln

$$S_1^{(2)} = \frac{i}{\varrho} e^{i\varrho} \quad \text{und} \quad S_1^{(1)} = -\cos \varrho + \frac{\sin \varrho}{\varrho}$$

kann man z. B. den Wert von  $k$  für die elektrische Grundschwingung der Kugel berechnen. Es ergibt sich nämlich bei endlichen Werten von  $p$  die folgende transzendente Gleichung für  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(pka) - pka \cos pka} \left[ \sin pka + \frac{\cos pka}{pka} - \frac{\sin pka}{(pka)^2} \right] \\ = \frac{i e^{i pka}}{(ka + i e^{i pka})} \left( 1 + \frac{i}{ka} - \frac{1}{(ka)^2} \right), \end{aligned}$$

die sich durch sukzessive Approximationen lösen läßt, wenn man als nullte Näherung ihre Lösung für den Fall  $|\rho| = \infty$  nimmt.

Es sei bemerkt, daß die spezielle Form der Kugelfunktionen  $T_n(\Theta, \alpha)$ , die in den vorhergehenden Gleichungen auftreten, ganz unbestimmt bleibt. Dies bedeutet offenbar, daß alle Eigenschwingungen vom Typus

$$T_n^m = P_n^m(\cos \Theta) e^{i m \alpha}$$

zu demselben Eigenwert von  $k$  angehören, d. h. dieselbe Frequenz und Dämpfung besitzen. Diese Erscheinung, d. h. das Zusammenfallen der Eigenwerte für eine Anzahl verschiedener Eigenschwingungen pflegt man als *Entartung* zu bezeichnen. Da  $T_n$  durch eine Summe von  $(2n + 1)$  linear unabhängigen Kugelfunktionen mit willkürlichen Koeffizienten, d. h. durch  $(2n + 1)$  voneinander unabhängigen Partial-schwingungen mit beliebigen Amplituden dargestellt werden kann, spricht man von einer Entartung  $(2n + 1)$ ter Ordnung oder  $(2n + 1)$ -facher Entartung. Sie hängt offenbar mit dem besonderen ausgezeichneten Charakter der Kugeloberfläche zusammen. Denkt man sich die letztere etwas deformiert, so wird die Entartung sofort aufgehoben.

#### 4. Erzwungene Schwingungen einer Kugel im Felde ebener elektromagnetischer Wellen.

Der Fall von erzwungenen Schwingungen läßt sich mittels der Eigenfunktionen des betreffenden Körpers in genau derselben Weise behandeln wie die Wirkung eines zeitlich konstanten primären Feldes mittels der entsprechenden harmonischen Grundfunktionen. Man muß nämlich jede das primäre Feld charakterisierende Größe  $\psi^0 \sim e^{-i\omega t}$  in eine Reihe nach den Eigenfunktionen erster Art für das Körperinnere entwickeln, wobei für  $k$  nicht die entsprechenden Eigenwerte, sondern der gegebene Wert  $\omega c$  ( $\omega/2\pi$  Frequenz der erzwungenen Schwingungen) einzusetzen ist. Man muß ferner die zu bestimmende sekundäre Größe  $\psi'$  nach denselben Eigenfunktionen für das Körperinnere und nach den Eigenfunktionen zweiter Art für den Außenraum entwickeln, und zwar für denselben „primären“ oder erzwungenen Wert von  $k$ . Mittels der Grenzbedingungen (39) für die resultierenden (totalen) Feldstärken können die Koeffizienten der beiden Reihen für  $\psi'$  bestimmt werden durch Gleichsetzen der Koeffizienten bei den einzelnen Winkel-funktionen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die letzteren dieselbe Gestalt wie bei dem entsprechenden statischen Problem beibehalten oder jedenfalls (wie bei dem statischen Problem) orthogonal bleiben, und ebenso wie die Abstandsfunktionen in bestimmter Weise normiert sind.

Wir wollen hier beispielsweise die Wirkung ebener linear polarisierter elektromagnetischer Wellen auf eine leitende Kugel und die damit verknüpfte Beugung dieser Wellen kurz betrachten<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Dieses Problem ist eingehend von *G. Mie* (l. c.) und *P. Debye* behandelt worden.

Die  $xyz$ -Komponenten der primären Feldstärken seien (von dem Faktor  $e^{-i\omega t}$  abgesehen):

$$E_x^0 = e^{ikz}, \quad E_y^0 = E_z^0 = 0; \quad H_x^0 = 0, \quad H_y^0 = e^{ikz}, \quad H_z^0 = 0;$$

( $z$  bedeutet also die Fortpflanzungsrichtung). Gehen wir jetzt zu einem polaren Koordinatensystem über, dessen Polarachse mit der  $z$ -Achse zusammenfällt und die  $xz$ -Ebene mit der Ebene  $\alpha = 0$ , so erhalten wir die folgenden Ausdrücke für die radialen Komponenten:

$$E_R^0 = e^{ikR \cos \Theta} \sin \Theta \cos \alpha, \quad H_R^0 = e^{ikR \cos \Theta} \sin \Theta \cos \alpha. \quad (40)$$

Die anderen Komponenten brauchen wir nicht aufzuschreiben, denn sie lassen sich in der üblichen Weise aus  $E_R^0$  und  $H_R^0$  berechnen.

Nun kann man die Ausdrücke (40) in der Nähe des Nullpunktes ( $R = 0$ ), d. h. innerhalb und in der Umgebung der Kugel in eine Reihe nach den zugehörigen Eigenfunktionen erster Art entwickeln. Es gilt nämlich (mit  $\varrho = kR$ )

$$e^{i\varrho \cos \Theta} \sin \Theta \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sum_1^n (2n+1) i^{n-1} \frac{S_n^{(1)}(\varrho)}{\varrho^2} P_n^1(\cos \Theta) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (40a)$$

wo  $P_n^1(\cos \Theta) = \sin \Theta \frac{dP_n(\cos \Theta)}{d(\cos \Theta)}$  die erste zugeordnete Legendresche Funktion ist.

Diese Formeln oder die sie zusammenfassende Formel

$$e^{i\varrho v} = \sum_1^\infty (2n+1) i^{(n-1)} \frac{S_n^{(1)}(v)}{\varrho^2} \frac{dP_n(v)}{dv}$$

lassen sich auf verschiedene Weisen ableiten; ihr Beweis ergibt sich am einfachsten mittels der Differentialgleichungen und der bekannten Rekursionsformeln für die Funktionen  $S_n^{(1)}$  und  $P_n$ .

Zur Bestimmung des sekundären Feldes denken wir uns die radialen Komponenten von  $\mathfrak{E}'$  und  $\mathfrak{H}'$  in Reihen von der Gestalt (40a) mit unbestimmten Koeffizienten entwickelt. Es müssen dabei selbstverständlich Funktionen erster Art für das Kugellinnere und zweiter Art für den Außenraum benutzt werden. In beiden Fällen können wir  $\varrho$  als Produkt von  $R$  mit  $k = \frac{\omega}{c}$  definieren, d. h. die Konstante  $p = \sqrt{\varepsilon_s \mu}$ , welche die elektromagnetischen Eigenschaften des betrachteten Körpers charakterisiert, nur bei der Aufstellung der Grenzbedingungen berücksichtigen, ebenso wie dies in den entsprechenden statischen Problemen geschieht.

Wir machen also den folgenden Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} E_R' &= \sum_0^\infty A_n^{(1)} \frac{S_n^{(1)}(\varrho)}{\varrho^2} P_n^1(\cos \Theta) \cos \alpha, \\ H_R' &= \sum_1^\infty B_n^{(1)} \frac{S_n^{(1)}(\varrho)}{\varrho^2} P_n^1(\cos \Theta) \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (40b)$$

für  $R < a$

und

$$\left. \begin{aligned} E'_R &= \sum_1^{\infty} A_n^{(2)} \frac{S_n^{(2)}(\varrho)}{\varrho^2} P_n^1(\cos \Theta) \cos \alpha, \\ H'_R &= \sum_1^{\infty} B_n^{(2)} \frac{S_n^{(2)}(\varrho)}{\varrho^2} P_n^1(\cos \Theta) \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (40c)$$

für  $R > a$ ,

berechnen dann die tangentialen ( $\Theta$ - und  $\alpha$ -)Komponenten von  $\mathfrak{E}^0$ ,  $\mathfrak{H}^0$  und  $\mathfrak{E}'$ ,  $\mathfrak{H}'$  [durch Addition der Ausdrücke (37b) und (37c), wobei  $p = 1$  zu setzen ist] und schließlich setzen alle diese Komponenten in die Grenzbedingungen (39) und die Bedingungen

$$\Delta \varepsilon_s E_R = 0, \quad \Delta H_R = 0. \quad (40d)$$

ein. Aus diesen 6 Bedingungen sind tatsächlich nur 4 notwendig; die zwei anderen werden dabei identisch erfüllt. Wir haben hier genau dieselben Verhältnisse wie in der Theorie der Reflexion und Brechung von ebenen Wellen an ebenen Oberflächen (Kap. V, § 1 und 2). Es stellen dabei die Formeln (40c) die reflektierten und die Ausdrücke (40b), mit den primären (einfallenden) Wellen zusammengenommen, die gebrochenen Wellen dar.

Das skizzierte Verfahren läßt sich in einer Hinsicht etwas modifizieren. Und zwar braucht man bei der Bestimmung des inneren elektromagnetischen Feldes die primären und die sekundären Feldstärken voneinander nicht zu trennen; statt dessen kann man die *resultierende* Feldstärke (die den durchgehenden Wellen der gewöhnlichen optischen Theorie entspricht) durch einen Ansatz von der Gestalt (40b) mit einem von 1 verschiedenem Wert von  $p$ , d. h. mit  $\varrho = kR \sqrt{\varepsilon_s \mu}$ , charakterisieren. Dabei muß man das Feld außerhalb der Kugel durch Superposition der „reflektierten“ Wellen (40c) und der „einfallenden“ bestimmen; die letzteren müssen in diesem Fall nach den Eigenfunktionen zweiter Art mit  $p = 1$  entwickelt werden. Diese Entwicklung ergibt sich aus (40a), wenn man  $S_n^{(1)}$  durch  $S_n^{(2)}$  ersetzt, unter der Normierungsbedingung  $S_n^{(1)}(ka) = S_n^{(2)}(ka)$ .

Die beiden Verfahren sind selbstverständlich einander vollkommen äquivalent.

Es sei bemerkt, daß die einzelnen Glieder von (40a) einfallende Wellen darstellen, die in bezug auf die Kugeloberfläche den einfachsten möglichen Typus besitzen; in diesem Sinne entsprechen sie den ebenen Wellen im Falle einer ebenen Körperoberfläche. Man kann sie andererseits betrachten als diejenigen primären „Elementarwellen“, welche den verschiedenen Eigenschwingungen des betrachteten Körpers entsprechen.

Sobald also diese Eigenschwingungen, d. h. die Eigenlösungen der Wellengleichung  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$  in einem der Gestalt der Körperoberfläche angepaßten Koordinatensystem ermittelt sind, kann man das Problem der erzwungenen Schwingungen für beliebige primäre

Wellen und die zugehörigen Probleme der Brechung, Reflexion, Beugung oder Streuung der letzteren ohne besondere Schwierigkeit lösen. Der betrachtete Körper verhält sich hinsichtlich dieser Wellen wie ein System von harmonischen Oszillatoren, die desto stärker angeregt werden, je näher die erzwungene Frequenz zur entsprechenden Resonanzfrequenz ist (vgl. Kap. V, § 5).

### 5. Bestimmung der erzwungenen Schwingungen durch Quadratur.

Es gibt noch ein zweites Verfahren zur Lösung des Problems der erzwungenen Schwingungen, welches auf der inhomogenen Differentialgleichung (28a) beruht und kein Analogon in der Theorie der statischen Induktionswirkung hat. Die Durchführung dieses Verfahrens ist aber durch das Auftreten von unbekanntem Randwerten bei der Integration von (28a) sehr erschwert. Man muß ferner darauf achten, daß im leeren Raum, d. h. außerhalb des betrachteten Körpers, die rechte Seite der Gleichung (28a) gleich Null wird. Es ist deshalb notwendig, die verhältnismäßig leicht zu ermittelnde partikuläre Lösung von (28a) durch eine allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung zu vervollständigen, welche mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen bestimmt werden muß (vgl. Formel (58a) § 7, Kap. V). Es sei bemerkt, daß die erwähnte partikuläre Lösung (28a) durch das Integral

$$\psi' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(k^2 - k_0^2)}{R} \psi^0 e^{ikR} dV' \quad (\mathfrak{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (41)$$

dargestellt werden kann. Es sind hier  $k$  und  $\psi^0$  als gegebene Funktionen von  $\mathbf{r}'$  zu behandeln. Ersetzt man  $k_0$  durch  $k$  und  $k$  durch  $k\rho$  im Einklang mit den vorhergehenden Bezeichnungen, so nimmt diese Lösung, ausführlich geschrieben, die folgende Gestalt an:

$$\psi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\rho^2 - 1) k^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \psi^0(\mathbf{r}') e^{i\rho k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (41a)$$

# Namen- und Sachverzeichnis.

## *Abraham, M.*

- Theorie der Drahtwellen 301.
- Eigenschwingungen eines Rotationsellipsoids 493.
- Absorptionsindex 195.
- Abstandskoordinate 471.
- Achsen.
  - elektrische und magnetische 37.
  - optische 208.
- Aktivität, optische 149, 219.
- Aktivitätsvektor 151.
- Analytische Funktionen.
  - Anwendung auf Drahtwellen 304.
  - — auf ebene elektrostatische Probleme 428, 483.

## *Babinetsches Prinzip 343.*

- Bauchstellen 316, 327.
- Besselsche Funktionen* 292, 311, 482.
- Beugungserscheinungen 340.
- Beugungsgitter 350.
- Beweglichkeit (der Ionen, Elektronen) 10, 171.
- Bewegte Körper 19, 39, 199.
- Bilder, elektrische 444.
- Born, M.*
  - Theorie der optischen Aktivität 150.
  - — der Orientierungsstreustrahlung 252.
- Boltzmannsches Gesetz* 124, 166.
- Brechung der Kraftlinien 357.
- Brechungsindex 193.
- Brewsterscher Polarisationswinkel* 279.
- de Broglie, L.* 242.
- Bursian, V.* 21.

## *Curietemperatur* 100, 138.

## Dämpfung von Schwingungen 8, 83.

- Dämpfungsdekrement 154.
- Dämpfungskoeffizient der Wellen 195.
- Darwin, C. G.* 251.
- Debye, P.*
  - Theorie der Orientierungspolarisation im konstanten Feld 126.

## *Debye, P.*

- — im Wechselfeld 165.
- Erzwungene Schwingungen in Kugeln 498.
- Depolarisationsgrad 254.
- Diamagnetismus 132, 385.
- Dichteschwankungen 249, 255.
- Dielektrizitätskonstante, komplexe 36.
- Diffraction — s. Beugung.
- Diffractionsvektor 349.
- Diffusionsstrom 165, 179.
- Dispersion 157, 229.
- Doppelbrechung 282.
- Drahtwellen 301.
- Drehmoment 66.
- Drehung der Polarisationssebene 218.
- Drehfeld, magnetisches 392.
- Durchlässigkeitskoeffizient 271.
- Dynamomaschinen 386.
- Ebene Probleme** 428, 483.
- Eichfaktor 463.
- Eigenenergie 49.
- Eigenfrequenz 152.
- Eigenfunktionen 320, 487.
- Eigenschwingungen.
  - Feld- und Substanztheorie der — 317.
  - einer Kugel 323, 494.
  - eines Drahtes 362.
  - eines Hohlraumes 334.
  - eines Rotationsellipsoids 493.
- Eigenwerte 319.
- Einachsige Kristalle 212.
- Einsteinsche statistische Methode* 165.
- Elektrode 401.
- Elektrostriktion 109, 116.
- Elektromotorische Kraft 185, 361.
- Elementarwellen.
  - ebene 223.
  - kugelförmige 244.
- Elementare Verschiebung 173.
- Ellipsoid.
  - Ladungsverteilung auf 439.
  - Potential und Kapazität 440, 453.

- Ellipsoid.  
 — im homogenen Felde 452.  
 — Eigenschwingungen eines — 493.  
 Elliptischer Zylinder 443.  
 Energie  
 — der freien Elektronen 54.  
 — der gebundenen Elektronen 63.  
 — freie 97.  
 — mechanische 331, 359, 364.  
 — Lokalisation der 96.  
 — Oberflächenenergie 103.  
 Energiespannungstensor 86.  
 Entropie 96, 105.  
 Entartung 498.  
 Entladung eines Leiters 405.  
 Entmagnetisierungskoeffizient 455.  
 Erregungen (Definition der) 13.  
 Erregungstensor 17.  
 Ersatzoszillator 239.  
  
**Faradayeffekt** 145, 218.  
 Feldstärken.  
 — totalen und effektiven 61, 67.  
**Fermatsches Prinzip** 241.  
 Fernfeld einer Antenne 299, 330.  
 Ferromagnetische Erscheinungen 100, 137.  
 Flächenkräfte 59.  
**Fouriersche Reihen und Integrale** 8, 224, 351.  
**Fraunhofersche Beugungserscheinungen** 346.  
**Fresnelsche.**  
 — Gleichung für die Wellengeschwindigkeiten 204.  
 — Ovaloid 209.  
 — Formeln für die Reflexion der Wellen 279.  
 Freie Elektronen 11.  
  
**Galvanisches Element** 185.  
 Galvanische Potentialverteilung 404.  
 Gebundene Elektronen 11.  
 Grundschiebungen 203, 316.  
 Gruppengeschwindigkeit 226.  
**Greensche Funktion** 485.  
 Gyration 134, 264.  
 Gyrotrope Körper 146.  
  
**Halbwertsbreite** 156.  
**Hallscher Strom** 33.  
**Hamilton** 242.  
**Hamilton-Jacobische Gleichung** 239.  
**Hamiltonsches Variationsprinzip in Anwendung auf Stromsysteme** 379.  
  
**Hauptgeschwindigkeiten** 200.  
 Harmonische Grundfunktionen 470.  
**Heavisideschicht** 341.  
**Hermiteische Bedingungen** 80.  
 Hohlraum-Eigenschwingungen 334.  
**Hookesches Gesetz** 5, 43.  
**Huyghensches Prinzip** 244, 343.  
  
**Induktionskoeffizienten** 370, 404, 418.  
 Induktionsströme, axiale 389.  
 — in Metallplatten 397.  
 Integralgleichung der Wellenfortpflanzung 266.  
 Ionenschichten 181.  
  
**Joulesche Wärme** 56.  
  
**Kabel** 283, 305, 313, 368.  
 Kapazitätskoeffizienten 362, 404, 418.  
**Kerreffekt.**  
 — elektrischer 147.  
 — magnetischer 274.  
 Knotenlinien 316.  
 Koerzitivkraft 101, 139.  
 Kohärenz 236.  
 Komplexes skalares Potential 304, 428, 483.  
 — Vektorpotential 392, 428.  
 Kondensator 360, 426.  
 Kontaktpotentiale 189.  
 Konfokale Koordinaten 469.  
 Konform abbildende Koordinaten 462.  
 Konvektionsstrom 42, 165.  
 Koppelung.  
 — induktive 370.  
 — elektrostatische 376.  
 — galvanische 377.  
 Koppelungskoeffizient 372.  
 Konische Refraktion 212, 283.  
 Kritische Temperatur — s. *Curietemperatur*.  
 Kugel.  
 — Eigenschwingungen 323, 498.  
 — erzwungene Schwingungen 498.  
 — im homogenen Felde 422, 432.  
 — elektrische Bilder in einer — 449  
 Kugelschale im homogenen Felde 477.  
 Kugelfunktionen 473.  
  
**Langevin, P.**  
 — Theorie des Paramagnetismus 124, 135.  
 — — des Diamagnetismus 133.  
 — — des elektrischen Kerreffektes 147.

*Langmuir, I.* 412.  
*Larmor, J.* 132, 341.  
 Laterale Schwingungen 317.  
 Leitfähigkeit 33.  
 — scheinbare 83.  
 — thermische 178.  
 Leitfähigkeitskoeffizienten 404.  
 Leitungsstrom 10, 11, 171.  
 Lichtdruck auf Atome 148.  
*Lorentz, H. A.*  
 — Korrekturen für das effektive Feld 70, 94.  
 — Formel für die Dielektrizitätskonstante 120.  
 — Theorie der Stoßdämpfung 160.  
**Magnetische**  
 — Erregung (verkehrte Definition der) 16.  
 — Drehung der Polarisationssebene 145.  
 — Energie 131.  
 — Ketten 434.  
 — Kerreffekt 274.  
 Magnetisierung, spontane 140.  
 Magnetisches skalares Potential 391, 400.  
 Materialisierungsmethode 426.  
*Maupertuisches* Prinzip 242.  
*Maxwell, J. C.* 43, 124, 354.  
 Mechanische Kräfte zwischen Wechselströme 383.  
 Metalloch 318.  
 Metallplatten 397, 429.  
 Metallische Reflexion (des Lichtes) 272.  
 Metallische Leitfähigkeit 177.  
 Meridionale Eigenschwingungen 316.  
*Mie, G.* 490, 498.  
 Mittelwerte.  
 — zeitliche quadratischer Größen 81.  
 — geometrische und statistische 125.  
**Negative Kristalle** 212.  
*Nernstsche* Theorie der galvanischen Elemente 185.  
 Normalenfläche 210.  
 Normalzustandsenergie 49.  
 Normierte Funktionen 321, 475.  
**Oberflächenenergie** 103.  
 Oberflächenwellen 297, 307.  
*Ohmsches* Gesetz 10, 171, 361.  
 Orthogonalität.  
 — der Eigenschwingungen 320,  
 — der harmonischen Winkelfunktionen 475.

Opaleszenz 256.  
 Optische Aktivität 219.  
 Optische Achsen 208.  
**Pauli, W.** 124.  
 Permeabilität, magnetische 35.  
*Peltierwärme* 104.  
 Piesoelektrizität 117.  
 Phasengeschwindigkeit 226.  
 Platten.  
 — Induktionsströme in — 398.  
 — galvanische Ströme in — 423, 428.  
*Plancksche* Strahlungsdämpfung 157.  
 Polarisation 12.  
 — quasielastische 6, 118.  
 — Orientierungs- 9, 123.  
 — höherer Ordnung 21, 33.  
 — elektrolytische 180.  
 — magnetische 129.  
 Polarisationswärme (latente) 63.  
 Polarisationskoeffizient.  
 — statischer, harmonischer 7.  
 Polarisationsensor 119.  
 Positive Kristalle 212.  
**Quadrupoloszillator** 327.  
 Quasielastische Bindung 5.  
 Quasistatische Vorgänge 96.  
 Quasihomogene Körper 236.  
**Raumladung** 409.  
*Rayleighsche* Formel (für die zerstreute Lichtenergie) 249.  
*Rayleighsches* Beugungsgitter 350.  
 Reflexionskoeffizient 271.  
 Reibungskoeffizient 10.  
 Relaxationszeit 34, 170, 182, 405, 417.  
 Remanente Magnetisierung 101, 139.  
 Resonanzfrequenz 154.  
 — kurve 156.  
 Richtungsschwankungen 253.  
*Richardsonscher* Effekt 409.  
**Sättigung, magnetische** 100.  
 Sättigungsstrom 410.  
 Schärfe der Resonanz 156.  
*Schrödinger, E.* 242.  
 Schwankungen 245.  
 Schwebungen 162, 227.  
 Selbstinduktionskoeffizient 362, 364.  
 Selbstkräfte 50.  
 Skineffekt 312, 369.  
*Sommerfeld, A.*  
 — Theorie der Radiowellen 291.  
 — — der Drahtwellen 306.

Spannungstensor 58.  
 Spektrum 225.  
 Spule (Solenoid) 365.  
 Statische Potentialverteilung 403.  
 Stoßzeit 163.  
 Stoßdämpfung 160.  
 Strahlen.  
 — gewöhnliche und außergewöhnliche — 212.  
 — fläche 210.  
 — geschwindigkeit 205.  
 — optik 242.  
 Strahlungsdämpfung 157.  
 Streudämpfung 247.  
 Streustrahlung 247.  
 Striktionserscheinungen 108, 115.  
 Stromfunktion 400.  
 Stromnetzen 377.  
 Suszeptibilität (elektr., magn.) 32.  
 Suszeptibilitätstensor 93.  
 Symmetriebedingungen (für  $\epsilon$  und  $\mu$ ) 55.

*Tamm, Ig.* 40.  
 Telegraphengleichung 367.  
 Thermoelektronen 411.  
*Thomson, J. J.* 312, 324.  
*Thomson, W.* (Minimalsätze von) 415.  
 Totalreflexion 279.  
 Transformator 375.  
 Trübe Körper 244.

Valenzelektronen 177.  
 Verdampfung von Elektronen 409.  
 Vierdimensionale Form.  
 — der Feldgleichungen 17, 40.  
 — des Energiespannungstensors 86.  
 — der Polarisation höherer Ordnung 25, 44.  
 Vollkommene Spiegelung 287.

**W**ärme, *Joulesche* 56.  
 Wärmekapazität und Magnetisierung 100, 141.  
*Weiss, P.* 137.  
 Wellen.  
 — elementare 223, 244, 291.  
 — stehende 231.  
 — Oberflächen- und Raumwellen 298.  
 Wellengeschwindigkeit (in anisotropen Körpern) 201.  
 Wellengruppen 225.  
 Wellenpakete 233.  
 Wellenoptik 242.  
 Winkelkoordinaten 471.  
 Widerstand.  
 — galvanischer 361.  
 — magnetischer 432.  
 Widerstandskoeffizienten 404.

*Zennek, J.* 309.  
 Zylindrische Leiter 443, 449.  
 Zylindrische Wellen 291.

## Druckfehlerberichtigungen.

S. 41 unten	statt $s_{\alpha\beta}$	lies $s_{k\beta}$
S. 67 1. Zeile	„ (23 a, b, c)	„ (23, 23 a)
S. 69 oben	„ d. h. nach (14)	„ d. h. nach (25)
S. 71 Mitte	„ Ausgangsformel (16)	„ Ausgangsformel (19)
S. 71 Formel (29 b)	„ $d\zeta$	„ $d\mathfrak{B}$
S. 71 2. Zeile von unten	„ (16) und (16 a)	„ (26) und (26 a)
S. 165 unten	„ $N$	„ $n$
S. 167 Anmerkung	„ $kT$	„ $RT$
S. 170 13. Zeile	„ Relationszeit	„ Relaxationszeit
S. 170 21. Zeile	„ Bedeutungen	„ Bedingungen
S. 248 10. Zeile	„ (58 b)	„ (58 c)
S. 281 unten	„ $(E_z^{a+} + E_z^{a-})$	„ $(E_z^{a+} - E_z^{a-})$
S. 295 zwischen F. (23 b) u. (23 c)	„ $\frac{f_b}{\sqrt{l^2 - k_a^2}}$	„ $\frac{f_b}{\sqrt{l^2 - k_b^2}}$
S. 299 1. Zeile	„ $ldl$	„ $l^2 dl$
S. 307 Mitte	„ durch Einsetzen von (34)	„ durch Einsetzen von (35)
S. 310 F. (39)	„ $\varphi^{(h)} = \varphi^{(h)}(r) \dots$	„ $\varphi^{(h)} = \varphi_0^{(h)}(r)$
S. 328 F. (50)	„ $A_1(r)e^{i a z}$	„ $A_1(r)e^{i a z}$
S. 357 12. Zeile	„ $\dots = \frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t}$	„ $\dots = -\frac{1}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t}$
S. 371 unten	„ folglich nach (15)	„ folglich nach (16 a)
S. 373 F. (18)	„ $\frac{\omega^2}{c^2} L_{12}$	„ $\frac{\omega^2}{c^2} L_{12}^2$
S. 481 unten	„ „zugeordnete“ Legendresche Funktion	„ Legendresche Funktion zweiter Art
S. 491 12. Zeile	„ (4 b, c) und (28 b)	„ (4 b, c).