

# Lehrbuch der Technischen Mechanik

Von

**Martin Grübler**

Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden

Dritter Band

**Dynamik starrer Körper**

Mit 77 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1921

# **Lehrbuch** der **Technischen Mechanik**

Von

**Martin Grübler**

*Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden*

**Dritter Band**

**Dynamik starrer Körper**

**Mit 77 Textfiguren**



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1921

ISBN 978-3-662-32233-8  
DOI 10.1007/978-3-662-33060-9

ISBN 978-3-662-33060-9 (eBook)

Alle Rechte,  
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Copyright 1921 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1921

## Vorwort.

Dem vorliegenden III. Bande dieses Lehrbuches ein besonderes Vorwort mitzugeben erübrigt sich eigentlich, da das Erforderliche schon dem I. bzw. II. Bande vorausgeschickt wurde. Doch möchte ich gleichwohl nicht unterlassen, auch hier darauf hinzuweisen, daß es mir bei der Darstellung und Auswahl des Stoffes, den dieser Band bietet, darauf ankam, den Aufbau möglichst einfach und durchsichtig zu gestalten, weil nach meiner Überzeugung, die sich auf eine lange Erfahrung stützt, gerade hierdurch am leichtesten jenes Verständnis der Lehren der Mechanik erworben wird, das zu ihrer sicheren, zweifelsfreien Anwendung auf technische Aufgaben unbedingt gehört. Aus diesem Grunde ist auch auf eine ausführliche Diskussion der Lösungen weniger Gewicht gelegt worden, als auf die Formulierung der Probleme, denn erstere ist der weit weniger schwierige Teil und auch mehr mathematischer Natur, als letzterer. Bezüglich der Auswahl der Anwendungen und Beispiele leitete mich in erster Linie das Interesse, das Verständnis der angewandten Lehrsätze zu fördern und zu vertiefen; das rein Stoffliche mußte dementsprechend zurücktreten. Ferner zog der beabsichtigte Umfang des Bandes in dieser Hinsicht engere Grenzen.

Auch bei diesem Bande hat mich mein Assistent, Herr Dr. H. Alt, durch die Herstellung der Figuren und die Übernahme eines Teiles der Korrekturen zu wärmstem Dank verpflichtet, der Herr Verleger aber durch sein großes Entgegenkommen bezüglich der Beschleunigung des Druckes und der Ausstattung des Buches trotz der vielfachen Schwierigkeiten und der Schwere der Zeit.

Dresden, August 1920.

M. Grübler.

# Inhaltsübersicht.

	Seite
Vorwort . . . . .	III
1. Kapitel. Der Ausgangspunkt der Dynamik . . . . .	1
Die Aufgabe der Dynamik. Definition von Masse und Kraft. Der wissenschaftliche Aufbau der Dynamik. Zurückführung der freien Bewegung eines Massenpunktes auf geradlinige Bewegungen. Die gebundenen Bewegungen materieller Punkte. Übergang zur Dynamik des Massenpunktesystems durch Zurückführung auf die der einzelnen Punkte.	
2. Kapitel. Die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse von Kräften . . . . .	3
Die Differentialgleichung der geradlinigen Bewegung eines Massen- punktes und deren Integration, falls die Kraft sich nur mit dem Orte ändert. Impuls und Antrieb. Beispiele. Abhängigkeit der Kraft auch von der Geschwindigkeit des Punktes. Als Beispiele: Fall im luft erfüllten Raum und gedämpfte Schwingungen.	
3. Kapitel. Die krummlinige Bewegung eines freien materiellen Punktes unter dem Einflusse von Kräften . . . . .	14
Die Änderung der Geschwindigkeit nach Größe und Richtung durch die Kraft. Tangential- und Zentripetalkraft. Die Kraft der projizierten Bewegung eines Punktes. Die Differentialgleichungen der freien Bewegung eines materiellen Punktes in rechtwinkligen Punktkoordinaten. Beispiele. Die Verwendung von Polarkoordi- naten in der Ebene. Impulsmoment und Flächensatz. Die Pla- netenbewegung als Beispiel. Zylinderkoordinaten. Beispiel. Von der Geschwindigkeit abhängige Kräfte. Der schiefe Wurf im luft- erfüllten Raume als Beispiel.	
4. Kapitel. Die Kräftefunktion . . . . .	31
Die Bedingungen für die Existenz einer Kräftefunktion. Kon- servative Kräfte. Niveaufäche und Kraftlinien. Kräftefunktion der Resultierenden konservativer Kräfte. Beispiele.	
5. Kapitel. Die Prinzipie der kinetischen Energie und der Er- haltung der Flächen . . . . .	37
Die kinetische Energie und ihr Zusammenhang mit der Arbeit der Kräfte. Das Prinzip der Erhaltung der kinetischen Energie oder Wucht. Beispiele. Die Gesamtenergie. Die Verwendung des Energieprinzipes bei Kräften, die von der Geschwindigkeit abhängen. Das Prinzip der Erhaltung der Flächen.	

	Seite
6. Kapitel. Die gebundene Bewegung eines Punktes . . . . .	44
<p>Die an starre ruhende Kurven und Flächen gebundene Bewegung materieller Punkte unter dem Einfluß von Kräften. Die gebundene Bewegung auf ebener Kurve. Die Zwangskraft. Das Ablösen des Punktes von der Kurve. Die Differentialgleichungen der gebundenen Bewegung. Das Prinzip der kinetischen Energie. Beispiele. Das Fadenpendel und seine Schwingungsdauer. Bewegung eines schweren Punktes auf der Orthozykloide. Bewegung eines Punktes auf der Raumkurve. Die Zwangskraft und die Differentialgleichungen dieser Bewegung. Beispiel. Die gezwungene Bewegung auf einer Fläche. Die Zwangskraft. Die Differentialgleichungen der Bewegung und ihre Integration. Beispiele. Die an veränderliche Kurven und Flächen gebundene Bewegung und das Energieprinzip. Beispiel.</p>	
7. Kapitel. Die Bewegung der Massenpunktsysteme . . . . .	63
<p>Die beschleunigenden und die inneren Kräfte des Systems. Die Differentialgleichungen der Bewegung materieller Punktsysteme. Die inneren und die Zwangskräfte. Die Bedingungsgleichungen der Bewegung des Systems. Beispiele. Das freie und das starre System. Die Trägheitskräfte. Das Prinzip von D'Alembert. Die Differentialgleichungen der Bewegung des starren Systems. Die Abhängigkeit der Bedingungsgleichungen der Bewegung des Systems von der Zeit. Beispiel.</p>	
8. Kapitel. Das Prinzip der kinetischen Energie für Massenpunktsysteme . . . . .	74
<p>Die kinetische Energie oder Wucht des materiellen Punktsystems und die Arbeit der äußeren Kräfte. Das Prinzip der Erhaltung der kinetischen Energie. Die kinetische Energie des Systems als Summe der kinetischen Energie des Massenmittelpunktes und der der Relativbewegung des Systems um letzteren.</p>	
9. Kapitel. Das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes . . . . .	80
<p>Der Impuls des Massenmittelpunktes. Der Satz von der Bewegung des Massenmittelpunktes für eine Gerade und die aus ihm folgenden Integrale. Beispiele. Die geradlinige gleichförmige Bewegung des Massenmittelpunktes. Beispiele.</p>	
10. Kapitel. Das Prinzip der Erhaltung der Flächen . . . . .	86
<p>Der Flächensatz für eine Gerade. Das resultierende Impulsmoment des Systems. Anwendung auf das starre System. Das Prinzip der Erhaltung der Flächen für eine Gerade. Beispiele und Anwendungen.</p>	
11. Kapitel. Drehung eines starren Körpers um eine ruhende in ihm feste Achse . . . . .	91
<p>Die Differentialgleichung der Drehung und ihre Integrale. Beispiele und Anwendungen. Das physische Pendel. Die Zentrifugalkräfte des Körpers und ihre Wirkungen auf die Drehachse. Freie Achsen.</p>	
12. Kapitel. Freie und gebundene Bewegungen starrer Körper unter dem Einfluß von Kräften . . . . .	103
<p>Zurückführung der freien Bewegung eines starren Körpers auf die Bewegung seines Massenmittelpunktes und die relative Bewegung</p>	

	Seite
des Körpers um ihn. Sonderfälle von Bewegungen starrer Körper. Schiebungen. Beispiele. Drehungen um im Körper veränderliche Achsen. Beispiele und Anwendungen. Das Rollpendel.	
13. Kapitel. Der Kreisel . . . . .	113
Differentialgleichungen der sphärischen Bewegung eines Körpers. Der Drall. Die Eulerschen Differentialgleichungen und Winkel. Der kräftefreie Kreisel. Die Differentialgleichungen für diesen Fall und deren Integrale. Die invariable Ebene und die Polhodie. Der achsensymmetrische Kreisel. Die reguläre Präzession. Das aufrichtende Moment des Kreisels und seine Anwendungen. Die stabilisierende Wirkung des Kreisels.	
14. Kapitel. Dynamik beweglicher Verbindungen starrer Körper	128
Die Zurückführung der Bewegung der Verbindungen von Körpern auf die der einzelnen Körper. Beispiele und Anwendungen.	
15. Kapitel. Theorie des Stoßes . . . . .	139
Die Einteilung der Stoßvorgänge. Der gerade zentrische Stoß. Stoßkraft und Stoßziffer. Die Gleichungen für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Der Stoßverlust. Beispiel. Vollkommen unelastischer Stoß. Anwendungen auf das Rammen und Nieten. Der gerade exzentrische Stoß. Zurückführung seiner Theorie auf die des zentrischen Stoßes durch Einführung der reduzierten Masse. Stoßpunkt. Beispiel. Lage des Stoßpunktes. Der schiefe zentrische Stoß und die Gleichungen für ihn. Der schiefe exzentrische Stoß.	
16. Kapitel. Bewegungen sich ändernder Massen . . . . .	152
Die Änderung des Impulses sich ändernder Massen bei Schiebungen. Der Energieverlust. Die erweiterte Form des Energieprinzipes. Beispiele. Die Änderung des Impulses bei Drehungen von Körpern. Beispiele.	

# Dynamik der starren Körper.

## 1. Kap. Der Ausgangspunkt der Dynamik.

Die Aufgabe der Dynamik ist es, die beschleunigende Wirkung von Kräften auf materielle Punkte und Körper im voraus zu bestimmen. Sie schließt sich daher unmittelbar an die wissenschaftliche Definition der Kraft an, wie sie in den physikalischen Grundlagen der Mechanik im 1. und 2. Kapitel des II. Bandes gegeben wurde, nämlich als Ursache der Beschleunigung, die sie einem materiellen Punkte erteilt. Die wissenschaftlichen Erfahrungen haben gezeigt, daß die in Wirklichkeit wahrnehmbaren Bewegungen materieller Punkte sich in guter Übereinstimmung mit der Gleichung

$$(I) \quad m b = P$$

befinden, in der  $b$  die Beschleunigung des materiellen Punktes gegen den Bezugskörper bezeichnet. Die in ihr auftretende Größe  $m$  ist eine für den materiellen Punkt charakteristische Konstante, die Stoffmenge oder Masse genannt wird und die man zweckmäßig als identisch mit dem Gewicht des Körpers auffaßt, hierbei unter „Gewicht“ eines Körpers das Ergebnis seiner Wägung auf der Hebelwage verstanden. Für die Bewegungen wägbarer Körper kann diese Größe mit einer mehr als ausreichenden Annäherung als absolute Konstante, d. h. als unabhängig von Raum und Zeit angesehen werden. Die dem Produkte aus der Masse eines materiellen Punktes und seiner Beschleunigung nach (I) gleichwertige Größe  $P$  nennen wir Kraft; sie wird als die Ursache der Beschleunigung  $b$  aufgefaßt und daher an die Richtung der letzteren gebunden erachtet. Innerhalb eines bestimmten Raumteiles, des sogenannten Kraftfeldes, ändert sich im allgemeinen die Kraft nach Größe und Richtung mit dem Orte, aber nicht mit der Zeit, wie eine große wissenschaftliche Erfahrung festgestellt hat; auf letzterer beruht auch das Gesetz, nachdem sich die Änderung vollzieht. Diese Gesetze und ihre Gültigkeitsgrenzen werden durch die experimentelle Physik ermittelt und hier als bekannt, sowie durch eine hinreichende Erfahrung gesichert vorausgesetzt.

Das Ziel, das der Dynamik gesetzt ist, wird nun dadurch erreicht, daß man zunächst für die freie Bewegung eines materiellen Punktes, der unter dem Einflusse einer Kraft steht, mittels der grundlegenden Beziehung (I) die Beschleunigung des Punktes nach Größe und Richtung bestimmt. Der Zusammenhang zwischen der Beschleunigung und der Lage des Punktes gegen den gegebenen Bezugskörper der Bewegung, bzw. der Koordinaten des Punktes, wie er in der Bewegungslehre festgestellt wurde, führt dann auf Differentialgleichungen, deren Integration die Koordinaten als Funktionen der Zeit bestimmt und damit zugleich die Bahn und die Geschwindigkeit der Bewegung des Punktes, womit die gestellte Aufgabe gelöst ist. Bei Aufstellung jener Differentialgleichungen stützen wir uns auf den Begriff der projizierten Bewegung des Punktes auf einer Geraden, wie er im 3. Kapitel der Bewegungslehre gegeben wurde, sowie auf den Umstand, daß sich die krummlinige Bewegung eines Punktes auf zwei bzw. drei geradlinige Bewegungen zurückführen läßt. Daraus wird ersichtlich, daß es systematisch richtig ist, zuerst die geradlinigen Bewegungen materieller Punkte unter dem Einfluß von Kräften zu behandeln und darauf die krummlinigen. Die Verschiedenheit der Gesetze, nach denen sich Größe und Richtung der Kräfte ändert, legt es nahe, die verschiedenen Koordinatensysteme zur Ermittlung der Bewegungsvorgänge zu verwenden; hierbei ergeben sich auch begrifflich neue Größen, die für die Diskussion der Bewegungen von Nutzen sind.

An die freien Bewegungen materieller Punkte lassen sich leicht die gebundenen schließen, und zwar durch die Einführung von fiktiven (Zwangs-) Kräften, mittels deren die gebundenen Bewegungen auf frei zurückgeführt werden können. Andererseits erweisen sich die Zwangskräfte als außerordentlich gut geeignet, den Übergang von der Dynamik des einzelnen Massenpunktes zu der der Massensysteme zu ermitteln und damit zur Dynamik starrer Körper. Dieser hier kurz angedeutete Weg ist in den folgenden Darlegungen eingeschlagen worden, um das Lehrgebäude der Dynamik aufzubauen, freilich mit der Beschränkung auf die ältere einfachere Theorie Newtons. Denn wir führen die Masse als absolute Konstante ein, d. h. als unabhängig von Raum und Zeit, während sie begrifflich ebenso an den Bezugskörper gebunden ist, wie die Bewegung selbst und demgemäß auch die Kraft und das Kraftfeld; sie hat also nur eine relative Bedeutung derselben Art, wie Raum, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung usf. Die Berücksichtigung dieses Umstandes bei der Grundlegung der Mechanik führt aber mit Notwendigkeit zur allgemeinen Relativitätstheorie, deren Aufnahme den Rahmen dieses Lehrbuches weit überschritten hätte und daher ausgeschlossen werden mußte.

## 2. Kap. Die geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse von Kräften.

Ein Punkt  $A$  bewege sich auf der Geraden  $a$  (s. Fig. 1); der Bezugspunkt der Bewegung sei  $O$ , die augenblickliche Entfernung  $\overline{OA} = x$  auf der positiven Seite der Geraden und die augenblickliche

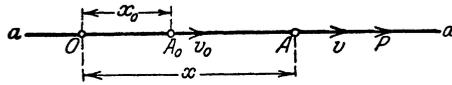


Fig. 1.

Geschwindigkeit  $v = \frac{dx}{dt}$ . Dann ist die Beschleunigung von  $A$  in dieser Lage  $b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ , und, wenn  $m$  die Masse des Punktes bezeichnet, die Kraft, die dem Punkte diese Beschleunigung erteilt,

$$(1) \quad P = m \cdot b = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Diese Grundgleichung kann in doppelter Weise Verwendung finden. Ist nämlich die Bewegung gegeben, also  $x = f(t)$  bekannt, so erhält man  $b = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$  als eine Funktion von  $t$  und durch Elimination von  $t$  als eine solche von  $x$ ; es wird sonach damit

$$P = m\psi(x)$$

gefunden, wenn  $b = \psi(x)$  sich ergab.

Beispiel:

Es sei  $x = c \cdot \ln(\sin kt)$ , worin  $c$  und  $k$  Konstanten bedeuten. Dann erhält man  $v = \frac{dx}{dt} = kc \cdot \cot(kt)$ ,  $b = \frac{dv}{dt} = -\frac{k^2c}{\sin^2(kt)}$ , ferner nach Elimination der Zeit aus diesem Ausdruck und dem für  $x$

$$P = mb = -mk^2c : e^{\frac{2x}{c}}.$$

Nach diesem Gesetz würde sich in diesem Falle die Kraft abhängig vom Orte ändern müssen, wenn die gegebene Bewegung auf der Geraden zustande kommen soll.

Der umgekehrte Fall ist der weitaus häufigere, nämlich die Bewegung zu finden, wenn das Gesetz gegeben ist, nach dem sich die Kraft ändert.

Es sei  $P = m \cdot \varphi(x)$ , dann ergibt sich zwischen  $x$  und  $t$  eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Gestalt

$$(2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi(x),$$

deren Integration die Aufgabe löst. Um die Integration ausführen zu können, benutzen wir zunächst, daß auch

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

geschrieben werden kann; hiermit geht (2) über in

$$v dv = \varphi(x) dx$$

und die Integration führt auf die Beziehung

$$\int v dv = \int \varphi(x) dx + \text{Const},$$

wenn die Integrale unbestimmt sind. Setzen wir zur Abkürzung  $\int \varphi(x) dx = \Phi(x)$ , so wird aus dieser Gleichung

$$\frac{v^2}{2} = \Phi(x) + \text{Const},$$

in der die Integrationskonstante noch unbestimmt ist. Sie erhält aber einen bestimmten Wert, wenn die Geschwindigkeit in einer gegebenen Lage des bewegten Punktes eine vorgeschriebene ist, so z. B. in der Anfangslage  $A_0$  der Bewegung. Bezeichnet  $v_0$  diese Geschwindigkeit, die Anfangsgeschwindigkeit heißt, so muß auch für die Anfangslage  $A_0$ , d. i. für  $\overline{OA_0} = x_0$  die vorstehende Gleichung gelten, also

$$\frac{v_0^2}{2} = \Phi(x_0) + \text{Const}$$

sein. Hierdurch wird die Const bestimmt und man erhält nach ihrer Elimination

$$(3) \quad \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \Phi(x) - \Phi(x_0),$$

woraus sich

$$(3a) \quad v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2\{\Phi(x) - \Phi(x_0)\}}$$

findet. Das Vorzeichen der Wurzel wird durch die Richtung von  $v_0$  festgelegt. Je nachdem  $v_0$  den gleichen, oder den entgegengesetzten Sinn hat, wie die positive Richtung der Geraden  $a$ , ist das positive oder das negative Vorzeichen zu nehmen. Geht  $v$  durch Null, so ändert die Wurzel ihr Vorzeichen.

Aus der Formel (3a) erhält man unter Benutzung des Ausdrucks für  $v = \frac{dx}{dt}$  die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + 2\{\Phi(x) - \Phi(x_0)\}},$$

aus der durch Integration

$$t = \int dx = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\{\Phi(x) - \Phi(x_0)\}}} + c$$

hervorgeht; hierin ist  $c$  die Integrationskonstante, die durch eine Lage des Punktes  $A$  zu gegebener Zeit bestimmt wird. Es sei z. B. die Anfangslage  $A_0$  zur Zeit  $t_0$  gegeben, dann wird, wenn zur Abkürzung das unbestimmte Integral

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\{\Phi(x) - \Phi(x_0)\}}} = \Psi(x)$$

gesetzt wird,

$$t_0 = \Psi(x_0) + c.$$

Den hierdurch bestimmten Wert für  $c$  in den Ausdruck für  $t$  eingeführt, liefert

$$4) \quad t = t_0 + \Psi(x) - \Psi(x_0);$$

durch Auflösung dieser Gleichung nach  $x$  erhält man

$$(4a) \quad x = f(t),$$

womit die Bewegung des Punktes völlig bestimmt ist. Alle Einzelheiten der Bewegung finden wir dann aus (3a) und (4a) auf Grund der Ergebnisse der Bewegungslehre, und zwar anschaulich mittels der Schaubilder, die bezüglich der Ortsänderungen das Wege-Zeit-Schaubild, bezüglich der Änderungen der Geschwindigkeit das Geschwindigkeits-Zeit-Schaubild und das Geschwindigkeits-Wege-Schaubild genannt und im 2. Kapitel des 1. Bandes behandelt wurden.

Aus der Differentialgleichung (1) in der Gestalt

$$m \frac{dv}{dt} = P$$

folgt mit Rücksicht darauf, daß  $m$  eine von der Zeit unabhängige Größe ist,

$$(5) \quad d(mv) = P \cdot dt.$$

Die Größe  $mv$  nennt man Bewegungsgröße oder Impuls des Punktes, während  $P \cdot dt$  der Elementarantrieb genannt wird. Zufolge vorstehender Gleichung ist folglich die Änderung des Impulses gleich dem Elementarantrieb der wirkenden Kraft.

Durch Integration von (5) zwischen den Grenzen  $t_0$  und  $t$  folgt

$$(5a) \quad mv - mv_0 = \int_{t_0}^t P \cdot dt.$$

Der Ausdruck rechts wird der Antrieb der Kraft genannt. Die Gleichung (5a) drückt den Satz aus: Der Impuls eines materiellen Punktes ändert sich bei einer geradlinigen Bewegung in der Zeit  $t - t_0$  um den Antrieb der Kraft.

Für die Ermittlung der Bewegung hat der letztere Satz keinerlei Bedeutung, da sich der Antrieb als Funktion der Zeit nicht bestimmen läßt. Wohl aber kann man mittels desselben die konstante Kraft  $P$  finden, die die Geschwindigkeitsänderung  $v - v_0$  eines materiellen Punktes von der Masse  $m$  in der Zeit  $t - t_0$  bewirkt; sie ist

$$P = m \frac{v - v_0}{t - t_0}.$$

An sich enthält vorstehende Formel nichts Neues, denn wenn die Kraft  $P$  eine Konstante ist, so wird auch die Beschleunigung

$$b = \frac{P}{m}$$

konstant, und die Bewegung des Punktes eine gleichmäßig beschleunigte bzw. gleichmäßig verzögerte, und für diese fanden wir (Bd. I, S. 17) die Beziehung

$$b = \frac{v - v_0}{t - t_0}.$$

Beispiele:

1. Unterliegt ein materieller Punkt nur seiner Schwere  $L = m \cdot g$  als einwirkender Kraft, so erhält er durch sie als Beschleunigung  $b$  die des freien Falles im luftleeren Raum, nämlich  $b = g$ , falls das Bewegungsgebiet nicht sehr groß ist. Die entsprechenden Bewegungen des vertikalen Wurfes nach abwärts und aufwärts wurden schon Bd. I, S. 19 und 20 behandelt; auf sie mag hier verwiesen werden.

2. Es sei  $P = m \cdot k \cdot x$  und zwar nach dem Bezugspunkte  $O$  hingerrichtet, dann wird

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -P = -m k x.$$

Die hieraus folgende Differentialgleichung, in der  $k = c^2$  gesetzt werden mag, so daß

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c^2 x$$

wird, hat bekanntlich als allgemeines Integral

$$x = A \cos(ct) + B \sin(ct),$$

in dem  $A$  und  $B$  die beiden Integrationskonstanten bezeichnen. Als Geschwindigkeit der Bewegung findet man hieraus

$$v = \frac{dx}{dt} = -c[A \sin(ct) - B \cos(ct)].$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  folgen aus der Festsetzung einer bestimmten Geschwindigkeit  $v_0$  und Lage  $x_0$  zu einer gewählten Zeit  $t_0$ , etwa der Anfangszeit der Bewegung, und zwar sei  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = a$ ,  $v_0 = 0$ . Es wird dann

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos(ct_0) + B \sin(ct_0) = A, \\ v_0 &= -c[A \sin(ct_0) - B \cos(ct_0)] = +Bc = 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(ct), \\ v &= -cx_0 \sin(ct). \end{aligned}$$

Die Bewegung, die der Punkt  $A$  ausführt, wenn er sie in  $A_0$  aus der Ruhelage, d. i. ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnt, ist sonach eine sogenannte harmonische Schwingung, die Bd. I, S. 23 und 24 schon behandelt wurde.

Eine Bewegung dieser Art wird durch einen Körper vollzogen, der unter dem Einfluß einer Schraubenfeder steht, falls die Spannkraft dieser Feder ihrer Längenänderung proportional ist. Wenn z. B. ein schwerer Körper auf eine Federwage mit lotrechter Achse gebracht wird, so unterliegt er außer seiner Schwere  $L$  (s. Fig. 2) noch der Einwirkung der Federspannkraft  $S$ , welche erfahrungsgemäß innerhalb gewisser Grenzen der Änderung  $\overline{M_0 M} = u$  der Federlänge  $l$  durch die Belastung  $L$  proportional ist; es kann also  $S = \alpha \cdot u$  gesetzt werden. Die Kraft, welche den Körper (den wir als materiellen Punkt auffassen) beschleunigt, ist sonach die Resultierende aus  $L = mg$  und  $S = \alpha \cdot u$  und es wird folglich die Differentialgleichung der eintretenden Bewegung

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = P = mg - \alpha u.$$

Die Kraft geht durch Null, wenn  $u = u_m = \frac{mg}{\alpha}$ ; dieser Lage von  $M$  entspricht das Gleichgewicht an der Federwage. Führen wir an Stelle von  $u$  die Veränderliche  $x = u - u_m$  ein, so geht vorstehende Differentialgleichung in

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c^2 \cdot x$$

über, falls  $\frac{\alpha}{m} = c^2$  eingesetzt wird. Daraus ersieht man, daß der Körper eine harmonische Schwingung um die Gleichgewichtslage ausführt, falls keine hemmenden Widerstände, wie z. B. die der inneren Reibung der Feder, der Luft u. a. vorhanden wären.

Anders wird die Bewegung trotz der gleichen Differentialgleichung, wenn sie durch Reibungskräfte zwischen festen Körpern gehemmt wird, wie in dem durch Fig. 3 anschaulich gemachten Falle. Ein schwerer Körper bewege sich auf horizontaler Ebene durch die Einwirkung einer Federspannkraft  $S$ , die



Fig. 2.

der Längenänderung  $\overline{M_1 M} = \lambda$  der Feder proportional ist, der aber durch die Reibungskraft  $W = \mu \cdot L$  in der Berührungsfläche gehemmt wird; hierin ist  $L$  die Last des Körpers und  $\mu$  die Reibungsziffer. Vollzieht der Körper eine Schiebung, so bewegt er sich wie ein materieller Punkt von der Masse  $m$  des Körpers, die wir im Massenmittelpunkt  $M$  und in letzterem auch die beiden Kräfte  $S$  und  $W$  angreifend denken. Die beschleunigende Kraft dieses Punktes ist dann  $P = S - W$  und die entsprechende Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = P = \alpha \cdot \lambda - \mu \cdot L,$$

falls  $u = \overline{M_0 M}$  die Entfernung des Punktes  $M$  von seiner Anfangslage  $M_0$  und  $\alpha$  die Konstante in der Beziehung  $S = \alpha \cdot \lambda$  bezeichnet. Da  $P = 0$  wird für  $\lambda = \lambda_1 = \frac{\mu}{\alpha} \cdot L = \overline{M M_1}$  (s. Fig. 3 a, in der  $\gamma$  die Schaulinie ist, die das Änderungsgesetz von  $S$  und  $P = S - W$  darstellt), so wird, wenn wir als neue

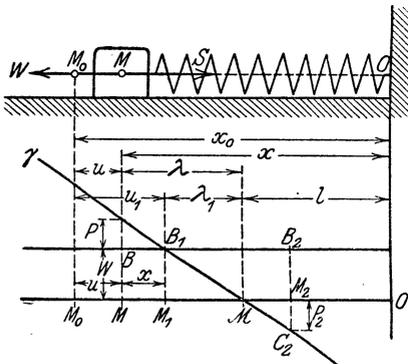


Fig. 3 a.

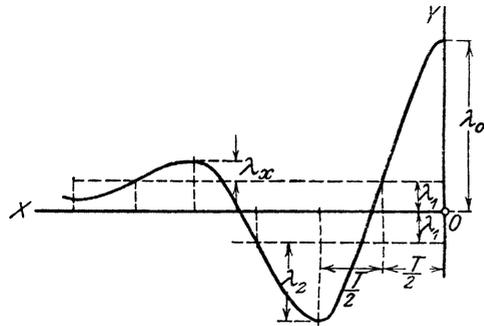


Fig. 3 b.

Veränderliche  $\overline{M_1 M} = x = \overline{M M} - \overline{M M_1} = u_1 - u$ , und folglich  $\lambda = x + \lambda_1$  einführen,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -c^2 \cdot x;$$

hierin ist  $c^2 = \frac{\alpha}{m}$  zu setzen. Die Bewegung wird sonach eine harmonische

Schwingung bis  $M_2$  um  $M_1$  als Mittelpunkt, falls  $\overline{M_1 M_2} = \overline{M_1 M_0}$ . Dann aber tritt eine Unstetigkeit ein infolge des Umstandes, daß bei der Umkehr der Bewegung in  $M_2$  die Reibungskraft  $W$  die entgegengesetzte Richtung annimmt und nun derselbe Bewegungsvorgang sich wiederholt mit  $M_2$  als Anfangslage des Punktes  $M$ , jedoch mit kleinerer Spannkraft  $S_2$  der Feder, die sich zu  $S_2 = \alpha \lambda_2 = \alpha (\lambda_0 - 2 \lambda_1) < S_0$  ergibt. Dementsprechend wird auch die Schwingungsweite kleiner, denn die Schwingung erfolgt nunmehr um  $M_3$  als Mittelpunkt, wobei  $\overline{M_3 M_2} = x_2 - 2 \lambda_1 = \lambda_0 - 3 \lambda_1 = \lambda_0 - 3 \frac{\mu}{\alpha} \cdot L$ ; hierin ist  $\lambda_0$  die ursprüngliche Dehnung der Feder. So setzt sich der Vorgang, dessen Wegezeit-Schaubild Fig. 3 b veranschaulicht, fort, bis die Federspannkraft  $S$  kleiner

als  $W$  geworden ist. Die Schwingungsdauer ist aber für alle Schwingungen die gleiche, nämlich  $T = \frac{2\pi}{c} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\alpha} \cdot g}$ , wie aus  $x = x_0 \cos(ct)$  hervorgeht.

3. Die Kraft, nach der der freie Fall im luftleeren Raume bei großen Fallhöhen vor sich geht, ist die Massenanziehung nach dem Newtonschen Gesetz. Bedeutet  $M$  die Erdmasse, die wir uns im Erdmittelpunkt  $E$  (s. Fig. 4) verdichtet denken, und  $A_0$  die Ausgangslage des bewegten Massenpunktes, so erfolgt die Bewegung in der Geraden  $EA_0$ , wenn die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 0$  angenommen wird. Legen wir den Bezugspunkt der Bewegung nach  $E$ , und bezeichnet  $A$  die Lage des materiellen Punktes zur Zeit  $t$ , dann geht die Differentialgleichung (1) hier über in

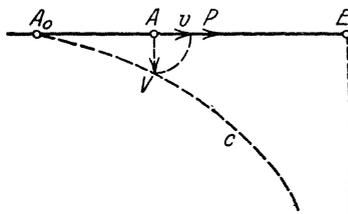


Fig. 4.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -P = -\kappa \frac{Mm}{x^2},$$

in der  $\overline{EA} = x$  gesetzt wurde und  $\kappa$  die Gravitationskonstante bezeichnet. Das negative Vorzeichen folgt aus dem Umstande, daß  $P$  nach  $E$  hin gerichtet, also der positiven Seite der Geraden entgegengesetzt ist. Da sich hier  $\varphi(x) = -\frac{\kappa M}{x^2}$  findet, so erhalten wir

$$\Phi(x) = \int \varphi(x) dx = -\kappa M \int \frac{dx}{x^2} = \frac{\kappa M}{x},$$

und damit nach (3 a), falls  $\overline{EA_0} = x_0$  gesetzt wird,

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2\kappa M \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)} = -\sqrt{2\kappa M \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)}.$$

Die Wurzel ist mit dem negativen Vorzeichen zu nehmen, weil sich der bewegte Punkt  $A$  notwendig  $E$  nähern muß. Die Änderung der Geschwindigkeit mit dem Ort wird durch die Schaulinie  $c$  im Geschwindigkeits-Wege-Schaubild (s. Bd. I, S. 22) dargestellt; diese ist hier eine Kurve 3. Ordnung und hat einen Verlauf, wie ihn Fig. 2 zeigt. Im Punkte  $E$  wird die Geschwindigkeit unendlich groß.

Weiter erhält man hier

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= -\int \frac{dx}{\sqrt{2\kappa M \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)}} = -\sqrt{\frac{x_0}{2\kappa M}} \int \frac{x dx}{\sqrt{x(x_0 - x)}} \\ &= \sqrt{\frac{x_0}{2\kappa M}} \left[ \sqrt{x(x_0 - x)} - \frac{x_0}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x(x_0 - x)}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{x_0}{2\kappa M}} \left[ \sqrt{x(x_0 - x)} - \frac{x_0}{2} \arcsin \frac{2x - x_0}{x_0} \right] \end{aligned}$$

und damit nach (4), weil  $t_0 = 0$  sein sollte,

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt{\frac{x_0}{2 \kappa M}} \left[ \sqrt{x(x_0 - x)} - \frac{x_0}{2} \left( \arcsin \frac{2x - x_0}{x_0} - \arcsin(+1) \right) \right] \\
 &= \sqrt{\frac{x_0}{2 \kappa M}} \left[ \sqrt{x(x_0 - x)} + \frac{1}{2} x_0 \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2x - x_0}{x_0} \right\} \right].
 \end{aligned}$$

Hieraus findet man u. a. die Zeit  $t_m$ , in der  $A$  von  $A_0$  nach  $E$  gelangt, zu

$$t_m = \frac{\pi x_0}{2} \sqrt{\frac{x_0}{2 \kappa M}}.$$

In manchen Fällen nötigt die Erfahrung, insbesondere an Bewegungen von Körpern in Flüssigkeiten, Kräfte einzuführen, die auch von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers abhängen, für die man also als Kraftänderungsgesetz

$$P = m \varphi(x, v)$$

annimmt. In solchem Falle tritt an die Stelle der Differentialgleichung (2) die folgende

$$(6) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi(x, v) = \varphi\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

deren Integration durch bekannte Funktionen im allgemeinen nicht möglich ist, sondern nur, wenn die mit ihr übereinstimmende Differentialgleichung 1. Ordnung

$$(6a) \quad \frac{v dv}{dx} = \varphi(x, v)$$

in geschlossener Form integriert werden kann. In folgenden beiden Beispielen trifft diese Voraussetzung zu.

Beispiele:

1. Freier Fall im luftgefüllten Raume. Fällt ein schwerer Körper in der Luft frei herab, so wird seine Bewegung außer durch, seine Schwere auch durch den Widerstand der Luft beeinflusst; letzterer erweist sich innerhalb gewisser Grenzen proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit  $v$ . Wir setzen daher die Widerstandskraft der Luft

$$W = k \cdot v^2,$$

worin  $k$  eine Versuchskonstante bezeichnet, die wir aus Zweckmäßigkeitsgründen durch  $\frac{m \cdot g}{\beta^2}$  ersetzen; hierin sei  $m$  die Masse des

Körpers,  $g$  die Beschleunigung der Erdschwere und  $\beta$  eine Konstante, deren Bedeutung später festgestellt werden soll. Da die Kraft  $W$  die Fallbewegung hemmt, also aufwärts gerichtet ist, so wird hier (s. Fig. 5)

$$P = m \cdot g - W = m g \left(1 - \frac{v^2}{\beta^2}\right)$$

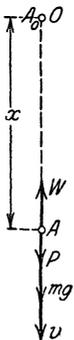


Fig. 5. und die obige Differentialgleichung nimmt die Formen

$$b = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{\beta^2}\right)$$

an, die beide unmittelbar integrierbar sind.

Aus

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{\beta^2} (\beta^2 - v^2)$$

findet sich sofort

$$\begin{aligned} t &= \int dt = \frac{\beta^2}{g} \int \frac{dv}{\beta^2 - v^2} + \text{Const} \\ &= \frac{\beta}{2g} \ln \left( \frac{\beta + v}{\beta - v} \right) + \text{Const}. \end{aligned}$$

Messen wir die Fallzeit  $t$  vom Beginn der Bewegung ab, setzen also  $t_0 = 0$  und beachten, daß beim freien Fall die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 0$  ist, so erhalten wir aus vorstehender Gleichung

$$t_0 = \frac{\beta}{2g} \ln \left( \frac{\beta + v_0}{\beta - v_0} \right) + \text{Const} = \frac{\beta}{2g} \ln(1) + \text{Const} = 0,$$

und somit  $\text{Const} = 0$ ; es folgt demnach

$$t = \frac{\beta}{2g} \ln \left( \frac{\beta + v}{\beta - v} \right) = \text{Ar} \text{Th} \left( \frac{v}{\beta} \right)$$

und umgekehrt

$$v = \beta \cdot \frac{e^{\frac{2gt}{\beta}} - 1}{e^{\frac{2gt}{\beta}} + 1} = \beta \cdot \frac{e^{\frac{gt}{\beta}} - e^{-\frac{gt}{\beta}}}{e^{\frac{gt}{\beta}} + e^{-\frac{gt}{\beta}}} = \beta \text{Th} \left( \frac{gt}{\beta} \right).$$

Wie der Ausdruck für  $t$  ersichtlich macht, wird  $t = \infty$  für  $v = \beta$ ; es bleibt folglich stets  $v < \beta$ , oder anders gesprochen, es nähert sich im Laufe der Bewegung  $v$  der Geschwindigkeit  $\beta$ , ohne sie jedoch zu erreichen.

Aus der anderen Form

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{g}{\beta^2} (\beta^2 - v^2)$$

der Differentialgleichung dieser Bewegung findet sich durch Integration

$$x = \int dx = \frac{\beta^2}{g} \int \frac{v dv}{\beta^2 - v^2} + C_1 = -\frac{1}{2} \ln(\beta^2 - v^2) + C_1.$$

Die Konstante  $C_1$  bestimmt sich aus der Bedingung, daß in der Anfangslage  $A_0$  der Bezugspunkt  $O$  liegen soll, also  $x_0 = 0$  gegeben ist, und die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 0$  festgesetzt wurde; wir erhalten sonach für  $C_1$  die Gleichung

$$x_0 = -\frac{1}{2} \ln(\beta^2 - v_0^2) + C_1,$$

also mit  $x_0 = 0$  und  $v_0 = 0$

$$C_1 = \frac{1}{2} \ln(\beta^2).$$

Damit aber ergibt sich

$$x = \frac{\beta^2}{2g} \ln \left( \frac{\beta^2}{\beta^2 - v^2} \right),$$

und hieraus

$$v = \beta \sqrt{1 - e^{-\frac{2gx}{\beta^2}}}$$

also die Beziehung, nach der sich die Geschwindigkeit mit dem Orte ändert.

Eliminiert man aus den beiden Ansdrücken für  $x$  und  $t$  die Geschwindigkeit  $v$ , so erhält man die Falltiefe  $x$  abhängig von der Fallzeit  $t$  in der Form

$$x = \frac{\beta^2}{g} \ln \left( \frac{e^{\frac{gt}{\beta}} + e^{-\frac{gt}{\beta}}}{2} \right) = \frac{\beta^2}{g} \ln \left( \cosh \left( \frac{gt}{\beta} \right) \right).$$

Um ein Zahlenbeispiel anführen zu können, benutzen wir zur Ermittlung von  $\beta$  die Formel

$$\beta = 541,6 \sqrt{R} \text{ ms}^{-1},$$

die sich auf eine Eisenkugel vom Radius  $R$  (in m) und mittelfeuchte Luft bezieht. Es sei  $R = 0,04$  m, dann wird  $\beta = 108,32 \text{ ms}^{-1}$  und damit für  $t = 10$  s die Falltiefe  $x = 435,3$  m und die Geschwindigkeit an dieser Stelle  $v = 97,8 \text{ ms}^{-1}$ . Im luftleeren Raume würden beide Werte größer sein müssen, und zwar wird für  $t = 10$  s  $x = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 10^2 \text{ m} = 490,5 \text{ m}$  und  $v = g \cdot t = 9,81 \cdot 10 \text{ ms}^{-1} = 98,1 \text{ ms}^{-1}$ .

2. Gedämpfte Schwingungen. Unterliegt ein materieller Punkt einer der Entfernung  $x$  vom Bezugspunkte proportionalen Kraft  $\varphi = m k x$ , wie in dem Beispiel 2 (S. 4) und außerdem einer der Geschwindigkeit  $v$  proportionalen



Fig. 6.

Widerstandskraft  $W = m k \cdot v$ , die  $v$  entgegengesetzt gerichtet ist (s. Fig. 6), wie z. B. bei den Schwingungen einer Magnetnadel in der Nähe von Kupfermassen, dann ist die beschleunigende Kraft  $P = -(S + W)$  und die Differentialgleichung der eintretenden Bewegung wird

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \left( m k x + m h \frac{dx}{dt} \right),$$

für die auch

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + c^2 x + h \frac{dx}{dt} = 0$$

gesetzt werden kann, falls  $k$  durch  $c^2$  ersetzt wird. Das allgemeine Integral hat die Form

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t};$$

hierin sind  $A$  und  $B$  die Integrationskonstanten und  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  zwei Konstanten, die sich aus der Gleichung ergeben, die aus der Differentialgleichung durch Einführung des Ausdruckes für  $x$  hervorgeht. Sie wird

$$A \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + B \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + h (A \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B \lambda_2 e^{\lambda_2 t}) + c^2 (A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}) = 0$$

und läßt sich auf die Form

$$A e^{\lambda_1 t} (\lambda_1^2 + h \lambda_1 + c^2) + B e^{\lambda_2 t} (\lambda_2^2 + h \lambda_2 + c^2) = 0$$

bringen. Diese muß für alle möglichen Werte von  $t$  bestehen, woraus hervorgeht, daß  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + h\lambda + c^2 = 0$$

sein müssen, also  $\lambda_1 = -\frac{h}{2} + r$ ,  $\lambda_2 = -\frac{h}{2} - r$ , falls  $\sqrt{\frac{h^2}{4} - c^2} = r$  gesetzt wird. Ferner erhält man

$$v = \frac{dx}{dt} = A \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B \lambda_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Beginnt die Bewegung in  $A_0$  ohne Anfangsgeschwindigkeit, d. h. ist für  $t = t_0 = 0$   $\overline{OA} = \overline{OA_0} = x_0$  und  $v_0 = 0$ , so findet man leicht hieraus  $A(\lambda_2 - \lambda_1) = x_0 \lambda_2$  und  $B(\lambda_2 - \lambda_1) = -x_0 \lambda_1$  und damit schließlich

$$x = \frac{x_0 e^{-\frac{h}{2}t}}{2r} \left[ \left( \frac{h}{2} + r \right) e^{rt} - \left( \frac{h}{2} - r \right) e^{-rt} \right],$$

$$v = \frac{x_0 c^2 e^{-\frac{h}{2}t}}{2r} \left[ e^{rt} - e^{-rt} \right].$$

Ist die Wurzel  $r = \sqrt{\frac{h^2}{4} - c^2}$  reell, also  $\frac{h}{2} > c$ , so bewegt sich der Punkt von

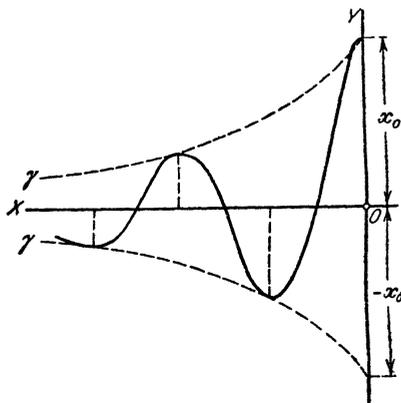


Fig. 6 a.

$A_0$  bis  $O$  ohne Änderung seiner Bewegungsrichtung. Er erreicht  $O$  erst für  $t = \infty$  und hat ein Maximum von  $v$  zur Zeit  $t_m = \frac{1}{2r} \ln \left( \frac{h+2r}{h-2r} \right)$  an der Stelle  $x_m = \frac{x_0 h}{2c} e^{-\frac{h}{2}t_m}$  von der Größe  $v_m = \frac{x_0}{c} (h+2r) e^{-\frac{h}{2}t_m}$ .

Wenn dagegen  $r$  imaginär wird, so setzen wir zweckmäßig

$$r = i \sqrt{c^2 - \frac{h^2}{4}} = i \cdot \rho$$

und erhalten dann unter Benutzung der bekannten Formeln

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z, \quad e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$

aus den für  $x$  und  $v$  gefundenen Ausdrücken

$$x = x_0 e^{-\frac{h}{2} t} \cdot \left[ \frac{h}{2\varrho} \sin(\varrho t) + \cos(\varrho t) \right], \quad v = -\frac{x_0 c^2}{\varrho} \cdot e^{-\frac{h}{2} t} \sin(\varrho t).$$

Die Bewegung ist demnach eine Schwingung um  $O$  als Mittelpunkt mit der unveränderlichen Schwingungsdauer  $T = \frac{2\pi}{\varrho} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2 - \frac{h^2}{4}}}$ , jedoch mit ab-

nehmenden Schwingungsweiten, die durch zwei logarithmische Kurven  $\gamma$  begrenzt werden, wie dies das Wegezeitschaubild Fig. 6a, S. 11, darstellt.

### 3. Kap. Die krummlinige Bewegung eines freien materiellen Punktes unter dem Einflusse von Kräften.

Wie im 2. Kapitel des 2. Bandes (Statik, S. 7) weiter ausgeführt wurde, nannten wir Kraft die Ursache der Beschleunigung, die ein freier materieller Punkt gegenüber einem Bezugskörper besitzt, und das Gebiet, auf das sich diese Kraftwirkung erstreckt, das Kraftfeld. Bewegt sich ein Punkt, dessen Masse  $m$  ist, in einem Kraftfeld, so unterliegt er an allen Stellen der Einwirkung einer nach Größe und Richtung eindeutig bestimmten Kraft  $P = m \cdot b$ , falls  $b$  die Beschleunigung der Bewegung des Punktes bezeichnet, d. h. seine Geschwindigkeit wird nach Größe und Richtung durch die Kraft geändert, und zwar gemäß der Beschleunigung  $b$ , deren Größe  $= P : m$  und deren Richtung die von  $P$  ist.

Das Beispiel des sog. schiefen Wurfes an der Erdoberfläche mag das Gesagte erläutern. Werfen wir einen schweren Körper, z. B.

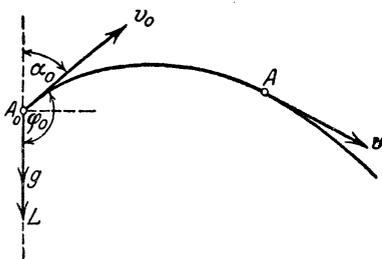


Fig. 7.

einen Stein in beliebiger Richtung (s. Fig. 7), so erteilen wir ihm durch die Muskelkräfte unseres Körpers gegen die Erde als Bezugskörper der Bewegung eine nach Größe und Richtung bestimmte Geschwindigkeit ( $v_0$ ), und zwar ist es die, die die werfende Hand in dem Augenblicke besitzt, wo sie sich öffnet, also den Stein entläßt. Von diesem Augenblicke an unterliegt der geworfene

Stein der beschleunigenden Wirkung seiner Schwere  $L = m \cdot g$ , d. h. letztere erteilt ihm die bekannte Beschleunigung  $g$  des freien Falles, und dieser entspricht eine Änderung der Größe und Richtung sowohl der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  der Bewegung, wie aller folgenden Ge-

schwindigkeiten. Das Änderungsgesetz der Geschwindigkeit wird am besten zur Anschauung gebracht durch den „Hodograph“ genannten Geschwindigkeitsplan (s. Fig. 7a), in dem die Endpunkte  $H$  der Geschwindigkeitsvektoren  $v$  auf einer lotrechten Geraden durch  $H_0$  liegen (vgl. Bd. I, S. 41).

Die Änderung der Größe und der Richtung der Geschwindigkeit durch die Krafteinwirkung ersieht man am besten aus den beiden Komponenten der Beschleunigung in Richtung der Bahntangente und -normale, welche aus dem Parallelogramm der Be-

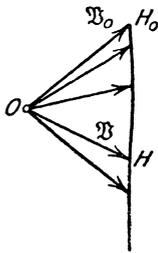


Fig. 7a.

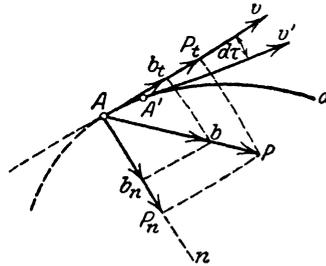


Fig. 8.

schleunigungen hervorgehen (s. Fig. 8). Bezeichnen wir diese, wie früher, mit  $b_t$  und  $b_n$ , so wird  $b_t = b \cos \varphi$ ,  $b_n = b \sin \varphi$  und hierin war die Tangentialbeschleunigung  $b_t = \frac{dv}{dt}$  und die Normal- oder Zentri-

fugalbeschleunigung  $b_n = v \frac{d\tau}{dt}$ , falls  $d\tau$  den Schmiegunswinkel der Kurve, d. h. den zwischen zwei unendlich benachbarten Tangenten bezeichnet. Folglich wird die Änderung  $dv$  der Größe der Geschwindigkeit in dem Zeitelement  $dt$

$$dv = b_t \cdot dt = b \cos \varphi \cdot dt = \frac{P \cdot \cos \varphi}{m} \cdot dt = \frac{P_t}{m} \cdot dt$$

und die Änderung  $d\tau$  ihrer Richtung in der gleichen Zeit

$$d\tau = \frac{b_n}{v} \cdot dt = \frac{b \sin \varphi}{v} \cdot dt = \frac{P \sin \varphi}{m v} \cdot dt = \frac{P_n}{m v} \cdot dt;$$

hierin wird  $P_t = P \cos \varphi$  die Tangentialkraft und  $P_n = P \sin \varphi$  die Zentripetalkraft der Bewegung genannt. Erstere bewirkt die Größen-, letztere die Richtungsänderung der Geschwindigkeit. Hierbei ist zu beachten, daß durch die beiden Geraden, in denen  $v$  bzw.  $P$  liegen, die Schmiegunsebene (in der der Krümmungskreis der Bahn im Punkte  $A$  liegt) der Bahnkurve in  $A$  bestimmt wird; in ihr be-

findet sich auch die Geschwindigkeit  $v'$  des Punktes  $A'$ , der sich um  $\overline{AA'} = v \cdot dt$  von  $A$  entfernt befindet. Schneidet nun die Wirkungslinie von  $P'$  die von  $P$ , oder liegt ihr parallel, so fällt die Schmiegeebene in  $A'$  mit der in  $A$  zusammen, und wenn das dauernd stattfindet, so wird die Bahn eine ebene Kurve. Das tritt ein, wenn z. B. die Wirkungslinien der Kräfte sich in einem Punkte schneiden, oder parallel sind. Kreuzen sich dagegen die aufeinanderfolgenden Wirkungslinien, dann fallen die aufeinanderfolgenden Schmiegeebenen nicht zusammen und die Bahn wird eine Raumkurve.

Ist der Winkel  $\varphi = 0$  oder  $= \pi$ , so wird  $P_n = 0$ ,  $P_t = \pm P$ . In diesem Falle findet keine Richtungsänderung der Bewegung statt, und wenn das während der ganzen Dauer der Bewegung eintritt, wird die Bahn eine Gerade. Es muß folglich bei Beginn der Bewegung die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in die Wirkungslinie der Kraft fallen, damit die Bahn eine Gerade wird. Diese Bedingung fällt fort, wenn  $v_0 = 0$  ist, doch muß dann die Kraft ihre Richtung beibehalten, falls die Bahn eine Gerade sein soll.

Wenn dagegen  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ist, also  $P_t = 0$  und  $P_n = P$  wird, so ändert sich an der betreffenden Stelle der Bahn die Größe der Geschwindigkeit nicht, und zwar hat an einer solchen Stelle die Geschwindigkeit einen größten oder kleinsten Wert, weil  $\frac{dv}{dt} = 0$ . Steht die Kraft  $P$  dauernd zur Bahn senkrecht, dann ist die Bewegung notwendig gleichförmig und die Krümmung der Bahn  $k = \frac{1}{\rho} = \frac{P}{m v_0^2}$  proportional der Größe der Kraft. Wenn endlich  $P = \text{const}$ , so wird dann auch  $\rho = \text{const}$ , d. h. die Bahn des Punktes wird zum Kreis.

Ist aber  $P = 0$ , dann erleidet die anfängliche Geschwindigkeit der Bewegung weder eine Größen- noch eine Richtungsänderung, womit erkannt wird, daß der materielle Punkt in einem kraftfeldfreien Raum sich geradlinig und gleichförmig bewegt, oder aber in Ruhe bleibt. Diese Folgerung stimmt im Grunde überein mit dem sogenannten Gesetz der Trägheit in der Fassung von Newton. Denn ob ein Raumgebiet ein Kraftfeld ist oder nicht, erkennt man nur daran, ob ein materieller Punkt in ihm sich beschleunigt bewegt oder nicht, d. h. seine Geschwindigkeit sich nach Größe und Richtung ändert oder nicht. Das Trägheitsgesetz hat also nicht die grundlegende Bedeutung, die man ihm früher gab, da es nur eine Folgerung aus der Erfahrungstatsache ausdrückt, daß sich in Wirklichkeit beschleunigte Bewegungen vorfinden.

Wenden wir uns nun der Aufgabe zu, die Bewegung eines materiellen Punktes gegen einen gegebenen Bezugskörper in einem bekannten Kraftfeld zu ermitteln, so bedeutet das, die Koordinaten des Punktes in einem willkürlichen Koordinatensystem als Funktionen der Zeit zu finden. Das geschieht am einfachsten durch die Zurückführung der räumlich-krummlinigen Bewegung des Punktes auf geradlinige Seiten- oder projizierte Bewegungen, wie das in der Bewegungslehre (I. Bd., 3. bzw. 6. und 7. Kapitel) auseinandergesetzt wurde. Hierzu bedarf es des folgenden einfachen Satzes:

Projiziert man die krummlinige Bewegung eines materiellen Punktes von bestimmter Masse, der einer bestimmten Kraft unterliegt, auf eine beliebige Gerade, so erfolgt die projizierte oder Seitenbewegung des Punktes auf der Geraden in der gleichen Weise, als ob der projizierte Punkt dieselbe Masse hätte, wie der gegebene Punkt, und einer Kraft unterläge, die die Komponente oder Seitenkraft der gegebenen in Richtung der Geraden wäre.

Um diesen Satz zu beweisen, benutzen wir den in der Bewegungslehre (Bd. I, 4. Kapitel) gefundenen Satz, daß die Beschleunigung der Seitenbewegung eines Punktes auf einer beliebigen Geraden die Projektion der Beschleunigung des gegebenen Punktes ist, falls man beide Beschleunigungen durch Vektoren dargestellt denkt. Es sei (s. Fig. 9)  $b$  der Beschleunigungsvektor des Punktes  $A$  und  $F$  der Fußpunkt des von  $A$  auf die beliebige Gerade  $g$  gefällten Lotes, also der Punkt, der die projizierte oder Seitenbewegung von  $A$  auf  $g$  ausführt. Ferner bezeichne  $b_g$  den Beschleunigungsvektor von  $F$  und  $\beta$  den Winkel zwischen  $b$  und  $b_g$ . Dann ist nach Gleichung (14) (Bd. I, S. 35)

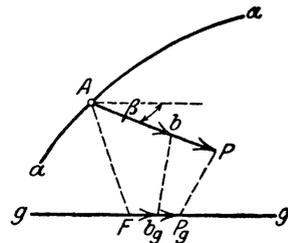


Fig. 9.

$$b_g = b \cdot \cos \beta.$$

Ersetzen wir in dieser Beziehung die Vektoren durch die Beschleunigungen selbst und multiplizieren sie mit der Masse  $m$  des Punktes  $A$ , so geht sie über in

$$m b_g = m b \cdot \cos \beta$$

oder auch in

$$(7) \quad P_g = P \cdot \cos \beta,$$

falls  $P$  die auf  $A$  und  $P_g$  die auf  $F$  wirkende Kraft bezeichnet. Aus dieser Beziehung aber geht der angeführte Satz unmittelbar

hervor, falls wir uns den Punkt  $F$  ebenfalls als materiell und mit der Masse  $m$  behaftet denken.

Zerlegen wir nun die Bewegung des Punktes  $A$  (s. Fig. 10) in die Seitenbewegungen auf den drei Achsen eines beliebigen räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems und sind  $\overline{OF_x} = x$ ,  $\overline{OF_y} = y$ ,  $\overline{OF_z} = z$  die Koordinaten des Punktes  $A$ , dann werden die Differentialgleichungen dieser Seitenbewegungen nach (1)

$$(I) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z,$$

falls wir uns die drei Lotfußpunkte  $F_x, F_y, F_z$  als materielle Punkte von der Masse  $m$  vorstellen, und  $X, Y, Z$  die Seitenkräfte von  $P$  in den drei Achsenrichtungen bezeichnen.

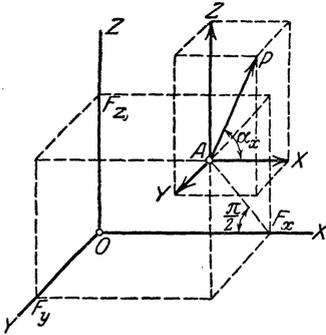


Fig. 10.

Ist die Bewegung von  $A$  bekannt, d. h. sind die Koordinaten  $x, y, z$  als Funktionen der Zeit gegeben, so finden wir aus den Gleichungen (I) die Komponenten der wirkenden Kraft  $P$  und damit diese selbst nach Größe und Richtung als Funktionen der Zeit bzw. der Koordinaten.

Häufiger ist die Aufgabe, die Bewegung von  $A$  zu ermitteln, also die Koordinaten als Funktionen der Zeit zu

bestimmen, was nur durch zweimalige Integration der drei Differentialgleichungen (I) geschehen kann. Hierbei sind die Kraftkomponenten  $X, Y, Z$  als Funktionen der Koordinaten  $x, y, z$ , oder auch der Geschwindigkeitskomponenten  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $v_z = \frac{dz}{dt}$  gegeben zu denken. Dabei bei jeder Integration eine Konstante in das Integral eintritt, so erhalten wir im allgemeinen sechs solcher Integrationskonstanten, über die willkürlich verfügt werden kann. Gewöhnlich werden sie bestimmt durch die Koordinaten  $x_0, y_0, z_0$  der Anfangslage  $A_0$  des bewegten Punktes und die Komponenten  $v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}$  der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  der Bewegung; es würden aber hierzu auch die Werte von  $x, y, z$  und  $v_x, v_y, v_z$  für irgendeinen Zeitwert  $t$  ausreichen.

Läßt sich auf Grund der auf S. 14 angestellten Betrachtungen von vornherein erkennen, daß die Bahnkurve eine ebene wird, so kann man die Ermittlung der Bewegung durch Verwendung eines

ebenen Koordinatensystems, bzw. durch Zerlegung der Bewegung in zwei Seitenbewegungen in der Ebene der Bahnkurve vereinfachen.

Beispiele:

1. Schiefer Wurf im luftleeren Raum. Wird ein materieller Punkt  $A$  von der Erdoberfläche von einer beliebigen Stelle  $A_0$  aus mit einer von der Lotrichtung abweichenden Geschwindigkeit  $v_0$  (s. Fig. 11) im luftleeren Raume geworfen, so unterliegt er nur seiner lotrecht nach abwärts gerichteten Schwere  $L$ , die wir nach Größe und Richtung als unveränderlich ansehen. In diesem Falle wird die Bahn eine ebene Kurve, denn die aufeinanderfolgenden Kraftrichtungen sind parallel, und die Ebene der Kurve ist bestimmt durch die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und die Richtung der Schwere, also eine senkrechte Ebene durch  $v_0$ . Zum Zwecke möglicher Vereinfachung der Ergebnisse legen wir den Anfangspunkt  $O$  des ebenen Koordinatensystems in die Anfangslage  $A_0$  des Punktes, die  $X$ -Achse horizontal und die  $Z$ -Achse lotrecht nach aufwärts, dann werden die Komponenten von  $L$   $X=0$ ,  $Z=-L=-mg$  und die beiden Differentialgleichungen der eintretenden Bewegung

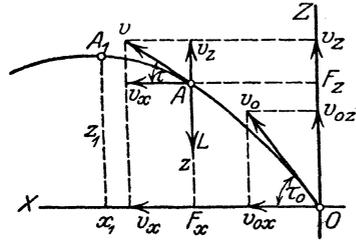


Fig. 11.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -m \cdot g.$$

Aus der ersteren ersieht man, daß die Seitenbewegung auf der  $X$ -Achse eine gleichförmige sein muß, denn da deren Geschwindigkeit  $v_x = \frac{dx}{dt}$  sich nicht ändert, weil  $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0$ , so folgt  $v_x = \text{const} = v_{0x} = v_0 \cos \tau_0$ , falls  $\tau_0$  den Winkel bezeichnet, den  $v_0$  mit der  $X$ -Achse bildet. Ferner ergibt sich aus  $v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x}$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0),$$

worin für  $t_0 = 0$   $x$  zu Null werden muß, also  $x_0 = 0$  sein. Die Gleichung der Seitenbewegung auf der  $X$ -Achse ist sonach

$$x = v_{0x} \cdot t.$$

Die Seitenbewegung auf der  $Z$ -Achse hat die konstante Beschleunigung  $-g$ ; sie ist demnach eine gleichmäßig verzögerte und ihre Gleichung hat nach Bd. I, S. 19, Gleichung (6) die Form

$$z = z_0 + v_{0z}(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2.$$

Hierin ist  $z_0 = 0$  und auch  $t_0 = 0$  zu setzen, wenn wir die Zeit vom Bewegungsbeginn an messen; sie erhält folglich die Gestalt

$$z = v_{0z} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminieren wir aus ihr und dem Ausdruck für  $x$  die Zeit  $t$ , so erhalten wir die Gleichung der Bahn, nämlich

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_{0x}^2} \cdot x^2 = x \tan \tau_0 - \frac{g}{2 v_{0x}^2 \cos^2 \tau_0} \cdot x^2.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel, deren Hauptachse lotrecht steht und deren Parameter  $g = \frac{v_0^2 \cos^2 \tau_0}{g}$  sein muß. Der Scheitel  $A_1$  der Parabel hat die Koordinaten  $x_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \tau_0}{2g}$ ,  $z_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \tau_0}{2g}$ , wie aus der Beziehung

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v_{0z} - g \cdot t$$

auch abgeleitet werden kann. Die Parabel schneidet die  $X$ -Achse in der Entfernung  $\overline{OA_2} = x_2 = 2x_1 = \frac{v_0^2 \sin(2\tau_0)}{g}$ , welche Wurfweite genannt wird. Diese

erreicht ihren größten Wert, wenn  $2\tau_0 = \frac{\pi}{2}$ , also  $\tau_0 = \frac{\pi}{4}$  ist.

2. Ein materieller Punkt sei außer seiner Schwere  $L$  einer Kraft  $C$  unterworfen, die senkrecht zu einer lotrechten Geraden  $DD$  (s. Fig. 12) steht und proportional dem Abstände  $\overline{AF_z} = r$  des Punktes  $A$  von jener Geraden sich ändert, und zwar sei  $C = m\omega^2 r$ . Legen wir die  $Z$ -Achse des Koordinatensystems in die Gerade  $DD$  und die positive Seite nach aufwärts, dann wird  $C$  parallel der  $XY$ -Ebene und die Zerlegung von  $C$  in Seitenkräfte liefert

$$X = C \cos \varphi = m\omega^2 r \cos \varphi = m\omega^2 x,$$

$$Y = C \sin \varphi = m\omega^2 y,$$

falls  $\varphi$  den Winkel zwischen  $C$  und der  $X$ -Achse bezeichnet. Da ferner  $Z = -L = -mg$  wird, so erhalten die drei Differentialgleichungen (I) hier die Gestalt

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X = m\omega^2 x,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m\omega^2 y,$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg.$$

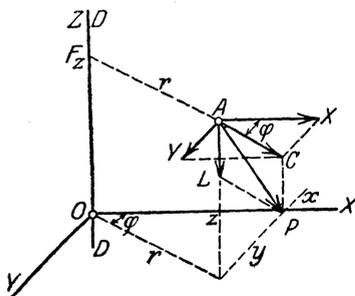


Fig. 12.

Deren Integrale sind allgemein bekannt und zwar ist

$$x = A_x e^{\omega t} + B_x e^{-\omega t}, \quad y = A_y e^{\omega t} + B_y e^{-\omega t}, \quad z = z_0 + v_{0z}(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2,$$

denn die dritte Differentialgleichung ist die des lotrechten Wurfes nach aufwärts im luftleeren Raume (s. S. 4), und in den beiden anderen sind  $A_x, A_y, B_x, B_y$  die Integrationskonstanten, die durch die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bestimmt werden. Eliminiert man  $e^{-\omega t}$  aus den beiden ersten Gleichungen, so erhält man

$$B_y x - B_x y = (A_x B_y - B_x A_y) e^{\omega t}$$

und in der gleichen Weise durch Elimination von  $e^{\omega t}$

$$A_y x - A_x y = -(A_x B_y - B_x A_y) e^{-\omega t};$$

folglich findet sich

$$(A_y x - A_x y)(B_y x - B_x y) = -(A_x B_y - B_x A_y)^2$$

als Gleichung der Projektion der Bahn auf die  $XY$ -Ebene. Diese Projektion ist sonach eine Hyperbel, deren Mittelpunkt in  $O$  liegt. Die Bahn selbst ist also

eine Kurve auf dem hyperbolischen Zylinder über der Hyberbel, dessen Mantellinien der  $Z$ -Achse parallel laufen. Auf diesen Linien vollzieht sich die Wurfbewegung wie im Ruhezustande, d. h. nach der Gleichung für  $z$ , womit man eine Vorstellung über den Bahnverlauf erhält. Die Bahn selbst ist eine transzendenten Raumkurve. Als Komponenten der Geschwindigkeit  $v$  erhalten wir

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega \{A_x e^{\omega t} - B_x e^{-\omega t}\}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \omega \{A_y e^{\omega t} - B_y e^{-\omega t}\},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v_{0z} - g(t - t_0)$$

und damit  $v$  selbst nach Größe und Richtung als Funktionen der Zeit. Setzen wir  $t_0 = 0$ , dann bestimmen sich die Integrationskonstanten aus den vier Gleichungen

$$x_0 = A_x + B_x, \quad y_0 = A_y + B_y, \quad v_{0x} = \omega(A_x - B_x), \quad v_{0y} = \omega(A_y - B_y).$$

Die Projektion des Hodographen auf die  $XY$ -Ebene ist eine gleichseitige Hyberbel.

In manchen Fällen ist es zweckmäßig, an Stelle der rechtwinkligen Punktkoordinaten Polar- bzw. Zylinderkoordinaten anzuwenden, erstere, wenn die Bahnkurve eine ebene ist. Die entsprechenden Differentialgleichungen

erhält man dann entweder durch eine Koordinatentransformation oder unmittelbar unter Benutzung der im 7. Kapitel der Bewegungslehre (Bd. I, S. 55 u. ff.) abgeleiteten Beziehungen, wie folgt. Im Falle einer ebenen Bahnkurve zerlegen wir die auf den materiellen Punkt  $A$  wirkende Kraft  $P$  (s. Fig. 13) in Komponenten in Richtung des Fahrstrahles  $\overline{OA}$  und einer dazu Senkrechten; diese werden  $P_r = P \cdot \cos \chi$ ,  $P_c = P \cdot \sin \chi$ .

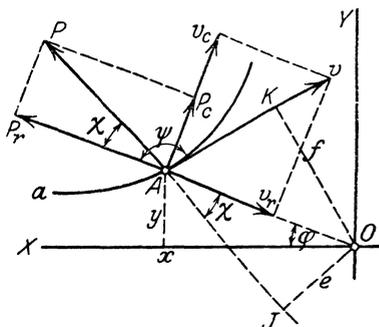


Fig. 13.

Bezeichnen wir wie früher die radiale Komponente der Beschleunigung mit  $b_r$ , die zirkulare mit  $b_c$ , dann bestehen die unmittelbar aus (1) folgenden Beziehungen

$$P_r = m b_r, \quad P_c = m b_c,$$

in denen  $m$  die Masse des Punktes  $A$  bezeichnet. Mit Verwendung der früher (Bd. I, S. 51) entwickelten Ausdrücke (40) für  $b_r$  und  $b_c$  finden wir als Differentialgleichungen der Bewegung eines Punktes in ebenen Polarkoordinaten dann die folgenden:

$$(Ia) \quad m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} = P_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = P_c;$$

in diesen sind  $P_r$  und  $P_c$  als bekannte Funktionen von  $r$  und  $\varphi$

anzusehen. Der zweiten Differentialgleichung läßt sich auch die Form

$$(8a) \quad \frac{d}{dt}(m r v_c) = P_c \cdot r = P r \sin \chi$$

geben, worin  $v_c = r \frac{d\varphi}{dt}$  die Zirkulargeschwindigkeit des Punktes  $A$  bezeichnet. Beachten wir nun, daß  $v_c = v \sin \psi$  und  $r \sin \psi = \overline{OA} \sin(\pi - \psi) = \overline{OK} = f$ , ferner  $r \sin \chi = \overline{OA} \cdot \sin \chi = \overline{OJ} = e$ , so erhalten wir

$$(8b) \quad \frac{d}{dt}(m v \cdot f) = P \cdot e.$$

Nennen wir das Produkt aus einem Vektor und dessen lotrechten Abstand von einem Punkte das Moment des Vektors in bezug auf oder für den Punkt und beachten, daß die Größe  $m v$  die Bewegungsgröße oder der Impuls (s. S. 4) genannt wurde, so läßt sich Gleichung (8), die man den Flächensatz nennt, in folgender Form aussprechen: Der totale Differentialquotient des Impulsmomentes nach der Zeit ist gleich dem Moment der Kraft für jeden beliebigen Punkt in der Ebene der Bahn.

Im allgemeinen lassen sich die Differentialgleichungen (Ia) nicht integrieren, da das von der Art der Funktionen abhängt, die

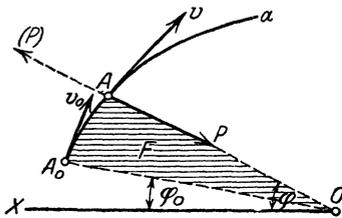


Fig. 14.

$P_r$  und  $P_c$  von  $r$  bzw.  $\varphi$  abhängig machen. Wohl aber tritt diese Möglichkeit ein bei den sogenannten Zentralkräften bzw. Zentralbewegungen, in denen die Kraft  $P$  dauernd nach einem ruhenden Punkte hin gerichtet ist. Legen wir in diesen den Anfangspunkt  $O$  des Koordinatensystems, so wird

(s. Fig. 14)  $P_c = 0$  und  $P_r = \perp P = f(r)$ . Aus der zweiten der Differentialgleichungen (Ia) folgt dann sofort als Integral

$$(9) \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} = c$$

und die Beziehung enthält das zweite Keplersche Gesetz, wie in der Bewegungslehre (Bd. I, S. 59 und 60) gezeigt wurde, d. h. der Inhalt  $F$  des Sektors, den der Fahrstrahl  $\overline{OA} = r$  beschreibt, ist proportional der verfloßenen Zeit  $(t - t_0)$ , wenn sich  $A$  aus der Anfangslage  $A_0$  bewegt. Dann aber wird  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}$  und damit erhält

man aus der ersten der Differentialgleichungen (Ia)

$$m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} \right\} = \pm P = f(r).$$

Führen wir hierin nun  $v_r = \frac{dr}{dt}$  ein, ersetzen also  $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv_r}{dt}$  durch  $v_r \frac{dv_r}{dr}$ , so nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$v_r dv_r = \left( \frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{m} f(r) \right) dr$$

an, aus der durch Integration die Gleichung

$$(10) \quad \frac{1}{2} v_r^2 = \int \left( \frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{m} f(r) \right) dr + C = -\frac{c^2}{2r^2} + \frac{1}{m} \int f(r) dr + C$$

hervorgeht; in dieser bedeutet  $C$  eine Integrationskonstante, die durch entsprechende Bedingungen, z. B. bezüglich Anfangslage und -geschwindigkeit bestimmt ist. Setzen wir zur Abkürzung  $\int f(r) dr = F(r)$ , dann finden wir weiter aus

$$(10a) \quad v_r = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + \frac{2}{m} F(r) + 2C}$$

durch Integration

$$(11) \quad t = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} F(r) - \frac{c^2}{r^2} + 2C}} + C_0,$$

worin  $C_0$  wieder eine Integrationskonstante bezeichnet und das Vorzeichen der Wurzel durch das von  $v_r$  in der Anfangslage bestimmt wird. Da das Integral auf eine Funktion von  $r$  führt, so erhält man aus (11) umgekehrt

$$(12a) \quad r = \Phi(t)$$

und hiermit aus (9)

$$(12b) \quad \varphi = c \int \frac{dt}{\{\Phi(t)\}^2} + c_0;$$

damit sind die Koordinaten  $r$  und  $\varphi$  des Punktes als Funktionen der Zeit gefunden, und ebenso die Komponenten der Geschwindigkeit

$$(13) \quad v_r = \frac{dr}{dt} = \Phi'(t) \quad \text{und} \quad v_c = r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r} = \frac{c}{\Phi(t)}.$$

Beispiel: Bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne erfährt ersterer eine Anziehungskraft nach dem Newtonschen Gesetz, d. h. es ist  $P = \kappa \frac{Mm}{r^2}$ , falls  $M$  die Masse der Sonne,  $m$  die des Planeten und  $\kappa$  die Gravitations-

konstante bezeichnet. Die Bewegung ist sonach eine Zentralbewegung, und zwar wird hier  $P_r = -P = -\kappa \frac{Mm}{r^2} = f(r)$ . Es geht dann (10) über in

$$\frac{1}{2} v_r^2 = -\frac{c^2}{2r^2} - \kappa M \int \frac{dr}{r^2} + C = -\frac{c^2}{2r^2} + \frac{\kappa M}{r} + C,$$

und für die Zirkulargeschwindigkeit erhalten wir wie oben  $v_c = \frac{c}{r}$ . Zerlegen wir die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in die Komponenten  $v_{0r} = v_0 \cos \psi_0$  und  $v_{0c} = v_0 \sin \psi_0$ , so ergibt sich die Konstante  $c$  aus der Beziehung

$$v_0 \sin \psi_0 = \frac{c}{r_0}.$$

Die Konstante  $C$  dagegen erhalten wir aus vorstehender Gleichung für  $v_r$  durch ihre Anwendung auf die Anfangslage, in der  $v_r = v_{0r} = v_0 \cos \psi_0$  ist, zu

$$C = \frac{1}{2} v_0^2 \cos^2 \psi_0 + \frac{c^2}{2r_0^2} - \frac{\kappa M}{r_0}.$$

Anstatt nun weiter  $r$  und  $\varphi$  nach (11) und (12b) als Funktionen der Zeit zu ermitteln, wollen wir hier die Bahn aus ihrer Differentialgleichung bestimmen, die sich aus (10a) und (9) nach Elimination von  $dt$  zu

$$v_r : v_c = \frac{dr}{r d\varphi} = \pm \sqrt{2C + \frac{2\kappa M}{r} - \left(\frac{c}{r}\right)^2} : \frac{c}{r}$$

ergibt. Führen wir hierin die neue Veränderliche  $u = \frac{c}{r}$  ein und setzen zur Abkürzung  $\frac{\kappa M}{c} = \lambda$ ,  $\sqrt{2C + \lambda^2} = A$ , so geht sie über in

$$d\varphi = \mp \frac{du}{\sqrt{A^2 - (u - \lambda)^2}} = \mp \frac{d\left(\frac{u - \lambda}{A}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u - \lambda}{A}\right)^2}},$$

aus der durch Integration die Beziehung

$$\varphi = \arccos\left(\frac{u - \lambda}{A}\right) + \varphi_1$$

hervorgeht. Wir wollen nun die Gerade  $OX$ , gegen die wir  $\varphi$  messen (s. Fig. 15), so wählen, daß  $\varphi_1 = 0$  wird. Das führt zu der Bedingungs-  
gleichung für  $\varphi_0$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{u_0 - \lambda}{A}\right)$$

oder auch

$$u_0 = \frac{c}{r} = \lambda + A \cos \varphi_0.$$

Als Polargleichung der Bahn findet sich sonach

$$u = \frac{c}{r} = \lambda + A \cos \varphi$$

oder auch

$$r = \frac{c}{\lambda + A \cos \varphi} = \frac{q}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

und diese ist die Gleichung eines Kegelschnittes, dessen Brennpunkt im an-

ziehenden Zentrum  $O$  liegt (s. Fig. 15), dessen Parameter  $q = \frac{c}{\lambda}$  und dessen große Achse in  $OX$  liegt. Die Bahn ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem  $\varepsilon = \frac{A}{\lambda} \leq 1$ , was von den Konstanten abhängt, die in der Gleichung auftreten. Bei den Planeten ist sie bekanntlich eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet. Im besonderen ist bei der Erdbahn näherungsweise  $\varepsilon = \frac{1}{60}$  und  $q = 148 \cdot 10^9$  m, während die mittlere Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn  $30\,000 \text{ ms}^{-1}$  beträgt.

Die Umlaufzeit der Planeten folgt am einfachsten aus (9) unter Benutzung der Beziehung für den Flächeninhalt  $dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$  des Sektors, den der Fahrstrahl  $\overline{OA} = r$  in der Zeit  $dt$  überstreicht, nämlich

$$dF = \frac{1}{2} c dt,$$

woraus durch Integration

$$F = \frac{1}{2} c (t - t_0)$$

hervorgeht.

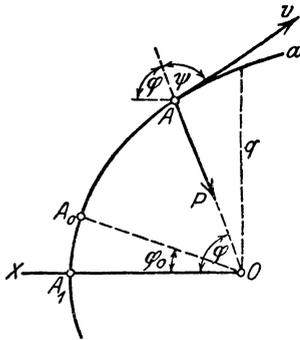


Fig. 15.

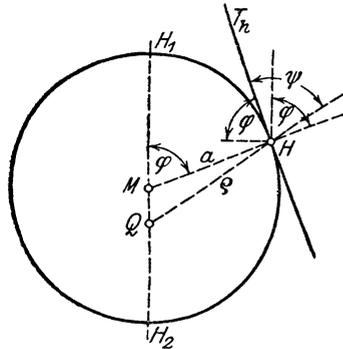


Fig. 15 a.

Bezeichnen wir die Umlaufzeit mit  $T$ , so folgt diese aus

$$T = \frac{2F_1}{c},$$

falls  $F_1 = \pi h k = \pi h \sqrt{q h}$  den Flächeninhalt und  $h$  und  $k$  die beiden Halbachsen der Bahnellipse bezeichnet. Mit Benutzung der Beziehung  $c = \lambda q = \frac{\kappa M}{c} q$ , also  $c^2 = \kappa M q$  findet man sonach

$$T^2 = \frac{4\pi^2 h^3}{\kappa M},$$

woraus das dritte Keplersche Gesetz ersichtlich wird, nämlich, daß sich die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Bahnen um die Sonne.

Eigenartig ist der Hodograph der Planetenbewegung, dessen Gleichung sich mittels der Ausdrücke für  $v_r$  und  $v_c$  zu

$$v^2 = v_r^2 + v_c^2 = 2C + 2\lambda \cdot \frac{c}{r} = 2(C + \lambda^2) + 2\lambda A \cos \varphi$$

ergibt. Ist in Fig. 15a, S. 23 der Punkt  $X$  der Pol des Hodographen und die Strecke  $\overline{QH} \triangleq v$  die  $v$  darstellende Strecke, dann ist zufolge vorstehender Gleichung der geometrische Ort der Punkte  $H$  ein Kreis, dessen Mittelpunkt  $M$  vom Pol  $Q$  die Entfernung  $\overline{MQ} = e = v \cdot \lambda$  hat, falls  $\overline{QH} = v \cdot v$  gesetzt wird; ferner dessen Radius  $a = v \cdot A$  ist und dessen durch  $X$  gehender Durchmesser  $H_1H_2$  senkrecht zur großen Achse der Ellipse steht. Der Strecke  $\overline{QH_1}$  entspricht dabei  $v_{max}$  und  $\overline{QH_2}$   $v_{min}$ ; erstere Geschwindigkeit tritt in der Sonnennähe, letztere in der Sonnenferne auf.

Bei räumlichen Bahnkurven erweist sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten als zweckmäßig. Die entsprechenden Differentialgleichungen erhalten wir aus der Zerlegung der auf den Punkt  $A$  wirkenden äußeren Kraft  $P$  in eine radiale Komponente  $P_r$ , eine zirkulare  $P_c$  und eine achsiale, d. h. zur  $Z$ -Achse parallele Komponente  $P_z$  (s. Fig. 16) mittels des Parallelepipedes der Kräfte unter Benutzung der in der Bewegungslehre (Bd. I, S. 61) für die entsprechenden Beschleunigungskomponenten  $b_r$ ,  $b_c$  und  $b_z$  aufgestellten Ausdrücke (48) in der Gestalt

$$(1b) \quad m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} = P_r, \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left( r \frac{2 d\varphi}{dt} \right) = P_c, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = P_z,$$

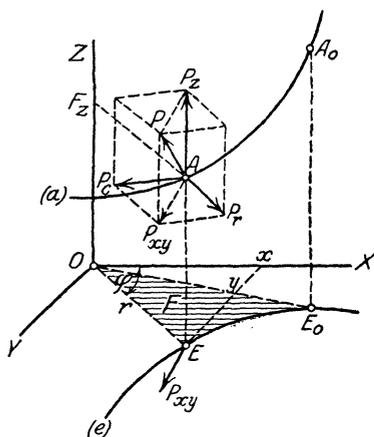


Fig. 16.

in denen  $P_r$ ,  $P_c$  und  $P_z$  als Funktionen von  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  gegeben zu betrachten sind. Die Integration derselben führt dann auf die drei Geschwindigkeitskompo-

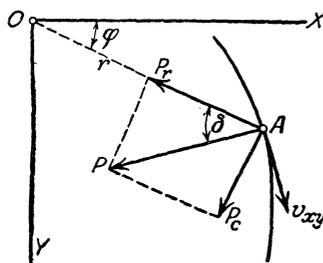


Fig. 17.

nenten  $v_r$ ,  $v_c$  und  $v_z$ , sowie der Koordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  als Funktionen der Zeit. Die hierbei eintretenden sechs Integrationskonstanten werden zu bestimmen durch Angabe der Lage des Punktes und seiner Geschwindigkeit für einen bestimmten Zeitwert, z. B. für die Anfangszeit  $t_0$ .

Beispiel: Auf einen materiellen Punkt  $A$  (s. Fig. 17) wirke eine Kraft  $P$ , die eine bestimmte Gerade immer senkrecht kreuzt, mit dem nach innen gerichteten Lote  $\overline{AF_z} = r$  auf die Gerade den unveränderlichen Winkel  $\delta$  einschließt und

umgekehrt proportional  $r$  sich ändert, also in der Form  $P = m q : r$  geschrieben werden kann, falls  $m$  die Masse des Punktes  $A$  und  $q$  eine Konstante bezeichnet. Legen wir die  $Z$ -Achse des Zylinderkoordinatensystems in die Gerade, so daß  $P$  der  $XY$ -Ebene parallel wird, dann ergibt sich sofort

$$P_r = -P \cos \delta = -\frac{m q \cos \delta}{r}, \quad P_c = P \sin \delta = \frac{m q \sin \delta}{r}, \quad P_z = 0,$$

so daß die entsprechenden Beschleunigungskomponenten

$$b_r = -\frac{q \cos \delta}{r}, \quad b_c = \frac{q \sin \delta}{r}, \quad b_z = 0$$

werden. Das sind aber dieselben Ausdrücke, wie sie in dem Beispiel auf Seite 61 bzw. 62 des I. Bandes gefunden wurden, falls man für die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  die Werte

$$\beta = \cot \delta, \quad \alpha = \tan \delta \sqrt{q \cos \delta}, \quad k = \frac{\alpha}{r_0} = \frac{\tan \delta}{r_0} \sqrt{q \cos \delta}$$

einsetzt. Wir erhalten folglich durch Integration der Differentialgleichungen für  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  die folgenden Funktionen der Zeit:

$$r = r_0 + \alpha \cdot t, \quad \varphi = \varphi_0 + \beta \ln(1 + k \cdot t), \quad z = z_0 + \gamma \cdot t,$$

wie man sich leicht überzeugt, und sonach eine gleichförmige Bewegung auf einer räumlichen logarithmischen Spirale, die auf einer Kreisgefläche liegt.

Schreiben wir die zweite der Differentialgleichungen (Ib) in der Gestalt

$$P_c \cdot r = m \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (m v_c r),$$

so erkennen wir, daß für die projizierte Bewegung des Punktes auf einer Ebene, hier also auf der  $XY$ -Ebene, der Flächensatz gilt, denn vorstehende Gleichung stimmt mit (8a) überein.

Da der Flächensatz sich wesentlich erweitern läßt und in der Dynamik eine wichtige Rolle spielt, soll hier noch seine Form unter Verwendung rechtwinkliger Punktkoordinaten abgeleitet werden.

Das Moment der auf den Punkt  $A$  wirkenden Kraft  $P$  für die  $Z$ -Achse eines beliebigen Koordinatensystems nimmt unter Benutzung der beiden ersten Differentialgleichungen (I) die Form

$$M_z = Yx - Xy = m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right).$$

an, wofür sich auch

$$(14) \quad Yx - Xy = \frac{d}{dt} \left\{ m \frac{dy}{dt} x - y \frac{dx}{dt} \right\}$$

schreiben läßt. Die Übereinstimmung dieser Beziehung mit (8a) erkennt man sofort, wenn man  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  einsetzt. Denn es ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

und folglich

$$(14a) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt},$$

womit der Nachweis unter Berücksichtigung des Umstandes, daß  $M_z = P_c \cdot r$  ist, ersichtlich wird.

Bei den bisherigen Untersuchungen haben wir vorausgesetzt, daß die Komponenten der wirkenden Kräfte lediglich mit dem Orte sich ändern, also nur Funktionen der Koordinaten seien. Aber es kommen auch Fälle vor, in denen die Kräfte von der augenblicklichen Geschwindigkeit des bewegten Punktes abhängen, und zwar sind es meist Widerstandskräfte von Flüssigkeiten, deren Änderungsgesetz z. Z. noch als eine Funktion der Geschwindigkeit betrachtet wird. Wenn sich nun auch an den Differentialgleichungen formell hierdurch nichts ändert, wird doch die Lösung entsprechender Aufgaben mathematisch recht verwickelt und zwingt zu außergewöhnlichen Integrationswegen, wie das folgende Beispiel zeigen mag.

Beispiel:

Schiefer Wurf im luftgefüllten Raum. Die Luft setzt der Bewegung des geworfenen Körpers einen Widerstand entgegen, der innerhalb gewisser Grenzen sich dem Quadrate der Geschwindigkeit  $v$  proportional erweist und die  $v$  entgegengesetzte Richtung in der Bahntangente besitzt. Es werde wie in dem Beispiel S. 8

$$W = kv^2 = m \cdot g \cdot \frac{v^2}{\beta^2}$$

gesetzt, worin  $k$  bzw.  $\beta$  eine von der Körperform, der Luftdichte usw. abhängige Konstante bezeichne. Da  $W$  in die Bahntangente fällt, so liegt die

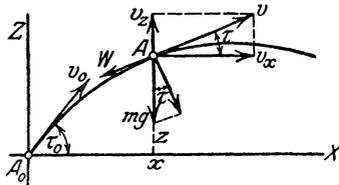


Fig. 18.

aus  $W$  und der Schwere  $mg$  des Körpers sich zusammensetzende resultierende Kraft stets in der Ebene, welche durch die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und das Lot in  $A_0$  bestimmt wird; die Bahn muß sonach eine ebene Kurve werden. Wir benutzen deshalb hier ein ebenes Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt wir in  $A_0$  wählen (s. Fig. 18) und dessen  $Z$ -Achse lotrecht nach aufwärts gerichtet sei. Als Differentialgleichungen der Bewegung würden sich sonach, weil hier  $X = -W \cdot \cos \tau$ ,  $Z = W \sin \tau - mg$ , die beiden

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -W \cdot \cos \tau, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = W \sin \tau - mg$$

ergeben, in denen  $W = mg \frac{v^2}{\beta^2} = \frac{mg}{\beta^2} \left\{ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right\}$  zu setzen wäre. Das macht die Integration aber sehr umständlich, weshalb es sich empfiehlt, an die Stelle der zweiten Gleichung unter Benutzung des Ausdruckes für die Zentripetalbeschleunigung  $b_n = v \cdot \frac{d\tau}{dt}$  die folgende zu verwenden:

$$m v \frac{d\tau}{dt} = -m g \cos \tau,$$

in der das negative Zeichen rechts zu nehmen ist, weil  $\tau$  mit wachsendem  $t$  abnimmt. Diese Gleichung drückt aus, daß die Zentripetalkraft  $P_n = m \frac{v^2}{\rho} = m v \frac{d\tau}{dt}$  der Komponente der Schwere in der Richtung der Bahnnormalen sein muß.

Zwecks Integration der ersteren Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m g \frac{v^2}{\beta^2} \cdot \cos \tau$$

führen wir in sie  $\frac{dx}{dt} = v_x = v \cos \tau$  und das Bahnelement  $du = v \cdot dt$  ein, dann geht sie über in

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{g}{\beta^2} \cdot du.$$

Aus ihr folgt integriert

$$\ln(v_x) = -\frac{g}{\beta^2} \cdot u + \text{Const},$$

und, weil zur Zeit  $t_0$   $u = u_0$  und  $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \tau_0$ , also

$$\ln(v_{0x}) = \text{Const},$$

nach geringer Umformung

$$\ln\left(\frac{v_x}{v_{0x}}\right) = -\frac{g}{\beta^2} u$$

oder

$$v_x = v_{0x} \cdot e^{-\frac{g}{\beta^2} \cdot u}.$$

Die andere Differentialgleichung läßt sich in der Form

$$v \cdot \frac{d\tau}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -g \cos \tau$$

schreiben. Aus ihr erhält man mit Benutzung der Beziehung  $v_x = v \cos \tau$

$$\frac{d\tau}{\cos^3 \tau} = -\frac{g du}{v_x^2} = -\frac{g}{v_{0x}^2} \cdot e^{\frac{2gu}{\beta^2}} du,$$

und wenn man darin als neue Veränderliche  $\tan \tau = p$  einführt,

$$\sqrt{1+p^2} dp = -\frac{g}{v_{0x}^2} \cdot e^{\frac{2gu}{\beta^2}} \cdot du.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung liefert

$$p \sqrt{1+p^2} + \ln(p + \sqrt{1+p^2}) + C = -\frac{\beta^2}{v_{0x}^2} \cdot e^{\frac{2gu}{\beta^2}}.$$

in der die Integrationskonstante  $C$  durch  $\tau = \tau_0$ ,  $p_0 = \tan \tau_0$  und  $u_0 = 0$  zu

$$C = -\frac{\beta^2}{v_{0x}^2} - \sqrt{1 + \tan^2 \tau_0} \tan \tau_0 - \ln[\tan \tau_0 + \sqrt{1 + \tan^2 \tau_0}]$$

aus der Anfangslage hervorgeht. Die vorstehende Gleichung, in welcher zur Abkürzung

$$p \sqrt{1+p^2} + \ln(p + \sqrt{1+p^2}) + C = P$$

gesetzt werden mag, zeigt, daß  $u$  und  $p = \tan \tau$  gleichzeitig unendlich werden; die Bahn des Punktes hat sonach eine lotrechte Asymptote.

Beachten wir, daß  $dx = du \cdot \cos \tau = \frac{du}{\sqrt{1+p^2}}$ , so folgt aus dem Vorhergehenden

$$dx = -\frac{v_{0x}^2}{g} e^{\frac{2gu}{\beta^2}} \cdot dp = \frac{\beta^2}{g} \cdot \frac{dp}{P}$$

und

$$dy = p \cdot dx = \frac{\beta^2}{g} \frac{p dp}{P}.$$

Hiernach erhält man die Koordinaten des Punktes  $A$  in der Form

$$x = \frac{\beta^2}{g} \int_{p_0}^p \frac{dp}{P} \quad \text{und} \quad y = \frac{\beta^2}{g} \int_{p_0}^p \frac{p dp}{P}$$

als Funktionen von  $p = \tan \tau$ . Die Integrale lassen sich nur näherungsweise, bzw. durch Reihenentwicklung ausführen.

Weiter findet sich

$$v^2 = v_x^2 (1 + \tan^2 \tau) = v_{0x}^2 e^{-\frac{2gu}{\beta^2}} (1 + p^2) = -\frac{\beta^2 (1 + p^2)}{P}$$

ebenfalls als Funktion von  $p$ , und damit

$$v = \frac{du}{dt} = \beta \sqrt{\frac{1+p^2}{-P}},$$

welcher Ausdruck auf

$$dt = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{-P}{1+p^2}} du = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{-P}{1+p^2}} \cdot \frac{dx}{\cos \tau} = -\frac{\beta}{g} \cdot \frac{dp}{\sqrt{-P}}$$

führt. Diese Gleichung integriert ergibt den Zusammenhang zwischen  $p$  und  $t$ , jedoch wieder nur in einer Gestalt, die auf dem Wege der Annäherung gewonnen werden muß, bzw. der zeichnerischen Auswertung des Integralen

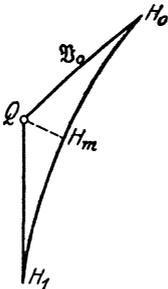


Fig. 18 a.

$$t = -\frac{\beta}{g} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\sqrt{-P}}.$$

Von Interesse ist das Änderungsgesetz der Geschwindigkeit  $v$  bei dieser Bewegung, wie es der Hodograph veranschaulicht. Da  $v_x$  mit wachsendem  $u$  stetig abnimmt, so muß die Hodographenkurve, deren Polargleichung durch den vorstehenden Ausdruck für  $v^2$  gegeben ist, einen Verlauf nehmen, wie ihn Fig. 18a zeigt. Hieraus geht aber hervor, daß  $v$  für eine Lage des bewegten Punktes unterhalb der Horizontalen durch  $A_0$  ein Minimum besitzt, das dem Lote  $QH_m$  von  $Q$  auf die Hodographenkurve entspricht. Ferner macht der Ausdruck für  $v^2$  ersichtlich, daß  $v = \beta$  wird für  $p = \tan \tau = \infty$ , und

sonach immer  $v < \beta$  bleibt. Im Hodographen entspricht folglich die Strecke  $\overline{QH_1}$  der Geschwindigkeit  $\beta$ .

Die für  $W$  gemachte Annahme  $mg \frac{v^2}{\beta^2}$  gilt mit hinreichender Annäherung nur für Geschwindigkeiten über  $600 \text{ ms}^{-1}$ . Versuche an Langgeschossen der Gegenwart haben gezeigt, daß die von H. Lorenz<sup>1)</sup> vorgeschlagene Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der Geschwindigkeit, die allerdings eine wesentlich verwickeltere ist, als die hier benutzte, mit der Wirklichkeit sehr gut übereinstimmt.

#### 4. Kap. Die Kräftefunktion.

Durchläuft ein materieller Punkt  $A$ , auf den die Kraft  $P$  wirkt, den Weg  $\overline{AA'} = du$ , der den Winkel  $\varphi$  mit  $P$  einschließt (s. Fig. 19), so verrichtet die Kraft hierbei eine Elementararbeit

$$dA = P \cdot \cos \varphi \cdot du$$

(vgl. Bd. II, Seite 63, Formel (46)). Bezeichnen  $X, Y, Z$  die Komponenten von  $P$  in Richtung der Achsen eines willkürlichen Koordinatensystems,  $x, y, z$  die Koordinaten von  $A$ , ferner  $x + dx, y + dy, z + dz$  die von  $A'$ , also  $dx, dy, dz$  die Projektionen von  $du$  auf die drei Achsen, so läßt sich (s. Bd. II, S. 75, Formel (60)) für  $dA$  auch der Ausdruck

$$(15) \quad dA = Xdx + Ydy + Zdz$$

setzen. Nehmen wir an, daß  $P$  nach Größe und Richtung nur mit dem Orte sich ändert, also  $X, Y, Z$  Funktionen von  $x, y, z$  sind, dann hat  $dA$  mathematisch betrachtet die Form des totalen Differentials einer Funktion der drei Koordinaten, denn es ist bekanntlich

$$dF(xyz) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz.$$

Soll in der Tat  $dA$  ein totales Differential sein, so müßte es eine Funktion  $F(xyz) = U$  geben, welche die Eigenschaft hat, daß die Komponenten der Kraft  $P$  die Form

$$(16) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

annehmen. Im allgemeinen ist das nicht der Fall, denn die drei

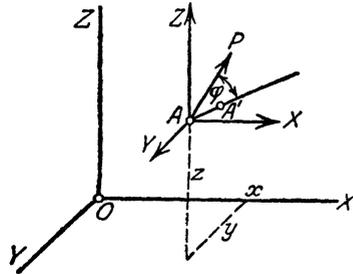


Fig. 19.

<sup>1)</sup> Ballistik (Verlag von Oldenbourg, München und Berlin 1917), S. 58 u. f.

Komponenten, als Funktionen der Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft aufgefaßt, müssen den drei Bedingungsgleichungen

$$(17) \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$$

genügen, die daraus hervorgehen, daß  $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}$  ist, usf. Werden diese Bedingungsgleichungen von den Komponenten erfüllt, dann existiert eine solche Funktion  $U = F(xyz)$  der drei Koordinaten; man nennt sie Kräftefunktion, und die Kräfte, die eine Kräftefunktion besitzen, werden konservative genannt. Man findet  $U$  als das unbestimmte Integral

$$(18) \quad U = \int (X dx + Y dy + Z dz) = F(xyz),$$

und weil dann  $dA = dU$  wird, die Arbeit der Kraft  $P$  auf dem Wege ihres Angriffspunktes aus der Lage  $x_0, y_0, z_0$  bis zu  $x, y, z$  in der einfachen Form

$$(19) \quad A = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} dU = U - U_0 = F(xyz) - F(x_0 y_0 z_0).$$

Dieser Ausdruck für  $A$  zeigt, daß die Arbeit konservativer Kräfte ganz unabhängig von dem Weg des Punktes von der Ausgangslage in die Endlage ist, da  $A$  nur von den Koordinaten des Punktes in beiden Lagen abhängt.

#### Beispiele:

1. Wirkt auf den Punkt nur seine Schwere  $L$ , und zwar in einem so kleinen Kraftfeld, daß die Richtungen von  $L$  in den verschiedenen Lagen des schweren Punktes als parallel angesehen werden dürfen, und wählen wir ein Koordinatensystem mit lotrecht nach aufwärts gerichteter  $Z$ -Achse, dann wird  $X = Y = 0$ ,  $Z = -L$  und folglich

$$U = \int (X dx + Y dy + Z dz) = -L \int dz = -Lz$$

als Kräftefunktion gefunden. Daß die Bedingungsgleichungen (17) hier erfüllt sind, ersieht man unmittelbar. Die Arbeit der Schwere wird

$$A = -L(z - z_0) = L(z_0 - z);$$

sie hängt sonach nur von dem Höhenunterschied der Anfangs- und Endlage ab.

2. Die Anziehung nach dem Newtonschen Gesetz ist ebenfalls eine konservative Kraft. Um das nachzuweisen, legen wir den Anfangspunkt  $O$  des Koordinatensystems (s. Fig. 20) in das anziehende Zentrum, und erhalten

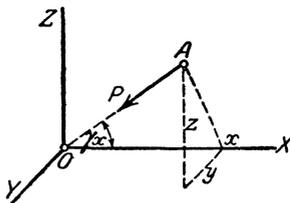


Fig. 20.

falls  $m$  die Masse des angezogenen Punktes  $A$ ,  $\mu$  die Gravitationskonstante und  $\overline{OA} = r$  ist, als Kraft  $P$  den Ausdruck

$$P = \kappa \frac{Mm}{r^2}.$$

Bezeichnet  $\gamma_x$  den Winkel  $AOX$ , und beachten wir, daß  $r \cos \gamma_x = x$ , so folgt für die Komponente  $X$  die Beziehung

$$X = -P \cos \gamma_x = -\kappa Mm \frac{x}{r^3},$$

worin  $r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  ist. In der gleichen Weise finden wir

$$Y = -\kappa Mm \frac{y}{r^3}, \quad Z = -\kappa Mm \frac{z}{r^3}.$$

Nun finden wir

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 3\kappa Mm x \cdot \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial y} = 3\kappa Mm \frac{xy}{r^3}$$

und der gleiche Ausdruck ergibt sich für  $\frac{\partial Y}{\partial x}$ ; es ist sonach die erste der drei Bedingungsgleichungen (17) erfüllt. In der gleichen Weise erkennt man, daß auch den beiden anderen Gleichungen genügt wird. Als Kräftefunktion erhalten wir hier

$$U = -\kappa Mm \int \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3} = -\kappa Mm \int \frac{d(r^2)}{2r^3} = -\kappa Mm \int \frac{dr}{r^2} \\ = \frac{\kappa Mm}{r}.$$

Der negative Wert der Kräftefunktion wird im vorliegenden Falle, wie überhaupt bei Zentralkräften zumeist Potential genannt; bezeichnen wir ihn mit  $V$ , so hat man also

$$V = -\frac{\kappa Mm}{r} = -\frac{\kappa Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Die Punkte im Kraftfeld einer konservativen Kraft, in denen die Kräftefunktion  $U$  den gleichen Wert hat, liegen offenbar auf einer Fläche von der Gleichung

$$(20) \quad U = F(xyz) = \text{Const};$$

sie wird Niveaufläche genannt und zwar wegen der Tatsache, daß die Oberfläche einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit eine Niveaufläche im vorstehenden Sinne ist. Der Veränderlichkeit dieser Konstanten entsprechend gibt es im Kraftfeld unendlich viele Niveauflächen, die ein Büschel bilden. Dabei ordnet sich jedem Punkte des Feldes, z. B. dem Punkt  $x_1 y_1 z_1$ , eine Fläche des Büschels zu, für die die Konstante  $C = F(x_1 y_1 z_1)$  ist.

Daß die Wirkungslinie der Kraft  $P$ , die im Kraftfeld auf den Punkt  $A$  wirkt, in die Normale der Niveaufläche  $U = \text{Const}$  fällt, die durch  $A$  geht, läßt sich leicht erkennen. Wenn nämlich der  $A$  unendlich benachbarte Punkt  $A'$  auf der Niveaufläche durch  $A$  liegt, so muß  $dU = 0$  werden. Nun ist  $dU = dA = P \cdot \cos \varphi \cdot du$ , und da das Bahnelement  $du = \overline{AA'}$  dann auf der Niveaufläche sich befindet, so

folgt auch  $dA = P \cdot \cos \varphi \cdot du = 0$ . Hieraus ziehen wir den Schluß, daß für alle auf der Niveaufläche liegenden Bahnelemente  $\cos \varphi = 0$  sein muß, also  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , womit der Beweis erbracht ist, daß  $P$  senkrecht zur Niveaufläche des Angriffspunktes  $A$  steht.

Geht man von dem Punkte  $A$  zu einem unendlich benachbarten Punkte auf der Normalen der Niveaufläche über, so ordnet sich diesem eine andere Niveaufläche des Büschels und demgemäß eine andere Normale zu. Wenn man in dieser Weise all die konsekutiven Normalen der Flächen des Büschels aufsucht, so hüllen diese Normalen eine Kurve ein, die jede Fläche des Büschels senkrecht durchsetzt. Diese Kurve heißt Kraftlinie. Alle die Kraftlinien, die sich den Punkten einer Niveaufläche zuordnen, bilden eine Schar orthogonaler Trajektorien des Büschels, deren Tangenten die Richtung der entsprechenden Kräfte bestimmen.

Beispiele:

1. Aus dem Ausdruck der Kräftefunktion  $U = -Lz$  für die Schwerkraft, wie er sich bei lotrechter  $Z$ -Achse fand, folgt als Gleichung der Niveaufläche

$$z = \text{const};$$

die Niveauflächen sind folglich horizontale Ebene und die lotrechten Geraden im Kraftfeld bilden die Kraftlinienschar.

2. Für die Newtonsche Anziehungskraft fanden wir als Kräftefunktion

$$U = \frac{\kappa Mm}{r}.$$

Die Gleichung der Niveaufläche folgt daraus  $r = \text{const}$ , oder auch

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}.$$

Die Niveauflächen sind folglich konzentrische Kugelflächen mit dem Anziehungszentrum als gemeinsamem Mittelpunkt. Letzterer ist zugleich Träger des Geraden-Bündels, in das hier die Kraftlinienschar übergeht.

Ändert man  $U$  um einen sehr kleinen Betrag  $\Delta U$ , dann schneidet die Normale im Punkte  $A$  der durch letzteren gehenden Niveaufläche  $U = \text{const}$  die Niveaufläche  $U + \Delta U = \text{const}$  in einem Punkte  $A'$ , dessen Entfernung  $\overline{AA'} = \Delta n$  von  $A$  im allgemeinen sich mit der Lage von  $A$  auf der Fläche  $U = \text{const}$  ändert. Die Arbeit von  $P$  auf dem Wege  $\Delta n$  ist nun  $\Delta A = P \cdot \Delta n$ , weil  $P$  in der Normalen  $n$  der Niveaufläche liegt, und da für eine konservative Kraft  $\Delta A = \Delta U$ , so finden wir

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta n}.$$

Daraus ersieht man, daß  $P$  um so größer sein muß, je kleiner  $\Delta n$ , also je näher zwei benachbarte Niveauflächen sich sind, oder, wie

man sich auch ausdrückt, die Kraft wächst mit der Dichte der Niveauflächen im Kraftfeld.

Die Beziehung für  $P$ , die sich aus vorstehender Beziehung ergibt, falls man  $\Delta U$  durch  $dU$  ersetzt, also

$$(21) \quad P = \frac{dU}{dn},$$

ist nur ein Sonderfall einer viel allgemeineren Beziehung, die aus

$$dA = dU = P \cdot \cos \varphi \cdot ds$$

hervorgeht, falls  $ds$  irgendein Bahnelement des Angriffspunktes  $A$  der Kraft  $P$  bezeichnet, das unter dem Winkel  $\varphi$  gegen  $P$  gerichtet ist. Denn zerlegt man  $P$  in Seitenkräfte in Richtung von  $ds$  und einer dazu Senkrechten, so wird erstere  $S = P \cdot \cos \varphi$ , und folglich

$$(22) \quad S = \frac{dU}{ds}.$$

Für  $ds = du$  geht dann  $S$  in  $P$  selbst über.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft hat die Kräftefunktion mehrerer konservativer Kräfte, die auf denselben Punkt  $A$  wirken. Es seien z. B.  $P_1$  und  $P_2$  zwei derartige Kräfte, und  $U_1$  bzw.  $U_2$  ihre Kräftefunktionen, so daß die  $X$ -Komponenten der ersteren  $X_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x}$ ,  $X_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x}$  geschrieben werden können. Die Komponente  $X$  der Resultierenden  $R = P_1 \hat{+} P_2$  beider Kräfte ist aber nach Bd. II, S. 76, Formel (62) gleich der algebraischen Summe von  $X_1$  und  $X_2$ , also

$$X = X_1 + X_2 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial x},$$

woraus ersichtlich wird, da  $U_1 + U_2 = U$  gesetzt,  $U$  wieder eine Funktion der Koordinaten sein muß, daß

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \text{ und in gleicher Weise } Y = \frac{\partial U}{\partial y}, Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

wird. Wir erkennen somit, daß auch  $R$  eine konservative Kraft ist, deren Kräftefunktion sich zu

$$U = U_1 + U_2$$

findet. Diese Betrachtung auf beliebig viele konservative Kräfte  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte ausgedehnt, liefert den Satz:

Die Resultierende beliebig vieler konservativer Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkte ist wieder eine konser-

vative Kraft, deren Kräftefunktion  $U$  sich als algebraische Summe der Funktionen  $U_k$  der einzelnen Kräfte ergibt, d. h. es ist

$$(23) \quad U = \sum_{k=1}^n (U_k).$$

Häufig kommt der Fall vor, daß die Kräfte unendlich klein sind, so z. B. als Anziehungskräfte  $dP$  der Elemente einer Masse von endlichen Abmessungen, die auf einen materiellen Punkt wirken.

Haben die Kräfte  $dP$  die Eigenschaft, konservativ zu sein, dann ist auch ihre Resultierende eine konservative Kraft mit der Kräftefunktion

$$(23a) \quad U = \int dU;$$

hierin ist das Integral über die Elemente der gesamten anziehenden Masse zu erstrecken.

Beispiel:

Ein homogener Stab  $B_1 B_2$  (s. Fig. 21) wirke nach dem Newtonschen Gesetz anziehend auf den materiellen Punkt  $A$  mit der Masse  $m$ ; es sei also die Anziehungskraft des

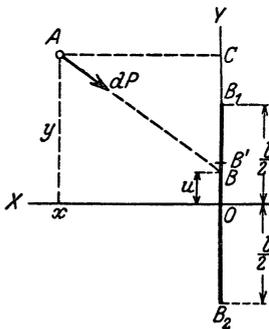


Fig. 21.

Stabelementes  $dM$  im Punkte  $B$

$$dP = \frac{\kappa m dM}{r^2},$$

falls  $\overline{AB} = r$  gesetzt wird und  $\kappa$  die Anziehungskonstante bezeichnet. Die  $dP$  entsprechende Kräftefunktion ist folglich nach dem 2. Beispiel auf S. 34

$$dU = \frac{\kappa m dM}{r};$$

hierin ist  $r = \sqrt{x^2 + (y-u)^2}$ , falls  $x, y$  die Koordinaten von  $A$  bezeichnen und  $\overline{OB} = u$  gesetzt wird. Wenn  $\overline{BB'} = du$  die Länge des Stabelementes ist und  $dM = \mu \cdot du$  eingeführt wird (also  $M = \mu \cdot l$ ), so geht  $dU$  über in

$$dU = \kappa m \mu \cdot \frac{du}{r}.$$

Nach (23a) findet man sonach

$$U = \int dU = \kappa m \mu \int_{u = -\frac{l}{2}}^{u = +\frac{l}{2}} \frac{du}{\sqrt{x^2 + (y-u)^2}};$$

hierin ist die Integration über alle Elemente des Stabes zu erstrecken. Da nun

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{d\left(\frac{y-u}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y-u}{x}\right)^2}} = - \left[ \ln\left(\frac{y-u}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y-u}{x}\right)^2}\right) \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}$$

$$= \ln \frac{y + \frac{l}{2} + \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2}}{y - \frac{l}{2} + \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2}},$$

so folgt als die gesuchte Kräftefunktion

$$U = \kappa M m l n \frac{y - \frac{l}{2} + \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2}}{y + \frac{l}{2} + \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2}}.$$

Die Niveaufäche  $U = \text{const}$  wird hier zu einer Umdrehungsfläche, deren Achse die Gerade  $B_1 B_2$  ist und deren Meridiankurve die Gleichung

$$\frac{y - \frac{l}{2} + \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2}}{y + \frac{l}{2} + \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2}} = \text{const}$$

hat; die Kurve ist von der 4. Ordnung und symmetrisch zur  $X$ -Achse.

## 5. Kap. Die Prinzipie der kinetischen Energie und der Flächen.

Bezeichnet  $m$  die Masse und  $v$  die Geschwindigkeit der Bewegung eines materiellen Punktes in irgendeiner Lage gegen den Bezugskörper, so nennt man die Größe

$$(24) \quad W = \frac{m v^2}{2}$$

die kinetische Energie oder lebendige Kraft oder auch Wucht des Punktes in dieser Lage. Auf diese führt, wie schon Bd. II, S. 64 gezeigt wurde, unmittelbar der Ausdruck für die Tangentialkraft

$$P_t = m b_t = m \frac{dv}{dt} = m v \frac{dv}{du} = \frac{d}{du} \left( \frac{m v^2}{2} \right)$$

und in Berücksichtigung des Umstandes, daß  $dA = P \cdot \cos \varphi \cdot du = P_t \cdot du$ , auf die wichtige Beziehung

$$(25) \quad dW = dA,$$

welche sagt, daß bei jeder unendlich kleinen **Lagenänderung** des Punktes die **Änderung** der kinetischen Energie gleich der **Arbeit** ist, die von den **Kräften**, die auf den Punkt wirken, verrichtet wird.

Da nun als Ausdruck für die Arbeit der Kräfte auf einem endlichen Wege ihres Angriffspunktes aus der Lage  $A_0(x_0 y_0 z_0)$  in die beliebige Lage  $A(xyz)$  (s. Bd. II, S. 64, Formel (47))

$$A = \int_{u_0}^u P_t \cdot du = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} dA$$

gefunden wurde, so erhalten wir hier nach (25)

$$A = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} dW = \int_{v=v_0}^{v=v} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

oder auch

$$(26) \quad A = W - W_0.$$

Diese Gleichung enthält das sogenannte Prinzip der kinetischen Energie oder lebendigen Kraft, zunächst für einen freien materiellen Punkt, nämlich den Satz:

Ändert ein Punkt unter dem Einfluß von Kräften seine Lage gegen den Bezugskörper, so ist die Änderung seiner kinetischen Energie oder Wucht gleich der von den Kräften verrichteten Arbeit.

Man kann nun leicht nachweisen, daß die Gleichung (26) ein Integral der Differentialgleichungen (I) der Bewegung des Punktes ist. Denn multiplizieren wir letztere der Reihe nach mit  $dx$ , bzw.  $dy$ , bzw.  $dz$ , und addieren sie, so finden wir zunächst

$$m \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot dx + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot dy + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot dz \right\} = X dx + Y dy + Z dz = dA.$$

Beachten wir weiter, daß  $\frac{dx}{dt} = v_x$ , also gleich der Komponente von  $v$  in Richtung der  $X$ -Achse ist, und somit  $\frac{d^2 x}{dt^2} \cdot dx = \frac{dv_x}{dt} \cdot dx = \frac{dv_x}{dx} \cdot v_x \cdot dx = v_x dv_x = d\left(\frac{v_x^2}{2}\right)$  wird und analog  $\frac{d^2 y}{dt^2} \cdot dy = d\left(\frac{v_y^2}{2}\right)$ ,  $\frac{d^2 z}{dt^2} \cdot dz = d\left(\frac{v_z^2}{2}\right)$ , dann läßt sich die linke Seite vorstehender Gleichung auf die Form

$$m \left\{ d\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{v_z^2}{2}\right) \right\} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dW$$

bringen und damit ist erwiesen, daß  $dW = dA$  und folglich (26) ein allgemeines Integral der Differentialgleichungen (I) ist, weil bekanntlich die Beziehung  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$  besteht.

Beispiele:

1. Soll einem materiellen Punkte, dessen Masse  $m = 5 \text{ kg}$  ist, die Geschwindigkeit  $v = 3,6 \text{ ms}^{-1}$  erteilt werden, so ist hierzu eine Arbeit  $A$  erforderlich, die nach (26) sich zu

$$A = W - W_0 = \frac{m}{2} v^2 - \frac{m}{2} v_0^2$$

ergeben würde, wenn der Punkt bereits die Geschwindigkeit  $v_0$  besaß. War er aber in Ruhe, also  $v_0 = 0$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= m \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,6^2 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 32,4 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 324 \cdot 10^6 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2} \\ &= 324 \cdot 10^6 \text{ Erg} = 324 \text{ Megerg} \end{aligned}$$

im absoluten Maßsystem und im technischen  $= 330 \text{ mkg}$ .

Wie hieraus ersichtlich, wird nur die Größe der Arbeit bestimmt, aber nichts über die Größe der Kraft und des Weges ausgesagt. Wohl aber läßt sich der Schluß ziehen, daß die wirkende Kraft im Mittel um so größer sein muß, je kürzer der Weg ihres Angriffspunktes ist, und umgekehrt. Das ist z. B. von Bedeutung für die Beurteilung der Muskelkräfte des Armes bei dem Wurf eines schweren Körpers, der die Hand mit einer gewissen Geschwindigkeit verlassen soll. Ferner ist zu beachten, daß die Richtung der erteilten Geschwindigkeit keinerlei Einfluß auf die Größe der Arbeit hat.

2. Ein schwerer Körper bewege sich auf horizontaler Ebene in gerader Linie, beginne seine Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und komme durch den hemmenden Einfluß der gleitenden Reibung auf dem Wege  $w$  zur Ruhe. In diesem Falle ergibt sich aus (26), weil hier  $v = 0$ , also auch  $W = 0$  ist,

$$A = -W_0 = -\frac{m v_0^2}{2},$$

also eine negative, d. h. eine Verzögerungsarbeit. Ist  $L$  die Schwere des Körpers und  $\mu$  die als unveränderlich angesehene Ziffer der gleitenden Reibung, so können wir als Reibungskraft die unveränderliche Kraft  $K = \mu L$  einführen, und dann, weil  $A = -K \cdot w = -\mu L w$  sein muß, aus der Gleichung

$$-\mu L w = -\frac{m v_0^2}{2}$$

den Weg  $w$  berechnen, nach dem der Körper zur Ruhe kommt, oder die Reibungsziffer, die sich zu  $\mu = \frac{v_0^2}{2 g w}$  findet, weil  $L = m g$  ist.

Sind die wirkenden Kräfte konservative, so wird nach (19)  $A = U - U_0$ ; es geht sonach (26) über in

$$(26 a) \quad U - U_0 = W - W_0$$

oder auch

$$(26 b) \quad U - W = U_0 - W_0 = \text{Const.}$$

Aus beiden Gleichungen ersieht man, daß bei konservativen Kräften die Wucht im gleichen Maße zu- oder abnehmen muß, wie die Kräftefunktion, ferner, daß die Geschwindigkeit des bewegten Punktes der Größe nach die gleiche ist in allen Schnittpunkten der Bahn mit einer Niveaufläche, und endlich, daß die Geschwindigkeit

auf jedem beliebigen Wege des Punktes zwischen zwei Niveauflächen sich um den gleichen Betrag ändert. Daraus geht u. a. hervor, daß die Arbeit der Kräfte Null ist auf jedem Wege des Angriffspunktes von einem Punkte einer Niveaufläche zu einem beliebigen anderen auf ihr.

Beispiele:

1. Bei dem schiefen Wurf im luftleeren Raum (s. S. 19) erhält (26a) die besondere Form

$$-Lz + Lz_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

aus der sofort die bekannte Beziehung

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2g(z - z_0)}$$

hervorgeht in Übereinstimmung mit der Formel (7) in Bd. I (S. 19), jedoch in wesentlich erweiterter Bedeutung. Denn sie zeigt, daß die Geschwindigkeit  $v$  des Punktes in derselben Höhe  $h = z - z_0$  unter oder über der Ausgangslage die gleiche ist ganz unabhängig von der Bahn des Punktes. Aber sie zeigt weiter, daß sich jeder Höhe  $h$  eine ganz bestimmte Vermehrung der kinetischen Energie zuordnet, die der Schwerarbeit beim Durchfallen der Höhe  $h$  entspricht. Besonders einfach tritt das beim freien Fall ( $v_0 = 0$ ) im luftleeren Raume hervor, weil dann  $Lh = \frac{mv^2}{2}$  wird, also die Schwerarbeit  $Lh$  sich in kinetische Energie umwandelt. Umgekehrt wird bei dem lotrechten Wurf nach oben mit der Geschwindigkeit  $v_0$  die kinetische Energie  $m\frac{v_0^2}{2}$  in die der Steighöhe  $H = \frac{v_0^2}{2g}$  entsprechende Arbeit  $LH$  umgesetzt.

2. Bei der Planetenbewegung (s. S. 23) nimmt (21a) die Gestalt

$$\kappa Mm \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2)$$

an, aus der ersichtlich wird, daß ein Planet in derselben Entfernung  $r$  von der Sonne auch die gleiche Geschwindigkeit besitzt. Die aus dieser Beziehung folgende Formel für

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\kappa M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

läßt weiter erkennen, daß  $v$  mit wachsendem  $r$  abnimmt und umgekehrt mit abnehmendem  $r$  wächst. Würde nun der Betrag  $v_0^2 - \frac{2\kappa M}{r_0}$  negativ sein, so könnte es bei sehr großem  $r$  eintreten, daß der Ausdruck unter der Wurzel ebenfalls negativ, also  $v$  imaginär würde. In diesem Falle kann der Bahnkegelschnitt keine unendlich fernen Punkte haben, also keine Parabel oder Hyperbel sein. Wir finden sonach, daß die Bahn dann und nur dann eine Ellipse ist, falls  $v_0^2 < \frac{2\kappa M}{r_0}$ , eine Hyperbel, falls  $v_0^2 > \frac{2\kappa M}{r_0}$  und eine Parabel für  $v_0^2 = \frac{2\kappa M}{r_0}$ . Die Richtung von  $v_0$  kommt dabei gar nicht in Frage. Diesem Ergebnis läßt sich noch eine andere Form geben. Beginnt ein materieller Punkt seine Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit in unendlich

großer Entfernung von der Sonne, so folgt für seine Geschwindigkeit  $w$  in der Entfernung  $\varrho$  von ihr aus (26b) sofort die Beziehung

$$\frac{\kappa M m}{\varrho} - \frac{m w^2}{2} = 0.$$

Falls  $\varrho = r_0$  gesetzt wird, finden wir  $w = \sqrt{\frac{2 \kappa M}{r_0}}$ , und wir kommen damit zu dem Schluß, daß die Bahn des Planeten eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem sich

$$v_0 \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} w$$

herausstellt.

In der Form (26b) des Prinzipes der kinetischen Energie für konservative Kräfte tritt als wesentlich hervor, daß die Wucht in dem gleichen Maße wächst oder abnimmt, wie die Kräftefunktion. Das läßt sich noch in einer etwas allgemeineren Form zum Ausdruck bringen, und zwar durch Einführung des Begriffes der potentiellen oder Lagen-Energie, worunter die Größe  $V = -U$  verstanden werden soll. Hiermit geht (26b) über in

$$(27) \quad V + W = h,$$

falls  $h$  eine Konstante bedeutet. Aus dieser Beziehung ersieht man, daß die kinetische Energie in dem Maße abnehmen muß, als die potentielle zunimmt und umgekehrt.

Auf die Wirkung der Schwere angewendet würde diese Beziehung bedeuten, daß bei der Wurfbewegung die Geschwindigkeit, bzw. die kinetische Energie in dem Maße abnehmen muß, als die Höhe der Lage des Punktes zunimmt. Umgekehrt wächst die kinetische Energie, je tiefer der Punkt nach abwärts sich bewegt. Es wandelt sich also bei dem Bewegungsvorgang immer die potentielle in kinetische Energie um und umgekehrt. Diese Umwandlung der Energie aus einer Art in eine andere tritt uns besonders bei den hydraulischen Motoren entgegen. Durch die Zuleitung des Wassers in den Leitungen wird das „Gefälle“ in Geschwindigkeit umgesetzt und letztere dem Wasser wieder durch das Arbeit verrichtende Turbinenlaufrad bis auf einen kleinen Rest entzogen; es wird also erst die potentielle Energie (das Gefälle) in kinetische Energie umgewandelt, die dem Wasser bei dem Austritt aus der Leitung innewohnt, und die ihm dann durch das Laufrad wieder entzogen und in Form von mechanischer Arbeit abgegeben wird.

Die Gleichung (27) ist nur ein Sonderfall einer wesentlich allgemeineren, die auch für andere Energieformen gilt. Wir erhalten diese letztere durch Einführung des Begriffes der Gesamtenergie  $E$ , worunter hier die Größe

$$E = V + W$$

verstanden werden soll, so daß (27) in

$$E = \text{const} = h$$

übergeht. Diese Gleichung heißt das Prinzip der Erhaltung der Energie. Es umfaßt in seiner weitesten Gestalt alle Energieformen, also nicht nur die mechanischen, sondern auch physikalischen (z. B. der Wärme, der Elektrizität usw.) und chemischen. In der Dynamik der starren Körper hat es aber nur die Bedeutung, welche in der Gleichung (27) zum Ausdruck gelangt.

Daß das Prinzip der kinetischen Energie auch gilt, wenn die wirkenden Kräfte von der Geschwindigkeit abhängen, soll an dem Beispiel des freien Falles im luftgefüllten Raume gezeigt werden. Ist der Luftwiderstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, dann erhalten wir, wie auf S. 10 dargetan, als Differentialgleichung dieser Bewegung

$$m \frac{dv}{dt} = mg \left( 1 - \frac{v^2}{\beta^2} \right),$$

in der  $v = \frac{dx}{dt}$  und  $\beta$  eine Konstante ist. Benutzen wir, daß  $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$  gesetzt werden kann, so findet sich aus ihr

$$\begin{aligned} -\frac{2gx}{\beta^2} &= -\int_{v=v_0}^{v=v} \frac{2v dv}{\beta^2 - v^2} + \text{Const} = \left[ \ln(\beta^2 - v^2) \right]_{v_0}^v + \text{Const} \\ &= \ln \left( \frac{\beta^2 - v^2}{\beta^2 - v_0^2} \right) + \text{Const}. \end{aligned}$$

Da sich hieraus für  $x = x_0 = 0$  und  $v = v_0 = 0$  die Konstante zu Null ergibt, finden wir

$$\frac{\beta^2 - v^2}{\beta^2 - v_0^2} = \frac{\beta^2 - v^2}{\beta^2} = e^{-\frac{2gx}{\beta^2}}$$

und hiermit

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m \beta^2 \left( 1 - e^{-\frac{2gx}{\beta^2}} \right) = W - W_0,$$

weil  $W_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$  ist. Andererseits ist die von der wirkenden Kraft  $P = mg - mg \frac{v^2}{\beta^2}$  verrichtete Arbeit

$$A = \int_{x_0=x}^{x=x} P dx = mg \int_{x=0}^{x=x} \left( 1 - \frac{v^2}{\beta^2} \right) dx = mg \int_0^x e^{-\frac{2gx}{\beta^2}} dx = \frac{m\beta^2}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2gx}{\beta^2}} \right)$$

und dieser Ausdruck stimmt mit dem für  $W - W_0$  gefundenen völlig

überein, womit die obige Behauptung in diesem Falle erwiesen ist. Gleichwohl hat das Prinzip der kinetischen Energie als Integral hier keine Bedeutung, denn der Ausdruck für die Arbeit läßt sich erst ermitteln, bzw. die Integration erst ausführen, wenn man  $v$  als Funktion von  $x$  bereits kennt. Das gilt auch allgemein, wenn die Kräfte ganz oder zum Teil von der Geschwindigkeit abhängen.

Ein weiteres allgemeineres Integral gilt für die Zentralbewegungen von Punkten, also für solche, bei denen die Wirkungslinie der Kraft dauernd durch einen ruhenden Punkt geht. In diesem Falle wird die Bahn eine ebene Kurve, wie S. 16 gezeigt wurde, und wir erhalten bei Verwendung von Polarkoordinaten, weil  $P_c = 0$ , aus der zweiten der Differentialgleichungen (Ia)

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist die Gleichung (9), nämlich

$$(29) \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} = c,$$

welche sagt, daß der Ausdruck links eine Konstante hinsichtlich der Zeit ist. Unter Benutzung des Begriffes der Flächengeschwindigkeit (s. Bd. I, S. 59) läßt sie sich auch in der Form

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} c$$

schreiben und daraus durch Integration nach der Zeit die Beziehung

$$(30) \quad F = \frac{1}{2} c (t - t_0)$$

ableiten, in der  $F$  die Fläche bezeichnet, die der Fahrstrahl  $r$  (s. Bd. I, Fig. 51) in der Zeit  $(t - t_0)$  überstreicht, und die als zweites Keplersches Gesetz bekannt ist. Das in der Gleichung (29) enthaltene Integral der Differentialgleichungen (Ia) wird das Prinzip der Erhaltung der Flächen genannt.

Verwendet man an Stelle von Polarkoordinaten in der Ebene rechtwinklige Punktkoordinaten  $x, y$  und legt den Koordinatenanfang in den Zentralpunkt, durch den die Kraft geht, so läßt sich das genannte Prinzip auch in der Form

$$(29a) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

schreiben, wie aus der Gleichung (14a) auf S. 28 hervorgeht.

Das Prinzip der Erhaltung der Flächen gilt auch, wenn die auf den Punkt wirkende Kraft dauernd eine ruhende Gerade schneidet.

Denn wählen wir diese als  $Z$ -Achse eines Zylinderkoordinatensystems, dann wird  $P_c = 0$  und die zweite der Differentialgleichungen (Ib) der Bewegung des Punktes zeigt unmittelbar das Bestehen der Gleichung (29). Das genannte Prinzip und die Beziehung (30) gelten sonach für die projizierte Bewegung des Punktes auf eine Ebene senkrecht zu jener Geraden, und die Fläche  $F$  stimmt überein mit der Projektion der Fläche, die das Lot  $r$  vom bewegten Punkte auf jene Gerade während der Zeit  $(t - t_0)$  überstreicht.

## 6. Kap. Die gebundene Bewegung eines Punktes.

Die Bewegung eines Punktes heißt gebunden oder gezwungen, wenn alle Lagen desselben sich auf einer gegebenen Kurve oder Fläche befinden. Hierbei können Kurve und Fläche starr oder veränderlich, sie können in Ruhe oder in Bewegung gegen den Bezugskörper sein. Wir beschränken uns hier auf die gebundene Bewegung eines Punktes auf einer starren ruhenden Kurve oder Fläche und stellen uns die Aufgabe, die Bewegung auf der Kurve oder Fläche zu ermitteln, wenn auf den Punkt beliebige Kräfte wirken, also die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes aufzusuchen.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Wirkung einer Kraft auf einen freien materiellen Punkt eine andere ist, als die auf einen an eine Kurve oder Fläche gebundenen. Da wir die Differentialgleichungen nur für die freie Bewegung eines Punktes kennen, so müssen wir die für die gebundene Bewegung auf die der ersteren zurückführen, und das ist möglich durch Einführung einer Hilfskraft, der sogenannten Zwangskraft (oder auch Kurven- bzw. Flächenstützkraft), die von solcher Größe und Richtung gewählt wird, daß der Punkt seine wirkliche Bewegung unter dem Einfluß der äußeren und der Zwangskraft als freie beschreibt. Wir wollen dieses Verfahren der Zurückführung der gebundenen Bewegung auf eine freie der Anschaulichkeit wegen zuerst für den Fall der ebenen Kurve durchführen, dann für die Raumkurve und schließlich für die Fläche.

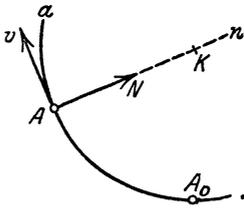


Fig. 22.

Ganz einfach wird die Ermittlung der Zwangskraft, wenn wir zunächst annehmen, daß der Punkt keinen äußeren Kräften unterworfen sei. Ist  $a$  (s. Fig. 22) die Kurve, auf der sich der materielle Punkt  $A$  bewegen soll (man stelle sich  $A$  als eine kleine Kugel vor, die in einer engen gekrümmten Röhre sich bewegt), dann besteht der Einfluß der Röhre auf die Bewegung, falls von der Reibung

hierbei ganz abgesehen werden darf, darin, daß sie dauernd die Richtung der Bewegung des Punktes ändert, also die Richtung seiner Geschwindigkeit  $v$  ändert, nicht aber die Größe der letzteren. Das kommt aber auf das gleiche hinaus, als ob die Kurve  $a$ , bzw. die Röhre, dem Punkte  $A$  eine Zentripetalbeschleunigung  $b_n = v \frac{d\tau}{dt} = \frac{v^2}{\rho}$  (s. S. 15) erteilte, also auf ihn eine Zentripetalkraft  $P_n = m b_n$  wirkte. Die Zwangskraft  $N$ , die die Bewegung des Punktes als freie bewirken würde, müßte sonach mit  $P_n$  übereinstimmen, d. h. senkrecht zur Kurve stehen, nach dem Krümmungsmittelpunkt  $K$  der Kurve hin gerichtet sein und die Größe

$$(31) \quad N = m \frac{v^2}{\rho}$$

haben, falls  $\rho$  den Krümmungsradius der Kurve an jener Stelle bezeichnet.

Setzt man die Bewegung des Punktes auf der Kurve als reibungsfrei voraus, so ist sie notwendig gleichförmig, also  $v = \text{const} = v_0$ , weil keine Tangentialkraft vorhanden ist, die  $v$  der Größe nach ändern würde. Die Berücksichtigung der Reibung dagegen nötigt zur Annahme einer  $v$  entgegengesetzt gerichteten Tangentialkraft  $P_t = \mu \cdot N = \mu m \frac{v^2}{\rho}$ , und dann besteht für die Bewegung auf der Kurve die Differentialgleichung

$$m \frac{dv}{dt} = -P_t = -\mu m \frac{v^2}{\rho},$$

aus der sich unter Benutzung der Beziehung  $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{du}$  leicht

$$v^2 = v_0^2 \cdot e^{-2\mu \int_{u_0}^u \frac{du}{\rho}}$$

findet; hierin ist  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit und  $\rho$  eine Funktion der Bogenlänge  $\widehat{OA} = u$  auf der Kurve, während  $\mu$  als unveränderlich angesehen wurde. Ist die Kurve ein Kreis vom Radius  $r$ , also  $\rho = r$ , so erhält man einfacher

$$v = v_0 e^{-\frac{\mu}{r} \cdot u},$$

falls  $\widehat{OA}_0 = u_0 = 0$  angenommen wird, und hieraus, weil  $v = \frac{du}{dt}$ , durch Integration

$$u = \frac{r}{\mu} \ln \left( 1 + \frac{\mu v_0}{r} \cdot t \right).$$

Die Ausdrücke für  $v$  und  $u$  zeigen, daß  $v$  erst nach unendlich großer Zeit und Entfernung  $u$  zu Null wird, d. h. der Punkt zur Ruhe kommt.

Wirkt auf den Punkt eine Kraft  $P$  unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Geschwindigkeit  $v$  (s. Fig. 23) und wir zerlegen diese in die Tangentialkraft

$$P_t = P \cdot \cos \varphi$$

und die Normalkraft

$$P_n = P \sin \varphi,$$

dann ersieht man sofort, daß der Zwang, den die Kurve  $a$  auf den Punkt  $A$  ausübt, keinen Einfluß auf  $P_t$  haben kann, sondern sich nur in Richtung der Normalen  $a$  geltend macht. Die Zwangskraft  $N$ , die auf  $A$  wirken muß, damit dieser als freier die Bahn  $a$  beschreibt, muß daher senkrecht zur Kurve gerichtet und von solcher Größe sein, daß sie mit  $P_n$

zusammengesetzt die Zentripetalkraft  $\frac{mv^2}{\rho}$  ergibt. Es muß sonach die Beziehung

$$N + P_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

bestehen, aus der

$$(32) \quad N = m \frac{v^2}{\rho} - P \sin \varphi$$

hervorgeht. Dieser Ausdruck für  $N$  gilt ohne Einschränkung, d. h. für alle  $\varphi$ , wenn der Punkt die Kurve nicht verlassen kann, wie das z. B. bei einer in gekrümmter Röhre sich bewegendem Kugel der Fall ist.

Wenn dagegen der Punkt auf einer Seite der Kurve sich befindet, so kann es eintreten, daß er, falls er sonst nicht behindert wird, die Kurve verläßt, und da sind zwei Fälle zu unterscheiden:

A. Der Punkt befinde sich auf der konkaven Seite der Kurve. Da die Zwangskraft  $N$  unter allen Umständen nach der konkaven Seite der Kurve gerichtet sein muß, so folgt, daß  $N$  nicht negativ werden darf, also der Bedingung

$$m \frac{v^2}{\rho} \geq P \sin \varphi$$

durch  $P$  und  $\varphi$  zu genügen ist. Wenn  $\varphi \geq \pi$ , wird  $N$  für alle Größen von  $P$  positiv, dagegen nicht, falls  $\varphi < \pi$ . Denn im letzteren Falle

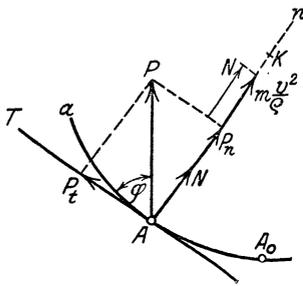


Fig. 23.

könnte  $P \sin \varphi \geq m \frac{v^2}{\rho}$  werden, und das hätte zur Folge, daß der Punkt  $A$  die Kurve  $a$  an der Stelle, wo  $P \sin \varphi = m \frac{v^2}{\rho}$  wird, verläßt.

Als Beispiel sei auf die bekannte Schleifenfahrt hingewiesen, die in abstrakter Form ein materieller schwerer Punkt auf der Innenseite der Schleife ausführt (s. Fig. 24), wenn die Geschwindigkeit  $v_m$  an der höchsten Stelle der Schleife so groß ist, daß  $N \geq 0$ , oder

$$m \frac{v_m^2}{\rho} \geq mg.$$

Daraus folgt die erforderliche kleinste Geschwindigkeit

$$v_m = \sqrt{\rho \cdot g}.$$

B. Liegt der Punkt auf der konvexen Seite der Kurve, dann hat auch die Zwangskraft  $N$  die Richtung nach außen, und da die Zentripetalkraft  $m \frac{v^2}{\rho}$  notwendig nach dem Krümmungsmittelpunkte  $K$  hinwirkt, so erkennt man, daß die Kraft  $P$  bzw. ihre normale Kom-

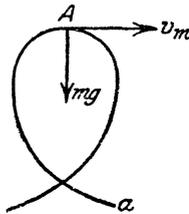


Fig. 24.

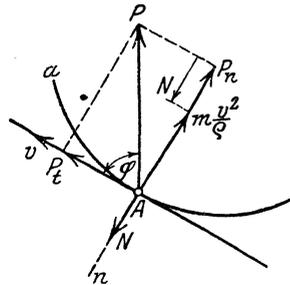


Fig. 25.

ponente  $P_n$  den Punkt auf der Kurve festhalten muß. Das erfordert nicht nur, daß  $0 < \varphi < \pi$ , sondern auch, daß

$$P \sin \varphi \geq m \frac{v^2}{\rho}$$

(s. Fig. 25). Der Punkt verläßt dann die Kurve in tangentialer Richtung, sobald  $P \sin \varphi = m \frac{v^2}{\rho}$  geworden ist.

An dem Beispiel eines schweren Punktes auf einer Kurve in vertikaler Ebene erkennt man leicht den Verlauf der Bewegung in diesem Falle. Hier ist (s. Fig. 26, S. 46)  $P = mg$  und der Punkt bleibt so lange auf der Kurve, als

$$mg \sin \varphi \geq \frac{mv^2}{\rho}.$$

Dagegen verläßt er sie von der Stelle  $A_1$  an, in welcher

$$mg \sin \varphi_1 = \frac{m v_1^2}{\rho_1}.$$

Ist die Kurve ein Kreis vom Radius  $r$ , und beginnt der Punkt seine Bewegung aus der Ruhelage ( $v_0 = 0$ ) in der höchsten Stelle des Kreises, unter der der Punkt  $A_1$  um  $z_1$  tiefer liegt, so folgt aus dem Prinzip der kinetischen Energie sofort  $\frac{m v_1^2}{2} = mg z_1$ . Ferner ist  $\sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{r^2 - z_1^2}}{r}$ , so daß wegen  $\rho_1 = r$  die Bedingungsgleichung die Gestalt

$$\frac{mg}{r} \sqrt{r^2 - z_1^2} = 2 mg \frac{z_1}{r}$$

annimmt. Damit findet sich  $z_1 = \frac{r}{\sqrt{5}} = 0,4472 r$  als Ordinate der Stelle, an welcher der Punkt  $A$  den Kreis verlassen würde. Vorausgesetzt wird aber hierbei, daß die Bewegung auf der Kurve reibungsfrei ist.

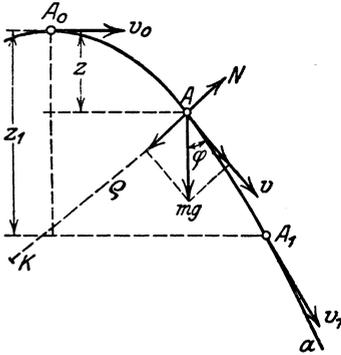


Fig. 26.

Mit Hilfe der Zwangskraft  $N$  lassen sich nun sofort die Differentialgleichungen der Bewegung

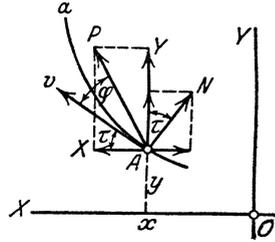


Fig. 27.

des Punktes  $A$  auf der vorgeschriebenen Kurve  $a$  als die einer freien Bewegung nach (I) aufstellen, nämlich in der Form (s. Fig. 27)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X - N \sin \tau, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \tau,$$

falls  $\tau$  den Winkel der Kurventangente in  $A$  mit der  $X$ -Achse bezeichnet. Ist  $F(x, y) = 0$  die Gleichung der Kurve, so folgt aus dieser bekanntlich  $\tan \varepsilon = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y}$  und damit  $\sin \tau$  und  $\cos \tau$  als Funktionen von  $x$  und  $y$ . Setzen wir zur Abkürzung

$$N : \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} = \lambda,$$

so nehmen die Differentialgleichungen die Formen

$$(33) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}$$

an und diese bestimmen zusammen mit der Kurvengleichung  $F(xy) = 0$  die Koordinaten als Funktionen der Zeit und  $\lambda$ , also auch die Stützkraft  $N$ .

Die Differentialgleichung, die aus (33) durch Elimination von  $\lambda$  folgt, ist aber meist sehr ungeeignet zur Lösung von Aufgaben, weil sie zu verwickelt wird. Man hat einfachere Wege zum Ziele. Ist es z. B. möglich, die Tangentialkraft  $P_t$ , d. i. die tangentielle Komponente  $P_t = P \cdot \cos \varphi$ , als Funktion der Bogenlänge  $\widehat{A_0 A} = u - u_0$  darzustellen, dann wird die Ermittlung der Bewegung auf der Kurve durch Integration der einen Differentialgleichung

$$(34) \quad m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2 u}{dt^2} = P_t$$

geleistet.

Noch kürzer gestaltet sich die Benutzung des Prinzips der kinetischen Energie, falls dieses anwendbar ist, also  $P$  nicht von der Geschwindigkeit  $v$  abhängt. Denn die Zwangskraft  $N$  verrichtet keine Arbeit bei der Bewegung des Punktes  $A$ , da sie senkrecht zur Bahn steht. Es ist also die Arbeit von  $P$  und  $N$  die gleiche, wie die von  $P$  allein und folglich gilt die Gleichung (26), d. i.

$$\frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = A = \int_{u_0}^u P \cos \varphi du = \int_{x_0 y_0}^{xy} (X dx + Y dy)$$

für die gebundene Bewegung genau in der gleichen Gestalt, wie für die freie. Aus dieser Gleichung erhält man sofort

$$v = \frac{du}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \frac{A}{m}},$$

und daraus, falls  $A$  als Funktion von  $u$  darstellbar ist,

$$t = \pm \int \frac{du}{\sqrt{v_0^2 + 2 \frac{A}{m}}} + \text{Const};$$

die inverse Funktion  $u = f(t)$  gibt die Lösung der Aufgabe, die Bewegung von  $A$  auf der Kurve zu ermitteln.

Ist die Kraft  $P$  eine konservative, also  $A$  in der Form  $U - U_0$  darstellbar, so ist es unter Umständen zweckmäßig, im Prinzip der kinetischen Energie  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$  zu setzen und

aus der Kurvengleichung  $F(xy) = 0$  die folgende

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

abzuleiten; dann lassen sich  $\frac{dx}{dt}$  und  $\frac{dy}{dt}$  einzeln ermitteln und die entsprechenden Differentialgleichungen unter Benutzung der Kurvengleichung integrieren.

Beispiele:

1. Für einen schweren Punkt  $A$  auf einer unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont geneigten Geraden  $a$  (s. Fig. 28) wird die Zwangskraft  $N = mg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mg \cos \alpha$ , weil  $\varrho = \infty$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$  ist. Die Diffe-

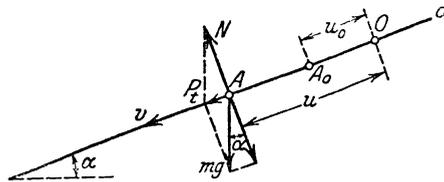


Fig. 28.

rentialgleichung (34) aber erhält, weil hier  $P_t = mg \sin \alpha$ , die Gestalt

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = mg \sin \alpha;$$

die Bewegung ist folglich eine gleichmäßig beschleunigte oder verzögerte geradlinige Bewegung mit der Beschleunigung  $g \sin \alpha$ , für welche die Gleichung

$$u = u_0 + v_0(t - t_0) \pm \frac{1}{2} g \sin \alpha (t - t_0)^2$$

besteht.

2. Die Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kreis in vertikaler Ebene ist die gleiche Bewegung, wie die eines sogen. mathematischen

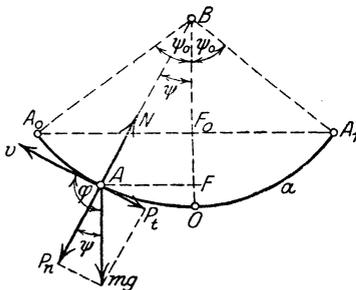


Fig. 29.

Pendels, das aus einemmasse- bzw. schwerelosen Faden besteht, der in einem Endpunkt  $B$  (s. Fig. 29) befestigt und am anderen Ende  $A$  mit einem schweren Punkt belastet ist. Wählen wir die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in einer lotrechten Ebene, so bewegt sich  $A$  auf einem Kreis  $B$ , dessen Radius gleich der Fadenlänge  $l$  ist. Die Zwangskraft wird hier

$$N = mg \cos \psi + m \frac{v^2}{l},$$

weil  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi$  und  $\varrho = l$  ist. Sie ist

entgegengesetzt gleich der Spannkraft  $S$  des Fadens, und diese muß als Zugspannkraft stets größer als Null sein, falls die Bewegung auf dem Kreise

erfolgen soll. Da ferner  $P_t = mg \cos \varphi = mg \cos \left( \frac{\pi}{2} + \psi \right) = -mg \sin \psi$ , so geht die Differentialgleichung (34) hier über in

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -mg \sin \psi.$$

Legen wir den Bezugspunkt  $O$  auf dem Kreise in die tiefste Stelle, so wird, weil  $\widehat{OA} = u = l \cdot \psi$ , aus vorstehender Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \psi;$$

diese ist die Differentialgleichung des mathematischen Pendels. Ihr erstes Integral deckt sich, wie man sich leicht überzeugt, mit dem aus dem Prinzip der kinetischen Energie folgenden, nämlich

$$\frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = -mg(z - z_0);$$

in ihm ist  $z = \overline{BF}$ ,  $z_0 = \overline{BF_0}$  und der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck die Arbeit der Schwere  $mg$  des Punktes auf seinem Wege von  $A_0$  bis  $A$ . Machen wir die Annahme, daß  $A_0$  die höchste Lage des Punktes auf dem Kreise sei, in dem also  $v_0 = 0$  wird, so folgt

$$v = \frac{du}{dt} = \pm \sqrt{2g(z - z_0)}$$

und mit  $du = l d\psi$ ,  $z = l \cos \psi$ ,  $z_0 = l \cos \psi_0$

$$\frac{d\psi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \psi - \cos \psi_0)}.$$

Das doppelte Vorzeichen von  $v$  entspricht dem Umstande, daß für dasselbe  $z$  die Geschwindigkeit  $v$  positiv ist für den Hingang und negativ für den Rückgang des Pendels. Setzen wir voraus, daß die Bewegung des Pendels in  $A_0$  aus der Ruhelage beginne, so wird  $v$  negativ und folglich

$$\frac{d\psi}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \psi - \cos \psi_0)}.$$

Daraus folgt

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \psi_0}},$$

falls  $t_0 = 0$  angenommen, d. h. die Zeit vom Bewegungsbeginn in  $A_0$  gerechnet wird. Setzen wir  $\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\psi}{2}$  ein, so geht  $t$  über in

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\psi}^{\psi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\psi_0}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}}$$

und wenn ferner als Veränderliche  $\varepsilon$  eingeführt wird durch die Beziehung  $\sin \frac{\psi}{2} = \sin \frac{\psi_0}{2} \cdot \sin \varepsilon$ , so erhält man

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \cdot \sin^2 \varepsilon}}.$$

Die Zeitdauer der Bewegung des Punktes von  $A_0$  bis  $O$ , d. h. von  $\psi_0$  bis  $\psi = 0$  sei  $\frac{T}{2}$ , die aus der Formel für  $t$  zu

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\frac{\pi}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \sin^2 \varepsilon}}$$

sich ergibt, ist die der halben einfachen Schwingung; denn das Pendel erreicht auf der anderen Seite von  $BO$  in  $A_1$  dieselbe Höhe wie  $A_0$ , und es ist sonach  $\angle OBA_1 = \angle OBA_0 = \psi_0$ . Für die Dauer der einfachen Schwingung des Pendels von  $A_0$  bis  $A_1$  finden wir folglich

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\frac{\pi}{2}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \sin^2 \varepsilon}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches erster Gattung, das in eine Reihe entwickelt, zu folgendem Ausdruck für

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\psi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\psi_0}{2} + \dots \right]$$

führt. Die Reihe läßt erkennen, daß für  $\psi_0 < 8^\circ$  die Dauer der einfachen Schwingung bis zu drei Dezimalen genau durch die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

bestimmt wird. Hieraus ersieht man, daß Pendel mit kleinen Ausschlägen näherungsweise isochron schwingen, d. h.  $T$  unabhängig von der Größe von  $\psi_0$  ist.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man von vornherein  $\psi$  so klein voraussetzt, daß man mit hinreichender Annäherung in der Differentialgleichung des mathematischen Pendels  $\sin \psi$  durch  $\psi$  ersetzen darf. Dann geht diese Gleichung über in

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \psi = -k^2 \psi,$$



Hieraus folgt unmittelbar, falls  $t_0 = 0$  angenommen wird,

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{y_0}^y \frac{d\left(\frac{y_0}{2} - y\right)}{\sqrt{\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{2} - y\right)^2}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[ \arcsin \left( 1 - 2 \frac{y}{y_0} \right) \right]_{y_0}^y$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - 2 \frac{y}{y_0} \right) \right],$$

und durch Umkehrung erhält man

$$1 - 2 \frac{y}{y_0} = \sin \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t \right),$$

also

$$y = \frac{1}{2} y_0 \left\{ 1 + \cos \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot t \right) \right\}.$$

Hieraus ersieht man, daß die Dauer der einfachen Halbschwingung, d. i. der Bewegung des Punktes von  $A_0$  bis  $O$

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}},$$

demnach

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

beträgt. Dieser Ausdruck ist unabhängig von  $y_0$  und damit wird erkannt, daß die Schwingungen tautochron sind, d. h. ob  $A_0$  hoch oder tief liegt, die Zeitdauer  $T$  einer einfachen Schwingung ist stets die gleiche. Und sie stimmt überein mit der eines mathematischen Pendels mit sehr kleinen Ausschlägen, dessen Fadenlänge  $l = 4a$  ist, da  $T$  in der Form

$$T = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}$$

geschrieben werden kann. Beachtet man, daß der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte  $K$  der Zyклоide eine kongruente Zyклоide ist, deren Rückkehrpunkt  $M$  vertikal über  $O$  im Abstände  $\overline{OM} = 4a$  liegt, so ersieht man, daß der Endpunkt  $A$  eines Fadenpendels, das in  $M$  befestigt ist, eine Zyклоide beschreibt, wenn der Faden durch entsprechende Führungen gezwungen wird, die Evolute zu umhüllen. Ein solches Zyклоidenpendel schwingt folglich genau tautochron.

Die Orthozyклоide hat ferner die bemerkenswerte Eigenschaft, eine Brachystochrone, d. h. eine Kurve kürzester Fallzeit zu sein. Das soll bedeuten, daß ein schwerer Punkt auf einer Orthozyклоide mit horizontaler Basis sich von einer Stelle zu einer beliebigen anderen in kürzerer Zeit bewegt als auf jeder anderen Bahnkurve zwischen denselben zwei Lagen des Punktes. Um das zu beweisen, denken wir uns eine beliebige Kurve  $a$  (s. Fig. 31) in vertikaler Ebene, auf der sich der Punkt  $A$  von  $A_0$  aus herabfallend bewegt. Hierbei durchlaufe er das Bahnelement  $\overline{AA'} = ds$  in der Zeit  $dt$  mit der Geschwindigkeit  $v = \frac{ds}{dt}$ . Legen wir nun durch  $A_0$  eine Horizontale, die von der Normalen zur Kurve in  $B$  geschnitten werde, und fällen von  $A$  das Lot  $\overline{AF} = z$  auf diese, so ist nach dem Prinzip der Wucht

$v = \sqrt{2gz}$ , weil  $v_0 = 0$  und  $z_0 = 0$  vorausgesetzt wurde. Bezeichnet ferner  $\tau$  den Winkel der Bahntangente gegen die Horizontale, und  $d\tau$  den zwischen den Bahnnormalen in  $A$  und  $A_0$ , die sich im Krümmungsmittelpunkt  $M$  der Kurve schneiden, endlich  $\overline{AM} = \rho$  den Krümmungsradius in  $A$ , dann erhalten wir

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\rho d\tau}{\sqrt{2gz}} = \frac{\rho d\tau}{\sqrt{2gn \cos \tau}},$$

worin  $\overline{AB} = n$  eingeführt wurde. Setzen wir schließlich  $\overline{BM} = m$ , also  $\overline{AM} = \rho = m + n$  ein, so nimmt  $dt$  die Gestalt

$$dt = \frac{m+n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{2g \cos \tau}} = \lambda \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{2g \cos \tau}}$$

an, aus der hervorgeht, daß bei einem gegebenen Winkel  $\tau$  und dessen Zuwachs  $d\tau$  die Zeitdauer der Bewegung von  $A$  durch das  $\tau$  zugeordnete Bahnelement  $\overline{AA'}$  am kleinsten wird für den kleinsten Wert von  $\lambda$ . Letzterer folgt aus der Bedingung  $\frac{d\lambda}{dn} = 0 = \frac{n-m}{2n\sqrt{n}}$ , also für  $n = m = \frac{\rho}{2}$  und diese Eigenschaft, daß der Krümmungsradius  $\rho$  gleich der doppelten Normalen  $n$  ist, hat bekanntlich die Orthozykloide, und zwar unabhängig von  $\tau$ . Es geht hieraus hervor, daß die Zeit, die ein schwerer Punkt auf der Orthozykloide braucht, um von einem Punkte der Bahnkurve zu einem beliebigen anderen Punkte zu gelangen, kleiner ist als auf allen Kurven zwischen beiden Punkten, also auch auf einer Geraden, d. i. der Sehne der Orthozykloide.

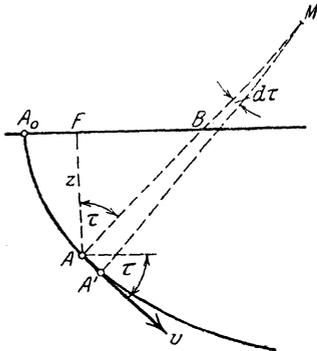


Fig. 31.

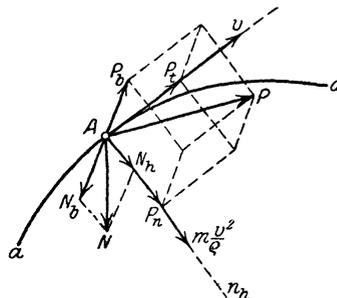


Fig. 32.

Bewegt sich ein Punkt unter dem Einflusse einer Kraft auf einer räumlichen Kurve, so ist zu beachten, daß im allgemeinen die Kraft nicht in die Schmiegungeebene der Raumkurve fallen wird, wie es doch bei einer freien Bewegung des Punktes der Fall sein müßte. Zerlegen wir daher die Kraft  $P$  (s. Fig. 32) in Komponenten in Richtung der Bahntangente, der Haupt- und der Binormalen (sie mögen mit  $P_t$ ,  $P_n$  und  $P_b$  bezeichnet werden), so muß eine Komponente der Zwangskraft  $N$  die Kraft  $N_b$  sein, welche  $P_b$  auf-

hebt. Die andere Komponente von  $N$  dagegen ist die Kraft  $N_h$ , welche  $P_h$  zur Zentripetalkraft  $\frac{mv^2}{\rho}$  ergänzt und in der Hauptnormalen  $n_h$  der Kurve liegt; sie hat daher wie im Falle der ebenen Kurve die Größe  $N_h = m \frac{v^2}{\rho} - P_h$ . Durch Zusammensetzung von  $N_b$  und  $N_h$  ergibt sich

$$N = \sqrt{P_b^2 + \left(\frac{mv^2}{\rho} - P_h\right)^2}$$

und zwar in der Normalebene der Kurve. Unter dem Einflusse von  $P$  und  $N$  bewegt sich der Punkt als freier auf der Kurve; die Differentialgleichungen lassen sich daher nach (I) aufstellen.

Wesentlich kürzer ist es, das Prinzip der kinetischen Energie zu benutzen, das auch hier dieselbe Gleichung ergibt wie für die freie Bewegung, weil  $N$  senkrecht zur Kurve steht und folglich keine Arbeit verrichtet, nämlich

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = A = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} (X dx + Y dy + Z dz).$$

Beachtet man, daß  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ , und ferner, daß, wenn  $f_1(xyz) = 0$  und  $f_2(xyz) = 0$  die beiden Kurvengleichungen sind, die Beziehungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

bestehen, so lassen sich die drei Geschwindigkeitskomponenten  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  und  $\frac{dz}{dt}$  aus den drei Gleichungen als Funktionen von  $x, y, z$  berechnen, falls die Arbeit  $A$  als solche sich angeben läßt. Mittels der Kurvengleichungen selbst erhält man dann drei Differentialgleichungen zwischen je einer der Veränderlichen und  $t$ .

Noch erheblich kürzer ist die Ermittlung der Bewegung, wenn es gelingt, die Arbeit  $A = \int_{u_0}^u P_t \cdot du$  als eine Funktion der Bogenlänge  $\widehat{OA} = u$  darzustellen, denn dann liefert das Prinzip der Wucht ohne weiteres die Differentialgleichung

$$v = \frac{du}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2A}{m}},$$

aus der sich durch Integration unmittelbar  $t$  als Funktion von  $u$  ergibt.

Beispiel:

Ein schwerer Punkt bewege sich auf einer gewöhnlichen Schraubenlinie mit lotrechter Achse, dem Radius  $r$  und dem Steigungswinkel  $\alpha$ , dann ist, weil die Hauptnormale  $n_h$  (s. Fig. 33) in das Lot  $\overline{AC} = r$  von  $A$  auf die Schraubenlinien-Achse fällt,

$$\begin{aligned} P_h &= 0, \\ P_b &= mg \cos \alpha, \\ P_t &= mg \sin \alpha. \end{aligned}$$

Aus der letzten Beziehung folgt unmittelbar, daß sich  $A$  gleichmäßig beschleunigt oder verzögert bewegt, und zwar mit der Beschleunigung  $g \sin \alpha$ . Die Zwangskraft  $N$  finden wir als Resultierende aus

$$N_h = m \frac{v^2}{\rho} = \frac{m \cos^2 \alpha}{r} \cdot v^2$$

und

$$N_b = P_b = mg \cos \alpha$$

zu

$$N = m \sqrt{\left(\frac{\cos^2 \alpha}{r} v^2\right)^2 + (g \cos \alpha)^2} = mg \cos \alpha \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\cos \alpha}{r}\right)^2 \left\{\frac{v_0^2}{2g} + z - z_0\right\}^2},$$

da zufolge des Prinzips der Wucht sich hier  $v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0)$  findet. Beginnt die Bewegung in  $A_0$  ohne Anfangsgeschwindigkeit, so wird, falls wir noch  $z_0 = 0$  wählen, einfacher,

$$N = mg \cos \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{2z \cos \alpha}{r}\right)^2}.$$

Die gezwungene Bewegung eines Punktes auf einer starren ruhenden Fläche unterscheidet sich von der auf einer Kurve wesentlich darin, daß im letzteren Falle die Bahn bereits bekannt ist, während sie im letzteren erst gefunden werden muß. Es ist daher erforderlich, die Differentialgleichungen der Bewegung aufzustellen, und das geschieht wieder unter Einführung einer Zwangskraft, unter deren Einfluß und dem der äußeren Kraft der Punkt als freibeweglicher eine Bahn beschreiben würde, die auf der gegebenen Fläche liegt. Man übersieht sofort, daß der Einfluß der Fläche auf die Bewegung des Punktes sich nur in Richtung ihrer Normalen geltend machen kann, weil sich der Punkt in der Tangentialebene nach allen Richtungen zu bewegen vermag. Wir führen daher die gebundene Bewegung des Punktes auf eine freie zurück, indem wir zur äußeren Kraft  $P$ , die auf den Punkt  $A$  wirkt, noch eine in der Flächennormalen  $n$  wirkende Zwangskraft  $N$  fügen. Die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes werden daher, falls  $X, Y, Z$  die Komponenten von  $P$  bezeichnen, und  $\nu_x, \nu_y, \nu_z$  die Winkel der Normalen  $n$  mit den Koordinatenachsen,

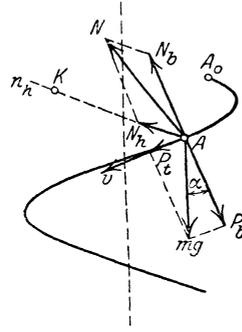


Fig. 33.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \nu_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \nu_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \nu_z.$$

Hierin ist, falls  $f(xyz) = 0$  die Gleichung der Fläche,

$$\cos \nu_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \cos \nu_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \cos \nu_z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 1: \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2};$$

wenn wir sonach zur Abkürzung

$$N: \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \lambda$$

setzen, so nehmen die Differentialgleichungen die Gestalt

$$(35) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

an. Diese zusammen mit der Flächengleichung  $f(xyz) = 0$  bestimmen  $x, y, z$  als Funktionen von  $t$  und den Faktor  $\lambda$ , aus dem dann auch  $N$  hervorgeht.

Auch hier gilt wieder das Prinzip der kinetischen Energie in der gleichen Gestalt, wie für die freie Bewegung des Punktes, weil die Zwangskraft  $N$  stets senkrecht zur Bahn steht und daher keine Arbeit verrichtet. Wir finden sonach aus diesem Prinzip (s. Gl. 26)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2 + \frac{2A}{m}$$

als ein Integral von (35); doch reicht dieses nicht hin, um die Geschwindigkeiten als Funktionen der Koordinaten zu erhalten, obgleich die Flächengleichung die weitere Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot v_z = 0$$

liefert. Wir sind daher auf die Integration einer der Differentialgleichungen angewiesen, die sich durch Elimination von  $\lambda$  aus zweien der Differentialgleichungen (35) ergibt.

In manchen Fällen ist es vorteilhaft, die Lage des bewegten Punktes auf der Fläche mittels sog. Gaußscher Koordinaten zu bestimmen, d. h. zweier Kurvenscharen  $u_1 = \text{const}$  und  $u_2 = \text{const}$  auf der Fläche, von der Eigenschaft, daß die Koordinaten

$$x = f_x(u_1, u_2), \quad y = f_y(u_1, u_2), \quad z = f_z(u_1, u_2)$$

der Flächengleichung  $f(xyz) = 0$  identisch genügen. Doch sind die Umformungen der Differentialgleichungen (35) in die Veränderlichen  $u_1$  und  $u_2$  zu umständlich, um hier Platz finden zu können. Da-

gegen soll die Ermittlung der Bewegung an einigen Beispielen einfacherer Art erläutert werden.

Beispiele:

1. Wirkt keine Kraft  $P$  auf den Punkt, so wird  $A=0$ , folglich  $v=v_0$ ; die Bewegung auf der Fläche erfolgt sonach dann gleichförmig. Beachten wir, daß die Zwangskraft  $N$  die einzige Kraft ist, die auf den Punkt wirken müßte, wenn er als freier seine auf der Fläche liegende Bahn beschreiben soll, und diese Kraft, wie auf S. 15 gezeigt wurde, in der Schmiegungeebene der Bahn liegen muß, so erkennen wir, daß die Schmiegungeebene der Bahn die Flächennormale enthalten muß. Kurven dieser Eigenschaft sind nun die sogenannten kürzesten oder geodätischen Linien der Fläche, die man erhält, wenn man einen Faden zwischen zwei Punkten der Fläche über letztere spannt (vgl. Statik, Bd. II, S. 255).

2. Bei der Bewegung eines schweren Punktes auf geneigter Ebene ist es zweckmäßig, rechtwinklige Punktkoordinaten in der Ebene selbst zu verwenden und zwar, indem wir die Anfangslage  $A_0$  des Punktes als Koordinaten-

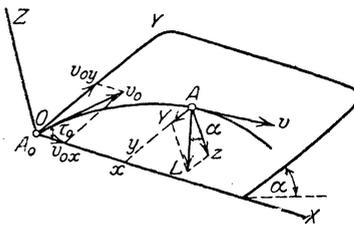


Fig. 34.

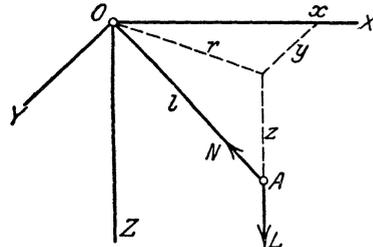


Fig. 35.

anfang wählen, und eine Horizontale in der Ebene als  $X$ -Achse (s. Fig. 34). Es wird dann  $X=0$ ,  $Y=-L \cdot \sin \alpha$  und  $Z=-L \cdot \cos \alpha$ , falls  $L=mg$  die Schwere des Punktes und  $\alpha$  den Neigungswinkel der Ebene bezeichnet. Die Zwangskraft  $N$  wird hier  $=-Z=mg \cos \alpha$  und die Bahn eine ebene Kurve, für die die Differentialgleichungen der Bewegung die folgenden beiden werden:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y = -mg \sin \alpha.$$

Diese lassen sich unmittelbar integrieren und ergeben

$$x = v_{0x}(t - t_0), \quad y = v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2} g \sin \alpha (t - t_0)^2,$$

weil  $x_0=y_0=0$  angenommen wird. Aus ihnen folgt als Bahn eine Parabel, deren große Achse der  $Y$ -Achse parallel ist.

3. Die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche stimmt überein mit der des sogenannten sphärischen oder Raumpendels, d. i. der eines schweren Punktes  $A$  am Ende eines masselosen Fadens von der Länge  $\overline{OA}=l$ , der in  $O$  festgehalten wird (s. Fig. 35), denn dann liegt die Bahn von  $A$  auf einer Kugelfläche vom Radius  $l$ , deren Gleichung

$$f(xyz) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

ist, falls der Koordinatenanfang in den Kugelmittelpunkt gelegt wird. Wählen wir ferner die  $Z$ -Achse lotrecht nach abwärts, dann wird  $X = Y = 0$  und  $Z = L = mg$ , und die Differentialgleichungen (35) nehmen hier die Gestalt

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda \cdot 2x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \lambda \cdot 2y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg + \lambda \cdot 2r$$

an. In diesem Falle liefert nun nicht nur das Energieprinzip ein Integral dieser Gleichungen, nämlich das folgende

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = U - U_0 = mg(z - z_0),$$

sondern auch das Prinzip der Erhaltung der Flächen in der Form (29 a), d. i.

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = \text{const} = c.$$

Hierzu tritt die Gleichung, die aus der Differentiation der Flächengleichung nach der Zeit hervorgeht:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0,$$

die beide zusammen die Ausdrücke

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{v_z x z - c y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{v_z y z + c x}{x^2 + y^2},$$

liefern, in denen  $v_z = \frac{dz}{dt}$  ist. Setzen wir hierin  $x^2 + y^2 = l^2 - z^2$  ein und dann diese Werte in die Gleichung

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0),$$

so geht sie über in die folgende

$$\frac{c^2}{l^2 - z^2} + \frac{l^2}{l^2 - z^2} \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0);$$

aus ihr findet sich  $\frac{dz}{dt}$  als Funktion von  $z$ , und daraus durch Integration

$$t = \pm l \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{\{v_0^2 + 2g(z - z_0)\}(l^2 - z^2) - c^2}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches; seine Umkehrung liefert  $z$  als Funktion von  $t$ . Die Bahn verläuft im allgemeinen zwischen zwei horizontalen Ebenen, deren Abstände  $z$  vom Kugelmittelpunkte aus der Gleichung  $v_z = \frac{dz}{dt} = 0$  hervorgehen. Diese Gleichung ist vom 3. Grade und hat drei reelle Wurzeln, von denen jedoch eine nicht in Betracht kommt, weil sie eine die Kugelfläche nicht schneidende Ebene bestimmt.

Die Bahn geht in einen Kreis in der horizontalen Ebene  $z = \text{const} = h$  über, wenn die Resultierende aus der Zwangskraft  $N$  und der Schwere  $L$  zur Zentripetalkraft  $m \frac{v^2}{\rho}$  wird. Es ist dann  $v = \text{const} = v_0$  und  $\rho = l \sin \psi = r$ , ferner  $L \tan \psi = \frac{m v^2}{\rho} = \frac{m v_0^2}{r}$ ; sonach muß  $v_0$  horizontal gerichtet sein und der

Gleichung

$$mg \frac{r}{z} = \frac{m v_0^2}{r}$$

genügen, aus der für  $z = h$

$$v_0 = r \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{g(l^2 - h^2)}{h}}$$

folgt. Die Fadenspannkraft, die entgegengesetzt gleich der Zwangskraft  $N$  ist, erhält in diesem besonderen Falle die Größe

$$N = \frac{L}{\cos \psi} = \frac{m g l}{h},$$

während sie im allgemeinen wegen der Abhängigkeit von  $\varrho$  nur aus den Bahngleichungen bestimmt zu werden vermag, bzw. unter Benutzung von (35) mittels  $\lambda$ .

Der letztere Weg führt unter Benutzung der Beziehung  $\frac{d^2 z}{dt^2} = v_z \frac{dv_z}{dz}$  und des für  $v_z$  gefundenen Ausdruckes, sowie der dritten der Differentialgleichungen (35) zu

$$N = \lambda \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 2l\lambda = \frac{m}{l} \left\{ v_0^2 + g(3z - 2z_0) \right\}$$

In den vorhergehenden Darlegungen wurde vorausgesetzt, daß die Kurven und Flächen, an die die Bewegungen des Punktes gebunden sind, starr und in Ruhe seien. Diese Einschränkung ist aber für die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegungen selbst keineswegs nötig, denn diese bleibt die gleiche auch dann, wenn die Kurven und Flächen veränderlich sind, und zwar gleichgültig, ob es sich dabei um starre bewegte oder ihrer Gestalt nach mit der Zeit veränderliche Kurven oder Flächen handelt. Denn der auf den Punkt von der Kurve oder Fläche ausgeübte Zwang besteht nur in einer Richtungsänderung der Geschwindigkeit; die Zwangskraft muß daher senkrecht zur Kurve, bzw. Fläche stehen und zwar in der Gestalt, welche die Kurve bzw. Fläche zur Zeit  $t$  hat. Das hat zur Folge, daß die Zeit  $t$  z. B. in den Richtungs-cosinus der Normalen einer Fläche  $f(xyzt) = 0$  bei der Differentiation nach den Koordinaten  $x, y, z$  als Konstante zu behandeln ist, also als ob die Fläche unveränderlich wäre.

Dagegen ist zu beachten, daß das Prinzip der kinetischen Energie für die Bewegung auf veränderlichen Kurven und Flächen keine Gültigkeit besitzt, weil die Zwangskraft  $N$  zwar senkrecht zur Kurve oder Fläche, aber nicht zur Bahn des Punktes senkrecht steht, denn letztere fällt nicht mit der veränderlichen Kurve zusammen, bzw. nicht in die veränderliche Fläche, und somit ist die Arbeit von  $N$  von Null verschieden. Es sei (s. Fig. 36) z. B.  $c$  die veränder-

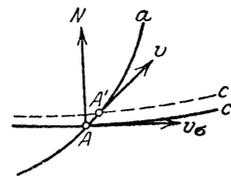


Fig. 36.

liche Kurve, auf der  $A$  sich zu bewegen gezwungen ist, dann geht in der Zeit  $dt$  die Kurve in  $c'$  über, während sich  $A$  gleichzeitig auf  $c$  vorwärts bewegt; das Element  $\overline{AA'}$  der Bahn des Punktes schließt folglich mit  $N$  einen von  $\frac{\pi}{2}$  verschiedenen Winkel ein, womit erkannt wird, daß  $N$  eine Arbeit verrichtet, was im Falle der gebundenen Bewegung auf starrer ruhender Kurve oder Fläche nicht der Fall ist.

Beispiel:

Ein Punkt  $A$ , auf den keine äußeren Kräfte wirken, bewege sich auf einem starren Kreise  $k$  (s. Fig. 37) vom Radius  $R$ , der sich in horizontaler Ebene um einen Punkt  $D$  seines Umfanges gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  dreht. Es sei  $M_0$  die Anfangslage des Kreismittelpunktes  $M$  und  $\angle MDM_0 = \psi = \omega_0 \cdot t$  der Drehwinkel der Kreisebene. Bestimmen wir die Lage des Punktes  $A$ , dessen Masse  $m$  sein möge, durch Polarkoordinaten

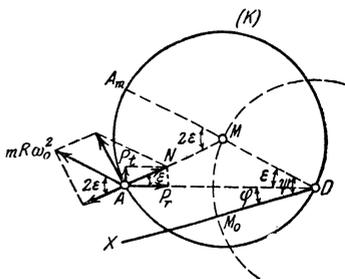


Fig. 37.

$\overline{DA} = r$ ,  $\angle ADM_0 = \varphi$  gegen die Bezugsebene und führen noch den Winkel  $\varepsilon = \psi - \varphi$  ein, so werden die Komponenten der Zwangskraft  $N$  in radialer Richtung  $P_r = -N \cos \varepsilon$ , in zirkularer Richtung  $P_c = N \sin \varepsilon$  und demgemäß die Differentialgleichungen der Bewegung von  $A$  gegen die Bezugsebene

$$m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} = -N \cos \varepsilon,$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = +N \sin \varepsilon,$$

wie man leicht erkennt. Eliminieren wir hieraus  $N$  und setzen noch  $\varphi = \psi - \varepsilon = \omega_0 \cdot t - \varepsilon$  ein, so ergibt sich als Differentialgleichung der Relativbewegung des Punktes  $A$  auf dem Kreise nach entsprechenden Umformungen und mit  $r = 2R \cos \varepsilon$

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon;$$

diese kann auch in der Form

$$\frac{d^2 (2\varepsilon)}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin (2\varepsilon)$$

geschrieben werden. Damit wird erkannt, daß sie mit der Differentialgleichung des Fadenpendels (s. S. 51) übereinstimmt, falls  $\frac{g}{l} = \omega_0^2$  gesetzt wird. Es ist sonach die Bewegung des Punktes  $A$  auf dem Kreise identisch mit der Bewegung eines Fadenpendels von der Länge  $l = R$ , das im Mittelpunkt  $M$  befestigt ist und von der nach Größe und Richtung konstanten Kraft  $mR\omega_0^2$  parallel dem Durchmesser  $DA_m$  beansprucht wird. Die Zusammensetzung dieser Bewegung mit der Drehung der Kreisebene um  $D$  führt zur Kenntnis der gesuchten Bewegung des Punktes  $A$  gegen die Bezugsebene.

Für die letztere gilt nun das Prinzip der kinetischen Energie nicht, wie man sich mittels der Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes  $A$  gegen die Bezugsebene sofort überzeugt. Multiplizieren wir die erstere mit  $dr$ , die letztere mit  $r d\varphi$  und addieren sie, so erhalten wir

$$m \left[ \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} dr + \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot d\varphi \right] = N \left[ -\cos \varepsilon \cdot dr + r \sin \varepsilon \cdot d\varphi \right].$$

Der Ausdruck links ist identisch mit dem Differential  $dW = d \left( \frac{m v^2}{2} \right)$  der kinetischen Energie, der rechts mit dem der Arbeit  $dA$  der Kraft  $N$ ; letztere geht nach Einsetzung von  $r = 2R \cos \varepsilon$  und  $\varphi = \omega_0 \cdot t - \varepsilon$  über in  $dA = NR \omega_0 \sin 2\varepsilon \cdot dt$  und ist von Null verschieden, was zu beweisen war. Dagegen gilt das genannte Prinzip für die Relativbewegung von  $A$  auf dem Kreis  $k$ , wie der Vergleich mit der Bewegung des Fadenpendels unmittelbar erweist.

## 7. Kap. Die Bewegung der Massenpunktsysteme.

Unter einem Massenpunktesystem werde eine Anzahl materieller Punkte verstanden, auf die äußere Kräfte wirken und die in ihren Bewegungen sowohl gegen den Bezugskörper, als gegeneinander durch irgendwelche Bedingungen beschränkt sind. Solche Bedingungen sind z. B., daß die Entfernung zweier Punkte sich nicht ändert, oder daß der eine oder andere Punkt auf einer Kurve oder Fläche sich zu bewegen gezwungen ist, daß zwei Körper des Systems sich dauernd berühren, usw. Als Beispiel veranschauliche man sich das Doppelpendel, das aus einem mathematischen Pendel besteht, an dessen beweglichem Endpunkte ein weiteres derartiges Pendel befestigt ist. Die Lösung der Aufgabe, die Bewegung eines Massenpunktesystems zu ermitteln, fordert in erster Linie die Aufstellung der Differentialgleichungen für die Bewegungen der einzelnen Massenpunkte. Hierbei ist zu beachten, daß wir nur die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Massenpunktes kennen, nämlich die Gleichungen (I) (S. 18); auf sie allein können wir uns bei Lösung der Aufgabe stützen. Zu dem Ende schlagen wir folgenden Weg ein. Wir führen Hilfskräfte ein von solcher Größe und Richtung, daß die einzelnen Systempunkte unter deren Einfluß und der auf sie wirkenden äußeren Kräfte ihre tatsächliche Bewegung als freie Punkte vollziehen würden; für diese Bewegungen aber gelten die Gleichungen (I).

Es sei  $A_k$  einer der  $n$  Massenpunkte des Systems,  $m_k$  seine Masse und  $a_k$  (s. Fig. 38) seine Bahn, die er tatsächlich durchläuft. Dann hat dieser eine nach Größe und Richtung eindeutig bestimmte Beschleunigung  $b_k$ , und dieser entspricht eine in Richtung von  $b_k$  wirkende beschleunigende Kraft  $B_k = m_k b_k$ , falls der Punkt  $A_k$  frei beweglich wäre. Diese Kraft ist nun im allgemeinen nach

Größe und Richtung verschieden von der äußeren Kraft  $P_k$ , die auf  $A_k$  wirkt, bzw. von der Resultierenden aller auf  $A_k$  wirkenden äußeren Kräfte, und zwar wegen der die Bewegung von  $A_k$  beschränkenden Bedingungen. Letztere sind so nach durch Hilfskräfte zu ersetzen, deren Resultierende die Kraft  $J_k$ , die sogen. innere Kraft am Punkte  $A_k$  sein mag; sie ist so zu bestimmen, daß sie zusammen mit  $P_k$  dem Punkte  $A_k$  die Beschleunigung  $b_k$  in jedem Augenblick der Bewegung erteilt, also mit  $P_k$  durch das Parallelogramm der Kräfte zusammengesetzt, die Resultierende  $B_k$  ergibt. Es ist folglich  $J_k$  durch die Beziehung

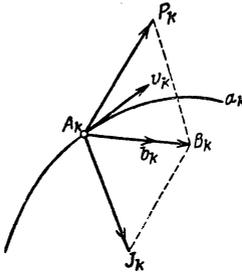


Fig. 38.

$$B_k = P_k \hat{+} J_k$$

eindeutig bestimmt. Damit aber gelangen wir sofort zu den gesuchten Differentialgleichungen der freien Bewegung des Punktes  $A_k$  indem wir die Bewegung des Massenpunktesystems auf ein Koordinatensystem beziehen, für welches  $x_k, y_k, z_k$  die Koordinaten von  $A_k$ ,  $X_k, Y_k, Z_k$  die Komponenten von  $P_k$  und  $J_{kx}, J_{ky}, J_{kz}$  die von  $J_k$  seien. Dann bestehen zufolge (I) die Gleichungen

$$(II) \quad m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k + J_{kx}, \quad m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = Y_k + J_{ky}, \quad m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = Z_k + J_{kz},$$

in denen der Reihe nach  $k=1, 2, 3, \dots, n$  zu setzen ist. Diese  $3n$  Differentialgleichungen reichen jedoch nicht aus, um durch ihre Integration die  $3n$  Koordinaten der Systempunkte als Funktionen der Zeit zu ermitteln, denn sie enthalten als weitere Unbekannte die Komponenten  $J_{kx}, J_{ky}, J_{kz}$  der inneren Kräfte  $J_k$ . Um auch die letzteren zu bestimmen, haben wir zu beachten, daß sie so zu wählen sind, daß durch ihren Einfluß lediglich den Bedingungen genügt wird, die die Bewegungen der Systempunkte verknüpfen, oder anders ausgedrückt, daß die inneren Kräfte für die Bewegung des Systems wirkungslos sind, also an ihm sich das Gleichgewicht halten müssen. Eines der häufigsten Vorkommnisse ist die Starrheit der Verbindung zwischen zwei Systempunkten, deren Entfernung sich also während der Bewegung des Systems nicht ändern darf. Dieser Bedingung wird entsprochen durch Einführung zweier Zwangskräfte, von denen die eine in  $A_h$ , die andere in  $A_k$  angreift; erstere werde mit  $S_{hk}$ , die andere mit  $S_{kh}$  (s. Fig. 39) bezeichnet. Sie müssen sich am System das Gleichgewicht halten, was nur möglich ist, falls sie in der Geraden  $A_h A_k$  wirken und entgegengesetzt gleich sind, also die Beziehung  $S_{hk} \hat{+} S_{kh} = 0$  besteht. Ferner, wenn Punkte

des Systems auf Kurven oder Flächen sich zu bewegen gezwungen sind, so lassen sich diese Bedingungen durch Zwangskräfte (senkrecht zu den Kurven bzw. Flächen) der gleichen Art erfüllen, wie im 5. Kapitel dargelegt wurde. Nur ist dabei zu beachten, daß diese Zwangskräfte im entgegengesetzten Sinne, aber von sonst gleicher Größe, auf die Kurve bzw. Fläche wirken, wenn letztere dem bewegten System angehören. Das gleiche gilt von all den Zwangskräften, die die Bedingungen der Berührungen von Körpern des bewegten Systems in Punkten, Linien oder Flächen ersetzen sollen. Man verfährt hierbei in der gleichen Weise, wie bei dem Gleichgewicht von Kräften an beweglichen Verbindungen starrer Körper, es kann deshalb hier auf die bezüglichlichen Darlegungen im 24. Kapitel des II. Bandes verwiesen werden, in denen an die Stelle der Stützkkräfte hier die Zwangskräfte zu treten haben.

Im allgemeinen werden die einzelnen Systempunkte mehreren Bewegungsbedingungen unterworfen sein; dann setzt sich die innere

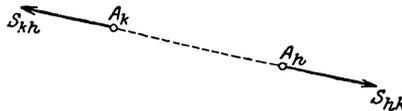


Fig. 39.

Kraft  $J_k$  des Systempunktes  $A_k$  aus mehreren Zwangskräften zusammen.

Für die Vorausberechnung der Bewegung des Systems ist nun wesentlich, daß die Bedingungen, denen die Bewegung der Systempunkte unterworfen ist, sich in Form von Gleichungen zwischen den Koordinaten der Systempunkte ausdrücken lassen; sie mögen die Bedingungsgleichungen für die Bewegung des Systems genannt werden. So ist z. B. die Bedingungsgleichung der starren Verbindung zwischen den Punkten  $A_h$  und  $A_k$  (s. Fig. 39)

$$(36) \quad (x_k - x_h)^2 + (y_k - y_h)^2 + (z_k - z_h)^2 - l_{hk}^2 = 0,$$

oder die der gezwungenen Bewegung eines Punktes  $A_h$  auf einer ruhenden starren Fläche die Flächengleichung

$$F(x_h, y_h, z_h) = 0$$

usw. An folgenden zwei Beispielen soll die Einführung der Zwangskräfte und die Aufstellung der Differentialgleichungen der bezüglichlichen Systembewegungen erläutert werden.

Beispiele:

1. Es sei  $OA_1A_2$  (s. Fig. 40) ein Doppelpendel, dessen ruhender Punkt  $O$  zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit lotrecht nach abwärts gerichteter positiver  $Z$ -Achse gewählt werde. Weil

$\overline{OA_1} = l_1 = \text{const}$ , so muß sich  $A_1$  auf einer Kugelfläche von der Gleichung

$$\varphi_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 = 0$$

bewegen, und dieser Bedingung wird genügt durch Einführung einer Zwangskraft  $S_1$  in Richtung  $A_1O_1$ , d. i. der Flächennormalen. Ferner ist auch  $\overline{A_1A_2} = l_{12} = \text{const}$ ; es besteht folglich die Bedingungsgleichung

$$\varphi_2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_{12}^2 = 0$$

zwischen den Koordinaten beider Punkte, der durch Einführung der Zwangs- (Fadenspann)- Kraft  $S_{12}$  in Richtung  $\overline{A_2A_1}$  entsprochen werden kann. Die beiden

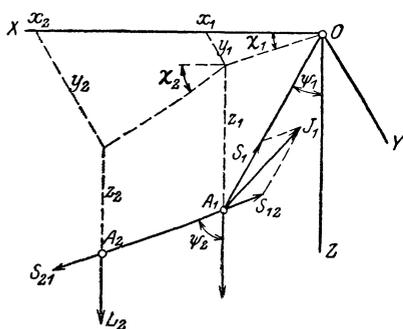


Fig. 40.

Zwangskräfte  $S_1$  und  $S_{12}$  zusammengesetzt ergeben die innere Kraft  $J_1$  am Punkte  $A_1$ , welche zusammen mit der äußeren Kraft am Punkte  $A_1$ , in diesem Falle seiner Schwere  $L_1 = m_1g$ , die beschleunigende Kraft  $B_1$  der freien Bewegung des Punktes  $A_1$  ergibt. Im Punkte  $A_2$  ist dagegen nur die Spannkraft  $S_{21} = S_{12}$  des Fadens  $\overline{A_1A_2}$  als Zwangskraft anzubringen; es stimmt sonach die innere Kraft  $J_2$  mit  $S_{21}$  überein, und  $B_2$  wird nach Größe und Richtung gleich der Resultierenden aus  $S_{21}$  und der Schwere  $L_2 = m_2g$ . Demgemäß erhalten wir unter Berücksichtigung

des Umstandes, daß hier  $X_1 = Y_1 = 0$ ;  $Z_1 = m_1g$ ,  $X_2 = Y_2 = 0$ ;  $Z_2 = m_2g$  die sechs Differentialgleichungen für die Bewegung des Doppelpendels nach (II), in denen

$$J_{1x} = -S_1 \cos \alpha_{1x} - S_{12} \cos \alpha_{2x}, \quad J_{1y} = -S_1 \cos \alpha_{1y} - S_{12} \cos \alpha_{2y},$$

$$= -\frac{S_1}{l_1} x_1 - \frac{S_{12}}{l_{12}} (x_2 - x_1) \quad = -\frac{S_1}{l_1} y_1 - \frac{S_{12}}{l_{12}} (y_2 - y_1)$$

$$J_{1z} = -S_1 \cos \alpha_{1z} - S_{12} \cos \alpha_{2z}$$

$$= -\frac{S_1}{l_1} z_1 - \frac{S_{12}}{l_{12}} (z_2 - z_1)$$

$$J_{2x} = S_{21} \cos \alpha_{2x} = \frac{S_{12}}{l_{12}} (x_2 - x_1), \quad J_{2y} = S_{21} \cos \alpha_{2y} = \frac{S_{12}}{l_{12}} (y_2 - y_1),$$

$$J_{2z} = S_{21} \cos \alpha_{2z} = \frac{S_{12}}{l_{12}} (z_2 - z_1)$$

zu setzen ist, so daß sie die Form

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{S_1}{l_1} x_1 - \frac{S_{12}}{l_{12}} (x_2 - x_1), \quad m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{S_1}{l_1} y_1 - \frac{S_{12}}{l_{12}} (y_2 - y_1),$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{S_{12}}{l_{12}} (x_2 - x_1) \quad m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{S_{12}}{l_{12}} (y_2 - y_1)$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = m_1 g - \frac{S_1}{l_1} z_1 - \frac{S_{12}}{l_{12}} (z_2 - z_1),$$

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = m_2 g + \frac{S_{12}}{l_{12}} (z_2 - z_1)$$

annehmen. Zu ihnen treten noch die beiden Bedingungsgleichungen  $\varphi_1 = 0$  und  $\varphi_2 = 0$ , so daß wir insgesamt acht Gleichungen zwischen den sechs Koordinaten  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  und den beiden Zwangskräften  $S_1$  und  $S_{12}$  haben, also ebensoviel Gleichungen als Unbekannte. Eliminiert man  $S_1$  und  $S_{12}$  aus den sechs Differentialgleichungen, so erhält man vier Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten und  $t$ ; durch deren Integration ergeben sich in Verbindung mit den beiden Bedingungsgleichungen die sechs Koordinaten der beiden Systempunkte als Funktionen der Zeit.

Für die Durchführung der Rechnung zweckmäßiger ist es, sogenannte unabhängige Veränderliche einzuführen, d. h. solche, die die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen. Im vorliegenden Falle wird  $\varphi_1 = 0$  befriedigt durch die Substitutionen  $x_1 = l_1 \sin \psi_1 \cos \chi_1$ ,  $y_1 = l_1 \sin \psi_1 \sin \chi_1$ ,  $z_1 = l_1 \cos \chi_1$  in denen  $\psi_1$  der Winkel  $A_1 O Z$  und  $\chi_1$  der Winkel der durch  $A_1$  und die  $Z$ -Achse gehenden Ebene mit der  $X O Z$ -Ebene ist, ferner  $\varphi_2 = 0$  durch die Substitutionen  $x_2 - x_1 = l_{12} \sin \psi_2 \cos \chi_2$ ,  $y_2 - y_1 = l_{12} \sin \psi_2 \sin \chi_2$  und  $z_2 - z_1 = l_{12} \cos \chi_2$ , in denen  $\psi_2$  den Winkel von  $\overline{A_1 A_2}$  mit der  $Z$ -Achse und  $\chi_2$  den Winkel bezeichnet, den die zur  $Z$ -Achse parallele Ebene durch  $A_1$  und  $A_2$  mit der  $X O Z$ -Ebene einschließt. Aber trotz der Einführung dieser vier Veränderlichen werden die Differentialgleichungen noch so verwickelt, daß auf sie nicht weiter eingegangen werden soll.

2. Zwei schwere Punkte  $A_1$  und  $A_2$  seien starr verbunden und der eine ( $A_1$ ) auf einer Raumkurve von den Gleichungen  $y_1 = f_y(x_1)$ ,  $z_1 = f_z(x_1)$  sich zu bewegen gezwungen (s. Fig. 41). Die Starrheit der Verbindung zwischen  $A_1$  und  $A_2$  macht die Einführung zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte  $S_{12}$  und  $S_{21}$  nötig, ferner der auf  $A_1$  ausgeübte Zwang der Kurve  $a_1$  die einer Zwangskraft  $S_1$ , die auf  $a_1$  senkrecht steht. Die Kraft  $J_1$  wird hier sonach zur Resultierenden aus  $S_1$  und  $S_{12}$ , die Kraft  $J_2$  dagegen deckt sich mit der Zwangskraft  $S_{21} = S_{12}$ . Beachten wir, daß  $X_1 = Y_1 = 0$ ,  $Z_1 = -L_1 = -m_1 g$ ,  $X_2 = Y_2 = 0$ ,  $Z_2 = -L_2 = -m_2 g$ , und bezeichnen  $S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}$ , die Komponenten von  $S_1$  so werden die gesuchten sechs Differentialgleichungen

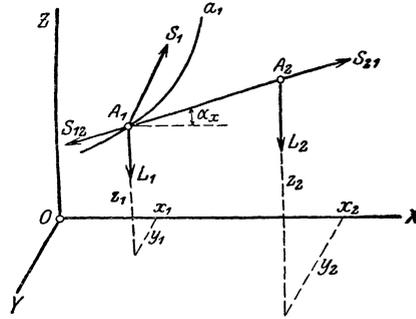


Fig. 41.

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= S_{1x} - S_{12} \cos \alpha_x, & m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= S_{1y} - S_{12} \cos \alpha_y, \\
 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= S_{12} \cos \alpha_x, & m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= S_{12} \cos \alpha_y, \\
 m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -m_1 g + S_{1z} - S_{12} \cos \alpha_z, \\
 m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= -m_2 g + S_{12} \cos \alpha_z.
 \end{aligned}$$

In diesen ist  $\cos \alpha_x = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}}$ ,  $\cos \alpha_y = \frac{y_2 - y_1}{l_{12}}$ ,  $\cos \alpha_z = \frac{z_2 - z_1}{l_{12}}$  zu setzen.

Als Bedingungsgleichungen erhalten wir außer der der Starrheit der Strecke

$\overline{A_1 A_2} = l_{12}$ , nämlich

$$\varphi_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_{12}^2 = 0,$$

noch die, welche ausdrückt, daß  $S_1$  senkrecht auf der Kurve  $a_1$  stehen muß, und diese ist in der einfachsten Form

$$S_{1x} dx_1 + S_{1y} dy_1 + S_{1z} dz_1 = 0.$$

Mit Benutzung der weiteren Bedingungsgleichungen  $y_1 = f_y(x_1)$  und  $z_1 = f_z(x_1)$ , nämlich der Kurvengleichungen, läßt sie sich in der Form

$$\varphi_2 = S_{1x} + S_{1y} f_y'(x_1) + S_{1z} f_z'(x_1) = 0$$

schreiben, so daß wir vier Bedingungsgleichungen erhalten, die zusammen mit den sechs Differentialgleichungen die zehn Unbekannten, nämlich  $S_{1x}$ ,  $S_{1y}$ ,  $S_{1z}$  und die sechs Koordinaten bestimmen.

Wie diese Beispiele zeigen, erhält man die zu integrierenden Differentialgleichungen der Bewegung des Systems durch Elimination der unbekanntenen Komponenten der Zwangskräfte aus den Gleichungen (II). Da deren Anzahl  $3n$  beträgt, so ist klar, daß die Anzahl  $\nu$  der unbekanntenen Zwangskraft-Komponenten kleiner als  $3n$  sein muß, und zwar

$$3n - \nu \geq 1,$$

falls die Bewegung des Systems möglich sein muß. Andererseits ist erforderlich, daß die Zahl der voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen des Systems gleich  $\nu$  sei, denn nur dann ist die Zahl der Unbekannten, nämlich der  $3n$  Koordinaten der Systempunkte und der  $\nu$  Komponenten der Zwangskräfte ebenso groß, wie die der Gleichungen zu deren Ermittlung.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist Null bei dem sog. freien System. Hierunter versteht man ein System  $n$  materieller Punkte, die ihrer gegenseitigen Anziehung nach dem Newtonschen

Gesetz unterworfen sind, aber sonst freibeweglich. Es seien (s. Fig. 42)  $A_h A_i$  zwei beliebige dieser Punkte mit den Massen  $m_h$  bzw.  $m_i$ , dann wirken sie aufeinander durch die beiden entgegengesetzt gleichen

Kräfte  $P_{hi} = P_{ih} = \kappa \frac{m_h m_i}{r_{hi}^2}$  in Richtung der Geraden  $A_h A_i$ . Zerlegen

wir sie in Komponenten, so werden diese

$$X_{hi} = P_{hi} \cdot \cos \alpha_{hiz} = \kappa m_h m_i \frac{(x_i - x_h)}{r_{hi}^3}, \quad Y_{hi} = \kappa m_h m_i \frac{(y_i - y_h)}{r_{hi}^3},$$

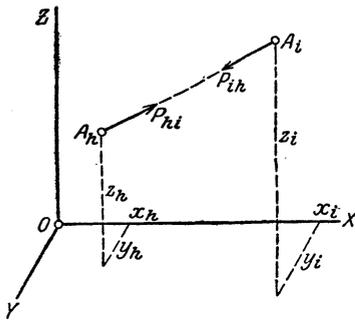


Fig. 42.

$$Z_{hi} = \kappa m_h m_i \frac{(z_i - z_h)}{r_{hi}^3},$$

und folglich erhalten die Differentialgleichungen (II) für den Punkt  $A_h$ , der von allen übrigen Massenpunkten eine derartige Anziehungskraft erfährt, die Gestalt

$$m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} = \sum (X_{hi}) = \kappa m_h \sum \left( \frac{m_i (x_i - x_h)}{r_{hi}^3} \right);$$

$$m_h \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \kappa m_h \sum \left( \frac{m_i (y_i - y_h)}{r_{hi}^3} \right); \quad m_h \frac{d^2 z_h}{dt^2} = \kappa m_h \sum \left( \frac{m_i (z_i - z_h)}{r_{hi}^3} \right),$$

in denen  $r_{hi} = \sqrt{(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2 + (z_i - z_h)^2}$  zu setzen ist. Ersetzen wir nun der Reihe nach  $h$  durch  $1, 2, 3, \dots, n$ , so erhalten wir auf diesem Wege die  $3n$  Differentialgleichungen der Bewegung des freien Systems. In dem Falle des Zweikörper-Problems ( $n = 2$ ) lassen sich alle Integrationen durchführen, dagegen in dem des Dreikörper-Problems ( $n = 3$ ) z. Z. noch nicht.

Bei dem starren System dagegen ist  $\nu = 3n - 6$ , falls  $n$  die Anzahl der materiellen Punkte des Systems bezeichnet, denn zur starren Verbindung von  $n$  Punkten sind  $3n - 6$  in ihren Längen voneinander unabhängige Strecken (vgl. Bd. II, S. 233) notwendig und hinreichend. Dementsprechend bestehen für das starre System  $\nu = 3n - 6$  Bedingungsgleichungen der Gestalt (36) zwischen den Koordinaten der Systempunkte und ebensoviel Zwangskräfte der Starrheit  $S_{hi} = S_{ih}$  (s. Fig. 43) treten in den Differentialgleichungen (II) auf. Daher führt die Elimination dieser Kräfte aus letzteren auf  $3n - \nu = 6$  Differentialgleichungen, die zusammen mit den  $\nu = 3n - 6$  Bedingungsgleichungen (36) die Aufgabe lösen.

Doch läßt sich im vorliegenden Falle ein wesentlich einfacherer Weg einschlagen, der immer dann am schnellsten zum Ziele führt, wenn für das betreffende System die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes äußerer Kräfte bekannt sind, was ja beim starren System der Fall ist. Dieser Weg besteht in der Anwendung des Prinzips von D'Alembert, zu dem folgende einfache Überlegung führt.

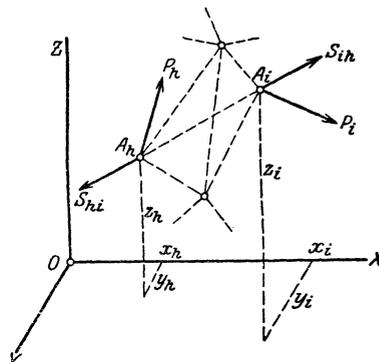


Fig. 43.

Bringt man in  $A_k$  eine der beschleunigenden Kraft  $B_k$  (s. Fig. 44) entgegengesetzt gleiche Kraft  $T_k$ , die sogen. Trägheitskraft, an, die also die Wirkung von  $B_k = P_k \hat{+} J_k$  aufhebt, so ist der Punkt im Gleichgewicht; wir haben sonach den Satz: An jedem System-

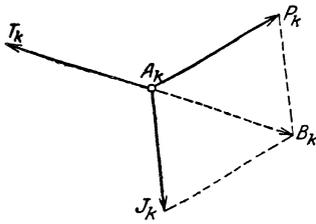


Fig. 44.

punkte halten sich die äußere, die innere und die Trägheitskraft das Gleichgewicht. Beachten wir weiter, daß die Resultierende aus  $P_k$  und  $T_k$ , die sogen. verlorene Kraft  $V_k$  im Punkte  $A_k$  entgegengesetzt gleich der inneren Kraft  $J_k$  ist und die inneren Kräfte am System sich das Gleichgewicht halten, so läßt sich vorstehender Satz auch in der Form aussprechen: Die verlorenen Kräfte halten sich am System das Gleichgewicht. Dies ist das Prinzip von D'Alembert, das an sich nichts anderes aussagt, als die Grundlage, von der wir aus-

gehen, um die Differentialgleichungen (II) der Bewegung des Systems abzuleiten, das aber den Vorzug hat, ein Problem der Dynamik auf ein solches der Statik zurückzuführen. Einen Vorteil, und zwar den der größeren Einfachheit hat es dann und nur dann, wenn die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes für das System bekannt sind, wie schon erwähnt, denn dann ist es nicht erst nötig, die Zwangskräfte einzuführen.

Brauchbarer ist das Prinzip von D'Alembert in der Form, die sich ergibt, wenn man benutzt, daß jede verlorene Kraft  $V_k = P_k \hat{+} T_k$ , d. h. die Resultierende aus  $P_k$  und  $T_k$  ist, in der folgenden Gestalt:

Die äußeren und die Trägheitskräfte halten sich am System dauernd das Gleichgewicht.

Wie einfach die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung eines Massenpunkte-Systems werden kann, zeigt sich besonders bei Anwendung dieses Prinzipes auf das starre System. Für letzteres fanden wir als Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes der wirkenden Kräfte die sechs Gleichungen (V) (Bd. II, S. 162), welche ausdrücken, daß die Kräfte am starren Körper im Gleichgewicht sind, wenn die Summen ihrer Komponenten in Richtung dreier zueinander senkrechter Achsen verschwinden und die resultierenden Momente der Kräfte für die drei Achsen zu Null werden. Bezeichnen  $X_k, Y_k, Z_k$  die Komponenten der äußeren Kräfte,  $x_k, y_k, z_k$  die Koordinaten der Systempunkte und beachten wir, daß die Komponenten der Trägheitskräfte  $T_k$  hier die Gestalt  $-m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}$ ,  $-m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}$ ,

—  $m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}$  haben, so nehmen jene sechs Gleichungen die Form

$$\begin{aligned} \sum_1^n \left( X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) &= 0, & \sum_1^n \left( Y_k - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) &= 0, \\ \sum_1^n \left( Z_k - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right) &= 0, \\ \sum_1^n \left\{ \left( Z_k - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right) y_k - \left( Y_k - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) z_k \right\} &= 0; \\ \sum_1^n \left\{ \left( X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) z_k - \left( Z_k - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right) x_k \right\} &= 0; \\ \sum_1^n \left\{ \left( Y_k - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) x_k - \left( X_k - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) y_k \right\} &= 0 \end{aligned}$$

an. An Stelle dieser Gleichungen lassen sich auch die folgenden setzen, wie man sofort übersieht, in denen  $X = \sum_1^n \left( X_k \right)$ ,  $Y = \sum_1^n \left( Y_k \right)$ ,  $\sum_1^n \left( Z_k \right)$  die Komponenten der Resultierenden aller äußeren Kräfte und

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_1^n \left( Z_k y_k - Y_k z_k \right), & M_y &= \sum_1^n \left( X_k z_k - Z_k x_k \right), \\ M_z &= \sum_1^n \left( Y_k x_k - X_k y_k \right) \end{aligned}$$

die resultierenden Momente der letzteren für die drei Achsen bezeichnen:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n \left( m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) &= X, & \sum_1^n \left\{ m_k \left( y_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - z_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) \right\} &= M_x, \\ \sum_1^n \left( m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) &= Y, & \sum_1^n \left\{ m_k \left( z_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - x_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right) \right\} &= M_y, \\ \sum_1^n \left( m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} \right) &= Z, & \sum_1^n \left\{ m_k \left( x_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) \right\} &= M_z. \end{aligned} \right.$$

Das sind die sechs Differentialgleichungen der Bewegung eines frei beweglichen starren Systems, zu denen wir hier ohne die Zuhilfenahme der inneren bzw. Zwangskräfte gelangten. Auf diese wären wir natürlich auch auf dem früheren, allerdings sehr umständlichen

Wege geführt worden, indem wir die  $3n$  Differentialgleichungen (II) aufstellten und aus ihnen die  $\nu = 3n - 6$  Zwangskräfte  $S_{hk} = S_{kh}$  eliminierten, die den  $3n - 6$  notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen (36) der Starrheit des Systems entsprechen.

Nicht nur bei dem starren System erweist sich die Anwendung des Prinzipes von D'Alembert als zweckmäßig, sondern auch bei allen Massenpunktsystemen, für die man die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes von Kräften bereits kennt. Nun haben wir bei Aufstellung dieser Bedingungsgleichungen (s. Bd. II, 22. und 26. Kap.) vorausgesetzt, daß die Bedingungsgleichungen, denen die Bewegung des Systems unterworfen ist, skleronom sind, d. h. von der Zeit nicht abhängen, sondern nur von den Koordinaten der Massenpunkte. Der allgemeinere Fall aber ist der, daß diese Bedingungsgleichungen auch die Zeit enthalten (sie werden rheonom genannt); es fragt sich, ob das Prinzip von D'Alembert dann auch angewendet werden darf.

Hierüber gibt folgende Erwägung Aufschluß. Ist die Bewegung des Systempunktes  $A_k$  u. a. an die Bedingungsgleichung

$$(38) \quad \varphi_h(x_k y_k z_k t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gebunden, so bedeutet das für das Gleichgewicht der Kräfte an dem System, daß die Elementararbeit  $\delta A$  der letzteren verschwinden muß für alle  $\delta u_k$  des Punktes  $A_k$ , die der Bedingungsgleichung (38) genügen, d. h. die der Gleichung

$$(38a) \quad \sum_1^n \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_k} \delta z_k \right) = 0$$

entsprechen, in der  $\delta x_k$ ,  $\delta y_k$ ,  $\delta z_k$  die Projektionen von  $\delta u_k$  auf die drei Koordinatenachsen bezeichnen. Hiermit wird ersichtlich, daß man bei Aufstellung der Gleichung (38a) die Zeit  $t$  als Konstante betrachtet. Wenn z. B. die Bewegung des Punktes  $A_k$  an eine mit der Zeit  $t$  sich ändernde Fläche gebunden ist, so hat letztere zur Zeit  $t$  eine ganz bestimmte Gestalt, auf der das  $\delta u_k$  liegen muß. Das wird durch die Gleichung (38a) zum Ausdruck gebracht, nicht aber durch die folgende

$$(38b) \quad \sum_1^n \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_k} \delta z_k \right) + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \delta t = 0.$$

Behandelt man aber bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes die Zeit in den Bedingungsgleichungen (38) der Bewegung des Systems als konstant, so unterscheidet sich dieses Verfahren in nichts von dem bei zeitfreien Bedingungsgleichungen; es muß daher das Prinzip von D'Alembert auch in diesem Falle Gültigkeit haben.

Beispiel:

Zwei starr verbundene Massenpunkte  $A_1$  und  $A_2$ , auf die keine äußeren Kräfte wirken, bewegen sich in der Ebene eines Kreises ( $K$ ) (s. Fig. 45), dessen Radius  $R$  sich mit der Zeit ändert. Der Punkt  $A_1$  sei gezwungen, sich auf diesem Kreise zu bewegen. Legen wir den Koordinatenanfang  $O$  in den Kreismittelpunkt, dann ist  $\overline{OA_1} = R = f(t)$  und die Bedingungsgleichung für die Bewegung von  $A_1$  lautet

$$\varphi_1(x_1, y_1, t) = x_1^2 + y_1^2 - R^2 = 0.$$

Die Bewegung von  $A_1$  und  $A_2$  ist ferner an die Bedingungsgleichung

$$\varphi_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0$$

gebunden, in der  $\overline{A_1 A_2} = l$  eine Konstante ist.

Zwecks einfacher Anwendung des Prinzips von D'Alembert fassen wir beide Punkte als die einer starren Ebene auf, die sich komplan in der Kreisebene bewegt und einer ihrer Punkte  $A_1$  auf der vorgeschriebenen Kurve ( $k$ ). Für diesen Fall haben wir die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes schon aufgestellt, und zwar sind diese die Gleichungen (78a) und (78b) des II. Bandes (16. Kap., S. 121), welche ausdrücken, daß das resultierende Moment aller Kräfte für den geführten Punkt (hier  $A_1$ ) verschwindet und die Resultierende aller Kräfte senkrecht zur Kurve ( $k$ ) steht. Da hier keine äußeren Kräfte wirken, so haben wir beide Gleichungen nur für die Trägheitskräfte aufzustellen, und diese werden,

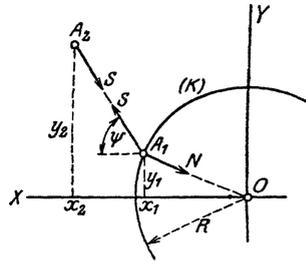


Fig. 45.

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} (y_2 - y_1) - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} (x_2 - x_1) = 0,$$

$$\left( m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) 2 y_1 - \left( m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \right) 2 x_1 = 0;$$

letztere, weil  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} = 2 y_1$ ,  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 2 x_1$  aus obiger Gleichung sich findet. Diese beiden Differentialgleichungen in Verbindung mit obigen beiden Bedingungsgleichungen für die Bewegung beider Punkte bestimmen die vier Koordinaten als Funktionen der Zeit und lösen sonach die Aufgabe.

Zu denselben Differentialgleichungen gelangt man unter Benutzung des erst angegebenen allgemeineren Weges, nämlich der Aufstellung der Differentialgleichungen (II) mittels der Zwangskräfte. Diese letzteren sind hier die zur Kurve ( $k$ ) senkrechte Kraft  $N$ , sowie die beiden in  $A_1$  bzw.  $A_2$  angreifenden entgegengesetzten gleichen Kräfte  $S$ , die die Starrheit der Verbindung von  $A_1$  und  $A_2$  ersetzen (s. Fig. 45). Zerlegen wir letztere Kräfte in Komponenten, so werden die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes der Trägheits- und Zwangskräfte

$$\text{in } A_1 \begin{cases} -m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - N \cos \varphi - S \cos \psi = 0 \\ -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - N \sin \varphi - S \sin \psi = 0 \end{cases} \text{ und in } A_2 \begin{cases} -m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + S \cos \psi = 0 \\ -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + S \sin \psi = 0. \end{cases}$$

Führen wir hierin  $\sin \varphi = \frac{y_1}{R}$ ,  $\cos \varphi = \frac{x_1}{R}$ ,  $\sin \psi = \frac{y_2 - y_1}{l}$ ,  $\cos \psi = \frac{x_2 - x_1}{l}$  ein und eliminieren aus ihnen  $N$  und  $S$ , so erhalten wir, wie leicht ersichtlich, dieselben Differentialgleichungen wie vorher.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß es auch Bedingungsgleichungen für die Bewegung eines Systems gibt, die nicht die Form (38) einer endlichen Beziehung zwischen den Koordinaten  $x_k y_k z_k$  und der Zeit  $t$  haben, sondern die einer Differentialbeziehung. Wenn z. B. in Fig. 45 der Punkt  $A_1$  gezwungen wäre, sich in der Richtung nach  $A_2$  hin zu bewegen, während  $A_2$  auf der Kurve  $\varphi_2(x_2 y_2 t) = 0$  sich bewegt, so besteht die Bedingungsgleichung  $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  oder auch

$$(x_2 - x_1) dy_1 - (y_2 - y_1) dx_1 = 0,$$

die sich nicht unmittelbar integrieren, also durch eine Gleichung der Form (38) ersetzen läßt. Das gilt von allen Differential-Bedingungsgleichungen, die den Integrabilitätsbedingungen nicht genügen. Letztere nennt man nach Hertz anholonom, während die anderen holonom heißen. Doch soll hier auf derartige Fälle nicht besonders eingegangen werden, da sie eine Änderung des Verfahrens zur Ermittlung der Differentialgleichungen nicht bedingen.

## 8. Kap. Das Prinzip der kinetischen Energie für Massenpunktsysteme.

Bezeichnet  $m_k$  die Masse und  $v_k$  die Geschwindigkeit des Systempunktes  $A_k$ , so nannten wir die Größe  $W_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2$  die kinetische Energie oder Wucht des Punktes. Dementsprechend wollen wir den Ausdruck

$$(39) \quad W = \sum_1^n (W_k) = \sum_1^n \left( \frac{1}{2} m_k v_k^2 \right)$$

die kinetische Energie oder Wucht des Massenpunktsystems nennen. Diese steht mit der Arbeit der äußeren Kräfte  $P_k$ , die auf die Systempunkte wirken, in einem ähnlich einfachen Zusammenhang, wie bei nur einem Massenpunkte. Um das zu beweisen, setzen wir

in der ersten der Differentialgleichungen (II)  $\frac{dx_k}{dt} = v_{kx}$  ein, wodurch die linke Seite  $m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}$  in  $m_k \frac{dv_{kx}}{dt} = m_k v_{kx} \frac{dv_{kx}}{dx_k} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} m_k v_{kx}^2 \right)$  übergeht; die Gleichung kann dann in der Gestalt

$$d \left( \frac{1}{2} m_x v_{kx}^2 \right) = (X_k + J_{kx}) dx_k$$

geschrieben werden. Formen wir die beiden anderen Gleichungen in derselben Weise um und addieren alle drei, so erhalten wir

$$d \left( \frac{1}{2} m_k v_{kx}^2 + \frac{1}{2} m_k v_{ky}^2 + \frac{1}{2} m_k v_{kz}^2 \right) = X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k \\ + J_{kx} dx_k + J_{ky} dy_k + J_{kz} dz_k.$$

Hierfür können wir auch die folgende Form

$$dW_k = dA_k + dA_k^{(i)}$$

setzen, in der  $dA_k$  die Arbeit der äußeren und  $dA_k^{(i)}$  die der inneren Kräfte des Systems bei seiner unendlich kleinen Lagenänderung bezeichnet. Summieren wir nun alle vorstehenden Gleichungen von  $k=1$  bis  $k=n$ , so erhalten wir unmittelbar die Bezeichnung

$$d\left(\sum_1^n W_k\right) = \sum_1^n (dA_k) + \sum_1^n (dA_k^{(i)}),$$

wofür wir die folgende

$$dW = dA + dA^{(i)}$$

setzen können, in der  $dA = \sum_1^n (dA_k)$  die Elementararbeit aller äußeren

und  $dA^{(i)} = \sum_1^n (dA_k^{(i)})$  die aller inneren bezeichnet.

Definitionsgemäß sind die inneren Kräfte  $J_k$  ohne Einfluß auf die Bewegung des Systems; sie halten sich also am letzteren das Gleichgewicht, d. h. es ist während der ganzen Dauer der Bewegung, bzw. in jeder Lage des Systems

$$\delta A^{(i)} = 0$$

für alle möglichen Elementarbewegungen des Systems. Unter letzteren muß sich auch die wirkliche Bewegung desselben befinden, folglich

$$dA^{(i)} = 0$$

sein in allen Lagen des Systems. Es besteht sonach die Beziehung

$$(40) \quad dW = dA$$

und diese sagt, daß die Änderung der kinetischen Energie des Systems während einer Elementarbewegung desselben gleich ist der Elementararbeit der auf das System wirkenden äußeren Kräfte.

Integrieren wir vorstehende Gleichung über die Bewegung des Systems aus seiner Anfangslage bis hin zu einer beliebigen endlich verschiedenen Lage, so erhalten wir die Beziehung

$$(41) \quad W - W_0 = A,$$

in der

$$W_0 = \sum_1^n \left(\frac{1}{2} m_k v_{0k}^2\right)$$

die Wucht oder kinetische Energie des Systems zu Beginn der Bewegung und

$$A = \sum_k^n \left[ \int_{x_{0k} y_{0k} z_{0k}}^{x_k y_k z_k} (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k) \right]$$

die Arbeit der Systemkräfte während der Bewegung bedeuten. Man nennt (41) das Prinzip der Wucht oder kinetischen Energie für Massenpunktsysteme; letzteres sagt aus, daß die Änderung der Wucht eines Massenpunktsystems gleich ist der Arbeit der auf das System wirkenden äußeren Kräfte während der Bewegung.

Das Prinzip der Wucht ist nun wohl ein sehr umfassendes, doch gilt es nur mit der Beschränkung auf Bewegungen von Massenpunktsystemen, deren Bedingungsgleichungen skleronom sind, also die Zeit nicht enthalten. Denn im anderen Falle verrichten die inneren, bzw. die Zwangs-Kräfte eine Arbeit, wie wir schon bei der Bewegung eines Massenpunktes auf vorgeschriebener Kurve oder Fläche (s. S. 61) zeigten; es ist also  $dA^{(6)}$  von Null verschieden und das Prinzip gilt nicht. Das ist z. B. der Fall bei der auf S. 62 u. ff. behandelten Bewegung.

Ferner muß hier daran erinnert werden, daß, wie auf S. 40 nachgewiesen wurde, das Prinzip bei Kräften, die von der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes abhängen, zwar gilt, jedoch nicht brauchbar ist, da sich die Arbeitsintegrale nicht unmittelbar ausführen lassen.

Sind die auf das System wirkenden äußeren Kräfte konservative, besitzen also Kräftefunktionen  $U_k$ , so läßt sich die Arbeit  $A$  in der einfacheren Form

$$A = U - U_0$$

schreiben, in der

$$U = \sum_k^n (U_k)$$

ist; dementsprechend nimmt das Prinzip der Wucht auch hier die einfache Gestalt (26 a) bzw. (26 b) an, in der  $W$  und  $U$  die entsprechende erweiterte Bedeutung haben.

Beispiele:

1. Führt ein starres System eine Schiebung aus, so haben alle Punkte die nach Größe und Richtung gleiche Schiebungsgeschwindigkeit, die zur Zeit  $t$   $v$  sein möge. Dann findet sich für die Wucht der Ausdruck

$$W = \sum_k^n (\frac{1}{2} m_k v^2) = \frac{1}{2} v^2 \sum_k^n (m_k) = \frac{1}{2} M v^2,$$

falls  $M = \sum_1^n (m_k)$  die Gesamtmasse bezeichnet. Dieser Ausdruck lehrt, daß man in diesem besonderen Falle die Wucht des Systems durch die eines Massenpunktes ersetzen kann, dessen Masse gleich der gesamten Masse ist. Als dieser Punkt wird häufig der Massenmittelpunkt gewählt, was im Falle der Wirkung von Schwerkraften auf das System sich als besonders zweckmäßig erweist. Die gleiche Überlegung gilt auch, wenn die Gesamtmasse sich stetig über einen endlichen Raumteil verteilt, also für einen starren Körper im gewöhnlichen Sinne.

2. Dreht sich ein starres System um eine Achse momentan mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so erhält die Wucht den Ausdruck

$$W = \sum_1^n \left( \frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_1^n (m_k r_k^2 \omega^2) = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_1^n (m_k r_k^2),$$

weil  $v_k = r_k \cdot \omega$  ist. In ihm bedeutet

$$\sum_1^n (m_k r_k^2) = J$$

das Trägheitsmoment des Massenpunktsystems für die Drehachse (vgl. hierzu Bd. II, 4. Kap., S. 35), so daß kürzer

$$W = \frac{1}{2} J \omega^2$$

gesetzt werden kann. Der gleiche Ausdruck gilt, wenn die Gesamtmasse  $M$  sich stetig über einen Raumteil erstreckt; man hat dann nur  $J$  durch

$$J = \int r^2 dm$$

zu ersetzen.

Jede Elementarbewegung eines starren Körpers kann als eine Schraubung aufgefaßt werden, die durch Zusammensetzung der Schiebung längs der Schraubenchse und der Drehung um diese erhalten wird. Bezeichnet  $v_s$  die Schiebungsgeschwindigkeit und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so ist die Geschwindigkeit  $v_k$  eines beliebigen Körperpunktes, der den Abstand  $r_k$  von der Schraubenchse hat, gleich  $\sqrt{v_s^2 + (r_k \omega)^2}$  (vgl. Bd. I, S. 107); folglich wird die Wucht des Körpers

$$W = \sum_1^k \left( \frac{1}{2} m_k (v_s^2 + r_k^2 \omega^2) \right) = \frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} J_s \omega^2.$$

Dieser Ausdruck, der auch für jeden Körper gilt, dessen Masse einen Raumteil stetig erfüllt, ist ein Sonderfall einer viel allgemeineren Bezeichnung, die weiterhin abgeleitet wird.

Bei einer abgeschossenen Granate fällt unter normalen Verhältnissen die Schraubenchse mit der geometrischen Achse des Rotationskörpers zusammen, den die Granate darstellt, und  $v_s$  ist die Geschwindigkeit in Richtung der Achse. Unterliegt die Granate nur ihrer Schwere  $L$ , aber nicht dem Luftwiderstande, so ist die resultierende Kräftefunktion derselben  $U = L \cdot \zeta$ , falls  $\zeta$  den Abstand des Granatenschwerpunktes von einer horizontalen Ebene bezeichnet und die Arbeit der Schwere

$$A = U - U_0 = L (\zeta - \zeta_0).$$

Folglich besteht nach (41) die Bezeichnung

$$\frac{1}{2} M v_s^2 + \frac{1}{2} J_s \omega^2 - (\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} J_s \omega_0^2) = Mg(\zeta - \zeta_0).$$

Da die Drehachse der Granate den Schwerpunkt enthält, so ist das Moment der Schwere und folglich die Arbeit der letzteren bei der Drehung Null; es muß sonach  $\frac{1}{2} J_s (\omega^2 - \omega_0^2) = 0$  werden, und das bedeutet, daß  $\omega = \omega_0 = \text{const}$  ist, die Granate sich demnach gleichförmig dreht. Damit folgt aber weiter

$$\frac{1}{2} M (v_s^2 - v_0^2) = Mg(\zeta - \zeta_0),$$

woraus wir schließen, daß die Bewegung des Schwerpunktes, bzw. dessen Geschwindigkeitsänderung dieselbe ist wie die eines schweren Massenpunktes im luftleeren Raume.

Für die Wucht eines Massenpunktsystems läßt sich ein in vielen Fällen sehr brauchbarer anderer Ausdruck ableiten, der sich darauf

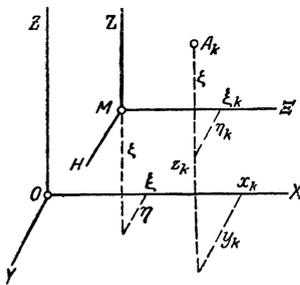


Fig. 46.

gründet, daß die Bewegung des Systems als zusammengesetzt aus der Bewegung ihres Massenmittelpunktes und der relativen Bewegung der Systempunkte gegen den Massenmittelpunkt aufgefaßt werden kann. Bezeichnen  $x_k y_k z_k$  die Koordinaten des Massenpunktes  $A_k$  und  $\xi \eta \zeta$  die des Massenmittelpunktes  $M$  des Systems für ein beliebiges Koordinatensystem, so bestehen definitionsgemäß die Beziehungen (vgl. Bd. II, S. 19)

$$(42) \quad M \xi = \sum_1^n (m_k x_k), \quad M \eta = \sum_1^n (m_k y_k), \quad M \zeta = \sum_1^n (m_k z_k),$$

in denen  $M = \sum_1^n (m_k)$  die gesamte Masse des Systems bezeichnet.

Denken wir uns  $M$  als Anfangspunkt eines beweglichen Koordinatensystems, dessen Achsen  $E H Z$  immer parallel den ruhenden sich bewegen, das also eine Schiebung mit  $M$  ausführt, und bezeichnen mit  $\xi_k y_k z_k$  die (relativen) Koordinaten von  $A_k$  in bezug auf dieses System, dann bestehen die Beziehungen (s. Fig. 46)

$$(43) \quad x_k = \xi + \xi_k, \quad y_k = \eta + \eta_k, \quad z_k = \zeta + \zeta_k.$$

Setzen wir sie in (42) ein, so folgt, wie leicht ersichtlich,

$$(44) \quad \sum_1^n (m_k \xi_k) = 0, \quad \sum_1^n (m_k \eta_k) = 0, \quad \sum_1^n (m_k \zeta_k) = 0.$$

Beachten wir nun, daß

$$v_k^2 = v_{k_x}^2 + v_{k_y}^2 + v_{k_z}^2 = \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2$$

und zufolge (43) auch

$$v_k^2 = \left( \frac{d\xi}{dt} + \frac{dx_k}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\eta_k}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} + \frac{d\zeta_k}{dt} \right)^2$$

gesetzt werden kann, so erhalten wir

$$\begin{aligned} W &= \sum_1^n \left( \frac{1}{2} m_k v_k^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_1^n \left\{ m_k \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_1^n \left\{ m_k \left[ \left( \frac{d\xi_k}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta_k}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta_k}{dt} \right)^2 \right] \right\} + \frac{d\xi}{dt} \sum_1^n \left( m_k \frac{d\xi_k}{dt} \right) \\ &+ \frac{d\eta}{dt} \sum_1^n \left( m_k \frac{d\eta_k}{dt} \right) + \frac{d\zeta}{dt} \sum_1^n \left( m_k \frac{d\zeta_k}{dt} \right). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes mit  $v_M$ , die relative Geschwindigkeit des Punktes  $A_k$  gegen das Koordinatensystem  $\mathcal{E}HZ$  mit  $v_{k\sigma}$ , und benutzen, daß

$$\left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 = v_M^2, \quad \left( \frac{d\xi_k}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta_k}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta_k}{dt} \right)^2 = v_{k\sigma}^2,$$

ferner, daß zufolge (44)

$$\sum_1^n \left( m_k \frac{d\xi_k}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \sum_1^n \left( m_k \xi_k \right) \right] = 0, \quad \sum_1^n \left( m_k \frac{d\eta_k}{dt} \right) = 0, \quad \sum_1^n \left( m_k \frac{d\zeta_k}{dt} \right) = 0,$$

so erhalten wir

$$(45) \quad W = \frac{1}{2} M v_M^2 + \sum_1^n \left( \frac{1}{2} m_k v_{k\sigma}^2 \right),$$

und damit den Satz: Die Wucht eines Massenpunktsystems ist die Summe der Wucht des Massenmittelpunktes, in dem alle Massen vereinigt zu denken sind, und der Wucht der Relativbewegung des Systems um den Massenmittelpunkt.

So ist z. B. die Wucht der Granate im Beispiel (3) unmittelbar aus (45) in der dort angeführten Gestalt zu erhalten, wie überhaupt die Bewegung eines freien, schweren starren Körpers um den Massenmittelpunkt als eine Drehung um eine Mittellinie des Körpers für die entsprechende Wucht einen Ausdruck der Form  $\frac{1}{2} J_M \omega^2$  ergibt, in dem  $J_M$  das Trägheitsmoment des Körpers für jene Mittellinie und  $\omega$  die zugehörige Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

### 9. Kap. Das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes.

Beziehen wir das Massenpunktesystem auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $XYZ$ , so wird der Abstand  $\xi$  des Massenmittelpunktes  $M$  von der  $YZ$ -Ebene bestimmt durch die Beziehung (42), d. i. durch die Gleichung

$$M \xi = \sum_1^n (m_k x_k),$$

in der  $M = \sum_1^n (m_k)$  die Summe aller Massen des Systems bezeichnet.

Denken wir uns die Bewegungen aller Punkte auf die  $X$ -Achse projiziert, so wird durch vorstehende Beziehung für  $\xi$  zugleich die projizierte Bewegung des Massenmittelpunktes auf der  $X$ -Achse bestimmt. Bezeichnen wir die Differentiation einer Veränderlichen  $u$  nach der Zeit durch  $\dot{u}$ , setzen also  $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ , so finden wir

$$(46) \quad M \dot{\xi} = \sum_1^n (m_k \dot{x}_k);$$

da hierin  $m_k x_k$  der Impuls der projizierten Bewegung von Punkt  $A_k$  auf der  $X$ -Achse ist, und  $M \dot{\xi}$  der von  $M$ , falls in ihm alle Massen  $m_k$  vereinigt wären, so drückt (46) den folgenden Satz aus: Für die projizierte Bewegung eines Massenpunktesystems auf einer beliebigen Geraden ist der Impuls des Massenmittelpunktes, falls man alle Massen in ihm vereinigt denkt, gleich der Summe der Impulse aller Massenpunkte.

Durch nochmalige Differentiation von (46) nach  $t$  erhält man

$$(47) \quad M \ddot{\xi} = \sum_1^n (m_k \ddot{x}_k),$$

worin  $\frac{d^2 u}{dt^2} = \ddot{u}$  gesetzt wurde, und unter Benutzung der Differentialgleichungen (II) der Bewegung des Systems hieraus

$$(48) \quad M \ddot{\xi} = \sum_1^n (X_k) + \sum_1^n (J_{kx}).$$

Machen wir nun die Voraussetzung, daß

$$\sum_1^n (J_{kx}) = 0,$$

so bedeutet das, daß die Resultierende aller inneren Kräfte, wenn man sie in einem Punkt angreifend denkt, dauernd senkrecht zur  $X$ -Achse steht; unter dieser Annahme wird dann

$$(49) \quad M \ddot{\xi} = \sum_1^n (X_k) = X,$$

falls  $X$  die Komponente der Resultierenden aller äußeren Kräfte bezeichnet. Vorstehende Gleichung ist aber die Differentialgleichung der projizierten Bewegung des Massenmittelpunktes auf der  $X$ -Achse, wenn ihm die Masse  $M$  beigelegt würde; es gilt sonach der Satz:

Steht die Resultierende aller inneren Kräfte des Systems dauernd senkrecht auf einer Geraden, so erfolgt die projizierte Bewegung des Massenmittelpunktes des Systems auf jener Geraden genau so, als ob alle Massen in ihm vereinigt wären und alle äußeren Kräfte in ihm angreifen würden. Dieser Satz wird der von der Bewegung des Massenmittelpunktes genannt.

Haben auch die äußeren Kräfte  $P_k$  die Eigenschaft, daß ihre Resultante dauernd zur selben Geraden, also der  $X$ -Achse des Koordinatensystems senkrecht steht, oder, was dasselbe sagt, daß

$$X = \sum_1^n (X_k) = 0,$$

so folgt  $\ddot{\xi} = 0$ , und das bedingt, daß die projizierte Bewegung des Massenmittelpunktes  $M$  des Systems auf der Geraden eine gleichförmige wird, nämlich

$$\dot{\xi} = v_{Mx} = \text{const},$$

falls  $v_{Mx}$  die Komponente der Geschwindigkeit  $v_M$  des Massenmittelpunktes bezeichnet. Ist  $v_{M0x}$  die entsprechende Komponente der Anfangsgeschwindigkeit  $v_{M0}$  von  $M$ , also  $v_{Mx} = \text{const} = v_{M0x}$ , dann bestimmt sich diese nach (46) aus der Gleichung

$$M v_{M0x} = \sum_1^n (m_k v_{k0x}),$$

in der die  $v_{k0x}$  die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeiten  $v_{k0}$  der einzelnen Massenpunkte bezeichnen.

Da  $\dot{\xi}$  und folglich auch  $M \dot{\xi}$  hinsichtlich der Zeit unveränderlich ist, so macht die Gleichung (46) ersichtlich, daß

$$(50) \quad \sum_1^n (m_k \dot{x}_k) = \text{Const};$$

hierin bezeichnet  $\dot{x}_k = v_{kx}$  die Komponente von  $v_k$  in Richtung der  $X$ -Achse. Setzen wir noch  $\text{Const} = c_x$ , so stellt die Gleichung

$$(50a) \quad \sum_1^n (m_k v_{kx}) = c_x$$

ein Integral der Differentialgleichungen (II) für diesen besonderen Fall dar. Da (50) auch in der Form

$$\sum_1^n (m_k \dot{x}_k) = \frac{d}{dt} \left[ \sum_1^n (m_k x_k) \right] = c_x$$

geschrieben werden kann, so folgt durch nochmalige Integration

$$(51) \quad \sum_1^n (m_k x_k) = c_x \cdot t + C_x,$$

in welcher Beziehung  $C_x$  eine weitere Konstante bezeichnet. Die beiden Gleichungen (50a) und (51) zusammen werden das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes genannt; es gilt im vorliegenden Falle nur für die projizierte Bewegung des Massenmittelpunktes  $M$  auf die Gerade, für welche so-

wohl  $\sum_1^n (J_{kx}) = 0$  als auch  $X = \sum_1^n (X_k) = 0$  ist. Die beiden Integralgleichungen drücken im Grunde nur aus, daß die projizierte Bewegung des Massenmittelpunktes auf der Geraden gleichförmig ist.

Die beiden Konstanten  $c_x$  und  $C_x$  sind gewöhnlich bestimmt durch die Anfangswerte der  $v_{kx}$  und der  $x_k$ , und zwar findet sich aus (50a)

$$c_x = \sum_1^n (m_k v_{k0x})$$

und aus (51) dann

$$C_x = \sum_1^n (m_k x_{k0}) - c_x t_0.$$

Die Gleichung der Bewegung des Massenmittelpunktes erhalten wir aus dem Vorhergehenden zu

$$\xi = \frac{1}{M} (c_x \cdot t + C_x);$$

sie lehrt, daß die Projektion des Massenmittelpunktes auf der Geraden in Ruhe bleibt, wenn sie zu Anfang in Ruhe war, d. i.

$v_{M0x} = 0$ , oder, was auf dasselbe hinauskommt,  $\sum_1^n (m_k v_{k0x}) = 0$ .

Ein allgemeineres Integral finden wir, falls  $X = \sum_1^n (X_k) = \text{const}$  ist; denn die aus dieser Voraussetzung folgende Gleichung, die (49) nach sich zieht, nämlich

$$M \ddot{\xi} = \text{const} = K_x,$$

läßt sich auch unmittelbar integrieren. In diesem Falle wird die projizierte Bewegung des Massenmittelpunktes auf der Geraden eine gleichmäßig beschleunigte.

Beispiele:

1. Der Satz von der Bewegung des Massenmittelpunktes gilt bei dem starren System, denn je zwei Zwangskräfte zwischen zwei starr verbundenen Punkten liegen in der Verbindungslinie und sind entgegengesetzt gleich, woraus folgt, daß die Resultierende der inneren Kräfte des Systems Null ist, also auch jede ihrer Komponenten in bezug auf alle Geraden. Der Massenmittelpunkt eines jeden starren Körpers bewegt sich dementsprechend so, als ob alle Massen des Systems in ihm vereinigt wären und alle äußeren Kräfte in ihm angreifen würden. Ist der Körper nur seiner Schwere unterworfen, so besitzt auch das Prinzip der Erhaltung der Bewegung Gültigkeit für die projizierte Bewegung auf jeder horizontalen Geraden, hinsichtlich deren die Voraussetzung  $\sum_1^n (J_{k,x}) = 0$  erfüllt ist. Das ist u. a. der Fall bei der freien Bewegung schwerer Körper im luftleeren Raume.

2. Ein starres Prisma von Dreiecksquerschnitt (s. Fig. 47) gleite reibungsfrei auf horizontaler Ebene, und auf der unter  $\alpha$ -geneigten Seitenfläche ein schwerer Körper  $K_1$ , der gegen  $K_2$  eine geradlinige Schiebung ausführt, eben-

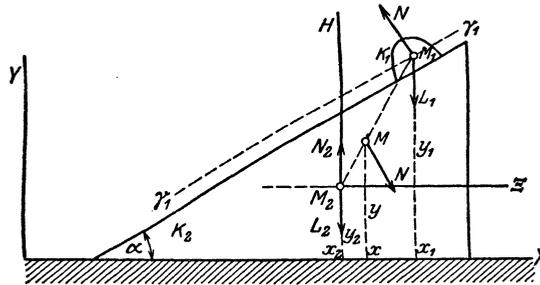


Fig. 47.

falls ohne Reibung. Die Massenmittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  beider Körper bewegen sich dann entsprechend dem Satz von der Bewegung des Massenmittelpunktes, und weil sie nur der Schwere  $L_1$  bzw.  $L_2$  unterworfen sind, auch dem Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes für die projizierte Bewegung des Systems auf der X-Achse. Es bestehen folglich die aus (50) bzw. (51) hervorgehenden beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} M_1 \dot{\xi}_1 + M_2 \dot{\xi}_2 &= c_x, \\ M_1 \xi_1 + M_2 \xi_2 &= c_x t + C_x, \end{aligned}$$

in denen  $M_1$  und  $M_2$  die Massen beider Körper und  $\xi_1$  und  $\xi_2$  die Abszissen der Massenmittelpunkte bezeichnen. Da  $M_2$  parallel der  $X$ -Achse und  $M_1$  parallel der unter  $\alpha$  geneigten Ebene auf der Geraden  $\gamma_1$  sich zu bewegen gezwungen ist, so bestehen für die Bewegung des Systems noch die beiden Bedingungsgleichungen

$$\eta_2 = \text{const} = \eta_{20} \quad \text{und} \quad \eta_1 - \eta_2 = h + (\xi_1 - \xi_2) \tan \alpha,$$

in denen  $h = \overline{M_2 H}$  letztere als gegeben anzusehende Strecke bezeichnet. Durch Differentiation nach der Zeit erhält man aus ihnen

$$\dot{\eta}_2 = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\eta}_1 = (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) \tan \alpha,$$

und diese reichen selbst in Verbindung mit dem Integral

$$\frac{1}{2} M_1 (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2) + \frac{1}{2} M_2 \dot{\xi}_2^2 + M_1 g (\zeta_1 - \zeta_{01}) = \text{Const},$$

welches das Prinzip der Wucht liefert, da die Arbeit der Schwere  $L_1 = M_1 g$  sich zu  $L_1 (\zeta_1 - \zeta_{01})$  ergibt, und obigen Integralen nicht aus, um  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  und  $\xi_2$  als Funktionen der Zeit zu bestimmen.

Kürzer gelangt man hier zum Ziel durch Aufstellung der Differentialgleichungen für die Bewegungen der Massenmittelpunkte beider Körper. Zu dem Ende führen wir als Zwangskräfte normale Flächenkräfte in den ebenen Berührungsflächen von  $K_1$  und  $K_2$ , sowie von  $K_2$  mit dem ruhenden Bezugskörper ein, deren Resultierende mit  $N$  bzw. mit  $N_2$  bezeichnet werden mögen und deren Angriffspunkte wir nach  $M_1$  bzw.  $M_2$  vorlegen. Dann werden die gesuchten Differentialgleichungen (II) hier zufolge (48)

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{\xi}_1 &= -N \sin \alpha, & M_2 \ddot{\xi}_2 &= +N \sin \alpha, \\ M_1 \ddot{\eta}_1 &= +N \cos \alpha - L_1, & M_2 \ddot{\eta}_2 &= -N \cos \alpha + N_2 - L_2. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Bedingungsgleichungen für die Bewegung beider Massenmittelpunkte, nämlich  $\eta_2 = \eta_{20}$  und  $\eta_1 - \eta_2 = h + (\xi_1 - \xi_2) \tan \alpha$  erhalten wir aus ihnen

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= -\frac{M_2 \sin \alpha \cos \alpha}{M_1 \sin^2 \alpha + M_2} g, & \ddot{\xi}_2 &= \frac{M_1 \sin \alpha \cos \alpha}{M_1 \sin^2 \alpha + M_2} g, & N &= \frac{M_1 M_2 \cos \alpha}{M_1 \sin^2 \alpha + M_2} g, \\ \ddot{\eta}_1 &= -\frac{(M_1 + M_2) \sin^2 \alpha}{M_1 \sin^2 \alpha + M_2} g, & \ddot{\eta}_2 &= 0, & N_2 &= \frac{M_1 + M_2}{M_1 \sin^2 \alpha + M_2} M_2 g, \end{aligned}$$

womit erkannt wird, daß die drei projizierten Bewegungen der Massenmittelpunkte gleichmäßig veränderte sind und  $M_1$  eine Parabel beschreibt, deren Achse unter dem Winkel  $\beta = \arctan \left( \frac{M_1 + M_2}{M_2} \tan \alpha \right)$  gegen die  $X$ -Achse geneigt ist, weil die totale Beschleunigung nach Größe und Richtung sich nicht ändert.

Der Massenmittelpunkt  $M$  des ganzen Systems, der in der Verbindungslinie  $M_1 M_2$  liegt und die Strecke  $\overline{M_1 M_2}$  im umgekehrten Verhältnis der Massen beider Körper teilt, bewegt sich mit der Beschleunigung  $\ddot{\eta} = \frac{M_1 \eta_1 + M_2 \eta_2}{M}$

$= -\frac{M_1 \sin^2 \alpha}{M_1 \sin^2 \alpha + M_2} g$ , die offenbar kleiner als  $g$  ist und zwar auf einer Parabel mit lotrechter Achse. War das System bei Beginn der Bewegung in Ruhe, so beschreibt  $M$  eine lotrechte Gerade durch die Anfangslage  $M_0$ .

Im vorliegenden Falle macht die Berücksichtigung der Reibung keine wesentlichen Schwierigkeiten; die projizierten Bewegungen der Punkte  $M_1$  und  $M_2$  werden auch dann gleichmäßig veränderte. Aber das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes auf der  $X$ -Achse ist nicht mehr anwendbar, weil der Reibungswiderstand des Körpers  $K_2$  auf seiner Unterlage die Voraussetzung  $X = 0$  ausschließt.

3. Der bekannte Rücklauf der Geschütze bzw. Geschützrohre beim Abfeuern folgt dem Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes. Machen wir der Anschaulichkeit wegen die vereinfachende Annahme, daß die Rohrachse horizontal liegt, so bewegen sich die Massenmittelpunkte von Rohr (bei vorhandenem Rohrrücklauf) und Geschoß in dieser nach der Beziehung  $M_1 v_1 + M_2 v_2 = 0$ , denn vor dem Abfeuern sind ja beide in Ruhe ( $v_{01} = v_{02} = 0$ ) und die Voraussetzungen der Gültigkeit des Prinzips wären erfüllt, wenn man die Reibung zwischen Rohr und Lafette und die Wirkung der Rückholfedern auf die Rohrmasse  $M_2$  vernachlässigen dürfte. Da letzteres nicht der Fall, so wird die Geschwindigkeit der Rohrmasse kleiner als  $v_2 = -\frac{M_1}{M_2} \cdot v_1$  werden, wenn  $v_1$  die Geschoßgeschwindigkeit bezeichnet.

Ein verwandter Vorgang ist der der gegenläufigen Bewegung von Kessel und Fundament der Kolbendampfmaschinen bei den Lokomobilen, falls eine solche Bewegung nicht durch entsprechende Befestigungen unmöglich gemacht wird. Die Erhaltung der Anfangslage des gemeinsamen Massenmittelpunktes fordert, daß bei dem Bewegen von Kolben, Kolbenstangen mit Kreuzkopf, Pleuelstangen und Kurbeln die Masse des Fundamentes (mit Kessel) nach der entgegengesetzten Seite ausweiche. Wird letzteres durch die Befestigungen verhindert, dann sind elastische und evtl. plastische Formänderungen der letzteren die notwendige Folge.

Eine andere Folgerung aus dem Prinzip ist u. a. die, daß ein Mensch auf völlig glatter (horizontaler) Eisfläche seinen Ort nicht zu ändern vermag, während auf nicht glatter Unterlage die Reibung auf letzterer es ist, die die Fortbewegung ermöglicht.

Ist die Resultierende der inneren Kräfte Null, also auch

$$(52) \quad \sum_1^n (J_{kx}) = \sum_1^n (J_{ky}) = \sum_1^n (J_{kz}) = 0,$$

so besteht die Gleichung (49) für die drei Achsen eines beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystems, d. i. es gelten die drei Gleichungen

$$(53) \quad M \ddot{\xi} = \sum_1^n (X_k) = X, \quad M \ddot{\eta} = \sum_1^n (Y_k) = Y, \quad M \ddot{\zeta} = \sum_1^n (Z_k) = Z,$$

welche den folgenden Satz von der Bewegung des Massenmittelpunktes enthalten: Ist die Resultierende aller inneren Kräfte eines Systems Null, so bewegt sich sein Massenmittelpunkt so, als ob alle Massen des Systems in ihm vereinigt wären und alle äußeren Kräfte in ihm angriffen.

Wenn außerdem noch die Resultierende der äußeren Kräfte verschwindet, also  $X = Y = Z = 0$  ist, dann muß sich der Massen-

mittelpunkt gleichförmig in gerader Linie bewegen, weil zufolge (53) die totale Beschleunigung des Massenmittelpunktes ebenfalls zu Null wird. Es bestehen dann die (50) und (51) entsprechenden Gleichungen für die drei Achsen eines beliebigen Koordinatensystems, nämlich die folgenden sechs:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n (m_k \dot{x}_k) = c_x, \quad \sum_1^n (m_k \dot{y}_k) = c_y, \\ \sum_1^n (m_k x_k) = c_x t + C_x, \quad \sum_1^n (m_k y_k) = c_y t + C_y, \\ \sum_1^n (m_k \dot{z}_k) = c_z, \\ \sum_1^n (m_k z_k) = c_z t + C_z; \end{array} \right.$$

sie sind sechs Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung des Systems und werden kurz das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes genannt.

Beispiele:

1. Eine Anwendung des Satzes von der Bewegung des Massenmittelpunktes bietet die freie Bewegung eines jeden starren Körpers, welchen Kräften er auch ausgesetzt sein möge. Unterliegt er nur seiner Schwere, so beschreibt er notwendig die bekannte Wurfparabel, wobei er noch Drehungen um irgendeine Mittellinie ausführt. Auf letztere kommen wir später zurück.

2. Für die Bewegung des freien Systems sind die Voraussetzungen des Prinzips der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes beide erfüllt, da keine inneren Kräfte auftreten und die Resultierende der gegenseitigen Anziehungen je zweier Massenpunkte nach dem Newtonschen Gesetz Null ist. Folglich bewegt sich der Massenmittelpunkt eines solchen Systems geradlinig und gleichförmig. Das gilt u. a. auch für die Bewegung des Sonnensystems, dessen Massenmittelpunkt in der Richtung nach dem Sternbild des Herkules gegen den Fixsternhimmel mit einer Geschwindigkeit von etwa 18 Kilometer in der Sekunde fortschreitet.

## 10. Kap. Das Prinzip der Erhaltung der Flächen.

Dieses Prinzip, das für einen freien Massenpunkt bereits im 4. Kapitel (s. S. 41, Formel 29, bzw. 29a) abgeleitet wurde, erhält für Massenpunktsysteme eine ähnliche Gestalt und läßt sich in folgender Weise entwickeln. Multiplizieren wir die zweite der Differentialgleichungen (II) mit  $y_k$ , die erste mit  $x_k$  und ziehen letzteres Produkt von ersterem ab, so erhalten wir die Gleichung

$$m_k \left( x_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - y_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right) = Y_k x_k - X_k y_k + J_{ky} x_k - J_{kx} y_k,$$

für die sich die folgende

$$\frac{d}{dt} \left[ m_k \left( x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right) \right] = M_{kz} + M_{kz}^{(i)}$$

setzen läßt, in der  $M_{kz} = Y_k x_k - X_k y_k$  das Moment der äußeren im Punkte  $A_k$  angreifenden äußeren Kraft  $P_k$  und  $M_{kz}^{(i)} = J_{ky} x_k - J_{kx} y_k$  das der inneren Kraft  $J_k$  für die  $Z$ -Achse bezeichnet; sie stimmt mit Formel (14) (S. 25) überein. Stellen wir vorstehende Gleichung für alle Werte von  $k=1, 2, \dots, n$  auf und summieren sie, so finden wir

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_1^n \left[ m_k \left( x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right) \right] \right\} = \sum_1^n (M_{kz}) + \sum_1^n (M_{kz}^{(i)}),$$

denn links läßt sich an Stelle der Summe der Differentialquotienten ohne weiteres der Differentialquotient der Summe setzen. Auf der

rechten Seite ist  $\sum_1^n (M_{kz}) = M_z$  das resultierende Moment der äußeren

Kräfte  $P_k$  für die  $Z$ -Achse und  $M_z^{(i)} = \sum_1^n (M_{kz}^{(i)})$  das der inneren, mit welchen Bezeichnungen vorstehende Gleichung in

$$(55) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \sum_1^n \left[ m_k \left( x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right) \right] \right\} = M_z + M_z^{(i)}$$

übergeht. Wir machen nun die Voraussetzung, daß das resultierende Moment der inneren Kräfte für eine bestimmte ruhende Gerade dauernd Null sei, dann ist, falls diese Gerade zur  $Z$ -Achse des Koordinatensystems gewählt wird,  $M_z^{(i)} = 0$ , und es besteht für das Massenpunktsystem die Differentialgleichung

$$(56) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \sum_1^n \left[ m_k \left( x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right) \right] \right\} = M_z;$$

diese wird der Flächensatz für die Bewegung des Systems um die  $Z$ -Achse genannt und läßt sich in folgendem Satz aussprechen:

Hat das resultierende Moment der inneren Kräfte eines Massenpunktsystems für eine bestimmte Gerade dauernd den Wert Null, so ist der totale Differentialquotient des resultierenden Impulsmomentes des Systems

für jene Gerade gleich dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte.

Daß die Summe auf der linken Seite vorstehender Gleichung in der Tat das Impulsmoment des Systems ist, lehrt die Beziehung (14a) (S. 26). Führt man an Stelle der  $x_k, y_k, z_k$  Zylinderkoordinaten  $r_k, \varphi_k, z_k$  ein, also  $x_k = r_k \cos \varphi_k, y_k = r_k \sin \varphi_k$ , so geht (56) über in

$$(56a) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \sum_1^n \left[ m_k r_k^2 \frac{d\varphi_k}{dt} \right] \right\} = M_z,$$

woraus in Verbindung mit (Ia), (8a) und (8b) die Richtigkeit der Behauptung erkannt wird.

Eine der wichtigsten Anwendungen des Flächensatzes bietet das starre System (s. Fig. 43), denn da die Zwangskräfte  $S_{ih} = S_{hi}$  entgegengesetzt gerichtet sind, ist ihr Moment für jede Gerade Null, also auch für die Koordinatenachsen, d. h.  $M_x^{(i)} = M_y^{(i)} = M_z^{(i)} = 0$ . Sonach gilt der Flächensatz für das frei bewegliche starre System, und da in diesem  $\frac{d\varphi_k}{dt} = \omega_z$  unabhängig von der Lage der Punkte  $A_k$  gegen die Dreh- bzw.  $Z$ -Achse ist, so geht (56a) in diesem Falle über in

$$(56b) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \omega_z \sum_1^n (m_k r_k^2) \right\} = M_z.$$

Der Ausdruck  $\sum_1^n (m_k r_k^2) = J_z$  ist bekanntlich das Trägheitsmoment des Massenpunktsystems für die  $Z$ -Achse und folglich  $J_z \omega_z$  das Impulsmoment des starren Systems für die  $Z$ -Achse; der Flächensatz nimmt daher die einfachere Gestalt

$$(57) \quad \frac{d}{dt} (J_z \omega_z) = M_z$$

an. In dieser Form gilt (57) auch für starre Körper, deren Masse einen Raumteil stetig erfüllt und deren Trägheitsmoment für die  $Z$ -Achse die Gestalt  $J_z = \int r_z^2 dm$  annehmen würde, wenn  $r_z$  den Abstand des Elementes  $dm$  von der  $Z$ -Achse bezeichnet.

Aus dem Flächensatz (56) gewinnt man unmittelbar ein Integral, falls  $M_z$  eine Konstante ist. Bezeichnen wir sie mit  $M_{0z}$ , so liefert die Integration die Beziehung

$$(58) \quad \sum_1^n \left[ m_k \left( x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right) \right] = M_{0z} \cdot t + C_z,$$

in der die Konstante  $C_z$  durch die Anfangslagen und -geschwindigkeiten bestimmt ist. Wenn insbesondere  $M_{Oz} = 0$  ist, so heißt die entstehende Gleichung das Prinzip der Erhaltung der Flächen und zwar aus den gleichen Gründen, wie bei einem Massenpunkte. Denn es ist (s. Bd. I, S, 59)

$$x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} = r_k^2 \frac{d\varphi_k}{dt} = 2 \frac{dF_k}{dt},$$

falls  $dF_k$  die Projektion des von  $r_k$  beschriebenen Flächenelementes auf die  $XY$ -Ebene bezeichnet, und folglich

$$2 \sum_1^n \left[ m_k \frac{dF_k}{dt} \right] = 2 \frac{d}{dt} \left[ \sum_1^n (m_k F_k) \right] = C_z;$$

hieraus wird durch Integration von  $t_0$  bis  $t$

$$(59) \quad \sum_1^n [m_k F_k] = \frac{1}{2} C_z (t - t_0)$$

gefunden und damit nachstehender Satz bewiesen: Ist das resultierende Moment der inneren und äußeren Kräfte eines Massenpunktsystems für eine Gerade dauernd Null, so ändert sich die Summe der mit den Massen multiplizierten Projektionen der Flächen, welche die Lote von den Massenpunkten auf die Gerade bei der Bewegung des Systems beschreiben, auf eine Ebene senkrecht zur Geraden proportional der verfloßenen Zeit.

Beispiel:

Das Doppelpendel gehört zu den Systemen, für das das Prinzip der Erhaltung der Flächen bezüglich des Lotes durch den Aufhängepunkt  $O$  (s. Fig. 40) gilt. Wählen wir, wie früher, dieses Lot zur  $Z$ -Achse des Koordinatensystems, so ist nicht nur  $M_z^{(i)} = 0$ , weil  $S_1$  die  $Z$ -Achse schneidet und  $S_{21} \hat{+} S_{12} = 0$ , sondern auch  $M_z$ , weil die beiden in  $A_1$  bzw.  $A_2$  angreifenden Schwerkräfte  $L_1$  und  $L_2$  die Momente Null für die  $Z$ -Achse haben. Wir können daher sofort das folgende Integral anschreiben:

$$m_1 \left( x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right) + m_2 \left( x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt} \right) = \text{Const} = C_z,$$

in dem  $C_z$  durch die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeiten bestimmt ist. Aus dieser Gleichung läßt sich eine der Geschwindigkeitskomponenten berechnen. Für die beiden anderen Achsen gilt zwar der Flächensatz, weil  $M_x^{(i)} = M_y^{(i)} = 0$ , jedoch nicht das Prinzip der Erhaltung der Flächen, weil die Momente der Schwerkräfte  $L_1$  und  $L_2$  für die genannten Achsen von Null verschieden sind.

In der erweiterten Form (58) wird das Prinzip der Erhaltung der Flächen selten anwendungsfähig, weil das Moment  $M_z$  der

äußeren Kräfte zumeist als veränderlich gegeben ist; es dient dann zur Berechnung einer der Geschwindigkeitskomponenten. In der Form, welche (58) im Falle  $M_{0z} \neq 0$  entspricht, ist es nicht zweckmäßig, ebensowenig als (59) selbst.

#### Beispiele:

1. Frei bewegliches starres System. Wie aus Fig. (43) ersichtlich wird, ist das Moment je zweier Zwangskräfte  $S_{hi} = S_{ih}$ , die die Starrheit des Stabes  $\overline{A_h A_i}$  ersetzen, für jede Gerade Null, folglich auch das resultierende Moment  $M_r^{(i)}$  der inneren Kräfte. Folglich ist auch  $M_x^{(i)} = M_y^{(i)} = M_z^{(i)} = 0$  und es gilt sonach der Flächensatz in der Form (57) für drei ganz beliebige Koordinatenachsen. Und wenn die Masse des Körpers einen Raumteil stetig erfüllt, also das Trägheitsmoment  $J_z = \int r_z^2 dm$  zu setzen ist, dann bestehen für die Koordinatenachsen die drei Differentialgleichungen:

$$(57a) \quad \frac{d}{dt}(J_x \omega_x) = M_x, \quad \frac{d}{dt}(J_y \omega_y) = M_y, \quad \frac{d}{dt}(J_z \omega_z) = M_z.$$

Ist der Körper nur seiner Schwere unterworfen und legen wir den Koordinatenanfang des Bezugssystems in den Schwerpunkt, so wird  $M_x = M_y = M_z = 0$  und dann ergeben sich die drei Gleichungen

$$J_x \omega_x = c_x, \quad J_y \omega_y = c_y, \quad J_z \omega_z = c_z,$$

welche aussagen, daß die Impulsmomente des Körpers hinsichtlich der drei Achsen sich mit der Zeit nicht ändern.

2. Freies System. Bei dem freien System sind keine inneren Kräfte vorhanden, sonach ist  $M_x^{(i)} = M_y^{(i)} = M_z^{(i)} = 0$ . Ferner wird auch  $M_x = M_y = M_z = 0$ , denn die Resultierende je zweier äußeren Kräfte  $P_{hi}$  und  $P_{ih}$  ist Null und sonach das resultierende Moment aller äußeren Kräfte für jede Gerade. Es gilt daher hier das Prinzip der Erhaltung der Flächen für jede der drei Koordinatenachsen und liefert drei Integrale. Von Interesse ist die nicht schwer zu beweisende Tatsache, daß es eine Ebene gibt, für die der

Ausdruck  $\sum_1^n (m_k F_k)$  der Flächenprojektionen auf sie ein Maximum wird und

die Richtung dieser Ebene nur von den Anfangswerten der Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängt, also sich im Laufe der Bewegung nicht ändert. Eine derartige „invariable Ebene“ besitzt z. B. das Sonnensystem.

3. Drehen sich mehrere starre Körper um dieselbe Achse dauernd und wirken zwischen ihnen nur innere Kräfte, deren Moment für die Drehachse verschwindet, so gilt für die Drehungen der Körper das Prinzip der Erhaltung der Flächen in der Form

$$\sum_1^n (J_k \omega_k) = \text{Const};$$

hierin bestimmt sich die Konstante durch die Anfangswerte der  $\omega_k$ . Sind z. B. die beiden Körper zwei Stäbe (s. Fig. 48)  $K_1$  und  $K_2$ , die sich gegeneinander und gegen den Bezugskörper um die gleiche Achse drehen, und verbindet sie eine Schraubenfeder, deren Spannkraft  $S$  sei, so ist das Moment der Kräfte  $S_1$  und  $S_2$  für die Drehachse Null, weil  $S_1 = S_2 = S$ . Es muß folglich das Impulsmoment

$$J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 = \text{Const}$$

sein, und wenn die Bewegung aus der Ruhelage begann, d. i.  $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$ , so folgt

$$\omega_2 = -\frac{J_1}{J_2} \cdot \omega_1.$$

Daraus geht aber hervor, daß die beiden Körper sich im entgegengesetzten Sinne drehen müssen und mit Winkelgeschwindigkeiten, die im umgekehrten Verhältnis der Trägheitsmomente stehen. Die Schlüsse, die sich hiernach auf die gegenseitigen Bewegungen von Schiffsschraube und Schiffskörper, oder von Propeller und Flugzeug ziehen lassen, dürfen nicht außer acht gelassen werden, ebenso die Beanspruchung der Befestigung des Gehäuses einer Dampfturbine oder eines Elektromotors.

4. Selbst für den in sich veränderlichen Körper gilt unter den gemachten Voraussetzungen das Prinzip der Erhaltung der Flächen in der Form

$$J_D \cdot \omega_D = \text{Const},$$

falls  $J_D$  das Trägheitsmoment und  $\omega_D$  die mittlere Winkelgeschwindigkeit der sich drehenden veränderlichen Masse zu einer gewissen Zeit bezeichnet.

Dreht sich z. B. eine homogene Kugel, deren Durchmesser sich stetig ändert (etwa mit der Temperatur zu- oder abnimmt), wobei die Massenteilchen einer Meridianebene in ihr verbleiben, so ändert sich, auch wenn keinerlei äußere Kräfte auf die Kugel wirken, doch die Winkelgeschwindigkeit der Meridianebene nach obiger Beziehung, und zwar nimmt sie mit wachsendem Durchmesser  $D$  ab und umgekehrt. Denn es ist  $J_D = \frac{1}{10} M D^2$ , und  $M$  unveränderlich, womit sich

$$\omega_D = \frac{\text{const}}{D^2}$$

ergibt.

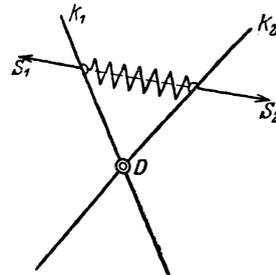


Fig. 48.

## 11. Kap. Drehung eines starren Körpers um eine ruhende Achse.

Ein starrer Körper drehe sich um eine Achse, die sowohl in ihm als im Bezugskörper fest liegt, wie z. B. die Hauptwelle einer Kolbendampfmaschine, und werde von Kräften beeinflusst, deren Moment bezüglich der Drehachse  $M_D$  sei, dann folgt aus dem Flächensatz, bzw. aus (57)

$$\frac{d}{dt}(J_D \omega) = M_D,$$

oder, da das Trägheitsmoment  $J_D$  sich nicht ändert, als Winkelbeschleunigung

$$(60) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_D}{J_D}.$$

Denken wir uns hierin das Moment  $M_D$  als Funktion des Dreh-

winkels  $\psi$  gegeben, so ist die Integration dieser Differentialgleichung durchführbar; denn da  $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ , so wird  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\psi}$ , folglich

$$J_D d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = M_D d\psi$$

und nach deren Integration

$$(61) \quad J_D \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = \int_{\psi_0}^{\psi} M_D d\psi = A.$$

Diese Gleichung würde sich aus dem Prinzip der Wucht unmittelbar ergeben haben.

Ist  $M_D = \text{Const}$ , so wird auch  $\frac{d\omega}{dt}$  unveränderlich, die Drehung demnach eine gleichmäßig veränderte, d. h. es wird

$$\psi = \psi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}k(t - t_0)^2$$

und

$$\omega = \omega_0 + k(t - t_0),$$

falls zur Abkürzung  $M_D: J_D = k$  gesetzt wird. Die Arbeit erhält hierbei den einfachen Ausdruck  $A = M_D(\psi - \psi_0)$ .

Beispiele:

1. Eine starre kreiszylindrische Scheibe vom Radius  $a$  ist gezwungen, sich um ihre horizontal gelagerte geometrische Achse  $D$  (s. Fig. 49), in der ihr Schwerpunkt liegt, zu drehen. Über die Scheibe sei ein an ihr befestigter Faden geschlungen, an dessen Endpunkt  $A$  ein schwerer Körper  $K$  von der Last  $L = mg$  hängt. Unter dem Einfluß der letzteren drehe sich die Scheibe, und zwar beginne  $A$  seine Bewegung aus der Ruhelage in  $B$ . Wir wollen die Bewegung zunächst unter Vernachlässigung der Masse des Fadens und der Reibung, sowie des Luftwiderstandes ermitteln. Zu dem Ende denken wir uns den Faden in  $A$  und  $B$  durchschnitten und die Spannkraft  $S$  in  $B$  und  $S_1$  in  $A$  eingeführt, dann folgt aus (60), weil hier  $M_D = S \cdot a$ ,

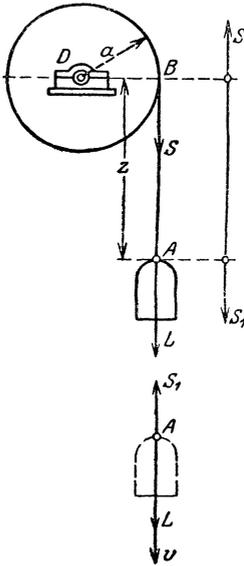


Fig. 49.

$$J \frac{d\omega}{dt} = S \cdot a.$$

Nach dem Prinzip von D'Alembert erhalten wir, weil die Masse des Fadens  $AB$  zu Null angenommen wurde und seine Bewegung eine Schiebung in einer Vertikalen ist, als Bedingung des Gleichgewichtes am Faden (s. Fig. 49a) nur  $S_1 = S$  und als Differentialgleichung der Bewegung des schweren Massenpunktes  $A$  (s. Fig. 49b)

$$m \frac{dv}{dt} = L - S_1 = mg - S,$$

falls  $v$  die Geschwindigkeit von  $A$  bezeichnet. Die Elimination von  $S$  aus beiden Gleichungen führt unter Benutzung der Bewegungsbedingung  $v = a\omega$  zu

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ma^2}{J + ma^2} \cdot g,$$

und wir erkennen, da der Ausdruck für die Beschleunigung von  $A$  konstant ist, daß die Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte wird, ebenso die Drehung der Scheibe eine gleichmäßig beschleunigte mit der Winkelbeschleunigung  $\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} : a$ . Für die Fadenspannkraft  $S$  finden wir ferner

$$S = \frac{J}{a} \frac{d\omega}{dt} = \frac{J}{J + ma^2} \cdot L,$$

also  $S < L$ , entsprechend dem Umstand, daß  $\frac{dv}{dt} < g$ . Würde man, wie das irrtümlich öfter geschieht,  $S = L$  einführen, so bedeutete dies  $m = 0$ , d. i. die Vernachlässigung der Masse  $m$  bzw. des Trägheitsmomentes  $ma^2$  gegenüber  $J$ , was im allgemeinen unzulässig ist. Das ersieht man auch aus der Gleichung, die das Prinzip der Wucht liefert, nämlich

$$W = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = A = Lz,$$

in dem hier  $W_0 = 0$  vorausgesetzt wurde; sie ergibt

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgz}{J + ma^2}},$$

mit der Annahme  $S = L$  aber den zu großen Wert

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgz}{J}}$$

wie leicht ersichtlich.

Die Berücksichtigung der Faden-Masse und -Schwere macht keine besonderen Schwierigkeiten. Verfahren wir wieder wie vorher und bezeichnen die auf die Längeneinheit des Fadens bezogene Masse mit  $\mu$ , so wird die Masse des Fadens  $AB$  gleich  $\mu \cdot z$ , dessen Schwere aber  $\mu z g$ ; folglich treten an die Stelle der vorigen Gleichungen die folgenden drei, in denen  $l$  die gesamte Länge des Fadens bezeichnet:

$$\left\{ J + \mu(l - z)a^2 \right\} \frac{d\omega}{dt} = Sa, \quad \mu z \frac{dv}{dt} = \mu z g + S_1 - S, \quad m \frac{dv}{dt} = L - S_1.$$

Eliminiert man aus ihnen  $S$  und  $S_1$  und benutzt die Beziehung  $v = a\omega$ , so erhalten wir für die Beschleunigung des Punktes  $A$  den Ausdruck

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{(\mu z + m)a^2}{J + (\mu l + m)a^2} g.$$

Die Integration mittels der Substitution  $z = u - k$  ist leicht; sie führt mit den Abkürzungen

$$+ \sqrt{\frac{\mu g a^2}{J + (\mu l + m)a^2}} = \alpha, \quad \frac{m a^2 g}{J + (\mu l + m)a^2} = k$$

auf die Ausdrücke

$$z = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t} - k, \quad v = \alpha \{ A e^{\alpha t} - B e^{-\alpha t} \},$$

in denen die Konstanten  $A$  und  $B$  bei der Bewegung des Punktes  $A$  aus der Ruhelage die Werte

$$A = B = \frac{k}{2}$$

erhalten. Damit ist die Bewegung völlig bestimmt, falls man den Einfluß der Veränderlichkeit des Momentes der Schwere des aufgewickelten Fadens als vernachlässigbar klein auffassen darf.

2. Gleichförmig wird die Drehung des Körpers, wenn dauernd  $M_D = 0$  ist. Dieser Sonderfall tritt im normalen Betriebe von hydraulischen und elektrischen Motoren, sowie Dampfturbinen ein, denn deren motorisches Moment  $M_m$

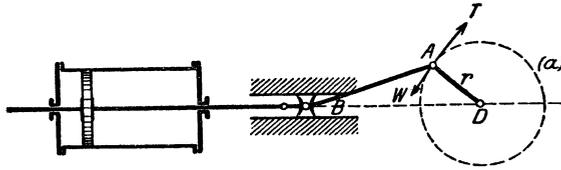


Fig. 50a.

ändert sich innerhalb einer Umdrehung der Hauptwelle nicht, solange das Widerstandsmoment  $M_w$  der Arbeitsmaschinen, die durch den Motor umgetrieben werden, unverändert bleibt; es ist also  $M_D = M_m - M_w = 0$ . Anders

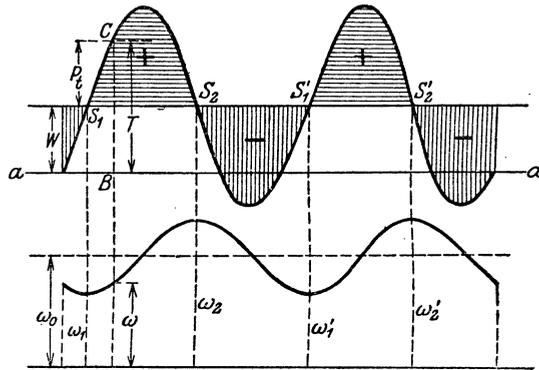


Fig. 50 b u. c.

verhält es sich mit der Kolbendampfmaschine, wie sie in Fig. 50a skizziert ist. Nicht nur infolge der Expansion des Dampfes, sondern auch durch die Übertragung der den Kolben bewegenden Dampfkraft auf die Kurbel durch das Schubkurbelgetriebe ändert sich die Tangentialkraft  $T$ , die im Zapfenmittelpunkt  $A$  angreifend die Hauptwelle der Maschine dreht, fortwährend. Diese Änderung veranschaulicht das Tangentialkraft-Diagramm Fig. 50b, in dem die Gerade  $a$  die Abwicklung des Kreises ( $a$ ) in Fig. 50a darstellt und die Ordinate  $\overline{BC}$  die Tangentialkraft  $T$ . Trägt man noch die unveränderliche Widerstandskraft  $W$  der Arbeitsmaschinen ein, so erhält man in der Differenz  $P_t = T - W$  die Kraft, deren Moment  $M_D = P_t \cdot r$  die Drehung der Hauptwelle

beschleunigt, falls sie positiv, und verzögert, wenn sie negativ ist. Die im Schaubild horizontal schraffierten Flächen stellen sonach die Beschleunigungs-, die vertikal schraffierten die Verzögerungsarbeiten dar. Im Beharrungszustande der ganzen Anlage muß innerhalb jeder Umdrehung der Kurbel die Beschleunigungsarbeit der Verzögerungsarbeit gleich sein, demgemäß die Summe der horizontal schraffierten Flächen inhaltlich gleich der der vertikal schraffierten. Es ändert sich dann zwar innerhalb einer Umdrehung die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Drehung etwa in der Weise, wie dies die Schaulinie Fig. 50c zeigt, aber am Ende jeder Umdrehung nimmt sie wieder denselben Wert an. Das folgt unmittelbar aus der Gleichung, die das Prinzip der Wucht liefert, nämlich aus der Beziehung

$$J_D \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = A = r \int_{\psi_0}^{\psi} P_t d\psi,$$

in der  $J_D$  das Trägheitsmoment der sich um die Hauptachse drehenden Massen bezeichnet. Beachten wir, daß an den Stellen, in welchen  $P_t = T - W = 0$  wird, d. i. in den Punkten  $S_1$  und  $S_2$ , bzw.  $S_1'$  und  $S_2'$  in Fig. 49b, die Winkelgeschwindigkeit ein Minimum ( $\omega_1$ ) oder ein Maximum ( $\omega_2$ ) erreicht und wenden vorstehende Beziehung auf sie an, so erhält sie die Form

$$J_D \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} = A_{12} = r \int_{\psi_1}^{\psi_2} P_t d\psi,$$

in welcher  $A_{12}$  der Beschleunigungsarbeit in der ersten halben Umdrehung entspricht. Setzen wir die normale mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\omega_n$  näherungsweise  $= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ , so folgt aus vorstehender Gleichung

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{A_{12}}{J_D} \omega_n,$$

aus der hervorgeht, daß bei gegebener Arbeit  $A_{12}$  die Differenz  $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$  der Winkelgeschwindigkeiten um so kleiner wird, je größer das Trägheitsmoment der sich drehenden Massen ist. Dieser Verkleinerung dient bekanntlich das Schwungrad, dessen Trägheitsmoment bei möglichst geringer Masse tunlichst groß gewählt wird.

3. Das physische Pendel. So nennt man jeden starren schweren Körper, der um eine in ihm und im Bezugskörper festliegende horizontale Achse zu schwingen gezwungen ist. Die Differentialgleichung dieser Schwingungen folgt unmittelbar aus (60), wenn man darin für  $M_D$  das resultierende Moment der Schwerkraft, d. i. (s. Fig. 51)

$$M_D = -L \cdot \overline{D\overline{F}}$$

einsetzt, falls  $L = Mg$  die Schwere des Körpers und  $\overline{D\overline{F}} = a$  ihren Hebelarm bezüglich der Drehachse  $DD$  bezeichnet. Ist  $S$  der Schwerpunkt des Körpers,  $\overline{SD} = a$ , sein Abstand von der Drehachse und benutzen wir, daß  $\overline{D\overline{F}}$

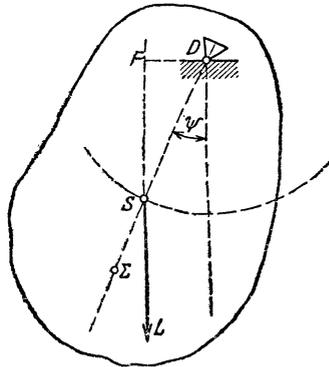


Fig. 51.

=  $\overline{DS} \cdot \sin \psi$ , so erhalten wir als die gesuchte Differentialgleichung, weil  $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ ,

$$(62) \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = - \frac{L a_s}{J_D} \cdot \sin \psi.$$

Für das mathematische Pendel von der Fadenlänge  $l$  fanden wir (S. 51) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = - \frac{g}{l} \sin \psi,$$

die mit vorstehender völlig übereinstimmt, wenn die Länge  $l$  der Beziehung

$$\frac{L a_s}{J_D} = \frac{g}{l}$$

genügt, also

$$l = \frac{J_D}{M a_s}$$

gewählt wird. Das heißt aber nichts anderes, als daß der Körper genau so schwingt, wie das mathematische Pendel von der Fadenlänge  $l$ . Der Punkt  $\Sigma$  auf dem Lote vom Schwerpunkt  $S$  zur Drehachse  $DD$ , dessen Entfernung von letzterer  $\overline{D\Sigma} = l$  ist, heißt der Schwingungsmittelpunkt des physischen Pendels und die Parallele zur Drehachse durch ihn die Schwingungsachse. Für die Bewegung des Schwingungsmittelpunktes gelten die Formeln und Gleichungen, die für das mathematische Pendel auf S. 51 und 52 entwickelt wurden. Insbesondere wird die Dauer der einfachen Schwingung bei kleinen Ausschlagswinkeln

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{J_D}{M a_s g}}.$$

Ersetzt man hierin zufolge der Formel (39) des II. Bandes (S. 52)  $J_D$  durch  $J_s + M a_s^2$  und  $J_s$  mittels des Trägheitsradius  $i_s$  durch  $M i_s^2$  (s. Bd. II, S. 51), dann geht  $T$  über in

$$T = \pi \sqrt{\frac{a_s^2 + i_s^2}{a_s g}}$$

bzw.  $l$  über in

$$l = a_s + \frac{i_s^2}{a_s}.$$

Vorstehende Beziehungen zeigen die Abhängigkeit der Schwingungsdauer des Pendels vom Abstände  $a_s$  der Drehachse vom Körperschwerpunkt. Man erkennt sofort, daß  $T = \infty$  wird sowohl für  $a_s = 0$  als auch für  $a_s = \infty$ . Es muß daher zwischen beiden Grenzlagen eine Stelle geben für die Drehachse, bzw. ein Wert für  $a_s$ , deren zugehörige Schwingungsdauer ein Minimum ist, also das Pendel am schnellsten schwingt. Da dieser Wert für  $a_s$  derselbe ist, der auch  $l$  zu einem Minimum macht, also der Bedingung  $\frac{dl}{da_s} = 0$  genügt, und

$$\frac{dl}{da_s} = 1 - \frac{i_s^2}{a_s^2}$$

sich ergibt, so erkennen wir, daß für

$$a_s = \pm i_s$$

die Schwingungsdauer zu einem Minimum wird; letzteres ist

$$\min(T) = \pi \sqrt{\frac{2 i_s}{g}}$$

Wir nannten (Bd. II, S. 51) jeden Punkt des Körpers im Abstände  $i_s$  vom Schwerpunkt Trägheitsmittelpunkt; es würden daher alle Achsen im Abstände des Trägheitsmittelpunktes vom Schwerpunkt ein Minimum der Schwingungsdauer ergeben.

Das physische Pendel ist reversierbar, und zwar für die Schwingungsachse als Drehachse. Das erkennt man wie folgt. Machen wir die Schwingungsachse zur Drehachse, so wird  $a_s' = \overline{\Sigma S} = l - a_s$ . Andererseits liefert die Formel für  $l$  als Länge des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer

$$l = a_s' + \frac{i_s^2}{a_s'} = a_s' + \frac{a_s(l - a_s)}{a_s'} = l - a_s + \frac{(l - a_s)a_s}{l - a_s} = l,$$

und das sagt, daß die Schwingungsachse  $\Sigma' \Sigma'$  dann mit der ursprünglichen Drehachse zusammenfällt, das Pendel also reversierbar ist.

Das physische Pendel gestattet die Ermittlung der Beschleunigung  $g$  des freien Falles, und zwar, indem man  $T$  mißt und dann  $g$  aus der Formel

$$g = \frac{\pi^2}{T^2} \left( a_s + \frac{i_s^2}{a_s} \right)$$

berechnet. Da die Werte von  $J_s = M i_s^2$  und von  $a_s$  nur sehr schwierig hinreichend genau bestimmt werden können, verfährt man zweckmäßig so, daß man das Pendel in einer Mittelebene desselben mit drei parallelen Schneiden zur Aufhängung ( $D_1, D_2$  und  $D_3$  in Fig. 51a) versieht und die drei entsprechenden Schwingungszeiten  $T_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), sowie die Entfernungen

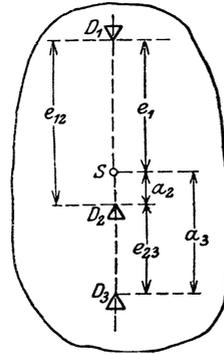


Fig. 51 a.

$$\overline{D_1 D_2} = e_{12} = a_{s1} + a_{s2},$$

$$\overline{D_2 D_3} = e_{23} = a_{s3} - a_{s2}$$

mißt. Die Elimination von  $a_{s1}, a_{s2}$  und  $a_{s3}$  sowie von  $i_s$  aus diesen und den drei Gleichungen

$$g = \frac{\pi^2}{T_k^2} \left( a_{sk} + \frac{i_s^2}{a_{sk}} \right) \quad (k = 1, 2, 3)$$

liefert eine Gleichung mit  $g$  als einziger Unbekannten.

Halten wir einen Körper in zwei seiner Punkte  $O'$  und  $O''$  (s. Fig. 52) fest, so ist er gezwungen, sich um die Verbindungslinie beider zu drehen. Hierbei erfahren diese Punkte (die Lager der Drehachse) Beanspruchungen nicht nur durch die äußeren Kräfte, die auf den sich drehenden Körper wirken, sondern auch durch die Masse bzw. die Trägheitskräfte des letzteren, und es ist von Interesse, diese auf  $O'$  bzw.  $O''$  wirkenden Kräfte kennen zu lernen. Wir verfahren hierbei so, daß wir die beiden Zwangskräfte  $S'$  und  $S''$  ermitteln, die in  $O'$  bzw.  $O''$  anzubringen sind, damit der frei bewegliche Körper sich dauernd

um die Achse  $O'O''$  dreht. Denn die gesuchten auf  $O'$  bzw.  $O''$  wirkenden Kräfte sind  $S'$  bzw.  $S''$  gleich, nur entgegengesetzt gerichtet. Nach dem Prinzip von D'Alembert müssen die Trägheits- und die äußeren Kräfte, zu denen hier  $S'$  und  $S''$  zu rechnen sind, am freibeweglichen Körper im Gleichgewicht stehen, also die entsprechenden sechs Bedingungsgleichungen (37) des Gleichgewichtes erfüllen. Nun setzt sich die Trägheitskraft des Massenelementes  $dm$  im Punkte  $A$  (s. Fig. 52a.) aus zwei Komponenten zusammen: aus der radial, d. i. senkrecht zur Drehachse nach außen gerichteten

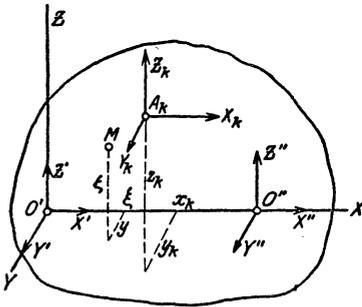


Fig. 52.

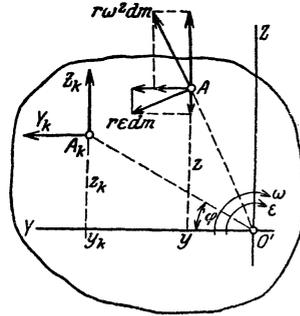


Fig. 52a.

Komponente  $r\omega^2 dm$ , welche Zentrifugalkraft genannt wird, und der tangential gerichteten  $r\epsilon dm$ , die entgegengesetztssinnig zu  $\epsilon$  ist; hierbei bezeichnet  $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$  die Winkelbeschleunigung der Drehung.

Wählen wir nun  $O'$  zum Koordinatenanfang, die Drehachse zur  $X$ -Achse eines sonst beliebigen Koordinatensystems und zerlegen diese Trägheitskräfte in Komponenten, so werden die  $X$ -Komponenten zu Null, die  $Y$ -Komponenten zu  $r\omega^2 dm \cos \varphi = \omega^2 y dm$ ,  $r\epsilon dm \sin \varphi = \epsilon z dm$ , und die  $Z$ -Komponenten zu  $r\omega^2 dm \sin \varphi = \omega^2 z dm$ ,  $-r\epsilon dm \cos \varphi = -\epsilon y dm$ ; diese sind dann für den ganzen Körper zusammenzusetzen, d. i. zu integrieren. Zerlegen wir noch die äußeren Kräfte  $P_k$  in die Komponenten  $X_k Y_k Z_k$ , die Zwangskraft  $S'$  in  $X'Y'Z'$ ,  $S''$  in  $X''Y''Z''$ , dann werden die sechs Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes die folgenden:

$$X' + X'' + \sum_1^n (X_k) = 0,$$

$$\int \omega^2 y dm + \int \epsilon z dm + Y' + Y'' + \sum_1^n (Y_k) = 0,$$

$$\begin{aligned} \int \omega^2 z dm - \int \varepsilon y dm + Z' + Z'' + \sum_1^n (Z_k) &= 0, \\ - \int \varepsilon r dm \cdot r + M_x &= 0, \\ \int (\varepsilon y dm - \omega^2 z dm) x - Z'' a + M_y &= 0, \\ \int (\varepsilon z dm + \omega^2 y dm) x + Y'' a + M_z &= 0; \end{aligned}$$

hierin ist  $\overline{O'O''} = a$ ,  $\sum_1^n (Z_k y_k - Y_k z_k) = M_x$ ,  $\sum_1^n (X_k z_k - Z_k x_k) = M_y$ ,

$\sum_1^n (Y_k x_k - X_k y_k) = M_z$  gesetzt worden. Beachten wir nun, daß  $\omega^2$

und  $\varepsilon$  von der Lage des Punktes  $A$  unabhängig, also für die Integration als Konstanten zu betrachten sind, so erhalten wir, falls  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten des Massenmittelpunktes bezeichnen,

$$\begin{aligned} \int \omega^2 y dm = \omega^2 \int y dm = \omega^2 M \eta, \quad \int \varepsilon z dm = \varepsilon \int z dm = \varepsilon M \zeta, \\ \int \varepsilon r^2 dm = \varepsilon \int r^2 dm = \varepsilon J_x, \end{aligned}$$

$$\int (\varepsilon y dm - \omega^2 z dm) x = \varepsilon \int x y dm - \omega^2 \int x z dm = \varepsilon C_{xy} - \omega^2 C_{xz},$$

$$\int (\varepsilon z dm + \omega^2 y dm) x = \varepsilon \int x z dm + \omega^2 \int x y dm = \varepsilon C_{xz} + \omega^2 C_{xy};$$

hierin sind  $C_{xy}$  und  $C_{xz}$  die Zentrifugalmomente (s. Bd. II, S. 53) des Körpers für die bezüglichen beiden Achsen. Damit gehen obige Gleichungen über in die folgenden:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} X' + X'' + \sum_1^n (X_k) &= 0, \\ \omega^2 M \eta + \varepsilon M \zeta + Y' + Y'' + \sum_1^n (Y_k) &= 0, \\ \omega^2 M \zeta - \varepsilon M \eta + Z' + Z'' + \sum_1^n (Z_k) &= 0, \\ - J_x \cdot \varepsilon + M_x &= 0, \\ \varepsilon C_{xy} - \omega^2 C_{xz} - Z'' a + M_y &= 0, \\ \varepsilon C_{xz} + \omega^2 C_{xy} + Y'' a + M_z &= 0. \end{aligned} \right.$$

Die vierte derselben stimmt mit (60) überein; sie liefert den Wert von  $\varepsilon$ , und ihr Integral in der Gestalt (61) den von  $\omega^2$ , der ebenso wie  $\varepsilon$  in den übrigen Gleichungen auftritt. Damit erhält man dann vier Gleichungen zur Ermittlung der Komponenten  $Y', Z', Y'', Z''$ , während sich  $X'$  und  $X''$  einzeln nicht ermitteln lassen, sondern

nur deren Summe  $X' + X''$  aus der ersten Gleichung. Diese Unbestimmtheit hat die gleichen Gründe, wie bei dem Gleichgewicht von Kräften an einem starren Körper, der sich um eine ruhende Achse dreht (s. Bd. II, S. 172), und zwar sind es die der Überbestimmtheit der Drehung um eine ruhende Achse durch das Festhalten zweier Punkte des Körpers. Es würde zur Erzwingung dieser Bewegung genügen, einen Punkt, z. B.  $O'$  festzuhalten und  $O''$  auf einer starren ruhenden Kurve sich zu bewegen zwingen, auf der dann  $S''$  senkrecht stehen muß. In den Anwendungen ist meist die Drehachse jene Kurve; da  $S''$  senkrecht zu ihr sein muß, folgt  $X'' = 0$ , womit auch  $X' = -\sum_1^n (X_k)$  eindeutig bestimmt wird.

Beispiel:

Eine schwere, dünne rechteckige Platte stütze sich gegen eine Ecke, die von einer horizontalen und einer vertikalen Ebene gebildet wird, derart, daß sie sich um ihre Kante  $DD$  (s. Fig. 53) drehen kann. Die Punkte  $O'$  und  $O''$  bleiben hierbei unbestimmt und dementsprechend die Einzelkomponenten  $Y'$  und  $Y''$  bzw.  $Z'$  und  $Z''$ . Wohl aber läßt sich aus den Gleichungen (63) die Summe  $Y' + Y'' = H$  bzw.  $Z' + Z'' = V$  ermitteln, und zwar erhält man, da

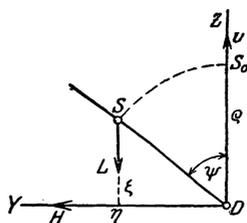


Fig. 53.

$$\sum_1^n (Y_k) = 0, \quad \sum_1^n (Z_k) = -L = -Mg,$$

falls  $L$  die Schwere der Platte bezeichnet,

$$H = Y' + Y'' = -\omega^2 M \eta + \varepsilon M \zeta,$$

$$V = Z' + Z'' = -\omega^2 M \zeta + \varepsilon M \eta + L.$$

Nun folgt aus der vierten Gleichung, da hier  $M_x = L \eta$ , d. i. gleich dem Moment der Schwere ist,

$$\varepsilon = -\frac{L}{J_x} \eta = -\frac{Mg}{J_x} \varrho \sin \psi,$$

unter  $\varrho$  die Strecke  $\overline{DS}$  und unter  $\psi$  den Winkel zwischen der Platte und der  $XZ$ -Ebene verstanden; ferner  $\omega^2$  aus dem Prinzip der Wucht

$$\frac{1}{2} J_x (\omega^2 - \omega_0^2) = A = -L(\zeta - \zeta_0) = Mg \varrho (\cos \psi_0 - \cos \psi).$$

Setzen wir beide Werte in obige Ausdrücke ein, so erhalten wir

$$H = -M \varrho \left[ \omega_0^2 + \frac{Mg \varrho}{J_x} (2 \cos \psi_0 - 3 \cos \psi) \right] \sin \psi,$$

$$V = L - M \varrho \left[ \omega_0^2 \cos \psi + \frac{Mg \varrho}{J_x} (\cos \psi_0 \cos \psi - \cos 2 \psi) \right].$$

Beginnt die Bewegung aus der Ruhelage ( $\omega_0 = 0$ ) und der lotrechten Stellung der Platte ( $\psi_0 = 0$ ), dann wird einfacher

$$H = \frac{M^2 \varrho^2 g}{J_x} (3 \cos \psi - 2) \sin \psi, \quad V = L \left[ 1 - \frac{M \varrho^2}{J_x} (\cos \psi - \cos 2 \psi) \right].$$

Der Ausdruck für  $H$  zeigt, daß  $H$  negativ werden kann, also daß für einen

gewissen Wert  $\psi_m$  Null und darüber hinaus die Stützkraft  $H$  entgegengesetzt gerichtet sein muß, damit die Plattenkante  $D$  in ihrer Lage bleibt. Das bedeutet aber in Wirklichkeit ein Loslösen der Platte von der  $XZ$ -Ebene, und das tritt ein für  $\psi_m = \arccos \frac{2}{3}$  ( $= 48^\circ 10'$ ). Ebenso kann  $V$  negativ werden, d. h. die Plattenkante sich von der  $XY$ -Ebene abheben.

Um den Einfluß der Massenwirkung auf die Größe und Richtung der beiden Zwangskräfte  $S'$  und  $S''$  genauer ermitteln zu können, stellen wir die Gleichungen (63) für den besonderen Fall auf, daß keine äußeren Kräfte auf den Körper wirken, also  $X_k = Y_k = Z_k = 0$  ist. Wir erhalten dann die folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} X' + X'' &= 0; & J_x \cdot \varepsilon &= 0, \\ Y' + Y'' + \omega^2 M \eta + \varepsilon M \zeta &= 0, & -Z'' a + \varepsilon C_{xy} - \omega^2 C_{xz} &= 0, \\ Z' + Z'' + \omega^2 M \zeta - \varepsilon M \eta &= 0; & +Y'' a + \varepsilon C_{xz} + \omega^2 C_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

aus denen, weil  $\varepsilon = 0$  folgt, also die Drehung mit der unveränderlichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega_0$  vor sich geht, die gesuchten Komponenten sich zu

$$\begin{aligned} X' + X'' &= 0, & Y'' &= -\frac{\omega_0^2}{a} C_{xy}, & Z'' &= -\frac{\omega_0^2}{a} C_{xz}, \\ Y' &= \omega_0^2 \left( \frac{C_{xy}}{a} - M \eta \right), & Z' &= \omega_0^2 \left( \frac{C_{xz}}{a} - M \zeta \right) \end{aligned}$$

ergeben. Die in diesen Ausdrücken auftretenden Kräfte sind aber nichts anderes, als die Komponenten der Resultierenden der Zentrifugalkräfte des Körpers und  $C_{xy} \omega_0^2$  bzw.  $C_{xz} \omega_0^2$  die Komponenten des resultierenden Hauptmomentes (vgl. Bd. II, S. 160); es würde also die Dyade der beiden Zwangskräfte  $S'$  und  $S''$  der Dyade bzw. Dyade, die aus der Zusammensetzung der Zentrifugalkräfte hervorgeht, das Gleichgewicht halten. Nun fanden wir als Ausdruck für die Resultierende der Zentrifugalkräfte  $R = \omega_0^2 M \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ , als den für das resultierende Hauptmoment  $M_{hr} = \omega_0^2 \sqrt{C_{xy}^2 + C_{xz}^2}$ ; die Formeln für die Komponenten der Zwangskräfte zeigen folglich, daß letztere einerseits von dem Abstände  $\rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$  des Massenmittelpunktes  $M$  des Körpers von der Drehachse, andererseits von der Richtung der Drehachse gegenüber den Hauptachsen des Trägheitsellipsoides des Körpers im Punkte  $O'$  abhängen, wie die Darlegungen im II. Bande über das Trägheitsellipsoid (S. 53 und 54) lehren. Geht die Drehachse durch den Massenmittelpunkt, ist also  $\rho = \eta = \zeta = 0$ , so wird

$$S' \neq S'' = \frac{\omega_0^2}{a} \sqrt{C_{xy}^2 + C_{xz}^2} \text{ und die beiden Zwangskräfte bilden ein}$$

Kräftepaar vom Moment  $S' a = \omega_0^2 \sqrt{C_{xy}^2 + C_{xz}^2}$ . Dieses kann nur zu Null werden, wenn  $C_{xy} = C_{xz} = 0$  ist, also wenn die Drehachse

mit einer Hauptträgheitsachse des Körpers im Punkte  $O'$  zusammenfällt. Wir erkennen sonach, daß die beiden Punkte  $O'$  und  $O''$  nur dann durch Kräfte nicht beansprucht werden, wenn die Drehachse mit einer den Massenmittelpunkt enthaltenden Hauptträgheitsachse im Punkte  $O'$  sich deckt. Eine derartige von der Massenverteilung des Körpers nicht beeinflusste Drehachse heißt eine freie Achse. Sie ist dadurch ausgezeichnet, daß sie ihre Lage im Körper nicht ändert, falls letzterer um sie gedreht wird, auch wenn die Punkte  $O'$  und  $O''$  nicht festgehalten werden. Es findet also die Drehung um sie mit unveränderter Winkelgeschwindigkeit dauernd statt, weshalb sie auch permanente oder stationäre Drehachse genannt wird.

Wie die vorausgehenden Darlegungen zeigen, werden die beiden festgehaltenen Punkte  $O'$  und  $O''$  eines Körpers, der sich um die Achse  $O'O''$  dreht, lediglich infolge der Massenwirkungen des Körpers durch die Kräfte  $S'$  und  $S''$  beansprucht. Werden  $O'$  und  $O''$  oder nur einer dieser Punkte im Bezugskörper nicht festgehalten, dann tritt notwendig eine Bewegung bzw. Lagen- und Richtungsänderung der Geraden  $O'O''$  ein, wenn nicht die Drehachse ursprünglich eine freie war. Die Zwangskräfte  $S'$  und  $S''$  können dabei ganz oder z. T. die Wirkung äußerer Kräfte aufheben, wie z. B. die der Schwere des Körpers; letzteres geschieht u. a. bei dem als Kinderspielzeug benutzten Kreisel, sowie bei dem Fahrrad.

Noch deutlicher treten die Wirkungen dieser Trägheitskräfte hervor bei einem sich drehenden Körper  $K$ , dessen Drehachse in einem anderen Körper  $K_1$  festgelagert ist und letzterer sich gegen den Bezugskörper zu bewegen vermag, wie es z. B. mit der Propellerachse in einem Flugzeug der Fall ist. Da  $K$  und  $K_1$  die Punkte  $O'$  und  $O''$  gemeinsam haben, so bewirken die Kräfte  $S'$  und  $S''$  eine Bewegung von  $K_1$  gegen den Bezugskörper  $K_0$ . Das tritt u. a. ein bei einem Propeller  $K$ , dessen Massenmittelpunkt außerhalb der Drehachse desselben sich befindet; die hierdurch entstehenden Kräfte  $S'$  und  $S''$  bewegen dann den Flugzeugkörper  $K_1$  in unerwünschter Weise gegen den Erdkörper  $K_0$ .

Ist die ursprüngliche Lage der Drehachse hierbei eine freie Achse des Körpers  $K$ , dann treten keine Zwangskräfte  $S'$  und  $S''$  und folglich auch keine Lageveränderungen von  $K_1$  gegen  $K_0$  auf. Will man in diesem Falle aber umgekehrt die Lage von  $K_1$  gegen  $K_0$  ändern, so bewirkt man damit eine Lagenänderung der Drehachse des Körpers  $K$  gegen  $K_0$ , in deren Gefolge die Kräfte  $S'$  und  $S''$  auftreten; letztere setzen der beabsichtigten Lagenänderung von  $K_1$  einen mehr oder minder merklichen Widerstand entgegen. Diese Tatsache wird häufig so aufgefaßt, als ob der Körper das Bestreben habe, die Lage seiner Drehachse zu erhalten, und spricht in diesem

Sinne von einem Gesetz der Erhaltung der Drehachse. Letzteres hat für Drehungen starrer Körper eine ähnliche Bedeutung, wie das Trägheits- oder Beharrungsgesetz für die Schiebungen starrer Körper, deren Schiebungsgeschwindigkeit nach Größe und Richtung erhalten bleibt, wenn keine Kräfte sie beeinflussen. Auf dem Gesetz von der Erhaltung der Drehachse beruhen die bekannten Wirkungen des Schiffskreisels, des Kreisels bei der Einschienenbahn und seiner Benutzung als Kompaß, ferner der Richtkreisel der Torpedos; darauf soll weiterhin noch eingegangen werden.

## 12. Kap. Freie und gebundene Bewegungen starrer Körper unter dem Einfluß von Kräften.

Wie im 11. Kapitel des I. Bandes (S. 105 u. ff.) gezeigt wurde, besteht die Elementarbewegung des starren Körpers im allgemeinen in einer Schraubung, die in drei Schiebungen längs der Achsen und drei Drehungen um letztere eines beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystems zerlegt werden kann. Wirken auf den Körper Kräfte, so lassen sich diese ohne Änderung ihrer Wirkung (vgl. Bd. II, Kap. 18) ersetzen durch eine resultierende Kraft  $R$ , deren Wirkungslinie durch den (willkürlich gewählten) Anfangspunkt des Koordinatensystems geht und ein resultierendes Hauptmoment  $M_{hr}$  für den Koordinatenanfang. Zerlegen wir erstere in Komponenten  $XYZ$ , letztere in  $M_x M_y M_z$  nach den Koordinatenachsen und benutzen, daß für das freibewegliche starre System sowohl der Satz von der Bewegung des Massenmittelpunktes, als der Flächensatz gilt, so erhalten wir als Differentialgleichungen für die Schiebungen nach (49)

$$(64a) \quad M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = X, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = Y, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = Z,$$

und für die Drehungen um die drei Achsen nach (57)

$$(64b) \quad \frac{d}{dt} (J_x \omega_x) = M_x, \quad \frac{d}{dt} (J_y \omega_y) = M_y, \quad \frac{d}{dt} (J_z \omega_z) = M_z;$$

in diesen bedeuten  $\xi \eta \zeta$  die Koordinaten des Massenmittelpunktes  $M$  des Systems,  $J_x J_y J_z$  die Trägheitsmomente des letzteren für die Koordinatenachsen und  $\omega_x \omega_y \omega_z$  die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen des Systems um die Achsen. Die vorstehenden sechs Gleichungen stimmen aber völlig überein mit den Gleichungen (37), wie aus (47) bzw. (56) leicht hervorgeht; sie sind demnach die Differentialgleichungen der Bewegung freier starrer Körper, und ihre Integration würde die Aufgabe der Ermittlung dieser Bewegungen völlig lösen.

Die Gleichungen (64) zeigen, daß es zweckmäßig ist, die Bewegung des Körpers zurückzuführen auf die Bewegung seines Massenmittelpunktes und die Bewegung um den Massenmittelpunkt. Hierzu eignet sich besonders die Benutzung eines beweglichen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt im Massenmittelpunkt  $M$  des Körpers liegt und dessen Achsen sich stets parallel denen des ruhenden bewegen. Das bewegliche Koordinatensystem führt dann eine Schiebung aus, während der Körper sich um eine Mittellinie des Körpers gegen dieses dreht. Die Schwierigkeit der Lösung bezüglich Aufgaben liegt nun gerade in der Ermittlung der Drehung bzw. der Drehachse und der zugeordneten Winkelgeschwindigkeit; sie wird bedingt durch die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes des Körpers mit der Lage der Drehachse im bewegten Körper. Selbst in dem einfachen Falle, daß der Körper nur seiner Schwere unterliegt und sich um Achsen zu drehen gezwungen ist, die durch den Schwerpunkt gehen, wird die Ermittlung des Bewegungsvorganges, wie die Darlegungen des folgenden Kapitels zeigen, nichts weniger als einfach. Es soll daher auf die freien und gebundenen Bewegungen starrer Körper im allgemeinen nicht weiter eingegangen werden; vielmehr wollen wir uns auf solche Sonderfälle beschränken, bei denen die Lösung der Aufgabe auf keine größeren mathematischen Schwierigkeiten stößt und die doch zur Erläuterung des Weges dienen können, der bei verwandten Aufgaben zum Ziele führt.

Sehr einfach wird die Behandlung dynamischer Aufgaben bei Körpern, die reine Schiebungen vollziehen. Denn in diesem Falle läßt sich die Bewegung des ganzen Körpers zurückführen auf die eines Massenpunktes, dessen Masse die Gesamtmasse  $M = \sum_1^n (m_k)$  ist, dessen Lage im Körper aber ganz beliebig gewählt werden kann. Das geht aus den ersten drei Gleichungen (37) hervor, wenn man beachtet, daß bei der Schiebung eines starren Körpers alle Punkte gleiche und gleichgerichtete Beschleunigungen haben, also  $\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 z_k}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}$  ist und hierin  $x y z$  die Koordinaten eines beliebigen Körperpunktes bezeichnen. Diese Gleichungen werden folglich

$$(65) \quad M \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad M \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad M \frac{d^2 z}{dt^2} = Z,$$

und in diesen sind  $XYZ$  die Komponenten der Resultierenden  $R$  aller Kräfte, wenn man sie alle in dem gewählten Punkte angreifend denkt, was nach dem Satze auf S. 143, II. Bd. ohne weiteres zulässig

ist. Ist die Bewegung des Körpers eine gebundene, so treten zu den äußeren Kräften noch die Zwangskräfte, entsprechend den Darlegungen des 5. Kapitels. Diese Zwangskräfte können auch Flächenkräfte sein, wenn die Berührung der Körper in Flächen stattfindet.

Beispiele:

1. Ein schwerer Körper  $K$  (s. Fig. 54) vollziehe auf geneigter Ebene eine geradlinige Schiebung. Da die resultierende Schwerkraft  $L$  im Schwerpunkt  $S$  angreift, wählen wir diesen als den Punkt, dessen Bewegung wir ermitteln. Die Zwangskraft  $N$  wird hier die Resultierende aus den Flächenkräften in der Berührungsfläche des Körpers  $K$  mit der geneigten Ebene; diese stehen senkrecht zur Ebene und lassen sich, weil sie parallel sind, durch eine einzige Kraft  $N$  ersetzen, deren Angriffspunkt nach  $S$  gelegt werden kann. Damit ist die Aufgabe zurückgeführt auf die im Beispiel 1 auf S. 48,

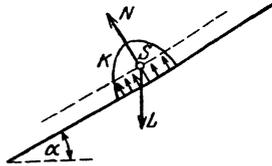


Fig. 54.

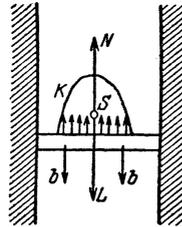


Fig. 55.

nämlich der Ermittlung der Bewegung eines schweren Punktes auf geneigter Geraden, denn der Schwerpunkt  $S$  des Körpers, in dem wir uns die Masse  $M$  des Körpers verdichtet denken, beschreibt ja eine derartige Gerade.

2. Auf einem Fahrstuhl (s. Fig. 55), der sich mit der Beschleunigung  $b$  nach abwärts bewegt, stehe ein schwerer Körper  $K$ , der den Fahrstuhl in der horizontalen ebenen Fläche berührt; es soll der Normaldruck  $\nu$  in der Stützfläche unter der Voraussetzung gleichmäßiger Druckverteilung gefunden werden. Der Körper  $K$  vollzieht zugleich mit dem Fahrstuhl eine gleichmäßig beschleunigte Schiebung in lotrechter Richtung nach abwärts und unterliegt hierbei außer seiner Schwerkraft  $L = Mg$  noch den Flächenkräften  $dN = \nu dF$  in der Stützfläche. Letztere lassen sich genau wie im vorigen Beispiel durch eine lotrecht nach aufwärts gerichtete resultierende Kraft  $N = \int dN = \int \nu dF = \nu \int dF = \nu \cdot F$  ersetzen, die wir uns im Schwerpunkt  $S$  des Körpers angreifend denken. Sonach vollzieht  $S$  eine geradlinige Bewegung mit der Beschleunigung  $\tilde{b}$ , die der Differentialgleichung

$$M\tilde{b} = L - N = Mg - F\nu$$

genügen muß. Aus ihr findet sich der gesuchte Druck zu

$$\nu = \frac{M}{F}(g - \tilde{b}).$$

Dieser ist kleiner als bei der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung des Fahrstuhles und kann sogar Null werden. Ist  $\tilde{b} > g$ , so muß sich der Körper vom Fahrstuhl abheben. Bei beschleunigter Fahrt nach aufwärts wird dagegen

$$\nu = \frac{M}{F}(g + \tilde{b}),$$

also der Druck größer als im Ruhezustande des Fahrstuhles.

3. Weitere Anwendungen zeigen die Schiebungen der Körper  $K_1$  und  $K_2$  im Beispiel 2 (S. 83), der lotrechten Schiebung des Körpers  $K$  im Beispiel 1 (S. 92), sowie der geradlinigen Schiebung von Kolben, Kolbenstange und Kreuzkopf im Beispiel 2 (S. 94) der Kolbendampfmaschine.

Die Bedingungen, unter denen ein Körper mit einem Freiheitsgrad größer als 1 eine Schiebung vollzieht, lassen sich leicht übersehen. Zunächst muß der Körper bei Beginn der Bewegung entweder in Ruhe sein oder eine (gegebene) Elementarschiebung ausführen. Ferner dürfen im Laufe der Bewegung die auf den Körper wirkenden Kräfte keine Drehmomente entwickeln, was nur dann eintritt, wenn sich das Kräftesystem durch eine resultierende Kraft ersetzen läßt, die durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht. So würde z. B. ein geworfener schwerer Körper im luftleeren Raum eine krummlinige Schiebung vollziehen, bei der alle Punkte kongruente gleichliegende Wurfparabeln beschreiben, wenn die Anfangsbewegung des Körpers in einer Schiebung besteht, denn die äußeren Kräfte lassen sich hier durch die resultierende Schwerkraft im Massenmittelpunkte ersetzen.

Was ferner die Drehungen um veränderliche Achsen anlangt, so zeigt die Differentialgleichung derselben, nämlich

$$\frac{d}{dt}(J_D \omega_D) = M_D,$$

in der  $J_D$  das Trägheitsmoment des Körpers,  $\omega_D$  die Winkelgeschwindigkeit und  $M_D$  das Moment der äußeren Kräfte für die Drehachse bezeichnet, daß eine erhebliche Vereinfachung eintritt in dem Fall, wo sich  $J_D$  trotz der Lagenänderung der Drehachse im Körper nicht ändert.

Beispiele dieser Art von Bewegungen sind die folgenden:

1. Auf einen homogenen schweren Kreiszyylinder mit horizontaler Achse sei ein biegsames Band aufgewickelt und dessen freies Ende  $E$  (s. Fig. 56) festgehalten. Bei Beginn der Bewegung befinde sich der Zylinder in Ruhe und das freie (abgewickelte) Ende des Bandes  $BE$  in vertikaler Stellung. Überläßt man nun den Zylinder seiner Schwere, so wird er sich auf dem Bande abrollen und dieses lotrecht bleiben, weil nur vertikale Kräfte, nämlich die Schwere  $L = Mg$  des Zylinders und die Spannkraft  $S$  des Bandes auf den Zylinder wirken. Vernachlässigt man hierbei die Masse des Bandes, so erfolgt die Bewegung so, als ob der Zylinder auf einer vertikalen Ebene abwärts rolle, d. h. es findet eine momentane Drehung des Zylinders um die horizontale Berührungslinie der Zylinderoberfläche mit der vertikalen Ebene statt. Da der Zylinder ein starrer Körper ist, so gilt für die erwähnte Drehung der Flächensatz und folglich die Differentialgleichung

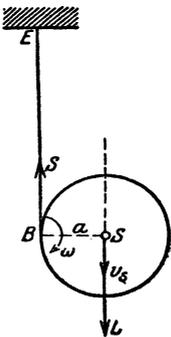


Fig. 56.

$$\frac{d(J_B \omega)}{dt} = La,$$

in der  $J_B$  das Trägheitsmoment des Zylinders für die Drehachse und  $a$  den Radius des Zylinders bezeichnet. Da nun  $J_B = J_s + Ma^2 = \text{const}$ , so folgt

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{La}{J_B} = \text{const}.$$

Die Drehung ist folglich eine gleichmäßig beschleunigte und der Schwerpunkt bewegt sich mit der Beschleunigung  $b_s = a \frac{d\omega}{dt}$ , also ebenfalls gleichmäßig beschleunigt. Will man auch die Spannkraft  $S$  des Bandes ermitteln, so ist es besser, die Bewegung des Zylinders in eine geradlinige Schiebung und eine Drehung um die zur Drehachse parallele Mittellinie zu zerlegen. Bezeichnet  $v_s$  die Schwerpunktsgeschwindigkeit, so besteht für die Schiebung die Differentialgleichung

$$M \frac{dv_s}{dt} = L - S$$

und für die Drehung um die horizontale Mittellinie des Zylinders

$$J_s \frac{d\omega}{dt} = S \cdot a.$$

Die Elimination von  $S$  aus beiden Gleichungen führt unter Benutzung der Beziehung  $v_s = a\omega$  sofort zu dem obigen Ausdruck für  $\frac{dv_s}{dt}$ ; andererseits erhält man auch

$$S = \frac{J_s}{a} \cdot \frac{dv_s}{dt} = \frac{J_s}{J_s + Ma^2} \cdot L$$

und die Beschleunigung des Schwerpunktes des Zylinders zu

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{Ma^2}{J_s + Ma^2} \cdot g < g.$$

2. Ein homogener schwerer Zylinder bewege sich auf einer unter dem Winkel  $\alpha$  geneigten Ebene derart, daß er letztere immer in einer horizontal gerichteten Mantellinie berührt (s. Fig. 57); es ist die Bewegung des Zylinders unter Berücksichtigung der gleitenden und rollenden Reibung zu ermitteln. In dieser Absicht zerlegen wir die Bewegung in eine Schiebung mit der Bewegung des Schwerpunktes  $S$  bzw. mit seiner Geschwindigkeit  $v_s$  und eine Drehung um die horizontale Achse durch  $S$  und führen die Zwangskräfte ein, durch die beide Bewegungen des Zylinders zu freien werden. Die letzteren sind die Stützkraft  $N$  senkrecht zur Ebene und die Umfangskraft  $U$  in der Ebene, welche die Reibung ersetzt und entgegen  $v_s$  gerichtet ist. Für die Schiebung besteht die Differentialgleichung

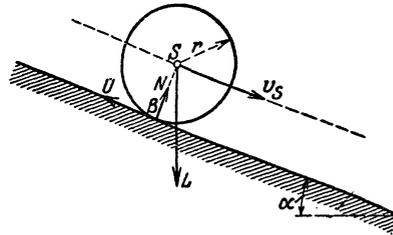


Fig. 57.

$$M \frac{dv_s}{dt} = L \sin \alpha - U,$$

weil nur die Komponente  $L \sin \alpha$  die Bewegung in Richtung der Ebene beschleunigt. Die Kraft  $U$  aber entspricht der gleitenden Reibung und kann daher im allgemeinen (s. Bd. II, Kap. 27) gleich  $\mu N$  gesetzt werden. Für die Drehung um die Zylinderachse erhalten wir weiter

$$J_s \frac{d\omega}{dt} = U \cdot r - N \cdot f;$$

in dieser Gleichung bezeichnet  $J_s$  das unveränderliche Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich seiner geometrischen Achse und  $f$  die Reibungsziffer der rollenden Bewegung (s. Bd. II, S. 279), denn letzterer setzt sich das Widerstandsmoment  $M_r = N \cdot f$  hemmend entgegen. Berücksichtigen wir nun noch, daß  $N = L \cos \alpha$  sich nicht ändert, so folgt aus der ersten Gleichung, daß die Beschleunigung des Schwerpunktes

$$\frac{dv_s}{dt} = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g$$

und aus der zweiten, daß die Winkelbeschleunigung der Drehung um die horizontale Schwerachse

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M(\mu r - f)}{J_s} g \cos \alpha$$

sich als unveränderlich ergeben. Beide sind sonach gleichmäßig beschleunigte Bewegungen und lassen sich zu einer Drehung zusammensetzen, deren Achse im Abstände  $v_s : \omega$  vom Schwerpunkt in einer zu  $v_s$  senkrechten Ebene liegt und deren Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist.

Soll eine rollende Bewegung eintreten, so muß, wie sofort ersichtlich, die Haftreibung  $U_0 = \mu_0 N$  an die Stelle von  $U$  treten, also, weil  $\mu < \mu_0$ , auch  $U \leq U_0$  sein.

Da nun beim Rollen die Drehung um die Achse in  $B$  stattfindet und sonach  $v_s = r \omega$  ist, so erhalten wir, weil  $\frac{dv_s}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$  sein soll, aus beiden Differentialgleichungen die Beziehung

$$L \sin \alpha - U = \frac{Mr(Ur - L \cos \alpha f)}{J_s},$$

aus der

$$U = \frac{J_s \tan \alpha + Mrf}{J_s + Mr^2} L \cos \alpha$$

hervorgeht. Damit Rollen eintritt, muß  $U_0 \geq U$ , folglich

$$\mu_0 \geq \frac{J_s \tan \alpha + Mrf}{J_s + Mr^2}$$

oder

$$\tan \alpha \leq \frac{\mu_0 (J_s + Mr^2) - Mrf}{J_s}$$

sein. Die Drehung vollzieht sich dann um die Berührungslinie gleichmäßig beschleunigt mit der Winkelbeschleunigung

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{r \tan \alpha - f}{J_s + Mr^2} L \cos \alpha.$$

3. Die starre Verbindung eines beliebigen Körpers mit einem Kreiszyylinder, der in einem ruhenden Hohlkreiszyylinder mit horizontaler Achse

rollen kann (s. Fig. 58), nennt man ein Rollpendel. Es dient zu einer sehr einfachen und dabei recht genauen Ermittlung von Trägheitsmomenten der Körper auf dem Versuchswege.

Um zu einfachen Beziehungen zu gelangen, wollen wir voraussetzen, daß in der tiefsten Lage des Zylinders der Schwerpunkt  $S$  des ganzen rollenden Körpers in der lotrechten Ebene durch die geometrische Achse  $D$  des ruhenden Hohlzylinders liege. Bezeichnen wir dann in der beliebigen Lage des Körpers  $K$  (siehe die Fig. 58) den Winkel  $B_m D B$  mit  $\psi$ , den Winkel  $SCB$  mit  $\varphi$ , und die Radien der beiden Kreiszyylinderflächen mit  $R$  bzw.  $r$ , so besteht die Bedingung des Rollens in der Beziehung  $r \cdot \varphi = R \cdot \psi$ , weil dann  $\text{arc}(B B'_m) = \text{arc}(B B_m)$  ist. Da sich der

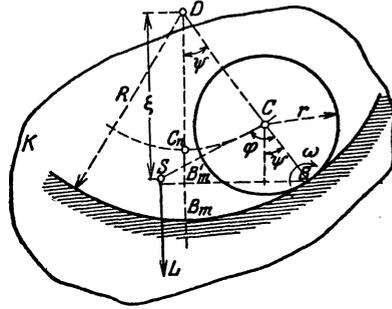


Fig. 58.

Körper  $K$  um die beiden Zylinderflächen gemeinsame Mantellinie in  $B$  dreht, so besteht nach dem Flächensatz die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} (J_B \cdot \omega) = -L \{ e \sin(\varphi - \psi) + r \sin \psi \},$$

denn der Ausdruck auf der rechten Seite, in dem  $e = \overline{CS}$  ist, stellt das Moment der resultierenden Schwerkraft  $L$  des Körpers für die Drehachse dar. Das Trägheitsmoment  $J_B$  des Körpers für die Drehachse ist in diesem Falle aber veränderlich, denn es besteht nach Bd. II, S. 52 dafür der Ausdruck  $J_B = J_s + M \cdot \overline{BS}^2 = J_s + M(r^2 + e^2 - 2re \cos \varphi)$ ; es erweist sich deshalb als zweckmäßig, das Prinzip der Wucht zu benutzen, wobei wir wie bei dem Faden- und dem physischen Pendel voraussetzen wollen, daß die Anfangslage (für  $\psi = \psi_0$ ) eine Ruhelage, also  $\omega_0 = 0$  sei. Dann wird  $W = \frac{1}{2} J_B \omega^2 = A = L [\zeta_0 - \zeta] = L [(R-r)(\cos \psi_0 - \cos \psi) + e \{ \cos(\varphi_0 - \psi_0) - \cos(\varphi - \psi) \}]$  und hierin ist  $\varphi = \frac{R}{r} \psi$ ,  $\varphi_0 = \frac{R}{r} \psi_0$  und  $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{R-r}{r} \cdot \frac{d\psi}{dt}$ , letzteres, weil  $\overline{DC} \cdot d\psi = \overline{BC} \cdot d\varphi$  sein muß. Die Auflösung vorstehender Gleichung nach  $\omega$  liefert

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{2A}{J_B}} = \frac{R-r}{r} \frac{d\psi}{dt},$$

und hieraus findet sich nach Einsetzung der Werte für  $A$  und  $J_B$ , sowie für  $J_s = M i_s^2$  und nach entsprechender Umformung

$$t = - \frac{R-r}{r\sqrt{2g}} \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{\frac{i_s^2 + e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi}{(R-r)(\cos \psi - \cos \psi_0) + e \{ \cos(\varphi - \psi) - \cos(\varphi_0 - \psi_0) \}}} d\psi.$$

Setzt man noch  $\varphi = \frac{R}{r} \cdot \psi$  in das Integral ein und führt die Integration etwa durch Reihenentwicklung aus, so erhält man mit der Annahme  $t_0 = 0$   $t$  als Funktion von  $\psi$  und folglich auch die Dauer  $\frac{T}{2}$  der einfachen Halbschwingung als Funktion von  $\psi_0$ .

Für die experimentelle Ermittlung von Trägheitsmomenten kommen in der Hauptsache zwei Sonderfälle von Körpern in Betracht. Der eine ist der zu seiner geometrischen Achse massensymmetrische Rotationskörper, bei dem der Schwerpunkt  $S$  in diese Achse fällt, also  $\overline{CS} = e = 0$  ist (s. Fig. 58 a). Setzt man aber  $e = 0$  in die vorstehende Formel ein, so erhält man

$$t = -\sqrt{\frac{(i_s^2 + r^2)(R - r)}{2gr^2}} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \psi_0}}$$

und dieser Ausdruck stimmt mit dem entsprechenden des Fadenpendels (s. S. 51) überein, wenn die Fadenlänge  $l = \frac{(i_s^2 + r^2)(R - r)}{r^2}$  gesetzt wird. Dementsprechend erhält man bei Schwingungen mit kleinen Ausschlägen  $\psi_0$  als Dauer der einfachen Schwingung mit hinreichender Annäherung

$$T = \pi \sqrt{\frac{(i_s^2 + r^2)(R - r)}{r^2 g}},$$

aus der  $i_s^2$  und damit  $J_s = M i_s^2$  folgt, nachdem man  $T$  auf dem Versuchswege ermittelt hat.

Der andere kann ein beliebig gestalteter Körper sein, wenn er nur mit einem starren Kreiszylinder verbunden ist, der die Rollbewegung ermöglicht. In diesem Falle wählt man zweckmäßig an Stelle des ruhenden Hohlzylinders eine horizontale Ebene (s. Fig. 58 b), also  $R = \infty$ ,

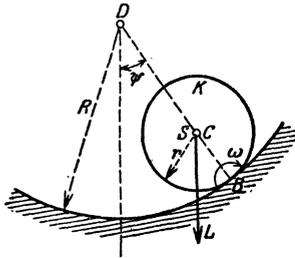


Fig. 58 a.

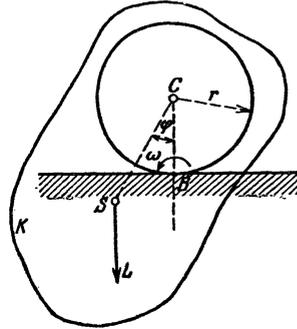


Fig. 58 b.

weil auch dann die Schwingungen des Körpers mit denen des Fadenpendels in Übereinstimmung gebracht werden können. Das ersieht man am kürzesten, wenn man den Flächensatz für die Drehung um die Berührungslinie in  $B$  anwendet; er ergibt sofort

$$\frac{d}{dt} (J_B \omega) = -L e \sin \varphi$$

und da  $J_B = J_s + M(e^2 + r^2 - 2er \cos \varphi)$  sich bei größerem  $e$  und kleinen Ausschlägen nur wenig ändert, so läßt sich näherungsweise  $J_B$  als unveränderlich ansehen, also vorstehende Differentialgleichung durch die des Fadenpendels ersetzen, in der die Fadenlänge

$$l = \frac{J_B}{M e}$$

ist. Ermittelt man nun auf dem Versuchswege wieder die Dauer  $T$  der einfachen Schwingung, sowie die Entfernung  $\overline{CS} = e$ , so erhält man aus der Gleichung

$$l = \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 g = \frac{J_B}{M e}$$

den Mittelwert für  $J_B = J_s + M(r^2 + e^2 - 2re \cos \varphi_m) = J_s + M(e - r)^2 + 4Mre \sin^2 \frac{\varphi_m}{2}$ . Wenn man dann schätzungsweise  $\varphi_m = \frac{1}{2} \varphi_0$  einführt, erhält man hieraus für  $J_s$  einen Wert, der vom wahren Wert unter den gemachten Voraussetzungen nur wenig abweicht.

Eine weitere Möglichkeit einer vereinfachten Bestimmung für  $J_s$  ergibt sich, wenn man in der allgemeinen Beziehung  $\varphi = 2\psi$  wählt, womit die Differentialgleichung in

$$\frac{d}{dt}(J_B \omega) = -L(e + r) \sin \psi$$

übergeht. Diese Feststellung zieht nach sich, daß  $R = 2r$  sein muß, falls Rollen stattfinden soll, und da  $\omega = \frac{d\psi}{dt}$ , wieder eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{M(e + r)}{J_B} g \sin \psi,$$

falls  $J_B$  sich so wenig ändert, daß man dafür einen konstanten Mittelwert setzen darf.

4. Eine homogene schwere Kugel bewegt sich unter dem Einflusse der gleitenden und bohrenden Reibung auf rauher horizontaler Ebene; ihre Bewegung läßt sich dann wie folgt ermitteln. Wir führen zunächst die Bewegung auf eine freie zurück, indem wir im Berührungspunkte  $B$  (siehe Fig. 59) außer der Zwangskraft  $N$  noch die Komponenten  $W_x$  und  $W_y$  der gleitenden Reibung  $W = \mu \cdot N$  anbringen; hierbei hat  $W$  die entgegengesetzte Richtung der Geschwindigkeit  $v_B$  des Punktes  $B$  der Kugel. Zerlegen wir nun die Bewegung der Kugel in die Schiebung mit dem Massenmittelpunkte  $M$ , dessen Koordinaten  $x, y, z = a$  seien, und die Drehung um eine Mittellinie der Kugel, so erhalten wir nach (64 a) die drei Differentialgleichungen

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -W_x, \quad M \frac{d^2 y}{dt^2} = -W_y, \quad M \frac{d^2 z}{dt^2} = N - L = 0,$$

und nach (64 b) mit Benutzung des Umstandes, daß  $J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} M a^2 = J_M$ , die weiteren

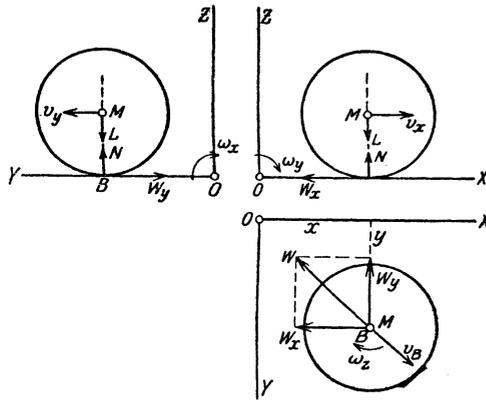


Fig. 59.

$$J_M \frac{d\omega_x}{dt} = -W_y a, \quad J_M \frac{d\omega_y}{dt} = -W_x a, \quad J_M \frac{d\omega_z}{dt} = -M_B,$$

in denen  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um die zu den Koordinatenachsen parallelen Mittellinien der Kugel bezeichnen und  $M_B$  das konstante Moment der bohrenden Reibung ist.

Nun liefert die Elimination von  $W_y$  aus der zweiten und vierten Gleichung

$$J_M \frac{d\omega_x}{dt} - M a \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} (J_M \omega_x - M a v_y) = 0,$$

also das Integral

$$J_M \omega_x - M a v_y = \text{Const} = C_x,$$

und in gleicher Weise die Elimination von  $W_x$  aus der ersten und vierten

$$J_M \omega_y + M a v_x = C_y;$$

darin ist  $\frac{dx}{dt} = v_x, \frac{dy}{dt} = v_y$  gesetzt worden. Beachten wir weiter, daß die Geschwindigkeit  $v_B$  des Berührungspunktes die Komponenten  $v_x - a\omega_y$  und  $v_y + a\omega_x$  und daß  $W$  die entgegengesetzte Richtung von  $v_B$  hat, also die Beziehung

$$\frac{W_y}{W_x} = \frac{dv_y}{dv_x} = \frac{v_y + a\omega_x}{v_x - a\omega_y} = \frac{v_y + A}{v_x - B}$$

besteht, in der  $A = \frac{C_x a}{J_M + M a^2}, B = \frac{C_y a}{J_M + M b^2}$  zu setzen ist, so folgt durch Integration

$$\frac{v_y + A}{v_x - B} = \text{const} = \frac{W_y}{W_x}.$$

Sonach hat  $W = \mu N = \mu L$  nicht nur konstante Größe, sondern auch konstante Richtung und es muß folglich  $M$  eine Parabel beschreiben, deren Achsenrichtung und Lage durch Größe und Richtung der Anfangsgeschwindigkeit von  $M$  bestimmt wird. Ferner dreht sich die Kugel um eine Mittellinie, die in bekannter Weise durch Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x, \omega_y$  und  $\omega_z$  erhalten wird, und zwar ergibt sich die Richtung der augenblicklichen Drehachse aus den Ausdrücken  $\omega_x: \omega, \omega_y: \omega$  und  $\omega_z: \omega$ , in denen  $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$  ist.

Berücksichtigen wir, daß  $W_x$  und  $W_y$  sich nicht ändern, so sind auch  $\frac{dv_x}{dt}$  und  $\frac{dv_y}{dt}$  unveränderlich, und daher  $v_x = -c_x \cdot t + v_{0x}, v_y = -c_y \cdot t + v_{0y}$ .

Damit aber erhalten wir zufolge der früheren Integrale

$$\omega_x = \gamma_x \cdot t + \omega_{0x}, \quad \omega_y = \gamma_y \cdot t + \omega_{0y},$$

wozu noch wegen der Unveränderlichkeit der bohrenden Reibung

$$\omega_z = -\gamma_z \cdot t + \omega_{0z}$$

tritt; hierin sind  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  Konstanten. Es läßt sich folglich die Richtung der in der Kugel und im Bezugskörper veränderlichen Drehachse für jeden Wert von  $t$  berechnen. Die Bewegung setzt sich jedoch nur so lange fort, als noch Gleiten auftritt. Ist dagegen  $v_B$  zu Null geworden, also auch  $v_x - a\omega_y$  und  $v_y + a\omega_x$ , oder, was das gleiche bedingt,

$$v_x = \frac{C_y a}{J_M + M a^2}, \quad v_y = \frac{C_x a}{J_M + M a^2},$$

dann tritt an die Stelle der gleitenden Reibung die Haftreibung und von da an rollt die Kugel mit den beiden unveränderlichen Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_x = \frac{C_x}{J_M + Ma^2}, \quad \omega_y = \frac{C_y}{J_M + Ma^2},$$

falls die rollende Reibung einen verschwindend kleinen Einfluß auf die Bewegung hat. Der Einfluß der bohrenden Reibung auf die Richtungsänderung der Drehachse dauert jedoch so lange an, bis  $\omega_z$  zu Null geworden ist. Die Bewegung kann von dem genannten Augenblick an als eine Drehung um eine durch den Berührungspunkt  $B$  gehende Achse aufgefaßt werden.

### 13. Kap. Der Kreisel.

In neuerer Zeit hat der Kreisel eine ganze Reihe wesentlicher technischer Anwendungen erfahren, weshalb es angezeigt erscheint, auf seine Theorie wenigstens in den Hauptpunkten einzugehen, obgleich sie etwas weitergehende Anforderungen an mathematische Hilfsmittel stellt, als die bisher behandelten Gebiete der Dynamik.

Wir gehen hierbei von der Aufgabe aus, die Bewegung eines starren Körpers zu ermitteln, der in einem seiner Punkte festgehalten wird, also eine sogenannte sphärische Bewegung (s. Bd. I, S. 111) ausführt. Sie besteht in einer Drehung um die Achse, die durch den festgehaltenen Punkt  $O$  (s. Fig. 60) geht. Wir zerlegen diese in bekannter Weise in drei Drehungen um die Achsen  $XYZ$  eines beliebigen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt in  $O$  liegt. Bezeichnet  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die beliebige Achse  $OD$ , und sind  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  die Winkel von  $OD$  mit den drei Koordinatenachsen, dann werden die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um letztere (s. Bd. I, S. 98)

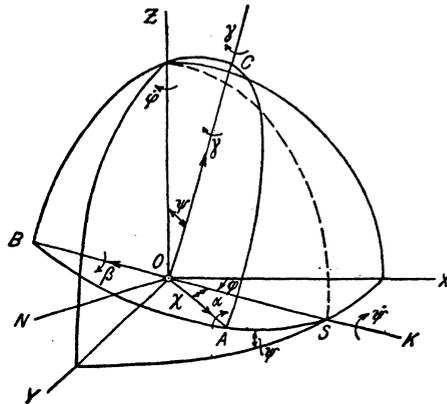


Fig. 60.

$$\omega_x = \omega \cos \gamma_x, \quad \omega_y = \omega \cos \gamma_y, \quad \omega_z = \omega \cos \gamma_z.$$

Zerlegen wir ferner das resultierende Hauptmoment  $M_{hr}$ , aller auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte in die Komponenten  $M_x, M_y, M_z$  bezüglich der drei Koordinatenachsen, dann liefert der Flächen-

satz bezüglich der Drehungen des Körpers um diese Achsen sofort die Differentialgleichungen

$$(66) \quad \frac{d(J_x \omega_x)}{dt} = M_x, \quad \frac{d(J_y \omega_y)}{dt} = M_y, \quad \frac{d(J_z \omega_z)}{dt} = M_z,$$

in denen  $J_x, J_y, J_z$  die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der Koordinatenachsen bezeichnen. Sie haben die allgemeine Form

$$(67) \quad \frac{d(J_D \omega)}{dt} = M_D,$$

falls  $J_D$  das Trägheitsmoment des Körpers und  $M_D$  das resultierende Moment aller Kräfte bezüglich der beliebigen Achse  $OD$  bezeichnet, um die sich der Körper momentan mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht, und stimmen völlig mit (57) überein. Die darin auftretende wichtige Größe  $J_D \omega$  nannten wir das Impulsmoment des Körpers für die Achse  $OD$ ; wir wollen sie nach dem Vorgang von Föppl<sup>1)</sup> kurz den Drall nennen. Nun läßt sich aber, unter  $A, B, C$  die drei Hauptträgheitsmomente des Körpers für den festgehaltenen Punkt  $O$  verstanden, zufolge der Formel (41) in Bd. II, S. 53

$$J_D = A \cos^2(A, D) + B \cos^2(B, D) + C \cos^2(C, D)$$

setzen, worin  $(A, D), (B, D), (C, D)$  die Winkel der Hauptträgheitsachsen mit der Drehachse  $OD$  bezeichnen. Und wenn wir ferner noch  $\omega$  in die drei Komponenten  $\alpha = \omega \cos(A, D), \beta = \omega \cos(B, D), \gamma = \omega \cos(C, D)$  zerlegen, so geht der Drall  $\Delta = J_D \omega$  über in

$$(68) \quad \Delta = A \alpha \cos(A, D) + B \beta \cos(B, D) + C \gamma \cos(C, D).$$

Aus dieser Beziehung erkennt man unschwer, daß der Drall die wesentliche Eigenschaft eines Vektors hat. Tragen wir nämlich  $\Delta$  in Streckenform auf  $OD$  von  $O$  aus nach der Seite hin auf, von der aus gesehen der Drehsinn von  $\omega$  mit dem des Uhrzeigers übereinstimmt, so zeigt (68), wenn wir die Drallgrößen  $A \alpha, B \beta$  und  $C \gamma$  in der gleichen Weise behandeln, daß  $\Delta$  sich als Summe der Projektionen der letzteren Vektoren auf  $OD$  darstellt. Daraus folgt aber unmittelbar, daß sich die Drallvektoren wie Kräfte, Hauptmomente usf. zusammensetzen und zerlegen lassen. Insbesondere ergibt sich durch Zusammensetzung von  $A \alpha, B \beta$  und  $C \gamma$  als resultierender Drallvektor

$$\Delta_m = \sqrt{(A \alpha)^2 + (B \beta)^2 + (C \gamma)^2},$$

<sup>1)</sup> Die von A. Föppl eingeführte Definition des Dralls ist gegenüber der hier gegebenen eine wesentlich weitere; er versteht unter „Drall“ die geometrische Summe der Produkte des Impulses  $m_k v_k$  mit dem Lote  $r_k$  vom Fixpunkt  $O$  auf  $v_k$ . Von diesem ist das hier verwendete Impulsmoment nur ein Sonderfall.

dessen Richtungskosinus sich wie  $A \alpha : B \beta : C \gamma$  verhalten. Ferner ersehen wir aus (68) in der Form

$$\Delta = \left[ \frac{A \alpha}{\Delta_m} \cdot \cos(A, D) + \frac{B \beta}{\Delta_m} \cdot \cos(B, D) + \frac{C \gamma}{\Delta_m} \cdot \cos(C, D) \right] \Delta_m,$$

daß sich

$$(68a) \quad \Delta = \Delta_m \cos \vartheta$$

ergibt, falls  $\vartheta$  den Winkel zwischen der Achse  $OD$  und dem Vektor  $\Delta_m$  bezeichnet. Es ist sonach  $\Delta < \Delta_m$ , bzw.  $\max(\Delta) = \Delta_m$ . Wenden wir die Beziehung (68a) auf die Achsen eines willkürlichen Koordinatensystems an, so finden wir unter Benutzung der Ausdrücke  $\Delta_x = J_x \omega_x$ ,  $\Delta_y = J_y \omega_y$ ,  $\Delta_z = J_z \omega_z$  auf

$$\Delta_m = \sqrt{(J_x \omega_x)^2 + (J_y \omega_y)^2 + (J_z \omega_z)^2}$$

und das Verhältnis der Richtungskosinus zu  $J_x \omega_x : J_y \omega_y : J_z \omega_z$ .

Die Differentialgleichung in der Form

$$(67a) \quad \frac{d\Delta}{dt} = M_D$$

ragt aus, daß die Änderung des Dralles mit der Zeit gleich dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte für die Drehachse ist. Um diese Änderung recht einfach ermitteln zu können, ist es zweckmäßig, die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen in ihrer momentanen Lage zusammenzulegen und die Winkel zu suchen, welche die letzteren mit den Koordinatenachsen einschließen, nachdem der Körper eine unendlich kleine Drehung um die Achse  $OD$  vollzogen hat. Da wir aber letztere durch die Drehungen um die drei Koordinatenachsen mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\alpha, \beta, \gamma$  ersetzen dürfen, so kann der Winkel  $(A', X)$ , den die Achse  $OA$  in der neuen Lage  $OA'$  mit der  $X$ -Achse einschließt, in folgender Weise ermittelt werden. Bei der Drehung des Körpers um die  $X$ -Achse geht zwar  $\alpha$  in  $\alpha + d\alpha$  über, aber die Lage von  $OA$  würde hierbei ungeändert bleiben. Dagegen ist letzteres nicht der Fall bei den Drehungen um die  $Y$ - und  $Z$ -Achse, welche zusammengesetzt eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1 = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$  um eine in der  $YZ$ -Ebene liegende Achse ergeben, die den Winkel  $(A', X) = \omega_1 dt$  der Achse  $OA'$  mit  $X$  zur Folge hat. Ferner ergibt sich der Winkel  $(B', X)$  zufolge der Drehung des Körpers um die  $Z$ -Achse (s. Fig. 61 a, S. 116) zu  $\frac{\pi}{2} + \gamma dt$  und endlich Winkel  $(C', X) = \frac{\pi}{2} - \beta dt$  (s. Fig. 61 b, S. 116), so daß nach entsprechender Reihenentwicklung

$$\cos(A' X) = \cos(\omega, dt) = 1 - \frac{1}{2} \cos^2(\omega, dt) + \dots,$$

$$\cos(B' X) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma dt\right) = -\sin(\gamma dt) = -\gamma dt + \frac{(\gamma dt)^3}{3!} - \dots,$$

$$\cos(C' X) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta dt\right) = \sin(\beta dt) = \beta dt - \frac{(\beta dt)^3}{3!} + \dots$$

oder mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen höherer als der ersten Ordnung

$$\cos(A', X) = 1, \quad \cos(B', X) = -\gamma dt, \quad \cos(C', X) = \beta dt$$

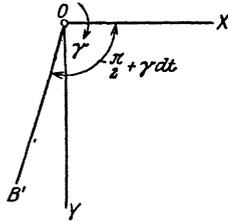


Fig. 61 a.

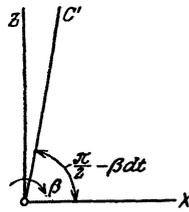


Fig. 61 b.

erhalten wird. Setzen wir letztere in (68) ein, indem wir beachten, daß an die Stelle der Achse  $OD$  hier die  $X$ -Achse als Drehachse tritt, so finden wir als Drall des Körpers für letztere

$$\begin{aligned} \Delta' &= A \alpha' \cos(A', X) + B \beta' \cos(B', X) + C \gamma' \cos(C', X) \\ &= A(\alpha + d\alpha) - B(\beta + d\beta)\gamma dt + C(\gamma + d\gamma)\beta \gamma dt \\ &= A(\alpha + d\alpha) - (B - C)\beta \gamma dt, \end{aligned}$$

wenn wieder die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden. Sonach erhalten wir als Zuwachs des Dralles bei der Elementardrehung des Körpers um die  $X$ -Achse

$$d\Delta = \Delta' - \Delta_x = A d\alpha - (B - C)\beta \gamma dt$$

und sonach zufolge (66) als Differentialgleichung der Drehung des Körpers um die  $X$ -Achse

$$A \frac{d\alpha}{dt} - (B - C)\beta \gamma = M_\alpha.$$

Bei Ableitung dieser Beziehung ist nun stillschweigend angenommen worden, daß die drei Hauptträgheitsmomente sich bei der Bewegung des Körpers nicht ändern. Das ist nicht der Fall, wenn der Massenzentrum  $M$  des Körpers nicht im festgehaltenen Punkt  $O$  liegt. Denn sind  $\xi \eta \zeta$  die Koordinaten von  $M$  und  $A_M, B_M, C_M$  die Hauptträgheitsmomente bezüglich  $M$ , so ist z. B. das Trägheitsmoment für die parallele Achse durch den beliebigen Punkt  $O$  gleich  $A_M + M \xi^2$ ,

also veränderlich. Demgemäß gilt vorstehende Differentialgleichung nur, falls der Massenmittelpunkt  $M$  des Körpers festgehalten wird. Unter dieser Voraussetzung bestehen sonach für die Bewegung des starren Körpers um den Massenmittelpunkt die folgenden drei Differentialgleichungen

$$(69) \quad \begin{aligned} A_M \frac{d\alpha}{dt} &= (B_M - C_M) \beta \gamma + M_\alpha; & B_M \frac{d\beta}{dt} &= (C_M - A_M) \alpha \gamma + M_\beta; \\ C_M \frac{d\gamma}{dt} &= (A_M - B_M) \alpha \beta + M_\gamma; \end{aligned}$$

sie heißen nach ihrem Entdecker die Eulerschen Gleichungen. Die beiden letzten werden in der gleichen Weise abgeleitet, wie die erste, und zwar durch Ermittlung der Änderung des Dralles bei Drehung des Körpers um die  $Y$ - bzw.  $B$ -Achse und die  $Z$ - bzw.  $C$ -Achse.

Es ist ferner zu beachten, daß die Gleichungen (69) zunächst nur für die Elementarbewegung des Körpers gegen ein ruhendes Koordinatensystem Gültigkeit zu haben scheinen, dessen Achsen momentan mit den Hauptträgheitsachsen im Massenmittelpunkte zusammenfallen. Bedenkt man jedoch, daß die Änderungen des Dralles, welche die Gleichungen (69) bestimmen, die ganz gleichen werden für jede beliebige Lage des Körpers, so erkennt man, daß diese Gleichungen ganz allgemein, d. i. für jedes beliebige ruhende Koordinatensystem gelten, dessen Anfangspunkt im Massenmittelpunkt liegt.

Die Integration der Gleichungen (69) bedingt aber, daß die drei Momente  $M_\alpha$ ,  $M_\beta$ ,  $M_\gamma$  der äußeren Kräfte bezüglich der Hauptträgheitsachsen als Funktionen der Veränderlichen  $\alpha \beta \gamma$  dargestellt werden können. Das erfordert die Ermittlung der Abhängigkeit dieser Veränderlichen von der Lage der Hauptträgheitsachsen des Körpers zu einer beliebigen Zeit  $t$ . Die Benutzung der Winkel genannter Achsen mit den Koordinatenachsen ist sehr umständlich; einfacher werden die Beziehungen durch Verwendung der Winkel, die Euler zu diesem Zweck einführte. Es seien  $A, B, C$  (s. Fig. 61) die Hauptträgheitsachsen des Körpers, in einer beliebigen Lage gegen das ruhende Koordinatensystem, und  $OS$  bezeichne die Schnittlinie der Ebene  $A O B$  mit der  $X O Y$ -Ebene, dann bestimmen die drei Winkel  $XOS = \varphi$ ,  $SOA = \chi$  und  $ZOC = \psi$  eindeutig die Lage des Körpers, wenn sie von den positiven Seiten dieser Achsen gebildet werden. Mittels derselben lassen sich nun die Komponenten  $\alpha \beta \gamma$  der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bezüglich der drei Hauptträgheitsachsen in folgender Weise ausdrücken. Wir können den Körper in jede Lage bringen durch Drehungen um die Achse  $OZ$  mit  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  als Winkelgeschwin-

digkeit, dann um  $OS$  mit  $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$  und schließlich um  $OC$  mit  $\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt}$ , und wenn wir  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\chi}$  in der Richtung der drei Hauptträgheitsachsen in Komponenten zerlegen, so läßt sich  $\alpha$  als Summe der bezüglichen Komponenten von  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\chi}$  darstellen und ähnlich auch  $\beta$  und  $\gamma$ . Wir erhalten folglich ohne weiteres nachstehende drei Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\alpha &= \dot{\varphi} \cos(Z, A) + \dot{\psi} \cos(S, A) + \dot{\chi} \cos(C, A), \\ \beta &= \dot{\varphi} \cos(Z, B) + \dot{\psi} \cos(S, B) + \dot{\chi} \cos(C, B), \\ \gamma &= \dot{\varphi} \cos(Z, C) + \dot{\psi} \cos(S, C) + \dot{\chi} \cos(C, C),\end{aligned}$$

in denen die Winkel  $(S, A) = \chi$ ,  $(S, B) = \frac{\pi}{2} + \chi$ ,  $(S, C) = \frac{\pi}{2}$ ,  $(C, Z) = \psi$ ,  $(A, C) = (B, C) = \frac{\pi}{2}$  und  $(C, C) = 0$  werden, wie sich unmittelbar aus der Figur ersehen läßt, während eine einfache geometrische Überlegung zeigt, daß  $\cos(Z, A) = \sin \psi \sin \chi$  und  $\cos(Z, B) = \sin \psi \cos \chi$  zu setzen ist. Damit finden wir

$$(70) \quad \begin{cases} \alpha = \dot{\varphi} \sin \psi \sin \chi + \dot{\psi} \cos \chi \\ \beta = \dot{\varphi} \sin \psi \cos \chi - \dot{\psi} \sin \chi \\ \gamma = \dot{\varphi} \cos \psi + \dot{\chi}. \end{cases}$$

und diese Ausdrücke setzen wir in (69) ein. Drücken wir dann noch die veränderlichen Größen in  $M_x M_y M_z$  durch  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $\chi$  aus, so ergeben sich drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen  $\varphi \psi \chi$  und der Zeit  $t$ , deren Integration die gestellte Aufgabe löst. Letztere bieten im allgemeinen erhebliche mathematische Schwierigkeiten; deshalb soll das Problem hier nicht weiter verfolgt werden. Dagegen wollen wir noch auf einige Sonderfälle eingehen, die einfachere Lösungswege zulassen.

Ein derartiger Sonderfall ist der kräftefreie Kreisel, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Bewegung eines starren Körpers um seinen Massenmittelpunkt, wenn auf den Körper Kräfte wirken, die sich in allen Lagen des Körpers zu einer Resultierenden zusammensetzen lassen, deren Wirkungslinie immer durch den Massenmittelpunkt geht, also deren Zentralmoment Null ist. In diesem Falle ist  $M_\alpha = M_\beta = M_\gamma = 0$  und die Eulerschen Gleichungen werden

$$(71) \quad A \frac{d\alpha}{dt} = (B - C) \beta \gamma, \quad B \frac{d\beta}{dt} = (C - A) \alpha \gamma, \quad C \frac{d\gamma}{dt} = (A - B) \alpha \beta.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit  $\alpha$  bzw.  $\beta$  bzw.  $\gamma$ , so erhält man durch deren Addition

$$A\alpha \frac{d\alpha}{dt} + B\beta \frac{d\beta}{dt} + C\gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

und wenn man letztere nach  $t$  integriert,

$$(72) \quad \frac{A\alpha^2}{2} + \frac{B\beta^2}{2} + \frac{C\gamma^2}{2} = \text{Const.}$$

Der Ausdruck links ist aber die Wucht  $W$  des Körpers, wie man sich leicht überzeugt, wenn man beachtet, daß  $W = \frac{1}{2} J_D \omega^2$  ist und man für  $J_D$  den auf S. 114 angegebenen Ausdruck einsetzt. Vorstehende Gleichung würde sonach unmittelbar aus dem Prinzip der Wucht, d. i. der Gleichung (41) hervorgehen, da hier die Kräfte bei keiner Drehung um eine Mittellinie des Körpers eine Arbeit verrichten; sie könnte folglich, weil die Arbeit  $A=0$ , sofort in der Form

$$(72a) \quad W = \frac{1}{2} (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) = W_0$$

geschrieben werden, in der  $W_0$  die Wucht bei Beginn der Bewegung bezeichnet.

Die Änderung von  $\omega$  steht hiernach im engsten Zusammenhang mit der des Trägheitsmomentes, denn es ist

$$\omega = \sqrt{\frac{2W}{J_D}} = \sqrt{\frac{2W_0}{J_D}}.$$

Sie wird anschaulich, wenn man das Zentralellipsoid (s. Bd. II, S. 54) zu Hilfe nimmt. Diese Fläche erhielt man dadurch, daß man von  $M$

aus auf der Drehachse  $OD$  nach beiden Seiten die Strecke  $\overline{OE} = \varrho = \sqrt{\frac{k}{J_D}}$

(hierin  $k$  eine willkürliche Konstante) auftrug; die Punkte  $E$  liegen dann auf der Zentralellipsoid genannten Fläche. Aus ihr finden wir mit Hilfe von  $\varrho$  umgekehrt für jede beliebige Achse das zugehörige

Trägheitsmoment  $J_D = \frac{k}{\varrho^2}$ . Da nun auch

$$J_D = \frac{2W_0}{\omega^2},$$

so liefert die Gleichsetzung beider Ausdrücke sofort die Beziehung

$$(73) \quad \omega = \lambda \varrho,$$

in der  $\lambda = \sqrt{\frac{2W_0}{k}}$  eine Konstante ist. Somit erkennen wir, daß

der Vektor für  $\omega$  durch die Strecke  $\varrho$  dargestellt werden kann, wenn man den Maßstab entsprechend wählt. Folglich vermittelt das Zentralellipsoid die erwähnte Veranschaulichung des Änderungsgesetzes der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bei diesem Bewegungsvorgang.

Ein weiteres Integral folgt aus dem Prinzip der Erhaltung der Flächen, bzw. aus der Gleichung (68); es läßt sich hier unmittelbar ableiten, indem man die Gleichungen (71) mit  $2A\alpha$  bzw. mit  $2B\beta$  bzw.  $2C\gamma$  multipliziert, dann addiert und nach der Zeit integriert; man erhält dann sofort

$$(74) \quad A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 + C^2 \gamma^2 = \text{Const.}$$

Dieses selbe Integral erhält man aus (67), weil  $M_D = 0$ , also der Drall

$$\Delta = J_D \omega = \text{Const}$$

hinsichtlich der Zeit ist, und zwar für die Verdrehungen um die drei Koordinatenachsen, da  $M_x = M_y = M_z = 0$  und somit  $J_x \omega_x, J_y \omega_y, J_z \omega_z$  Konstanten hinsichtlich der Zeit sind. Da der Drall aber die Eigenschaft eines Vektors hat, so erhält man durch Zusammensetzung der den Hauptträgheitsachsen entsprechenden Vektoren

$$\Delta = \sqrt{(A\alpha)^2 + (B\beta)^2 + (C\gamma)^2}$$

und somit die Beziehung (74).

Endlich bedarf es, um die drei Komponenten  $\alpha \beta \gamma$  der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  hinsichtlich der Hauptträgheitsachsen zu finden, noch einer weiteren Integration und zu dieser gelangt man durch Einführung der Veränderlichen  $u$  mittels der Festsetzung

$$\alpha \beta \gamma = \frac{du}{dt}.$$

Multiplizieren wir zunächst die erste der Gleichungen (71) mit  $2\alpha$ , so finden wir

$$2A\alpha \frac{d\alpha}{dt} = 2(B - C)\alpha \beta \gamma = 2(B - C) \frac{du}{dt}$$

und durch Integration nach der Zeit

$$A\alpha^2 = 2(B - C)u + \text{Const.}$$

Die Konstante hierin soll durch die Bedingung bestimmt werden, daß bei Beginn der Bewegung, d. i. für  $t = t_0 = 0$  auch  $u = u_0 = 0$  und ferner  $\alpha = \alpha_0$  sei, also die Beziehung

$$A\alpha_0^2 = \text{Const}$$

erfüllt werde. Dann folgt

$$A(\alpha^2 - \alpha_0^2) = 2(B - C)u.$$

In der gleichen Weise finden wir die beiden Beziehungen

$$B(\beta^2 - \beta_0^2) = 2(C - A)u \quad \text{und} \quad C(\gamma^2 - \gamma_0^2) = 2(A - B)u$$

und können hiernach  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  als Funktionen von  $u$  ausdrücken. Dann aber erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = \alpha \beta \gamma = \sqrt{\left(\alpha_0^2 + 2 \frac{B-C}{A} u\right) \left(\beta_0^2 + 2 \frac{C-A}{B} u\right) \left(\gamma_0^2 + 2 \frac{A-B}{C} u\right)}$$

aus der durch Integration zwischen den Grenzen  $u_0=0$  und  $u$

$$t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{\left(\alpha_0^2 + 2 \frac{B-C}{A} u\right) \left(\beta_0^2 + 2 \frac{C-A}{B} u\right) \left(\gamma_0^2 + 2 \frac{A-B}{C} u\right)}}$$

hervorgeht. Damit finden wir  $u$  als elliptische Funktion von  $t$  und hiernach unter Verwendung obiger drei Beziehungen auch  $\alpha \beta \gamma$  als elliptische Funktionen der Zeit. Hat man diese, dann erhält man sofort  $\omega = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ , und somit auch die Richtungskosinus der Drehachse bezüglich der Hauptträgheitsachsen des beweglichen Körpers. Endlich liefert die Einsetzung der Werte für  $\alpha, \beta, \gamma$  in die Ausdrücke (70) drei Differentialgleichungen für die Eulerschen Winkel und damit alle zur Bestimmung des Bewegungsvorganges erforderlichen Größen.

Eine sehr anschauliche Vorstellung des Bewegungsvorganges gewinnt man durch die Annahme, daß der Körper durch das Zentral-ellipsoid als Oberfläche begrenzt werde. Es sei

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k,$$

worin  $k$  eine beliebige Konstante bezeichnen soll, die Gleichung dieser Oberfläche, und  $\xi \eta \zeta$  seien die Koordinaten des Punktes  $P$ , in dem die augenblickliche Drehachse  $OD$  des Körpers die Fläche schneidet, dann ist bekanntlich die Gleichung der Ebene  $E$ , die das Zentraellipsoid in  $P$  berührt,

$$A \xi x + B \eta y + C \zeta z = k;$$

diese Ebene ist konjugiert dem Durchmesser  $OD$  des Ellipsoides. Füllen wir vom Mittelpunkte  $O$  des Ellipsoides das Lot  $\overline{ON} = p$  auf  $E$ , und bezeichnen mit  $\mu_x$  den Stellungswinkel  $NOX$  der Ebene, mit  $a_x$  den Achsenabschnitt  $\overline{OS}$  (s. Fig. 62), so ist  $\cos \mu_x = \frac{p}{a_x}$ , und da  $a_x = \frac{k}{A \xi}$ , finden wir  $\cos \mu_x = A \xi \cdot \frac{p}{k}$ . Ermitteln wir in gleicher Weise  $\cos \mu_y$

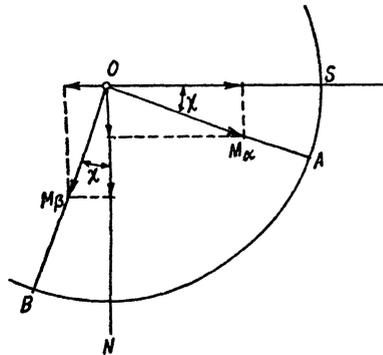


Fig. 62.

und  $\cos \mu_x$  und benutzen, daß  $\cos^2 \mu_x + \cos^2 \mu_y + \cos^2 \mu_z = 1$ , so erhalten wir

$$p \sqrt{(A \xi)^2 + (B \eta)^2 + (C \zeta)^2} = k.$$

Da nun  $\cos(P O X) = \xi : \rho$ , wenn  $\overline{OP} = \rho$  gesetzt wird, und andererseits auch  $\cos(P O X) = \alpha : \omega$ , unter  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um  $OD$  verstanden, so folgt  $\xi : \rho = \alpha : \omega$ , und in gleicher Weise  $\eta : \rho = \beta : \omega$ , und  $\zeta : \rho = \gamma : \omega$ ; daher geht vorstehende Gleichung über in

$$p \sqrt{(A \alpha)^2 + (B \beta)^2 + (C \gamma)^2} = \frac{k \omega}{\rho}.$$

Zufolge (73) und (74) muß daher  $p = \text{const}$  werden, d. h. die Bewegung des Körpers ist derart, daß die Entfernung des Massenmittelpunktes  $M$  (der mit  $O$  zusammenfällt) von der Berührungsebene an das Zentralellipsoid im Schnittpunkt  $P$  der Drehachse mit letzterem sich nicht ändert. Aber auch die Richtung des Lotes  $\overline{ON} = p$  gegen das ruhende Koordinatensystem  $XYZ$  ändert sich nicht. Denn aus den Gleichungen (66) folgt, da  $M_x = M_y = M_z = 0$ ,  $J_x \omega_x = \text{Const} = c_x$ ,  $J_y \omega_y = c_y$ ,  $J_z \omega_z = c_z$ ; daher wird der Vektor

$$A_m = \sqrt{(J_x \omega_x)^2 + (J_y \omega_y)^2 + (J_z \omega_z)^2} = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \text{Const}$$

und dessen Richtungskosinus ebenfalls konstant. Man ersieht hieraus, daß die Lage der Ebene  $E$  gegen den ruhenden Bezugskörper unveränderlich ist, also die „invariable Ebene“ der Bewegung des Körpers darstellt. Letztere vollzieht sich demnach in der Weise, daß der Massenmittelpunkt des Körpers in Ruhe bleibt und das Zentralellipsoid eine ruhende Ebene dauernd berührt; der Körper dreht sich momentan um die Verbindungslinie des Massenmittelpunktes mit dem Berührungspunkte, und das Zentralellipsoid rollt folglich auf der Ebene. Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist proportional dem Fahrstrahl der Ellipsoidfläche. Die Lage der unveränderlichen Ebene ist bestimmt durch die Anfangslagen des Körpers und der Drehachse, um welche die Drehung beginnt.

Der geometrische Ort der Berührungspunkte  $P$  auf dem Ellipsoid ist eine geschlossene Kurve, die Polhodie (nach Poinsot) genannt wird, während der Ort der Berührungspunkte auf der Ebene Herpolhodie heißt. Die Verbindungslinien der Punkte beider Kurven mit dem festgehaltenen Punkte bilden zwei Kegelflächen; die eine der Polhodie zugeordnete liegt im bewegten Körper fest und rollt auf dem im Bezugskörper liegenden ruhenden Kegel.

Als Beispiel werde der im luftleeren Raum geworfene schwere Körper angeführt. Denkt man sich den Massenmittelpunkt — der nach dem früheren die bekannte Wurfparabel beschreibt — als Anfangspunkt eines rechtwinkligen

Koordinatensystems, dessen Achsen immer parallel zu sich bewegen, das also eine Schiebung vollzieht, so besteht die Bewegung des Körpers gegen dieses Koordinatensystem in einer sphärischen Bewegung der zuletzt behandelten Art.

Die Polhodie läßt sich als räumliche Kurve sehr gut vorstellen, wenn man beachtet, daß sie als Durchdringungslinie des Zentral-ellipsoides mit dem Ellipsoid aufgefaßt werden kann, das die Gleichung (74) hat. Es ist hierzu nur nötig, den Maßstab für den Vektor  $a$  so zu wählen, daß  $\varrho \triangleq \omega$ , also in (73).  $\lambda \triangleq 1$  wird. Von der Herpolhodie läßt sich ohne weiteres aussagen, daß sie zwischen zwei konzentrischen Kreisen verlaufen muß, deren Mittelpunkt im Fußpunkt  $N$  des Lotes vom Ellipsoidmittelpunkt auf die Ebene  $E$  liegt, und deren Radien durch das Maximum und das Minimum der Strecke  $\overline{OP}$  bestimmt sind.

In den weitaus meisten Fällen der Anwendungen des Kreisels ist letzterer ein homogener Rotationskörper und für diesen werden zwei der Hauptträgheitsmomente, z. B.  $A$  und  $B$  einander gleich, so daß das Zentralellipsoid in ein Rotationsellipsoid übergeht. In diesem Falle wird die Polhodie zu einem Kreise, dessen Ebene auf der Kreiselachse senkrecht steht, und auch die Herpolhodie geht in einen Kreis über, wie man leicht erkennt.

Wir wollen im folgenden noch die Differentialgleichungen für den achsensymmetrischen Kreisel aufstellen und zu dem Ende das Trägheitsmoment für die Kreiselachse, d. i. für die geometrische Achse des Umdrehungskörpers mit  $J$ , das für die dazu senkrechte Achse mit  $J_1$  bezeichnen. Setzen wir  $C_M = J$ ,  $A_M = B_M = J_1$  in (69) ein, so gehen diese Differentialgleichungen über in

$$(69a) \quad J_1 \frac{d\alpha}{dt} = (J_1 - J) \beta \dot{\gamma} + M_\alpha, \quad J_1 \frac{d\beta}{dt} = (J - J_1) \alpha \dot{\gamma} + M_\beta,$$

$$J \frac{d\gamma}{dt} = M_\gamma,$$

und wenn wir aus ihnen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\dot{\chi}$  mittels (70) entfernen, so erhalten wir die folgenden Differentialgleichungen für die Bewegung des achsensymmetrischen Kreisels:

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} [J_1(\ddot{\varphi} \sin \psi + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi) - J \gamma \dot{\psi}] \sin \chi + [J_1(\ddot{\psi} - \dot{\varphi}^2 \sin \psi \cos \psi) \\ \quad + J \gamma \dot{\varphi} \sin \psi] \cos \chi = M_\alpha, \\ [J_1(\ddot{\varphi} \sin \psi + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi) - J \gamma \dot{\psi}] \cos \chi - [J_1(\ddot{\psi} - \dot{\varphi}^2 \sin \psi \cos \psi) \\ \quad + J \gamma \dot{\varphi} \sin \psi] \sin \chi = M_\beta, \\ J \frac{d\gamma}{dt} = M_\gamma. \end{array} \right.$$

An Stelle der ersten beiden dieser Gleichungen kann man auch die folgenden setzen:

$$(76) \begin{cases} J_1 (\ddot{\varphi} \sin \psi + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi) - J \gamma \dot{\psi} = M_\alpha \sin \chi + M_\beta \cos \chi = M_n, \\ J_1 (\ddot{\psi} - \dot{\varphi}^2 \sin \psi \cos \psi) + J \gamma \dot{\varphi} \sin \psi = M_\alpha \cos \chi - M_\beta \sin \chi = M_k, \end{cases}$$

die man durch Elimination von  $\sin \chi$  bzw.  $\cos \chi$  erhält; in ihnen bezeichnet  $M_k$  das resultierende Moment der äußeren Kräfte für die sogenannte Knotenlinie, in der die Äquatorialebene des Kreisels die  $XY$ -Ebene schneidet, und  $M_n$  das Moment der äußeren Kräfte für die zu  $OK$  und  $OC$  senkrechte Achse  $ON$  (s. Fig. 62). Die linken Seiten stellen nun die Momente der Trägheitskräfte des Kreisels dar, die auftreten, wenn die Kreiselachse  $OC$  ihre Richtung ändert. Damit letzteres geschieht, müssen äußere Kräfte auf den Kreisel wirken, deren Momente durch die Gleichungen (76) bestimmt werden. Der Drehsinn, bzw. das Vorzeichen der letzteren, ist dann entgegengesetzt dem der Momente der Trägheitskräfte. Wenn z. B.  $M_k$  positiv sein muß, um eine beabsichtigte Richtungsänderung der Kreiselachse zu erzwingen, so hat die Kreiselwirkung bezüglich der Achse  $OK$  ein negatives Moment, d. h. die Trägheitskräfte würden den Kreisel im entgegengesetzten Sinne um  $OK$  drehen.

Wohl die wichtigste unter den Kreiselbewegungen ist die sogenannte reguläre Präzession des Kreisels. Unter ihr wird die Bewegung verstanden, bei der die Kreiselachse (s. Fig. 61) einen Kreiskegel um  $OZ$  als dessen Symmetrieachse und zwar mit konstanter Winkelgeschwindigkeit beschreibt, während sich der Kreisel um  $OC$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$  dreht. In diesem Falle müßte  $\psi$  konstant sein, und ebenso  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}_0$ . Dann gehen die Gleichungen (76), weil  $\dot{\psi} = 0$  und  $\ddot{\psi} = 0$ , ferner  $\varphi = 0$ , über in

$$(77) \quad 0 = M_n, \quad \dot{\varphi}_0 (J \gamma - J_1 \dot{\varphi}_0 \cos \psi) \sin \psi = M_k.$$

$M_n = 0$  bedeutet, daß dann die äußeren Kräfte kein Moment bezüglich der Achse  $ON$  haben dürfen. Setzen wir ferner voraus, daß  $0 < \psi < \pi$  und  $\gamma$  so groß, daß der Klammerinhalt positiv wird, dann ist auch  $M_k$  positiv und daraus schließen wir wie vorher auf eine  $M_k$  entgegengesetzt drehende Wirkung der Trägheitskräfte, d. h. durch die Kreiselwirkung würde in diesem Falle der Kreisel so bewegt, daß  $OC$  sich der Achse  $OZ$  nähert, wenn nicht das Moment  $M_k$  dies verhinderte. Mit anderen Worten: Sucht man die Kreiselachse  $OC$  um eine beliebige Achse  $OZ$  zu drehen, so weicht der Kreisel infolge der Wirkung der Trägheitskräfte senkrecht zur Bewegungsrichtung derart aus, daß sich die Kreiselachse der Drehachse  $OZ$  nähert und zwar so, daß der Drehsinn beider Drehungen

gleichartig wird. Wenn insbesondere  $\psi = \frac{\pi}{2}$  ist, so wird  $M_k = J\gamma\dot{\varphi}_0$ ,

und dann ersieht man sofort, daß bei horizontaler Kreiselachse (s. Fig. 63) die Kreiselwirkung in der Aufrichtung der Achse  $OC$ , bzw. des Körpers  $K$ , in dem die Kreiselachse gelagert ist, besteht, wenn der Körper  $K$  um die Achse  $OZ$  im gleichen Sinne, wie der Kreisel um  $OC$ , also dem der Uhrzeigerbewegung gedreht wird. Das den Körper  $K$  aufrichtende Moment der Trägheitskräfte des Kreisels ist es, das diese Wirkung verursacht; es erweist sich, wie die zweite der Gleichungen (77) zeigt, um so größer, je größer einerseits das Trägheitsmoment  $J$  des Kreisels und andererseits seine Winkelgeschwindigkeit  $\gamma$  ist. Auf dieser

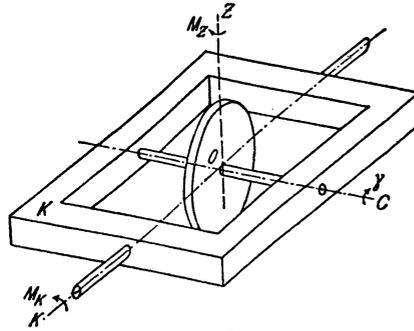


Fig. 63.

Wirkung beruhen eine ganze Reihe von Erscheinungen, die uns besonders an sich schnell um ihre Achse drehenden Rotationskörpern entgegneten. Sie sind teils dynamischer, teils phoronomischer Art.

Eine dynamische Wirkung hat das Moment der Trägheitskräfte z. B. bei den Rädern der Eisenbahnwagen, da es beim schnellen Fahren in Kurven einen ungünstigen Einfluß auf die beiden Kräfte ausübt, mit denen die beiden auf gemeinsamer Achse sitzenden Räder auf die Schienen drücken. Ferner bei den Kollergängen der Mühlen, wo es den Druck der Mahlsteine auf die Unterlage bzw. das Mahlgut vermehrt, wenn die Anordnung die übliche ist.

Phoronomischer Art dagegen sind die Wirkungen z. B. bei den Flugzeugen, wenn diese in Kurven fahren, also um Achsen von annähernd senkrechter Richtung zur Propellerachse sich drehen sollen. Dann bewirkt das Moment der Trägheitskräfte des Propellers und der mit ihm sich drehenden Maschinenteile ein Aufrichten der Propellerachse und mit dieser des Flugzeuges unerwünschter Art, weil damit das letztere aus seiner Fahrriichtung kommt. Ferner treten diese Wirkungen bei den Langgeschossen hervor, und zwar in doppelter Weise. Einerseits wird durch die Drehung des Geschosses um seine geometrische Achse ein so großer Widerstand gegen die Richtungsänderung dieser Achse bewirkt, daß der Luftwiderstand das Geschosß zwingt, die Achse tangential an die Bahn des Massenmittelpunktes des Geschosses zu legen. Andererseits bewirkt aber die hiermit verbundene Drehung des Geschosses um eine horizontale

Achse (senkrecht zur Ebene der Flugbahn) eine Drehung um eine Achse, die senkrecht zur Ebene durch die Bahntangente und der vorerwähnten Achse ist, also eine seitliche Ablenkung des Geschosses.

Von besonderer Wichtigkeit ist die stabilisierende Wirkung des Kreisels zur Herbeiführung stabilen Gleichgewichtes, bzw. zur Erhaltung der Lage von Körpern, die durch Kräfte aus dieser Lage gedrängt werden können. Diese Wirkung kann nur bei Kreiseln eintreten, die sich gegenüber dem zu stabilisierenden Körper in kardanischer Aufhängung befinden, also den Freiheitsgrad  $f=3$  hinsichtlich aller Drehungen haben. Der Nachweis der genannten Wirkung ist im allgemeinen sehr schwierig und umständlich; er wird aber recht einfach für den Sonderfall  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , der häufig vorkommt. Es gehen dann die Gleichungen (76) über in

$$J_1 \ddot{\varphi} - J \gamma \dot{\psi} = M_n, \quad J_1 \ddot{\psi} + J \gamma \dot{\varphi} = M_k;$$

es fällt sonach die Achse  $ON$  (s. Fig. 61) mit  $OS$  zusammen und  $M_n$  wird gleich  $M_z$ , d. i. dem Moment der äußeren Kräfte, die den zu stabilisierenden Körper zu drehen suchen, während  $M_k=0$  zu setzen ist, da der zu stabilisierende Körper voraussetzungsgemäß nur durch  $M_z$  beeinflußt werden soll. Die beiden Differentialgleichungen, in denen  $J \gamma$  als konstant anzusehen ist, werden sonach

$$J_1 \ddot{\varphi} - J \gamma \dot{\psi} = M_z, \quad J_1 \ddot{\psi} + J \gamma \dot{\varphi} = 0.$$

Aus der zweiten folgt durch Integration nach der Zeit

$$J_1 \dot{\psi} = -J \gamma \varphi + \text{Const},$$

wobei die Konstante  $= 0$  gesetzt werden kann, wenn für  $\varphi = \varphi_0 = 0$  auch  $\dot{\psi} = 0$  wird; man erhält sonach

$$J_1 \dot{\psi} = -J \gamma \varphi,$$

und wenn man den hieraus folgenden Wert für  $\dot{\psi}$  in die erste Differentialgleichung einsetzt,

$$(78) \quad J_1 \ddot{\varphi} = M_z + J \gamma \dot{\psi} = M_z - \frac{(J \gamma)^2}{J_1} \varphi.$$

Nimmt man  $M_z$  als unveränderlich an, so läßt sich die Differentialgleichung sofort integrieren, und zwar ist das allgemeine Integral

$$\varphi = \frac{J_1 M_z}{(J \gamma)^2} + A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t),$$

in dem zur Abkürzung  $\frac{J \gamma}{J_1} = \lambda$  gesetzt wurde. Setzt man fest, daß

für  $t = t_0 = 0$  auch  $\dot{\varphi} = 0$  sei, so wird  $B = 0$ , und daher

$$(79) \quad \varphi = \frac{J_1 M_z}{(J \gamma)^2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{J \gamma}{J_1} t \right) \right].$$

Dieser Ausdruck für  $\varphi$  zeigt, daß die Kreiselachse um die Achse  $OK$  unter dem Winkel  $\varphi_m = M_z J_1 : (J \gamma)^2$  hin und her pendelt und zwar zwischen den Grenzlagen 0 und  $2 \varphi_m$ . Dabei ist zu beachten, daß der Wert von  $\varphi_m$  sehr klein ausfällt, wenn wie gewöhnlich  $\gamma$  einen großen Wert besitzt. Zugleich findet aber eine Bewegung der Kreiselachse nach der Achse  $OZ$  hin statt, die durch die Differentialgleichung

$$J_1 \dot{\psi} = -J \gamma \varphi = -\frac{M_z J_1}{J \gamma} \left[ 1 - \cos(\lambda t) \right]$$

bestimmt wird; deren Integration ergibt

$$(80) \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{M_z J_1}{J \gamma} t + \frac{M_z J_1^2}{(J \gamma)^2} \sin(\lambda t)$$

wenn man benutzt, daß für  $t = t_0 = 0$   $\psi = \frac{\pi}{2}$  ist. Hieraus er-

kennt man, daß sich  $\psi$  nicht nur periodisch ändert, sondern auch stetig abnimmt, wie das zweite Glied auf der rechten Seite des Ausdruckes für  $\psi$  zeigt. Das bedeutet aber, daß die Kreiselachse nicht

senkrecht zu  $OZ$  bleibt, also die Voraussetzung  $\psi = \frac{\pi}{2}$  nur für den

Anfang der Bewegung und auch nur näherungsweise erfüllt ist. Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Aufrichtung der Kreiselachse sich jedoch fortsetzt, bis sie mit  $OZ$  zusammenfällt und dann die Kreiselwirkung erlischt.

Die stabilisierende Wirkung des Kreisels wird, meist in Verbindung mit Einrichtungen zur Dämpfung der auftretenden Schwingungen, ebenfalls viel angewendet, so z. B. bei dem Schiffskreisel und den Wagen der Einschienenbahn, ferner bei dem Richtkreisel der Torpedos und den Flugzeugstabilisatoren, endlich bei dem Kreiselkompaß und dem gyroskopischen Horizont. Auf diese Anwendungen hier näher einzugehen, verbietet die dem Umfange dieses Buches gesetzte Grenze; es sei deshalb auf das ausführliche Werk von F. Klein und A. Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels (Leipzig, Verlag von B. G. Teubner 1910) und die inhaltsreiche Monographie von H. Lorenz: Technische Anwendungen der Kreiselbewegung (Erweiterter Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1919, im Verlage des letzteren) verwiesen.

#### 14. Kap. Dynamik beweglicher Verbindungen starrer Körper.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Aufgabe, die Differentialgleichungen einer beweglichen Verbindung starrer Körper, die unter dem Einfluß äußerer Kräfte steht, aufzustellen, nur dadurch gelöst werden kann, daß wir die Differentialgleichungen der Bewegungen der einzelnen Körper, aus denen sich die Verbindung zusammensetzt, ermitteln. Das ist in ähnlicher Weise möglich, wie bei dem Gleichgewicht von Kräften an beweglichen Verbindungen starrer Körper (vgl. Bd. II, 26. Kap.), nämlich durch Einführung innerer Kräfte von solcher Größe und Richtung, daß jeder Körper unter ihrem Einfluß und des der auf ihn wirkenden äußeren Kräfte als freier Körper die Bewegung ausführt, die er als Teil der Verbindung an sich vollziehen würde. Ja, das Prinzip von D'Alembert ermöglicht es sogar, die ganze Aufgabe als eine des Gleichgewichtes von Kräften aufzufassen und durchzuführen, also die im 24. Kapitel des II. Bandes aufgestellten Sätze unmittelbar anzuwenden, weil es sich hier ja um starre Körper handelt. Die so erhaltenen Differentialgleichungen in Verbindung mit den Bedingungsgleichungen der Bewegungen der Verbindung bestimmen sowohl die Koordinaten als Funktionen der Zeit, als auch die inneren Kräfte. Da die einzelnen Körper starr sind, so gilt für ihre Bewegung das Prinzip der Bewegung des Massenmittelpunktes und der Flächensatz; damit lassen sich unter Umständen unmittelbar brauchbare Integralgleichungen gewinnen. Das Prinzip der Wucht dagegen liefert nur ein Integral, und zwar das für die gleichzeitige Bewegung der Körper gültige, da die Arbeit der inneren Kräfte Null sein muß, also die Gesamtenergie aller sich bewegenden Körper sich um einen Betrag ändert, der gleich der Arbeit der äußeren Kräfte bei der Bewegung ist. Bei dem Auftreten von Reibungswiderständen, die in der üblichen Weise, nämlich abhängig von den inneren Kräften in Rechnung gestellt werden, ist es jedoch unumgänglich, auf die ursprünglichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückzugehen und aus ihnen die inneren Kräfte zu eliminieren, wie später an Beispielen erläutert werden soll.

Die Berührung bzw. bewegliche Verbindung der starren Körper einer Verbindung kann in Punkten, Linien oder Flächen erfolgen; dementsprechend müssen die inneren Kräfte als Punkt-, Linien- oder Flächenkräfte eingeführt werden, und zwar stets als Normalkräfte, wie auch im Falle des Gleichgewichtes (vgl. II. Bd., S. 189 u. ff.). Bei Berücksichtigung der Reibung sind die entsprechenden Kräfte als äußere zu behandeln.

Beispiele:

1. Die Fallmaschine von Atwood besteht in der Hauptsache aus einer Rolle mit horizontaler Achse, über die eine Schnur gelegt ist, an deren Enden schwere Körper befestigt sind (s. Fig. 64). Letztere führen aus der Ruhelage lotrechte Schiebungen aus, und können daher durch ihre Massenmittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  ersetzt werden, in denen ihre Lasten  $L_1 = m_1 g$  und  $L_2 = m_2 g$  angreifen. Wir betrachten hierbei die Masse der Schnur als so gering, daß ihr Einfluß auf die Bewegung vernachlässigt werden kann. Wir denken uns nun die Bewegungen der Rolle und der Lastkörper zerlegt in die Drehung der Rolle und in die beiden Schiebungen der Lastkörper bzw. der geradlinigen Bewegungen der Punkte  $M_1$  und  $M_2$ , indem wir die Fäden  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  durch deren Spannkraften  $S_1$  bzw.  $S_2$  ersetzen, die sich an ersteren das Gleichgewicht halten, und daher in  $A_1$  und  $B_1$  bzw. in  $A_2$  und  $B_2$  entgegengesetzt gleich sein müssen. Dann finden sich als Differentialgleichungen der Bewegungen von  $M_1$  bzw.  $M_2$

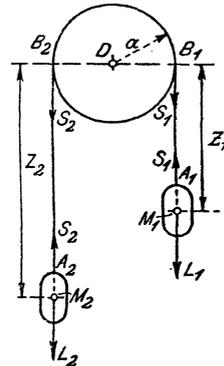


Fig. 64.

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = L_1 - S_1, \quad m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = L_2 - S_2,$$

in denen  $\overline{B_1 M_1} = z_1$  bzw.  $\overline{B_2 M_2} = z_2$  die Abstände der Punkte  $M_1$  bzw.  $M_2$  von einer Horizontalen durch die Drehachse  $D$  der Rolle bezeichnen. An der Rolle aber wirken die Spannkraften der Fäden im entgegengesetzten Sinne, wie an den Lastkörpern; es findet sich sonach als Differentialgleichung der Drehung der Rolle nach (60)

$$J \frac{d\omega}{dt} = (S_1 - S_2) a,$$

falls  $J$  das Trägheitsmoment der Rolle und  $\omega$  ihre Winkelgeschwindigkeit bezeichnet und deren Massenmittelpunkt in der Drehachse liegt. Zu diesen drei Differentialgleichungen tritt noch die Bedingungsgleichung für die Bewegung der Punkte  $M_1$  und  $M_2$ , welche die Unveränderlichkeit der Länge des Fadens ausdrückt und in der Form

$$z_1 + z_2 + a\pi = \text{const} = l$$

geschrieben werden kann, sowie die weitere, daß der Faden auf der Rolle nicht gleitet, also die Umfangsgeschwindigkeit der Rolle gleich der des Fadens ist, d. i. die Beziehung

$$a\omega = \frac{dz_1}{dt} = \dot{z}_1.$$

Eliminieren wir aus den drei Differentialgleichungen zunächst  $S_1$  und  $S_2$ , so erhalten wir

$$J \frac{d\omega}{dt} = a \{L_1 - L_2 - (m_1 \ddot{z}_1 - m_2 \ddot{z}_2)\}.$$

und da

$$\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1 = -a \frac{d\omega}{dt},$$

so folgt

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a(m_1 - m_2)}{J + (m_1 + m_2)a^2} \cdot g = \text{const},$$

d. h. die Drehung ist eine gleichmäßig beschleunigte, falls  $m_1 > m_2$ . Ebenso sind die Schiebungen der Lastkörper bzw. die Bewegungen der Massenmittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  geradlinige gleichmäßig beschleunigte. Da diese besonderen Bewegungsformen bereits in der Bewegungslehre (Bd. I) behandelt wurden, braucht hier nicht näher auf sie eingegangen zu werden.

Von Interesse ist die sog. Zapfenstützkraft  $Z = S_1 + S_2$ , die die Rollenachse halten müßte, falls sie frei beweglich wäre. Es findet sich nämlich nach entsprechender Umformung

$$Z = S_1 + S_2 = (L_1 + L_2) \frac{J}{J + (m_1 + m_2) a^2} < L_1 + L_2,$$

d. h.  $Z$  kleiner als die Resultierende der beiden Lastkräfte. Würde man sonach die Rolle am Ende des Balkens einer gleicharmigen Hebelwaage anbringen, und am anderen Ende die Last  $L_1 + L_2$ , so müßte sich letzteres senken, sobald die Bewegung der Lastkörper beginnt, weil kein Gleichgewicht besteht.

Die Berücksichtigung der Zapfenreibung der Rolle ist nicht schwierig. Das Widerstandsmoment  $M_w$  der Zapfenreibung kann in der Form  $M_w = \mu_z Z r$  geschrieben werden (s. Bd. II, S. 271), worin  $Z$  die den Zapfen belastende Kraft,  $r$  den Zapfenradius und  $\mu_z$  die konstante Zapfenreibungsziffer bezeichnet. Dieses Moment wäre noch dem der Spannkraft zuzufügen, also die Differentialgleichung der Rollendrehung in der Gestalt

$$J \frac{d\omega}{dt} = (S_1 - S_2) a - \mu_z r (S_1 + S_2)$$

zu schreiben, wenn man dabei den Einfluß der Rollenschwere auf die Reibung als sehr klein vernachlässigen darf. Die anderen Gleichungen bleiben ungeändert, ebenso das Ergebnis, daß die Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist.

2. Ein Aufzug werde durch ein Seil gehoben, das sich auf eine Seiltrommel vom Radius  $a$  aufwickelt (s. Fig. 65). Es soll die Bewegung der Trommel unter der Voraussetzung ermittelt werden, daß die Trommel durch ein konstantes Moment  $M_0 = U r$  gedreht und die Veränderlichkeit der Seillast berücksichtigt wird. Wir zerlegen die Verbindung in die Seiltrommel, das Seilstück  $\overline{BA}$  und den Lastkörper und stellen die Differentialgleichungen für sie auf, indem wir in  $A$  die Seilspannkraft  $S_A$ , in  $B$  die Kraft  $S_B$  anbringen. Bezeichnet  $z = \overline{M_0 M}$  den Weg des Massenmittelpunktes  $M$  der Last in der Zeit  $t$ ,  $l = \max(z)$  den gesamten Weg,  $v = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$  die Geschwindigkeit von Last und Seil zur Zeit  $t$ ,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung und  $J$  das Trägheitsmoment der Trommel zur Zeit  $t$ , endlich  $s$  die Masse der laufenden Einheit des Seiles und  $M$  die der Last  $L = Mg$ , so werden die drei Differentialgleichungen nach dem früheren:

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = M_0 - S_B \cdot a, \quad (l - z) s \frac{dv}{dt} = S_B - S_A - gs(l - z), \quad M \frac{dv}{dt} = S_A - Mg.$$

Zu ihnen tritt die Bedingungsungleichung  $v = a\omega$  für die Bewegung der Trommel

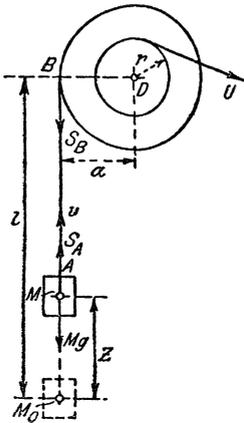


Fig. 65.

und für  $J$  der der Ausdruck  $J = J_0 + z \varepsilon a^2$ , denn das aufgewickelte Seilstück vermehrt das Trägheitsmoment  $J_0$  der Trommel um  $z \varepsilon a^2$ . Ersetzt man in der ersten Gleichung  $J$  durch vorstehenden Ausdruck, führt die Differentiation nach  $t$  aus, und eliminiert  $S_A$  und  $S_B$  aus den drei Gleichungen, so erhält man unter Benutzung von  $v = \frac{dz}{dt} = a \cdot \omega$  die Differentialgleichung

$$[J_0 + \{l\varepsilon + M\} a^2] \frac{d^2 z}{dt^2} + \varepsilon a^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = M_0 a - a^2 \{ \varepsilon (l - z) + m \} g.$$

Ein Integral dieser Gleichung liefert das Prinzip der Wucht, nämlich

$$W = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \varepsilon (l - z) v^2 + \frac{1}{2} (J_0 + \varepsilon z a^2) \omega^2 = A + W_0;$$

hierin ist  $W_0 = 0$ , falls die Bewegung aus der Ruhelage beginnt, und ferner

$$A = \int M_0 d\psi - Mgz - \int_{z=0}^{z=z} \varepsilon (l - z) g dz = \frac{1}{a} M_0 z - Mgz - \varepsilon g z \left( l - \frac{z}{2} \right).$$

Aus dieser Gleichung kann man mittels  $v = a\omega$  jeden Wert von  $v$  bzw.  $\omega$  als Funktion von  $z$  berechnen. So erhält man z. B. das  $\max(v)$  für  $z = l$  zu

$$\max(v) = \sqrt{a(2M_0 - 2Mga - \varepsilon g l a)} : \sqrt{Ma^2 + J_0 + \varepsilon l a^2};$$

ferner läßt sich dann  $S_A$  berechnen, usf.

3. Es soll die Bewegung eines Wagens bestimmt werden, dessen vier Räder auf horizontalem Gleise rollen und der einer konstanten Zugkraft  $K$  unterliegt, wobei die Masse der Räder, sowie die Widerstände der Luft, der Zapfen- und der rollenden Reibung zu berücksichtigen sind. Zu dem Ende zerlegen wir die Verbindung in den Wagenkörper, dessen Masse  $M$  sei, und die vier Räder, die vollständig gleich seien und die Masse  $m$  bzw. das Trägheitsmoment  $J_0$  bezüglich der Radachse haben mögen. Für die Schiebung des Wagenkörpers (einschließlich der Räder) besteht dann die Differentialgleichung

$$(M + 4m) \frac{dv}{dt} = K - 4U - W,$$

in der  $v$  die Geschwindigkeit des Wagens,  $U$  die Kraft am Umfange des Rades, die es zu rollen zwingt, und  $W$  den Luftwiderstand bezeichnet. Hierbei denken wir uns die Bewegung eines jeden Rades in eine Schiebung mit  $v$  und eine Drehung um die Radachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zerlegt; zwischen  $v$  und  $\omega$  besteht dann die Beziehung  $v = r\omega$ , in der  $r$  den Radius des Rades bedeutet (s. Fig. 66).

Die Differentialgleichung für die Drehung des  $k$ -ten Rades um seine Achse aber wird, falls  $J_0$  das Trägheitsmoment bezeichnet,

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = Ur - \mu_z Z_k \rho - (Z_k + mg) f;$$

hierin ist  $Z_k$  die Zapfendruckkraft ( $k = 1, 2, 3, 4$ ),  $\rho$  der Zapfenhalbmesser und  $\mu_z$  der Zapfenreibungskoeffizient, endlich  $f$  die Reibungsziffer der rollenden Bewegung (s. Bd. II, S. 279). Eliminiert man  $U$  aus beiden Differential-

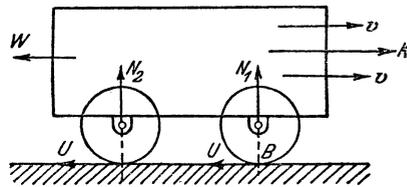


Fig. 66.

gleichungen und ersetzt  $\omega$  durch  $v:r$ , so erhält man unter Berücksichtigung des Umstandes, daß  $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = Mg$ , nämlich der Last des Wagenkörpers ist, als die gesuchte Differentialgleichung der Bewegung des Wagens

$$\frac{1}{r} [4J_0 + (M + 4m)r^2] \frac{dv}{dt} = (K - W)r - \mu_2 g M - (M + 4m)gf;$$

in ihr ist der Luftwiderstand  $W = f(v)$  eine Funktion der Geschwindigkeit. Kann man z. B.  $W = \alpha \cdot v^2$  setzen, so erhält vorstehende Differentialgleichung die Form

$$\frac{\beta}{2r} \frac{dv^2}{du} + r\alpha v^2 = \gamma = Kr - \mu_2 g M - (M + 4m)gf,$$

in der  $v = \frac{du}{dt}$  und  $\beta = 4J_0 + (M + 4m)r^2$  zu nehmen ist. Das Integral derselben wird

$$v^2 = Ce^{-\kappa u} + \lambda,$$

worin  $\kappa = \frac{2\alpha r}{\beta}$ ,  $\lambda = \frac{\gamma}{\alpha r}$  und  $C$  die Integrationskonstante ist; letztere bestimmt sich aus der Bedingung, daß bei Beginn der Bewegung ( $u = u_0 = 0$ ) die Geschwindigkeit  $v_0$  sein soll, womit  $C = v_0^2 - \lambda$  gefunden wird. Wäre  $K = 0$ , so erhielte man aus der Gleichung für  $v^2$  den Auslauf  $u$  des Wagens, dessen Bewegung mit  $v_0$  beginnt; man hat in ihr  $v = 0$  zu setzen und findet dann  $u = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 1 - \frac{v_0^2 \alpha r}{\gamma} \right)$ .

4. Mit einer lotrechten Drehachse  $D$  (s. Fig. 67) ist eine starre Kurve  $c$  in einer Ebene durch die Achse fest verbunden. Auf dieser Kurve bewegt

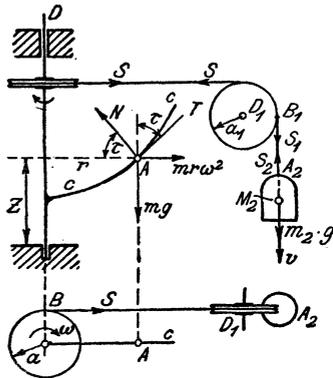


Fig. 67.

Nach dem Flächensatz erhalten wir zunächst für die Drehung des Achsenkörpers die Differentialgleichung

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = S \cdot a,$$

in der  $J = J_0 + mr^2$  das veränderliche Trägheitsmoment des Achsenkörpers einschließlich der Masse des Punktes  $A$  und  $a$  der Halbmesser der Schnurscheibe ist. Für die Drehung der Rolle wird die entsprechende Differentialgleichung

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (S_1 - S) a_1,$$

falls  $J_1$  das Trägheitsmoment und  $\omega_1$  die Winkelgeschwindigkeit der Rolle bezeichnet. Endlich bestimmt die Gleichung

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = m_2 g - S_2$$

die Bewegung des Lastkörpers. Zwischen den drei Bewegungen bestehen die Beziehungen  $v_2 = a_1 \omega_1 = a \omega$ , falls der Faden als undehnbar angesehen wird. Deren Benutzung führt nach Elimination von  $S$  und  $S_1 = S_2$  aus den drei Differentialgleichungen auf die eine

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( J_0 + m r^2 + J_1 \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 + m_2 a^2 \right) \omega \right] = m_2 g a,$$

deren Integration nach  $t$  unmittelbar die Gleichung

$$\left( J_0 + m r^2 + J_1 \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 + m_2 a^2 \right) \omega = m_2 g a t + C$$

liefert; hierin ist  $C = 0$  zu setzen, falls die Bewegung aus der Ruhelage ( $\omega_0 = 0$ ) zur Zeit  $t_0 = 0$  beginnt. In dieser Gleichung sind zwei Unbekannte, nämlich  $r$  und  $\omega$  vorhanden; es bedarf daher noch einer weiteren Beziehung, und zwar der Berücksichtigung der gebundenen Bewegung des materiellen Punktes  $A$  auf der rotierenden Kurve  $c$ , deren Gleichung durch die Beziehung  $z = f(r)$  gegeben sein mag. Der Punkt  $A$  unterliegt bei seiner relativen Bewegung auf  $c$  außer seiner Schwere  $mg$  noch der Zentrifugalkraft  $m r \omega^2$ , die senkrecht zur Drehachse nach außen gerichtet wirkt. Führen wir, um diese Bewegung zu einer freien zu machen, die Kurvenstützkraft  $N$  senkrecht zur Kurve ein, so ergeben sich für die freie Bewegung des Punktes  $A$  sofort die beiden Gleichungen

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m r \omega^2 - N \sin \tau, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -m g + N \cos \tau.$$

Die Elimination von  $N$  hieraus liefert unter Benutzung der Beziehung  $\tan \tau = \frac{dz}{dr} = f'(r)$  die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \omega^2 + \left( \frac{d^2 z}{dt^2} + g \right) f'(r) = 0.$$

die zusammen mit der Kurvengleichung  $z = f(r)$  eine weitere Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen  $r$ ,  $\omega$  und  $t$  ergibt, wenn in ihr, wie erforderlich

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f'(r) \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} + f''(r) \left( \frac{dr}{dt} \right)^2$$

eingesetzt wird. Und sie führt auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades in  $r$  und  $t$ , wenn man in ihr  $\omega$  mittels obigen Integrales durch  $\omega = (m_2 g a t + C) : \left( J_0 + m r^2 + J_1 \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 + m_2 a^2 \right)$  ersetzt.

Die Integration dieser Differentialgleichung wird im allgemeinen sehr verwickelt und führt selbst in dem einfachsten aller Fälle, nämlich dem einer zur Drehachse senkrechten Geraden ( $z = 0$ ) zu der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r \left( \frac{\alpha t}{\beta + r^2} \right)^2,$$

die unmittelbar nicht integriert werden kann.

Nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Schwingungen läßt sich die bezügliche Differentialgleichung integrieren, was für die Regulierung mittels Zentrifugalregulatoren von Wert ist.

5. Eine Schraubenspindel drehe sich reibungsfrei um ihre lotrecht stehende Achse  $DD$  (s. Fig. 68). Auf ihr bewege sich ebenfalls reibungsfrei eine Schraubenmutter  $K_1$  und zwar infolge ihrer Schwere  $L_1 = m_1 g$ . Es sind die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  der Drehungen beider Körper und die Schiebengeschwindigkeit  $v_1$  der Schraubenmutter gegen den ruhenden Bezugskörper zu ermitteln, falls  $r$  der mittlere Halbmesser der Schraubenfläche und  $\alpha$  der Steigungswinkel der mittleren Schraubenlinie ist. Diese Aufgabe läßt sich lösen, ohne auf die Differentialgleichungen der Bewegungen der einzelnen Körper

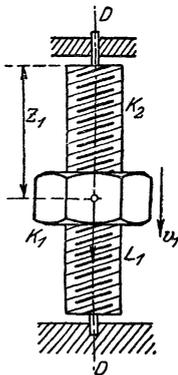


Fig. 68.

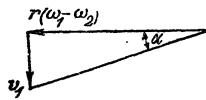


Fig. 68 a.

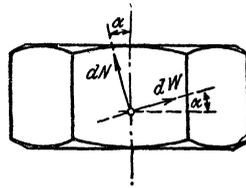


Fig. 68 b.

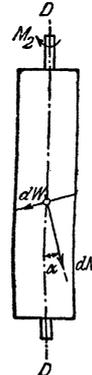


Fig. 68 c.

zurückgehen zu müssen. Die beiden Körper sind starr und drehen sich um dieselbe Achse; für diese Drehungen gilt der Flächensatz und gibt sofort die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} (J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2) = M_D = 0,$$

in der  $J_1$  und  $J_2$  die Trägheitsmomente der Körper für  $DD$  sind, und  $M_D$  das Moment der äußeren Kräfte, das hier gleich Null ist, da nur die Schwerkraft wirksam ist. Ferner gilt das Prinzip der Wucht, das auf die Gleichung

$$J_1 \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} = L_1 (z_1 - z_{01}) + \text{Const}$$

führt; in dieser wird die Konstante zu Null, falls die Bewegung aus der Ruhelage beginnt. Zwischen den Bewegungen besteht aber ein Zusammenhang, der durch die Berührung beider Körper in der Schraubenfläche bedingt wird. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ , mit der sich  $K_1$  relativ zur Spindel  $K_2$  dreht, ist  $\omega_1 - \omega_2$ ; daher hat jeder Punkt der Mutter auf der mittleren Schraubenlinie die Umfangsgeschwindigkeit  $r(\omega_1 - \omega_2)$ , die mit  $v_1$  zusammengesetzt die Schraubengeschwindigkeit der genannten Punkte ergibt (s. Fig. 68 a). Da diese letztere die Richtung der Tangente an die mittlere Schraubenlinie hat, so erkennt man sofort die Richtigkeit der Beziehung

$$v_1 = r (\omega_1 - \omega_2) \tan \alpha,$$

welche  $v_1$  bestimmt, wenn  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bekannt sind. Diese findet man aber aus den beiden Integralen, die der Flächensatz bzw. das Prinzip der Erhaltung der Flächen, nämlich

$$J_1 \omega_1 = - J_2 \omega_2 = \text{Const}$$

und das Prinzip der Wucht liefern. Nehmen wir den Beginn der Bewegung aus der Ruhelage ( $\omega_{01} = \omega_{02} = 0$ ) an, so werden beide Konstanten zu Null, und man erhält

$$\omega_1 = J_2 \sqrt{2m_1 g (z_1 - z_{01})} : \sqrt{J_1 J_2^2 + J_1^2 J_2 + m_1 r^3 (J_1 + J_2)^2 \tan^2 \alpha};$$

$$\omega_2 = - \frac{J_1}{J_2} \omega_1; \quad v_1 = r (\omega_1 - \omega_2) \tan \alpha$$

als Funktionen von  $z_1 - z_{01}$ . Drehungen wie Schiebung sind folglich gleichmäßig beschleunigt und die Mutter dreht sich im entgegengesetzten Sinne, wie die Spindel. Eine nochmalige Integration führt für  $z_1$  auf die Gleichung der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, nämlich  $z_1 = z_{01} + at + \frac{1}{2} bt^2$ , in der  $a$  und  $b$  konstant sind.

Soll die Schrauben- und Zapfenreibung berücksichtigt werden, so ist es notwendig, auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückzugehen, die sich für die einzelnen Körper ergeben. Zu dem Ende führen wir den Druck  $\nu$  in der Schraubenfläche ein, in der die Berührung von Mutter und Spindel stattfindet, und als innere Kräfte die zur Schraubenfläche normalen Druckkräfte  $dN = \nu dF$ , die im entgegengesetzten Sinne auf Mutter und Spindel wirken. Das letztere gilt auch von den Reibungskräften  $dW = \mu dN$ , die in der Tangentialebene der Schraubenfläche angreifen (s. Fig. 68 b und 68 c). Dann finden wir für die Schiebung und Drehung der Schraubenmutter sofort die Differentialgleichungen

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} - \int (dN \cos \alpha + dW \sin \alpha) + m_1 g = 0$$

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \int r (dN \sin \alpha - dW \cos \alpha)$$

und für die Spindel

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = - \int r (dN \sin \alpha - dW \cos \alpha) - M_z,$$

falls  $M_z$  das Moment der Zapfenreibung bezeichnet. Führen wir hierin  $dW = \mu dN$  ein und setzen  $v_1 = r (\omega_1 - \omega_2) \tan \alpha$ , so erhalten wir nach Elimination von  $\int dN$  die beiden Gleichungen

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = m_1 \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} r \left[ g + r \tan \alpha \left( \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{d\omega_2}{dt} \right) \right],$$

$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = - m_1 \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} r \left[ g + r \tan \alpha \left( \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{d\omega_2}{dt} \right) \right] - M_z,$$

in denen die Reibungsziffer  $\mu$  als konstant vorausgesetzt wird. Sie liefern, wie leicht ersichtlich, konstante Ausdrücke für die beiden Winkelbeschleunigungen  $\frac{d\omega_1}{dt}$

und  $\frac{d\omega_2}{dt}$ ; die Drehungen sind daher gleichmäßig beschleunigt.

6. Ist die Verbindung der Körper zwangsläufig beweglich wie bei allen Maschinen, also ihr Freiheitsgrad = 1, so erhalten wir eine einzige Differential-

gleichung, an deren Stelle ohne weiteres das Integral treten kann, welches das Prinzip der Wucht liefert, falls die Reibung nicht berücksichtigt zu werden braucht. Um die Differentialgleichung zu ermitteln, führen wir an den Verbindungsstellen Zwangskräfte ein, durch die wir die Verbindung in ihre Einzelkörper auflösen, und stellen für diese die Differentialgleichungen in der früheren

Weise auf; die Elimination der Zwangskräfte aus letzteren in Verbindung mit den Bedingungsgleichungen der Bewegung ergibt die gesuchte eine Differentialgleichung.

Als Beispiel werde das ebene Kurbelgetriebe (s. Fig. 69) behandelt, das aus vier starren Körpern besteht, die paarweise durch Gelenke mit parallelen Achsen verbunden sind. Die beweglichen Körper seien  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$ , auf die äußere Kräfte wirken, deren Resultierende  $P_k$ , im Punkte  $A_k$  ( $k=1, 2, 3$ ), angreifen möge. Die Zwangskräfte  $S_1$  und  $S_2'$  in  $A_{12}$

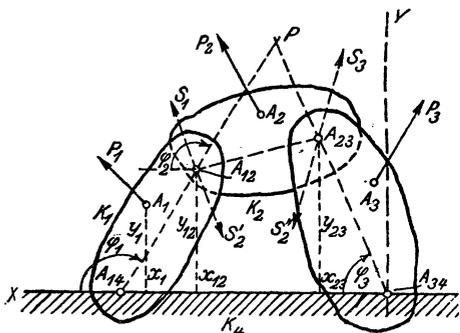


Fig. 69.

bzw.  $S_2''$  und  $S_3$  sind einander entgegengesetzt gleich zu wählen, also  $S_1 = S_2'$  und  $S_2'' = S_3$ , da sie in  $A_{12}$  bzw.  $A_{23}$  im Gleichgewicht sein müssen. Für die Körper  $K_1$  und  $K_3$  genügt dann je eine Differentialgleichung, da sie sich um ruhende Achsen drehen; diese werden nach dem Prinzip von D'Alembert

$$J_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = Y_1 (a - x_1) - X_1 y_1 + S_{1y} (a - x_{12}) - S_{1x} y_{12},$$

$$J_3 \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} = Y_3 x_3 - X_3 y_3 + S_{3y} x_{23} - S_{3x} y_{23};$$

in ihnen bedeuten  $J_1$  bzw.  $J_3$  die Trägheitsmomente von  $K_1$  bzw.  $K_3$ ,  $\varphi_1$  und  $\varphi_3$  die aus der Figur ersichtlichen Winkel,  $x_1 y_1$  die Koordinaten von  $A_1$ ,  $x_3 y_3$  die von  $A_3$ ,  $x_{12} y_{12}$  die von  $A_{12}$ ,  $x_{23} y_{23}$  die von  $A_{23}$ , endlich  $X_1 Y_1$ ,  $X_2 Y_2$ ,  $S_{1x}$ ,  $S_{1y}$ ,  $S_{3x}$ ,  $S_{3y}$  die Komponenten der Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $S_1$ ,  $S_3$ , während  $A_{14} A_{34} = a$  gesetzt werden. Für den Körper  $K_2$  dagegen, dessen Bewegung eine freie wird, erhalten wir dagegen drei Gleichungen, nämlich die folgenden:

$$m_2 \frac{d^2 x_{12}}{dt^2} = X_2 - S_{2x}' - S_{2x}''; \quad m_2 \frac{d^2 y_{12}}{dt^2} = Y_2 - S_{2y}' - S_{2y}'';$$

$$J_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = Y_2 (x_2 - x_{12}) - X_2 (y_2 - y_{12}) + S_{2y}'' (x_{23} - x_{12}) + S_{2x}'' (y_{23} - y_{12}).$$

Diese drei Gleichungen drücken das Gleichgewicht der inneren, äußeren und Trägheitskräfte am Körper  $K_2$  aus, falls seine momentane Bewegung aus einer Schiebung mit dem Punkte  $A_{12}$  und einer Drehung um ihn zusammengesetzt wird. Eliminiert man die vier Komponenten  $S_{1x} = S_{2x}'$ ,  $S_{1y} = S_{2y}'$ ,  $S_{2x}'' = S_{3x}$ ,  $S_{2y}'' = S_{3y}$  aus den fünf Gleichungen, so erhält man die gesuchte Differentialgleichung, in der sämtliche Koordinaten, sowie die Winkel  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  mittels der Abmessungen und der Bewegungsbedingungen durch  $\varphi_1$  als einziger abhängiger Veränderlichen ausgedrückt werden können und deren Integration  $\varphi_1$



und damit die Wucht der bewegten Massen, d. i. der Ausdruck

$$W = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{2P} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

in der Form  $W = \frac{1}{2} \Phi(\varphi_1)$  darstellbar, in welcher  $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$  zu setzen ist. Denn es besteht die phoronomische Beziehung  $v = r_1 \omega_1 = \overline{PA_{12}} \cdot \omega_2$ , in der

$$\overline{PA_{12}} = l_2 \cos \varphi_2 : \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

einzuführen ist, wie aus dem  $\triangle PA_{12} A_{23}$  folgt, während  $\varphi_2$  mittels der Relation  $r_1 \sin \varphi_1 = l_2 \sin \varphi_2$  eliminiert werden kann. Endlich findet man mittels der im II. Bande (S. 51) entwickelten Beziehung (38) das Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} J_{2P} &= J_{12} + m_2 \cdot \overline{PA_{12}}^2 - 2 m_2 \overline{PA_{12}} \cdot e_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &= J_{12} + m_2 \overline{PA_{12}}^2 - 2 m_2 l_2 e_2 \cos \varphi_2, \end{aligned}$$

worin  $e = \overline{A_{12} M_2}$  die Entfernung des Massenmittelpunktes  $M_2$  des Körpers  $K_2$  (der Pleuelstange) vom Zapfenmittel  $A_{12}$  und  $J_{12}$  das Trägheitsmoment von  $K_2$  bezüglich der Achse  $A_{12}$  bedeutet. Die Funktion  $\Phi$  enthält sonach, da sich  $\varphi_2$  durch  $\varphi_1$  ersetzen läßt, außer Konstanten nur noch die unabhängig Veränderliche  $\varphi_1$ . Bezüglich der Arbeit  $A$  ist zu beachten, daß, von der Arbeit der Schwere abgesehen, hier  $P_1$  durch die (meist konstante) Widerstandskraft an der Kurbel  $K_1$  zu ersetzen ist, deren Moment bezüglich  $A_{12}$  —  $M_1$  sei, während  $P_2 = 0$  und  $P_3$  die Kraft darstellt, mit welcher der Kolben im Zylinder durch die Dampfspannung beansprucht wird. Wir erhalten daher

$$A = - \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_1} M_1 d\varphi_1 + \int_{u_3=0}^{u_3} P_3 du_3,$$

in welchem Ausdruck sowohl  $M_1$ , als  $P_3$ , als  $u_3$  bekannte Funktionen des Drehwinkels  $\varphi_1$  sind. Aus der Gleichung

$$W - W_0 = A$$

folgt sonach  $\omega_1$  als Funktion des Drehwinkels  $\varphi_1$  und folglich auch

$$v_2 = \overline{PA_{23}} \cdot \omega_2 = r_1 \omega_1 \cdot (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \cos \varphi_1.$$

Dagegen erfordert die Ermittlung von  $\varphi_1$  als Funktion von  $t$  eine weitere Integration und zwar der Differentialgleichung

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(A + W_0)}{\Phi(\varphi_1)}},$$

die auf das Integral

$$t = \pm \int_0^{\varphi_1} \sqrt{\frac{\Phi(\varphi_1)}{2(A + W_0)}} d\varphi_1$$

führt; dieses kann nur durch Reihenentwicklung oder näherungsweise ermittelt werden, weshalb nicht weiter darauf eingegangen, sondern auf den graphischen Weg zur Lösung dieser Aufgabe verwiesen werden soll.

## 15. Kap. Theorie des Stoßes.

Unter dem Stoß zweier fester Körper versteht man den Vorgang, der sich bei dem Zusammentreffen der Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten vollzieht. Dieser Vorgang ist im allgemeinen recht verwickelt, denn er wird sowohl durch das elastische, als das plastische Verhalten der Stoffe, aus denen die Körper bestehen, wesentlich beeinflusst. Eine strengere Theorie desselben müßte sich folglich auf die Theorie der Elastizität und der plastischen Veränderungen fester Körper stützen und daher in der Dynamik starrer Körper ausgeschlossen bleiben. Dagegen läßt sich unter Verzicht auf die Ermittlung der Deformationsvorgänge an den sich stoßenden Körpern eine einfache Theorie des Stoßes aufstellen, die nur einer Erfahrungskonstanten bedarf und mit einer gewissen Annäherung wenigstens die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoß zu ermitteln gestattet; diese reicht für eine ganze Reihe von technischen Anwendungen aus.

Bei Aufstellung dieser Theorie machen wir von der Annahme Gebrauch, daß der Stoßvorgang — wie zumeist der Fall — sich in so kurzer Zeit abspielt, daß innerhalb derselben der Einfluß äußerer Kräfte auf die Bewegungen der sich stoßenden Körper vernachlässigt werden kann. Es ist dann der Stoßvorgang von dem elastischen und plastischen Verhalten der Körperstoffe abgesehen wesentlich abhängig nur von der Bewegung der Körper und ihrem Geschwindigkeitszustande unmittelbar vor dem Stoß. Diese Abhängigkeit ist die Veranlassung zur Einteilung der Stoßvorgänge in vier verschiedene Gruppen, deren mathematische Behandlung aber auf einen einzigen dieser Vorgänge zurückführt. Diesem wenden wir uns zuerst zu und benutzen, daß das hierbei im allgemeinen über den Stoßvorgang Gesagte sich über alle vier Gruppen erstreckt.

### 1. Der gerade zentrische Stoß.

Wir setzen voraus, daß die beiden sich stoßenden Körper  $K_1$  und  $K_2$  (s. Fig. 71, S. 140) unmittelbar vor dem Stoß eine Schiebung in der gleichen Richtung vollziehen und die Schiebungsgeschwindigkeiten in dem Augenblick des Beginnes der Berührung  $v_1$  bzw.  $v_2$  seien, wobei  $v_1 > v_2$ . Die Oberflächen beider Körper berühren sich in  $B$  und es sei  $nn$  die gemeinsame Normale beider Flächen in  $B$ ; letztere heißt die Stoßnormale. Fällt nun die Schiebungsrichtung in die Stoßnormale, sind also die Schiebungsgeschwindigkeiten letzterer parallel, so nennt man den Stoß einen geraden, in jedem anderen Falle einen schiefen. Liegen ferner die Massenmittelpunkte

beider Körper in der Stoßnormalen, so heißt der Stoß zentrisch, in jedem anderen Falle exzentrisch. Der gerade zentrische Stoß ist es, auf den sich die anderen Stoßvorgänge zurückführen lassen, wenigstens mit der Annäherung, die für die technischen Anwendungen ausreicht.

Infolge des Stoßes findet eine Abplattung beider Körper an der Berührungsstelle statt, die eine Annäherung der beiden Massenmittelpunkte zur Folge hat. Infolge der Gestaltsänderung der Körper entwickeln sich in der Berührungsfläche Spannungen, die in dem Maße wachsen, als die Deformationen zunehmen bzw. die Entfernung  $M_1 M_2$  abnimmt. Die Spannungen, soweit sie elastischen Ursprungs sind, bedingen Flächenkräfte, die auf die beiden Körper

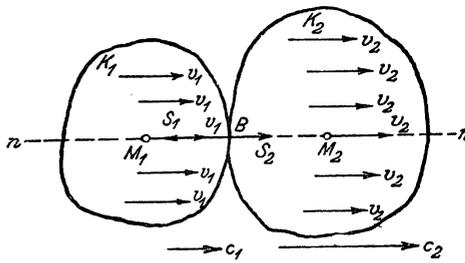


Fig. 71.

in gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung wirken und die Körper wieder auseinanderzutreiben suchen. Die Resultierenden dieser Kräfte werden Stoßkräfte genannt. Wir wollen sie mit  $S_1$  bzw.  $S_2$  bezeichnen und von ihnen voraussetzen, daß sie beide in die Stoßnormale fallen, was eine symmetrische Gestaltung der

Oberflächen der Körper zur Stoßnormalen in deren Umgebung zur Voraussetzung hat. Es gehen dann die Wirkungslinien der Stoßkräfte durch die Massenmittelpunkte der Körper. Berühren sich die stoßenden Körper von vornherein in einer Fläche, z. B. einer ebenen, dann setzen wir die Druckverteilung in der Stoßfläche derart voraus, daß die Wirkungslinie der resultierenden Druckkraft, d. i. die Stoßkraft, in beiden Körpern durch deren Massenmittelpunkt geht. Erfahrungsgemäß beschleunigen die Stoßkräfte das System der beiden stoßenden Körper nicht; es muß daher  $S_1 = S_2$  sein und zwischen beiden Kräften Gleichgewicht bestehen. Sonach gilt das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes für die Bewegung des gemeinsamen Massenmittelpunktes  $M$  beider Körper und folglich nach (46) die Gleichung

$$(81) \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_M,$$

in der  $v_M$  die Geschwindigkeit von  $M$  bezeichnet. Der Massenmittelpunkt  $M$  bewegt sich also vor, während und nach dem Stoß mit derselben Geschwindigkeit  $v_M$  in der Stoßnormalen.

Der Stoßvorgang vollzieht sich nun in der Weise, daß zunächst

die Massenmittelpunkte beider Körper sich nähern, wobei die Stoßkraft stetig wächst und schließlich eine solche Größe erreicht, daß sie die Körper wieder entfernt. Es wird sonach der Abstand  $M_1 M_2$  ein Minimum und wächst dann zufolge der Wirkung der elastischen Kräfte in der Berührungsstelle wieder soweit an, daß die Berührung der Körper aufhört. Bezeichnen  $c_1$  und  $c_2$  die Schiebungsgeschwindigkeiten der Körper nach dem Stoß, d. h. in dem Augenblick, wo die Körper sich trennen, dann besteht für die Geschwindigkeit  $v_M$  die weitere Beziehung

$$(m_1 + m_2) v_M = m_1 c_1 + m_2 c_2;$$

diese liefert in Verbindung mit (81) die für die Stoßvorgänge grundlegende Gleichung

$$(82) \quad m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Zu einer zweiten Gleichung für die beiden Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  gelangen wir durch Berücksichtigung der elastischen und plastischen Eigenschaften der Stoffe, aus denen die sich stoßenden Körper bestehen. Sie ist im grunde nichts anderes, als die Definition einer Konstanten  $k$ , des sogen. Stoßkoeffizienten oder der Stoßziffer, die durch Versuche zu ermitteln ist. Wir gelangen zu ihr durch folgende Überlegung. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Wirkung des Stoßes auf beide Körper nicht von der Größe ihrer Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  vor dem Stoß an sich abhängig ist, sondern nur von der relativen Geschwindigkeit vor dem Stoß, nämlich von der Größe

$$v_1 - v_2 = v_r,$$

die wir kurz die Stoßgeschwindigkeit nennen wollen. Je elastischer nun die Körper sind, mit um so größerer relativer Geschwindigkeit werden sich die Körper nach dem Stoß wieder voneinander entfernen; es wird also die relative Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoß, d. i.  $c_2 - c_1 = c_r$ , um so größer sein. Umgekehrt, je weniger elastisch sie sind, also je plastischer, um so kleiner muß  $c_r$  sein. Daher können wir als ein Maß für die Elastizität des Stoßes das Verhältnis

$$(83) \quad \frac{c_r}{v_r} = k$$

benutzen, das Stoßziffer genannt wird. Die Stoßziffer ist stets positiv und liegt zwischen den Grenzen 0 und 1. Der eine Grenzfall  $k=0$  bedeutet den vollkommen unelastischen Stoß, für den  $c_r=0$ , d. i.  $c_1=c_2$  ist. In diesem Falle trennen sich die Körper überhaupt nicht wieder, was z. B. bei plastischem Thon

eintritt. Der andere  $k=1$  wird als vollkommen elastischer Stoß bezeichnet; bei ihm ist  $c_r = v_r$ , d. h. die Körper trennen sich nach dem Stoß mit derselben Geschwindigkeit, mit der sie zusammenstießen.

Schreiben wir (83) in der Form

$$(83a) \quad c_2 - c_1 = k(v_1 - v_2),$$

so stellt sie die gesuchte zweite Gleichung für  $c_1$  und  $c_2$  dar, falls die Stoßziffer  $k$  bekannt ist, wobei beachtet werden mag, daß  $k$  sich nicht auf die Einzelkörper bezieht, sondern nur auf ihr Verhalten gegen einander. Über die Versuchsergebnisse folgen weiterhin noch einige Angaben.

Durch die Gleichungen (82) und (83a) sind  $c_1$  und  $c_2$  bestimmt. Man erhält, wie leicht ersichtlich

$$(84) \quad c_1 = v_M - k \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_r, \quad c_2 = v_M + k \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r,$$

worin  $v_M$  die Geschwindigkeit von M (s. (81)) ist, und ferner als Abnahme der Geschwindigkeit des stoßenden Körpers, bzw. als Zunahme der des gestoßenen

$$(85) \quad v_1 - c_1 = (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_r, \quad c_2 - v_2 = (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_r.$$

Diese Ausdrücke zeigen nicht nur, daß die Geschwindigkeitsänderungen durch den Stoß der Stoßgeschwindigkeit  $v_r$  proportional sind, sondern auch den Einfluß der Massen der stoßenden Körper, der unabhängig vom Stoßkoeffizienten  $k$  ist; denn wir finden

$$v_1 - c_1 : c_2 - v_2 = m_2 : m_1,$$

d. h. die Geschwindigkeitsänderungen verhalten sich umgekehrt wie die Massen der Körper. Endlich lassen sie erkennen, daß die Geschwindigkeitsänderungen beide positiv sind, weil der Ausdruck auf der rechten Seite unter allen Umständen positiv ist, und daß  $c_1$  und  $c_2$  gleichsinnig mit  $v_1$  und  $v_2$  sein müssen, wenn letztere beide gleichen Sinn haben.

Von großer Bedeutung ist der Verlust an kinetischer Energie bzw. Wucht infolge des Stoßes, den die Körper zusammen erleiden. Er beträgt, wie unmittelbar ersichtlich, die Differenz der Wucht der Körper vor und nach dem Stoß, und erhält sonach den Ausdruck

$$W_A = W_v - W_n = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \left( \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2 \right).$$

Setzt man für  $c_1$  und  $c_2$  die Ausdrücke (84) ein, so geht  $W_A$  nach

entsprechender Umformung über in

$$(86) \quad W_A = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot v_r^2.$$

Hieraus ersieht man, daß der Stoßverlust  $W_A$  außer von der Stoßziffer  $k$  und den Massen der Körper nur von der relativen Geschwindigkeit  $v_r$  der sich stoßenden Körper abhängt, nicht aber von  $v_1$  und  $v_2$  selbst.

Sind die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  entgegengesetzt gerichtet, wie in Fig. 72, so müssen wir, um die Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  nicht nur nach ihrer Größe, sondern auch ihrer Richtung eindeutig bestimmt zu erhalten, eine der beiden Richtungen, z. B. die von  $v_1$ , als positive einführen; dann wird  $v_2$  negatives Vorzeichen erhalten müssen, und das Vorzeichen der Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ , die in den Gleichungen (82) und (83a) zunächst mit positivem Vorzeichen eingeführt werden, wird durch die Formeln

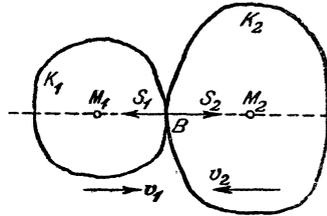


Fig. 72.

$$(85a) \quad v_1 - c_1 = (1 + k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_r, \quad c_2 + v_2 = (1 + k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_r$$

festgelegt. Je nachdem sich  $c_1$  bzw.  $c_2$  hieraus positiv oder negativ ergibt, ist  $c_1$  bzw.  $c_2$  gleich- oder entgegengesetztssinnig mit  $v_1$ . Der Ausdruck für  $W_A$  wird durch die Vorzeichen nicht berührt, wenn man nur, wie erforderlich, im vorliegenden Falle in (86)

$$v_r = v_1 + v_2$$

setzt.

Ein sehr häufig auftretender Sonderfall ist der, daß der gestoßene Körper  $K_2$  eine so große Masse besitzt, daß  $m_2$  gegenüber  $m_1$  als unendlich groß, und folglich  $m_1 : m_2 = 0$  gesetzt werden darf, wie z. B. bei dem Stoß eines Körpers gegen eine feste Wand oder eines Wasserstrahles gegen die Schaufeln eines gleichförmig sich drehenden Wasserrades. Die Formeln (85) gehen dann über in

$$v_1 - c_1 = (1 + k) v_r, \quad c_2 - v_2 = 0,$$

woraus  $c_2 = v_2$  folgt, d. h. beide Körper bewegen sich nach dem Stoß mit derselben Geschwindigkeit  $v_2$  fort, die  $K_2$  vor dem Stoß hatte; der Stoß hat also keinen Einfluß auf eine unendlich große Masse. Ferner wird hier  $c_1 = v_2 - k v_r$  und  $W_A = \frac{1}{2} (1 - k^2) m_1 v_r^2$ , wobei  $v_r = v_1 - v_2$  zu nehmen ist, falls beide Körper sich in gleicher, und  $= v_1 + v_2$ , falls sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegen.

Wenn insbesondere  $v_2 = 0$  ist, also der gestoßene Körper mit der unendlich großen Masse sich in Ruhe befindet, so wird auch  $c_2 = 0$  und  $v_r = v_1$ , folglich  $c_1 = -k v_1$  und  $W_d = \frac{1}{2}(1 - k^2)m_1 v_1^2$ .

Beispiel:

Fällt eine Kugel  $K_1$  aus der Höhe  $h_0$  auf eine horizontale ebene Platte  $K_2$  frei herab (s. Fig. 73), so erlangt sie, vom Luftwiderstand hierbei abgesehen, beim Auftreffen die Geschwindigkeit  $v_1 = \sqrt{2g h_0}$ . Durch den Stoß erlangt sie zufolge vorstehender Beziehung die Geschwindigkeit

$$c_1 = -k v_1 = -k \sqrt{2g h_0},$$

woraus hervorgeht, daß sie sich nach dem Stoß wieder nach aufwärts bewegt, wobei sie die Steighöhe  $h = \frac{c_1^2}{2g}$  erlangt. Mißt man letztere, so läßt sich aus entsprechenden Versuchen  $k$  berechnen, denn es wird

$$k = \sqrt{\frac{h}{h_0}}.$$

Auf diesem Wege wurden, beide Körper aus gleichem Material vorausgesetzt, für  $k$  folgende Werte gefunden:

für Stahl und Kork  $\frac{1}{2}$ , Glas  $\frac{1}{3}$ , Elfenbein  $\frac{1}{4}$ .

Wesentlich andere, und zwar viel größere, nahe an 1 liegende Werte fand Westphal<sup>1)</sup> bei sorgfältigen Versuchen an zwei bifilar aufgehängten Kugeln von gleichem Durchmesser; er erhielt bei Stahl  $k = 0,995$ , bei Glas 0,983 und bei Elfenbein 0,966. Die Verschiedenheit von  $k$  bei Stahl und die Annäherung bei Glas ist so groß, daß sie sich

durch die Verschiedenheit der Gestalt des Körpers  $K_2$  in beiden Versuchsreihen allein nicht erklären läßt.

Bei dem vollkommen unelastischen Stoß ist  $k = 0$  zu setzen; es wird dann zufolge (84)

$$c_1 = c_2 = v_M = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

woraus folgt, daß beide Körper sich nach dem Stoß mit der Geschwindigkeit des gemeinsamen Massenmittelpunktes weiter bewegen. Ferner erhält man als Stoßverlust aus (86)

$$W_d = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_r^2.$$

War der gestoßene Körper in Ruhe, also  $v_2 = 0$ , so wird  $v_n = v_1$ , und sonach

$$W_d = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot W_v,$$

<sup>1)</sup> Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 1909, S. 273.

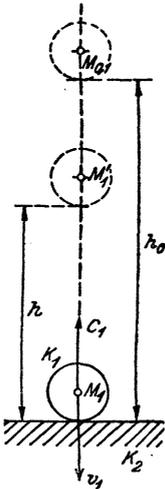


Fig. 73.

worin  $W_v = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$  die gesamte Wucht vor dem Stoß bezeichnet. Da nun die Wucht nach dem Stoß sich zu

$$W_n = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\mu^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot W_v$$

ergibt, so finden wir bei dem vollkommen unelastischen Stoß

$$W_n : W_v = m_1 : m_2.$$

Anwendungen:

Bei dem Einrammen von Pfählen soll der Pfahl möglichst tief eindringen dagegen der Pfahlkopf tunlichst wenig zerstört werden. Dieser Forderung wird entsprochen, wenn  $W_A$  möglichst klein, dagegen  $W_n$  so groß als möglich ist. Da man nun  $W_v$  als gegebene Größe anzusehen hat, und  $W_n : W_v$  so groß als möglich sein soll, so muß auch  $m_1 : m_2$  möglichst groß genommen werden. Die Masse des Pfahles ist als gegeben anzusehen; sonach muß  $m_1$ , d. h. das Rammbürgewicht, so groß als möglich genommen werden. Dieser Schluß ist durch eine reiche Erfahrung voll bestätigt worden. Ähnlich verhält es sich mit dem Einschlagen von Nägeln.

Bei dem Nieten ist es genau umgekehrt. Hier soll ein Nietkopf gebildet, d. h. große Deformationsarbeit geleistet, dagegen das Niet möglichst wenig bewegt werden. Es muß also  $W_A$  möglichst groß und  $W_n$  so klein als möglich sein. Die obige Beziehung fordert sonach kleines  $m_1$  und großes  $m_2$ . Das erreicht man einerseits durch leichte Niethämmer und andererseits dadurch, daß man den Nietbolzen mit großen Massen verbindet, also etwa durch Stützen gegen Träger oder ähnliche Maßnahmen.

Der vollkommen elastische Stoß tritt ein, wenn  $k = 1$  ist. Dann folgt aus (84)

$$c_1 = v_\mu - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_r, \quad c_2 = v_\mu + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_r;$$

ferner wird  $W_A = 0$ , d. h. es findet kein Stoßverlust statt. Wenn insbesondere  $m_1 = m_2$ , so erhalten wir  $c_1 = v_2$ ,  $c_2 = v_1$ ; die beiden Körper vertauschen folglich hier ihre Geschwindigkeiten. Ruhte sonach  $K_2$ , so kommt durch den Stoß  $K_1$  zur Ruhe und  $K_2$  bewegt sich mit  $v_1$  weiter.

## 2. Der gerade exzentrische Stoß.

Dieser tritt besonders bei sich drehenden Körpern auf; deshalb wollen wir von vornherein annehmen, daß der gestoßene Körper  $K_2$  (s. Fig. 74, S. 146) eine Drehung um die ruhende Achse  $D_2$  auszuführen gezwungen sei, während  $K_1$  eine Schiebung mit  $v_1$  ausführe. Wir setzen ferner voraus, daß  $M_2$  außerhalb der Stoßnormalen (exzentrisch) liege, während  $M_1$  auf  $nn$  sich befinde. In diesem Falle nennen wir den Stoß gerade, falls  $v_1$  parallel  $nn$  und die Stoßnormale senkrecht zur Ebene durch die Drehachse und den Massenmittelpunkt  $M_2$  steht. Der Punkt  $\Sigma_2$ , in dem  $nn$  die genannte Ebene schneidet,

möge der Stoßpunkt des Körpers  $K_2$  genannt werden. Unter der Annahme, daß sich  $K_2$  während der Stoßdauer nur sehr wenig bewegt, können wir den Stoßvorgang als einen geraden zentrischen Stoß auffassen, wenn wir  $K_2$  durch einen Körper  $K_2$  ersetzt denken, dessen Massenmittelpunkt mit  $\Sigma_2$  zusammenfällt und dessen Masse  $\mu_2$

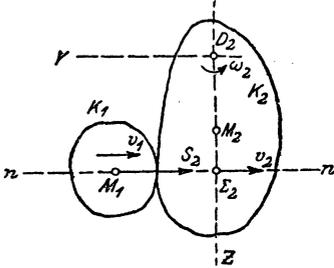


Fig. 74.

so bestimmt wird, daß die Wucht der Masse  $\mu_2$  mit der des ursprünglichen Körpers  $K_2$  übereinstimmt. Letztere aber ist, falls  $\omega_2$  die Winkelgeschwindigkeit von  $K_2$  vor dem Stoß, und  $J_2$  das Trägheitsmoment von  $K_2$  für die Achse  $D_2$  bezeichnet,  $\frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$ ; diese müßte also  $= \frac{1}{2} \mu_2 v_2^2$  sein, worin  $v_2 = a_2 \omega_2$  und  $a_2 = \overline{D_2 \Sigma_2}$  ist. Wir haben sonach als sogenannte auf den Abstand  $a_2$  reduzierte Masse  $\mu_2 = J_2 : a_2^2$  in die Gleichungen (82) und (83 a),

bzw. in (84) und (85) einzusetzen, um die Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ , sowie den Stoßverlust in diesem Falle zu erhalten. Führen wir dann noch die Winkelgeschwindigkeit  $\gamma_2$  von  $K_2$  nach dem Stoß durch die Beziehung

$$c_2 = a_2 \gamma_2$$

ein, so findet sich auch  $\gamma_2$ .

Beispiel:

Schlägt ein Schwanzhammer  $K_2$  (s. Fig. 75) mit der Schneide in  $B$  auf den Amboß, so würde letzterer mit der Masse  $m_1 = \infty$  behaftet angesehen

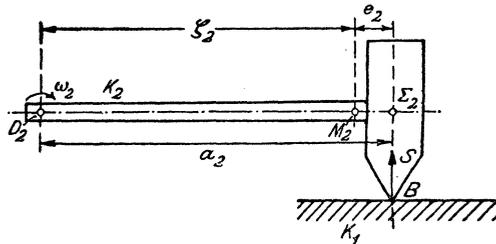


Fig. 75.

werden können, und außerdem  $v_1$  zu Null, weil er in Ruhe ist. Dann ergeben die Formeln (85) und (86)

$$a_2 (\gamma_1 - \omega_2) = - (1 + k) a_2 \omega_2 \quad \text{und} \quad W_A = (1 - k^2) \frac{\mu_2 a_2^3 \omega_2^2}{2},$$

worin  $\mu_2 = J_2 : a_2^2$  ist. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\gamma_2 = - k \omega_2 ;$$

der Hammer springt sonach zurück und zwar mit einer entsprechenden kleineren Winkelgeschwindigkeit  $\gamma_2$ , deren Größe durch  $k$  bedingt wird.

Von Interesse ist häufig die Frage nach der Lage des Stoßpunktes  $\Sigma_2$ , bei der die festgehaltenen Punkte (Stütz- oder Lagerpunkte) der Drehachse keine Beeinflussung durch die Stoßkraft erfahren. Wir finden diese Lage aus der Forderung, daß die Zwangskräfte in den Lagerpunkten Null werden, soweit sie allein von der Stoßkraft herrühren, also aus den Gleichungen (63) des 10. Kapitels, in denen wir die Komponenten von  $S'$  und  $S''$  Null setzen, und in Anwendung auf den gestoßenen Körper  $K_2$  als einzige äußere Kraft die Stoßkraft  $S_2$  in der Stoßnormalen annehmen. Schalten wir schließlich auch den Einfluß der Zentrifugalkräfte von  $K_2$  dadurch aus, daß wir in (63)  $\omega = \omega_2 = 0$  setzen, also  $K_2$  als gestoßenen Körper vor dem Stoß in Ruhe befindlich annehmen, so erhalten wir außer der ersten Gleichung, die identisch befriedigt ist, die fünf Gleichungen

$$S_2 + m_2 \zeta_2 \varepsilon_2 = 0; \quad m_2 \eta_2 \varepsilon_2 = 0; \quad J_2 \varepsilon_2 = -S_2 a_2; \quad -\varepsilon_2 C_{2xy} = 0; \\ S_2 x_2 + \varepsilon_2 C_{2xz} = 0.$$

In ihnen ist  $\zeta_2 = \overline{D_2 M_2}$  der Abstand des Massenmittelpunktes von der Drehachse,  $C_{2xy}$  und  $C_{2xz}$  die Zentrifugalmomente von  $K_2$  und  $\varepsilon_2$  die Winkelbeschleunigung von  $K_2$  infolge des Stoßes, während  $x_2$  und  $z_2 = a_2$  die Koordinaten des Stoßpunktes  $\Sigma_2$  bezeichnen. Aus diesen Gleichungen folgt zunächst  $\eta_2 = 0$ , d. h.  $M_2$  muß in der Ebene durch die Drehachse senkrecht zur Stoßnormalen liegen, was hier an sich als notwendig erkannt wurde, ferner  $C_{2xy} = 0$ , welcher Forderung genügt wird, wenn der Körper  $K_2$  symmetrisch zu einer Ebene senkrecht zur Drehachse durch die Stoßnormale ist. Setzen wir endlich den aus der dritten Gleichung folgenden Wert für  $\varepsilon_2$  in die erste und fünfte Gleichung ein, so finden wir als Koordinaten des Stoßpunktes

$$(87) \quad x_2 = \frac{C_{2xz}}{m_2 \zeta_2} \quad \text{und} \quad z_2 = a_2 = \frac{J_2}{M_2 \zeta_2}.$$

Durch diesen Punkt muß die Stoßnormale gehen, damit die Lagerpunkte durch den Stoß nicht beeinflußt werden.

In dem vorhergehenden Beispiel würden wir bei symmetrischem Hammer  $x_2 = 0$  und  $a_2 = J_2 : m_2 \zeta_2$  erhalten, falls die Drehachse keine Stoßwirkung erfahren soll. Da die Entfernung  $\overline{M_2 \Sigma_2} = e_2$  als gegeben angesehen werden kann, so erhalten wir  $a_2 = \zeta_2 + e_2$ , und weil  $J_2 = J_{\mu 2} + m_2 \zeta_2^2$ , so finden wir für  $\zeta_2$  die Gleichung

$$a_2 = \zeta_2 + e_2 = (J_{\mu 2} + m_2 \zeta_2^2) : m_2 \zeta_2 = \frac{J_{\mu 2}}{m_2 \zeta_2} = \zeta_2,$$

womit sich  $\zeta_2 = J_{\mu 2} : m_2 e_2$  ergibt.

Die angestellten Betrachtungen über den geraden exzentrischen Stoß lassen sich leicht auf den Fall erweitern, daß zwei um parallele Achsen sich drehende Körper sich gerade und exzentrisch stoßen; es ist dann auch für den stoßenden Körper  $K_1$  die auf den Abstand  $a_1$  reduzierte Masse  $\mu_1 = J_1 : a_1^2$  an Stelle von  $m_1$  in den Gleichungen (82) und (83a) bzw. in den Formeln (85) und (86) einzuführen und  $v_1 = a_1 \omega_1$ ,  $c_1 = a_1 \gamma_1$  zu setzen.

### 3. Der schiefe zentrische Stoß.

Wir setzen wieder voraus, daß die Massenmittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  beider Körper in der Stoßnormalen  $nn$  (s. Fig. 76) liegen, aber die Schiebungsgeschwindigkeiten  $v_1$  bzw.  $v_2$  die Winkel  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_2$  mit letzterer einschließen; hierbei sollen sich zunächst  $v_1$  und  $v_2$  mit  $nn$  in einer Ebene befinden. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß der eigentliche Stoßvorgang sich in der Richtung der Stoßnormalen vollzieht, also auch nur von den Geschwindigkeitskomponenten in dieser Richtung abhängt. Zerlegen wir daher sowohl  $v_1$  und  $v_2$ , wie  $c_1$  und  $c_2$  in Komponenten  $v_1' = v_1 \cos \alpha_1$ ,  $v_2' = v_2 \cos \alpha_2$ ,  $c_1' = c_1 \cos \beta_1$ ,  $c_2' = c_2 \cos \beta_2$  in Richtung von  $nn$ , und  $v_1'' = v_1 \sin \alpha_1$ ,  $v_2'' = v_2 \sin \alpha_2$ ,  $c_1'' = c_1 \sin \beta_1$ ,  $c_2'' = c_2 \sin \beta_2$  senkrecht zu  $nn$ , dann

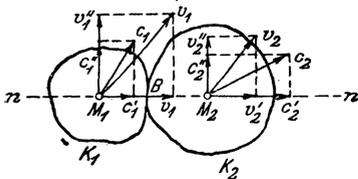


Fig. 76.

bestehen für die ersteren Komponenten die Gleichungen (82) und (83a), und demgemäß auch (84), (85) und (86), aus denen  $c_1'$ ,  $c_2'$  und  $W_A$  folgt. Bezüglich der Komponenten  $c_1''$  und  $c_2''$  ist man jedoch ganz unsicher, da sie von der Wirkung der Reibung zwischen den relativ

zueinander gleitend und wälzend sich bewegenden Körpern auf die Bewegung der letzteren abhängen und diese sich schwer in Rechnung stellen läßt. Machen wir nun die Annahme (deren Zulässigkeit erst durch Versuche bewiesen werden müßte), daß die Stoßdauer so klein ist, daß man die Drehung der Körper um Achsen senkrecht zur Ebene der Geschwindigkeiten, welche durch die Reibung zweifellos verursacht wird, gegenüber den Schiebungen vernachlässigen darf, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß man die Schiebungen allein zu berücksichtigen braucht, dann lassen sich für  $c_1''$  und  $c_2''$  zwei Gleichungen aufstellen, von denen die eine unmittelbar aus dem Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Massenmittelpunktes folgt. Denn die Reibungskräfte wirken auf beide Körper mit der gleichen Stärke  $R = S \cdot \mu$ , falls  $S$  die Stoßkraft und  $\mu$  die Reibungsziffer ist, jedoch in entgegengesetzter Richtung; es besteht sonach für die projizierte Bewegung

der Massenmittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  auf eine Gerade in Richtung der  $c_1''$  bzw.  $c_2''$  bezüglich der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß die Gleichung

$$(88) \quad m_1 v_1'' + m_2 v_2'' = m_1 c_1'' + m_2 c_2''.$$

Eine zweite Gleichung, die freilich nur als eine erste Annäherung an die Wirklichkeit zu betrachten und deren Zulässigkeit erst durch Versuche zu erhärten ist, erhalten wir durch die Überlegung, daß die Reibung eine Verminderung der relativen Geschwindigkeit der Körper bewirkt, daß also  $c_r'' = c_2'' - c_1''$  kleiner als  $v_r'' = v_1'' - v_2''$  wird. Sonach können wir in erster Annäherung

$$(89) \quad c_r'' = \lambda v_r''$$

setzen, worin  $\lambda$  eine positive Zahl kleiner als 1 bezeichnet, die außer von der Reibungsziffer  $\mu$  auch von der Stoßziffer  $k$  abhängen wird. Eine Annahme, die den tatsächlichen Verhältnissen Rechnung trägt, wäre u. a., daß  $\lambda = k e^{-\alpha \mu k}$  gesetzt wird; denn es muß  $\lambda$  mit  $k$  zugleich Null werden, weil bei vollkommen unelastischem Stoß bzw. sehr elastischen Körpern  $c_1'' = c_2''$  wird, und andererseits muß  $\lambda$  mit wachsendem  $k$  und  $\mu$  abnehmen, also  $\frac{d\lambda}{dk}$  negativ sein, was nur eintritt, wenn  $\alpha \mu k > 1$ . Die Konstante  $\alpha$  endlich muß durch Versuche ermittelt werden und hierbei sich größer als 1 ergeben. Wie nun auch dieser Zusammenhang sein mag, jedenfalls finden sich aus (88) und der Gleichung

$$(89a) \quad c_2'' - c_1'' = \lambda (v_1'' - v_2'')$$

die Werte

$$(90) \quad c_1'' = \frac{C - \lambda m_2 v_r''}{m_1 + m_2}, \quad c_2'' = \frac{C + \lambda m_1 v_r''}{m_1 + m_2},$$

worin  $C = m_1 v_1'' + m_2 v_2''$  ist. Aber es darf bei Benutzung dieser Formeln nicht außer acht gelassen werden, daß die Drehungen der Körper vernachlässigt wurden; es müßten demnach noch Formeln hinzutreten, die die Winkelgeschwindigkeiten der Körper nach dem Stoß zu berechnen ermöglichen.

Ist der gestoßene Körper  $K_2$  in Ruhe, also  $v_2' = v_2'' = v_2 = 0$ , so wird  $v_r' = v_1'$  und  $v_r'' = v_1''$ ; folglich erhalten wir aus (84) und (90)

$$(91) \quad \begin{cases} (m_1 + m_2) c_1' = m_1 v_1' - k m_2 v_1' = (m_1 - k m_2) v_1', \\ (m_1 + m_2) c_1'' = (m_1 - \lambda m_2) v_1'', \\ (m_1 + m_2) c_2' = m_1 v_1' + k m_1 v_1' = m_1 (1 + k) v_1', \\ (m_1 + m_2) c_2'' = m_1 (1 + \lambda) v_1''. \end{cases}$$

Damit finden wir die Komponenten der relativen Geschwindigkeit  $c_r$  nach dem Stoß zu

$$(92) \quad c_r' = c_2' - c_1' = 2k \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1, \quad c_r'' = c_2'' - c_1'' = 2\lambda \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1''$$

$$\text{und damit } c_r = \sqrt{c_r'^2 + c_r''^2} = 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{(k \cos \alpha_1)^2 + (\lambda \sin \alpha_1)^2},$$

$$\tan \beta_r = \frac{c_r''}{c_r'} = \frac{\lambda}{k} \tan \alpha_1.$$

Erfolgt der schiefe Stoß gegen eine feste Wand, ist also  $m_2 = \infty$  zu setzen, dann wird noch einfacher  $c_2' = c_2'' = 0$ , d. h. der gestoßene Körper bleibt in Ruhe, während  $c_1 = -k v_1'$ ,  $c_1'' = -\lambda v_1''$  sich findet. Nehmen wir für den vollkommen elastischen Stoß nicht nur  $k = 1$ , sondern auch  $\lambda = 1$  an, so wird  $c_1' = -v_1'$  und  $c_1'' = -v_1''$ , d. h. der Körper  $K_1$  entfernt sich von der Wand symmetrisch zur Stoßnormalen mit derselben Geschwindigkeit  $c_1 = v_1$ .

Ist die Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  derselben Ebene parallel sind, nicht erfüllt, dann lassen sich gleichwohl die Gleichungen (89a) und (88) außer denen für die Stoßnormale gültigen (82) und (83a) aufstellen, wenn man die vier Geschwindigkeiten  $v_1, v_2, c_1, c_2$  in Komponenten in Richtung der Stoßnormalen, ferner zwei zu ihr und zueinander senkrechten Geraden zerlegt, von denen eine in der durch die Stoßnormale und die relative Geschwindigkeit  $v_r = v_2 - v_1$  vor dem Stoß bestimmten Ebene liegt. Da für die Wirkung der Stoß- und der Reibungskraft auf die Körper nur die relative Geschwindigkeit der Körper in Frage kommt, so sind die Komponenten der Geschwindigkeiten senkrecht zu der letzterwähnten Ebene ohne Einfluß, während die Komponenten in der Ebene senkrecht zur Stoßnormalen an die Stelle der  $v_1'', v_2'', c_1'', c_2''$  treten; für diese bestehen also die Gleichungen (88) und (89a).

Für den vollkommen unelastischen Stoß würde sowohl  $k = 0$ , als auch  $\lambda = 0$  gesetzt werden können; daher sind die Verluste an Wucht infolge des Stoßes  $W_A' = (1 - k^2) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_r'^2$  und infolge der Reibung  $W_A'' = (1 - \lambda^2) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_r''^2$  einfacher

$$W_A' = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_r'^2 \quad \text{und} \quad W_A'' = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_r''^2.$$

Der Gesamtverlust an Energie beträgt folglich beim vollkommen unelastischen Stoß

$$W_A = W'_A + W''_A = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_r'^2 + v_r''^2) = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_r^2,$$

d. h. die der relativen Stoßgeschwindigkeit  $v_r$  und der mittleren Masse  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  entsprechende Wucht wird beim Stoß verloren.

Beim vollkommen elastischen und reibungsfreien schiefen zentrischen Stoß findet dagegen kein Verlust statt, wie man aus (83) für  $k=1$  und aus (89) für  $\lambda=1$  unmittelbar schließen kann.

#### 4. Der schiefe exzentrische Stoß.

Die Einführung einer ideellen Masse führt auch beim schiefen exzentrischen Stoß zu Formeln, die wenigstens in den Fällen zu einer annähernden Bestimmung der Geschwindigkeiten nach dem Stoß führen, wo die exzentrisch stoßenden Körper sich um ruhende Achsen drehen. Wir wollen, wie unter 2, wieder davon ausgehen, daß ein in Schiebung begriffener Körper  $K_1$  (s. Fig. 77) gegen den um  $D_2$  sich drehenden Körper  $K_2$  exzentrisch stößt, wobei die Stoßnormale  $nn$  und die Schiebungsgeschwindigkeit  $v_1$  die Achse  $D_2$  rechtwinklig kreuzen sollen, und  $v_1$  mit  $nn$  den Winkel  $\alpha_1$  einschließt. Legen wir durch die Drehachse und den Massenmittelpunkt  $M_2$  des Körpers  $K_2$  eine Ebene, die  $nn$  in  $\Sigma_2$  schneidet, so können wir  $\Sigma_2$  als Mittelpunkt einer ideellen Masse  $\mu_2$  auffassen, die von  $K_1$  gerade und zentrisch gestoßen wird, wenn  $M_1$  auch in  $nn$  liegt. Zerlegen wir nun  $v_1$  in Komponenten  $v_1'$  in Richtung von  $nn$  und  $v_1''$  senkrecht dazu, ebenso die Geschwindigkeit  $v_2$  des Punktes  $\Sigma_2$ , die  $=a_2 \omega_2$  ist, falls  $\omega_2$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung vor dem Stoß bezeichnet und  $\overline{D_2 \Sigma_2} = a_2$  gesetzt wird, und die senkrecht zu  $D_2 \Sigma_2$  steht, in die Komponenten  $v_2'$  und  $v_2''$ , so lassen sich für den Stoßvorgang die Gleichungen (82) und (83a), für den Reibungsvorgang aber die Gleichungen (88) und (89a) benutzen, um die entsprechenden Komponenten  $c_1', c_1'', c_2', c_2''$  der Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu berechnen, falls nur an Stelle von  $m_2$  hier  $\mu_2 = J_2 : a_2^2$  eingeführt, und  $c_2 = c_2' + c_2'' \triangleq b_2 \gamma_2$  gesetzt wird, unter  $\gamma_2$  die Winkelgeschwindigkeit von  $K_2$  nach dem Stoß und unter  $b_2$  der kürzeste Abstand zwischen  $c_2$  und  $D_2$  verstanden.

In der gleichen Weise läßt sich auch der Fall behandeln, daß

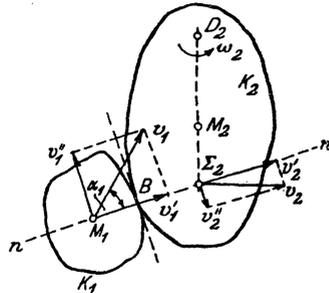


Fig. 77.

sich die beiden stoßenden Körper um parallele Achsen drehen, doch soll auf ihn, wie auf den vorhergehenden nicht näher eingegangen werden, da die theoretischen Grundlagen erst einer Nachprüfung durch Versuche zu unterziehen sind.

### 16. Kap. Bewegungen sich ändernder Massen.

Die Gesetze, die wir für die Bewegung starrer Körper aufstellten, gelten nur unter der Voraussetzung, daß die Masse des bewegten Körpers eine absolute Konstante sei, d. h. daß sie sich weder zeitlich noch räumlich ändere. Es kommen aber Bewegungen vor, bei denen diese Voraussetzung nicht zutrifft, also fortwährend neue Massen in die Bewegung eintreten, wie z. B. beim Heben von Ketten und Seilen, die aus der Ruhelage die Bewegung beginnen, oder wenn ein bewegter Körper durch Verdunstung an Masse verliert. Die Frage, wie sich dann die Bewegungsgesetze abändern, wollen wir zunächst für den einfachen Fall behandeln, daß ein Körper eine geradlinige Schiebung unter dem Einflusse einer Kraft  $P$  vollzieht, die in der Schiebungsrichtung auf ihn wirkt, und hierbei die Masse  $m$  des Körpers mit der Zeit  $t$  sich stetig ändert. Diese Änderung erfolge in der Weise, daß in jedem Zeitelement  $dt$  zu  $m$  noch ein Element  $dm$  trete, das in Richtung der Körpergeschwindigkeit  $v$  die Geschwindigkeit  $v'$  habe. Da im allgemeinen  $v' > v$  ist, so erfolgt ein Stoß bei dem Zusammentreffen von  $dm$  mit  $m$ , mit dem sich ein Verlust an Wucht verknüpft. Letzterer kann nach der Formel (86) berechnet werden, wenn darin  $m_1 = dm$ ,  $m_2 = m$  und  $v_1 = v' - v$  gesetzt wird. Nehmen wir hierbei an, daß  $dm$  nach dem Stoß die Geschwindigkeit von  $m$  angenommen hat, so ist der Stoß als vollkommen unelastisch zu behandeln, und dementsprechend  $k = 0$  zu setzen; es wird dann der Verlust an Wucht

$$(95) \quad W_A = \frac{1}{2} \frac{m \, dm}{m + dm} (v' - v)^2 = \frac{1}{2} (v' - v)^2 dm.$$

Bezeichnet  $B = mv$  den Impuls des Körpers zur Zeit  $t$ , so würde bei unveränderlicher Masse zufolge (5)  $dB = P \, dt$  sein. Da aber noch zu  $m$  die Masse  $dm$  mit dem Impuls  $v' \, dm$  tritt, so ist die Änderung von  $B$  in der Zeit  $dt$  (nach Routh)

$$dB = P \, dt + v' \, dm,$$

welche Gleichung in der Form

$$(96) \quad d(mv) - v' \, dm = P \, dt$$

ersichtlich macht, daß die Beschleunigung der Bewegung in diesem

Falle nicht  $\frac{P}{m}$ , sondern

$$b = \frac{P}{m} - \frac{(v' - v) dm}{m dt}$$

ist.

Um ferner zu ermitteln, ob im vorliegenden Falle das Prinzip der Wucht gilt, bzw. in abgeänderter Form, bilden wir die Differenz bzw. Änderung der Wucht für die unendlich kleine Bewegung des Körpers während der Zeit  $dt$ . Es ist nämlich die Wucht zur Zeit  $t$ :

$$W = m \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} dm v'^2,$$

zur Zeit  $t + dt$ :

$$W' = W + dW = \frac{1}{2}(m + dm)(v + dv)^2;$$

sonach wird die Änderung der Wucht

$$dW = W' - W + W_A = \frac{1}{2}(m + dm)(v + dv)^2 - \left(\frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}dm v'^2\right) + \frac{1}{2}dm(v' - v)^2,$$

wenn man beachtet, daß infolge des Stoßes zwischen  $dm$  und  $m$  die Wucht  $W_A$  verloren ging. Die Ausführung dieses Ausdruckes ergibt

$$dW = v[d(mv) - v' dm],$$

also mit Benutzung von (96) und weil  $v = \frac{du}{dt}$ ,

$$dW = v \cdot P dt = P du = dA,$$

worin  $dA$  die Arbeit der Kraft  $P$  auf dem Wege  $du$  bezeichnet. Durch Integration erhält man hieraus das Prinzip der Wucht in der erweiterten Form

$$(97) \quad W - W_0 = A,$$

die auch die Massenänderung berücksichtigt, denn hierin ist

$$W_0 = m_0 \frac{v_0^2}{2}, \text{ während } W \text{ den Wert } \frac{m v^2}{2} \text{ hat.}$$

Beispiele:

1. Wenn die Masse  $dm$  mit derselben Geschwindigkeit  $v$  zu  $m$  tritt, wie sie  $m$  schon besitzt, also  $v' = v$  ist, so erhält man aus (96) einfacher

$$m \frac{dv}{dt} = P;$$

es bewegt sich dann die veränderliche Masse  $m$  nach derselben Differentialgleichung, wie die unveränderliche. Der Bewegungsvorgang selbst ist aber selbstredend ein ganz anderer, wenn  $m$  irgendeine Funktion der Zeit oder des Ortes wäre, als wenn es unveränderlich ist.

Wenn jedoch die Kraft  $P$  der Masse proportional, also  $P = m \cdot b$  ist, dann fällt auf beiden Seiten der Differentialgleichung der Faktor  $m$  fort, und die Beschleunigung der Bewegung ist ganz die gleiche, wie bei unveränderlicher Masse. Wenn z. B. ein mit Sand beladener Wagen, aus dem der Sand ausfließt, auf geneigter Ebene unter dem Einfluß seiner Schwere  $mg$  und der Reibungswiderstände herabfährt, so hat man  $P = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$  zu setzen.

Die Beschleunigung dieser Bewegung  $\frac{dv}{dt} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = b$  ist folglich die gleiche, wie bei unveränderlicher Masse, und da sie sich als konstant erweist, so ist die Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte. Das Prinzip der Wucht ergibt nach einfacher Rechnung als Ausdruck für die Arbeit

$$A = \int_{v_0}^v P \, du = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} + W_A,$$

falls  $m = m_0 - kt$  und  $v = \frac{du}{dt}$  gesetzt wird; darin ist

$$W_A = \frac{1}{2} \int v^2 \, dm = \frac{k}{3b} (v^2 - v_0^2)$$

der Stoßverlust.

2. Die Masse  $m$  eines in Schiebung begriffenen Körpers nehme proportional der Zeit zu; es sei also  $m = m_0 + k \cdot t$ . Das hinzutretende Element  $dm$  bewege sich senkrecht zur Geschwindigkeit  $v$  des Körpers, so daß demnach  $v' = 0$  zu setzen ist. Es geht dann (96) über in

$$\frac{d(mv)}{dt} = P$$

und hieraus folgt durch Integration

$$mv = m_0 v_0 + \int_{t_0}^t P \, dt.$$

Bewegt sich z. B. ein Wagen auf horizontaler Ebene, auf den in lotrechter Richtung gleichmäßig (etwa bei einem Regen) Wasser herabströmt, und läßt sich die durch Zapfenreibung u. a. bedingte Widerstandskraft in der Form  $P = -\mu mg$  schreiben, so wird der Antrieb

$$\int_{t_0}^t P \, dt = -\mu g \int_{t_0}^t (m_0 + kt) \, dt = -\frac{\mu g}{2k} [(m_0 + kt)^2 - m_0^2],$$

und folglich

$$v = \left[ m_0 v_0 - \frac{\mu g}{2} (2m_0 + kt)t \right] : (m_0 + kt).$$

Die Zeit  $T$ , nach welcher der Wagen zur Ruhe kommt, ergibt sich hiernach zu

$$T = \frac{m_0}{k} \left[ \sqrt{1 + \frac{2k v_0}{\mu m_0 g}} - 1 \right],$$

während sie sich für  $k = 0$  zu  $v_0 : \mu g$  finden würde.

In ähnlicher Weise lassen sich die Drehungen von Körpern mit veränderlicher Masse behandeln, wie sie uns z. B. bei Seiltrommeln beim Abwickeln von Seilen entgegentreten. Bei Aufstellung der

bezüglichen Differentialgleichung gehen wir in diesem Falle zweckmäßig von der Gleichung (58) in der Gestalt

$$d(J\omega) = M_D dt$$

aus, in der  $J$  das Trägheitsmoment des Körpers und  $\omega$  seine Winkelgeschwindigkeit, sowie  $M_D$  das Moment der auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte bezüglich der Drehachse bezeichnet. Würde sich nur das Trägheitsmoment, nicht aber die Masse des Körpers bei der Drehung ändern, so bliebe die Differentialgleichung der Bewegung (57) unverändert die gleiche, worauf schon auf S. 91 hingewiesen wurde. Anders ist es dagegen, wenn sich die Masse des Körpers durch das Hinzutreten oder Wegfliegen von Massenelementen  $dm$  stetig ändert, denn deren Impulsmoment vermehrt oder vermindert das des Körpers. Dabei kann das hinzutretende Element in tangentialer Richtung noch eine von der Umfangsgeschwindigkeit  $v$  an der betreffenden Stelle endlich verschiedene Größe  $v'$  haben, wodurch ein Stoß entsteht, der mit entsprechendem Verlust verbunden ist. Diesem Vorgang tragen wir nun dadurch Rechnung, daß wir die Änderung des Impulsmomentes

$$d(J\omega) = M_D \cdot dt + r v' dm$$

setzen, wobei  $r$  den Abstand der Stelle des Umfanges von der Drehachse bezeichnet, in der sich  $dm$  mit dem Körper vereinigt. Der entsprechende Stoßverlust ließe sich dann wieder nach (95) berechnen.

Das Prinzip der Wucht läßt sich auch hier in der erweiterten Form (97) als richtig erweisen, denn die Wucht zur Zeit  $t$  ist

$$W = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{1}{2} dm v'^2 = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{1}{2} \omega'^2 dJ,$$

zur Zeit  $t + dt$  dagegen

$$W' = \frac{1}{2} (J + dJ) (\omega + d\omega)^2;$$

sonach beträgt die Änderung der Wucht unter Berücksichtigung des Stoßverlustes  $W_A$

$$\begin{aligned} dW &= W' - W + W_A \\ &= \frac{1}{2} (J + dJ) (\omega + d\omega)^2 - \frac{J\omega^2}{2} - \frac{1}{2} \omega'^2 dJ + \frac{1}{2} dm (v' - v)^2; \end{aligned}$$

hieraus findet sich

$$dW = \omega [d(J\omega) - v' r dm] = M_D dt \cdot \omega = M_D \cdot d\varphi = dA$$

und durch Integration nach  $t$

$$W - W_0 = \frac{J\omega^2}{2} - \frac{J_0 \omega_0^2}{2} = A,$$

was zu beweisen war.

## Beispiel:

Eine Seiltrommel drehe sich um eine horizontale Achse, und zwar infolge der Schwere des Seiles, das sich von der Trommel abwickelt. Hat das zur Zeit  $t$  herabhängende Seilstück die Länge  $z$  und beträgt dessen Schwere  $\mu z g$ , bezeichnet ferner  $S$  die Spannkraft des Seiles an der Stelle, wo das Seil die Trommel verläßt, so ist die Differentialgleichung der Bewegung der Trommel nach (97)

$$d(J\omega) = S r dt - r v dm,$$

denn das Element  $dm = \mu dz$  des sich abwickelnden Seiles verläßt die Trommel mit der Seilgeschwindigkeit  $v$ , und das Impulsmoment  $J\omega$  der Trommel vermindert sich demgemäß um  $r v dm$ . In dieser Gleichung hat man  $\omega = \frac{v}{r}$  und  $J = J_0 + \mu(L - z)r^2$  zu setzen, falls  $J_0$  das Trägheitsmoment der Trommel und  $L$  die Gesamtlänge des Seiles bezeichnet. Für die vertikale Schiebung des herabhängenden Seilstückes besteht weiter zufolge (96) die Gleichung

$$d(\mu z v) = (\mu z g - S) dt + v dm,$$

weil in jedem Augenblick der Impuls der Masse  $\mu z$  um  $v dm$  vergrößert wird. Die Elimination von  $S$  aus beiden Gleichungen führt nach entsprechenden Umformungen zu der Beziehung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\mu g r^2}{J_0 + \mu L r^2} \cdot z = \lambda^2 z,$$

aus der

$$z = A e^{\lambda t} + B e^{-\lambda t}$$

hervorgeht, worin  $A$  und  $B$  die Tangentialkonstanten sind und  $\lambda = \sqrt{\frac{\mu g r^2}{J_0 + \mu L r^2}}$  ist. Besonders zu beachten hat man, daß die Beschleunigung der Seilbewegung sich zu

$$\frac{dv}{dt} = \mu g r^2 z : (J_0 + \mu L r^2)$$

herausstellt, also in voller Übereinstimmung mit der auf S. 93 gegebenen Lösung dieses Problems steht, falls in dieser  $m = 0$  gesetzt wird.

Nehmen wir aber nun weiter an, daß das freie Seilende nach einer gewissen Zeit auf eine ruhende horizontale Platte in der Tiefe  $z = h$  unter der Drehachse aufstößt und dann auf der Platte zur Ruhe kommt, so wird der Vorgang ein anderer, und zwar eine Bewegung mit veränderlicher Masse, denn dann vermindert sich tatsächlich die Masse des bewegten Seiles in jedem Moment um  $dm$  und der Impuls um  $v dm$ ; es geht sonach die zweite Differentialgleichung, in der  $z = h$  zu setzen ist, über in

$$d(\mu h v) = (\mu h g - S) dt,$$

weil die Länge des herabhängenden Seiles dauernd  $= h$  bleibt. Setzen wir in der ersten Differentialgleichung statt  $z$  als Veränderliche hier die Länge  $u$  des zur Zeit  $t$  abgewickelten Seiles ein, also  $dm = \mu du$  und eliminieren aus ihr und der zweiten Gleichung wieder  $S$ , so erhalten wir unter Berücksichtigung des Umstandes, daß  $v = \frac{du}{dt}$ , die Gleichung

$$\frac{d(J\omega)}{dt} + r \mu h \frac{dv}{dt} = \mu r (gh - v^2);$$

in ihr ist  $J = J_0 + \mu(l - u)r^2$  zu setzen, falls  $l$  die Länge des aufgewickelten Seiles bei Beginn des Aufstoßes bezeichnet. Die Ausführung der Differentiation nach  $t$  führt vorstehende Gleichung unter Beachtung der Beziehung  $v = r\omega$  über in

$$-\mu r v^2 + \frac{1}{r} (J + \mu h r^2) \frac{d^2 u}{dt^2} = \mu r (gh - v^2),$$

aus der das Glied  $-\mu r v^2$  auf beiden Seiten fortfällt. Damit ergibt sich als Beschleunigung des Seiles

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{du} = \frac{\mu h g r^2}{J_0 + \mu(l + h - u)r^2},$$

also ein wesentlich anderer Ausdruck, als im vorhergehenden Falle. Setzen wir noch zur Abkürzung  $\frac{J_0}{\mu r^2} + l + h = L$ , dann liefert die Integration dieser Differentialgleichung

$$v^2 = v_0^2 - 2gh \ln \left(1 - \frac{u}{L}\right).$$

Infolge des Seilaufstoßes findet ein Verlust an Wucht statt, der sich zufolge (93) zu

$$\begin{aligned} W_A &= \int \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \mu \int_0^u \left[ v^2 - 2gh \ln \left(1 - \frac{u}{L}\right) \right] du \\ &= \frac{1}{2} \mu v_0^2 u + \mu gh L \left[ \left(1 - \frac{u}{L}\right) \left\{ \ln \left(1 - \frac{u}{L}\right) - 1 \right\} + 1 \right] \end{aligned}$$

berechnet, oder, wenn man den Ausdruck für  $v^2$  benutzt, zu

$$W_A = \frac{1}{2} \mu L v_0^2 - \frac{1}{2} \mu (L - u) v^2 + \mu h g u.$$

Hierin ist  $\frac{1}{2} \mu (L - u) v^2 = W$  die Wucht der bewegten Massen zur Zeit  $t$ ,  $\frac{1}{2} \mu L v_0^2 = W_0$  die für  $t = t_0$  und  $\mu h g u = A$  die Arbeit der Seilsehre in der Zeit  $t - t_0$ ; es besteht sonach das Prinzip der Wucht in der erweiterten Form

$$W - W_0 + W_A = A$$

auch in diesem Falle.

# Lehrbuch der technischen Mechanik.

Von

**Martin Grübler**

Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden.

Erster Band:

Bewegungslehre.

Mit 124 Textfiguren.

Preis M. 8,—.\*

Zweiter Band:

Statik der starren Körper.

Mit 222 Textfiguren.

Preis M. 18,—.\*

---

## Getriebelehre.

Eine Theorie des Zwangslaufes und der ebenen Mechanismen.

Von

**Martin Grübler**

Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden.

Mit 202 Textfiguren.

Preis M. 7,20.\*

---

**Technische Mechanik.** Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen- und Bauingenieure. Von Ed. Autenrieth. Zweite Auflage. Neu bearbeitet von Professor Dr.-Ing. Max Ensslin (Stuttgart). Mit 297 Textfiguren. Unveränderter Neudruck. Gebunden Preis M. 38,—.

---

**Theoretische Mechanik.** Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben. Von Professor A. E. H. Love, M. A., D. Sc., F. R. S. (Oxford.) Autorisierte deutsche Übersetzung der zweiten Auflage von Dr.-Ing. Hans Polster. Mit 88 Textfiguren. Preis M. 48,—; gebunden M. 54,—.

---

**Aufgaben aus der Technischen Mechanik.** Von Professor Ferd. Wittenbauer, Graz.

I. Band: Allgemeiner Teil. 843 Aufgaben nebst Lösungen. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 627 Textfiguren. Unveränderter Neudruck. Gebunden Preis M. 36,—.

II. Band: Festigkeitslehre. 611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 505 Textfiguren. Gebunden Preis M. 12,—.\*

III. Band: Flüssigkeiten und Gase. 586 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, neu bearbeitete Auflage. Mit etwa 396 Textfiguren. In Vorbereitung.

---

**Elastizität und Festigkeit.** Von Professor Dr.-Ing. C. Bach (Stuttgart). Unter Mitwirkung von Professor R. Baumann (Stuttgart). Achte, vermehrte Auflage. Gebunden Preis M. 88,—.

---

\* Hierzu Teuerungszuschläge

**Ingenieur-Mechanik.** Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend graphischer Behandlung. Von Professor Dr.-Ing. Dr. phil. H. Egerer. Erster Band: Graphische Statik starrer Körper. Mit 624 Textabbildungen sowie 238 Beispielen und 145 vollständig gelösten Aufgaben. Preis M. 14,—; gebunden M. 16,—.\*  
Band 2—4 in Vorbereitung. Der zweite und dritte Band behandeln die gesamte Mechanik starrer und nichtstarrer Körper. Der vierte Band bringt die Erweiterung der Festigkeitslehre und Dynamik für Tiefbau-, Maschinen- und Elektroingenieure.

---

**Einführung in die Festigkeitslehre** nebst Aufgaben aus dem Maschinenbau und der Baukonstruktion. Ein Lehrbuch für Maschinenbauschulen und andere technische Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht und für die Praxis. Von Ingenieur Ernst Wehnert. Mit 247 Textfiguren. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Unveränderter Neudruck. Gebunden Preis M. 13,—.\*

---

**Die Lehre von der zusammengesetzten Festigkeit** nebst Aufgaben aus dem Gebiete des Maschinenbaues und der Baukonstruktion. Ein Lehrbuch für Maschinenbauschulen und andere technische Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und für die Praxis. Von Ingenieur Ernst Wehnert. Mit 142 Textfiguren. Unveränderter Neudruck. Gebunden Preis M. 24,—.

---

**Einführung in die Mechanik** mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik. Von Professor Dr. Th. Pöschl (Prag). Mit 102 Textabbildungen. Preis M. 5,60.\*

---

**Technische Schwingungslehre.** Von Dipl.-Ing. Dr. Wilhelm Hort. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit etwa 325 Textabbildungen. In Vorbereitung.

---

**Grundzüge der Kinematik.** Von Dipl.-Ing. A. Christmann (Berlin) und Professor Dr.-Ing. H. Baer (Breslau). Mit 161 Textfiguren. Preis M. 4,80.\*

---

**Repetitorium für den Hochbau.** Für den Gebrauch an Technischen Hochschulen und in der Praxis von Dr.-Ing. e. h. Max Foerster, Geheimer Hofrat, ord. Professor für Bauingenieurwissenschaften an der Technischen Hochschule Dresden.  
Heft 1: Graphostatik und Festigkeitslehre. Mit 146 Textfiguren. Preis M. 7,60.\*  
Heft 2: Abriß der Statik der Hochbaukonstruktionen. Mit 157 Textabbildungen. Preis M. 8,60.  
Heft 3: Grundzüge der Eisenkonstruktionen des Hochbaues. Mit 283 Textabbildungen. Preis M. 18,—.

---

**Technische Thermodynamik.** Von Professor W. Schüle.  
Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Vierte, neu bearbeitete Auflage. Mit 239 Textfiguren und 7 Tafeln. Unter der Presse.  
Zweiter Band: Höhere Thermodynamik mit Einschluß der chemischen Zustandsänderungen nebst ausgewählten Abschnitten aus dem Gesamtgebiet der technischen Anwendungen. Dritte Auflage. Mit 202 Textabbildungen und 4 Tafeln. Gebunden Preis M. 36,—.

---

\* Hierzu Teuerungszuschläge

**Leitfaden der Technischen Wärmemechanik.** Kurzes Lehrbuch der Mechanik der Gase und Dämpfe und der mechanischen Wärmelehre. Von Professor Dipl.-Ing. **W. Schüle**. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 93 Textfiguren und 3 Tafeln. Preis M. 18,—.

---

**Geometrie und Maßbestimmung der Kulissensteuerungen.** Ein Lehrbuch für den Selbstunterricht mit zahlreichen Übungsaufgaben und 20 Tafeln. Von Geh. Hofrat Professor **R. Graßmann** (Karlsruhe i. B.). Preis M. 8,—.\*

---

**Ingenieur-Mathematik.** Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Professor Dr.-Ing. Dr. phil. **H. Egerer**.

**Erster Band:** Niedere Algebra und Analysis — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung — Kegelschnitte. Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. Gebunden Preis M. 12,—.\*

**Zweiter Band:** Differential- und Integralrechnung — Reihen und Gleichungen — Kurvendiskussion — Elemente der Differentialgleichungen — Elemente der Theorie der Flächen- und Raumkurven — Maxima und Minima. Mit 477 Textabbildungen und über 1000 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. Unter der Presse.

**Dritter Band:** Gewöhnliche Differentialgleichungen, Flächen, Raumkurven, partielle Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, Fouriersche Reihen usw. In Vorbereitung.

---

**Die Differentialgleichungen des Ingenieurs.** Darstellung der für die Ingenieurwissenschaften wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen sowie der zu ihrer Lösung dienenden genauen und angenäherten Verfahren einschl. der mechanischen und graphischen Hilfsmittel. Von Dipl.-Ing. Dr. phil. **W. Hort**. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 232 Textfiguren. Unter der Presse.

---

**Lehrbuch der Mathematik.** Für mittlere technische Fachschulen der Maschinenindustrie. Von Professor Dr. **R. Neuendorff**, Kiel. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 262 Textfiguren. Gebunden Preis M. 12,—.\*

---

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** Von Professor Dr. **W. Ludwig** (Dresden).

**Erster Teil:** Das rechtwinklige Zweitafelssystem. Vielflache, Kreis, Zylinder, Kugel. Mit 58 Textabbildungen. Preis M. 8,—.\*

---

**Lehrbuch der darstellenden Geometrie.** In zwei Bänden. Von Professor Dr. **G. Scheffers** (Berlin).

**Erster Band:** Mit 404 Textabbildungen. Preis M. 26,—; gebunden M. 30,60.\*

**Zweiter Band:** Mit 396 Textabbildungen. Preis M. 52,—; gebunden M. 60,—.

---

\* Hierzu Teuerungszuschläge